UCA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA

CALCULO AVANZADO

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2008

TRABAJO PRÁCTICO 3

Funciones reales
de una variable real
(repaso)

Trayectorias y Curvas

Aplicaciones Físicas

Página de Cálculo Avanzado
http://www.uca.edu.ar — Ingeniería — Area Matemática — Cálculo Avanzado

DEFINICIONES Y RESULTADOS

Repaso

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$

➢ Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

cada vez que $|x - x_0| < \delta$. [1]

➢ Sea (x_n) una sucesión contenida en (a,b). Si $f(x) \longrightarrow \ell$ cuando $x \to x_0$ y $x_n \longrightarrow x_0$, entonces $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

➢ Sean (x_n) y (x'_n) dos sucesiones contenidas en (a,b) tales que $x_n, x'_n \longrightarrow x_0$. Si $f(x_n) \longrightarrow \ell_1$ y $f(x'_n) \longrightarrow \ell_2$ —con $\ell_1 \neq \ell_2$— entonces, no existe el límite de f cuando $x \longrightarrow x_0$.

➢ Decimos que f es continua en x_0 si $f(x) \longrightarrow f(x_0)$ cuando $x \longrightarrow x_0$. Decimos que f es continua en un conjunto A si es continua en cada punto de A.

➢ Si f es continua en $[a,b]$, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in [a,b]$.

➢ *(Teorema de Bolzano).* Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

➢ Si f es continua en (a,b) y no se anula nunca, entonces

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (a,b) \qquad \text{o bien} \qquad f(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (a,b)$$

Es decir, una función continua que no se anula no puede cambiar de signo en el intervalo.

➢ Si f es continua en $[a,b]$, entonces es integrable y se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |\, f(x)\,| \; dx$$

➢ Decimos que f es derivable en x_0 cuando existe un número —denotado $f'(x_0)$— tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

➢ Toda función derivable es continua.

[1] En la página de la materia hay un apunte con ejercicios resueltos sobre este tema.

➢ La composición de dos funciones derivables f y g es derivable y vale la regla de la cadena

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

➢ Decimos que f es de ***clase*** C^k $(k \in \mathbb{N})$ en (a, b) si admite derivadas continuas hasta el orden k en (a, b).

➢ Una función $\varphi : A \longrightarrow B$ se dice

inyectiva si "$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \neq \varphi(y)$"

suryectiva si $\mathrm{Im}\varphi = B$.

➢ Se define el ***gráfico*** de $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ como el conjunto

$$\mathrm{graf} f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in (a, b)\}$$

Es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$.

Función vectorial de una variable real

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$. Las funciones $f_i : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se llaman ***componentes*** de $\mathbf{f}$.

Ejemplos

Este tipo de funciones son las que utilizamos para parametrizar curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

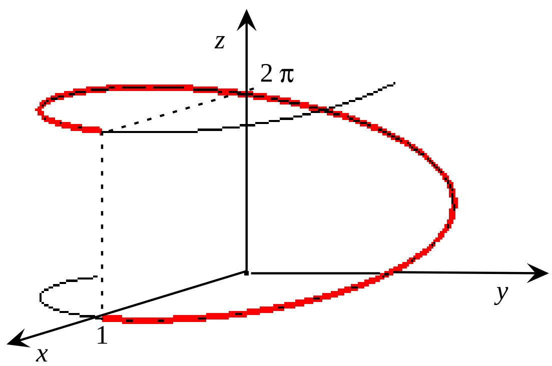
1. $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

   La imagen de $\mathbf{f}$ es la circunferencia unitaria. En este caso, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ con

$$f_1(t) = \cos t \quad , \quad f_2(t) = \operatorname{sen} t$$

2. $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$

   La imagen de $\mathbf{f}$ es un tramo de la hélice circular



En este caso, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ con

$$f_1(t) = \cos t \quad , \quad f_2(t) = \operatorname{sen} t \quad , \quad f_3(t) = t$$

Límite

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a, b)$. Se dice que $\mathbf{f}(t)$ converge a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in (a, b) \end{array}\right\} \Longrightarrow |\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}| < \varepsilon$$

y lo escribimos: $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$.

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a, b)$. Entonces,

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} f_i(t) = v_i \ \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

Continuidad

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a, b)$. Se dice que $\mathbf{f}$ es ***continua en*** t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$. Y se dice ***continua en*** (a, b) si es continua en cada $t \in (a, b)$.

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\mathbf{f} \text{ es continua en } t_0 \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{cada } f_i : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es continua en } t_0 \ (i = 1, \ldots, n)$$

Proposición

Sean $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, entonces las funciones

$$\begin{array}{rlrl}
\mathbf{f} + \mathbf{g} & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n & \mathbf{f} + \mathbf{g}(t) & = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = (f_1(t) + g_1(t), \ldots, f_n(t) + g_n(t)) \\
\alpha.\mathbf{f} & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n & \alpha.\mathbf{f}(t) & = \alpha(t).\mathbf{f}(t) = (\alpha(t) f_1(t), \ldots, \alpha(t) f_n(t)) \\
\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} & : I \longrightarrow \mathbb{R} & \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}(t) & = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = f_1(t) g_1(t) + \cdots + f_n(t) g_n(t) \\
\mathbf{f} \times \mathbf{g} & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n & \mathbf{f} \times \mathbf{g}(t) & = \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) \qquad (n = 3) \qquad\qquad \text{y} \\
\|\mathbf{f}\| & : I \longrightarrow \mathbb{R} & \|\mathbf{f}\|(t) & = \|\mathbf{f}(t)\|
\end{array}$$

también lo son.

Función acotada

Decimos que la función vectorial $\mathbf{f} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es ***acotada*** si su imagen es un conjunto acotado; i.e., si existe un número $M > 0$ tal que

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leqslant M \qquad (t \in I)$$

Es decir, todos los puntos de su imagen se encuentran dentro de la esfera de centro $\mathbf{0}$ y radio M.

Proposición

Sea $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, entonces $\mathbf{f}$ es acotada.

Integración

Sea $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $(f_1, \ldots, f_n)$ sus componentes. Se define la ***integral*** de $\mathbf{f}$ entre a y b como el vector

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ \ldots \ , \int_a^b f_n(t)\, dt \right)$$

Proposición

Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continuas. Entonces,

- ▹ $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)]\, dt = \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt + \int_a^b \mathbf{g}(t)\, dt$
- ▹ $\displaystyle\int_a^b [\alpha \mathbf{f}(t)]\, dt = \alpha \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt$, para todo escalar constante α
- ▹ $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{c} \cdot \mathbf{f}(t)]\, dt = \mathbf{c} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt$, para todo vector constante $\mathbf{c}$.
- ▹ $\displaystyle\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt \right\| \leqslant \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\, dt$

Derivabilidad

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a, b)$. Se dice que $\mathbf{f}$ es ***derivable en*** t_0 si existe un vector —denotado $\mathbf{f}'(t_0)$— tal que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \mathbf{f}'(t_0)$$

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\mathbf{f} \text{ es derivable en } t_0 \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{cada } f_i : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es derivable en } t_0 \ (i = 1, \ldots, n)$$

En tal caso vale,

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$$

Proposición

Toda función $\mathbf{f} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivable es continua.

Proposición

Sean $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables, entonces las funciones

$$\mathbf{f}+\mathbf{g} \quad \alpha.\mathbf{f} \quad \mathbf{f}\cdot\mathbf{g} \quad \mathbf{f}\times\mathbf{g}\,(n=3) \quad ||\mathbf{f}||^2$$

también lo son y vale

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(t) &= \mathbf{f}'(t)+\mathbf{g}'(t)\\
(\alpha.\mathbf{f})'(t) &= \alpha'(t).\mathbf{f}(t)+\alpha(t).\mathbf{f}'(t)\\
(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) &= \mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}'(t)\\
(\mathbf{f}\times\mathbf{g})'(t) &= \mathbf{f}'(t)\times\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}'(t) \quad (n=3)\\
(||\mathbf{f}||^2)'(t) &= 2\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)
\end{aligned}$$

y —si $\mathbf{f}(t) \neq 0$— $||\mathbf{f}||$ también resulta derivable y vale

$$||\mathbf{f}||'(t) = \frac{\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{||\mathbf{f}(t)||}$$

Proposición

Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$ y $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha : J \longrightarrow I$ derivables. Entonces, $\mathbf{f}\circ\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es derivable y vale

$$(\mathbf{f}\circ\alpha)'(t) = \alpha'(t)\,\mathbf{f}'(\alpha(t))$$

Clase C^k

Una función $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice ***de clase** C^k* si sus componentes son de clase C^k; es decir, si admiten derivadas continuas hasta el orden k.

Curvas y Trayectorias

Llamaremos ***trayectoria*** a toda función vectorial continua $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, siendo I un intervalo real. A su imagen

$$C = \mathrm{Im}\mathbf{f} = \{\mathbf{f}(t) \;/\; t \in I\}$$

se la denomina ***curva***.

De esta forma, $\mathbf{f}$ permite describir paramétricamente los puntos los puntos de la curva C. Es por ello que $\mathbf{f}$ también suele llamarse ***parametrización*** de C.

Si el intervalo $I = [a,b]$, el punto $P = \mathbf{f}(a)$ se llama ***punto inicial*** y el punto $Q = \mathbf{f}(b)$ se llama ***punto final***.

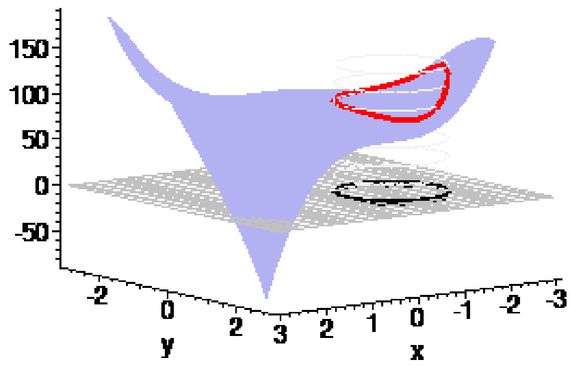
Curvas en el espacio

Comencemos por notar que a toda curva plana dada por $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la podemos pensar como una curva en el espacio identificándola con la imagen de la función vectorial $\tilde{\mathbf{f}} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de componentes

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = (f_1(t), f_2(t), 0)$$

Ejemplo

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función cuyo gráfico se muestra en la siguiente figura, las curvas allí representadas



resultan ser las imágenes de

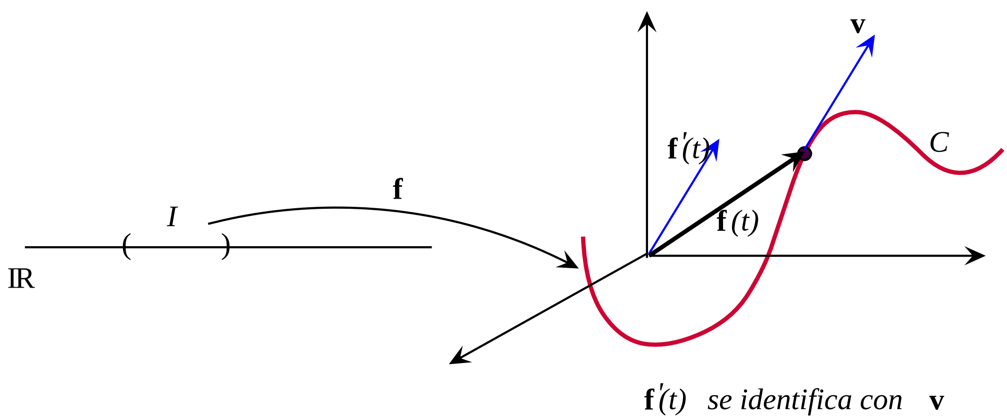
$\mathbf{r}(t) = (\cos t - 1, \operatorname{sen} t + 1, 0)$ *(la curva negra, sobre el plano $z = 0$)*

$\mathbf{c}(t) = (\cos t - 1, \operatorname{sen} t + 1, f(\cos t - 1, \operatorname{sen} t + 1))$ *(la curva roja, sobre el gráfico de f)*

Ambas están contenidas en un cilindro de eje vertical.

Vector velocidad — Rapidez

Sea $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ derivable y sea C la curva que define. Llamamos ***vector velocidad*** en el punto $P = \mathbf{f}(t)$ al vector $\mathbf{f}'(t)$.



El número $\|\mathbf{f}'(t)\|$ se denomina ***rapidez***.

Curva simple

Decimos que una curva C es ***simple*** si es la imagen de una trayectoria inyectiva $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Es decir, es una curva que no se corta a sí misma.

Curva cerrada

Decimos que una curva C es ***cerrada*** si es la imagen de una trayectoria $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ para la cual el punto inicial coincide con el punto final; i.e., si $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$.

Curva cerrada simple

Decimos que una curva C es ***cerrada simple*** si es la imagen de una trayectoria $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$ y $\mathbf{f} : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

Es decir, los únicos valores del parámetro que dan lugar al mismo punto son los extremos del intervalo de definición.

Parametrización regular

Una parametrización $\mathbf{f}$ de clase C^1 de una curva C se dice ***regular*** si $\mathbf{f}'(t) \neq 0$ para todo t en el dominio de $\mathbf{f}$.

Recta tangente

Sea $\mathbf{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Se define la ***recta tangente*** a la curva asociada a $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{f}(t_0)$ por

$$T_{t_0} : \mathbf{x} = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0) \qquad (s \in \mathbb{R})$$

NOTA: si fuera $\mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{0}$, no se podría hablar de *recta*.

Curva orientada

Cada parametrización de una curva induce en ella una ***orientación***, es decir, un sentido de recorrido. Si $\mathbf{f}$ es una parametrización de una curva C definida en el intervalo $[a, b]$, se la recorre desde $\mathbf{f}(a)$ hasta $\mathbf{f}(b)$.

Cambio admisible de parámetro

Sea $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de una curva C. Se dice que una función $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ es un ***cambio admisible de parámetro*** si

$$\varphi \text{ es de clase } C^1 \quad , \quad \varphi' \neq 0 \text{ para todo } t \text{ en } (c, d) \quad , \quad \mathrm{Im}(\varphi) = [a, b]$$

En tal caso, a la función $\mathbf{g} : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\mathbf{g}(u) = \mathbf{f}(\varphi(u))$, se llama ***reparametrización*** de C.

❖ Si $\varphi' > 0$, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ definen la misma orientación en C

❖ Si $\varphi' < 0$, definen orientaciones opuestas.

Curva opuesta

Dada una curva C descripta por la parametrización $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, llamamos ***curva opuesta*** – y la denotamos $-C$ – a la imagen de la parametrización

$$\mathbf{g} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(a + b - t)$$

Longitud

Sea $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase C^1 de una curva C. Definimos la ***longitud*** de $\mathbf{f}$ entre a y b como el número

$$L(\mathbf{f}, a, b) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| \, dt$$

Proposición

Si $\mathbf{g} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de $\mathbf{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces

$$L(\mathbf{f}, a, b) = L(\mathbf{g}, c, d)$$

Observaciones

1. Las parametrizaciones $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ y $\mathbf{g}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ definen la misma curva (la circunferencia unitaria). Sin embargo,

$$L(\mathbf{g}, 0, 2\pi) = 4\pi = 2L(\mathbf{f}, 0, 2\pi)$$

2. El ejemplo anterior muestra que la definición de $L(\mathbf{f}, a, b)$ *realmente depende* de la parametrización $\mathbf{f}$ utilizada para describir la curva.

3. Si la parametrización $\mathbf{f}$ definida en el intervalo $[a, b]$ es inyectiva, entonces el número $L(\mathbf{f}, a, b)$ representa la *verdadera* longitud de la curva.

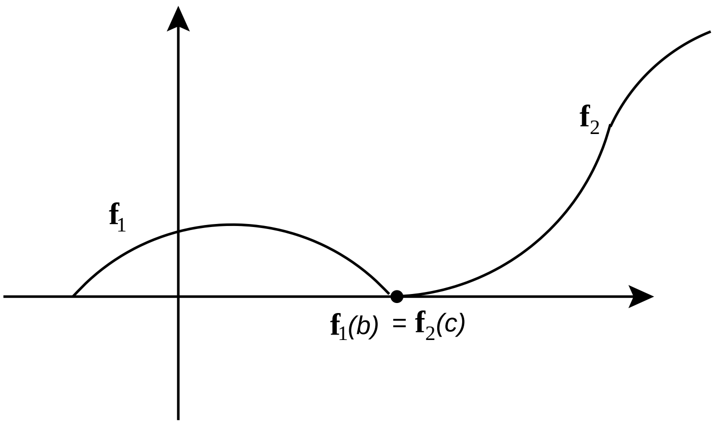
Empalme de curvas

Consideremos dos curvas C_1 y C_2 definidas, respectivamente, por las ecuaciones

$$C_1 : \quad \mathbf{f}_1(t), \quad a \leqslant t \leqslant b \qquad \text{y} \qquad C_2 : \quad \mathbf{f}_2(t), \quad c \leqslant t \leqslant d$$

Supongamos que $\mathbf{f}_1(b) = \mathbf{f}_2(c)$. Entonces, el ***empalme*** $C_1 + C_2$ de ambas curvas se define mediante la parametrización

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}_1(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ \mathbf{f}_2(t + c - b) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b + d - c \end{cases}$$



La longitud de $C_1 + C_2$ es la suma de las longitudes de C_1 y de C_2.

Longitud de un arco de circunferencia

Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, para medir la longitud ℓ del arco correspondiente a un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi]$ basta notar que dicho arco se puede describir mediante

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\operatorname{sen}\theta \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$$

De esta forma, la función $\mathbf{f}(\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, definida en $[0, \alpha]$, es una parametrización inyectiva de esta curva y, por lo tanto,

$$\ell = \int_0^\alpha \|\mathbf{f}'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^\alpha r\, d\theta = r\alpha$$

Longitud en coordenadas polares

Sea C la curva dada en coordenadas polares por la ecuación $r = g(\theta)$. De tal forma, C se puede representar paramétricamente por $\mathbf{f}(\theta) = (g(\theta)\cos\theta, g(\theta)\operatorname{sen}\theta)$, donde g es una función derivable en el intervalo $[a, b]$.

La longitud de C está entonces dada por

$$\int_a^b \sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)}\, d\theta$$

Proposición

Sea $\mathbf{f} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial derivable. Entonces,

$$||\mathbf{f}|| \equiv c \;\; (constante) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}' \equiv 0$$

Aplicaciones Físicas

Sea $\mathbf{r}$ una trayectoria de clase C^2 que describe el movimiento de una partícula durante un intervalo de tiempo. Si llamamos C a su traza

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (t \in I)$$

El extremo del vector $\mathbf{r}(t)$ indica la posición de la partícula en el instante t.

El vector

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

se llama ***vector velocidad*** en el instante t, mientras que el vector

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{v}'(t)$$

recibe el nombre de ***vector aceleración*** en el instante t.

Movimientos curvilíneos

Llamamos ***rapidez*** del objeto a la magnitud de la velocidad; i.e.,

$$v(t) = ||\mathbf{v}(t)|| = \; rapidez \; en \; el \; instante \; t$$

Sea $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||\mathbf{r}'(u)||\, du$ la función que mide la longitud del arco de curva descripto por una partícula entre el instante t_0 y el instante t. Se tiene entonces que la rapidez es la derivada de esta función respecto del tiempo,

$$v(t) = ||\mathbf{v}(t)|| = s'(t)$$

1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + f(t)\, \mathbf{d} \qquad (||\mathbf{d}|| = 1)$$

2. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

$$\mathbf{r}(t) = (r\cos(\theta(t)), r\,\mathrm{sen}(\theta(t))) \qquad (r > 0)$$

Llamamos

$$\theta'(t) = \; velocidad \; angular \qquad , \qquad |\theta'(t)| = \; celeridad \; angular$$

Un caso particular se obtiene cuando la velocidad angular es una constante $\omega > 0$ y da lugar al ***movimiento circular uniforme***

PROBLEMAS

1. Dibujar la curva representada por la función vectorial dada indicando la orientación

a) $\mathbf{f}(t) = (t, t^2) \quad , \quad t \geqslant 0$

b) $\mathbf{f}(t) = (2t, t^2) \quad , \quad t \geqslant 0$

c) $\mathbf{f}(t) = (t^3, 2t) \quad , \quad t \geqslant 0$

d) $\mathbf{f}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \quad , \quad t \geqslant 0$

e) $\mathbf{f}(t) = (3 \operatorname{ch} t, 2, 4 \operatorname{sh} t) \quad , \quad t \leqslant 0$

f) $\mathbf{f}(t) = (5, 2\cos t, 3 \operatorname{sen} t) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

g) $\mathbf{f}(t) = (2t, 5 - 2t, 3t) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

h) $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \, , \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

i) $\mathbf{f}(t) = (2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, 2\pi - t) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

Indicar en cada caso de qué tipo de curva se trata.

2. Analizar la existencia de $\lim\limits_{t \to 0} \mathbf{f}(t)$, siendo

a) $\mathbf{f}(t) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{2t}, e^{2t}, \dfrac{t^2}{e^t}\right)$

b) $\mathbf{f}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1 - \cos t}{3t}\mathbf{j} + \dfrac{t}{t+1}\mathbf{k}$

3. Calcular

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{1+t}\right) dt$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (e^t, te^t)\, dt$

c) $\displaystyle\int_1^2 (\operatorname{sen} t, \cos t, t)\, dt$

4. Calcular la velocidad y aceleración de las siguientes trayectorias

a) $\mathbf{f}(t) = 4t\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + (t^2 + 2t)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{f}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 4t)$

c) $\mathbf{f}(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, \ln t)$

5. En cada caso, hallar todas las $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que

a) $\mathbf{f}'(t) = 0 \quad$ en $\quad a \leqslant t \leqslant b$

b) $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{c} \quad$ en $\quad a \leqslant t \leqslant b$

c) $\mathbf{f}'(t) = (t^2, 0) \, , \, \mathbf{f}(0) = (1, 1)$

d) $\mathbf{f}'(t) = \alpha\mathbf{f}(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{c}$.

Sug.: $y'(x) = ay(x)$ si y sólo si $y(x) = ke^{ax}$

6. Suponiendo que $\mathbf{g}$ es derivable, hallar la velocidad y la aceleración de $\mathbf{f}$ en términos de $\mathbf{g}$

a) $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{g}(t^2) + \mathbf{c}$

b) $\mathbf{f}(t) = t^2\mathbf{g}(\ln t) + t\mathbf{c}$

7. a) Determinar si los siguientes pares de trayectorias describen la misma curva

(i) $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad , \quad t \in [0, \pi]$
$\mathbf{g}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) \quad , \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(ii) $\mathbf{f}(t) = (t, t^2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$
$\mathbf{g}(t) = (t^2, t^4) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbf{f}(t) = (t, t^{1/3}) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$
$\mathbf{g}(t) = (t^3, t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

(iv) $\mathbf{f}(t) = \left(\frac{t}{t+1}, \frac{t+1}{t-1}\right) \quad , \quad 2 \leqslant t \leqslant 4$
$\mathbf{g}(u) = \left(\frac{1}{u+1}, \frac{1+u}{1-u}\right) \quad , \quad \frac{1}{4} \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$

b) Si $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ describen la misma curva, ¿es cierto que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$ para todo t?

c) Para los pares de trayectorias del inciso **??**) que describan la misma curva, determinar si

- ⋆ son regulares en los mismos puntos
- ⋆ pasan la misma cantidad de veces por cada punto de la curva
- ⋆ la recorren en el mismo sentido
- ⋆ tienen la misma velocidad en cada punto

8. Hallar el vector tangente a las curvas descriptas por

a) $\mathbf{f}(t) = (t - t^3 + 2, t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$ en el punto $P = (2, 2)$

b) $\mathbf{f}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 3t)$, $0 < t < 2\pi$ en el punto $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

c) el gráfico de $y = x^{5/3} + 2$, para cada $x \in \mathbb{R}$

d) $\mathbf{f}(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, 2 - t)$ en el punto $P = (0, 1, \frac{3}{2})$

e) $\mathbf{f}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$ para $t = -1$

f) $\mathbf{f}(t) = (t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1)$ en el punto $P = (1, 1, 1)$

g) $\mathbf{f}(t) = 3t\mathbf{a} + \mathbf{b}$ para $t = 2$, ¿y para otro valor del parámetro?

h) $\mathbf{f}(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t, \operatorname{tg} t)$ en el punto $P = (\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

9. Hallar la longitud del arco de curva indicado

a) $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t^3) \quad , \quad \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}$

b) $\mathbf{r}(t) = (\cos t^2, \operatorname{sen} t^2) \quad , \quad \frac{\sqrt{\pi}}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

c) $r = \theta^2 \quad , \quad \sqrt{5} \leqslant \theta \leqslant 2\sqrt{3}$

d) $r = \sec\theta \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$

e) $r = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

f) $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$

g) $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, 0)$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$

h) $\mathbf{r}(t) = (3t\cos t, 3t\operatorname{sen} t, 4t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 4$

i) $r = 1 + \cos\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$

j) $r = a\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.

10. Mostrar que si $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, entonces $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ son paralelos. ¿Tienen el mismo sentido?

11. Suponiendo que $\mathbf{f}(t) = \lambda\mathbf{f}''(t)$ para todo t (λ constante), mostrar que $\mathbf{f} \times \mathbf{f}'$ es un vector constante.

Sug.: si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada nula, ¿qué se puede decir de ella?

12. Sea $C : \mathbf{r}(t) = (t, 1 + t^2)$, hallar los puntos de la curva en los cuales $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$

a) son perpendiculares

b) son paralelos y tienen el mismo sentido

c) son paralelos y tienen sentidos opuestos.

13. a) Definir una función vectorial $\mathbf{r}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaga la condición inicial $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$ y que, cuando t crezca hasta 2π, describa la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

(i) una vez en sentido contrario al de las agujas del reloj

(ii) una vez en el sentido de las agujas del reloj

(iii) dos veces en sentido contrario al de las agujas del reloj

(iv) tres veces en el sentido de las agujas del reloj

b) Idem pero con la condición inicial $\mathbf{r}(0) = (0, b)$

14. Hallar una ecuación cartesiana de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^3, 0, t^2)$ y dibujarla.

a) ¿Dónde es regular?

b) Hacer el mismo análisis con la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, 0, t^{2/3})$ y confrontar con el caso anterior.

15. a) Demostrar que la curva

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - t + 1, t^3 - t + 2, \operatorname{sen}\pi t)$$

se corta a sí misma en $P = (1, 2, 0)$ hallando dos números $t_1 < t_2$ para los cuales P es el extremo tanto de $\mathbf{r}(t_1)$ como de $\mathbf{r}(t_2)$

b) Hallar los vectores tangentes a esta curva en $P = (1, 2, 0)$ en ambos instantes y compararlos. ¿Le sorprende el resultado? Dibujar una curva que esté en una situación análoga a ésta.

16. Sea C la hélice de ecuación

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

a) Sea $\varphi(u) = u^2$ para $0 \leqslant u \leqslant \sqrt{2\pi}$ y sea

$$\mathbf{R}(u) = \mathbf{r}(\varphi(u)) = 2\cos u^2\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,u^2\,\mathbf{j} + 4u^2\,\mathbf{k}$$

Demostrar que φ es un cambio admisible de parámetro que preserva la orientación en $[0, \sqrt{2\pi}]$

b) Sea $\psi(v) = 2\pi - v^2$ para $0 \leqslant v \leqslant \sqrt{2\pi}$ y sea

$$\mathbf{S}(v) = \mathbf{r}(\psi(v)) = 2\cos(2\pi - v^2)\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}(2\pi - v^2)\,\mathbf{j} + 4(2\pi - v^2)\,\mathbf{k}$$

Demostrar que ψ es un cambio admisible de parámetro que invierte la orientación en $[0, \sqrt{2\pi}]$

17. Con elementos del cálculo elemental de una variable real se puede demostrar que la longitud del gráfico de una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 es

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Demostrar este hecho usando métodos vectoriales.

Sug.: parametrizar el gráfico de f

18. Calcular los vectores velocidad y aceleración en cada uno de los siguientes casos:

a) movimiento rectilíneo: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + f(t)\,\mathbf{d}$, $\mathbf{d} \neq 0$

b) movimiento circular alrededor del origen: $\mathbf{r}(t) = r\cos\theta(t)\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\,\mathbf{j}$, $r > 0$.

Interpretar la dirección y sentido de la aceleración en el caso del movimiento circular uniforme.

19. Una partícula inicia su movimiento en $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = (1, -1, 1)$. Su aceleración es $\mathbf{a}(t) = (4t, 6t, 1)$. Determinar su velocidad y posición en el instante t.

20. Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con rapidez constante V. Hallar la velocidad angular y la magnitud de la aceleración.

21. Una partícula se mueve de tal forma que $\mathbf{r}(t) = (at, b\,\mathrm{sen}\,at)$. Demostrar que la magnitud de la aceleración de la partícula es proporcional a la distancia de la partícula al eje x.

22. Una partícula se mueve de tal forma que $\mathbf{r}(t) = (2, t^2, (t-1)^2)$. ¿En qué instante será mínima la rapidez de la partícula?