UCA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA

CALCULO AVANZADO

Segundo Cuatrimestre 2008

Trabajo Práctico 2

Parametrizaciones de curvas y superficies

DEFINICIONES Y RESULTADOS

Parametrización

Una ***parametrización*** de una curva C es una aplicación

$$\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde I es un intervalo real, tal que su imagen es el conjunto de los puntos de C.

Ejemplos

1. $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (1, -2, 9) + t(-2, 1, 1)$ es una parametrización de la recta que pasa por el punto $(1, -2, 9)$ con dirección $(-2, 1, 1)$
2. $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una parametrización de la circunferencia unitaria.

Una ***parametrización*** de una superficie S es una aplicación

$$\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, tal que su imagen es el conjunto de los puntos de S.

Ejemplos

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(s, t) = P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ es una parametrización del plano que pasa por el punto P y está dirigido por los vectores (independientes) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
2. $\phi : [0, 1]\times[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(s, t) = P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ es una parametrización del paralelogramo que tiene a los vectores linealmente independientes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como dos de sus lados (que concurren en el punto P).
3. $\phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(r, t) = (r\cos t + 1, r \operatorname{sen} t - 2, 3)$ es una parametrización del disco de radio 2 contenido en el plano $z = 3$ y centrado en el punto $(1, -2, 3)$.
4. $\phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(\theta, \varphi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$ es una parametrización de la esfera unitaria.

NOTA: en la página de la materia hay un apunte sobre este tema.

PROBLEMAS

1. Hallar una parametrización de la recta que satisface las condiciones dadas

a) pasa por $P = (3, 1, 0)$ y es paralela a la recta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + t\mathbf{k}$

b) pasa por el origen y por $Q = (x_0, y_0, z_0)$

c) pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y por $Q = (x_1, y_1, z_1)$

2. Hallar una parametrización del segmento de recta que empieza en $(2, 7, -1)$ y termina en $(4, 2, 3)$.

3. a) Sean $C_1 : \quad x^2 + y^2 = 1$, $C_2 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $C_3 : \quad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

i) Mostrar que $(u, v) \in C_2$ si y sólo si $(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}) \in C_1$

ii) Mostrar que $(u, v) \in C_3$ si y sólo si $(\frac{u-\alpha}{a}, \frac{v-\beta}{b}) \in C_1$

b) Sean $L_1 : \quad y = \alpha x$, $L_2 : \quad y = \alpha(x - a) + b$. Mostrar que

$$(u, v) \in L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u - a, v - b) \in L_1$$

c) Sean $C_1 : \quad x^2 - y^2 = 1$, $C_2 : \quad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$. Mostrar que

$$(u, v) \in C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u - \alpha}{a}, \frac{v - \beta}{b}\right) \in C_1$$

d) Sean $C_1 : \quad y = \operatorname{sen} x$, $C_2 : \quad y = \operatorname{sen}(x - 2) + 3$. Mostrar que

$$(u, v) \in C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u - 2, v - 3) \in C_1$$

4. Ubicar en un mismo sistema cartesiano los vectores con origen $(0, 0)$ en extremo P_i $(1 \leqslant 5)$, siendo

$$P_1 = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad , \quad P_2 = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \quad , \quad P_3 = (\cos(t + \tfrac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(t + \tfrac{\pi}{2}))$$

$$P_4 = (\operatorname{sen} t, -\cos t) \quad , \quad P_5 = (\cos(t - \tfrac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(t - \tfrac{\pi}{2}))$$

5. ¿Es cierto que los puntos

$$(t, t^2) \qquad \text{y} \qquad (-t, t^2)$$

están sobre la parábola $y = x^2$? Cuando sea posible,

a) indicar qué valores debe tomar t para que la recorran desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$

b) idem para que lo hagan desde $(2, 4)$ hasta $(0, 0)$.

NOTA: de la cadena de desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$ se deduce que tiene que ser $a \leqslant b$.

6. Verificar que para cada $t \in [0, 2\pi]$, los puntos

$$(\cos t, \operatorname{sen} t) \quad , \quad (-\operatorname{sen} t, \cos t) \quad , \quad (\operatorname{sen} t, -\cos t) \quad , \quad (\operatorname{sen} t, \cos t)$$

están sobre la circunferencia unitaria. Es más, cada valor de t va dando cada uno de los puntos de esta curva. Considerar cada uno de ellos y analizar

a) de qué punto de la circunferencia salen en el instante $t = 0$

b) en qué sentido recorren esta curva (horario o antihorario)

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas indicando el rango del parámetro

a) $x^2 + y^2 = r^2$

b) $4x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $x^2 - y^2 = 1 \quad (x > 0)$

d) $x^2 - 3y^2 = \dfrac{1}{3} \quad (x < 0)$

e) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$

f) el gráfico de la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\operatorname{sen} t}$

g) el gráfico de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$

h) los lados del cuadrado de vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones paramétricas de las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$ indicando el rango de cada parámetro

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

c) $2x - y + z = 3$

d) $x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

f) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - z = 0$

g) $3x^2 + 5y^2 = z^2$

h) $4x^2 - 3y^2 = 1$

9. Exhibir las parametrizaciones de las curvas del ejercicio 7.

10. Exhibir las parametrizaciones de las superficies del ejercicio 8.

11. Esbozar el gráfico de $\mathrm{Im}(\phi)$, siendo

a) $\phi : [0, 3] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\phi(r, \theta, \phi) = (r \cos\theta \operatorname{sen}\phi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, r \cos\phi)$

b) $\phi : [0,2] \times [0,\pi] \times [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)$

c) $\phi : [0,3] \times [0,2\pi] \times [\frac{\pi}{4},\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\phi(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, r\cos\phi)$

d) $\phi : [0,2] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\phi(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, 4)$

e) $\phi : [0,2] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\phi(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u^2)$

12. En cada uno de los casos siguientes,

(i) hacer un esquema gráfico de la región $R \subset \mathbb{R}^2$ dada

(ii) proyectar R sobre el eje x

(iii) exhibir una parametrización de R

a) R es la parte de la parábola $y = 3x^2 + 4$ que se encuentra en el semiplano $y - x \leqslant 4$

b) R es la parte de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ que se encuentra en la intersección de los semiplanos $x - y \leqslant 1$ y $x \geqslant 0$

c) $R : \begin{cases} y \geqslant 3x^2 + 4 \\ y - x \leqslant 4 \end{cases}$

d) $R : \begin{cases} x^2 - y^2 \geqslant 1 \\ x - y \leqslant 1, x \geqslant 0 \end{cases}$

e) $R : \quad 1 \leqslant (x-1)^2 + (y+3)^2 \leqslant 4$

13. En cada uno de los casos siguientes,

(i) dar las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap S_2$

(ii) representar en un esquema gráfico tanto a las superficies como a la curva intersección

(iii) si C indica la proyección de $S_1 \cap S_2$ sobre el plano indicado, exhibir una parametrización de la curva C

(iv) exhibir una parametrización de $S_1 \cap S_2$ utilizando la información hallada antes

a) $S_1 : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad S_2 : \quad z = 2x + 3y - 1$ Proyectar sobre $z = 0$

b) $S_1 : \quad x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad S_2 : \quad z = x^2 + y^2$ Proyectar sobre $z = 0$

c) $S_1 : \quad y^2 + z^2 = 9 \quad , \quad S_2 : \quad x = +y^2 + z^2$ Proyectar sobre $x = 0$

d) $S_1 : \quad \frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \quad , \quad S_2 : \quad y^2 = x^2 + z^2 + 1$ Proyectar sobre $y = 0$

e) $S_1 : \quad x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 = 9$ Proyectar sobre $z = 0$ e $y = 0$

f) $S_1 : \quad y = x^2 \quad , \quad S_2 : \quad x + y + z = 1$ Proyectar sobre $z = 0$

g) $S_1: \quad z = 3y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 4 - x^2 - y^2$ Proyectar sobre $x = 0$

h) $S_1: \quad x^2 - y^2 = 1 \quad , \quad S_2: \quad y^2 - x^2 = 1$ Proyectar sobre $z = 0$

i) $S_1: \quad y = x \quad , \quad S_2: \quad x + y + z = 4$ Proyectar sobre $z = 0$ e $y = 0$

14. En cada uno de los casos siguientes,

(i) hacer un esquema gráfico de la curva $S_1 \cap S_2$

(ii) encontrar un cilindro vertical que contenga a $S_1 \cap S_2$

(iii) reescribir las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap S_2$ utilizando ese cilindro

(iv) hallar las ecuaciones implícitas de la proyección de $S_1 \cap S_2$ sobre $z = 0$

(v) exhibir parametrizaciones de ambas curvas

a) $S_1: \quad z = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 9 - x^2 - y^2$

b) $S_1: \quad z^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad , \quad S_2: \quad z = 9 - x^2 - y^2$

c) $S_1: \quad z = 4 - x^2 - y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 2x^2 + 3y^2$

d) $S_1: \quad z = 4x^2 + 9y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 4x + 3$

e) $S_1: \quad (z-1)^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2: \quad x^2 + y^2 = 4$

15. Para cada una de las regiones $R \subset \mathbb{R}^3$ hallar el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x, y, z) \in R\}$$

graficarlo en el plano y hacer un esquema gráfico en $\mathbb{R}^3$ que represente tanto a R como a D.

a) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

b) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z = 4 - y \end{cases}$

c) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4} \end{cases}$

d) $R: \begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$

e) R es el sólido limitado superiormente por la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ e inferiormente por la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$

f) $R: \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y + 2 \end{cases}$

g) $R: \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z \leqslant 2x + 2y + 2 \end{cases}$

h) R es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2x + 2y + 2$

NOTA: D es la proyección de R sobre el plano $z = 0$.

16. Para cada una de las regiones $R \subset \mathbb{R}^3$ hallar el conjunto

$$I = \{z \in \mathbb{R} \ / \ (x, y, z) \in R\}$$

y hacer un esquema gráfico en $\mathbb{R}^3$ que represente tanto a R como a I.

a) $R : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

b) $R : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z = 4 - y \end{cases}$

c) $R : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4} \end{cases}$

d) $R : \begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$

e) R es el sólido limitado superiormente por la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ e inferiormente por la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$

f) $R : \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y + 2 \end{cases}$

g) $R : \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z \leqslant 2x + 2y + 2 \end{cases}$

h) R es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2x + 2y + 2$

NOTA: I es la proyección de R sobre el eje z.

17. En cada uno de los casos siguientes,

(i) hacer un esquema gráfico de S_1, de S_2 y de la curva $S_1 \cap S_2$

(ii) exhibir parametrizaciones de S_1, de S_2 de $S_1 \cap S_2$ y de su proyección sobre $z = 0$

(iii) hallar un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que el sólido W limitado por S_1 y S_2 tenga a D como proyección sobre el plano $z = 0$

(iv) exhibir parametrizaciones de las partes de S_1 y de S_2 que limitan a W.

a) $S_1 : \quad z = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2 : \quad z = 9 - x^2 - y^2$

b) $S_1 : \quad z^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad , \quad S_2 : \quad z = 9 - x^2 - y^2$

c) $S_1 : \quad z = 4 - x^2 - y^2 \quad , \quad S_2 : \quad z = 2x^2 + 3y^2$

d) $S_1 : \quad z = 4x^2 + 9y^2 \quad , \quad S_2 : \quad z = 4x + 3$

e) $S_1 : \quad (z-1)^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 = 4$