UCA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA

CALCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre 2008

Trabajo Práctico 1

Vectores

Producto escalar y vectorial

Rectas y planos

Cónicas y Cuádricas

Sistemas de coordenadas

DEFINICIONES Y RESULTADOS

Base de un espacio vectorial

Si V es un espacio vectorial real de dimensión n, se dice que el conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ es una ***base*** de V si

- $\diamond$ todo $\mathbf{v} \in V$ se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

  la $n-$upla $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ representa las ***coordenadas del vector*** $\mathbf{v}$ ***en la base*** B.

- $\diamond$ si $(a_1, \dots, a_n)$ y $(b_1, \dots, b_n)$ son las coordenadas de un mismo vector $\mathbf{v}$ en la base B, entonces $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\{(1, 0, \dots, 0)\ ,\ (0, 1, 0, \dots, 0)\ , \dots\ ,\ (0, \dots, 0, 1)\}$$

En el caso de $\mathbb{R}^3$, denotaremos

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Producto escalar

Dados $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se define el ***producto escalar entre* u *y* v** como el número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Norma de un vector

Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con coordenadas $(v_1, \dots, v_n)$ en la base canónica, llamamos ***norma de*** $\mathbf{v}$ al número

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Propiedades

- $\triangleright$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + \cdots + u_n^2 = ||\mathbf{u}||^2$
- $\triangleright$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\alpha$ $\qquad$ (α = ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$)
- $\triangleright$ $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||$ $\quad$ *Desigualdad de Schwarz*

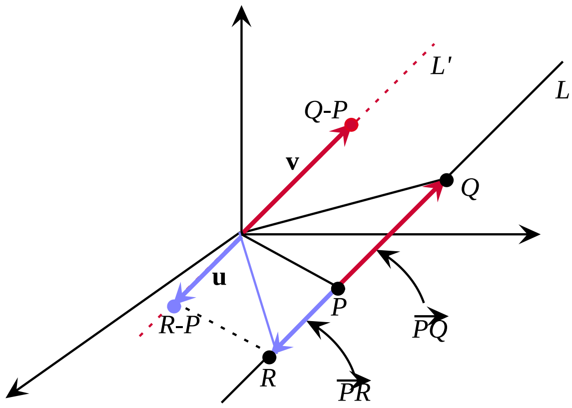
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales
- $\|a.\mathbf{u}\| = |a|\, \|\mathbf{u}\| \qquad (a \in \mathbb{R})$
- $|u_i| \leqslant \|\mathbf{u}\| \leqslant |u_1| + \cdots + |u_n|$ para todo $i = 1, \ldots, n$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
- $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leqslant |\, \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|\, | \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

Rectas y planos en el espacio

Sean $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$ puntos de $\mathbb{R}^3$. La recta L que pasa por P y Q se puede expresar en la forma

$$L : (x, y, z) = P + t(Q - P) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

El vector $\mathbf{v}$ —de origen $\mathbf{0}$ y extremo $Q - P = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$— es la traslación al origen del vector $\overrightarrow{PQ}$ y da la dirección de la recta.



$\mathbf{u} = t\mathbf{v}$

R=P+t(Q-P)

Sean $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$ y $R = (x_2, y_2, z_2)$ tres puntos de $\mathbb{R}^3$ no colineales. El plano π que pasa por P , Q y R puede expresarse en la forma

$$\pi : (x, y, z) = P + s(Q - P) + t(R - P) \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ es un vector ortogonal a los vectores $Q - P$ y $R - P$ [1] , el plano π puede representarse también mediante la ecuación

$$\pi : \mathbf{u} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

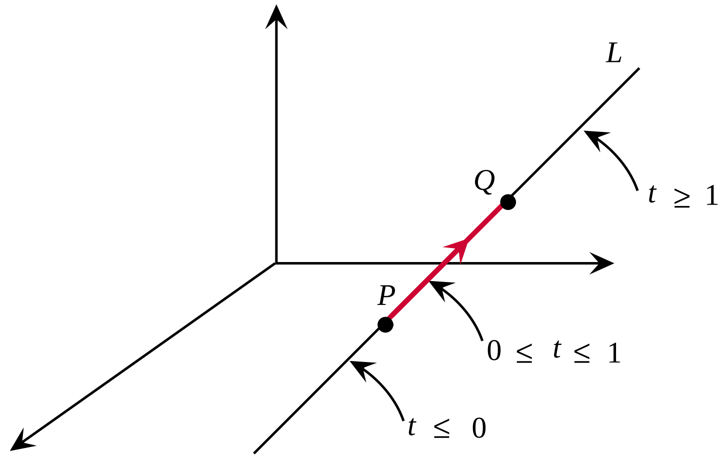
[1] por ejemplo, $\mathbf{u} = (Q - P) \times (R - P)$

Segmento que une dos puntos del espacio

Dados los puntos $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $Q = (x_1, y_1, z_1)$, el ***segmento con origen*** P y ***extremo*** Q es el conjunto

$$[P, Q] = \{R \in L \ / \ d(P, R), d(Q, R) \leqslant d(P, Q)\}$$

donde L es la recta que une ambos puntos.



R=P+t(Q-P)

Es decir, son los puntos de L que están *entre* P y Q.

Consideremos el caso interesante: $P \neq Q$ [2]. Dado cualquier $R \in [P, Q]$, como en particular $R \in L$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$R = P + t(Q - P)$$

Vamos a tratar de encontrar una condición sobre el parámetro t que nos permita identificar a los puntos de la recta L que están en $[P, Q]$. Para ello consideremos las distancias de R a los extremos

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \|R - P\| = \|t(Q - P)\| \\ &= | \ t \ | \ \|Q - P\| \\ d(Q, R) &= \|P + t(Q - P) - Q\| = \|(t - 1)(Q - P)\| \\ &= | \ t - 1 \ | \ \|Q - P\| \end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para que los puntos de L estén *entre* P y Q es que estas dos distancias sean menores o iguales que $d(P, Q) = \|Q - P\|$. Resulta entonces que los valores de t deben satisfacer

$$| \ t \ | \ \|Q - P\| \leqslant \|Q - P\| \quad \text{y} \quad | \ t - 1 \ | \ \|Q - P\| \leqslant \|Q - P\|$$

lo que, simplificando el número positivo $\|Q - P\|$, equivale a que

$$| \ t \ | \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad | \ t - 1 \ | \leqslant 1$$

[2] si $P = Q$, el segmento se reduce a un punto

es decir,

$$-1 \leqslant t \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leqslant t-1 \leqslant 1$$

que es lo mismo que decir

$$-1 \leqslant t \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

de modo que para que R esté en el segmento es necesario y suficiente que satisfaga

$$R = P + t(Q-P) \quad \text{con} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Finalmente, podemos afirmar que

$$[P, Q] = \{(1-t)P + tQ \ / \ 0 \leqslant t \leqslant 1\} = \{P + t(Q-P) \ / \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

El punto medio de este segmento es el que verifica

$$M = P + t(Q-P) \ (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad \text{y} \qquad d(P, M) = d(Q, M)$$

luego,

$$td(P, Q) = (1-t)d(P, Q)$$

por ser $P \neq Q$ resulta $d(P, Q) > 0$ y entonces la igualdad anterior implica

$$t = 1 - t$$

es decir,

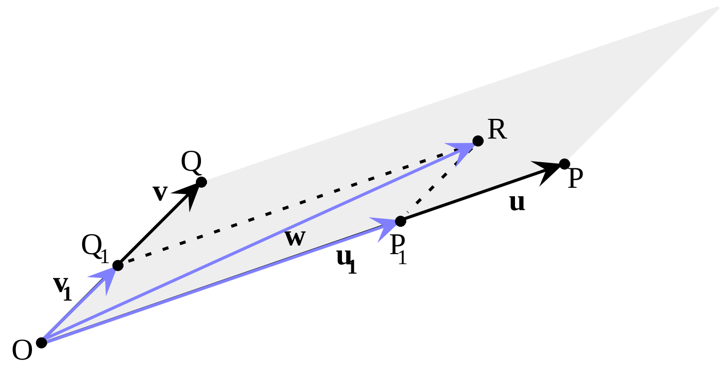
$$t = \frac{1}{2}$$

y en consecuencia

$$M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$

Paralelogramo determinado por dos vectores independientes

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores linealmente independientes. Consideremos el paralelogramo $\mathcal{P}$ que los tiene por dos de sus lados y sea R uno de sus puntos



Es claro que $\mathbf{w}$ satisface: $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$ y también que los extremos P_1 de $\mathbf{u}_1$ y Q_1 de $\mathbf{v}_1$ están, respectivamente, sobre los segmentos $[O, P]$ y $[O, Q]$. Por lo visto antes podemos afirmar que existen $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ tales que

$$P_1 = O + t(P - O) \qquad , \qquad Q_1 = O + s(Q - O)$$

lo que, dicho en términos de vectores se escribe

$$\mathbf{w} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

o bien, recordando que $\mathbf{w}$ —como vector con origen $\mathbf{0}$— tiene extremo $R - O$,

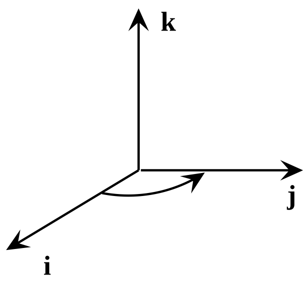
$$R - O = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

Deducimos de aquí que el paralelogramo $\mathcal{P}$ se puede expresar en la forma

$$\mathcal{P} = \{O + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \ / \ 0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$$

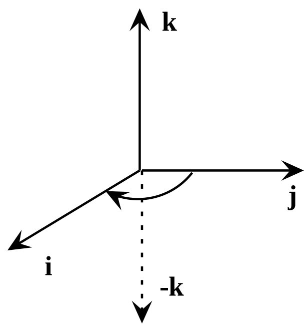
Orientación de bases

Consideremos la base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y la base $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$



{i , j , k}

si ubicamos la mano derecha de modo que el índice se curve de **i** *a* **j** *, el pulgar apuntará hacia arriba; es decir, en la misma dirección que* **k**



{j , i , k}

si ubicamos la mano derecha de modo que el índice se curve de **j** *a* **i** *, el pulgar apuntará hacia abajo; es decir, en la misma dirección que* **-k**

Al procedimiento descripto en el gráfico anterior se lo suele denominar ***regla de la mano derecha***. Cabe hacer notar que esto mismo se puede realizar con cualquier base de $\mathbb{R}^3$. Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$, decimos que ***tiene la misma orientación que la base canónica*** cuando aplicándole la regla de la mano derecha resulta que, al curvar el índice de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, el pulgar apunta hacia el mismo lado que $\mathbf{w}$. Si por el contrario apunta hacia el lado contrario, decimos que tiene la orientación opuesta.

Producto vectorial

Dados $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, el ***producto vectorial*** entre ellos es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} \;-\; \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} \;+\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Este vector puede representarse en la forma

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

donde "det" indica un determinante *formal* dado que **i** , **j** , **k** no son números.

Propiedades

▹ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

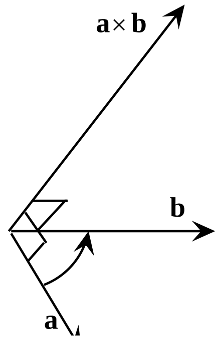
▹ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos

▹ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$

▹ $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\, ||\mathbf{b}|| \operatorname{sen} \alpha$ (α = ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$)

▹ $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$ = área del paralelogramo de lados $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

▹ Dados $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ independientes, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ que tiene la misma orientación que la base canónica.



Producto mixto

Dados los vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, el ***producto mixto*** entre estos vectores es el número

$$(\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

▹ $(\mathbf{abc}) = (\mathbf{cab}) = (\mathbf{bca})$

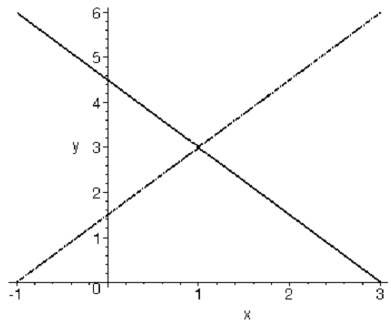
▹ Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son coplanares, entonces

$$|(\mathbf{abc})| = \text{ volumen del paralelogramo determinado por } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$$

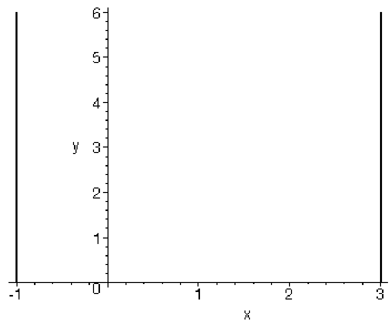
▹ $(\mathbf{abc}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son coplanares

▹ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$

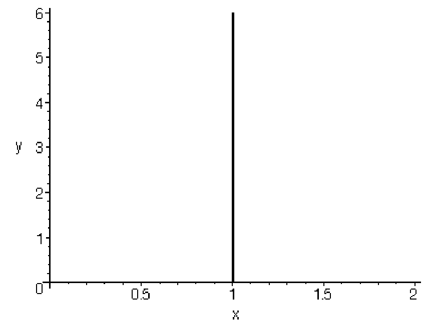
Cónicas



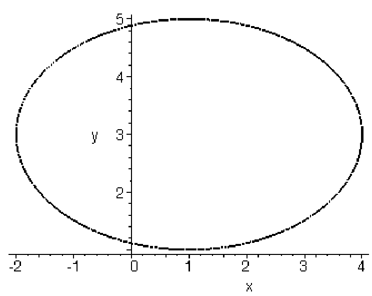
1. DOS RECTAS NO PARALELAS : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 0$



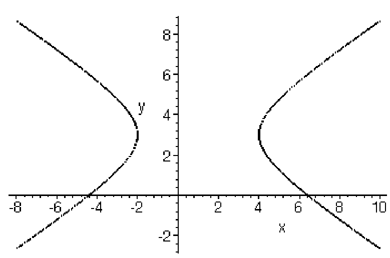
2. DOS RECTAS PARALELAS : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$



3. RECTA DOBLE : $(x-\alpha)^2 = 0$

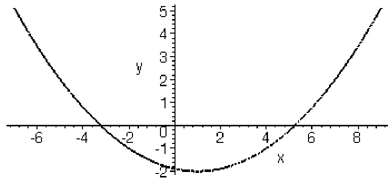


4. CIRCUNFERENCIA : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$



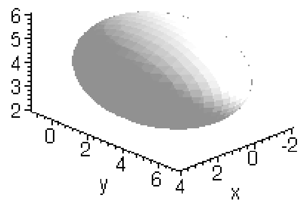
5. HIPÉRBOLA : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

6. Parábola : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - (y-\beta) = 0$

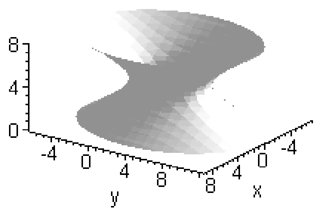


Cuádricas

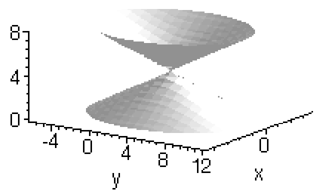
1. Elipsoide : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} + \dfrac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$



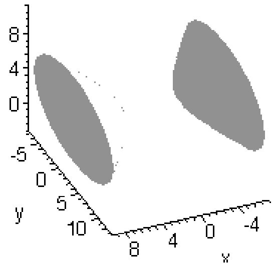
2. Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - \dfrac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$



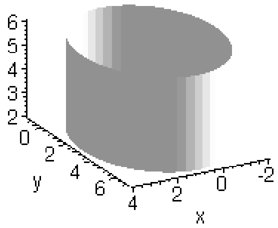
3. Cono : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - \dfrac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 0$



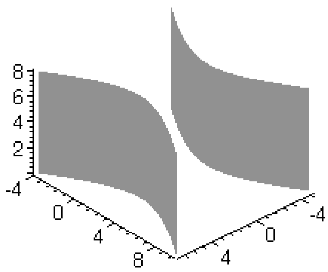
4. Hiperboloide de dos hojas : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - \dfrac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$



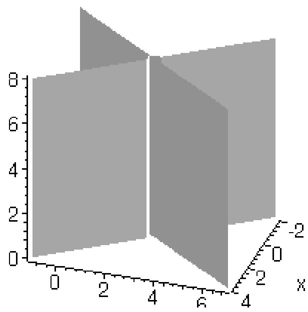
5. Cilindro elíptico : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$



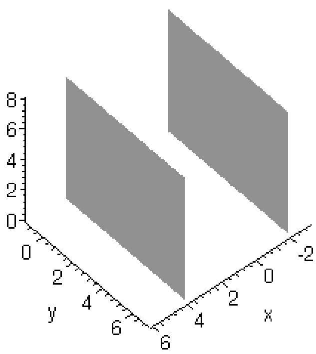
6. Cilindro hiperbólico : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$



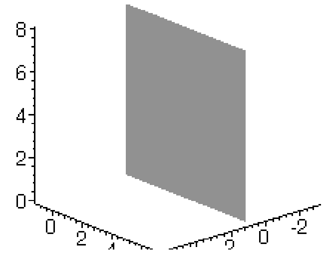
7. Dos planos no paralelos : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 0$



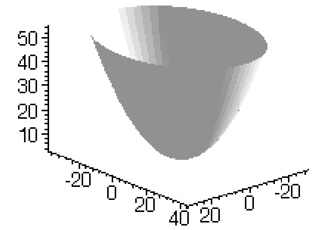
8. Dos planos paralelos : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$



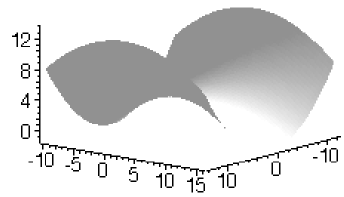
9. PLANO DOBLE : $(x-\alpha)^2 = 0$



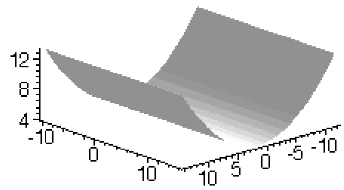
10. PARABOLOIDE ELÍPTICO : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - (z-\gamma) = 0$



11. PARABOLOIDE HIPERBÓLICO : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - (z-\gamma) = 0$



12. CILINDRO PARABÓLICO : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - (z-\gamma) = 0$



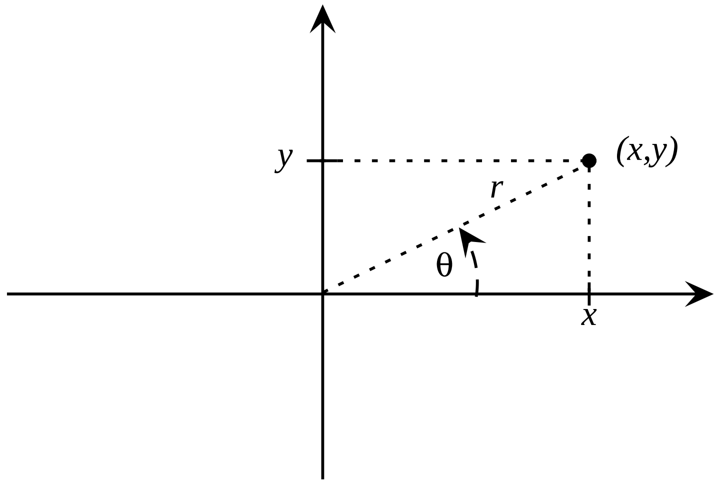
Coordenadas polares

Las ***coordenadas polares*** (r, θ) de un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ están definidas por

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

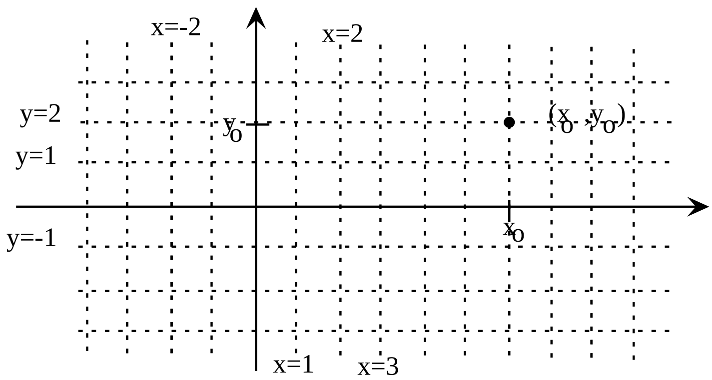
donde

$$r > 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$



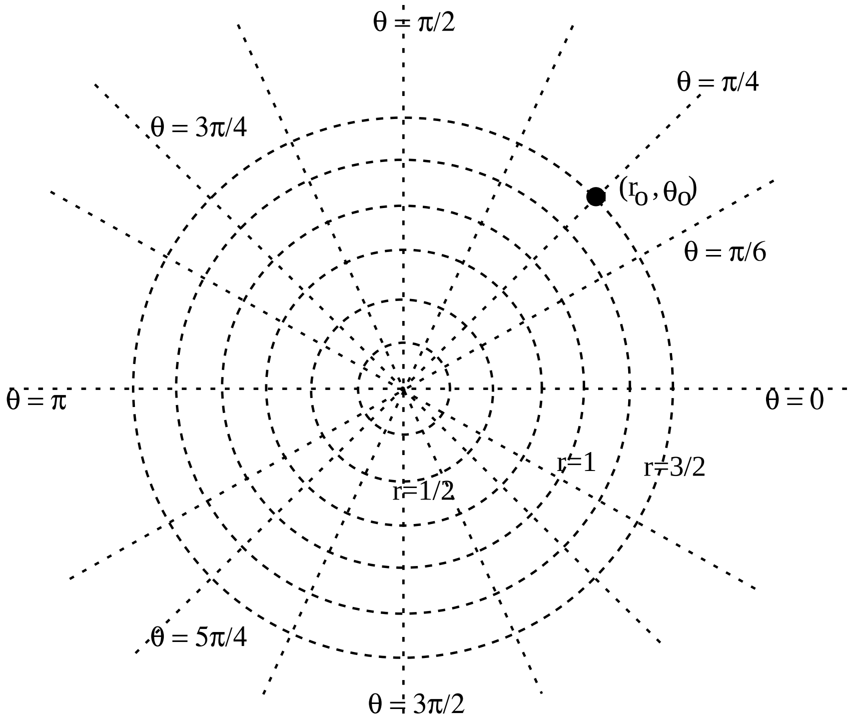
Graficar usando coordenadas polares

Cuando debemos representar gráficamente una curva dada en coordenadas cartesianas utilizamos el siguiente sistema de ejes



que nos permite ubicar rápidamente un punto de coordenadas cartesianas (x_0, y_0). Si, en cambio, la ecuación de la curva viene dada en forma polar, ubicar en aquel sistema el punto de coordenadas (r_0, θ_0) ya no es tan inmediato.

Conviene en tal caso utilizar este otro sistema



donde las semirrectas representan a los distintos valores de los ángulos y las circunferencias a los de los radios.

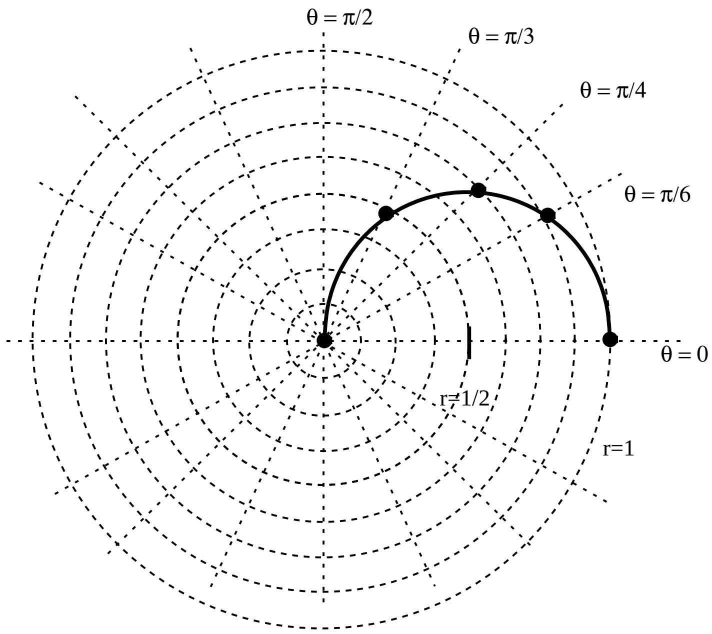
Ejemplo

Grafiquemos la curva dada por la ecuación en coordenadas polares

$$r = \cos\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{\pi}{2})$$

Comencemos ubicando en el sistema antes definido algunos puntos de esta curva

$$(1, 0) \quad , \quad (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{6}) \quad , \quad (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\pi}{4}) \quad , \quad (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{3}) \quad , \quad (0, \tfrac{\pi}{2})$$



Si recordamos que la función *coseno* es monótona decreciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ concluimos que el radio de esta curva también va decreciendo conforme nos movemos entre $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Esto nos garantiza que si unimos los puntos que ubicamos antes por una curva, como se muestra en el gráfico, vamos a obtener una aproximación razonable del verdadero gráfico de la curva dada. Lógicamente, cuantos más puntos consideremos mejor será la aproximación.

Nota: en este caso es fácil reconocer de qué curva se trata pasando a coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} r^2 &= r\cos\theta & & 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ x^2 + y^2 &= x & & (x,y) \quad \text{en el primer cuadrante} \\ x^2 - x + y^2 &= 0 & & (x,y) \quad \text{en el primer cuadrante} \\ (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 &= \frac{1}{4} & & (x,y) \quad \text{en el primer cuadrante} \end{aligned}$$

Es decir, se trata de una semicircunferencia centrada en $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$ que está en el semiplano superior.

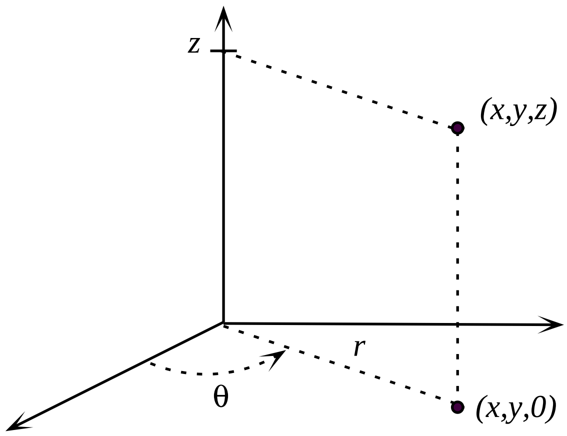
Coordenadas cilíndricas

Las ***coordenadas cilíndricas*** (r, θ, z) de un punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ están definidas por

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad z = z$$

donde

$$r > 0 \qquad , \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi \qquad , \qquad z \in \mathbb{R}$$



Vectores ortonormales asociados a las coordenadas cilíndricas

Se trata de encontrar una terna de vectores ortonormales

$$\mathbf{e}_r \quad , \quad \mathbf{e}_\theta \quad , \quad \mathbf{e}_z$$

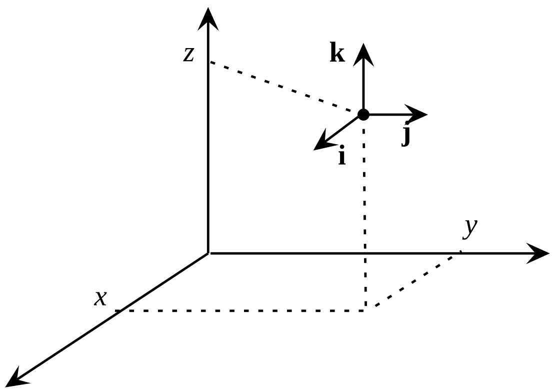
que representen, para las coordenadas cilíndricas, lo que los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ representan para las coordenadas cartesianas. Comenzamos definiendo $\mathbf{e}_r$ como el vector unitario paralelo al plano xy que tiene la dirección del radio, de donde resulta que

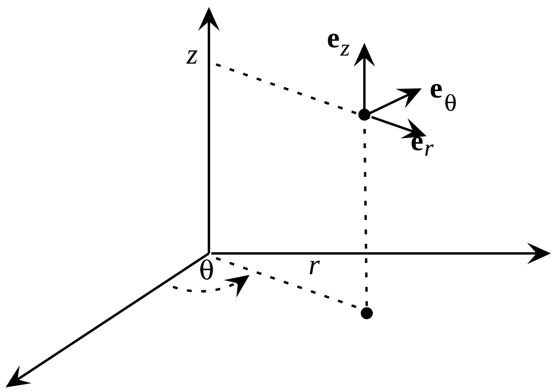
$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}$$

Tomamos $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ y por último

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$$

que resulta ser también paralelo al plano xy y tal que $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ satisface la regla de la mano derecha. Esto se ilustra en la siguiente figura





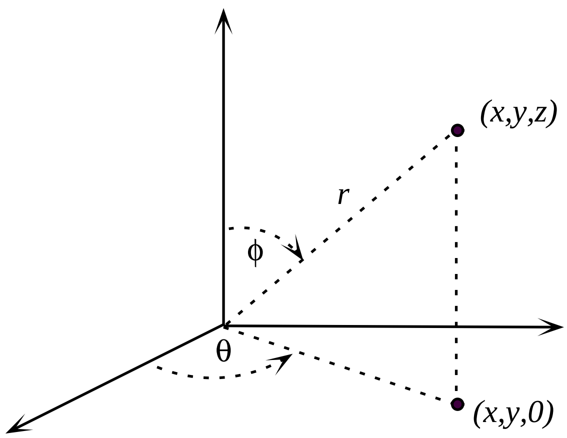
Coordenadas esféricas

Las ***coordenadas esféricas*** de (x, y, z) son (r, θ, φ) y se definen por

$$x = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = r\cos\varphi$$

donde

$$r > 0 \qquad , \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi \qquad , \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$



Problemas

1. En cada uno de los casos siguientes: hallar la ecuación correspondiente y graficar

a) esfera de centro en $(-1, 2, 3)$ y radio 2

b) esfera de centro en $(2, -1, 3)$ que pasa por el origen

c) circunferencia que tiene al segmento $[(-1, 3), (2, 6)]$ por diámetro.

d) segmento de recta que une $(4, -1, 3)$ con $(2, 3, -1)$

e) elipsoide de semiejes 2 , 1 , 5 centrado en $(-1, 0, 1)$

f) hiperboloide de dos hojas centrado en el origen que pasa por $(0, 0, 2)$ y corta al plano $z = 4$ en una circunferencia de radio 3.

2. Hallar todos los vectores $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ de $\mathbb{R}^2$ que poseen las propiedades indicadas

a) forma un ángulo de $2\frac{\pi}{3}$ radianes con el eje x en sentido contrario al de las agujas del reloj y tiene norma 2

b) forma un ángulo de $-\frac{5\pi}{4}$ radianes con la parte positiva del eje x y tiene norma 3.

3. a) Sean P y Q dos puntos del espacio y sea R el punto de $\overrightarrow{PQ}$ cuya distancia a P es el doble de su distancia a Q.
Sean $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{OQ}$ y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$. Demostrar que $\mathbf{r} = \frac{1}{3}\mathbf{p} + \frac{2}{3}\mathbf{q}$.

b) Suponiendo que $d(P, Q) = 1$ y que $t_0 \in [0, 1]$, ¿a qué distancia de los extremos del segmento $[P, Q]$ está el punto $R = P + t_0(Q - P)$? ¿Vale lo mismo si $d(P, Q) \neq 1$?

c) Dados $P = (3, 0, -2)$ y $Q = (1, -2, -1)$, hallar el punto de la semirrecta con origen en P que contiene al punto Q que está a distancia $\frac{5}{3}$ de Q.

4. Determinar si las rectas de ecuaciones paramétricas

$$L_1 : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 6t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

se intersecan. De ser así, hallar la intersección.

5. a) Suponiendo que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$ concluir que debe ser $\mathbf{a} = \mathbf{c}$

b) ¿Vale lo mismo para el producto vectorial?

6. a) Demostrar que

$$4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = ||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 - ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2$$

b) Usar a) para comprobar que

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad ||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$$

c) Demostrar que si **a** y **b** son vectores no nulos tales que

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\perp(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \qquad \text{y} \qquad ||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$$

entonces el paralelogramo asociado a **a** y **b** es un cuadrado.

7. ¿En qué condiciones se verifica que $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$?

8. Hallar dos vectores ortogonales a $(-2,0,5)$ que no sean paralelos entre sí.

¿Se pueden encontrar dos vectores ortogonales a $(-2,0)$ que no sean paralelos entre sí?

9. Dados dos vectores linealmente independientes **a** y **b** determinar si las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ tienen o no la misma orientación que la base canónica

a) $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$

b) $\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$

c) $\{\mathbf{b},\mathbf{a},-\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$

10. Sea $r = f(\theta)$ la ecuación polar de una curva del plano y sean

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} \qquad\qquad \mathbf{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

a) Demostrar que $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ son vectores unitarios perpendiculares

b) Sea $P = (r,\theta)$ un punto de la curva. Demostrar que $\mathbf{e}_r$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{OP}$ y que la dirección de $\mathbf{e}_\theta$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con $\mathbf{e}_r$, medido en sentido contrario a las agujas del reloj.

11. Usando coordenadas cilíndricas y los vectores ortonormales $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$

a) expresar cada uno de estos vectores en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$

b) calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ analítica y geométricamente

c) expresar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en términos de $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$

d) ¿tiene $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ la misma orientación que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$?

12. ¿Cuáles de los puntos $P = (1, 2, 0)$, $Q = (-5, 1, 5)$, $R = (-4, 2, 5)$ están en la recta

$$\ell : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \ + \ t(6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k})?$$

13. Hallar los vectores normales unitarios de los siguientes planos e indicar en un esquema gráfico hacia qué lado del plano apuntan

a) $x - 2y + 3z - 1 = 0$

b) $4x - 2y - 10 = 0$

14. Dibujar la gráfica de los planos siguientes

a) $x + 2y + 3z - 6 = 0$

b) $5x + 4y + 10z = 20$

c) $x - y = 0$

d) $y - 2z = 1$

15. a) Mostrar que la ecuación de una recta no vertical que pasa por el punto (a, b) es

$$y = m(x - a) + b$$

Sugerencia: por ser no vertical se puede suponer que es de la forma: $y = mx + k$

b) Mostrar que la ecuación de un plano no vertical que pasa por el punto (a, b, c) es

$$z = A(x - a) + B(y - b) + c$$

Sugerencia: por ser no vertical se puede suponer que es de la forma: $z = Ax + By + C$

16. Graficar los siguientes puntos (r, θ) dados en coordenadas polares y hallar sus coordenadas cartesianas.

$$(2, 0) \quad , \quad (2, \pi) \quad , \quad (4, \tfrac{\pi}{4}) \quad , \quad (3, \tfrac{3\pi}{2}) \quad , \quad (3, \frac{5\pi}{6}) \quad , \quad (5, \tfrac{3\pi}{2})$$

17. Hallar la representación en coordenadas polares de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas

$$(2, -2) \quad , \quad (-1, 1) \quad , \quad (0, 3) \quad , \quad (0, -4) \quad , \quad (\sqrt{3}, -1) \quad , \quad (3, 4)$$

18. Esbozar la gráfica de la ecuación polar y hallar la ecuación rectangular correspondiente

a) $r = r_0$ para $r_0 = 1, \frac{1}{2}, 4$

b) $\theta = \theta_0$ para $\theta_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$

c) $r = \cos\theta$

d) $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$

e) $r = \cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta$

19. Esbozar la gráfica de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares

a) $r = \cos(2\theta)$

b) $r = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$

c) $r = \frac{1}{4}\theta$

d) $r = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

20. Hallar la ecuación polar que corresponde a la ecuación cartesiana dada

a) $y^2 - x^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + y^2 = x$

d) $y = 3$

e) $x = 2$

21. a) Los siguientes puntos vienen dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno en coordenadas rectangulares y esféricas

$$(1, \frac{\pi}{4}, 1) \quad , \quad (2, \tfrac{\pi}{2}, -4) \quad , \quad (2, \tfrac{\pi}{6}, 2) \quad , \quad (1, \tfrac{\pi}{6}, 0) \quad , \quad (2, \tfrac{3\pi}{4}, -2)$$

b) Expresar en coordenadas cilíndricas y esféricas los siguientes puntos (dados en coordenadas cartesianas)

$$(0, \tfrac{5\sqrt{2}}{2}, \tfrac{5\sqrt{2}}{2}) \quad , \quad (-\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \quad , \quad (-7, 0, 0) \quad , \quad (\sqrt{2}, 1, 1)$$

22. Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas

a) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta, -z)$

b) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, z)$

c) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + 3\frac{\pi}{4}, z)$

23. Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas esféricas

a) $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (r, \theta + \pi, \varphi)$

b) $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (r, \theta, \pi - \varphi)$

c) $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (2r, \theta + \frac{\pi}{2}, \varphi)$

24. a) Describir las superficies dadas en coordenadas cilíndricas

$$r = \text{constante} \qquad , \qquad \theta = \text{constante} \qquad , \qquad z = \text{constante}$$

b) Describir las superficies dadas en coordenadas esféricas

$$r = \text{constante} \qquad , \qquad \theta = \text{constante} \qquad , \qquad \varphi = \text{constante}$$

25. Representar gráficamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

a) $A_1 = \{(x, y, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $A_2 = \{(x, y, -2) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

c) $A_3 = \{(x, y, 2) \ / \ x, y \geqslant 0\}$

d) $A_4 = \{(x, y, x) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

e) $A_5 = \{(x, y, x) \ / \ 1 \leqslant x, y \leqslant 2\}$

f) $A_6 = \{(x, y, x) \ / \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

26. a) Graficar la curvas dadas en coordenadas esféricas

(i) $r = 2 \, , \theta = \frac{\pi}{4}$

(ii) $r = 2 \, , \varphi = \frac{\pi}{3}$

(iii) $\theta = \frac{\pi}{3} \, , \varphi = \frac{\pi}{4}$

b) Graficar las curvas dadas en coordenadas cilíndricas

(i) $r = 2 \, , \theta = \frac{\pi}{2}$

(ii) $r = 2 \, , z = 3$

(iii) $\theta = \frac{\pi}{4} \, , z = 1$

27. Un tanque que tiene forma de cilindro circular recto de radio 3m y altura 5m está lleno hasta la mitad de líquido y reposa de lado. Describir el espacio vacío dentro del tanque eligiendo un sistema adecuado de coordenadas cilíndricas.

28. Se consideran los vectores no nulos

$$\mathbf{u} = (a, b) \qquad , \qquad \mathbf{v} = (-b, a) \qquad , \qquad \mathbf{w} = (b, -a)$$

a) ¿Es cierto que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ y $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$?

b) Si la respuesta anterior fue afirmativa establecer si tienen la misma orientación que la base canónica o la opuesta.

29. Hacer un esquema gráfico de las siguientes regiones descriptas en coordenadas esféricas

a) $\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

d) $r \leqslant 2$

e) $2 \leqslant r \leqslant 3$

f) $r \geqslant 3$

g) $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$

h) $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$

i) $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

j) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$

k) $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

l) $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$

m) $\begin{cases} r \leqslant 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

n) $\begin{cases} r \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

o) $\begin{cases} r \leqslant 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

p) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$

q) $\begin{cases} r \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$

r) $\begin{cases} r \leqslant 2 \\ \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases}$

En los casos que corresponda indicar quiénes son las cuádricas que limitan a estas regiones.

30. a) Utilizar el teorema del coseno para mostrar que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

b) Deducir que

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$$

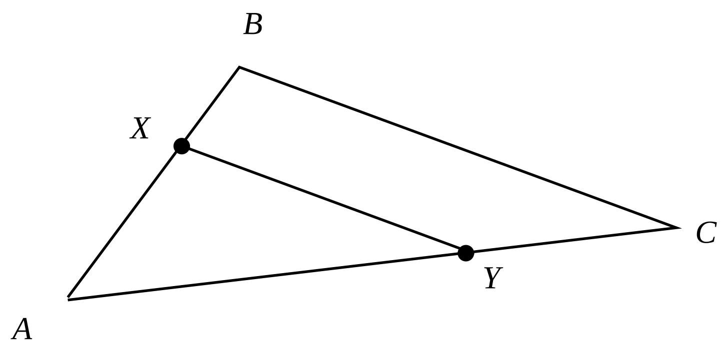
c) Utilizar los resultados anteriores para comprobar que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

d) Verificar que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

31. Dado el triángulo de vértices A , B , C



donde el segmento de extremos X , Y es paralelo al lado $\overline{BC}$,

a) mostrar que existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$X = A + t(B - A) \qquad , \qquad Y = A + t(C - A)$$

b) concluir que los puntos del triángulo se pueden escribir en la forma

$$Z = A + st(C - A) + t(1 - s)(B - A)$$

para $0 \leqslant t, s \leqslant 1$.