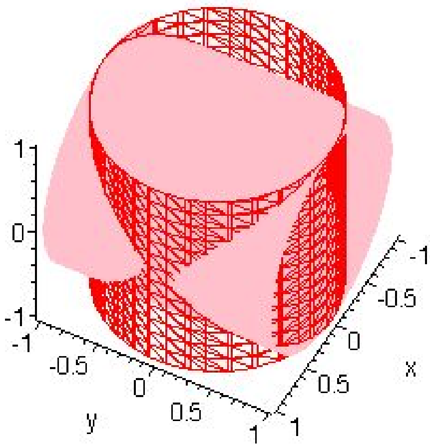
Intersección de Cilindros

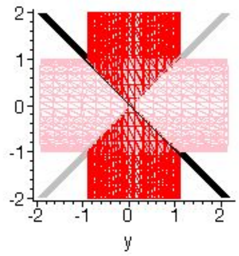
(del mismo radio)

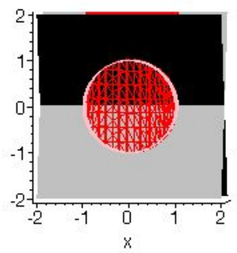
Consideremos los cilindros

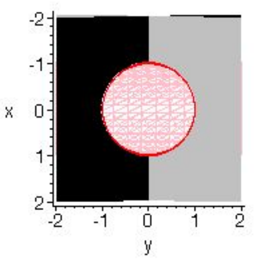
$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \qquad , \qquad C_2 : x^2 + z^2 = 1$$

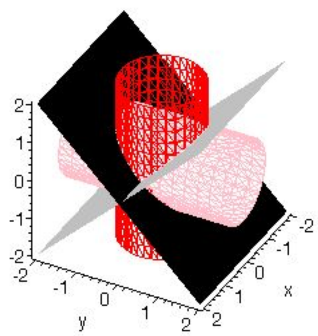


Otras vistas de esta intersección









Si un punto (x_0, y_0, z_0) está en la intersección, en particular, deberá cumplir

$$x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + z_0^2$$

con lo cual

$$z_0 = y_0 \quad \text{o} \quad z_0 = -y_0$$

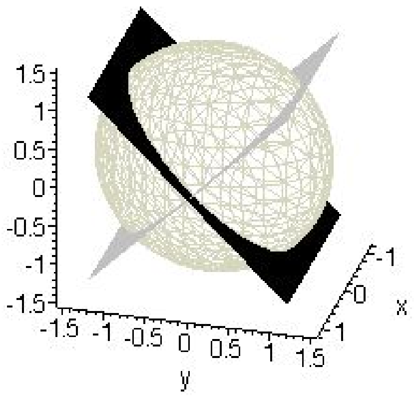
es decir, (x_0, y_0, z_0) debe estar en alguno de estos planos

$$\pi_1 : y - z = 0 \qquad , \qquad \pi_2 : y + z = 0$$

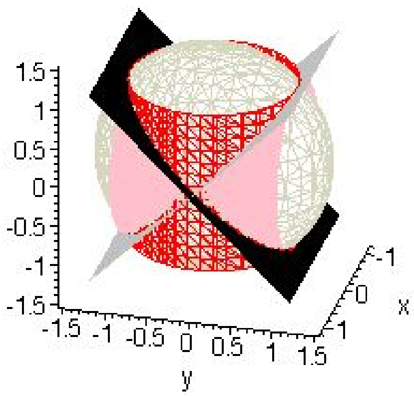
Por otro lado, si sumamos miembro a miembro ambas ecuaciones, resulta que

$$2x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2$$

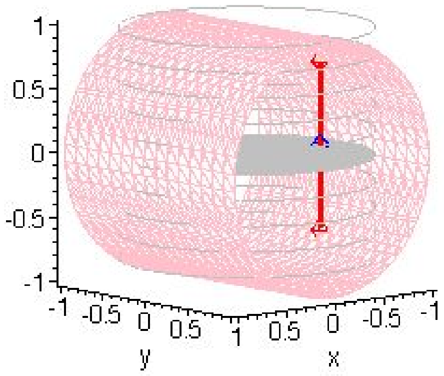
es decir, (x_0, y_0, z_0) está en la intersección del elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con los planos antes mencionados



Si incluimos todo en un gráfico,



Para calcular el volumen de la región W encerrada por ambos cilindros conviene tener en cuenta el siguiente gráfico



La proyección sobre el plano xy de la frontera de W es el círculo (gris en el dibujo) de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad z = 0$$

Para cada punto $(x_1, y_1, 0)$ [1] de este círculo, la tercer coordenada de un punto (x_1, y_1, z_1) –interior a la región W– varía sobre el segmento rojo de extremos [2]

$$(x_1, y_1, -\sqrt{1 - x_1^2}) \qquad \text{y} \qquad (x_1, y_1, \sqrt{1 - x_1^2})$$

ya que estos puntos están sobre el cilindro (horizontal) $x^2 + z^2 = 1$. Por lo tanto, el volumen de W viene dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(W) &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx = 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

[1] azul en el dibujo
[2] rojos en el dibujo