Cálculo de Algunos Límites

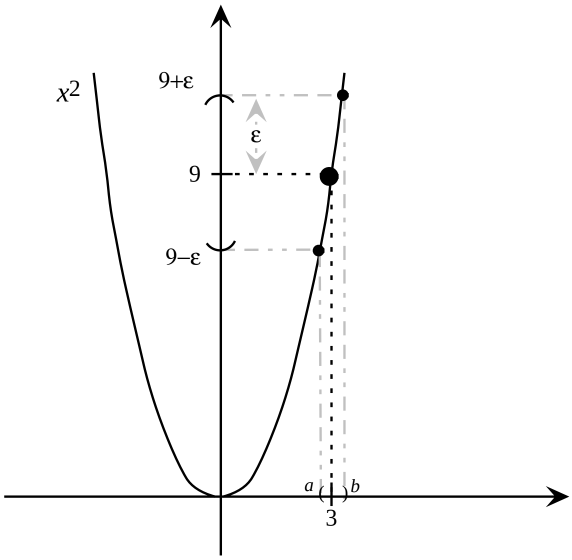
1. *Demostrar usando sólo la definición que* $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$

Para cada $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ –que únicamente dependa del ε dado– de modo que

$$0 < |x - 3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Se trata de determinar a qué distancia debe estar x de 3 para poder asegurar que x^2 va a estar a una distancia menor que el ε dado del número 9.

Gráficamente, esto lo podríamos resolver así



Es claro que todos los x que están entre a y b –al elevarlos al cuadrado– van a estar entre $9 - \varepsilon$ y $9 + \varepsilon$. Entonces, si tomamos un δ más chico que $3 - a$ y también más chico que $b - 3$ resultará que $(3 - \delta, 3 + \delta) \subset (a, b)$. En consecuencia, todos los $x \in (3 - \delta, 3 + \delta)$ satisfarán $x^2 \in (9 - \varepsilon, 9 + \varepsilon)$. Esto lo podemos expresar así

$$|x - 3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

De esta forma hemos hallado –al menos gráficamente– la relación que debe haber entre ε y δ. Pero no siempre la función es tan simple como en este caso y probablemente sea muy complicado graficarla.

Una forma de lograr esto *analíticamente* es reescribir la expresión $|x^2 - 9|$ como un producto donde uno de los factores sea $|x - 3|$, que es precisamente lo que necesitamos saber cuán chico debe ser para lograr que $|x^2 - 9|$ sea menor que ε.

Si factorizamos $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ logramos nuestro objetivo: $|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|$.

Ahora bien, como el δ que buscamos no puede depender más que de ε, nuestro próximo paso será encontrar un número —independiente de x— que pueda *reemplazar* a $|x + 3|$.

Para lograr esto recordemos que nuestro propósito es ver que $|x^2 - 9|$ es menor que ε, entonces si consiguiéramos una expresión ***un poco más grande*** que $|x^2 - 9|$ a la que pudiéramos hacer menor que ε nuestro objetivo estaría logrado. Lo que se necesita entonces es encontrar un número, llamémoslo M, tal que

$$|x+3| < M$$

Si no le imponemos ninguna restricción a x, esto no va a ser posible ya que $|x+3|$ puede tomar valores arbitrariamente grandes. Para resolver este inconveniente pensamos lo siguiente: como nos interesa estar ***cerca*** de 3, una *restricción razonable* sobre x sería

$$2 < x < 4$$

que es lo mismo que decir:

$$|x-3| < 1$$

(*cualquier restricción de la forma* $|x-3| < d$ *—con* $d > 0$*— será* ***razonable*** *cuando* $x \to 3$)

Con esta restricción, podemos afirmar que $2+3 < x+3 < 4+3$, es decir

$$5 < x+3 < 7$$

Por lo tanto,

$$|x+3| \underset{\substack{\uparrow \\ x+3>5>0}}{=} x+3 < 7$$

De esta forma, gracias a la restricción impuesta a x: $|x-3| < 1$, logramos el M que buscábamos. [1] Entonces, podemos decir

$$|x^2-9| = |x-3||x+3| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |x-3|<1}}{<} 7|x-3|$$

Y a partir de aquí es clara la vinculación entre ε y δ: para que

$$|x^2-9| < \varepsilon$$

bastaría tomar

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Resumiendo, para poder llegar a que $|x^2-9| < \varepsilon$ impusimos las siguientes condiciones:

$$|x-3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Esto nos dice que si tomamos

$$\delta = \text{mínimo entre } 1 \text{ y } \frac{\varepsilon}{7}$$

podremos afirmar que

$$|x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2-9| < \varepsilon$$

y por lo tanto también que

$$0 < |x-3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2-9| < \varepsilon$$

que era justamente lo que pretendíamos en un principio.

Comentario: desde luego que no se pretende que hagan una exposición tan detallada al demostrar un límite por definición. Alcanza con lo siguiente:

[1] a este proceso de encontrar M lo solemos llamar *acotar* la expresión $|x+3|$

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|$$

Ahora bien, como $x \to 3$ una restricción admisible puede ser

$$|x - 3| < 1$$

En ese caso,

$$2 < x < 4 \qquad \text{con lo cual} \qquad 5 < x + 3 < 7$$

En particular, podemos asegurar que $x + 3 > 0$ y en consecuencia

$$|x + 3| = x + 3 < 7$$

Entonces,

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| \underset{\text{si } |x-3|<1}{\underset{\uparrow}{<}} 7|x - 3|$$

Entonces, si agregamos la condición

$$7|x - 3| < \varepsilon$$

es decir,

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$$

logramos lo que queríamos: $|x^2 - 9| < \varepsilon$. Esto nos dice que alcanza con tomar

$$\delta = \text{mín}\{1, \tfrac{\varepsilon}{7}\}$$

para garantizar que

$$0 < |x - 3| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

2. *Demostrar usando sólo la definición que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,9)} xy = -9$

Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x + 1| < \delta \quad , \quad 0 < |y - 9| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |xy + 9| < \varepsilon$$

Razonando como en el ejercicio anterior, la idea será reescribir $|xy + 9|$ de modo tal que aparezcan las dos expresiones que podemos achicar cuando $(x, y) \to (-1, 9)$; es decir,

$$|x + 1| \qquad \text{y} \qquad |y - 9|$$

Una forma de lograrlo es restar —y sumar para que no altere— por ejemplo: '$9x$' [2]

[2] se puede trabajar de igual forma si sumamos y restamos: $(-1)y$

Entonces,

$$|xy+9| = |xy-9x+9x+9| = |x(y-9)+9(x+1)| \leqslant |x||y-9| + 9|x+1| \tag{1}$$

En el primer sumando se presenta una situación similar a la que tuvimos con $|x+3|$ en el ejercicio anterior. Luego, recordando que ahora $x \to -1$, una restricción *razonable* es:

$$|x+1| < 1$$

Considerando esta condición podemos asegurar que

$$-1 < x+1 < 1$$

o, equivalentemente,

$$-2 < x < 0$$

Luego,

$$|x| \underset{\substack{\uparrow \\ x<0}}{=} -x \underset{\substack{\uparrow \\ -2<x}}{<} 2$$

Volviendo a (1),

$$|xy+9| \leqslant |x||y-9| + 9|x+1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |x+1|<1}}{<} 2|y-9| + 9|x+1|$$

A partir de aquí queda claro que bastaría que se cumpliera

$$2|y-9| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad 9|x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

es decir,

$$|y-9| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{y} \qquad |x+1| < \frac{\varepsilon}{18}$$

(*dos condiciones razonables dado que $y \to 9$ y $x \to -1$*)

para asegurar que

$$|xy+9| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Resumiendo, para poder llegar a $|xy+9| < \varepsilon$ impusimos las siguientes condiciones

$$|x+1| < 1 \quad , \quad |y-9| < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad |x+1| < \frac{\varepsilon}{18}$$

De modo que si tomamos

$$\delta = \text{mín}\{1, \tfrac{\varepsilon}{4}, \tfrac{\varepsilon}{18}\} = \text{mín}\{1, \tfrac{\varepsilon}{18}\}$$

podemos afirmar que

$$0 < |x+1| < \delta \quad , \quad 0 < |y-9| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |xy+9| < \varepsilon$$

como queríamos.

Comentario: nuevamente, no se pretende que hagan una exposición tan detallada al demostrar un límite por definición. Es suficiente poner lo siguiente:

$$|xy+9| = |xy-9x+9x+9| = |x(y-9)+9(x+1)| \leqslant |x||y-9|+9|x+1|$$

Como $x \to -1$ una restricción admisible puede ser

$$|x+1| < 1$$

En tal caso,

$$-1 < x+1 < 1 \qquad \text{con lo cual} \qquad -2 < x < 0$$

y en consecuencia

$$|x| \underset{\substack{\uparrow \\ x<0}}{=} -x \underset{\substack{\uparrow \\ -2<x}}{<} 2$$

Entonces,

$$|xy+9| =\leqslant |x||y-9|+9|x+1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |x+1|<1}}{<} 2|y-9|+9|x+1|$$

Si agregamos las condiciones

$$2|y-9| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad 9|x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

que es lo mismo que decir,

$$|y-9| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{y} \qquad |x+1| < \frac{\varepsilon}{18}$$

logramos que: $|xy+9| < \varepsilon$. Esto nos dice que alcanza con tomar

$$\delta = \text{mín}\{1, \tfrac{\varepsilon}{4}, \tfrac{\varepsilon}{18}\} = \text{mín}\{1, \tfrac{\varepsilon}{18}\}$$

para garantizar que

$$\left.\begin{array}{r} 0 < |x+1| < \delta \\ 0 < |y-9| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |xy+9| < \varepsilon$$

Importante

Cuando se resuelve este tipo de ejercicios hay que tener mucho cuidado con las desigualdades.
Un error muy común es olvidar la siguiente propiedad

$$a < b \quad y \quad \mathbf{c < 0} \qquad \Longrightarrow \qquad ac \mathbf{>} bc$$

Y entonces aparecen conclusiones ***erróneas****, como sería el caso de afirmar que*

$$\left.\begin{array}{r} 0 < x < y < z \\ a < b < c \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad ax < by < cz$$

sin preocuparse del signo de a , b y c.

Por ejemplo,

$$1 < 3 < 7 \quad y \quad -6 < -4 < -2$$

pero

$$1(-6) < 3(-4) < 7(-2)$$

es claramente ***FALSO****.*

Lo correcto, si se tienen las desigualdades

$$0 < x < y < z \quad y \quad a < b < c \mathbf{< 0}$$

—y uno quiere multiplicarlas miembro a miembro— *es multiplicar por* -1 *la segunda cadena de desigualdades, con lo cual se tiene ahora*

$$0 < x < y < z \quad y \quad \mathbf{0 <} -c < -b < -a$$

de donde ***sí*** *se concluye –por ser todos los números (de la segunda cadena) positivos– que*

$$x(-c) < y(-b) < z(-a)$$

y finalmente multiplicando por -1 *llegamos a*

$$az < by < cx$$

Otro error muy común es decir que si dos números satisfacen determinada desigualdad, entonces sus respectivos módulos también. Eso, en general, es ***FALSO****. Consideremos, por ejemplo*

$$-3 < -1 \quad \text{es cierto, pero} \quad |-3| < |-1| \quad \text{es } \textbf{FALSO}$$

La función módulo *es decreciente en* $\mathbb{R}_{<0}$ *y creciente en* $\mathbb{R}_{>0}$*; es decir,* ***no*** *es monótona en* $\mathbb{R}$*.*

3. *Probar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,5)} (x^2 - y^2 + \frac{1}{x}) = -23$

¿Cómo se llegó a la conclusión? Seguramente se tuvo en cuenta que

$$x^2 \xrightarrow[x\to 1]{} 1 \quad , \quad y^2 \xrightarrow[y\to 5]{} 25 \quad , \quad \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 1]{} 1 \tag{2}$$

Esto sugiere agrupar de la siguiente manera

$$|x^2 - y^2 + \tfrac{1}{x} - (-23)| = |x^2 - y^2 + \tfrac{1}{x} - (1 - 25 + 1)| = |(x^2 - 1) - (y^2 - 25) + (\tfrac{1}{x} - 1)|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cada paréntisis se achica} \\ \text{cuando } (x,y)\to(1,5)}}{\leqslant} \quad |x^2 - 1| + |y^2 - 25| + |\tfrac{1}{x} - 1|$$

$$= \underbrace{|x-1|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\underbrace{|x+1|}_{\substack{\downarrow \\ 2}} + \underbrace{|y-5|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\underbrace{|y+5|}_{\substack{\downarrow \\ 10}} + \underbrace{|x-1|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\underbrace{\tfrac{1}{|x|}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \xrightarrow[(x,y)\to(1,5)]{} 0$$

Nota: también se considera probado si se usan las propiedades del límite de una suma y de un producto y los resultados conocidos (2). Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(1,5)} (x^2 - y^2 + \tfrac{1}{x}) &= \lim_{(x,y)\to(1,5)} x^2 - \lim_{(x,y)\to(1,5)} y^2 + \lim_{(x,y)\to(1,5)} \tfrac{1}{x} \\ &= \lim_{x\to 1} x^2 - \lim_{y\to 5} y^2 + \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{x} \\ &= 1 - 25 + 1 = -23 \end{aligned}$$

4. *Analizar la existencia de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

Notemos que la función $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ no está definida sobre los ejes (luego, no nos vamos a poder acercar al origen por esas direcciones).

Además sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{y} = \infty$$

Pero como tanto x como y pueden ser positivos o negativos cerca del origen, no podemos —*con esta única información*— decidir qué pasa con la suma.

Aunque sí sería razonable *sospechar* que podría no existir este límite. Analicemos un poco más detalladamente la situación

- si x e y tienen el mismo signo (i.e., (x, y) está en el primer o tercer cuadrante) es claro que

$$|f(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \infty$$

- pero las cosas no están tan claras si tienen signos distintos. Es más, si tomamos $y = -x$

$$f(x,-x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Parece claro entonces que este límite no existe. Una vez descubierto este hecho, una manera simple de justificar que no existe es la siguiente

Sea $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Consideremos las curvas

$$\alpha(t) = (t,t) \qquad \text{y} \qquad \beta(t) = (t,-t)$$

Es claro que ambas tienden a $(0,0)$ cuando $t \to 0$ y

$$f(\alpha(t)) = f(t,t) = 2\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty \qquad , \qquad f(\beta(t)) = f(t,-t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Siendo estos límites distintos, podemos asegurar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ no existe.

Nota: si alguien hubiera preferido usar coordenadas polares (no recomendable en este caso pues no facilita el análisis) un posible tratamiento sería

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{con:} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi \quad \text{y} \quad \theta \neq 0, \tfrac{\pi}{2}, \pi, 3\tfrac{\pi}{2}$$

pues esos ángulos excluidos corresponden a los ejes sobre los que la función no está definida.

Llamemos

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{1}{r\cos\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta}{r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}$$

el hecho que la expresión quede dependiendo del ángulo θ nos *sugiere* que puede no haber límite. Para comprobarlo debemos encontrar dos curvas que se acerquen al origen cuando $r \to 0$ que produzcan límites distintos al componerlas con g.

Notemos que si tomamos un valor fijo de θ que no anule el numerador (el denominador no se puede anular por las restricciones sobre θ) el cociente se va a ir a ∞ pero si el valor de θ anula el numerador, claramente el cociente es nulo y por lo tanto tiende a cero.

Esto nos sugiere considerar estas curvas (dadas en coordenadas polares)

$$a(r) = (r, \tfrac{\pi}{4}) \xrightarrow[r\to 0]{} (0,0) \qquad \text{y} \qquad b(r) = (r, 3\tfrac{\pi}{4}) \xrightarrow[r\to 0]{} (0,0)$$

Resulta

$$g(a(r)) = \frac{1}{r}\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}/2)^2} = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty$$
$$g(b(r)) = \frac{1}{r}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\sqrt{2}/2)^2} = 0 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Ahora sí podemos afirmar que el límite no existe.

5. *Analizar la existencia de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2+y^2}$

Sea $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2+y^2}$. Como sabemos que cuando $\varphi(x,y) \to 0:\quad \dfrac{\operatorname{sen}(\varphi(x,y))}{\varphi(x,y)} \longrightarrow 1$ se nos podría ocurrir hacer lo siguiente

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2y}\,\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

con lo cual tendríamos resuelto el cálculo. Pero ... el dominio del segundo miembro no es el mismo que el de f. El único punto donde no está definida f es el origen, mientras que la otra función no está definida sobre los ejes.

Si bien este inconveniente se podría eludir considerando la función

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2y}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

y comprobando que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, es mucho más simple hacer lo siguiente

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\operatorname{sen}(x^2y)|}{x^2+y^2} \underset{|\operatorname{sen} t|\leqslant|t|}{\overset{\leqslant}{\uparrow}} \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = |y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

debido a que el primer factor —$|y|$— tiende a cero y el segundo —$\frac{x^2}{x^2+y^2}$— está acotado (entre 0 y 1).

6. *Probar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi-y)+\cos x}{x^2+y^2} = \dfrac{8}{\pi^2}$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(\pi-y) \xrightarrow[y\to\frac{\pi}{2}]{} \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad , \quad \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{y} \quad x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})]{} \frac{\pi^2}{4} \neq 0$$

resulta, a partir de las propiedades del límite,

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - y) + \cos x}{x^2 + y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})]{} \frac{1+1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{8}{\pi^2}$$

Importante

- *Si no se pide probar un límite por definición, se pueden usar los resultados probados en clase.*
- *Los límites de funciones de una variable se pueden calcular usando los resultados conocidos (por ejemplo: la regla de L'Hospital si correspondiera).*
- *Los límites especiales, tales como*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

por citar dos ejemplos, tampoco necesitan ser probados nuevamente ya que es un tema dado en Matemática I.