

CALCULO AVANZADO

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2008

TRABAJO PRÁCTICO 4

Campos escalares

Límite y continuidad

DEFINICIONES Y RESULTADOS

Campo escalar

Llamaremos *campo escalar* a cualquier función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Conjuntos de nivel

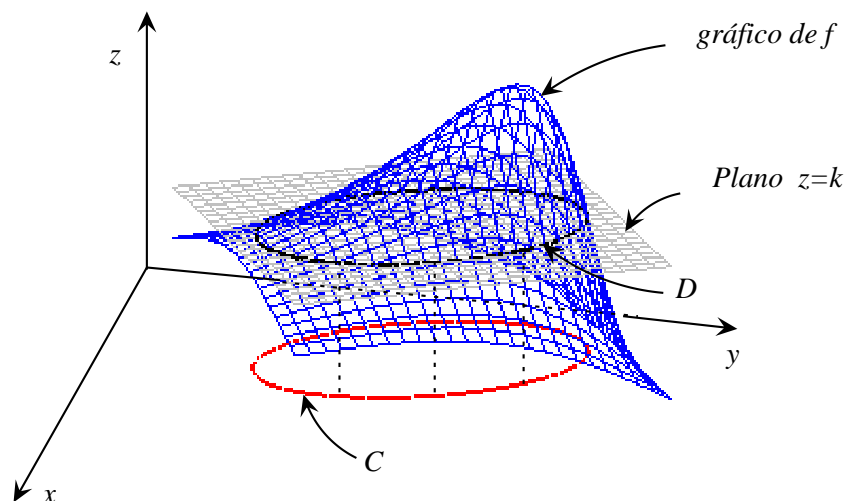
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. El *conjunto de nivel* de valor c se define como

$$f^{-1}(c) = \{\mathbf{x} \in A / f(\mathbf{x}) = c\}$$

NOTA: para $n = 2$ se llama *curva de nivel* y para $n = 3$ *superficie de nivel*.

El siguiente gráfico muestra

- ♦ el gráfico de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- ♦ el plano horizontal $z = k$
- ♦ la curva D , su intersección con el plano $z = k$ y
- ♦ C , la curva de nivel k de f



D : curva intersección del gráfico de f con el plano $z=k$

C : curva de nivel k de f

Cabe mencionar que C es la proyección de D sobre el plano xy . Es conveniente recordar que la curva de nivel de una función está contenida en su dominio, no en su gráfico.

Una situación similar se presenta con las superficies de nivel de una función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Claro que en ese caso no la podríamos representar gráficamente debido a que el gráfico de F está en \mathbb{R}^4 .

Conceptos topológicos

BOLA ABIERTA DE CENTRO \mathbf{a} Y RADIO $r > 0$: $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$

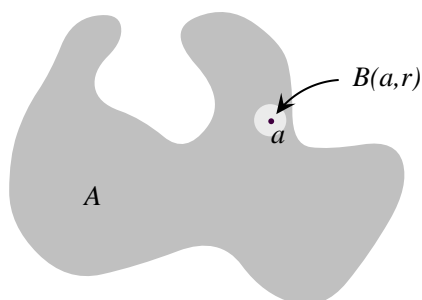
BOLA CERRADA DE CENTRO \mathbf{a} Y RADIO $r > 0$: $\bar{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$

CONJUNTO ACOTADO: si está contenido en $B(\mathbf{0}, r)$ para algún $r > 0$

ENTORNO DE $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: es un conjunto E que contiene una bola abierta centrada en \mathbf{a}

ENTORNO REDUCIDO DE $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$: es un conjunto $E' = E - \{\mathbf{a}\}$, donde E es un entorno de \mathbf{a}

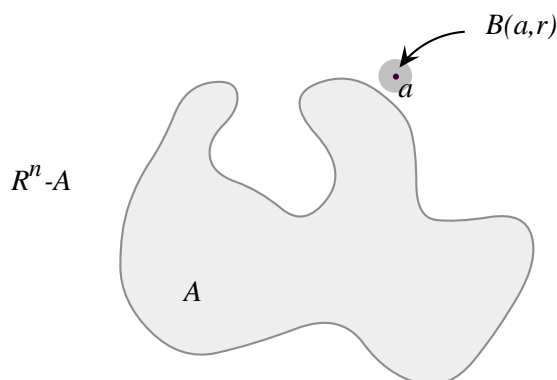
CONJUNTO ABIERTO: es un conjunto que es entorno de cada uno de sus puntos. Es decir, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para cada $\mathbf{a} \in A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset A$.



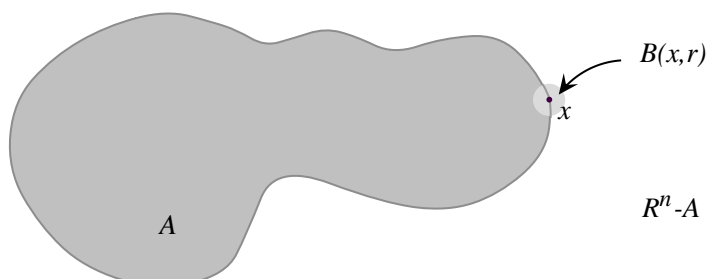
PUNTO INTERIOR: $\mathbf{a} \in A$ es un **punto interior** de A si existe un entorno de \mathbf{a} contenido en A .

INTERIOR DE UN CONJUNTO: $\overset{\circ}{A} = \{\mathbf{a} \in A / \mathbf{a} \text{ es un punto interior de } A\}$

CONJUNTO CERRADO: es un conjunto cuyo complemento es un conjunto abierto. Es decir, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n - A$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \cap A = \emptyset$.



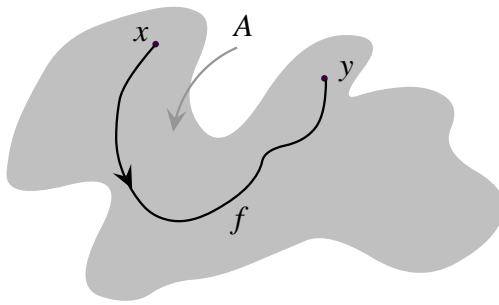
FRONTERA: $\partial A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset \text{ para todo } r > 0\}$



ADHERENCIA O CLAUSURA: $\bar{A} = A \cup \partial A$

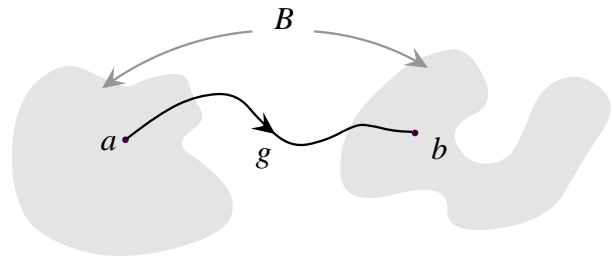
CONJUNTO COMPACTO: es un conjunto cerrado y acotado.

CONJUNTO ARCOCONEXO: es un conjunto cuyos puntos se pueden unir mediante caminos cuyas trazas están contenidas en él.



la imagen de f está contenida en A

A es arcoconexo



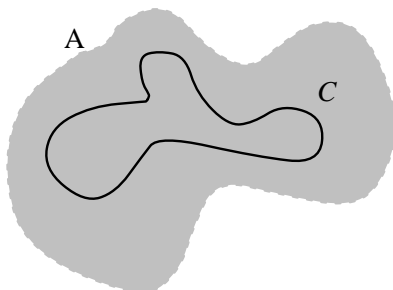
cualquier camino g que una 'a' con 'b' tiene parte de su imagen fuera de B

B no es arcoconexo

CONJUNTO CONEXO: un conjunto abierto se dice **conexo** si es arcoconexo.

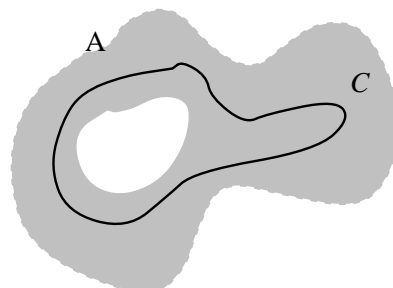
CONJUNTO CONVEXO: un conjunto se dice **convexo** si el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos está totalmente contenido en él.

CONJUNTO SIMPLEMENTE CONEXO: un conjunto abierto se dice **simplemente conexo** si toda curva cerrada contenida en el conjunto se puede contraer a un punto *sin salir* de él.



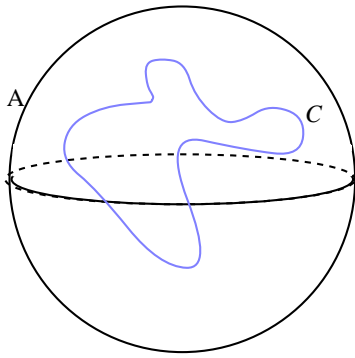
La curva C puede contraerse a un punto sin necesidad de salir del conjunto A

A es simplemente conexo en \mathbb{R}^2



La curva C , por rodear el 'agujero', no puede contraerse a un punto sin pasar por el agujero; saliendo en consecuencia de A

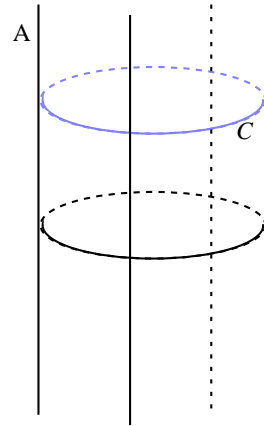
A no es simplemente conexo en \mathbb{R}^2



A es la esfera sólida

La curva C, incluida en A puede contraerse a un punto sin necesidad de salir de la esfera A

A es simplemente conexo en \mathbb{R}^3



A es el cilindro

La curva C, incluida en A no puede contraerse a un punto sin salir del cilindro A

A no es simplemente conexo en \mathbb{R}^3

Proposición

Sean $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces

- (i) $B(\mathbf{a}, r)$ es un conjunto abierto
- (ii) $\bar{B}(\mathbf{a}, r)$ es un conjunto cerrado
- (iii) $\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \bar{B}(\mathbf{a}, r)$
- (iv) $\partial B(\mathbf{a}, r) = \partial \bar{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se tiene

- (i) $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto
- (ii) A es abierto si y sólo si $A = \overset{\circ}{A}$

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se tiene

- (i) \bar{A} es un conjunto cerrado
- (ii) A es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$

Función acotada

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es *acotada* si existe $M > 0$ tal que $|f(\mathbf{x})| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Dicho de otro modo, f es acotada si su imagen es un conjunto acotado.

Límite — Continuidad

Límite

Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que el *límite de f cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{a}* es ℓ —y lo notamos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$ — cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada vez que $\mathbf{x} \in A$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ resulta

$$|f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Proposición (Unicidad del límite)

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y $\mathbf{a} \in \bar{A}$. Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$.

Proposición

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell > \alpha$ (resp. $\ell < \alpha$), entonces $f(\mathbf{x}) > \alpha$ (resp. $f(\mathbf{x}) < \alpha$) para \mathbf{x} en un entorno de \mathbf{a} , $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Proposición

Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, si existen $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \ell_2$

$$(i) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$$

$$(ii) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \ell_1 \ell_2$$

$$(iii) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (\text{si } \ell_2 \neq 0)$$

Proposición

Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{a} \in \bar{A}$ tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$ y f es acotada en un entorno reducido de \mathbf{a} . Entonces,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$$

Proposición (límite de una composición)

Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathbf{a} \in \bar{A}$ tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$. Entonces,

(i) si la función h está definida en un entorno del número ℓ , toma valores en \mathbb{R} y satisface

$$\lim_{y \rightarrow \ell} h(y) = L, \text{ se tiene}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h \circ f(\mathbf{x}) = L$$

(ii) si la trayectoria \mathbf{g} está definida en un entorno del número t_0 y satisface $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f \circ \mathbf{g}(t) = \ell$$

Corolario

Si $\mathbf{g}_1 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g}_2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_1(t) = \mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_2(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \mathbf{g}_1(t) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \mathbf{g}_2(t)$$

entonces no existe $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$.

Ejemplo

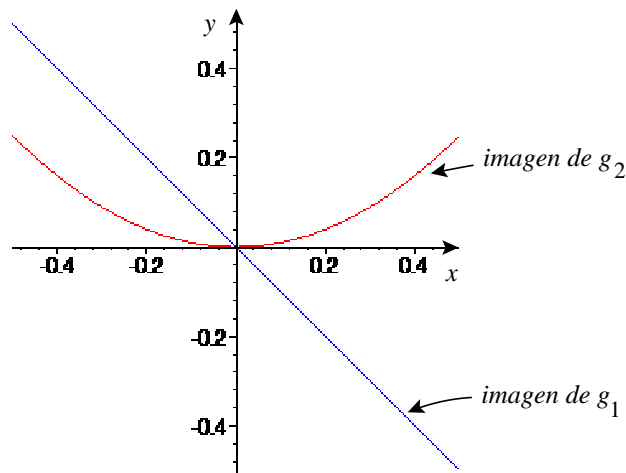
Consideremos la función $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Para todo $(a, b) \neq (0, 0)$ esta función tiene límite y vale $\frac{a^2 b}{a^4 + b^2}$ dado que se cumplen las hipótesis de una proposición anterior. Supongamos ahora que queremos analizar

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Como tanto el denominador como el numerador tienden a cero no contamos con ningún resultado que nos permita asegurar siquiera que existe.

Con el objeto de analizar cómo se comporta el gráfico de f cerca del origen nos vamos a acercar a este punto por dos curvas

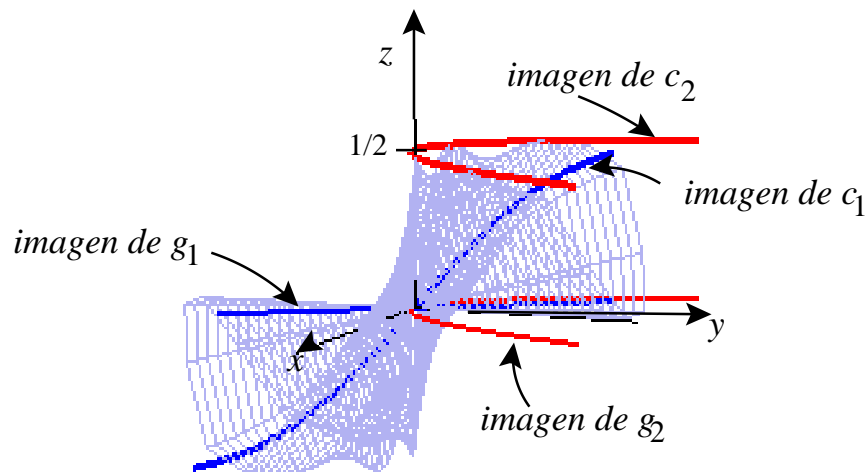
$$\mathbf{g}_1(t) = (t, -t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_2(t) = (t, t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$$



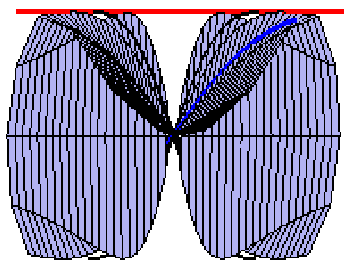
Si calculamos los valores de f sobre estas curvas, cuyas imágenes están en su dominio, y las *subimos* a su gráfico nos quedan determinadas dos curvas en el espacio

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, -t, f(t, -t)) \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_2(t) = (t, t^2, f(t, t^2))$$

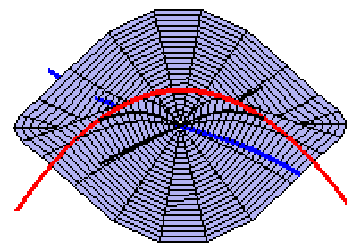
Miremos ahora sus imágenes junto con el gráfico de f



Rotando un poco esta figura uno puede tener una mejor idea del gráfico de f



De frente



Desde arriba

Queda claro a partir de aquí que la última coordenada de $\mathbf{c}_1(t)$ se acerca a 0 cuando $t \rightarrow 0$ pero en cambio la última coordenada de $\mathbf{c}_2(t)$ se mantiene constante en el valor $\frac{1}{2}$ y por lo tanto se acerca a ese valor cuando $t \rightarrow 0$. Esto nos confirma que la función f no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Hubiéramos llegado fácilmente a esta conclusión calculando

$$f(\mathbf{g}_1(t)) = f(t, -t) = \frac{-t^3}{t^4 + t^2} = \frac{-t}{t^2 + 1} \quad \text{y} \quad f(\mathbf{g}_2(t)) = f(t, t^2) = \frac{t^4}{2t^4 + 1} = \frac{1}{2}$$

pues entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}_1(t)) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}_2(t))$$

Observaciones

1. si reemplazamos \mathbf{g}_1 por cualquier otra recta que pase por el origen obtenemos que $f(\mathbf{g}_1(t))$ sigue tendiendo a cero
2. la razón de haber elegido la parábola \mathbf{g}_2 es que de esa forma logramos equiparar los grados de x y de y que están descompensados en la fórmula de la función.

Sucesiones en \mathbb{R}^2

Una sucesión en \mathbb{R}^2 es una función

$$\mathbf{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

A cada número natural k le asigna un par de números reales $\mathbf{a}(k) = (x_k, y_k)$. Usualmente se escribe

$$\mathbf{a}_k = (x_k, y_k)$$

en lugar de $\mathbf{a}(k)$.

Por lo tanto, dar una sucesión en \mathbb{R}^2 es dar *un par* de sucesiones (x_k) e (y_k) en \mathbb{R} .

Decimos que la sucesión (\mathbf{a}_k) converge al vector \mathbf{v} si

$$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{v}\| \longrightarrow 0$$

cuando k tiende a ∞ .

Las propiedades vistas, que vinculan a la norma de un vector con los módulos de sus componentes, nos permiten afirmar que una sucesión (\mathbf{a}_k) en \mathbb{R}^2 converge a un vector \mathbf{v} si y sólo si cada una de sus componentes tiende a la respectiva componente de \mathbf{v} .

Proposición

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $\mathbf{a} \in \bar{A}$. Entonces, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$ si y sólo si

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow \ell$$

para toda sucesión $((x_n, y_n)) \subset A$, $(x_n, y_n) \neq \mathbf{a}$, que converge a \mathbf{a} .

NOTA: lo mismo vale para $A \subset \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Corolario

Sean $((x_n, y_n))$, $((u_n, v_n))$ dos sucesiones que convergen al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para las cuales

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow \ell_1 \quad \text{y} \quad f(u_n, v_n) \longrightarrow \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$. Entonces no existe el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (a, b)$.

NOTA: lo mismo vale en \mathbb{R}^m ($m \in \mathbb{N}$).

Continuidad

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que f es **continua** en $\mathbf{a} \in A$ si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Se dice que f es **continua** en A si es continua en cada uno de sus puntos.

Proposición

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\mathbf{a} \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

- (i) $\alpha f + \beta g$ es continua en \mathbf{a}
- (ii) fg es continua en \mathbf{a}
- (iii) $\frac{f}{g}$ es continua en \mathbf{a} siempre que $g(\mathbf{a}) \neq 0$
- (iv) si $h : (f(\mathbf{a}) - \varepsilon, f(\mathbf{a}) + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(\mathbf{a})$, $h \circ f$ es continua en \mathbf{a} .

Proposición

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. Entonces,

- (i) Existen escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que: $T(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.
- (ii) Existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $|T(\mathbf{x})| \leq A \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- (iii) $|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)| \leq A \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$
- (iv) Toda transformación lineal, asociada a una matriz no nula, es un polinomio de grado 1 con todos sus monomios de grado 1
- (v) T es una función continua

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y A un conjunto compacto. Entonces,

- (i) f es acotada
- (ii) existen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ tales que

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2)$$

para todo $\mathbf{x} \in A$; es decir, f alcanza un valor máximo absoluto $f(\mathbf{x}_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(\mathbf{x}_2)$ en el conjunto A .

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes funciones, hallar su dominio y gráficarlo

a) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x, y) = \ln(2x - y)$

e) $f(x, y) = \frac{1}{(3x + 2y)^2 + (y - 1)^2}$

f) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}$

g) $f(x, y, z) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + \pi}$

h) $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(9 - x^2) - \ln(z^2 - 1) + \frac{1}{\cos y}$

i) $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$

j) $f(x, y, z) = (x - y)^{\operatorname{sen} z}$

2. Una empresa petroquímica está diseñando un depósito cilíndrico con extremos semiesféricos para utilizarlo en el transporte de sus productos. Expresar el volumen del depósito en función de su radio r y la longitud h de su porción cilíndrica.

3. Para cada una de las siguientes funciones

(i) clasificar sus curvas de nivel y graficar tres de cada tipo

(ii) para cada k elegido, graficar la intersección de su gráfico de con el plano $z = k$

(iii) utilizando la información obtenida en (ii) esbozar su gráfico

a) $f(x, y) = 1 - x - y$

b) $f(x, y) = y^3$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = x^2 + y$

e) $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$

f) $f(x, y) = y - e^x$

g) $f(x, y) = y - \operatorname{sen} 2x$

En los casos: d), f) y g) intersecar el gráfico de f con horizontales para .

4. Hallar las superficies de nivel de las siguientes funciones

- a) $f(x, y, z) = x + y + z$
- b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- c) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ (considerar niveles: 0, 1 y -1)
- d) $f(x, y, z) = y - x^2 - z^2$
- e) $f(x, y, z) = z - x^2 + y^2$

5. a) Se sabe que el punto $P = (0, -1)$ está en una curva de nivel de la función $g(x, y) = \text{sen}(\pi y) - (x - 1)^2$. ¿Cuál es la ecuación de esta curva?
- b) Se sabe que el punto $P = (0, 1, -1)$ está en una superficie de nivel de la función $h(x, y, z) = x^2 - \text{sen}(yz) - z^3$. ¿Cuál es la ecuación de esta superficie?

6. a) La intensidad E de un campo eléctrico en el punto (x, y, z) viene dada por

$$E(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

donde k es una constante positiva. Describir las superficies de nivel de E .

- b) Una fina placa metálica está situada en el plano xy . La temperatura T (en grados centígrados) en el punto (x, y) es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

(i) Expresar T en función de x e y

(ii) Describir las curvas de nivel y dibujar un conjunto representativo.

NOTA: las curvas de nivel de T se llaman *isotermas*. Los puntos de una isoterma tienen la misma temperatura.

(iii) Suponer que la temperatura en el punto $(1, 2)$ es 50° . ¿Cuál es la temperatura en el punto $(4, 3)$?

- c) La fórmula

$$V(x, y) = \frac{k}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

donde k y r son constantes positivas, da el potencial eléctrico (en voltios) en el punto (x, y) del plano xy . Describir las curvas de nivel de V y dibujar un conjunto representativo.

NOTA: las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales*. Todos los puntos de una curva equipotencial tienen el mismo potencial eléctrico.

7. Encontrar la relación entre los elementos de los tres grupos siguientes: funciones, mapas de curvas de nivel y gráficos.

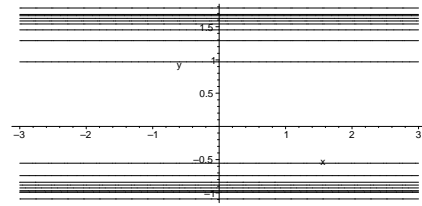
FUNCIONES

1. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$
2. $f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y$
3. $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)^{1/2}}$

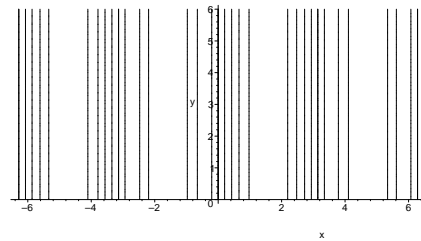
4. $f(x, y) = y^2 - y^3$
5. $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$, $-10 \leq x, y \leq 10$
6. $f(x, y) = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

CURVAS DE NIVEL

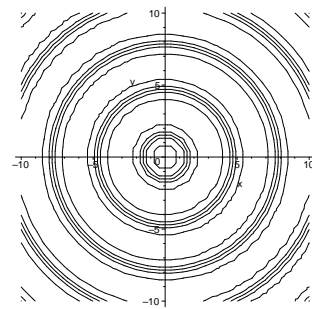
a.



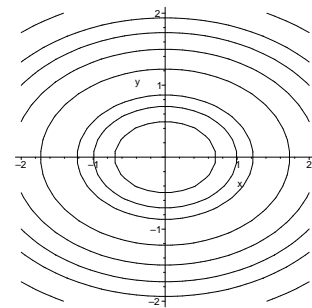
b.



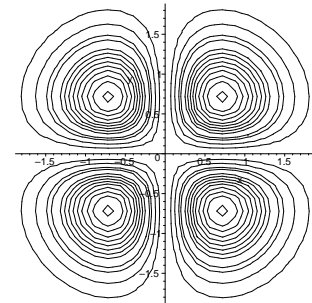
c.



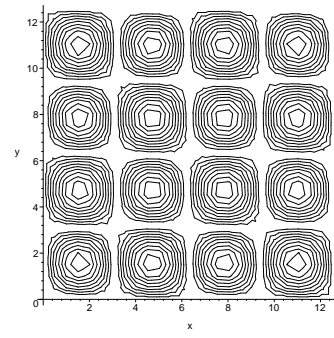
d.



e.

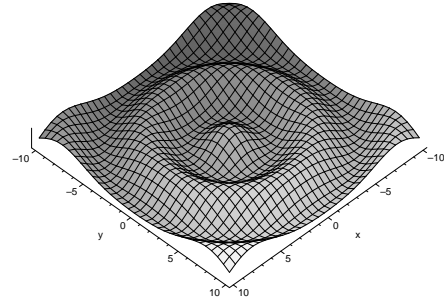


f.

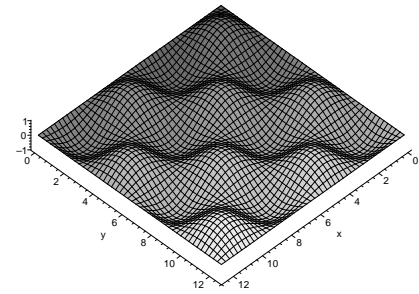


GRÁFICOS

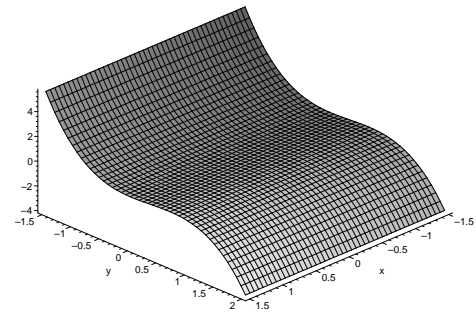
A.



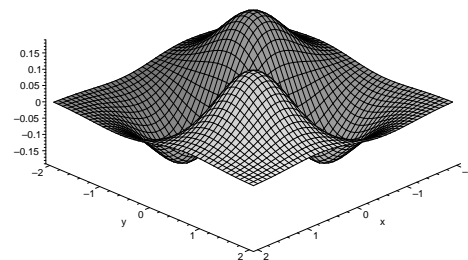
B.



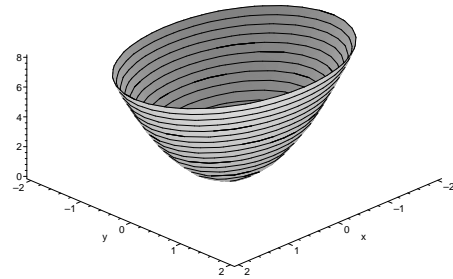
C.



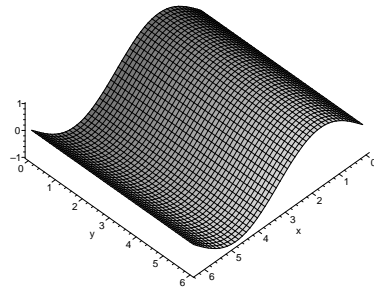
D.



E.



F.



8. Dibujar los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 y verificar *gráficamente* que son abiertos

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 7\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y > 1\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y \neq 0\}$
- $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

¿Alguno de estos conjuntos es simplemente conexo? ¿Y conexo?

9. Dibujar los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 y verificar *gráficamente* que son cerrados

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 1\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ o } y = 0\}$

¿Alguno de estos conjuntos es compacto?

10. Dibujar los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 y verificar *gráficamente* que no son abiertos ni cerrados

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 \leq 7\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y = 0\}$

11. a) Comprobar *gráficamente* que el paralelepípedo P dado por: $-1 < x < 1, 0 < y < 2, 0 < z < 3$ es un conjunto abierto.

b) Calcular la adherencia de P

c) ¿Es P simplemente conexo?

12. a) Determinar cuáles de las siguientes regiones planas son simplemente conexas

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 3\}$

(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 3\}$

(iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 3\}$

(iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 3\}$

(v) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - x > 0\}$

b) Determinar cuáles de las siguientes regiones del espacio son simplemente conexas y cuáles son sólo conexas

(i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$

(ii) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$

(iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > x + y\}$

(iv) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 3\}$

(v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$

13. Probar las siguientes afirmaciones usando la definición de límite

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 4x - 7 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3x + 4 = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 1}{x - 3} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x + \sqrt{x^2 + 1} = 2$

Sugerencia: si no recuerda este tema, consulte la sección *Apuntes* de la página de la materia.

14. Hallar en cada caso un par de sucesiones que muestren que las siguientes funciones no tienen límite cuando x tiende al punto indicado

a) $\sin x$ cuando $x \rightarrow +\infty$

b) $\sin \frac{1}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0$

c) $\arctg x + \sin \frac{1}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0$

15. Se sabe que f no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$. Determinar en cada caso si existe el límite. Justificar la respuesta y calcular el límite cuando corresponda.

a) $g(x) = \sin x + f(x)$

b) $g(x) = xf(x)$ (suponiendo en este caso que f es acotada cerca del origen)

c) $g(x) = \sin xf(x)$

d) $g(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}$ (¿qué propiedad de $\frac{1}{1 + x^2}$ le permitió llegar a esa conclusión?)

e) $g(x) = f(x) - h(x)$ (suponiendo que h tampoco tiene límite cuando $x \rightarrow 0$)

16. Probar usando la definición que

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,9)} xy = -9$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2 + y^2} = 0$

Sugerencia: consulte la sección *Apuntes* de la página de la materia.

17. Utilizando resultados mencionados en la parte teórica de esta práctica y el valor de ciertos límites de funciones de una variable justificar las siguientes afirmaciones

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Entonces,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\text{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$. Entonces,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln(f(x, y))}{f(x, y)} = 0$$

c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Entonces,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{e^{f(x,y)} - 1}{f(x, y)} = 0$$

d) Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

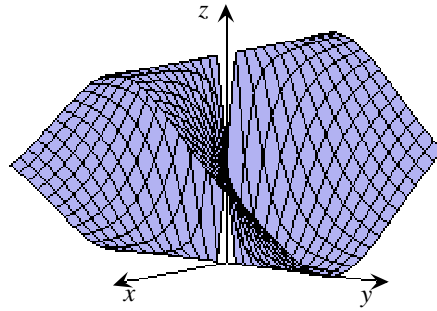
18. En cada uno de los casos siguientes

(i) Observar cuidadosamente el gráfico de $f(x, y)$ y determinar si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$

(ii) En los casos en que no exista dicho límite, dibujar sobre el gráfico dos curvas que ilustren ese hecho

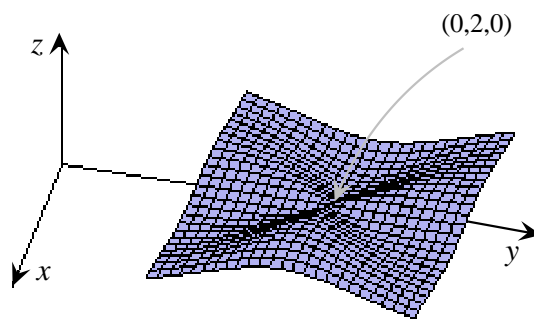
a) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

$(a, b) = (0, 0)$



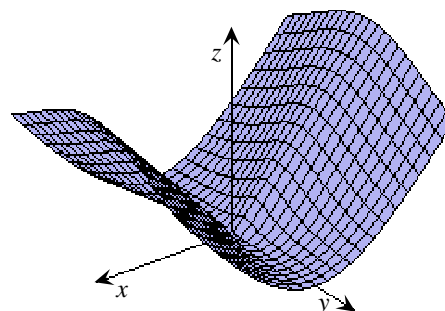
b) $f(x, y) = \frac{\text{sen}^3 x}{x^2 + (y - 2)^2}$

$(a, b) = (0, 2)$

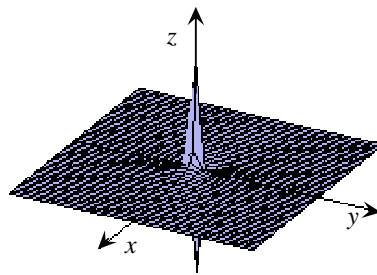


c) $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

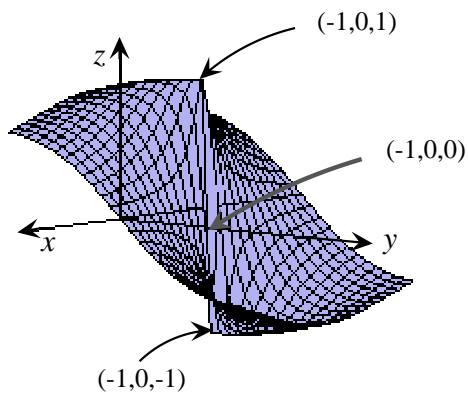
$(a, b) = (0, 0)$



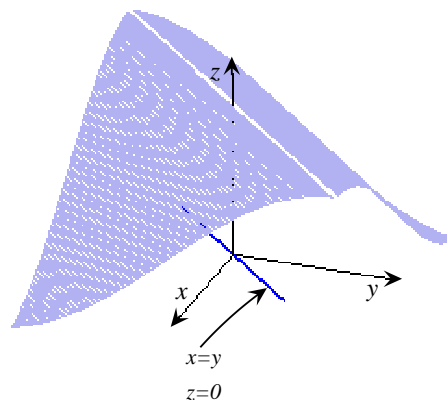
d) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 $(a, b) = (0, 0)$



e) $f(x, y) = \frac{\cos(y + \pi/2)}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$
 $(a, b) = (-1, 0)$



f) $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x - y)}{x - y}$
 $(a, b) = (0, 0)$ y $(a, b) = (1, 1)$



19. Calcular el dominio de las siguientes funciones y analizar la existencia de límite en el origen:

a) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

b) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$c) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$d) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} x + 7y}{4x^2 + 2y - 3}$$

$$e) f(x, y) = \frac{1 - \cos x}{y^2}$$

$$f) f(x, y) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$g) f(x, y) = |x|^y$$

Sugerencia: considere las sucesiones $(e^{-n}, \frac{1}{n})$ y $(2^{-n}, \frac{1}{n})$

$$h) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$$

$$i) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{|x + y|}$$

$$j) f(x, y) = \frac{1 - \cos(x + y)}{(x + y)^2}$$

$$k) f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$l) f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$$

$$m) f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{\operatorname{sen}^2 x + y^4}$$

$$n) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}$$

$$o) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$p) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 1} - 1}$$

$$q) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 + y^2}$$

Sugerencia: $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$r) f(x, y, z) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 y^2 + z^4)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$s) f(x, y, z) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$t) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + |y|} - \frac{x}{x^2 + |y|}$$

$$u) f(x, y) = \frac{x^2 + xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$v) f(x, y) = \frac{x^2 + xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 - x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$w) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y) f(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z) f(x, y) = \begin{cases} x - y + 9 & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 4 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

20. Determinar si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados

$$a) f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy) + \operatorname{sen} z \quad \text{en } (-1, 0, 3)$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y en } (1, 0)$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y en } (2, 3)$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y en } (2, 3)$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases} \quad \text{en } (a, a), a \in \mathbb{R}$$

$$f) f(x, y) = \begin{cases} \cos x & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y en } (1, 1)$$

$$g) f(x, y) = \begin{cases} \cos x & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \quad \text{en } (0, 1) \text{ y en } (1, 0)$$

$$h) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (0, 0)$$

21. Dada la función $f(x, y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$,

a) calcular su dominio

b) definirla —si es posible— en $\mathbb{R}^2 - \operatorname{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo \mathbb{R}^2 .

22. Hallar el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones

$$a) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - y)}{x^2 - y} & \text{si } x^2 \neq y \\ 2 & \text{si } x^2 = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 - y)}{x^2 - y} & \text{si } x^2 \neq y \\ 1 & \text{si } x^2 = y \end{cases} \\ \text{d) } f(x, y) &= \begin{cases} x^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{e) } f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) \\ \text{f) } f(x, y) &= \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

23. Hallar el dominio y los puntos de contiuidad de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } y \geq 2 \\ y + 2x + 1 & \text{si } y < 2 \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 + 4 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x^2 - y^2 & \text{si } x < 1 \end{cases} \\ \text{c) } f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\text{Sugerencia: graficar } f \\ \text{d) } f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } (x - 1)^2 + y^2 \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{si } (x - 1)^2 + y^2 > 4 \end{cases} \\ &\text{Sugerencia: graficar } f \\ \text{e) } f(x, y) &= \begin{cases} xy + xy^2 & \text{si } |x - 2| < 1 \\ 3xy & \text{si } |x - 2| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$