Transformaciones
(del plano y del espacio)

María del Carmen Calvo

El objetivo de estas notas es mostrar algunos métodos que permiten determinar en qué se transforma una región elemental del plano (o del espacio) cuando se le aplica una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$).

Introducción

Mencionaremos —sin demostración [1] — un resultado que nos facilitará la tarea en ciertos casos.

Teorema 1

Sean D^* y D dos regiones elementales y $\mathbf{T} : D^* \longrightarrow D$ una transformación de clase C^1 que satisface

(i) $J(\mathbf{T})(u, v) \neq 0$ *para todo* $(u, v) \in D^*$

(ii) $\mathbf{T} : \partial D^* \longrightarrow \partial D$ *es biyectiva*

Entonces, $\mathbf{T} : D^* \longrightarrow D$ *es biyectiva. Además, en virtud del Teorema de la Función Inversa, su inversa* $\mathbf{T}^{-1}$ *es también de clase* C^1.

Nota*:* $J(\mathbf{T})$ *denota al jacobiano de la transformación* $\mathbf{T}$.

El siguiente resultado de Algebra Lineal se podría obtener como corolario del teorema anterior, pero es más interesante dar una demostración directa.

Teorema 2

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un isomorfismo y D^* un paralelogramo. Entonces,

(i) $D = T(D^*)$ *es un paralelogramo*

(ii) los vértices de D son las imágenes de los vértices de D^*

[1] por no contar en este curso con los conceptos topológicos necesarios

Demostración:

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz asociada a T en las bases canónicas. Por ser T isomorfismo, $\det A \neq 0$.

Supongamos que P es un vértice de D^* y que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos de sus lados; luego,

$$D^* = \{P + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \ / \ 0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$$

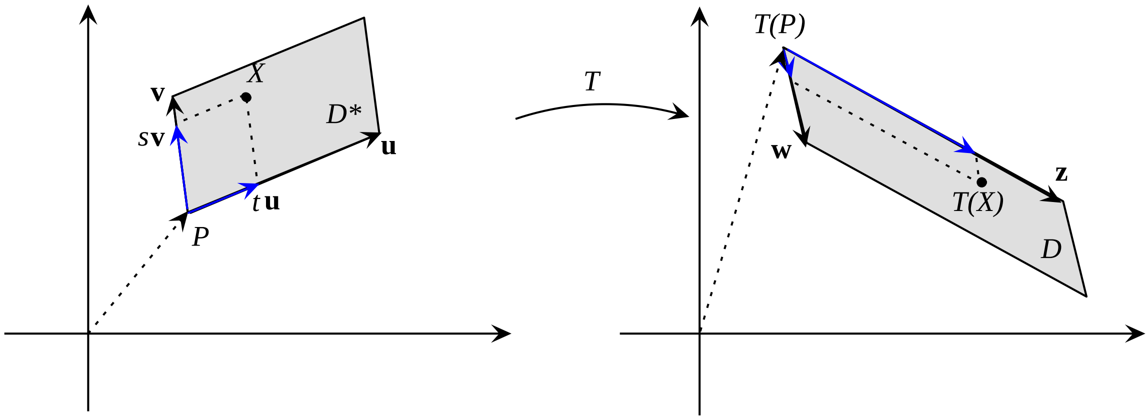
Llamemos

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) \qquad , \qquad \mathbf{z} = T(\mathbf{v})$$

y

$$D = \{T(P) + \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{z} \ / \ 0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1\}$$

al paralelogramo con uno de sus vértices en $T(P)$ y $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ como dos de sus lados.



Dado $X \in D^*$ existen $s, t \in [0,1]$ tales que $X = P + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, entonces

$$T(X) = T(P + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = T(P) + tT(\mathbf{u}) + sT(\mathbf{v}) \in D$$

De modo que

$$T(D^*) \subset D$$

Por otro lado, si tomamos un $Y \in D$, $Y = T(P) + \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{z}$ $(0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1)$

$$Y = T(P) + \lambda T(\mathbf{u}) + \mu T(\mathbf{v}) = T(P + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) \in T(D^*)$$

dado que, siendo $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1$, $P + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in D^*$ y por tanto podemos afirmar que

$$D \subset T(D^*)$$

Hemos probado entonces que $T(D^*) = D$.

Con respecto a los vértices, los de D^* son

$$P \quad , \quad P + \mathbf{u} \quad , \quad P + \mathbf{v} \quad , \quad P + \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

Y los de D [2]

$$T(P) \quad , \quad T(P) + \mathbf{w} = T(P + \mathbf{u}) \quad , \quad T(P) + \mathbf{z} = T(P + \mathbf{v}) \quad , \quad T(P) + \mathbf{w} + \mathbf{z} = T(P + \mathbf{u} + \mathbf{v})$$

es decir, las imágenes por T de los vértices de D^*, como queríamos probar.

[2] recordando que T es transformación lineal

El siguiente resultado es una generalización del anterior para transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Su demostración es análoga a la del teorema anterior sólo teniendo en cuenta que podemos describir a un paralelepípedo $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ en la forma

$$\mathcal{P} = \{A + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \ / \ 0 \leqslant r, s, t \leqslant 1\}$$

siendo: P un vértice de $\mathcal{P}$ y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ los vectores determinados por las aristas que concurren en P.

Teorema 3

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un isomorfismo y D^* un paralelepípedo. Entonces,

(i) $D = T(D^*)$ *es un paralelepípedo*

(ii) los vértices de D son las imágenes de los vértices de D^*

Transformaciones del Plano

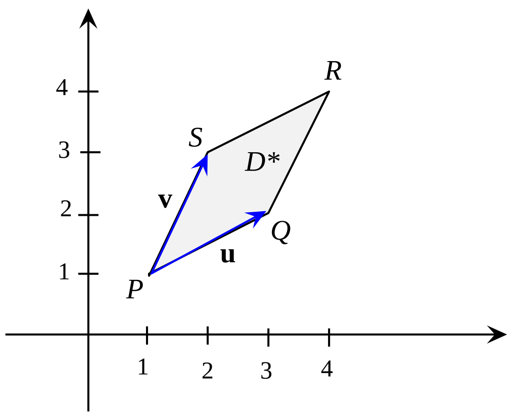
Estos tres primeros ejemplos son aplicaciones del Teorema 2.

❒ *Dada la transformación lineal* $T(x, y) = (3x+y, x-2y)$ *y el paralelogramo* D^* *cuyos vértices son:* $P = (1, 1)$ *,* $Q = (3, 2)$ *,* $R = (4, 4)$ *y* $S = (2, 3)$ hallar $D = T(D^*)$.

Para poder aplicar el Teorema 2 debemos verificar que T es un isomorfismo y para ello alcanza con ver que su determinante es no nulo. En efecto,

$$\det T = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

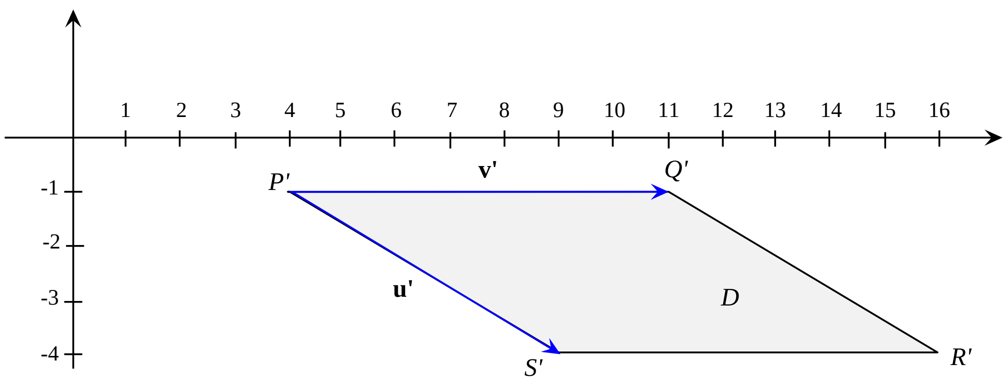
Por lo tanto T transforma el paralelogramo D^*



u = Q-P = (2,1) **v** = S-P = (1,2)

en el paralelogramo de vértices

$$P' = T(1, 1) = (4, -1) \quad , \quad Q' = T(3, 2) = (11, -1)$$
$$R' = T(4, 4) = (16, -4) \quad , \quad S' = T(2, 3) = (9, -4)$$



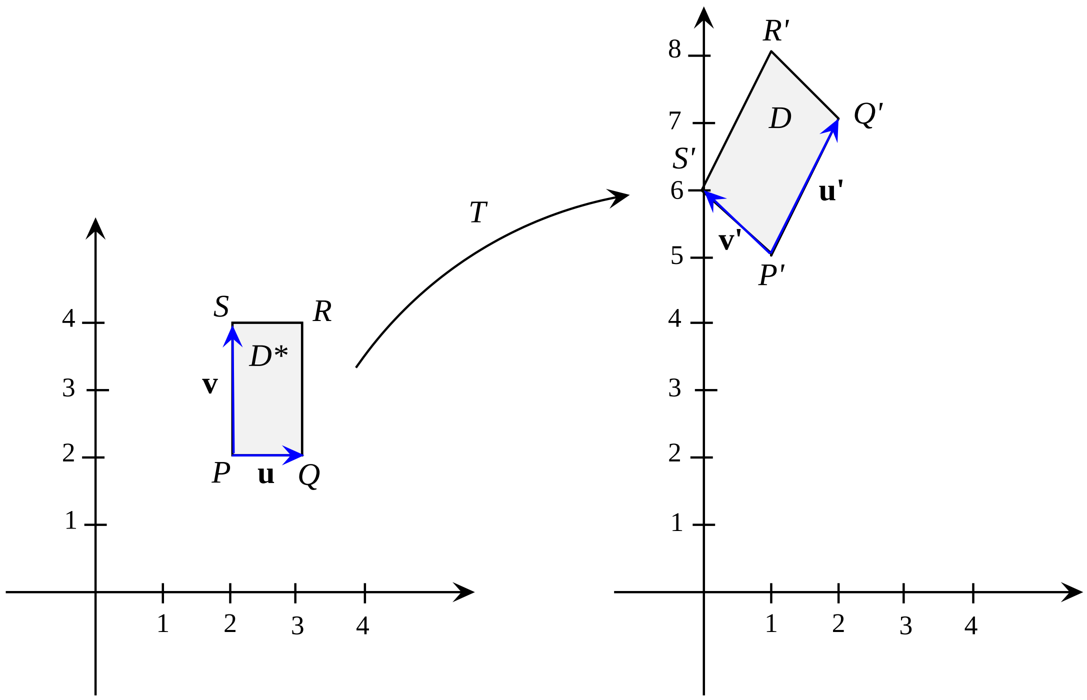
u'= Q'-P' = (7,0) **v'**= S'-P' = (5,-3)

❐ *Hallar una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *que transforme el rectángulo* D^* *cuyos vértices son:* $P = (2,2)$, $Q = (3,2)$, $R = (3,4)$ *y* $S = (2,4)$ *en el paralelogramo* D *de vértices:* $P' = (1,5)$, $Q' = (2,7)$, $R' = (1,8)$ *y* $S' = (0,6)$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene la forma

$$T(x,y) = (ax+by, cx+dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Debemos entonces encontrar la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ —inversible, dado que T tiene que transformar vectores independientes en vectores independientes— que haga que D^* se transforme en D



u = Q-P = (1,0) **v** = S-P = (0,2) **u'**= Q'-P' = (1,2) **v'**= S'-P' = (-1,1)

Nos ubicamos en el vértice P de D^* que queremos que se transforme en el vértice P' de D y pensamos a sus dos lados consecutivos como los vectores $\mathbf{u} = Q - P = (1,0)$ y $\mathbf{v} = S - P = (0,2)$.

Siendo estos vectores independientes en un espacio de dimensión 2, forman una base; luego, para hallar T alcanza con decir cuánto vale sobre $\mathbf{u}$ y sobre $\mathbf{v}$. Definimos entonces

$$T(1,0) = \mathbf{u}' = Q' - P' = (1,2) \qquad , \qquad T(0,2) = \mathbf{v}' = S' - P' = (-1,1)$$

Recordando que $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$

$$\begin{cases} a = 1 & \text{y} \quad c = 2 \\ 2b = -1 & \text{y} \quad 2d = 1 \end{cases}$$

Es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De modo que

$$T(x, y) = (x - \tfrac{1}{2}y, 2x + \tfrac{1}{2}y)$$

Verifiquemos que realmente cumple lo pedido:

- $T(P) = T(2, 2) = (2 - 1, 4 + 1) = (1, 5) = P'$
- $T(Q) = T(P + Q - P) = T(P + \mathbf{u}) = T(P) + T(\mathbf{u}) = (1, 5) + (1, 2) = (2, 7) = Q'$
- $T(R) = T(P + R - P) = T(P + \mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (1, 5) + (1, 2) + (-1, 1) = (1, 8) = R'$
- $T(S) = T(P + S - P) = T(P + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{v}) = (1, 5) + (-1, 1) = (0, 6) = S'$

Confirmamos así que T es la transformación lineal que buscábamos.

Observación

¿Era realmente necesario verificar que T manda efectivamente los vértices en los vértices?

Dicho de otro modo: dados dos paralelogramos, ¿es siempre posible encontrar una transformación lineal que transforme uno en el otro?

Sugerencia: revise lo que hicimos y analice si para definir T, ¿en algún momento usamos que P debía ir a P'?

Considere los siguientes paralelogramos y trate de ver si puede hallar T:

$$D^* = \{\lambda(1, 0) + \mu(0, 1) \;/\; 0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1\} \quad , \quad D = \{(3, 2) + t(1, 0) + s(0, 1) \;/\; 0 \leqslant s, t \leqslant 1\}$$

❒ *Hallar un rectángulo D^* y un isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(D^*) = D$, siendo*

$$D = \{(-3, 5) + t(1, 3) + s(-3, -2) \;/\; 0 \leqslant s, t \leqslant 1\}$$

El rectángulo que buscamos podemos describirlo en la forma

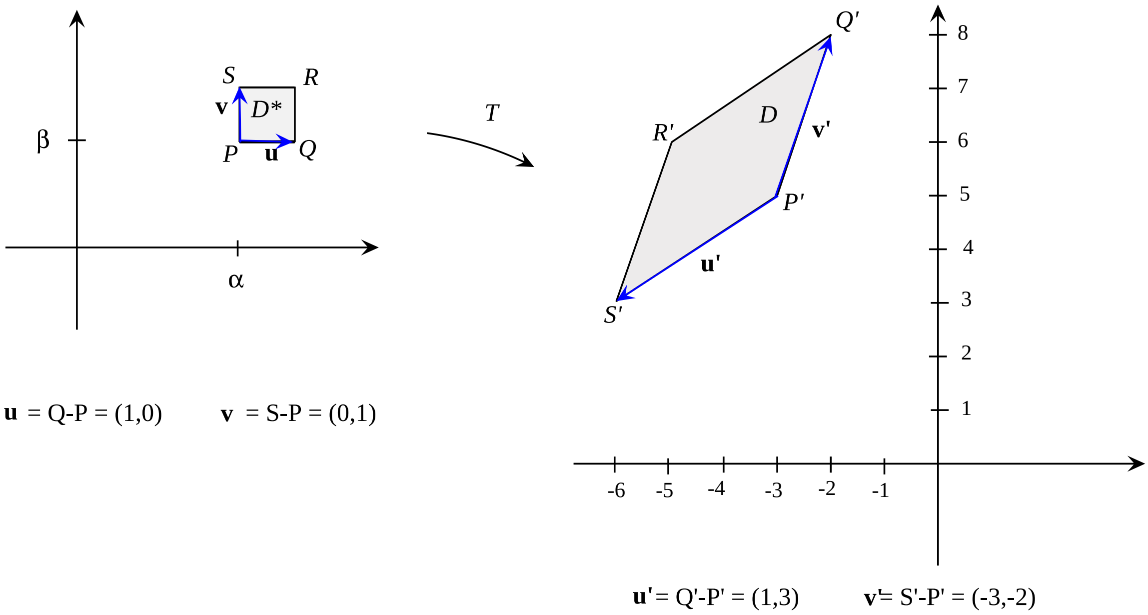
$$D^* = \{(\alpha, \beta) + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \;/\; 0 \leqslant s, t \leqslant 1\}$$

Tenemos entonces que hallar $P = (\alpha, \beta)$ (uno de sus vértices) y dos vectores *ortogonales* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que interpretaremos como los lados que concurren en el vértice P.

Recordando que siempre es posible hallar un isomorfismo que transforme una base cualquiera en otra base dada, no estaríamos imponiendo condiciones excesivas si tomamos

$$\mathbf{u} = (1, 0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = (0, 1)$$

Se trata entonces de encontrar únicamente las coordenadas de un vértice de D^* y un isomorfismo T tal que transforme D^* en el paralelogramo D dado



Con respecto al isomorfismo, queda determinado por tener que mandar la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ en la base $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\} = \{(1, 3), (-3, -2)\}$; i.e., T debe satisfacer

$$T(1, 0) = (1, 3) \qquad \text{y} \qquad T(0, 1) = (-3, -2)$$

Luego,

$$T(x, y) = (x - 3y, 3x - 2y)$$

Y las coordenadas (α,β) de P deben ser tales que

$$T(\alpha,\beta) = P' = (-3, 5)$$

Es decir,

$$(\alpha,\beta) = (3, 2)$$

Finalmente, el rectángulo buscado es

$$D^* = \{(3, 2) + t(1, 0) + s(0, 1) \;/\; 0 \leqslant s, t \leqslant 1\}$$

En cada uno de los casos siguientes partimos de una región elemental del plano D^* y de una transformación $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y tratamos de hallar $T(D^*)$. En todos los casos las transformaciones que consideraremos serán de clase C^1.

1. $D^* = [1,2] \times [0,\pi]$ — $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Sabemos que $T : \mathbb{R}_{>0} \times [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es biyectiva y es claro que $D^* \subset \mathbb{R}_{>0} \times [0,2\pi)$; luego, T es inyectiva sobre D^*.

Veamos en qué se transforma D^*. Si llamamos $(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, resulta $r^2 = x^2 + y^2$ con lo cual, para $(r,\theta) \in D^*$, es

$$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \qquad \text{e} \qquad y \geqslant 0$$

De esta manera comprobamos que

$$T(D^*) \subset D : \begin{cases} 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Pero por otro lado, dado $(x,y) \in D$, existen $r > 0$ y $\theta \in [0,2\pi]$ tales que

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Teniendo en cuenta que es $y \geqslant 0$, obtenemos

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

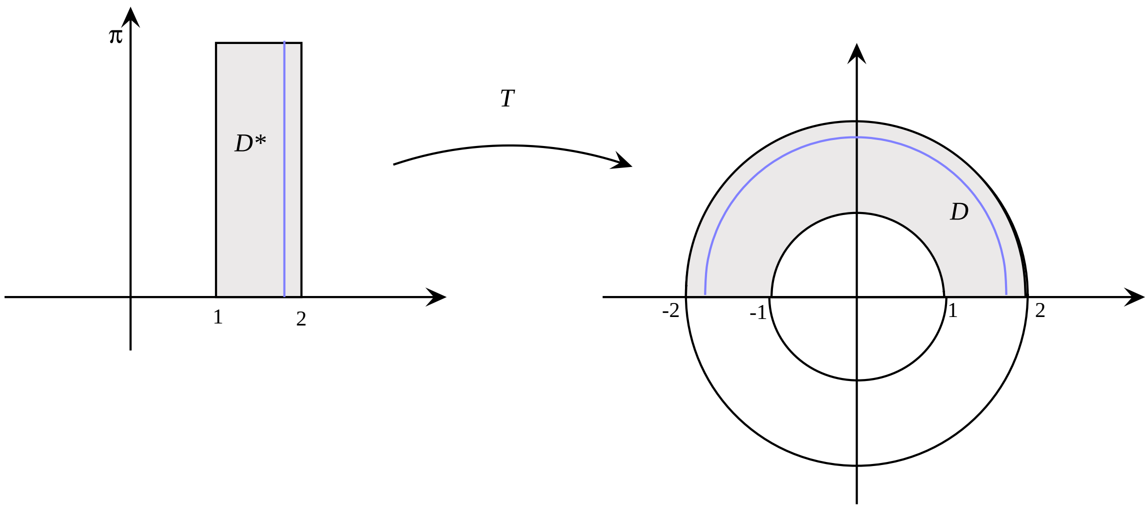
Y finalmente, de la desigualdad: $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ resulta

$$1 \leqslant r \leqslant 2$$

Concluimos entonces,

$$T(D^*) = D$$

Gráficamente,



También es claro que cada segmento vertical en el dominio se transforma en una semicircunferencia en el semiplano superior del codominio.

Además, T transforma biyectivamente ∂D^* en ∂D.

Todo esto hace que sea muy simple verificar que T y D^* satisfacen las hipótesis del Teorema 1, aunque no nos hizo falta en este caso para comprobar que T transforma biyectivamente D^* sobre D.

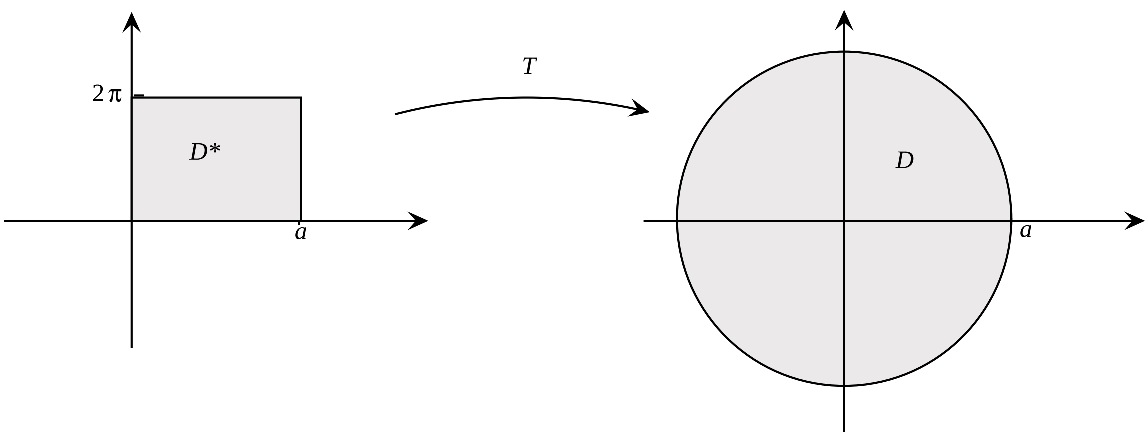
2. $D^* = [0, a] \times [0, 2\pi]$ — $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Dado $(r, \theta) \in D^*$, llamemos $(x, y) = T(r, \theta)$. Tenemos

$$x^2 + y^2 = r^2 \underset{\substack{\uparrow \\ (r,\theta)\in D^*}}{\leqslant} a^2$$

es decir, $(x, y) \in D: \quad u^2 + v^2 \leqslant a^2$. Luego,

$$T(D^*) \subset D$$

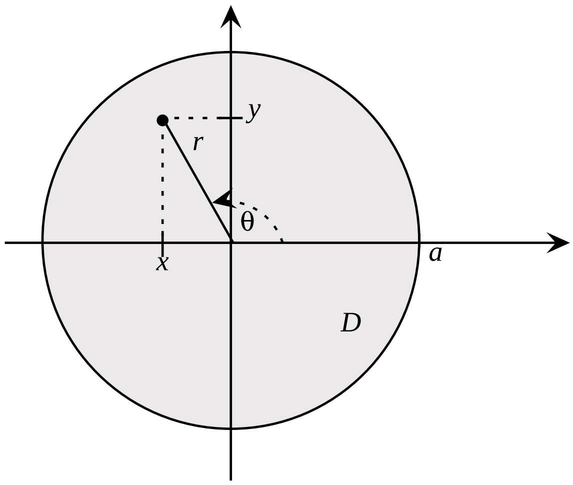


Nos queda por determinar si $D \subset T(D^*)$. Tomemos ahora un $(x, y) \in D$. Se tiene

$$x^2 + y^2 = r^2 \leqslant a^2$$

Siendo $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ un punto de la circunferencia unitaria, sabemos que existe un $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\frac{x}{r} = \cos\theta \qquad , \qquad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$$



Por lo tanto,

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \underset{\substack{\uparrow \\ 0\leqslant r\leqslant a \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}{=} T(r, \theta) \in T(D^*)$$

Ahora sí podemos afirmar que

$$T(D^*) = D$$

Analicemos si T y D^* satisfacen las hipótesis del Teorema 1

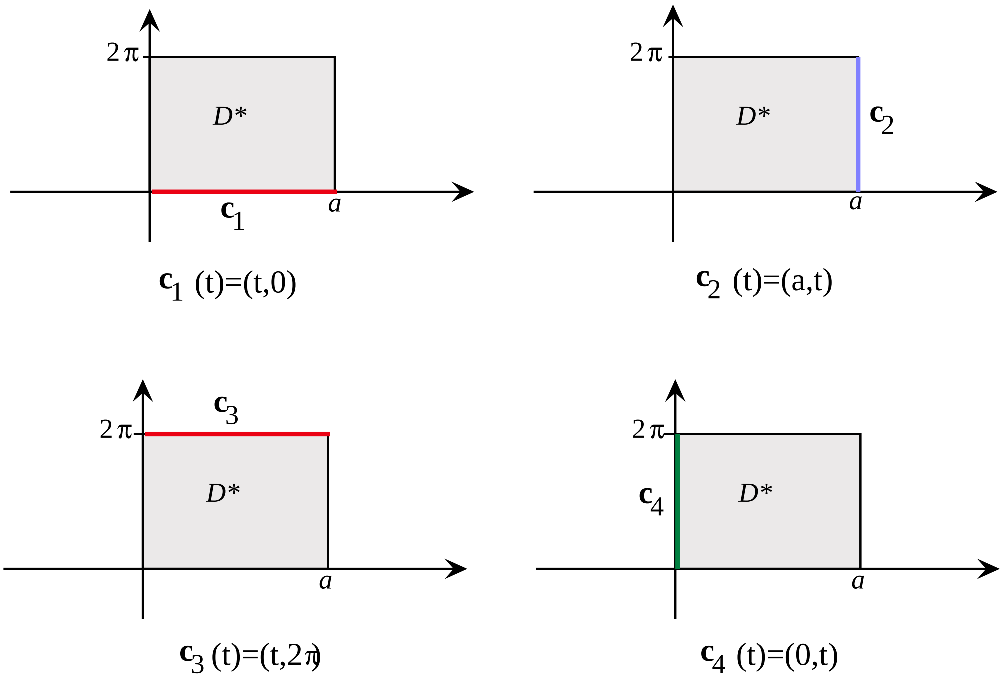
- D^* y D son regiones elementales del plano
- $T : D^* \longrightarrow D$ es de clase C^1
- $J(T)(r, \theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r \geqslant 0$

  Sólo podemos garantizar que $J(T)(r, \theta) \neq 0$ si reemplazamos a D^* por

$$D_1^* = (0, a] \times [0, 2\pi]$$

- $T : \partial D^* \longrightarrow \partial D$, ¿es biyectiva?

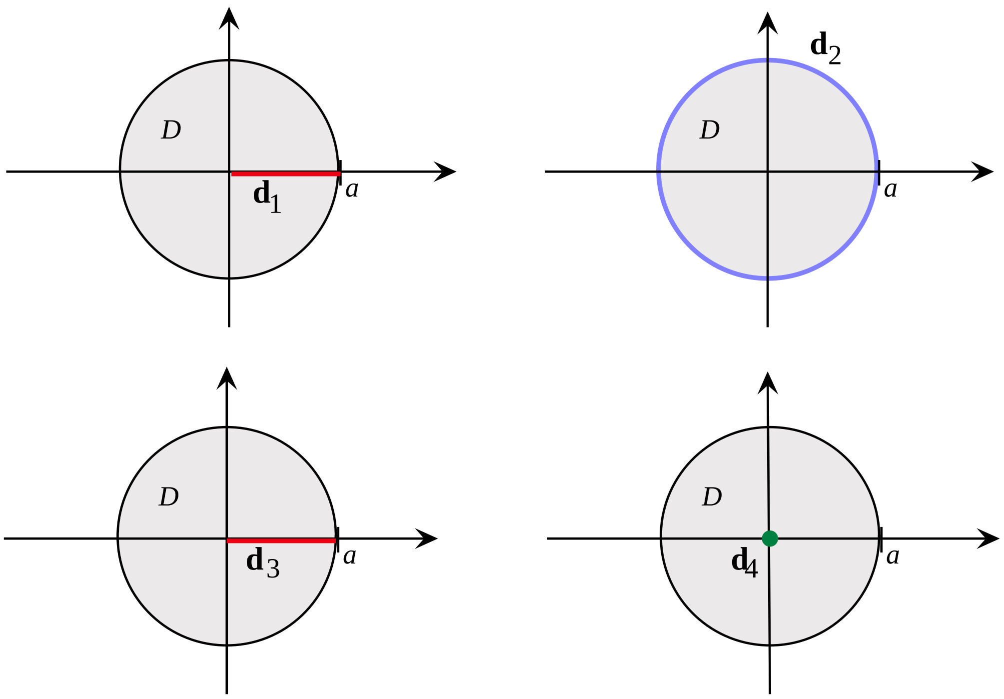
  Calculemos primero $T(\partial D^*)$. La frontera de D^* consta de cuatro segmentos



para hallar $T(\partial D^*)$ basta calcular

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_1(t) &= T(\mathbf{c}_1(t)) = T(t,0) = (t,0) && 0 \leqslant t \leqslant a\\
\mathbf{d}_2(t) &= T(\mathbf{c}_2(t)) = T(a,t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t) && 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\\
\mathbf{d}_3(t) &= T(\mathbf{c}_3(t)) = T(t,2\pi) = (t,0) && 0 \leqslant t \leqslant a\\
\mathbf{d}_4(t) &= T(\mathbf{c}_4(t)) = T(0,t) = (0,0) && 0 \leqslant t \leqslant 2\pi
\end{aligned}$$

El conjunto $T(\partial D^*)$ está entonces formado por las cuatro curvas que se muestran en la siguiente figura



Queda claro que T no transforma biyectivamente la frontera de D^* en la de D. Sólo con $\mathbf{d}_2$ cubrimos la frontera de D. No podemos entonces aplicar ese resultado.

Para obtener una transformación inyectiva que mande la frontera en la frontera deberíamos restringir el dominio a

$$D_2^* = (0, a] \times (0, 2\pi)$$

pero desde luego no cubriríamos el segmento $[0, a] \times \{0\} \subset D$.

Vale hacer notar que, si nuestro objetivo es usar esta transformación para aplicar el teorema de cambio de variable en una integrale doble, el hecho que el conjunto donde no se cumplen las hipótesis [3] tiene área cero hace que no tengamos inconvenientes.

3. $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ — $T(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

Cabe aclarar que esta región no es una región elemental, aunque sí se puede descomponer como unión de tales regiones.

Comencemos por analizar en qué se transforma el borde de D^*, formado por las circunferencias de radios 1 y 2.

Nos va a resultar útil observar que

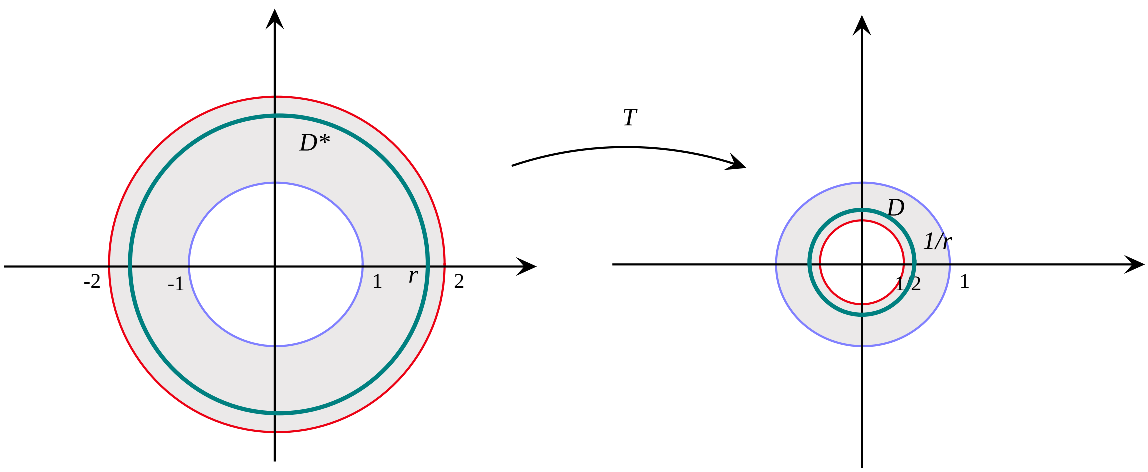
$$\|T(x, y)\|^2 = \left\|\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right\|^2 = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Entonces, llamando $(u, v) = T(x, y)$, obtenemos que

(a) $x^2 + y^2 = 1$ si y sólo si $u^2 + v^2 = 1$
(b) $x^2 + y^2 = 4$ si y sólo si $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$
(c) Más generalmente, si $1 \leqslant r \leqslant 2$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$$

Gráficamente [4],



[3]jacobiano no nulo, transformación inyectiva
[4]la curva del dominio y su transformada se representan en el mismo color

Esto muestra que
$$T(D^*) \subset D : \quad \frac{1}{4} \leqslant u^2 + v^2 \leqslant 1$$
Para verificar que también vale el otro contenido, tomemos $(u, v) \in D$ y veamos que proviene de un $(x, y) \in D^*$; i.e., busquemos un $(x, y) \in D^*$ tal que
$$(u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$
Recordando un cálculo anterior, (x, y) deberá cumplir
$$u^2 + v^2 = \|(u, v)\|^2 = \|T(x, y)\|^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$$
Luego,
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} = x(u^2 + v^2) \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -y(u^2 + v^2)$$
llegamos así a que debe ser
$$(x, y) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, -\frac{v}{u^2 + v^2}\right)$$
Es inmediato ahora comprobar que $T(x, y) = (u, v)$. En efecto,
$$\begin{aligned} T(x, y) &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \left(\frac{\frac{u}{u^2+v^2}}{\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}}, -\frac{-\frac{v}{u^2+v^2}}{\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}}\right) \\ &= \left(\frac{u}{u^2 + v^2}(u^2 + v^2), \frac{v}{u^2 + v^2}(u^2 + v^2)\right) \\ &= (u, v) \end{aligned}$$
Esto confirma que
$$T(D^*) = D$$
y al mismo tiempo que T es biyectiva, ya que encontramos $T^{-1}(u, v)$ para cada $(u, v) \in D$. También se podría haber utilizado el Teorema 1 en este caso dado que efectivamente se cumplen las hipótesis, lo que no es complicado de verificar.

Comentario

Si recordamos que —como conjuntos— $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, esta transformación no es más que la función
$$f(z) = \frac{1}{z}$$
dado que si $z = x + iy$,
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se identifica con}}}{=} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$
Mirado de esta forma es comprensible lo que sucede con las normas de cada punto y de su transformado por T y, por supuesto, la inyectividad de T.

¿En qué transforma T la región $D' : \quad 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1$?

4. ***D^*: triángulo limitado por*** $x = 0$**,** $y = 0$**,** $x+y = 2$ **—** $T(x, y) = (x+y, x^2-y)$

En primer lugar vamos a ver que esta transformación es inyectiva en una región del plano que contiene a D^*. Para ello supongamos que (x, y) , (s, t) son tales que

$$T(x, y) = T(s, t)$$

luego,

$$\begin{cases} x + y = s + t \\ x^2 - y = s^2 - t \end{cases}$$

Sumando

$$x + x^2 = s + s^2$$

completando cuadrados llegamos a que

$$(x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} = (s + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}$$

y de aquí a

$$|x + \tfrac{1}{2}| = |s + \tfrac{1}{2}|$$

Entonces, si $x, s \geqslant -\frac{1}{2}$ podemos concluir

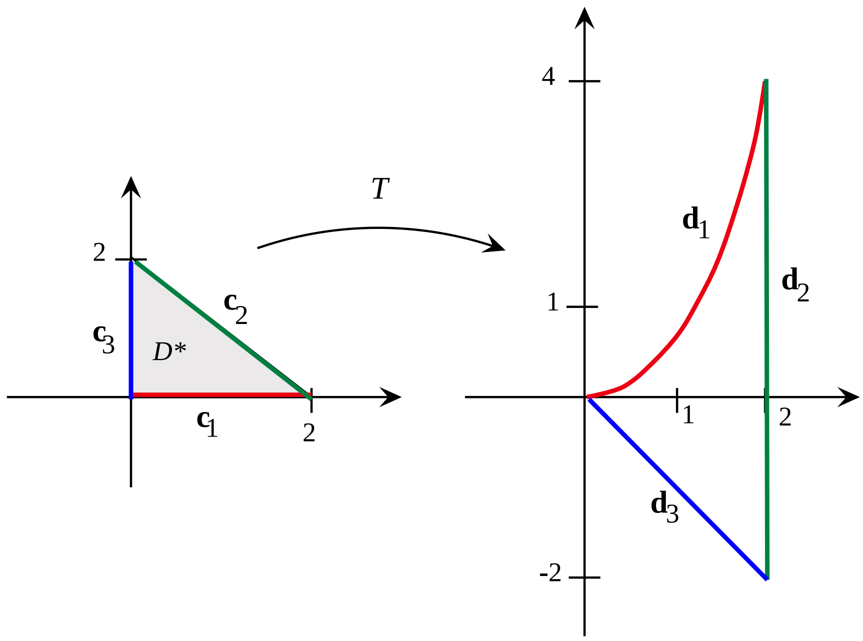
$$x = s$$

lo que a su vez implica que también es

$$y = t$$

Hemos probado que T es inyectiva en $[-\frac{1}{2}, +\infty) \times \mathbb{R}$ y es claro que $D^* \subset [-\frac{1}{2}, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Veamos a continuación en qué transforma T el borde de D^*. No es complicado si parametrizamos cada uno de los lados del triángulo.



(a) $\mathbf{c}_1 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{c}_1(t) = (t,0)$

Luego,

$$\mathbf{d}_1 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{d}_1(t) = T(\mathbf{c}_1(t)) = (t,t^2)$$

Es decir, el cateto $\mathbf{c}_1$ se transforma en la porción de la parábola $y = x^2$ que va de $(0,0)$ a $(2,4)$

(b) $\mathbf{c}_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{c}_1(t) = (t,-t+2)$

Luego,

$$\mathbf{d}_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{d}_2(t) = T(\mathbf{c}_2(t)) = (2,u^2+u-2) = (2,(t+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4})$$

Notemos que cuando $0 \leqslant t \leqslant 2$

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \leqslant t + \frac{1}{2} \leqslant \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} \leqslant \left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{25}{4} \\ -2 \leqslant (t+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4} \leqslant 4 \end{gathered}$$

Esto muestra que cuando $0 \leqslant t \leqslant 2$, la expresión $(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ toma –una sola vez [5] – todos los valores entre -2 y 4. O sea, la hipotenusa del triángulo se transforma en el segmento que une los puntos $(2,-2)$ y $(2,4)$.

(c) $\mathbf{c}_3 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{c}_3(t) = (0,t)$

Luego,

$$\mathbf{d}_3 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{d}_3(t) = T(\mathbf{c}_3(t)) = (t,-t)$$

Es decir, el cateto $\mathbf{c}_3$ se transforma en el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$.

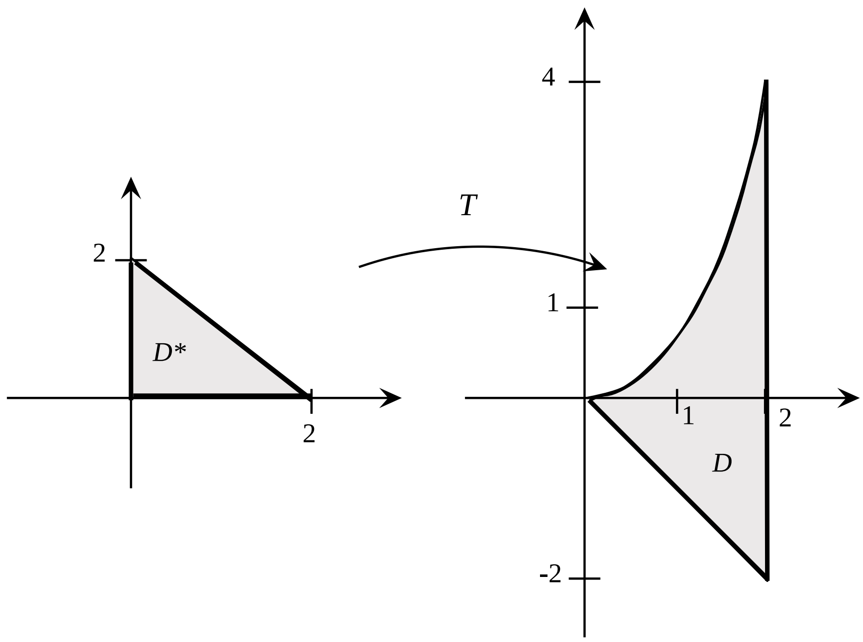
La transformación T y el conjunto D^* satisfacen las hipótesis del Teorema 1. La única que requiere un cálculo es ver que el jacobiano no se anula en D^*. Comprobémoslo:

$$J(T)(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2x < 0$$

para $x \geqslant 0$, condición que cumplen todos los puntos de D^*.

[5] ¿por qué?

De modo que podemos asegurar que $T : D^* \longrightarrow D$ es biyectiva

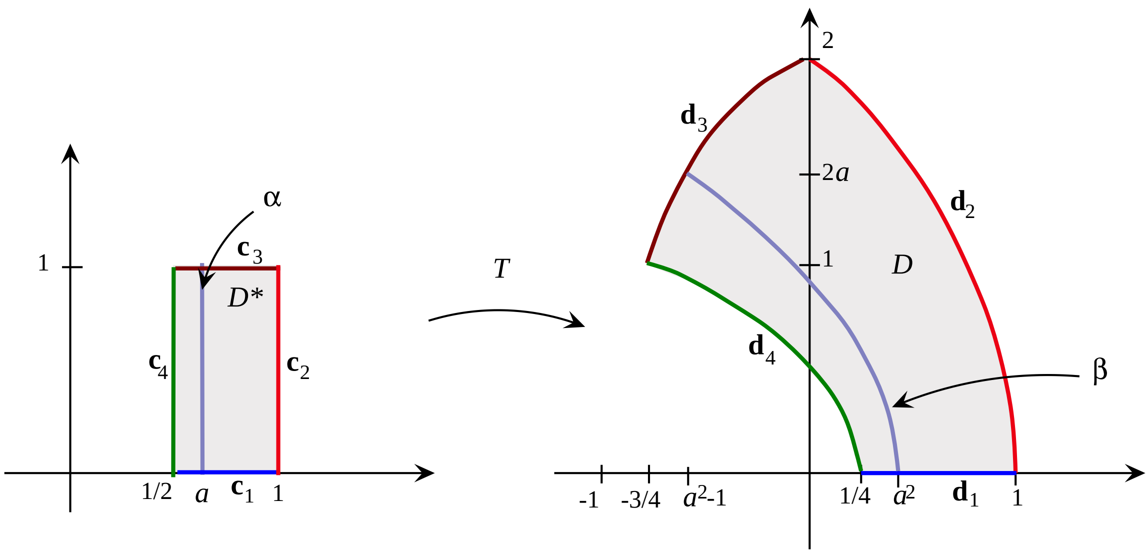


5. $D^* = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]$ — $T(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

En este caso la idea va a ser aplicar el Teorema 1. Comencemos calculando

$$J(T)(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4x^2 + 4y^2$$

Como $(0, 0) \notin D^*$, resulta que $J(T)(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in D^*$. Debemos ahora estudiar en qué se transforma la frontera de D^* y si lo hace en forma biyectiva. Para ello parametrizamos los lados del rectángulo y calculamos las imágenes de estos segmentos, lo que nos dará una parametrización del borde de D



$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}_1(t) = T(\mathbf{c}_1(t)) = T(t,0) = (t^2,0) && \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\\
&\mathbf{d}_2(t) = T(\mathbf{c}_2(t)) = T(1,t) = (1-t^2,2t) && 0 \leqslant t \leqslant 1\\
&\mathbf{d}_3(t) = T(\mathbf{c}_3(t)) = T(t,1) = (t^2-1,2t) && \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\\
&\mathbf{d}_4(t) = T(\mathbf{c}_4(t)) = T(\tfrac{1}{2},t) = (\tfrac{1}{4}-t^2,t) && 0 \leqslant t \leqslant 1
\end{aligned}
$$

Es claro a partir de aquí que el lado $\mathbf{c}_1$ se transforma en el segmento $\mathbf{d}_1$ mientras que los otros tres se transforman en porciones de parábolas (de eje horizontal).

La biyectividad de $T : \partial D^* \longrightarrow \partial D$ también es evidente a partir de las parametrizaciones anteriores y de sus imágenes.

De modo entonces que podemos aplicar el Teorema 1 y concluir que T aplica biyectivamente D^* sobre D.

Observación

También podríamos haber llegado a la misma conclusión sin la ayuda de este resultado. En efecto, si tomamos un segmento vertical cualquiera, contenido en D^*,

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (a,t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

se transforma por T en la curva

$$\boldsymbol{\beta}(t) = T(\boldsymbol{\alpha}(t)) = T(a,t) = (a^2-t^2,2at) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

que es la porción de la parábola $x = a^2 - \frac{y^2}{4a^2}$ que une los puntos $(a^2,0)$ y $(a^2-1,2a)$ (cf. gráfico anterior).

Cuando a se mueve entre $\frac{1}{2}$ y 1, el segmento $\boldsymbol{\alpha}$ *barre* todo el rectángulo D^* y la curva $\boldsymbol{\beta}$ hace lo propio en la región D.

Comentario:

Recordando nuevamente que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (como conjuntos) y teniendo presente el producto definido en $\mathbb{C}$ obtenemos

$$z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2-y^2+i\,2xy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{se identifica con}}}{=} (x^2-y^2,2xy)$$

Podemos pensar entonces que T se identifica con la función

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = z^2$$

6. ***Siendo*** $T(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$***, hallar una región elemental*** D^* ***de modo que*** $T(D^*)$ ***sea el rectángulo*** D ***dado por***

$$D : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 4 \\ 2 \leqslant v \leqslant 8 \end{cases}$$

Si llamamos $(u,v) = T(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, pretendemos que se cumpla

$$1 \leqslant u \leqslant 4 \qquad \text{y} \qquad 2 \leqslant v \leqslant 8$$

cada vez que $(x,y) \in D^*$. Pero entonces los $(x,y) \in D^*$ deben ser tales que

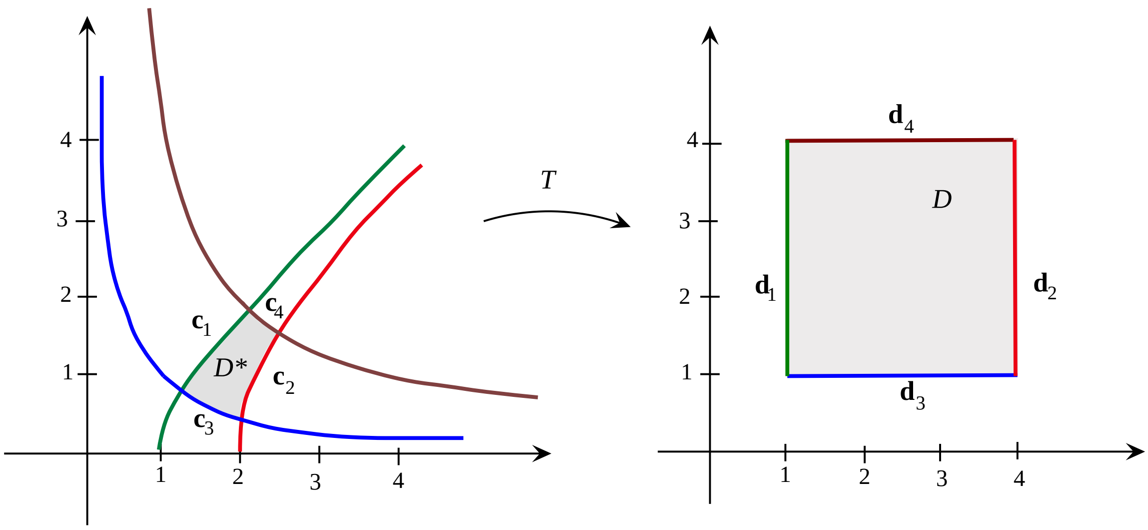
$$1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4 \qquad \text{y} \qquad 2 \leqslant 2xy \leqslant 8$$

o sea,

$$1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4 \qquad \text{y} \qquad 1 \leqslant xy \leqslant 4$$

Graficamos entonces las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = 1 \quad , \quad x^2 - y^2 = 4 \quad , \quad xy = 1 \quad , \quad xy = 4$$



y resulta razonable ahora pensar que la región D^* que estamos buscando es la que está limitada por dichas hipérbolas. Definamos entonces

$$D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4 \quad , \quad 1 \leqslant xy \leqslant 4\}$$

y comprobemos que $T(D^*) = D$.

Para ello vamos a aplicar el Teorema 1. Sabemos del ejemplo anterior que

$$JT(x,y) = 4x^2 + 4y^2$$

y por lo tanto podemos afirmar que no se anula en D^*. Como además T es de clase C^1, sólo nos resta ver que T transforma biyectivamente ∂D^* en ∂D; pero esto es inmediato pues cada arco de hipérbola del borde de D^* se trasnforma en un segmento de la frontera de D. Las intersecciones de las hipérbolas corresponden (biyectivamente) a las intersecciones de los segmentos del borde de D.

Concluimos que

$$T : D^* \longrightarrow D \quad \text{es biyectiva}$$

Veamos por último una aplicación al cálculo de integrales dobles.

Expresar

$$\iint_{D^*} f(x,y)\, dxdy$$

como una integral sobre un rectángulo, siendo D^* la región hallada en el ejemplo anterior y f una función continua en D.

Lo hecho en el ejemplo anterior nos sugiere pensar en la transformación T^{-1} que transforma biyectivamente a D en D^* y es de clase C^1. Podemos aplicar el teorema de cambio de variables en integrales dobles

$$\iint_{D^*} f(x,y)\, dxdy = \iint_D f\circ T^{-1}(u,v)\, |JT^{-1}(u,v)|\, dudv$$

Recordemos que $JT(x,y) = 4x^2 + 4y^2$, de modo que

$$J(T^{-1})(u,v) = \frac{1}{JT(T^{-1}(u,v))} \underset{(x,y)=T^{-1}(u,v)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4x^2+4y^2}$$

Para poder expresar este jacobiano en términos de su variable –(u,v)– hacemos lo siguiente:

$$u^2+v^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2$$

de donde,

$$x^2+y^2 = \sqrt{u^2+v^2}$$

con lo cual

$$J(T^{-1})(u,v) = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}$$

Finalmente,

$$\iint_{D^*} f(x,y)\, dxdy = \iint_D f\circ T^{-1}(u,v)\, \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\, dudv$$

Aplicación

Consideremos en primer lugar la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^3$$

y calculemos su integral sobre D^*

$$\iint_{D^*} (x^2+y^2)^3\, dxdy = \iint_D f(T^{-1}(u,v)) \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\, dudv$$

Cuando calculamos $T^{-1}(u,v)$ vimos que si $(x,y) = T^{-1}(u,v)$, entonces

$$x^2+y^2 = \sqrt{u^2+v^2}$$

Luego,

$$f(T^{-1}(u,v)) = \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3 = (u^2+v^2)^{3/2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{D^*} f(x,y)\, dxdy &= \iint_D f\circ T^{-1}(u,v)\, \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\, dudv = \iint_D (u^2+v^2)^{3/2} \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\, dudv \\
&= \frac{1}{4}\iint_D u^2+v^2\, dudv = \frac{1}{4}\int_1^4 \left(\int_1^4 u^2+v^2\, du\right) dv = \frac{1}{4}\int_1^4 \left[\frac{u^3}{3}+v^2u\Big|_1^4\right] dv \\
&= \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{64}{3}+4v^2-\frac{1}{3}-v^2\, dv = \frac{1}{4}\int_1^4 3v^2+\frac{63}{3}\, dv = \frac{1}{4}[v^3+\frac{63}{3}v]\Big|_1^4 \\
&= \frac{126}{4}
\end{aligned}$$

Considerando en cambio $f(x,y)=1$ calculamos el área de D^*. En efecto,

$$\begin{aligned}
A(D^*) &= \iint_{D^*} dxdy = \iint_D |J(T^{-1})(u,v)|\, dudv = \iint_D \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\, dudv \\
&= \int_1^4 \left(\int_1^4 \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\, du\right) dv \underset{v>0}{\underset{\uparrow}{=}} \int_1^4 \left(\int_1^4 \frac{1}{4\sqrt{u^2/v^2+1}}\, \frac{1}{v}\, du\right) dv \\
&\underset{\substack{s=u/v \\ ds=\frac{1}{v}du}}{\underset{\uparrow}{=}} \int_1^4 \left(\int_{1/v}^{4/v} \frac{1}{4\sqrt{s^2+1}}\, ds\right) dv = \frac{1}{4}\int_1^4 \operatorname{argsenh}(\tfrac{4}{v}) - \operatorname{argsenh}(\tfrac{1}{v})\, dv \\
&= \frac{1}{4}\left[v \operatorname{argsenh}(\tfrac{4}{v}) + 4\ln(\sqrt{v^2+16}+v)\right]\Bigg|_1^4 \\
&\qquad - \frac{1}{4}\left[v \operatorname{argsenh}(\tfrac{1}{v}) + \ln(\sqrt{v^2+1}+v)\right]\Bigg|_1^4 \\
&= \frac{11}{2}\operatorname{argsenh} 1 - \frac{3}{2}\operatorname{argsenh} 4 - \operatorname{argsenh}(\tfrac{1}{4}) + 3
\end{aligned}$$

Transformaciones del Espacio

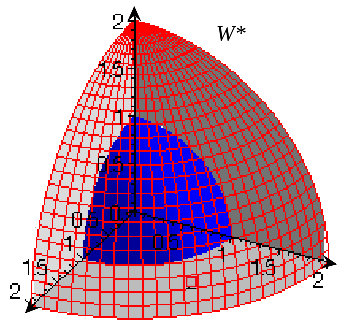
En los siguientes ejemplos se analizan situaciones que pueden dar ideas sobre cómo encarar el cálculo de una integral triple aplicando el teorema de cambio de variable con el objeto de facilitar los cálculos.

1. ***Dada la región***

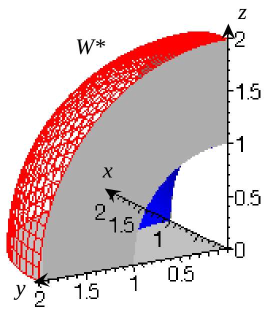
$$W^* : \begin{cases} 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \\ x, y, z \geqslant 0 \end{cases}$$

hallar una transformación de clase C^1, $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y un paralelepípedo W tales que T transforme –de manera biyectiva– el parelelepípedo W en la región W^* y utilizarlos para calcular el volumen de W^*.

Comencemos por graficar W^*



de frente



rotada

Esta región se presta especialmente para describirla en coordenadas esféricas:

$$W^* : \begin{cases} 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Y es precisamente esta descripción lo que sugiere cómo definir T dado que si tomamos

$$W = [1, 2] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \times [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

es claro que

$$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)$$

es de clase C^1 y transforma biyectivamente el paralelepípedo W en W^*.

Para calcular la integral vamos a necesitar el jacobiano de T, que como calculamos oportunamente es

$$J(T)(\rho,\theta,\phi) = -\rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Sólo se anula sobre un segmento —$[(0,0,0),(0,0,2)]$— del borde de W^*. Luego, como este conjunto tiene volumen cero no nos impide usar el teorema de cambio de variable en una integral triple para obtener finalmente el volumen de W^*

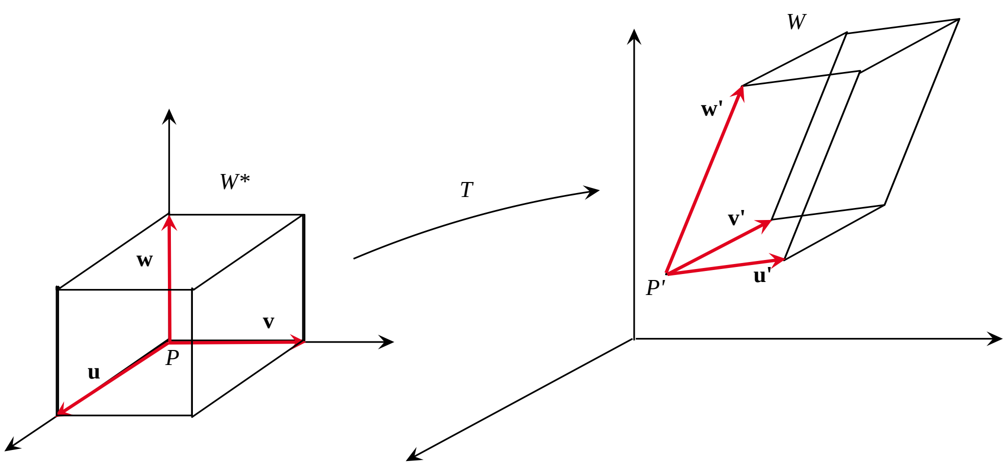
$$\begin{aligned} V(W^*) &= \iiint_{W^*} dxdydz = \iiint_W |JT(\rho,\theta,\phi)|\, d\rho d\theta d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho^2 |\operatorname{sen}\phi| d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &\underset{\operatorname{sen}\phi\geqslant 0}{\underset{\uparrow}{=}} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{7}{3}\int_0^{\pi/2} (-\cos\phi)\Big|_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{7}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

NOTA: por supuesto se podría haber calculado el volumen de W^* como la octava parte de la diferencia entre los volúmenes de las dos esferas involucradas.

2. ***Hallar una transformación T de clase C^1 y un paralelepípedo recto $W^* \subset \mathbb{R}^3$ de modo que T lo transforme (de manera biyectiva) en el paralelepípedo W que tiene a $P' = (1,1,1)$ como uno sus vértices y a $\mathbf{u}' = (1,2,1)$, $\mathbf{v}' = (-2,3,1)$ y $\mathbf{w}' = (-1,2,5)$ como las aristas que concurren en P'. Aplicando los resultados obtenidos calcular***

$$\iiint_W \cos z\, dxdydz$$

El siguiente gráfico muestra esquemáticamente lo que queremos obtener



Notemos que W es efectivamente un paralelepípedo. Para ello basta confirmar que los vectores $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{w}'$ son linealmente independientes y esto se ve, por ejemplo calculando

$$\det\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix} = 32 \neq 0$$

Pensando en el teorema 3 y observando el gráfico anterior, vamos a definir primero un isomorfismo $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique

$$L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}' \quad , \quad L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}' \quad , \quad L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$$

Para facilitar las cuentas podemos elegir

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{w} = (0, 0, 1)$$

Luego, la matriz de L en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$L(x, y, z) = A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = (x - 2y - z, 2x + 3y + 2z, x + y + 5z)$$

Ya conseguimos el paralelepípedo recto $W^* = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ pero esta transformación L no cumple lo que queremos pues, por ejemplo, $L(P) = L(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \notin W$, pero si trasladamos el paralelepípedo $L(W^*)$ hasta el punto P' [6] entonces sí habremos encontrado la transformación. Basta entonces definir

$$T(x, y, z) = L(x, y, z) + P' = (x - 2y - z + 1, 2x + 3y + 2z + 1, x + y + 5z + 1)$$

Es claramente de clase C^1 y biyectiva. Además, como sólo difiere de L en una constante, tiene la misma matriz jacobiana de L que, por ser transformación lineal, coincide con la matriz A. Por lo tanto ya tenemos calculado el jacobiano de T

$$J(T)(x, y, z) = \det(A) = 32$$

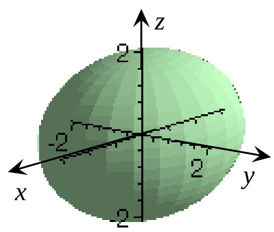
[6] haciendo que el vértice que está en el origen se traslade hasta P'

Calculemos finalmente la integral usando el Teorema de Cambio de Variable

$$\begin{aligned}
\iiint_W \cos z \, dxdydz &= \iiint_{W^*} \cos(T_3(u,v,w)) \, |J(T)(u,v,w)| \, dudvdw \\
&= 32 \iiint_{W^*} \cos(u+v+5w+1) \, dudvdw \\
&= 32 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \cos(u+v+5w+1) \, dudvdw \\
&= 32 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(u+v+5w+1)\Big|_0^1 \, dvdw \\
&= 32 \int_0^1 \int_0^1 [\operatorname{sen}(v+5w+2) - \operatorname{sen}(v+5w+1)] \, dvdw \\
&= 32 \int_0^1 [-\cos(v+5w+2) + \cos(v+5w+1)]\Big|_0^1 \, dw \\
&= 32 \int_0^1 [2\cos(5w+2) - \cos(5w+3) - \cos(5w+1)] \, dw \\
&= \frac{32}{5} [2\operatorname{sen}(5w+2) - \operatorname{sen}(5w+3) - \operatorname{sen}(5w+1)]\Big|_0^1 \\
&= \frac{32}{5} [2\operatorname{sen} 7 - \operatorname{sen} 8 - \operatorname{sen} 6 - 2\operatorname{sen} 2 + \operatorname{sen} 3 + \operatorname{sen} 1]
\end{aligned}$$

3. ***Calcular el volumen del elipsoide***

$$W: \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \leqslant 1$$



Escribiendo la inecuación que define a W en la forma

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \leqslant 1$$

resulta claro que $(x,y,z) \in W$ si y sólo si $(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ pertenece a la esfera unitaria (en este caso sólida).

Esto sugiere utilizar la transformación de coordenadas esféricas; i.e., definimos

$$T(\rho,\theta,\phi) = (3\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 2\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\rho\cos\phi)$$

sobre el paralelepípedo

$$W^* = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

Sabemos que T es de clase C^1 y transforma biyectivamente W^* en W salvo un conjunto de volumen cero. Podemos entonces utilizar T para calcular el volumen de W. En este caso,

$$J(T)(\rho,\theta,\phi) = -12\rho^2\operatorname{sen}\phi \neq 0$$

salvo también un conjunto de volumen cero, resulta

$$\begin{aligned}
V(W) &= \iiint_W dudvdw = \iiint_{W^*} |JT(\rho,\theta,\phi)|\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \iiint_W 12\rho^2\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= 12\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\int_0^1 \rho^2\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 12\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}(-\cos\phi)\Big|_0^{\pi}\, d\theta = 8\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$

NOTA: trabajando de igual forma se comprueba que el volumen de un elipsoide de semiejes a , b y c es: $\frac{4}{3}\pi\, abc$.

4. ***Dado el sólido W^* ubicado en el primer octante y limitado por los cilindros hiperbólicos***

$$xy = 1 \quad , \quad xy = 9 \quad , \quad xz = 4 \quad , \quad xz = 16 \quad , \quad yz = 5 \quad , \quad yz = 10$$

hallar una transformación T de clase C^1 que transforme biyectivamente el sólido W^* en un paralelepípedo recto W y utilizarla para calcular el volumen de W^*.

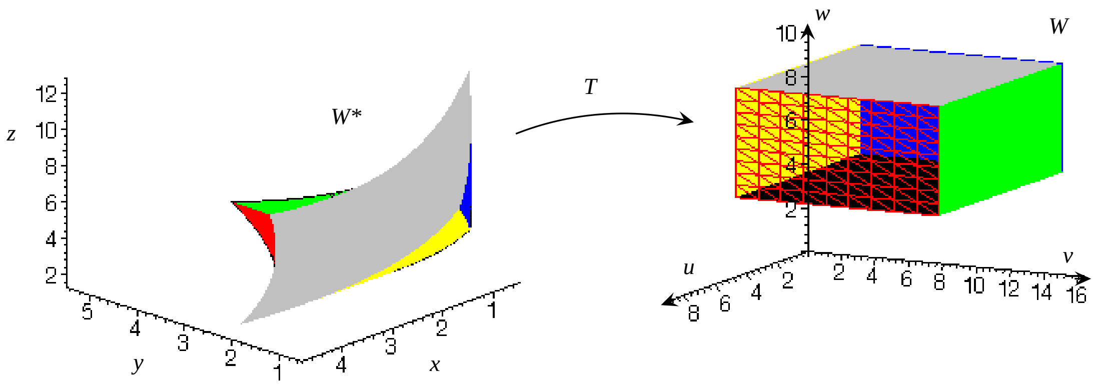
Argumentando como lo hicimos en un ejemplo anterior, [7] si definimos

$$T(x,y,z) = (xy, xz, yz)$$

resulta que T —que claramente es de clase C^1— transforma biyectivamente el sólido W^* en el paralelepípedo

$$W : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 9 \\ 4 \leqslant v \leqslant 16 \\ 5 \leqslant w \leqslant 10 \end{cases}$$

[7]Ejemplo 6 de la sección *Transformaciones del Plano*



Nota: *cada 'cara' de W* es parte de una hoja de uno de los cilindros hiperbólicos y se corresponde -vía T- con la cara del mismo color del paralelepípedo W. Cabe aclarar que el sólido W* ha sido rotado para su mejor visualización.*

Para calcular el volumen de W^* sólo nos resta calcular el jacobiano de T^{-1}, que la transformación que vamos a usar en el teorema de cambio de variable. Nos va a convenir calcular primero

$$J(T)(x,y,z) = \det MJT(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix} = -2xyz \neq 0$$

para $(x,y,z) \in W^*$.

De aquí, si llamamos $(x,y,z) = T^{-1}(u,v,w)$, obtenemos

$$J(T^{-1})(u,v,w) = \frac{1}{JT(T^{-1}(u,v,w))} = -\frac{1}{2xyz}$$

Para encontrar la expresión de este jacobiano en términos de su variable (u,v,w) notemos lo siguiente

$$xyz = uz \quad , \quad xyz = yv \quad , \quad xyz = xw$$

Luego,

$$(xyz)^3 = xyz \, . \, uvw$$

de donde,

$$uvw = (xyz)^2$$

Pero como aquí tanto x,y,z como u,v,w son números positivos,

$$xyz = \sqrt{uvw} = \sqrt{u}\,\sqrt{v}\,\sqrt{w}$$

Por lo tanto,

$$J(T^{-1})(u,v,w) = -\frac{1}{2xyz} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uvw}}$$

Nota: no es complicado hallar $T^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{v\sqrt{u}}{\sqrt{vw}}, \frac{w\sqrt{u}}{\sqrt{vw}}, \sqrt{\frac{vw}{u}}\right)$, válida para (u,v,w) en el primer octante.

Ya podemos calcular el volumen de W^*,

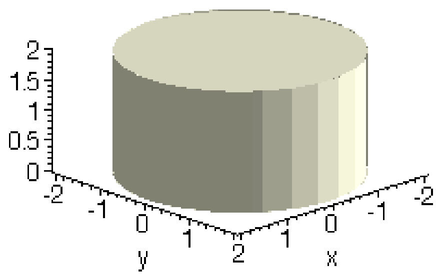
$$
\begin{aligned}
V(W^*) &= \iiint_{W^*} dxdydz = \iiint_W |J(T^{-1})(u,v,w)|\, dudvdw \\
&= \iiint_W \frac{1}{2\sqrt{uvw}}\, dudvdw = \frac{1}{2}\int_1^9 \int_4^{16}\int_5^{10} \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{v}}\frac{1}{\sqrt{w}}\, dudvdw \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{¿por qué?}}}{=} \frac{1}{2}\left(\int_1^9 u^{-1/2}\, du\right)\left(\int_4^{16} u^{-1/2}\, du\right)\left(\int_5^{10} u^{-1/2}\, du\right) \\
&= \frac{1}{2}[2u^{1/2}]\Big|_1^9 [2u^{1/2}]\Big|_4^{16} [2u^{1/2}]\Big|_5^{10} = 4[3-1][4-2][\sqrt{10}-\sqrt{5}] \\
&= 16\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}
$$

5. ***Calcular***

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2} - z\, dxdydz$$

donde W ***es el sólido limitado por el cilindro*** $x^2+y^2=4$ ***y los planos*** $z=0$ ***y*** $z=2$***.***

Teniendo en cuenta la región sobre la que debemos integrar,



parece más razonable en este caso utilizar las coordenadas cilíndricas. Sea entonces

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$$

Esta transformación es de clase C^1 y transforma biyectivamente –salvo un conjunto de volumen cero– el paralelepípedo

$$W^* = [0,2]\times[0,2\pi]\times[0,2]$$

Como además su jacobiano es

$$J(T)(r,\theta,z) = r \neq 0$$

salvo un conjunto de volumen cero, podemos aplicar el teorema de cambio de variable para obtener,

$$\begin{aligned}
\iiint_W \sqrt{x^2+y^2} - z\, dxdydz &= \iiint_{W^*} f \circ T(r,\theta,z) |JT(r,\theta,z)|\, dr d\theta dz \\
&= \iiint_{W^*} (r-z)\, r \quad dr\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^2 \left(\tfrac{r^3}{3} - \tfrac{r^2}{2} z\right)\Big|_0^2 dz\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [\tfrac{8}{3} - 2z]\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} [\tfrac{8}{3} z - z^2]\Big|_0^2 dz\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

donde, para ilustrar mejor la aplicación del teorema hemos llamado $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z$.