

Práctica 1: Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$a) |x + 3| < 1 \qquad b) |3x - 1| < |x - 1| \qquad c) |x - 3| \geq 1$$

$$d) |x| > |x + 3| \qquad e) \left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1$$

2. Representar los siguientes conjuntos en la recta real.

$$(a) \{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$$

$$(b) \{x : |x - 3| < |2 - x|\}$$

$$(c) \{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$$

$$(d) A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$$

$$(e) B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$$

$$(f) C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$$

3. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$a) |a + b| = |a| + |b| \qquad b) |a + b| < |a| + |b|$$

$$c) |a - b| = |a| + |b| \qquad d) |a - b| < |a| + |b|$$

$$e) ||a| - |b|| = |a - b| \qquad f) ||a| - |b|| < |a - b|$$

4. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

$$a) a < a^2 \qquad b) a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$c) a > 0 \Rightarrow ab \geq b. \qquad d) a + b \geq \max\{a, b\}$$

5. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

6. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

- i. $\mathbb{R}_{>0}$;
- ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

(b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:

- i. \mathbb{Z} ;
- ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$;
- iii. $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

7. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

$$a) A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35 \right\} \qquad b) A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$c) A = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad d) A = \left\{ \frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

8. (a) Considerar el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. Calcule su supremo y concluya que A no tiene máximo.

(b) Dado el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q}_{>0} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$, calcule su ínfimo y concluya que B no tiene mínimo.

9. Calcular

$$a) \sup \left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad b) \sup \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$c) \inf \left\{ \frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad d) \inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$$

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo respectivamente.

(a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

(c) Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$.

(d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$.

11. Calcular $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\left| \frac{n+1}{n} - \ell \right| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

| | | | | |
|---------------|-----|-------|---------|-----------|
| ε | 0,1 | 0,027 | 0,00001 | 10^{-6} |
| n_0 | | | | |

12. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

Sugerencia: Notar que a_n y b_n constan de $n + 1$ términos. Usar el principio de comparación.

13. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.

- (a) Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.
 (b) Encontrar, si existen, $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

14. Sean $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a_0 > b_0 > 0$. Se consideran las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas recurrentemente por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) $a_n \geq b_n$ para todo natural n .
 (b) $\{a_n\}_n$ es decreciente y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
 (c) $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

15. Sea a_0 un número positivo. Se define la siguiente sucesión dada por recurrencia:

$$a_{n+1} := \text{sen}(a_n).$$

Probar que $\{a_n\}_n$ es una sucesión convergente y calcular su límite.

16. (a) Probar que $\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(b) Calcular $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{7}{2^j}$ y $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{3}{4^j}$.

17. (a) Probar que $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$. Sugerencia: Sumar el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

(b) Sea $\{k_n\}_n$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Sea

$$a_n := \frac{k_1 + \cdots + k_n}{k_n^2},$$

probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $a_n \leq 1/2 + \varepsilon$.

Métricas y topología en \mathbb{R}^n

18. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en \mathbb{R}^2 . Representar las soluciones en el plano.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$

g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$

h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

19. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$. Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

(a) $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1, \dots, n$;

(b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$;

(c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$. Describir geoméricamente esta doble desigualdad.

20. Representar gráficamente los siguientes conjuntos A .

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$

(d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$;

(e) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

21. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos, cerrados y/o acotados:

(a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

(b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;

(d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

(e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

22. Calcular ∂A , \bar{A} , $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$ para los conjuntos A que aparecen en el ejercicio

21. Recuerde que

- ∂A es el borde de A ,
- \bar{A} es la clausura de A y
- $C \setminus D$ es el conjunto de puntos en C que no pertenecen a D .