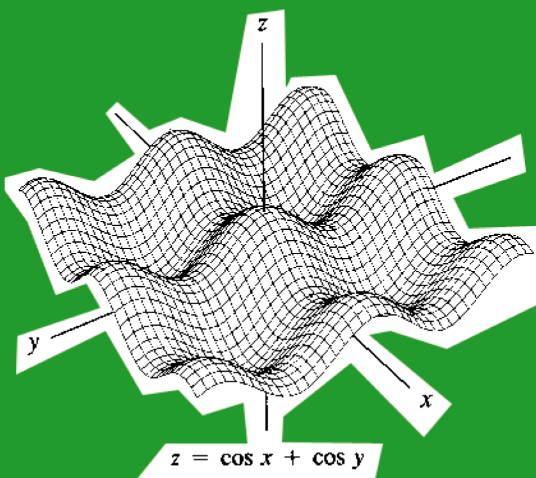
Alejandro E. García Venturini

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

para estudiantes de Ingeniería



COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO

EC
Ediciones Cooperativas

Análisis Matemático II

para estudiantes de Ingeniería

COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO
Director: *Act. Alberto Landro*

Álgebra para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Los matemáticos que hicieron la historia
Alejandro E. García Venturini

Análisis de Series de Tiempo, univariadas y multivariadas
Heriberto Urbisaia – Juana Brufman

Decisión Estadística Bayesiana, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística no Paramétrica, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Teoría de los Conjuntos Borrosos, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística: Herramientas de Inferencia
Gabriela Kurincic

Estadística: Probabilidades y Distribuciones
Gabriela Kurincic

Los Métodos Cuantitativos en las Ciencias Sociales
Alejandro E. García Venturini – Federico Castelli

Aplicaciones del Análisis Matemático a la Economía
Blanca R. Vitale

Modelos para el Análisis de Series de Tiempo
Juan Carlos Abril

Análisis Matemático I para estudiantes de Ingeniería
Alejandro E. García Venturini – Mónica Scardigli

Cálculo Financiero
Juan R. Garnica Hervás - Esteban O. Thomasz - Romina P. Garófalo

Elementos de Econometría de los fenómenos dinámicos
Alberto H. Landro – Mirta L. González

Acerca de la probabilidad
Alberto H. Landro

Alejandro E. García Venturini

Análisis Matemático II

para estudiantes de Ingeniería

EDICIONES COOPERATIVAS

Ediciones Cooperativas es un emprendimiento cooperativo de docentes de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires para difundir sus trabajos e investigaciones

García Venturini, Alejandro Ezequiel
Análisis Matemático II: para estudiantes de ingeniería / 1a ed. - Buenos Aires: Ediciones Cooperativas, 2012.
500 p.; 21x14 cm.

ISBN 978-987-652-100-0

1. Análisis Matemático. 2. Enseñanza Universitaria. I. Título.

CDD 510.711

1º edición, Marzo 2012

Tucumán 3227 (1189)
Buenos Aires – Argentina
☎ (54 011) 3528-0466 / (15) 4937 6915
http://www.edicionescoop.org.ar
✉ info@edicionescoop.org.ar

Hecho el depósito que establece la ley 11.723

Impreso y encuadernado por:
Imprenta Dorrego. Dorrego 1102, C.A.B.A.
1ª. ed. Tirada: 100 ejemplares. Se terminó de imprimir en Marzo 2012.

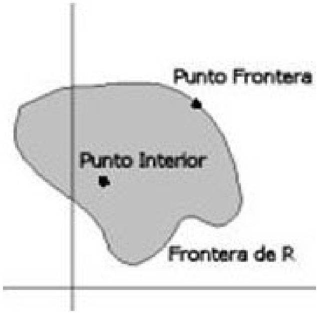
IMPRESO EN ARGENTINA – PRINTED IN ARGENTINA

Editorial asociada a:
CÁMARA ARGENTINA DEL LIBRO

Capítulo 1

Introducción- El espacio métrico

Espacio métrico.
Distancia.
Espacio euclídeo n- dimensional.
Conjuntos puntuales.
Entorno.
Puntos interiores,
exteriores y frontera.
Punto de acumulación.
Revisión de las curvas en el plano.
La función lineal.
Las cónicas.
Sistema de coordenadas polares.



INTRODUCCIÓN - EL ESPACIO MÉTRICO

Comenzamos este trabajo haciendo un repaso de algunos conceptos de geometría analítica estudiados en Análisis I y los generalizaremos al plano, al espacio y al espacio *n-dimensional*.

Conceptos básicos

Espacio métrico*:* es todo conjunto no vacío de elementos llamados puntos entre los cuales se ha definido una función denominada ***distancia.***

Distancia: la distancia entre dos puntos P y Q es un número real no negativo que se denota como $|P-Q|$ y que goza de las siguientes propiedades

a) $|P-Q| = 0 \Leftrightarrow P = Q$
b) $|P-Q| + |P-R| \geq |Q-R|$
c) $|P-Q| = |Q-P|$

Esta última propiedad indica que la distancia entre dos puntos no depende del orden de los puntos sino de sus coordenadas.

Espacio euclídeo n-dimensional

Una *n-upla* es una sucesión de *n* números reales. Si tenemos dos números tenemos un par: $(x_1;x_2)$, si tenemos tres números tenemos una terna: $(x_1;x_2;x_3)$, en general para *n* números: $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, se tiene una n-upla. Indicamos como $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todos los puntos de un espacio n-dimensional. Por ejemplo: con $\mathbb{R}^2$ indicamos los puntos del espacio bi-dimensional (el plano), con $\mathbb{R}^3$ el espacio tri-dimensional.

Si $P = (x_1;x_2;\ldots;x_n)$ y $Q = (y_1;y_2;\ldots;y_n)$, se define como ***distancia euclídea*** entre los puntos P y Q al número real:

$$|P-Q| = +\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}$$

Queda así definido un espacio que se denomina espacio euclideano n-dimensional. Este espacio es un ***espacio métrico***.

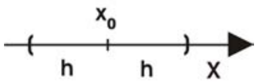
CONJUNTOS PUNTUALES. ENTORNOS. RECINTOS

Recordemos ahora algunos conceptos ya vistos en Análisis I que generalizaremos a 3 dimensiones.

Entorno de un punto

E ($\mathbf{P_0}$;*h*) *(entorno de centro* P_0 *y radio h)* es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia de $P_0 \geq 0$ y $< h$.

En dimensión 1

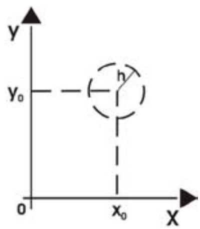


En el espacio *uni-dimensional*: $P_0 = x_0$.

$x \in$ E $(P_0;h) \Leftrightarrow x \in (x_0 - h\ ;\ x_0 + h) \Leftrightarrow 0 \leq |x - x_0| < h$

En el espacio *uni-dimensional*, un punto pertenece al entorno de centro P_0 y radio h si pertenece a un intervalo abierto de centro P_0 y amplitud h.

En dimensión 2

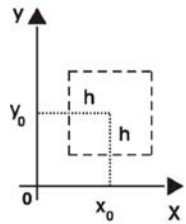


En el espacio *bi-dimensional*: $P_0 = (x_0;y_0)$.

Entorno circular

$(x;y) \in$ E $(P_0;h) \Leftrightarrow\ 0 \leq +\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < h$

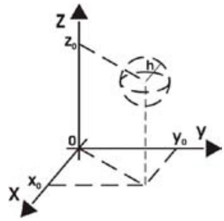
En el espacio *bi-dimensional*, un punto pertenece al entorno de centro P_0 y radio h si es un punto interior a un círculo de centro P_0 y radio h.



Entorno cuadrado (de semiamplitud h)

$$(x;y) \in \text{E}\ (P_0;h) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq |x - x_0| < h \\ 0 \leq |y - y_0| < h \end{cases}$$

En dimensión 3



En el espacio *tri-dimensional*: $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$.

$(x;y;z) \in$ E $(P_0;h) \Leftrightarrow 0 \leq +\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} < h$

En el espacio *tri-dimensional*, un punto pertenece al entorno de centro P_0 y radio h si es un punto interior a una esfera de centro P_0 y radio h.

Entorno reducido

Es el que resulta de excluir en un entorno su centro: $E^*(P_{0;}h) = E\,(P_{0;}h) - \{P_0\}$

Clasificación de los puntos

Punto interior

Un punto A es interior al conjunto S si y sólo si existe un entorno de A totalmente incluido en S. De la definición surge que A debe pertenecer a S.
A es un punto interior a $S \Leftrightarrow \exists \mathrm{E}(\mathrm{A}) / \mathrm{E}(\mathrm{A}) \subseteq S$.

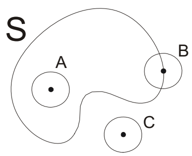
Punto exterior

Un punto es exterior a un conjunto S si y sólo si existe un entorno de A al cual no pertenece ningún punto de S. A es exterior a $S \Leftrightarrow \exists \mathrm{E}(\mathrm{A}) / \mathrm{E}(\mathrm{A}) \cap S = \phi$.

Punto frontera

Un punto A es frontera del conjunto S si y sólo no es interior ni exterior al mismo. Es decir que en un entorno del punto A hay puntos que pertenecen al conjunto S y oros que no pertenecen al conjunto S.

Punto de acumulación



Un punto A, *perteneciente o no* a un conjunto S, es de acumulación de dicho conjunto cuando en todo entorno reducido suyo existe algún punto de S.
A es un punto de acumulación de $S \Leftrightarrow \forall\, \mathrm{E}^*(\mathrm{A}) / \mathrm{E}^*(\mathrm{A}) \cap S \neq \phi$.

El punto A es interior al conjunto *S* y es de acumulación de *S* porque en todo entorno reducido de él siempre hay otros puntos del conjunto *S*.

El punto B está sobre la frontera, también es de acumulación de *S* porque en todo entorno reducido de él se encuentra al menos otro punto del conjunto *S*.

Pero el punto C no es de acumulación porque hay entornos del punto en el cual no se encuentran otros puntos del conjunto *S*, es exterior.

Punto aislado

Un punto A perteneciente a un conjunto *S* es aislado si no es de acumulación, sí y sólo si existe un entorno reducido de A al cual no pertenece ningún punto de *S*. A es aislado $\Leftrightarrow$ $\mathrm{A} \in S \wedge \exists \mathrm{E}^*(\mathrm{A}) / \mathrm{E}^*(\mathrm{A}) \cap S = \phi$.

Conjunto derivado S´: es el conjunto formado por todos los puntos de acumulación de *S*.

Conjunto denso en sí: un conjunto es *denso en sí* si todos sus puntos son de acumulación. Debe estar incluido en el conjunto derivado, $S \subseteq S'$.

Frontera: la frontera de un conjunto *S* es el conjunto de todos sus puntos frontera.

Conjunto abierto: un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Conjunto cerrado: un conjunto es cerrado cuando la frontera pertenece al conjunto.

Conjunto perfecto: un conjunto es *perfecto* si $S = S'$, o e sea que es denso y cerrado.

Conjunto conexo: son conjuntos en los cuales dos puntos cualesquiera pueden unirse mediante una poligonal de un número finito de lados cuyos puntos pertenecen todos al conjunto considerado. Por ejemplo: círculos, rectángulos, paralelogramos.

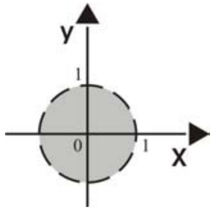
Recinto: es la unión de un conjunto conexo abierto y alguno o todos sus puntos fronteras.

Recinto abierto: es el conjunto conexo cuyos puntos son todos interiores (no hay puntos frontera).

Recinto cerrado: es un recinto en el cual están incluidos todos los puntos frontera.

Veamos algunos ejemplos:

1) $A= \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$



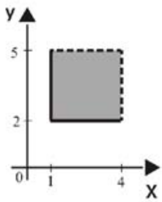
En este caso el conjunto A está formado por los puntos interiores a una circunferencia de radio 1.

$A_i = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\} = A$
$A_e = \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2>1\}$
$A_f = \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$
$A' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 1\}$, es un conjunto denso en sí, pero no perfecto.

El conjunto de puntos interiores es el mismo conjunto A, todos los puntos de A son interiores. El conjunto de puntos exteriores son los puntos que están fuera del círculo de radio 1 y la frontera está formada por los puntos que pertenecen a la circunferencia de radio 1.

Este es un ejemplo de un conjunto abierto, porque todos sus puntos son interiores. También es un ejemplo de conjunto conexo y de recinto abierto.

2) $B = \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / 1\leq x<4 \wedge 2\leq y<5\}$



En este caso el conjunto A está formado por lo puntos interiores al rectángulo y los pertenecientes a dos de sus lados.

$B_i = \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / 1<x<4 \wedge 2<y<5\}$
$B_e = \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x>4 \vee x<1 \vee y>5 \vee y<2\}$
$B_f = \{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / [(x=1\vee x=4) \wedge (2\leq y\leq 5)]\vee [(y=2 \vee y=5) \wedge (1\leq x\leq 4)]\}$
$B' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 1\leq x\leq 4 \wedge 2\leq y\leq 5\}$, es un conjunto denso en sí.

El conjunto de puntos interiores es el conjunto de puntos interiores al rectángulo, conjunto de puntos exteriores son los puntos que están fuera del rectángulo y la frontera está formada por los lados del rectángulo.

Este es un ejemplo de un conjunto que no es abierto ni cerrado. Pero es un conjunto conexo. No es un conjunto perfecto.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar el conjunto de puntos interiores, exteriores, frontera y conjunto derivado de los siguientes conjuntos

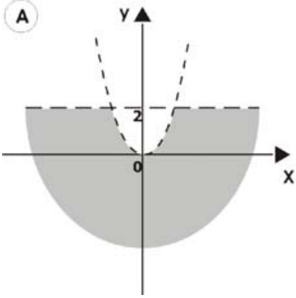
a) $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y < x^2 \wedge y < 2\}$
b) $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / [(x-1)^2 + y^2 < 1] \vee [(x-1)^2 + y^2 > 3]\}$
c) $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2 \wedge y \leq 4\}$
d) $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 + y^2 < 1) \wedge y \geq 0\}$
e) $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x < 2 \wedge 0 \leq y < 1\}$
f) $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 4\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$
g) $G = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2 \wedge y - x \leq 2\}$

2) Determinar el conjunto derivado de cada conjunto e indicar si el conjunto es perfecto denso o en sí

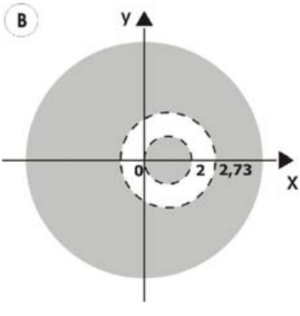
a) $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 4\}$
b) $B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$

RESPUESTAS

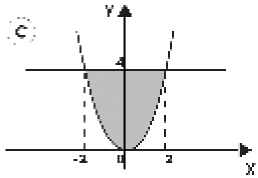
1) $A_i = A$
$A_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / [y = 2 \wedge (x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2})] \vee (y = x^2 \wedge y \leq 2)\}$
$A_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2 \vee y > 2\}$
$A' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2 \wedge y \leq 2\}\}$



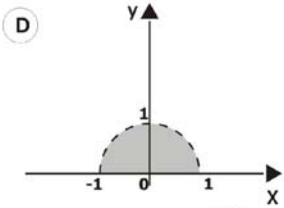
$B_i = B$
$B_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 /(x-1)^2 + y^2 = 1 \vee (x-1)^2 + y^2 = 3\}$
$B_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < (x-1)^2 + y^2 < 3\}$
$B' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / [(x-1)^2 + y^2 \leq 1] \vee [(x-1)^2 + y^2 \leq 3]\}$



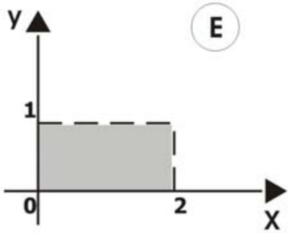
$C_i = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > x^2 \;\wedge\; y < 4\}$
$C_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (y = x^2 \wedge y \leq 4) \vee (y = 4 \wedge |x| \leq 2)\}$
$C_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; y < x^2 \;\vee\; y > 4\}$
$C' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \;\geq x^2 \;\wedge\; y \leq 4\}$



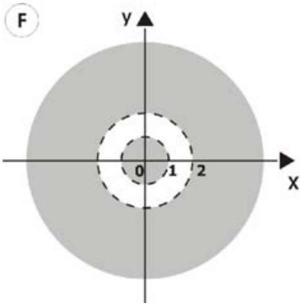
$D_i = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 1 \;\wedge\; y > 0\}$
$D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0 \;\wedge\; |x| \leq 1 \vee y = +\sqrt{1-x^2}\;\}$
$D_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 > 1 \;\vee\; y < 0\}$
$D' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \;\wedge\; y \geq 0\}$



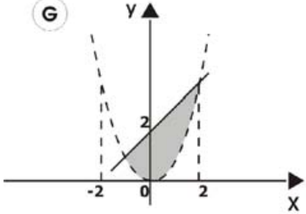
$E_i = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x < 2 \;\wedge\; 0 < y < 1\}$
$E_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; [0 \leq y \leq 1 \;\wedge (x = 0 \vee x = 2)]$
$\vee\; [\,0 \leq x \leq 2 \;\wedge (y = 0 \vee y = 1)]\}$
$E_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < 0 \vee x > 2 \vee y < 0 \vee y > 1\}$
$E' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 2 \;\wedge\; 0 \leq y \leq 1\}$



$F_i = F$
$F_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 4 \vee\; x^2 + y^2 = 1\}$
$F_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
$F' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \geq 4\} \cup$
$\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; x^2 + y^2 \leq 1\}$



$G_i = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; y > x^2 \;\wedge\; y < x + 2\}$
$G_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (y = x+2 \vee y = x^2) \wedge (-1 \leq x \leq 2)\}$
$G_e = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < x^2 \;\vee\; y > x+2\}$
$G' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2 \;\wedge\; y \leq x + 2\}$



2) a) $A = A' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; x^2 + y^2 \geq 4\} \Rightarrow$ el conjunto es perfecto y por lo tanto denso en sí.

b) $B' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; x^2 + y^2 \geq 1\} \Rightarrow$ el conjunto es denso en sí.

REVISIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS CURVAS EN EL PLANO O ESPACIO BI-DIMENSONAL MÁS UTILIZADAS EN ESTE TEXTO

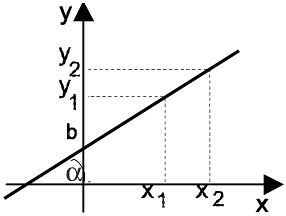
1) Ecuaciones de primer grado - La función lineal

La ecuación general de la recta es: Ax + By + C = 0, con A y B no simultáneamente nulas.

Si despejamos ***y*** tenemos la forma explícita:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f(x)=y=\mathrm{m}x+\mathrm{b} \qquad \mathrm{Im}\,f=\mathbb{R}$$

La representación gráfica de la función lineal es una recta. Observamos que si $x=0$, entonces $y=\mathrm{b}$, es decir que ***b*** indica la intersección de la recta con el eje ***y***, es la ***ordenada al origen***. Vemos que mide ***m***.
Si consideramos dos puntos de la recta $P_1=(x_1;y_1)$ y $P_2=(x_2;y_2)$ tenemos que:

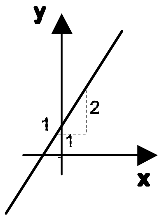


$$\begin{array}{l} y_2=\mathrm{m}x_2+\mathrm{b} \\ \underline{y_1=\mathrm{m}x_1+\mathrm{b}} \\ y_2-y_1=\mathrm{m}\,(x_2-x_1) \;\Rightarrow\; \mathrm{m}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}$$

Vemos que ***m*** mide la ***pendiente*** de la recta, es decir la tangente del ángulo que ésta forma con el semieje positivo de las ***x***.

Ejemplo

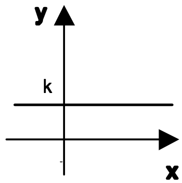
$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f(x)=2x+1 \qquad \mathrm{Im}\,f=\ \mathbb{R}$$



Es una función lineal cuya gráfica es una recta que corta al eje y en $y_1=1$ y tiene pendiente 2. Para representarla gráficamente partimos de la ordenada al origen ($y_1=1$) y a partir de allí tomamos 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba (para que la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las x sea 2).

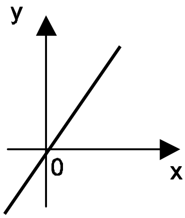
Cero: $\mathbf{x_1=-0{,}5}$.

Casos particulares



m = 0: si m = 0 la recta es horizontal y la función se denomina ***función constante***.

La función es de la forma: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=k$ $\quad \mathrm{Im}\, f=\{k\}$



b = 0 si b = 0 tenemos una recta que pasa por el origen de coordenadas.

La función es de la forma: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=\mathrm{m}x$
$\mathrm{Im}\, f=\mathbb{R}$

Ecuación de la recta conocida m ***y un punto*** $P_0=(x_0;y_0)$

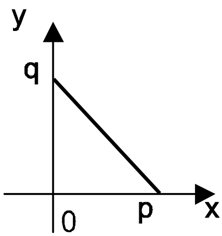
$$y-y_0=\mathrm{m}.(x-x_0)$$

Esta ecuación representa al haz de rectas que pasan por $P_0=(x_0;y_0)$

Ecuación de la recta por 2 puntos $P_0=(x_0;y_0)$ ***y*** $P_1=(x_1;y_1)$:

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)$$

Forma segmentaria



$\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$, donde p y q representan los puntos de intersección de la recta con los ejes x e y respectivamente, ($p\neq 0$ y $q\neq 0$).

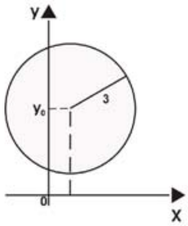
2) Ecuaciones de segundo grado - Las cónicas

Las ecuaciones de segundo grado en dos variables se pueden escribir en la forma general:

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{B}xy + \mathbf{C}y^2 + \mathbf{D}x + \mathbf{E}y + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \text{con A, B o C distintos de cero}$$

Según el valor de estos coeficientes, la ecuación representa distintos tipos de curvas. Las más conocidas son las *cónicas*.

a) La circunferencia



La ecuación canónica de una circunferencia con centro en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ y radio r es:

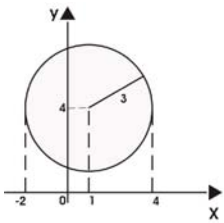
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \Rightarrow C\ [(x_0;y_0);r]$

La ecuación general de la circunferencia se obtiene cuando B = 0, A = C =1.

$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$.

Para pasar de esta ecuación a la ecuación canónica se deben completar cuadrados.

Ejemplo



$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + 8 = 17$
$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9 \Rightarrow C\ [(1;4);3]$

Caso particular

Si el centro de coordenadas es $P_0 = (0;0)$ la ecuación queda: $x^2 + y^2 = r^2$

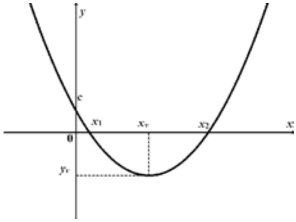
b) La parábola

La ecuación general de la parábola se obtiene cuando B = C = 0:

$\mathbf{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Si despejamos la ***y*** llegamos a una expresión del tipo

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\; y = f(x) = ax^2 + bx + c$

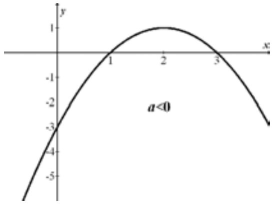


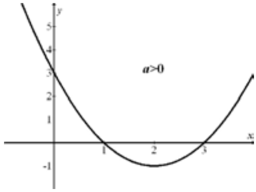
La representación gráfica de la función cuadrática es una parábola.

Para representar gráficamente la parábola tendremos en cuenta los siguientes aspectos:

a) Concavidad

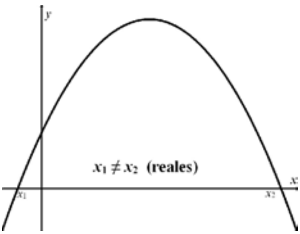
Si $a > 0$, la parábola es cóncava, la función alcanza un mínimo.
Si $a < 0$, la parábola es convexa la función alcanza un máximo.

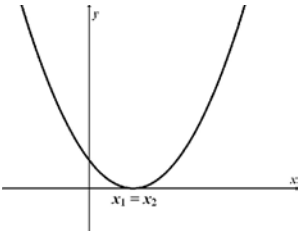


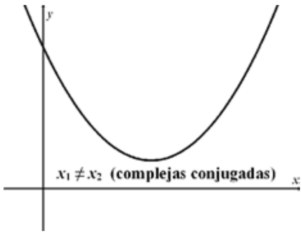


b) Intersección con el eje x

Se obtiene igualando la función a 0, $ax^2 + bx + c = 0$*, resolviendo la ecuación de 2º grado se obtienen los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Si la ecuación tiene dos raíces x_1 y x_2 reales distintas, la parábola corta al eje x en dos puntos, si las raíces son reales múltiples, hay un solo punto de intersección y si las raíces son complejas no hay intersección entre la parábola y el eje x.







---

* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, fórmula del siglo XII debida al matemático hindú BHASKHARA.

c) Intersección con el eje y

Hacemos $x = 0$, queda $y_1 = c$. Es decir que el término independiente de la función cuadrática indica el punto de corte con el eje y. Toda parábola corta al eje y, no así al eje x.

d) Vértice

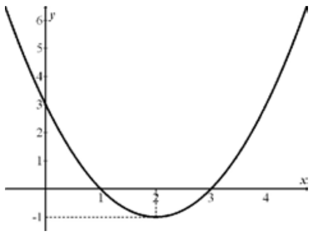
Un punto muy importante para su gráfico es el vértice: $V = (x_v;y_v)$

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ (valor que toma la función para la x del vértice)

Con toda esta información se puede representar aproximadamente una función cuadrática.

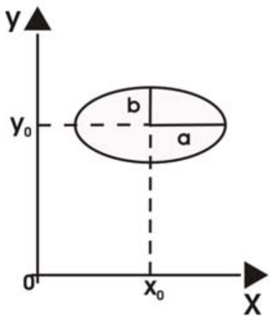
Ejemplo

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f(x) = x^2 - 4x + 3$ $\quad\quad$ $\operatorname{Im} f = [-1;+\infty)$



a) $a = 1 > 0 \Rightarrow f$ es cóncava
b) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$ *Ceros:* $x_1=1$, $x_2=3$
c) $y_1=3$
d) $x_v = \dfrac{4}{2} = 2$, $y_v = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow V = (2; -1)$

a) La elipse



La ecuación canónica de una elipse con centro en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ y semiejes a y b es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Caso particular

Si el centro de coordenadas es $P_0 = (0;0)$ la ecuación queda: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

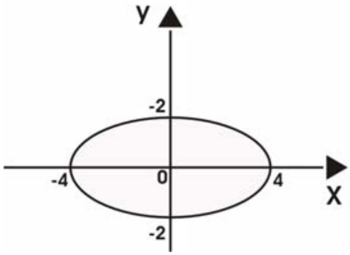
La ecuación general de la elipse se obtiene cuando A y C tienen el mismo signo, pero distinto valor, B = 0:

$$\mathbf{A}x^2+\mathbf{C}y^2+\mathbf{D}x+\mathbf{E}y+\mathbf{F}=0$$

Para pasar de esta ecuación a la ecuación canónica se deben completar cuadrados.

Ejemplo

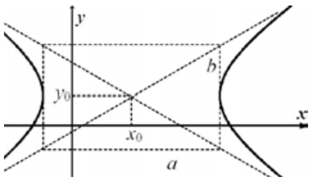
$x^2+4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$



b) La hipérbola

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $P_0 = (x_0;y_0)$ es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

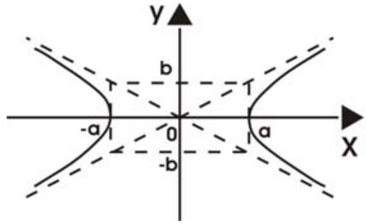


La ecuación general de la hipérbola se obtiene cuando A y C tienen signos opuestos, B = 0:

$$\mathbf{A}x^2+\mathbf{C}y^2+\mathbf{D}x+\mathbf{E}y+\mathbf{F}=0$$

Para pasar de esta ecuación a la ecuación canónica se deben completar cuadrados.

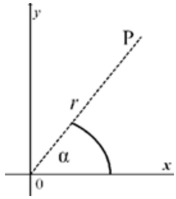
Caso particular



Si el centro de coordenadas es el (0;0), la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Sistema de coordenadas polares

Hasta ahora fijamos la posición de un punto con las coordenadas rectangulares x e y. Las coordenadas polares son otra forma de fijar la posición de un punto P. Se elige un punto fijo 0 (el origen de coordenadas) y una semirrecta con origen en 0 que pasa por P.



Las coordenadas polares son ***r*** (módulo) que es la distancia OP, y α (argumento) que es el ángulo que forma dicha semirrecta con el semieje positivo de las x.

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\,sen\,\alpha \qquad r > 0,\ 0 \le \alpha \le 2\pi$$

También tenemos que: $r = +\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\alpha = arctg\,\frac{y}{x}\ \text{, con } \alpha \text{ en radianes}$$

Ejemplo

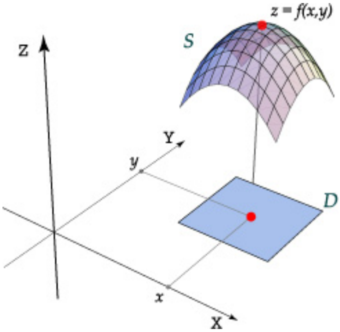
Si $P_0 = (2;1)$, entonces $r=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ y $\alpha = arc\ tg\,\dfrac{2}{1} = arc\ tg\ 2 \cong 1{,}10$

$$(2;1) \to \left(\sqrt{5};\ 1{,}10\right)$$

A veces es más sencillo trabajar con coordenadas polares que con coordenadas rectangulares. Por ejemplo, como veremos en el capítulo de límites y de integrales, se simplifica su cálculo.

Capítulo 2

Campos escalares



Funciones de dos o más variables.

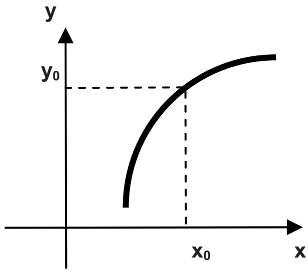
Representación gráfica de superficies.

Dominio y rango.

Curvas y superficies de nivel.

FUNCIONES DE DOS O MÁS VARIABLES
LOS CAMPOS ESCALARES

En Análisis I se estudian funciones de una variable independiente, las funciones van de $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir funciones del tipo: $f: A \to \mathbb{R} \,/\, y = f(x)$. Son funciones de una variable independiente, donde x es la variable independiente e y la variable dependiente. Estas funciones se denominan ***funciones escalares***.



Para cada valor de $\boldsymbol{x_0}$ perteneciente al dominio de la función se obtiene un valor de $\boldsymbol{y_0}$, esos pares ordenados **($x;y$)** determinan un punto en el plano y el conjunto de esos puntos en el plano definen una curva que es la representación gráfica de una función de una variable independiente.

El objeto de estudio de Análisis Matemático I son las funciones de una variable independiente y las curvas que las representan: sus gráficas, su continuidad, su derivabilidad, la existencia de recta tangente en un punto de su dominio, el área que éstas delimitan con el eje x o entre sí, entre otros temas.

¿De qué trata Análisis II?

En Análisis II se estudian funciones de dos o más variables independientes que a su vez tienen como imagen una o más variables. Vamos a trabajar en primer lugar con funciones que van de $A \to \mathbb{R}$, donde ahora $A \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir que van de un subconjumto de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Este tipo de funciones reciben el nombre de ***campos escalares***[1]. A un conjunto de n variables independientes le hace corresponder como imagen un número real o escalar.

Veremos primero el caso particular en que $n = 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir funciones de dos variables independientes o campos escalares del tipo $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/$ $z = f(x;y)$, donde x e y ahora son las variables independientes. Luego genera-

[1] Un ejemplo de campo escalar es el campo de las temperaturas. A cada punto del espacio ($x;y;z$) le asigna como imagen el valor de la temperatura en ese punto.

lizaremos a campos esclares de *n* variables independientes, es decir del tipo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f(\vec{x})$[2].

Luego veremos el caso de funciones $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Es decir funciones que a una variable independiente le hace corresponder como imagen un conjunto de *m* valores, es decir un vector. Se denominan *funciones vectoriales*.

Por último generalizaremos al caso en que $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. A un conjunto de *n* variables independientes le hace corresponder como imagen un vector. Estas funciones se denominan *campos vectoriales*.

En ambos casos las imágenes son vectores. Se distinguen de las funciones y de los campos escalares porque la f lleva una flecha $\vec{f}$, que indica que la imagen no es un número real o escalar sino un vector.

Síntesis

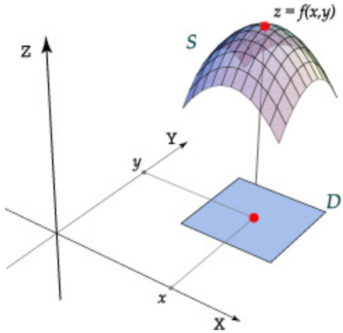
En Análisis I:	$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	*funciones escalares*
En Análisis II:	$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	*campos escalares*
	$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$	*funciones vectoriales*
	$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	*campos vectoriales*

[2] Podemos pensar a las *n* coordenadas como las componentes de un vector.

Los campos escalares de dos variables- su representación gráfica

Vamos a analizar la representación gráfica del caso en que la función es del tipo $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \,/\, z = f(x;y)$.

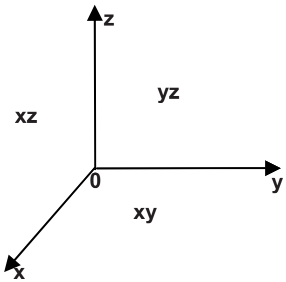
En este caso, para cada par de valores ***x*** e ***y independientes*** para los que sea posible, se obtiene un valor real de ***z***.



Queda determinada así una terna $(x;y;z)$. Cada terna define un punto en el espacio, el conjunto de puntos en el espacio define una superficie, que es la representación gráfica de una función de dos variables independientes. El conjunto de partida es un conjunto de pares ordenados. La función le hace corresponder como imagen a cada par ordenado un número real. De estas funciones también vamos a estudiar sus representaciones gráficas, su continuidad, su derivabilidad, etc.

Sistema de coordenadas tridimensional

Antes de ver como se representa gráficamente un campo escalar de dos variables independientes, veremos algunos conceptos básicos de geometría del espacio.



Trabajamos en el espacio euclídeo tridimensional. Tenemos en este caso tres ejes coordenados, ***x***, ***y*** y ***z***, perpendiculares 2 a 2. El eje ***x*** se representa a 135º con el eje ***y***. El punto de intersección entre los ejes es el origen de coordenadas, el punto O.

Sobre los ejes ***y*** y ***z***, que se ven en su real dimensión, se utiliza la escala entera, mientras que para el eje ***x***, que está en perspectiva, se utiliza una escala menor que es habitualmente 0,7 de la escala sobre los otros ejes para aumentar el efecto de la profundidad en la perspectiva.

Estos ejes definen tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en O, los planos (xy), (xz) e (yz).

Estos planos dividen al espacio en 8 sectores cada uno denominado ***octante***. El 1º octante es aquel en el cual las tres variables son positivas.

Ecuaciones de los planos coordenados

Sobre el plano (xy), la z vale 0: $z = 0$
Sobre el plano (xz): la y vale 0: $y = 0$
Sobre el plano (yz): la x vale 0: $x = 0$

Ecuaciones de los ejes coordenados

Los ejes coordenados se obtienen como intersección de los planos coordenados.

Ecuaciones del eje x: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Ecuaciones del eje y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

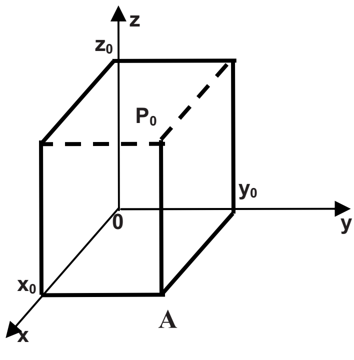
Ecuaciones del eje z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Veremos ahora como representar funciones de dos variables independientes. Empezaremos por ver como representar un punto en el espacio.

Representación gráfica de un punto en el espacio

Para determinar la posición de un punto $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$ en el espacio primero fijamos el punto A en el plano (xy) trazando paralelas a los ejes coordenados $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por x_0 e y_0.

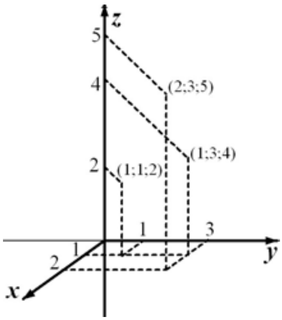
Por dicho punto trazamos la perpendicular al plano (xy) sobre el cual tomamos el valor z_0. Así como para dos dimensiones, un punto se puede considerar como el vértice de un rectángulo, en tres dimensiones un punto se puede considerar como el vértice de un paralelepípedo recto.



Veamos un ejemplo

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ /\ z = f(x;y) = x + y$, podemos hacer una tabla de valores y obtener algunos puntos de su gráfica.

$(x;y)$	z
(1;1)	2
(2;3)	5
(1;3)	4



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SUPERFICIES

Dado un campo escalar de la forma $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ /\ z = f(x;y)$, dándole valores a ***x*** e ***y*** se pueden, como ya vimos, obtener algunos puntos de la superficie. Pero representar una superficie a partir de puntos aislados no es muy práctico. Veremos una forma de obtener, con cierta aproximación, la representación gráfica de una función de dos variables independientes.

Calculamos los puntos de intersección con los ejes coordenados y las ***trazas***, que son las curvas intersección de la superficie con los planos coordenados.

Ecuación del plano

Así como la función más sencilla en Análisis I es la función lineal, cuya gráfica es una recta, en Análisis II también es la función lineal la más sencilla, en este caso su representación gráfica es un plano. En un curso de geometría analítica se demuestra que la ecuación general del plano es:
$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C}z + \mathbf{D} = \mathbf{0}$. Toda función lineal en $\mathbb{R}^3$ tiene por gráfica un plano.

Ejemplo: $2x + 4y + z + 8 = 0$

Calculamos las intersecciones con los ejes coordenados

$\cap$ eje x, $y=z=0$

$2x = 8 \Rightarrow \quad x = 4$
(4;0;0)

$\cap$ eje y, $x=z=0$

$4y = 8 \Rightarrow \quad y = 2$
(0;2;0)

$\cap$ eje z, $x=y=0$

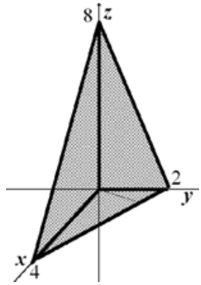
$z = 8$
(0;0;8)

Vemos que este plano corta a cada eje en un punto.

Calculemos ahora las trazas

$\cap$ plano xy, $z = 0$	$\cap$ plano yz, $x = 0$	$\cap$ plano xz, $y = 0$
$2x + 4y = 8$	$4y + z = 8$	$2x + z = 8$
$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1$	$\dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{8} = 1$	$\dfrac{x}{4} + \dfrac{z}{8} = 1$

En este caso las trazas son rectas. Conviene expresar las ecuaciones de las rectas en su forma segmentaria porque de esa manera es más fácil su representación gráfica.



Con esta información podemos representar con cierta aproximación la superficie. Se representan las intersecciones con los ejes y las trazas.

Analicemos ahora este caso: $2x + 3y = 12$

Hacemos el mismo estudio que hicimos antes, por ser una función lineal sabemos que la ecuación representa a un plano.

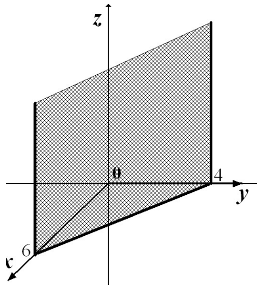
$\cap$ eje x, $y = z = 0$	$\cap$ eje y, $x = z = 0$	$\cap$ eje z, $x = y = 0$
$2x = 12 \Rightarrow x = 6$	$3y = 12 \Rightarrow y = 4$	$0 = 12 \Rightarrow \nexists$

Vemos que este plano corta a dos de los tres ejes coordenados.

Calculamos ahora las trazas.

$\cap$ plano xy, $z = 0$	$\cap$ plano yz, $x = 0$	$\cap$ plano xz, $y = 0$
$2x + 3y = 12$	$3y = 12$	$2x = 12$
$\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 1$	$y = 4$	$x = 6$

Grafiquemos



Vemos que en este caso no figura la variable z en la ecuación y que obtuvimos un plano paralelo al eje z. En general *los planos son paralelos a los ejes cuyas variables no figuran en la ecuación*.

Casos particulares

Ecuaciones de planos paralelos a los planos coordenados

Paralelo al plano (xy): $z = k$
Paralelo al plano (xz): $y = k$
Paralelo al plano (yz): $x = k$

Representación gráfica de otras superficies

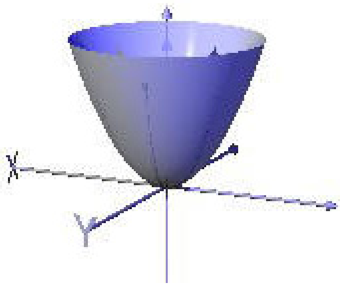
Sigamos los mismos pasos para representar gráficamente $z = x^2 + y^2$.

$\cap$ eje x, $y = z = 0$	$\cap$ eje y, $x = z = 0$	$\cap$ eje z, $x = y = 0$
$x = 0$ (0;0;0)	$y = 0$ (0;0;0)	$z = 0$ (0;0;0)

Vemos que la superficie corta a los tres ejes en el centro de coordenadas.

Calculamos ahora las trazas.

$\cap$ plano xy, $z = 0$	$\cap$ plano yz, $x = 0$	$\cap$ plano xz, $y = 0$
$z = x^2 + y^2$	$z = y^2$	$z = x^2$



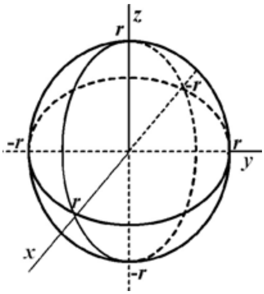
Tenemos como trazas una circunferencia de radio O (un punto) y dos parábolas. Por eso esta superficie recibe el nombre de ***paraboloide***.

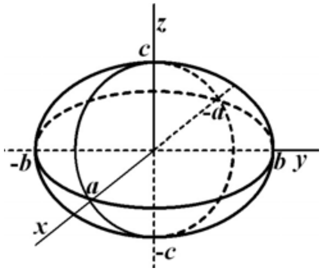
A través de este análisis se puede obtener suficiente información sobre las superficies como para poder hacer un gráfico aproximado.

Veamos ahora las ecuaciones de las principales superficies y sus gráficos.

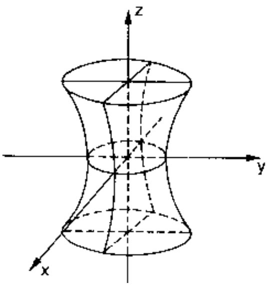
Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

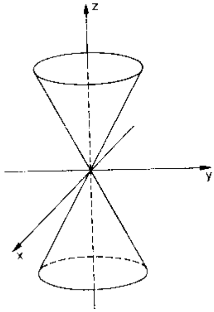
Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



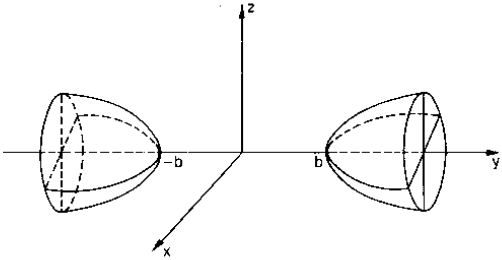


Hiperboloide elíptico de 1 hoja: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

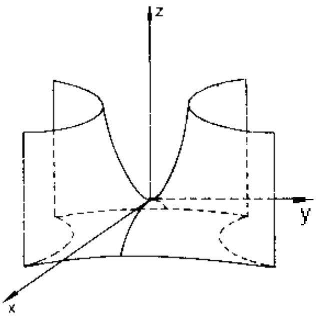


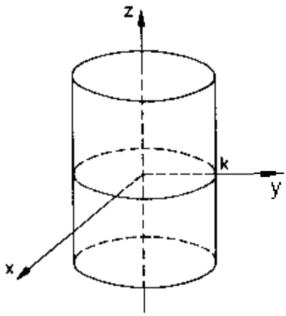


Hiperboloide elíptico de 2 hojas: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

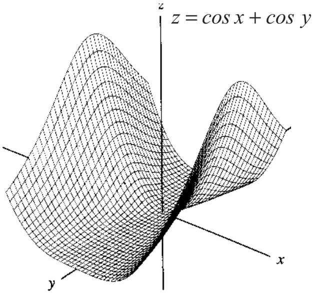


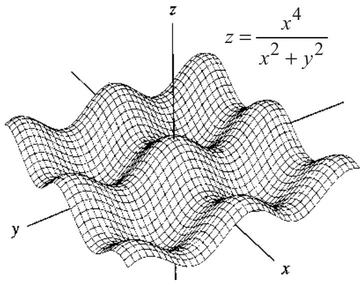
Paraboloide hiperbólico: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ Cilindro circular recto: $x^2+y^2=r^2$

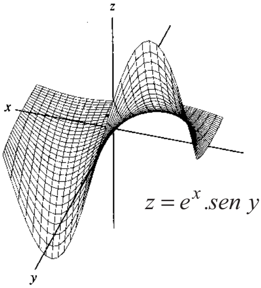


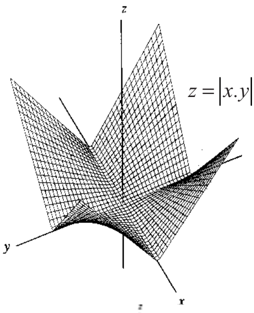


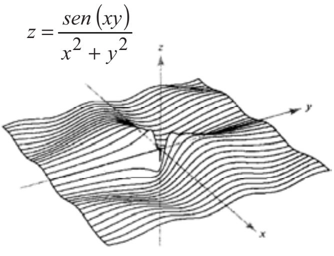
Veamos ahora los gráficos de otras superficies correspondientes a funciones de dos variables, en este caso hechos por una computadora.

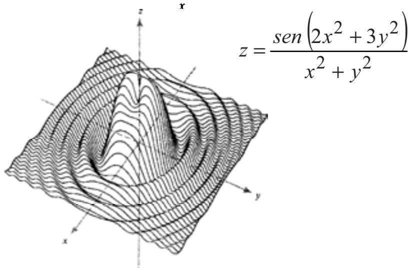












Cuando las variables independientes son más de dos, es decir $n > 2$, no es posible representarlas gráficamente. Este aspecto de las funciones se pierde, pero el concepto de función sigue siendo válido cualquiera sea el número de variables independientes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) *Si* $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2y}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$ *hallar*: a) $f(0;1)$, b) $f(2;2)$, c) $f(0;0)$, d) $f(0;a)$

2) *Si* $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-y^2} & |x|\neq|y| \\ 1 & |x|=|y| \end{cases}$ *hallar*: a) $f(0;1)$, b) $f(a;-a)$, c) $f(0;0)$ d) $f(-a;a)$, e) $f(a;1/a)$

3) *Si* $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ *responder* V *o* F si $x\neq 0$, $y\neq 0$

a) $f(y;x)=-f(x;y)$

b) $f(-x;-y)=-f(x;y)$

c) $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)=-f(x;y)$

d) $\dfrac{1}{f(x;y)}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ *si* $|x|\neq|y|$

4) Dada la función $f(x;y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ demostrar que $\forall x\neq 0$ se tiene que

$$f\left(1;\frac{y}{x}\right)=f(x;y)$$

5) *Dadas las siguientes ecuaciones, hallar las trazas, puntos de intersección con los ejes coordenados, clasificar y representar gráficamente las superficies que representan*

1) $8x+4y+2z-16=0$

2) $6x+9y-3z-18=0$

3) $x+2y=4$

4) $4x+8z=16$

5) $z=4$

6) $x=3$

7) $y=2$

8) $x^2+y^2+z^2=16$

9) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{4}=1$

10) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$

11) $x^2+y^2=z$

12) $x^2+y^2=9$

13) $y=x^2$

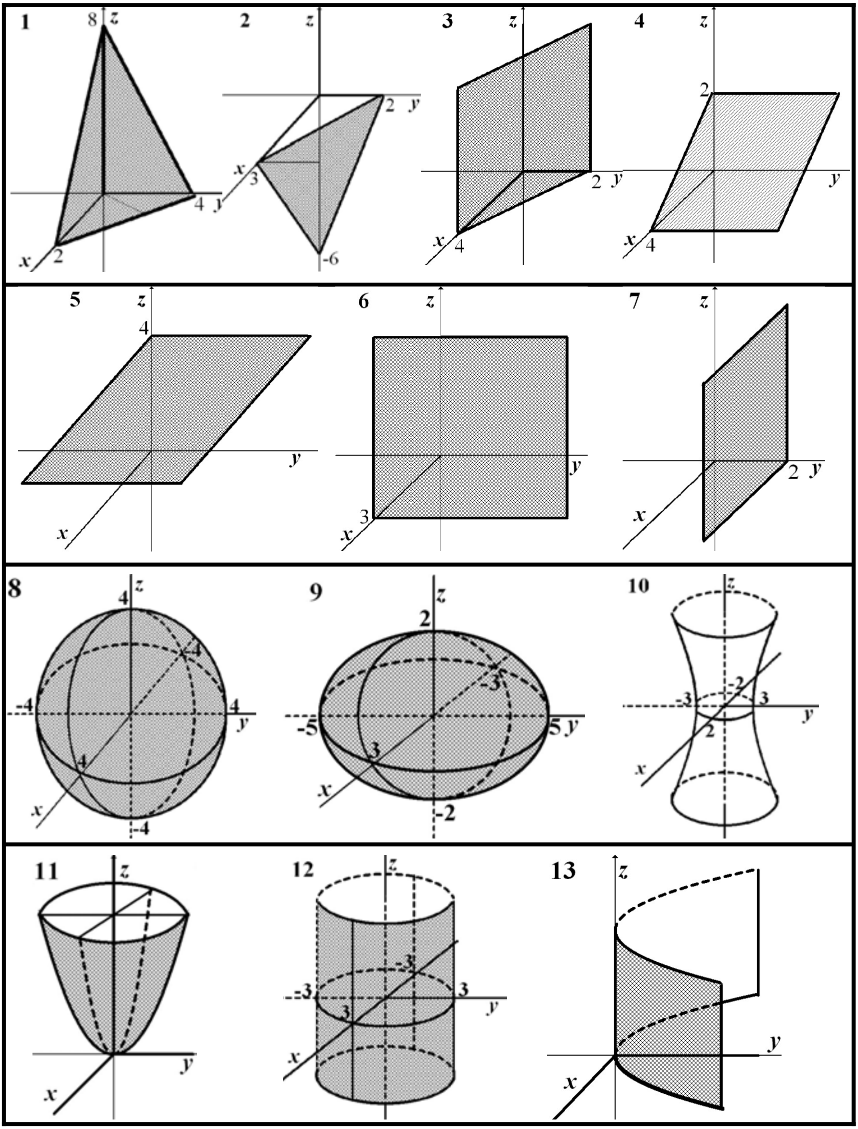
RESPUESTAS

1) a) –2 b) 0 c) 0 d) $-\dfrac{2}{a}$ 2) a) –1 b) 1 c) 1 d) 1 e) $\dfrac{a^2}{a^4-1}$

3) a) V, b) F, c) V, d) V

5)

	$\cap$ eje x	$\cap$ eje y	$\cap$ eje z	$\cap$ plano (xy)	$\cap$ plano (xz)	$\cap$ plano (xz)
1)	x=2	y=4	z=8	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{8}=1$	$\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1$
2)	x=3	y=2	$z=-6$	$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$	$\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{-6}=1$	$\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-6}=1$
3)	x=4	y=2	*no*	$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$	x=4	y=2
4)	x=4	*no*	z=2	x=4	$\dfrac{x}{4}+\dfrac{z}{2}=1$	z=2
5)	*no*	*no*	z=4	*no*	z=4	z=4
6)	x=3	*no*	*no*	x=3	x=3	*no*
7)	*no*	y=2	*no*	y=2	*no*	y=2
8)	x=±4	y=±4	z=±4	$x^2+y^2=16$	$x^2+z^2=16$	$y^2+z^2=16$
9)	x=±3	y=±5	z=±2	$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$	$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$	$\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{4}=1$
10)	x=±2	y=±3	*no*	$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$	$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$
11)	x=0	y=0	z=0	(0;0;0)	$x^2=z$	$y^2=z$
12)	x=±3	y=±3	*no*	$x^2+y^2=9$	x=±3	y=±3
13)	x=0	y=0	*eje z*	$y=x^2$	*eje z*	*eje z*

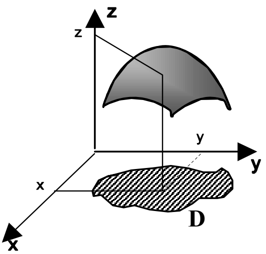

1
8 z
4 y
x 2
2
z
2 y
x 3
-6
3
z
2 y
x 4
4
z
2
y
x 4
5
z
4
y
x
6
z
y
3
x
7
z
2 y
x
8
4 z
-4
-4
4
y
4
x
-4
9
z
2
-3
-5
5 y
3
x
-2
10
z
-2
-3
3
y
2
x
11
z
y
x
12
z
-3
-3
3
y
3
x
13
z
y
x

DOMINIO

Una función de dos variables $z = f(x;y)$ no siempre está definida para cualquier valor de x o y. El dominio está formado por el conjunto de pares $(x;y)$ para los cuales existe imagen real z.

Las restricciones son las mismas que existen para funciones de una variable independiente.

1) Denominadores $\neq 0$.
2) Argumentos de logaritmos > 0.
3) Radicando de raíces de índice par ≥ 0.

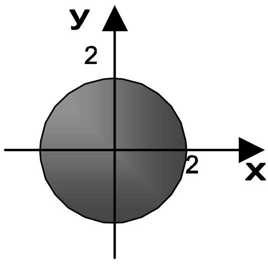


☞ $\boxed{Dom = \left\{(x;y) \in \Re^2 \,/\, \exists\, z \in \Re \wedge z = f(x;y)\right\}}$

El dominio está formado por puntos del plano xy, es decir que es un subconjunto del plano xy, por lo tanto se representa en el plano xy.

Podemos considerar al dominio como la proyección o sombra de la función sobre el plano xy.

Ejemplos



1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

En este caso hay dos restricciones:

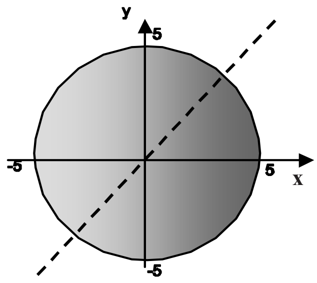
a) $\sqrt{4 - x^2 - y^2} \neq 0$, por estar en el denominador y

b) $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, por ser el radicando de una raíz cuadrada.

El dominio está formado por todos los puntos del plano xy para los cuales $\mathbf{4 - x^2 - y^2 > 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 < 4}$, es decir los puntos interiores a una circunferencia de radio 2 con centro en el origen de coordenadas.

$$Dom = \left\{(x;y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 < 4\right\}$$

2) $z = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x - y}$



Buscamos los valores reales de $(x;y)$ para los cuales existe z real. Hay dos restricciones, una por la raíz cuadrada, cuyo radicando debe ser ≥ 0 y otra por el denominador que debe ser $\neq 0$.

a) $25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25$ (puntos interiores a una circunferencia de radio 5).
b) $x - y \neq 0 \Rightarrow y \neq x$ (significa que deben excluirse los puntos de la bisectriz $y = x$).

Conclusión: están en el dominio todos los puntos interiores a la circunferencia de radio 5, incluido el contorno, excepto los que se encuentran sobre la recta $y = x$.

Rango o imagen

El rango o conjunto imagen es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente z. Analicemos el rango para el ejemplo 1. El denominador puede tomar valores en el conjunto $\mathbb{R}^+$, por lo tanto R = Im $f = \mathbb{R}^+$.

En cuanto al rango en el ejemplo 2, el numerador puede tomar cualquier valor entre –5 y 5 y el denominador cualquier valor excepto 0, el cociente entre un número entre –5 y 5 y cualquier número excepto el 0 puede dar cualquier número real, R = Im $f = \mathbb{R}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Determinar el dominio y el rango de los siguientes campos escalares. Graficar.

1) $z=\dfrac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x-y}$ 2) $z=\dfrac{2x+6}{\left(x^2-3x+2\right).\left(y^2-16\right)}$

3) $z=\dfrac{1}{\left(x^2-y^2\right).cos\left(x+4y\right)}$ 4) $z=\dfrac{ln\left(2x-y\right)}{x^2+y^2-4}$ 5) $z=\dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{sen\left(x-y\right)}$

6) $z=\dfrac{ln\left(2x-y\right)}{\sqrt{4-x^2}}$ 7) $z=\dfrac{\sqrt{16-x^2-y^2}}{cos\left(x-y\right)}$ 8) $z=\dfrac{1}{9-\left(x^2+y^2\right)}$

9) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 10) $z=\dfrac{1}{ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ 11) $z=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1}}$

12) $z=\sqrt{xy.(1-x-y)}$ 13) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$ 14) $z=\sqrt{sen(xy)-2}$

15) $z=\sqrt{ln\left(xy-4\right)}$ 16) $z=ln\sqrt{xy-4}$ 17) $z=\dfrac{ln\left(x^2-y\right)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

18) $z=\dfrac{1}{ln\left(x^2-y^2\right)}$ 19) $z=\dfrac{1}{ln\left(x+y-3\right)}$ 20) $z=ln\left[(x+3).(y-2)\right]$

21) $z=\dfrac{ln\left(2y-x^2-y^2\right)}{cos\left(\pi y\right)}$ 22) $z=ln\left[(x+2y-4).\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}}\right]$

23) $u=ln\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-16}$

B) Determinar a) gráfica y analíticamente el dominio D, b) los conjuntos D_i, D_e, D_f y D', c) si el conjunto es abierto, cerrado, denso, perfecto. Justificar.

1) $f(x;y)=\dfrac{arc\cos\left(x^2+y^2-3\right)}{x^2+y^2-4}$ 2) $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

3) $f(x;y)=\sqrt{36-x^2-4y^2}\,.ln\left(x^2+y^2-1\right)$

RESPUESTAS

A)

1) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x\neq y \wedge x^2+y^2\leq 25\}$, $R=\Re$

2) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x\neq 2 \wedge x\neq 1 \wedge y\neq 4 \wedge y\neq -4\}$, $R=\Re$

3) $D=\left\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x\neq y \wedge x\neq -y \wedge y\neq (2n+1)\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{4}\right\}$, $R=\Re-\{0\}$, $n\in Z$

4) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ y<2x \wedge x^2+y^2\neq 4\}$, $R=\Re$

5) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x^2+y^2\leq 9 \wedge y\neq x-n\pi\}$, $R=\Re$

6) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ y<2x \wedge -2<x<2\}$, $R=\Re$

7) $D=\left\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x^2+y^2\leq 16 \wedge y\neq x-(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $R=\Re$ $\quad n\in Z$

8) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x^2+y^2\neq 9\}$, $R=\Re-\{0\}$

9) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x^2+y^2\leq 4\}$, R = [0;2]

10) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x^2+y^2\neq 2 \wedge x^2+y^2>1\}$, $R=\Re-\{0\}$

11) $D=\left\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1\right\}$, $R=\Re^+$

12) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \left[(1-x-y)\geq 0 \wedge xy\geq 0\right]\vee\left[(1-x-y)\leq 0 \wedge xy\leq 0\right]\}$, $R=\Re_0^+$

13) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ y>\sqrt{x} \wedge x\geq 0\}$, $R=\Re^+$ 14) $D=\emptyset$

15) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ xy\geq 5\}$, $R=\Re_0^+$ 16) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ xy>4\}$, $R=\Re$

17) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ y<x^2 \wedge x^2+y^2<16\}$, $R=\Re$

18) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ (y<x \wedge y>-x)\vee(y>x \wedge y<-x)\wedge x^2-y^2\neq 1\}$, $R=\Re-\{0\}$

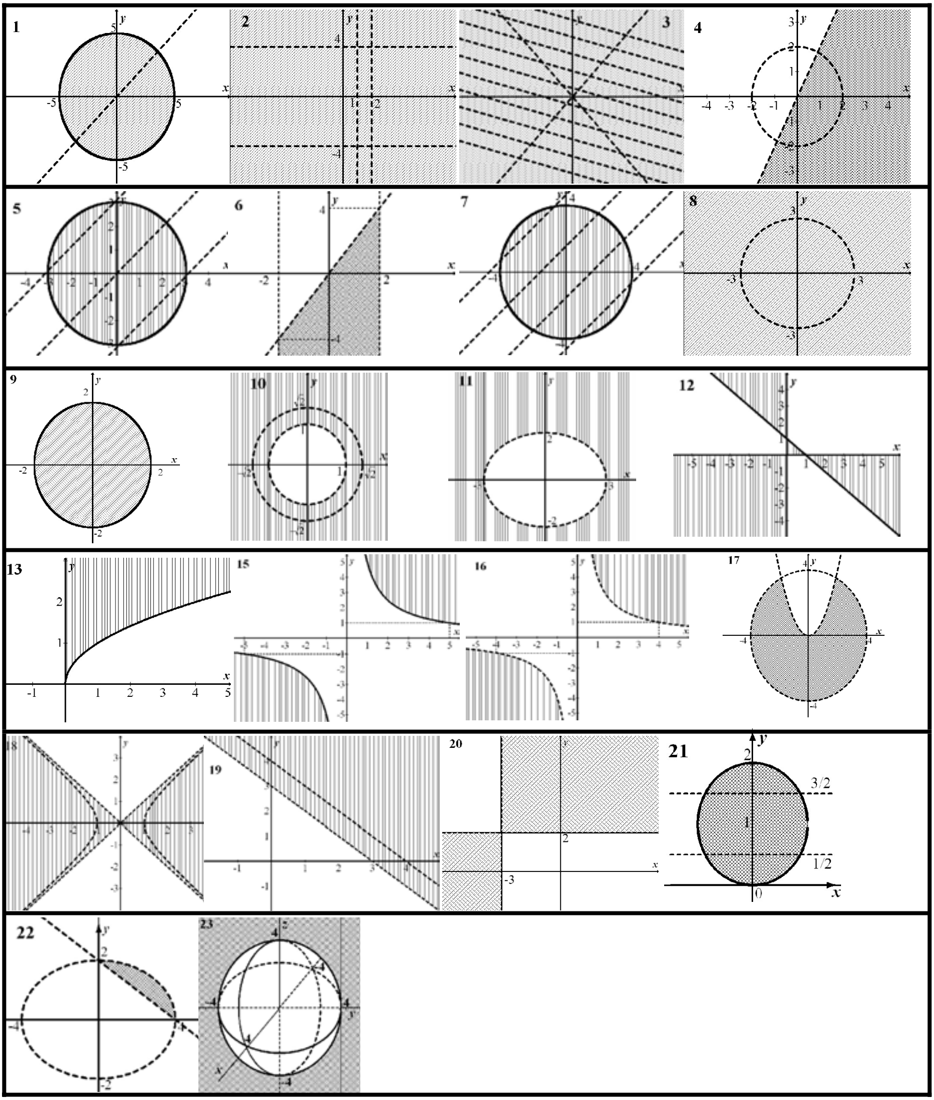
19) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ y>3-x \wedge y\neq 4-x\}$, $\qquad R=\Re-\{0\}$

20) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / (x+3>0 \wedge y-2>0)\vee(x+3<0 \wedge y-2<0)\}$, $R=\Re$

21) $D=\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ x^2+(y-1)^2<1 \wedge y\neq 0{,}5 \wedge y\neq 1{,}5\}$, $R=\Re$

22) $D=\left\{(x;y)\in \Re^2 \ / \ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}<1 \wedge y>2-\dfrac{1}{2}x\right\}$, $R=\Re$

23) $D=\{(x;y;z)\in \Re^3 \ / \ x^2+y^2+z^2>16\}$, $R=\Re-\{0\}$


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
15
16
17
18
19
20
21
22
23

B) 1) a) $D=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 2\le x^2+y^2<4\}$

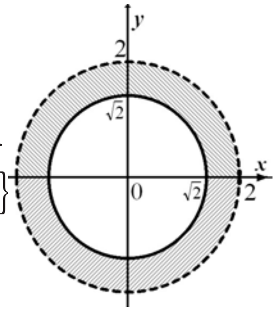
b) $D_i=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 2<x^2+y^2<4\}$

$D_e=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2<2 \vee x^2+y^2>4\}$

$D_f=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2=2 \vee x^2+y^2=4\}$

$D'=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 2\le x^2+y^2\le 4\}$,

c) D no es ni abierto ni cerrado, es denso, no es perfecto.



2) a) $D=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 4\le x^2+y^2<16\}$

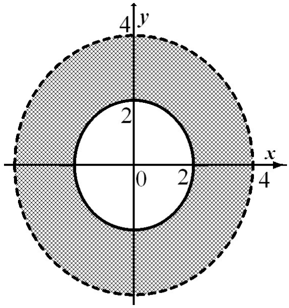
b) $D_i=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 4<x^2+y^2<16\}$

$D_e=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2<4 \vee x^2+y^2>16\}$

$D_f=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2=4 \vee x^2+y^2=16\}$

$D'=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 4\le x^2+y^2\le 16\}$

c) D no es ni abierto ni cerrado, es denso, no es perfecto.



3) a) $D=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+4y^2\le 36 \wedge x^2+y^2>1\}$

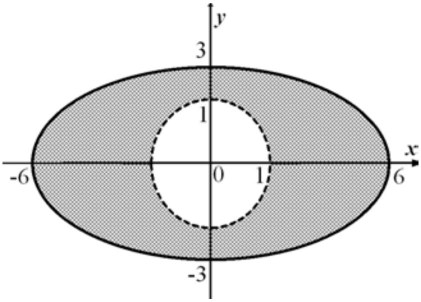
b) $D_i=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+4y^2<36 \wedge x^2+y^2>1\}$

$D_e=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+4y^2>36 \vee x^2+y^2<1\}$

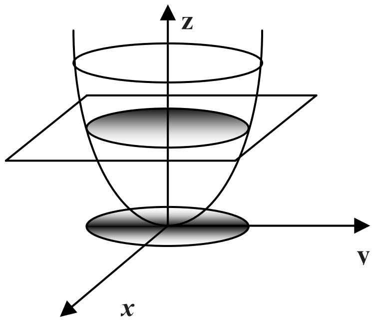
$D_f=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+4y^2=36 \vee x^2+y^2=1\}$

$D'=\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+4y^2\le 36 \wedge x^2+y^2\ge 1\}$

c) D no es ni abierto ni cerrado, es denso, no es perfecto.



CURVAS Y SUPERFICIES DE NIVEL



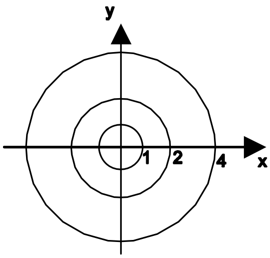
Si se interseca una superficie ***z* = *f* (*x*;*y*)** con planos paralelos al plano (*xy*) ($z = k$), se obtienen curvas que se pueden proyectar sobre el plano (*xy*).

Esas curvas reciben el nombre de **curvas de nivel**.

Podemos definir a las curvas de nivel como a las ***proyecciones sobre el plano* (*xy*) *de las intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano* (*xy*).** La curva de nivel $z = k$ para una función de dos variables $z = f(x;y)$ es el conjunto $\boldsymbol{C_k = \{(x;y) \in \text{Dom } f \text{ y } f(x;y) = k\}}$.

Ejemplos

a) $z = x^2 + y^2$



Si intersecamos a la superficie con planos de ecuaciones $z = 1$, $z = 2$, etc.

$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, se obtiene una circunferencia de radio 1.
$z = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, se obtiene una circunferencia de radio 2.
$z = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, se obtiene una circunferencia de radio 4, y así sucesivamente.

En este caso las intersecciones son circunferencias concéntricas. Observamos, en este caso, que no hay intersección si tomamos valores de ***z*** negativos.

b) $z = e^{-\left(x^2 + y^2\right)}$

$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$, se obtiene el punto (0;0).
$z = 1/e \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, se obtiene una circunferencia de radio 1.
$z = 1/e^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$, se obtiene una circunferencia de radio 2, y así sucesivamente.

Propiedad

Sobre cada curva de nivel pueden variar x o y, pero no z que permanece constante. Las curvas de nivel se representan en el plano (xy).

Generalización

Si la superficie se corta con planos paralelos a los otros planos coordenados se pueden obtener otras curvas de nivel sobre el plano (xz) o (yz).

SUPERFICIES DE NIVEL

Si f es un campo escalar de tres variables independientes del tipo $f: \Re^3 \to \Re$ / $u = f(x;y;z)$, la función, como ya se mencionó, no puede representarse gráficamente, pero sí pueden hallarse sus superficies de nivel.

La superficie de nivel $z = k$ en este caso es:

$S_k = \{(x;y;z) \in \text{Dom} f \wedge f(x;y;z) = k\}$

Ejemplo: Sea $f: \Re^3 \to \Re$ / $u = x^2 + y^2 + z^2$

En este caso las superficies de nivel se obtienen asignándoles valores a u.

$u = 1 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$u = 2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2$

$u = 4 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Vemos, en este ejemplo, que obtenemos como superficies de nivel sucesivas superficies esféricas concéntricas con centro en el origen de coordenadas.

Ejercicios Propuestos

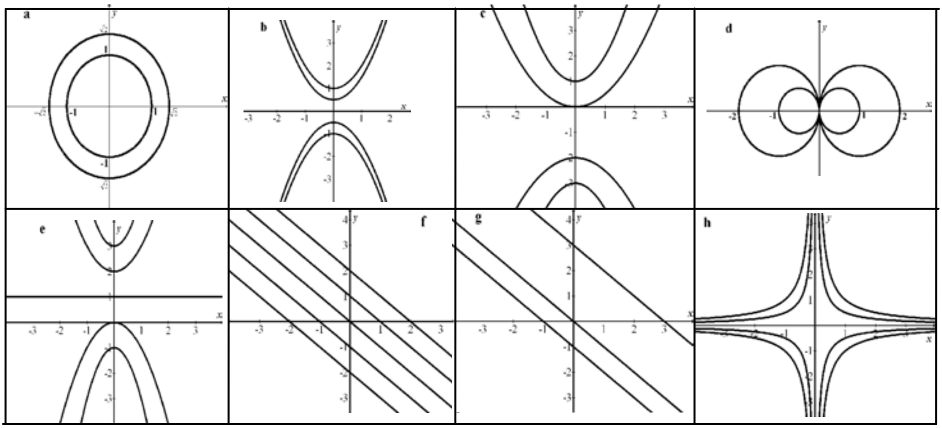
1) Graficar las curvas de nivel, para $z=-2$, $z=-1$. $z=0$, $z=1$, $z=2$, de las siguientes superficies

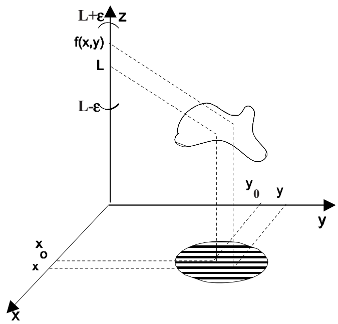
a) $z=x^2+y^2$ b) $z=\dfrac{2y}{x^2+1}$ c) $z=\dfrac{x^2+2}{y+1}$ d) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$

e) $z=\dfrac{y-1}{x^2+1}$ f) $z=x+y$ g) $z=\sqrt{1+x+y}$ h) $z=2xy$

Respuestas

1)	**z = –2**	**z = –1**	**z = 0**	**z = 1**	**z = 2**
a)	$\nexists$	$\nexists$	$x^2+y^2=0$	$x^2+y^2=1$	$x^2+y^2=2$
b)	$y=-x^2-1$	$y=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$	$y=0$	$y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$	$y=x^2+1$
c)	$y=-\dfrac{x^2}{2}-2$	$y=-x^2-3$	$\nexists$	$y=x^2+1$	$y=\dfrac{x^2}{2}$
d)	$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$	$(x+1)^2+y^2=1$	$x=0$	$(x-1)^2+y^2=1$	$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$
e)	$y=-2x^2-1$	$y=-x^2$	$y=1$	$y=x^2+2$	$y=2x^2+3$
f)	$y=-x-2$	$y=-x-1$	$y=-x$	$y=-x+1$	$y=-x+2$
g)	$\nexists$	$\nexists$	$y=-x-1$	$y=-x$	$y=-x+3$
h)	$xy=-1$	$xy=-\dfrac{1}{2}$	$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$	$xy=\dfrac{1}{2}$	$xy=1$





Capítulo 3

Límite y continuidad

Límite doble o simultáneo.

Límites sucesivos o reiterados.

Límites radiales.

Continuidad; definición, propiedades.

Discontinuidades.

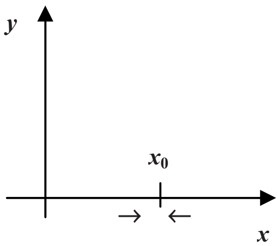
LIMITE

Límite finito de una función en un punto P_0

Concepto

Podemos considerar al límite como el valor numérico al que se aproxima una función a medida que nos aproximamos al punto P_0, *cualquiera* sea el camino elegido para llegar al mismo.

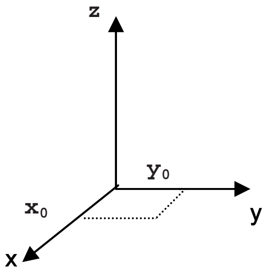
Para funciones de una variable



Hay dos caminos para llegar al punto porque el punto está sobre una recta. Por la izquierda y la derecha. Para que exista el límite el valor debe ser el mismo.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Para un campo escalar de dos variables



El punto ahora se encuentra en un plano y por lo tanto hay infinitos caminos para llegar a él. Esta es la gran diferencia que hay entre el cálculo del límite para funciones de dos variables y para funciones de una variable; ahora los caminos son infinitos.

Una función o campo escalar de dos variables tiene límite finito en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ cuando los valores de la función se aproximan a un número finito L a medida que los valores de $(x;y)$ se aproximan a (x_0,y_0), ***cualquiera*** sea el camino elegido para llegar al punto.

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = L$$

Definición de límite doble o simultáneo

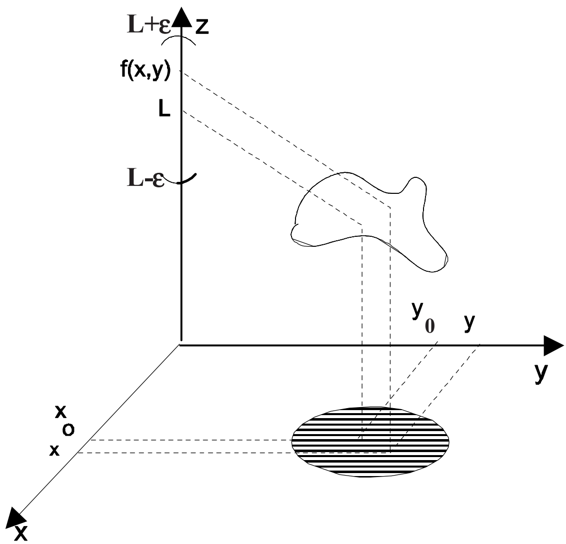
Una función $z = f(x;y)$ tiene límite finito $\boldsymbol{L}$ en un punto de acumulación de su dominio $\Leftrightarrow$ cuando los valores de $(x;y) \to (x_0;y_0)$, los valores de la función se aproximan a L, cualquiera sea el camino elegido para llegar al punto. Eso quiere decir que la diferencia, en valor absoluto, entre los valores de la función y el límite se pueden hacer tan pequeña como se quiera, con tal de tomar valores de $(x;y)$ suficientemente próximos al punto, es decir, pertenecientes al entorno reducido de centro P_0 y radio h.

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists h(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall (x;y) \in Df :$$

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < h \Rightarrow \left| f(x;y) - L \right| < \varepsilon$$

Interpretación geométrica

Esto quiere decir que por más pequeño que sea **ε** (diferencia entre los valores que toma la función en un entorno de $(x_0;y_0)$ y $\boldsymbol{L}$) siempre existe $\boldsymbol{h}$, radio del entorno reducido dentro del cual están los $(x;y)$ que cumplen con la condición de que la diferencia en valor absoluto entre los valores de la función y el límite se pueda hacer tan pequeña como se quiera.



Si dado cualquier ε siempre existe h, entonces la función tiene límite finito en el punto. El radio h depende de ε porque si tomamos valores de ε menores, los pares $(x;y)$ se encontrarán más cerca del punto $(x_0;y_0)$ y por lo tanto el radio del entorno es menor.

El punto debe ser de acumulación del dominio porque de lo contrario no existirían los $(x;y)$ que cumplan con la condición establecida, ya que alrededor del punto no habrían otros puntos pertenecientes al dominio de la función.

Cálculo de límites aplicando la definición

Este método si bien es la forma de asegurar la existencia de límite finito, no es simple, salvo en casos muy sencillos. Veremos algunos ejemplos.

1) $$\lim_{(x;y)\to(1;2)} (x+y) = 3$$

Debemos demostrar que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < h \Rightarrow |x+y-3| < \varepsilon$

$$|x+y-3| = |x-1+y-2| \le |x-1| + |y-2| \quad (1)$$

Además, si x e y son números reales, se verifica que:

$$|x-1| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \quad (2) \quad \text{y} \quad |y-2| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \quad (3)$$

$$|x-1| + |y-2| \le 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto $h = \frac{\varepsilon}{2}$. Queda demostrado así que el $\lim_{(x;y)\to(1;2)} (x+y) = 3$.

2) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Debemos demostrar que $0<\sqrt{x^2+y^2}<h \Rightarrow \left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right|=3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2} \quad \therefore \quad \frac{3|y|x^2}{x^2+y^2}\le 3|y|\le 3\sqrt{y^2}\le 3\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

Haciendo $h=\dfrac{\varepsilon}{3}$, queda demostrado que el $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$.

3) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} x.sen\left(\dfrac{\pi}{y}\right)=0$

Debemos demostrar que $0<\sqrt{x^2+y^2}<h \Rightarrow \left|x.sen\left(\dfrac{\pi}{y}\right)-0\right|<\varepsilon$

$$\left|x.sen\left(\frac{\pi}{y}\right)\right|=|x|.\left|sen\left(\frac{\pi}{y}\right)\right|<|x|<\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

Haciendo $h=\varepsilon$, queda demostrado que el $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} x.sen\left(\dfrac{\pi}{y}\right)=0$

Este método evidentemente no es muy práctico. Veamos ahora otros métodos para analizar el cálculo de límites para funciones de dos variables independientes.

Regla práctica para cálculo del límite doble

Lo que hemos visto es la definición del límite doble, es decir la condición que debe cumplirse para que una función tenga límite doble en un punto. Para calcular el límite doble procedemos de la misma manera que para funciones de una variable. Probamos como regla práctica reemplazar las variables *x* e *y* por las coordenadas del punto en el cual queremos calcular el límite y observamos que ocurre.

Ejemplos

1) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \left(x^2 - 2y\right) = -3$ lo que significa que cuando nos acercamos al punto (1;2), por cualquier camino, los valores de la función se aproximan a –3.

2) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;2)} \dfrac{2x^2 + y}{x-5} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$

Si obtenemos un valor determinado podemos decir que ese valor es el valor del límite. El límite así calculado recibe el nombre de ***límite doble o simultáneo*** porque ambas variables tienden simultáneamente al punto, abarcando así los infinitos caminos por los cuales se puede acceder al punto.

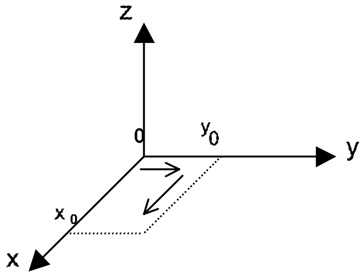
Veamos ahora el siguiente ejemplo

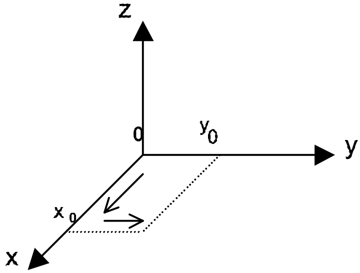
$L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x+y^2}{x+y^2} \quad \dfrac{\to 0}{\to 0}$ llegamos en este caso a una indeterminación que no se puede salvar. Es decir que este procedimiento de reemplazar las coordenadas x e y por las coordenadas del punto no siempre da buenos resultados. Lo que vamos a hacer a partir de ahora es empezar a recorrer algunos de los infinitos caminos por los cuales se puede acceder al punto. Si al recorrer algunos de esos infinitos caminos, por ser infinitos no podemos agotarlos todos, los valores de la función se aproximan a valores distintos, podemos asegurar que la función no tiene límite doble en ese punto porque el límite, de existir, debe ser único. Pero si al recorrer esos caminos siempre llegamos al mismo valor, no podemos asegurar ni la existencia ni la no existencia del límite, porque que la función, al acercarnos por determinados caminos, se aproxime a un mismo valor no quiere decir que por ***todos*** los caminos se llegue al mismo valor.

Límites sucesivos o reiterados

En este caso se hace tender a su límite primero una variable, dejando fija la otra, y luego ésta en la función así obtenida.

$$L_1 = \lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x;y) \right] = \lim_{y \to y_0} \phi(y)$$





$$L_2 = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x;y) \right] = \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

En L_1 se hacer tender primero la variable x a x_0, y luego la variable $\boldsymbol{y}$ a y_0 en la función de $\boldsymbol{y}$ que queda en el paréntesis. Eso equivale a acercarnos al punto primero según $\boldsymbol{x}$ y luego según y.

En L_2 se hacer tender primero la variable y a y_0, y luego la variable x a x_0 en la función de x que queda en el paréntesis. Eso equivale a acercarnos al punto primero según y y luego según x.

Si $L_1 \neq L_2$, por lo ya visto, no existe el límite doble L.
Si $L_1 = L_2$, no se sabe que ocurre. Hay que recorrer otros caminos. Si por los otros caminos el límite sigue dando lo mismo, seguimos sin saber que ocurre con el límite doble de la función en ese punto. Si por alguno de esos otros caminos llegamos a un valor distinto, entonces podemos asegurar que el límite doble no existe.

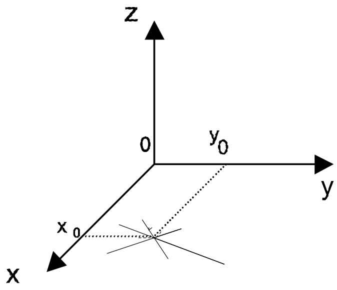
Nota importante: cuando se empieza a transitar por los distintos caminos podemos llegar a concluir la no existencia del límite doble, nunca podemos asegurar la existencia del límite doble porque nunca podemos agotar los infinitos caminos.

Veamos como aplicar los límites reiterados al ejemplo anterior:

$$L_1 = \lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{2x + y^2}{x + y^2} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2x+y^2}{x+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2 \quad L_1 \neq L_2 \Rightarrow$$ no existe límite doble

Límite radial



Se llama así al límite cuando el camino elegido son las rectas que pasan por el punto. Si tenemos en cuenta la ecuación de la recta que pasa por un punto: $y = m\,(x - x_0) + \boldsymbol{y_0}$, donde m es la pendiente de la recta queda:

$$L_r = \lim_{\substack{(x;y)\to(x_0;y_0)\\ y=m(x-x_0)+y_0}} f(x;y)$$

Observemos que al hacer la sustitución $y = m\,(x - x_0) + y_0$, el límite se transforma en un límite de una sola variable, por lo tanto para su resolución valen todas las propiedades vistas en Análisis I para funciones de una variable.
Haciendo variar ***m*** se obtienen las infinitas rectas que pasan por el punto. Cada recta significa un camino distinto. Si por todos los caminos rectos se llega al mismo valor, decimos que existe el límite radial. Pero esto no asegura la existencia del límite doble, ya que existen infinitos caminos que no son rectos para llegar al punto que hay que analizar para asegurar la existencia del límite doble. Si el límite radial depende de ***m*** podemos asegurar que el límite doble no existe pues por distintos caminos se llega a valores distintos.

Veamos los siguientes ejemplos

1) volvamos al ejemplo visto anteriormente:

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{2x+y^2}{x+y^2}\;\frac{\to 0}{\to 0}$$

obtenemos una indeterminación, recurrimos al límite radial

$$L_r = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=mx}}\frac{2x+y^2}{x+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+(mx)^2}{x+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(2+m^2x\right)}{\cancel{x}\left(1+m^2x\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

Esto significa que cualquiera sea la recta que elijamos para acercarnos al punto, en este caso el origen de coordenadas, el valor al que se aproxima la función siempre es el mismo. Pero esto no asegura la existencia del límite doble. Ya hemos visto que el límite doble de esta función en el origen no existe por ser los límites reiterados distintos.

2) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x+2y}{2x+y} \quad \dfrac{\to 0}{\to 0}$ obtenemos una indeterminación, recurrimos al límite radial

$$L_r = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=mx}} \frac{x+2y}{2x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2mx}{2x+mx} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+2m)}{\cancel{x}(2+m)} = \frac{1+2m}{2+m}$$

En este caso el límite radial depende de ***m***, lo que significa que para cada recta la función se aproxima a un valor distinto, por lo tanto el límite doble de la función en el origen no existe.

Límite parabólico

Si los límites reiterados y radial fuesen iguales, debemos probar por otros caminos, por ejemplo parabólicos, hasta encontrar un camino para el cual el límite sea distinto. Si por distintos caminos seguimos obteniendo el mismo límite no podemos saber si el límite doble existe o no.

Ejemplo

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2} \quad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{3y^2} = 0$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0,$$

al ser $L_1 = L_2$ debemos seguir investigando.

$$L_r = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2.mx}{x^4+3(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3m}{x^4+3m^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3m}{\cancel{x^2}\left(x^2+3m^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2xm}{x^2+3m^2} = \frac{0}{3m^2} = 0$$

Seguimos sin saber qué ocurre. Probamos por otro camino, por ejemplo un camino parabólico, $y = x^2$.

$$L_p = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=x^2}} \frac{2x^2 y}{x^4 + 3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2.x^2}{x^4 + 3\left(x^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2}$$

Hemos encontrado un camino por el cual la función se aproxima a un valor distinto, por lo tanto podemos asegurar que el límite doble no existe.

Nota: la curva que elijamos debe pasar por el punto, en este caso la parábola $y = x^2$ pasa por $P_0 = (0;0)$.

Propiedades de los límites

Para las funciones de dos variables valen las mismas propiedades que para los límites de una variable. Es decir que el límite, si existe, es único. El límite de la suma, resta, producto o cociente de funciones es igual a la suma, resta, producto o cociente de los límites. En este último caso si el límite del denominador es $\neq 0$.

El producto entre un infinitésimo y una función acotada es otro infinitésimo. El cálculo de los límites reiterados y radiales ayudan a determinar la existencia del límite doble. Veamos las relaciones que se verifican entre ellos.

1) Si $\exists L$, L_1, L_2, L_r y L_p, estos deben ser iguales, es decir $L = L_1 = L_2 = L_r = L_p$.
2) Si $L_1 \neq L_2$ o $L_1 = L_2 \neq L_r$ o $L_1 = L_2 = L_r \neq L_p \Rightarrow \nexists L$, es decir que si algunos de los límites que encontramos son distintos, el límite doble no existe.
3) $L_1 = L_2 = L_r = L_p$ no se sabe si existe el límite doble L.
4) Puede $\exists L$ y no existir L_1 o L_2.

Teorema de la unicidad: Si existe el límite doble, éste es único.

Dem.) suponemos que f tiene dos límites distintos L_1 y L_2. Elegimos $h = \frac{\varepsilon}{2}$.

a) $\left|f(x;y) - L_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ en un $E^*\left[(x_0;y_0);h_1\right]$

b) $\left|f(x;y)-L_2\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ en un $E^*\left[(x_0;y_0);h_2\right]$

Si consideramos $h = mín\ \{h_1; h_2\}$, a) y b) se cumplirían en $E^*\left[(x_0;y_0);h\right]$.
Entonces en $E^*\left[(x_0;y_0);h\right]$ vale:

$$\left|f(x;y)-L_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$+$

$$\left|L_2-f(x;y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|f(x;y)-L_1\right|+\left|L_2-f(x;y)\right|<\varepsilon$$

$$\left|f(x;y)-L_1+L_2-f(x;y)\right| \leq \left|f(x;y)-L_1\right|+\left|f(x;y)-L_2\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|f(x;y)-L_1+L_2-f(x;y)\right| < \varepsilon \ \therefore \ \left|L_2-L_1\right|<\varepsilon.$$

Como ε se puede hacer tan pequeño como se quiera y L_1 y L_2 son constantes, entonces $L_2-L_1=0$, por lo tanto $L_1=L_2$. Queda así demostrado que el límite es único.

Teorema 2: Si existe el límite doble y uno de los reiterados, entonces ambos son iguales.

H) $\exists L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=L$ T) $\exists L_1 = \lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)\right]$

T) $L=L_1$

D) Si existe L entonces $\left|f(x;y)-L\right|<\varepsilon$, es decir que

$$-\varepsilon \leq f(x;y)-L<+\varepsilon \quad \text{o} \quad L-\varepsilon<f(x;y)<L+\varepsilon$$

Tomando límites en la desigualdad cuando $x\to x_0$ resulta

$$\lim_{x \to x_0} (L-\varepsilon) < \lim_{x \to x_0} f(x;y) < \lim_{x \to x_0} (L+\varepsilon)$$

El primer y el último límite son límites de constantes, por lo tanto son iguales a las constantes.

$$L-\varepsilon < \lim_{x \to x_0} f(x;y) < L+\varepsilon$$

Tomamos ahora límite cuando $y \to y_0$

$$\lim_{y \to y_0} (L-\varepsilon) < \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x;y) \right) < \lim_{y \to y_0} (L+\varepsilon)$$

$$L-\varepsilon < L_1 < L+\varepsilon$$
$$-\varepsilon < L_1 - L < \varepsilon \Rightarrow |L_1 - L| < \varepsilon \,,$$

como ε se puede hacer tan pequeño como se quiera y L y L_1 son constantes, entonces $L_1 - L = 0$, por lo tanto $L_1 = L$.

Pasos a seguir para calcular límites dobles

1) Tratar de calcular directamente el límite doble.
2) Si da una indeterminación tratar de salvarla algebraicamente.
3) Si no se puede salvar, recurrir a los límites reiterados.
4) Si éstos fuesen iguales, recurrir al límite radial.
5) Si los límites reiterados y radial fuesen iguales, debemos probar por otros caminos, por ejemplo parabólicos, hasta encontrar un camino para el cual el límite sea distinto. Si por distintos caminos seguimos obteniendo el mismo límite no podemos saber si el límite doble existe o no. En estos casos podemos sospechar que el límite doble existe y toma ese valor, pero la única forma de confirmarlo es aplicando la definición.

Ejemplo del uso de propiedades en la resolución de límites

Veamos como se puede resolver el siguiente límite aplicando propiedades. En principio obtenemos una indeterminación del tipo 0/0. Suponemos que $x \neq 0$, lo que nos permite dividir por x^2.

$$L=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\x\neq 0}}\frac{y^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=0$$

Debemos analizar ahora que ocurre si $x = 0$. Equivale a calcular un límite radial, nos acercamos al punto según la dirección del eje y.

$$L_{x=0}=\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\x=0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0.y^2}{0+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

Con lo cual queda demostrado que el límite vale 0.

RELACIÓN ENTRE LOS LÍMITES DOBLES Y LAS CURVAS DE NIVEL

Cuando buscamos distintos caminos para acercarnos al punto, podemos probar por los caminos que siguen las curvas de nivel. Si dos o más de esos caminos de $z = f(x;y)$ se cortan en el punto $P_0 = (x_o;y_o)$ o se aproximan a un valor distinto a L_1 o L_2, entonces no existe el $L=\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)$ porque por caminos diferentes nos acercamos a valores distintos ya que para cada uno de esos caminos las imágenes se aproximan respectivamente a k_1 y k_2 que corresponden a las distintas curvas de nivel.

Esta es otra forma de verificar la no existencia de un límite doble.

Ejemplos: a) $L=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{x+y}{x-y}\quad\dfrac{\to 0}{\to 0}$

Analizamos los caminos que corresponden a dos curvas de nivel de $f(x;y)$, por ejemplo para $z = 2$ y $z = 3$.

Para $z = 2$, tenemos $\dfrac{x+y}{x-y}=2 \quad\Rightarrow x+y=2x-2y \quad\Rightarrow x=3y$

Para $z = 3$, tenemos $\dfrac{x+y}{x-y}=3 \quad\Rightarrow x+y=3x-3y \quad\Rightarrow x=2y$

Vemos que ambos caminos ($x = 3y$ y $x = 2y$) se cortan en (0;0), por lo tanto el límite doble no existe.

b) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2}{x^2+y} \quad \dfrac{\to 0}{\to 0}$

Analizamos los caminos para $z = 1$ y $z = 3$.

Para $z = 1$, tenemos $\dfrac{x^2}{x^2+y} = 1 \quad \Rightarrow y = -x^2$

Para $z = 3$, tenemos $\dfrac{x^2}{x^2+y} = 3 \quad \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x^2$

Vemos que ambos caminos se cortan en (0;0), por lo tanto $\nexists$L.

c) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^4}{x+y} \quad \dfrac{\to 0}{\to 0}$

Es fácil ver que $L_1 = L_2 = 0$. Analizamos el camino de la curva de nivel 1, $y = x^4 - x$.

$$L_{y=x^4-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x+x^4-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

Hemos encontrado un camino por el cual las imágenes se aproximan a un número diferente, por lo tanto el límite doble no existe.

LÍMITES EN COORDENADAS POLARES

En lugar de trabajar con coordenadas rectangulares, hacemos un cambio de variables y lo hacemos con coordenadas polares. Tenemos que tener en cuenta que cuando $(x;y) \to (0;0)$, $r \to 0$. Si el límite depende de α, quiere decir que el límite doble no existe. Si el límite no depende de α, el límite doble puede o no existir. En este caso veremos el criterio de la función mayorante.

a) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\alpha . r sen\alpha}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^2 \cos\alpha . sen\alpha}{r^2} =$

$= \lim\limits_{r\to 0} \cos\alpha . sen\alpha = \cos\alpha . sen\alpha \Rightarrow \nexists L$

b) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\alpha . r^2 sen^2\alpha}{r^2 \cos^2\alpha + r^4 sen^4\alpha} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3 \cos\alpha . sen^2\alpha}{r^2 . \left(\cos^2\alpha + sen^4\alpha\right)} =$

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\alpha . sen^2\alpha}{\cos^2\alpha + sen^4\alpha} = 0$

Sin embargo este límite no existe. Considerando el camino $x = y^2$ llegamos a valores diferentes al de los límites sucesivos.

Criterio de la función mayorante

Una condición necesaria y suficiente para que exista $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(xy)$ es que la expresión $\left|f(r.\cos\alpha ; r.sen\alpha) - L\right|$ esté acotada por una función $g(r)$, para cualquier valor de α y que.

a) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ Debemos suponer un posible valor del límite, considera-mos el valor de los límites sucesivos que es 0.

$$\left|f(r.\cos\alpha ; r.sen\alpha) - L\right| = \left|\frac{r^2 \cos^2\alpha . r^2 sen^2\alpha}{r^2} - 0\right| = \left|\frac{r^4 \cos^2\alpha . sen^2\alpha}{r^2}\right| =$$

$$= \left|r^2 \underbrace{\cos^2\alpha . sen^2\alpha}_{\leq 1}\right| \leq r^2 \text{ y } \lim_{r\to 0} r^2 = 0$$

Por lo tanto $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = 0.$

b) $L=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ Debemos suponer un posible valor del límite, consideramos el valor de los límites sucesivos que es 0.

$$\left|f\left(r.cos\,\alpha;r.sen\,\alpha\right)-L\right|=\left|\frac{r^3\,cos^3\,\alpha+r^3sen^3\alpha}{r^2}-0\right|=\left|r\left(\underbrace{cos^3\,\alpha+sen^3\alpha}_{\leq 2}\right)\right|\leq 2r$$

y $\lim\limits_{r\to 0}\left(2r\right)=0$

Por lo tanto $L=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$

c) $L=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Debemos suponer un posible valor del límite, consideramos el valor de los límites sucesivos que es 0.

$$\left|f\left(r.cos\,\alpha;r.sen\,\alpha\right)-L\right|=\left|\frac{r\,cos\,\alpha.r\,sen\alpha}{r}\right|=\left|\frac{r^2\left(cos\,\alpha.sen\alpha\right)}{r}\right|=$$

$$=\left|r\left(\underbrace{cos\,\alpha.sen\alpha}_{\leq 1}\right)\right|\leq r \text{ y } \lim_{r\to 0} r=0$$

Por lo tanto $L=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

CONTINUIDAD

Las condiciones que debe cumplir un campo escalar de dos variables independientes para ser continua en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ de acumulación de su dominio son las mismas condiciones que debe cumplir una función de una variable. Es decir:

1) $\exists f(x_0;y_0)$
2) $\exists L$ finito en el punto. (L es el límite doble)
3) $f(x_0;y_0) = L$

Estas tres condiciones se pueden resumir en una sola:

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0)$$

Si el punto no es de acumulación decimos que es continua si está definida en el punto.

Ejemplo: $z = \begin{cases} y\,.sen\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ en el origen.

Vemos que $f(0;0) = 0$. Analizamos el límite.

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} y\,.sen\frac{1}{x} = 0$$

Es el producto entre un infinitésimo y una función acotada. El límite vale 0. Por lo tanto la función es continua en el origen.

Continuidad en un conjunto

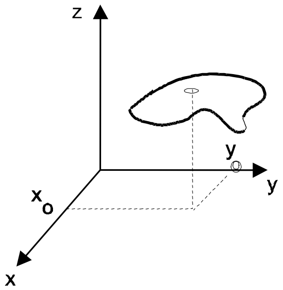
Una función es continua en un conjunto A si lo es en todos los puntos pertenecientes al mismo.

Funciones discontinuas. Clasificación

Si una función no cumple con alguna de estas condiciones se dice que es discontinua en el punto.

Discontinuidad evitable

Si existe el límite doble de la función en el punto, la discontinuidad es *evitable*.



Geométricamente la función tiene un agujero en el punto. La función se puede transformar en continua redefiniéndola, considerando como imagen del punto el valor del límite.

Ejemplo

$z = \dfrac{sen\left(xy\right)}{y}$ en el origen

Vemos que no existe $f(0;0)$.

Calculamos el límite doble en el origen

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\,(xy)}{y} \quad \frac{\to 0}{\to 0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{sen\,(xy)}{y} =$$

$$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x.sen\,(xy)}{xy} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} x.1 = 0$$

La función no está definida en el origen, pero sí tiene límite doble. Es una función discontinua evitable. Para transformarla en continua la redefinimos asignándole como imagen al origen el valor del límite.

$$z = \begin{cases} \dfrac{sen\left(xy\right)}{y} & \left(x;y\right) \neq \left(0;0\right) \\ 0 & \left(x;y\right) = \left(0;0\right) \end{cases}$$

Discontinuidad esencial

Si la función no tiene límite doble en el punto, la discontinuidad es *esencial*.

Ejemplo

a) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ en el origen

Vemos que no existe $f(0;0)$.

Calculamos el $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x+y}{x-y} \quad \dfrac{\to 0}{\to 0}$, da una indeterminación que no se puede salvar

Procedemos a calcular los límites reiterados:

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = -1$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \qquad L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists L \quad \therefore$$ la discontinuidad es esencial

b) $z = \begin{cases} \dfrac{5yx^2}{x^4+3y^2} & (x;y)\neq(0;0) \\ 5 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$ en el origen

Para analizar la continuidad debemos ver si la función está definida y si tiene límite finito en el punto.

Vemos que $f(0;0) = 5$, la función está definida en el origen.

Calculamos el límite, tratando siempre de calcular primero el límite doble:

$L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{5yx^2}{x^4+3y^2} \quad \dfrac{\to 0}{\to 0}$, da una indeterminación que no se puede salvar

Procedemos a calcular los límites reiterados:

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{5yx^2}{x^4+3y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{0}{3y^2} = 0$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{5yx^2}{x^4+3y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0$$

Como los límites reiterados son iguales debemos recurrir al límite radial

$$L_r = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=mx}}\frac{5yx^2}{x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{5mx.x^2}{x^4+3(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{5mx^3}{x^2.\left(x^2+3m^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5mx}{x^2+3m^2} = \frac{0}{3m^2} = 0$$

Debemos seguir investigando, probamos con $y = x^2$

$$L_p = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=x^2}}\frac{5yx^2}{x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2x^2}{x^4+3\left(x^2\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{5.x^4}{x^4+3x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^4}{4x^4} = \frac{5}{4}$$

Por lo tanto no existe L y la función es discontinua esencial.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Límite

Calcular, si existe, el límite doble de las siguientes funciones en los puntos indicados. Sacar conclusiones. Probar por otros caminos si fuera necesario.

1) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x-3y}{2x+6y}$

2) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x-y}{-3x+2y}$

3) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{\left(9x^2-y^2\right).sen\left(2y\right)}{y.(3x-y)}$

4) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;1)} \dfrac{\left(y^2-x^2\right).\left(x^2-3x+2\right)}{(y-x).(2x-2)}$

5) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{3xy}{2x^2+2y^2}$

6) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{(x+2).sen(xy)}{3xy}$

8) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{3x-2y}{x-2y}$

9) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{sen\,(xy)}{y}$

10) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;3)} \dfrac{\left(x^2-4\right).\left(y^2-9\right)}{(2x-y).(y-3)}$

11) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;-1)} \dfrac{3x-y-7}{x+2y}$

12) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2.y^2}{x^4+y^4}$

13) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} (x+y).\left(sen\dfrac{1}{x}+sen\dfrac{1}{y}\right)$

14) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} y.sen\,\dfrac{1}{x}$

15) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & x+y\neq 0 \\ 0 & x+y=0 \end{cases}$

16) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

17) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} 4^{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$

18) *Dada* $z=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^3}$

Hallar el límite en el origen si: a) $y=3x$, b) $y=x^2$, c) $y^2=x$

Sacar conclusiones

19) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;0)} \dfrac{xy^2-y^2+x-1}{x-1}$

20) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2+y^2}{2x+2y}$

21) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ Función de Genocchi- Peano

22) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;0)} \dfrac{xy}{(x-1).e^{y}}$

23) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;-1)} \begin{cases} \dfrac{sen\,(x+2y)}{x^2-4y^2} & x^2 \neq 4y^2 \\ 0 & x^2 = 4y^2 \end{cases}$

24) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$

25) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;-2)} \dfrac{x.sen\left(y^2-4\right)}{y.sen\,x+2.sen\,x}$

26) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

27) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;1)} \dfrac{x^2-y}{x-\sqrt{y}}$

28) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

29) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;0)} \dfrac{sen\left[(x-1)^2+y^2\right]}{2x^2+2y^2-4x+2}$

30) Hallar el valor de $k \in \mathbb{Z}$ para que exista y tenga valor finito el siguiente límite $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{y\,x^k}{x^2+y^2}$.

31) Dada la función $f(x;y)=\dfrac{ax+y+bx^2}{sen\,y+ln(1+x)}$,

a) determinar el valor de a para que los límites reiterados coincidan en el origen.

b) utilizando el valor del coeficiente a determinado en a), determinar el valor de b para que los límites radiales en (0,0) coincidan siempre.

Continuidad

1) Dadas las siguientes funciones determinar si son continuas en el origen. Justificar la respuesta. Clasificar si no es continua.

a) $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $z=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$

c) $z = \begin{cases} x + y^3 & (x;y) \neq (0;0) \\ 3 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$ d) $z = \begin{cases} x + y^3 & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

2) Dados los siguientes campos escalares determinar si son continuos en el punto $P_0 = (1;1)$.

a) $z = \begin{cases} 3x^2 - y & (x;y) \neq (1;1) \\ 1 & (x;y) = (1;1) \end{cases}$ b) $z = \dfrac{2x}{\sqrt{x-y}}$

3) Determinar si son continuas las siguientes funciones en el origen.

a) $z = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & x + y \neq 0 \\ 1 & x + y = 0 \end{cases}$ b) $z = \begin{cases} (x+y).\left(sen\dfrac{1}{x} + sen\dfrac{1}{y} \right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

c) $z = \begin{cases} x.sen\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ d) $z = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2}{x^3 + y^3} & x + y \neq 0 \\ 0 & x + y = 0 \end{cases}$

e) $z = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$ f) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

g) $z = \begin{cases} \dfrac{5yx^2}{x^4 + 3y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 5 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$ h) $z = \begin{cases} \dfrac{(1 + sen\ x).(1 - cos\ y)}{y} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

4) Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones.

a) $z = e^{\frac{1}{xy}}$ b) $z = \dfrac{3x}{\sqrt{x-y}}$

c) $z = ln\left(4 - x^2 + y^2\right)$ d) $z = tg\left(x^2 + 2xy + y^2\right)$

5) Definir $f\,(0;0)$, si es posible, para que sean continuas en el origen las siguientes funciones.

$$a)\ z=\frac{x^2-y^2}{x+y} \qquad b)\ z=\frac{sen\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \qquad c)\ z=\frac{tg\,(2xy)}{sen\,(5xy)}$$

$$d)\ z=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0)\\ \square & (x;y)=(0;0)\end{cases} \qquad e)\ z=\begin{cases}y.sen\dfrac{\pi}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0)\\ \square & (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

6) ¿Se pueden transformar las siguientes funciones en funciones continuas en el origen? Justifique la respuesta.

$$a)\ z=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad b)\ z=xy+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

7) Demostrar que $z=\begin{cases}\dfrac{x^2.y^2}{x^2+y^4} & (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & (x;y)=(0;0)\end{cases}$ es continua en $\Re^2$.

8) Determinar $P_0 = (x_0;y_0)$ si el dominio de $f\,(x;y) =\dfrac{\left(y+x^2+2x+1\right)^2}{y^2+\left(x+1\right)^2}$ es $\Re^2 - (x_0;y_0)$ y clasificar la discontinuidad de f en $P_0 = (x_0;y_0)$.

9) Analizar continuidad en $\Re^2$.

$$\text{a)}\ z=\begin{cases}\dfrac{1}{x-y} & x\neq y\\ x & x=y\end{cases} \qquad \text{b)}\ z=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{x^3+y^3} & x\neq -y\\ x & x=-y\end{cases}$$

10) Analizar la continuidad de $z=f(x;y)$ en el origen.

$$\text{a)}\ z=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2x-y^2} & 2x\neq -y^2\\ 0 & 2x=-y^2\end{cases} \qquad \text{b)}\ z=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy+1}-\sqrt{x+1}}{tg\ x} & x\neq k\pi\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$$

RESPUESTAS

Límite

1) $L_1=-\dfrac{1}{2}$, $L_2=\dfrac{1}{2}$, $L_r=\dfrac{1-3m}{2(1+3m)}$ $\Rightarrow$ no existe L

2) $L_1=-\dfrac{1}{2}$, $L_2=-\dfrac{2}{3}$, $L_r=\dfrac{2-m}{-3+2m}$ $\Rightarrow$ no existe L

3) $L=L_1=L_2=L_r=0$ 4) $L=L_1=L_2=L_r=-1$

5) $L_1=L_2=0$, $L_r=\dfrac{3m}{2(1+m^2)}$ $\Rightarrow$ no existe L

6) $L=L_1=L_2=L_r=0$ 7) $L=L_1=L_2=L_r=\dfrac{2}{3}$

8) $L_1=1$, $L_2=3$, $L_r=\dfrac{3-2m}{1-2m}$ $\Rightarrow$ no existe L 9) $L=L_1=L_2=L_r=0$

10) $L=L_1=L_2=L_r=0$

11) $L_1=-\dfrac{1}{2}$, $L_2=3$, $L_r=\dfrac{3-m}{1+2m}$ $\Rightarrow$ no existe L

12) $L_1=L_2=0$, $L_r=\dfrac{m^2}{1+m^4}$ $\Rightarrow$ no existe L

13) $L=L_r=0$, $\nexists L_1, \nexists L_2$ 14) $L=L_2=L_r=0$, $\nexists L_1$

15) $L_1=-1$, $L_2=1$, $L_r=\dfrac{1-m}{1+m}$ $\Rightarrow$ no existe L

16) $L_1=L_2=L_r=0$, $L_p=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ no existe L

17) $L_1=\dfrac{1}{4}$, $L_2=4$, $L_r=4^{\frac{1+m^2}{1-m^4}}$ $\Rightarrow$ no existe L

18) $L_A=L_B=L_C=0$. No se pueden sacar conclusiones

19) $L=L_1=L_2=L_r=1$ 20) $\nexists L$, 21) $\nexists L$ 22) $L=1$

23) $\nexists L$ porque por la recta $x=-2y$ se obtiene un límite diferente a los que se obtienen por los otros caminos.

24) $\nexists L$, considerar el camino $y = x^3$ 25) $L = -4$ 26) $L = 0$

27) $L = 2$ 28) $L = 2$ 29) $L = \dfrac{1}{2}$ 30) $k > 1$ 31) $a = 1$, $b \in \Re$

Continuidad

1) a) Discontinua evitable. $\nexists f(0;0)$. $L = 0$. b) Continua. $L = f(0;0) = 0$
   c) Discontinua evitable. $f(0;0) = 3$. $L = 0$. d) Continua. $L = f(0;0) = 0$

2) a) Discontinua evitable. $f(1;1) = 1$. $L = 2$.
   b) Discontinua esencial. $\nexists f(1;1)$. $L = \infty$.

3) a) Discontinua esencial. $\nexists L$. $f(0;0) = 1$. b) Continua. $L = f(0;0) = 0$.
   c) Continua. $L = f(0;0) = 0$.
   d) Discontinua esencial. $f(0;0) = 0$ $\nexists L$.
   e) Discontinua esencial. $f(0;0) = 0$. $\nexists L$.
   f) Discontinua esencial. $f(0;0) = 0$ $\nexists L$.
   g) Discontinua esencial. $f(0;0) = 5$. $\nexists L$.
   h) Continua. $L = f(0;0) = 0$.

4) a) Es continua $\forall(x;y)/(x;y) \neq (0;0)$. b) Es continua $\forall(x;y) / x > y$
   c) Es continua $\forall(x;y)/ x^2 - y^2 < 4$. d) Es continua $\forall(x;y)/ (x+y)^2 \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

5) a) $f(0;0) = 0$ b) $f(0;0) = 1$ c) $f(0;0) = 2/5$ d) $\nexists f(0;0)$ e) $f(0;0) = 0$

6) a) No, porque $\nexists L$. b) No, porque $\nexists L$.

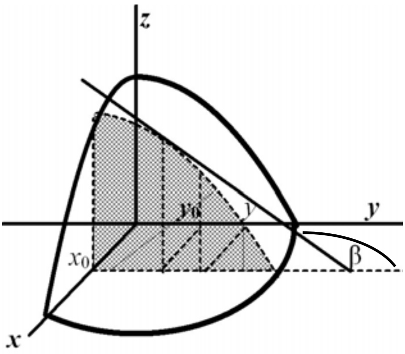
8) $P_0 = (x_0;y_0) = (-1;0)$, la función es discontinua esencial.

9) a) Es continua $\forall(x;y) \in \Re^2 / x \neq y$. Si $x = y$, presenta una discontinuidad esencial.
   b) Es continua $\forall(x;y) \in \Re^2 / x \neq -y$. Si $x = -y$, presenta una discontinuidad esencial.

10) a) No es continua porque $f(0;0) = 0$ y $\nexists L$, presenta una discontinuidad esencial.
    b) No es continua porque $f(0;0) = 0$ y $L = -1/2$, presenta una discontinuidad evitable.

Capítulo 4

Derivadas parciales



Derivadas parciales.

Interpretación geométrica.

Derivada direccional, el gradiente.

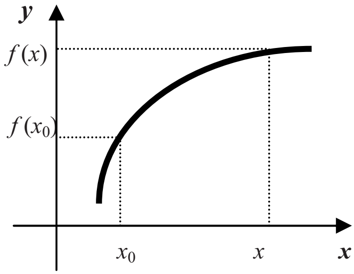
Derivadas parciales de orden superior.

Teorema de Schwarz.

Teorema del valor medio.

DERIVADAS

Antes de analizar el tema de las derivadas para campos escalares de dos variables hacemos un breve repaso del concepto de derivada para funciones de una variable.



Definición

Consideramos una función $y = f(x)$ y un punto x_0 interior al Df. Consideramos un incremento de la variable x (Δx), pasamos así del punto x_0 al punto incrementado $x = x_0 + \Delta x$.

Al punto x_0 le corresponde un valor de la función que se denomina $f(x_0)$ y al punto incrementado le corresponde un valor de la función $f(x)$.

Vemos que a un incremento de la variable x, le corresponde un incremento de la función $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Cociente incremental

Procedemos a formar el cociente entre los incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivada de una función en un punto

Calculamos el $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Dicho límite, si existe, recibe el nombre de derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$.

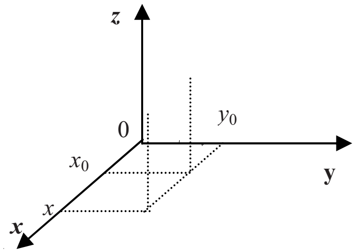
Podemos definir a la derivada de una función en un punto de su dominio como ***el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0***.

LAS DERIVADAS EN ANÁLISIS II - Las derivadas parciales

La primera diferencia que surge es que al haber dos variables independientes, se puede incrementar una u otra, eso da origen a las llamadas ***derivadas parciales***. Se incrementa una sola variable a la vez.

Derivada parcial respecto de *x*

Consideramos una función $z = f\,(x;y)$ y un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ interior al *Df*. Consideramos un incremento de la variable x (Δx), pasamos así del punto $P_0 = (x_0;y_0)$ al punto incrementado $P = (x\,;y_0) = (x+\Delta x;y_0)$.



Al punto $P_0 = (x_0;y_0)$ le corresponde un valor de la función que se denomina $f\,(x_0;y_0)$ y al punto incrementado $P = (x;y_0)$ le corresponde un valor de la función $f\,(x;y_0)$.

Vemos que a un incremento de la variable x, $\Delta x = x - x_0$, le corresponde un incremento de la función $\Delta z = f\,(x;y_0) - f\,(x_0;y_0)$.

Cociente incremental

Procedemos a formar el cociente entre los incrementos:

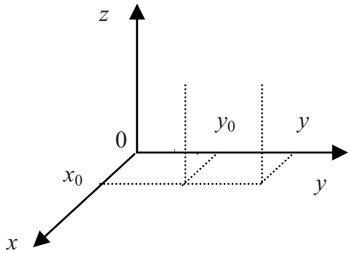
$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f\,(x;y_0) - f\,(x_0;y_0)}{x - x_0} \,.$$

Calculamos el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x;y_0) - f\,(x_0;y_0)}{x - x_0} = f'_x\,(x_0;y_0)$

Dicho límite, si existe, recibe el nombre de ***derivada parcial respecto de x*** de la función $z = f\,(x;y)$ en el punto $P_0 = (x_0\,;y_0\,)$.

Podemos definir a la *derivada parcial respecto de x* de una función en un punto de su dominio como ***el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente x tiende a 0***.

Derivada parcial respecto de *y*



Consideramos una función $z = f\,(x;y)$ y un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ interior al *Df*. Consideramos un incremento de la variable y (Δy), pasamos así del punto $P_0 = (x_0;y_0)$ al punto incrementado $P = (x_0\,;\,y) = (x;y_0+\Delta y)$.

Al punto $P_0 = (x_0;y_0)$ le corresponde un valor de la función que se denomina $f\,(x_0;y_0)$ y al punto incrementado $P = (x_0;y)$ le corresponde un valor de la función $f\,(x_0\,;y)$.

Vemos que a un incremento de la variable y, $\Delta y = y - y_0$, le corresponde un incremento de la función $\Delta z = f\,(x_0\,;y) - f\,(x_0\,;y_0\,)$.

Cociente incremental

Procedemos a formar el cociente entre los incrementos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f\,(x_0\,;\,y) - f\,(x_0\,;\,y_0)}{y - y_0}$$

Calculamos el $\displaystyle \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0\,;\,y) - f(x_0\,;\,y_0)}{y - y_0} = f'_y\,(x_0\,;\,y_0)$

Dicho límite, si existe, recibe el nombre de ***derivada parcial respecto de y*** de la función $z = f\,(x;y)$ en el punto $P_0 = (\,x_0\,;\,y_0\,)$.

Podemos definir a la derivada parcial respecto de ***y*** de una función en un punto de su dominio como ***el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente y tiende a 0***.

Ejemplo: calcular las derivadas parciales de $z = 3x^2y - y^2x + 5$ en $P_0 = (1;2)$

$$f'_x(1;2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{x \to 1} \frac{f\,(x;2) - f\,(1;2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 4x + 5 - 7}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{6x^2-4x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(6x+2).(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (6x+2) = 8$$

$$f'_y(1;2) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{y\to 2} \frac{f(1;y)-f(1;2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{3y-y^2+5-7}{y-2} =$$

$$\lim_{y\to 2} \frac{-y^2+3y-2}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{(-y+1).(y-2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} (-y+1) = -1$$

FUNCIONES DERIVADAS PARCIALES

Si las derivadas parciales respecto de x e y existen en todos los puntos de un conjunto A, es decir que a cada punto se le puede asignar el valor de su derivada parcial en dicho punto, queda definida la **función derivada parcial** respecto de ***x*** o respecto de ***y***. Al igual que para funciones de una variable, habitualmente conviene calcular primero la función derivada parcial y luego aplicarla para calcular la derivada parcial en un punto particular (siempre y cuando la derivada parcial sea continua en ese punto).

Notación

Para referirnos a las funciones derivadas parciales utilizaremos las siguientes notaciones:

$$f'_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad\qquad f'_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

El símbolo ∂ (*notación que se debe al matemático alemán Carl Gustav Jacobi*) se utiliza para indicar que la derivada es parcial y no total, es decir que hay más de una variable independiente. Equivale a la notación que se utiliza en Análisis I para referirnos a la derivada (*notación que se debe al matemático alemán Leibniz*).

Cálculo de las funciones derivadas parciales

En la práctica, para calcular las funciones derivadas parciales, se aplican las reglas de derivación vistas para funciones de una variable considerando a las demás variables como constantes.

Ejemplo: $z = 3x^2 y - y^2 x + 5$ en $P_0 = (1;2)$

Para calcular la función derivada parcial respecto de x consideramos a la variable y como una constante (valen para la y las reglas de derivación para las constantes) y viceversa al calcular la derivada parcial respecto de y.

$z'_x = 6xy - y^2 \qquad\qquad z'_y = 3x^2 - 2xy$

Ahora calculamos las derivadas en el punto $P_0 = (1;2)$ y verificamos los resultados ya obtenidos aplicando las derivadas por definición.

$z'_x(1;2) = 6.1.2 - 4 = 8 \qquad\qquad z'_y(1;2) = 3.1 - 2.2.1 = -1$

Casos en que hay que recurrir a la definición

a) La función derivada no es continua en un punto

Vimos que hay dos formas de calcular la derivada parcial de una función en un punto, aplicando la definición o calculando la función derivada utilizando las reglas de derivación y luego reemplazando. Pero esto último es válido siempre y cuando la función derivada sea continua en el punto considerado, de lo contrario la única forma que hay de obtener el valor de la derivada, si ésta existe, es aplicando la definición de derivada.

Ejemplo: calcular las derivadas parciales de $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ en el origen

Tratamos de calcular la función derivada parcial respecto de x.

$z'_x = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 + y^3\right)^2}} \Rightarrow z'_x\,(0;0)$ no está definida, por lo tanto la función derivada parcial no es continua en el origen

Para saber si la derivada existe o no, y cuánto vale en caso de existir, recurrimos a la definición de derivada.

$$f'_x(0;0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

La derivada parcial respecto de x existe y vale 1, pero para obtener su valor hubo que recurrir a la definición de derivada porque la función derivada parcial respecto de x no es continua en el origen.

Análogamente se demuestra que $f'_y(0;0)=1$.

b) La función está definida por ramas

Si una función está definida por ramas la derivada en los puntos donde se produce la interrupción sólo puede calcularse aplicando la definición.

Analicemos el siguiente ejemplo: $z = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$ en $P_0=(0;0)$

Vamos a calcular las derivadas parciales de 1º orden:

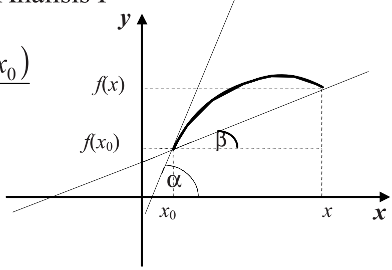
Como la función está definida por ramas debemos recurrir a la ***definición de derivada para determinar su existencia*** en el origen**.**

$$z'_x(0\,;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0 \Rightarrow z'_x(0\,;0)=0$$

Análogamente se puede demostrar que $z'_y\,(0\,;0)=0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Veamos brevemente qué mide la derivada en Análisis I



En el gráfico vemos que la $tg\,\beta=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

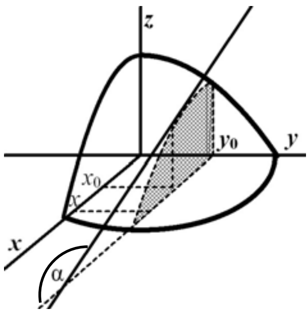
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=tg\,\alpha$$

Si $x\to x_0 \Rightarrow \beta\to\alpha$.

A medida que $x \to x_0$ la recta secante se va transformando en recta tangente. Por lo tanto la derivada de una función en un punto x_0 interior al Df mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $[x_0;f(x_0)]$. Es decir que mide la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a la curva en dicho punto con el semieje positivo de las x.

Veamos ahora que miden las derivadas parciales.

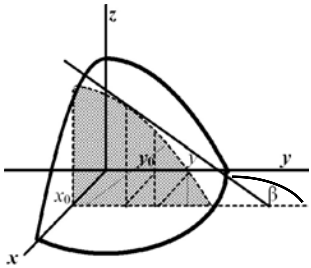
$\underline{z'_x}$



Al calcular la derivada parcial respecto de x, se considera a $y = y_0$, lo que equivale a trazar el plano $y = y_0$, paralelo al plano $(x\,z)$.

La intersección de la superficie con el plano $y = y_0$ es una curva $z = f(x;y_0)$ que representa a una función de x. Si aplicamos a esa curva la interpretación geométrica de la derivada para funciones de una variable concluimos que la derivada parcial respecto de x en $(x_0;y_0)$ mide la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano $y = y_0$ en $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$.

$\underline{z'_y}$



Ahora consideramos a $x = x_0$, lo que equivale a intersecar a la superficie con el plano $x = x_0$, paralelo al plano $(y\,z)$. Esta intersección es una curva $z = f(x_0;y)$ que representa a una función de y.

Si ahora aplicamos a esta curva la interpretación geométrica de la derivada para funciones de una variable concluimos que la derivada parcial de z respecto de y en $(x_0;y_0)$ mide la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano $x = x_0$ en $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$.

Puede existir una derivada parcial y no la otra

Dada $z = \sqrt{x^2 + |y|^3}$ calculamos las derivadas parciales en $P_0 = (0;0)$.

$$f_x'(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\Rightarrow \nexists\, f_x'(0;0)$$

$$f_y'(0;0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0;y)-f(0;0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{|y|^3}-0}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|.\sqrt{|y|}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y}\sqrt{|y|}=0$$

$\frac{|y|}{y}$ está acotado porque puede valer 1 o –1 y $\sqrt{|y|}$ es un infinitésimo.

RELACIÓN ENTRE LA DERIVABILIDAD Y LA CONTINUIDAD

Para funciones de una variable independiente se demuestra una importante propiedad que establece que toda función derivable es continua. Veamos que ocurre con esta propiedad para funciones de dos variables independientes.

Analicemos los siguientes ejemplos

1) $z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & (x;y)=(0;0)\end{cases}$ en $P_0=(0;0)$

Ya vimos en la página 80 que la función es derivable en el origen.

Veamos que ocurre con la continuidad.

a) $f(0;0)=0$

b) $L=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$, no podemos calcular directamente el límite doble. Recurrimos a los límites reiterados.

$$L_1=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

$$L_2=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

$L_1=L_2\Rightarrow$ hay que seguir investigando.

$$L_r = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xmx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2m}{x^2(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2} \quad \Rightarrow \nexists L$$

Por lo tanto esta función es derivable pero no continua en el origen.

2) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+y} & x \neq -y \\ 0 & x = -y \end{cases}$ en $P_0 = (0;0)$

a) $f(0;0) = 0$

b) $L_p = \lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=x^2-x}} \dfrac{x^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x+x^2-x} = 1$ El límite según el camino que sigue la curva de nivel 1, es $1 \neq 0$.

Vemos que esta función no es continua en el origen. Analizamos la derivabilidad en el origen.

$$f'_x(0;0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$f'_y(0;0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Vemos que estas funciones admiten derivadas parciales en el origen pero no son continuas, por lo tanto la propiedad no se cumple para funciones de dos variables: derivabilidad $\not\Rightarrow$ continuidad. Veremos más adelante qué condiciones se deben verificar para garantizar la continuidad de una función. Vimos que el solo hecho de ser derivable no alcanza.

Nota: Desde el punto de vista geométrico, para funciones de una variable, que la derivabilidad garantice la continuidad significa que la existencia de recta tangente garantiza la continuidad. Para campos escalares de dos variables, vemos que la existencia de las rectas tangentes (que suponen la existencia de las derivadas parciales) no alcanza para garantizar la continuidad.

GENERALIZACIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Las definiciones de las derivadas parciales se pueden generalizar a funciones o campos escalares de *n* variables independientes.

Ejemplos

1) Si $u = 3x^2y + 4xz^2 - y^3$, tenemos tres derivadas parciales

$$u'_x = 6xy + 4z^2, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2, \quad u'_z = 8xz$$

Podemos evaluarlas en un punto, por ejemplo $P_o=(1;2;-1)$

$$u'_x(1;2;-1) = 12 + 4 = 16, \quad u'_y(1;2;-1) = 3 - 12 = -9 \quad u'_z(1;2;-1) = -8$$

También podemos verificar, aplicando la definición, alguno de estos resultados.

$$u'_x = \lim_{x \to 1} \frac{f(x;2;-1) - f(1;2;-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 + 4x - 8 - 2}{x-1} = 16$$

2) Analizar derivabilidad y continuidad en el origen de

$$u = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & (x;y;z) \neq (0;0;0) \\ 0 & (x;y;z) = (0;0;0) \end{cases}$$

Analizamos la continuidad de la función

a) $f(0;0;0) = 0$

b) $L = \lim\limits_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \dfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim\limits_{(x;y;z)\to(0;0;0)} xy.\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$

Por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que la función es continua en el origen. Vamos a calcular las derivadas parciales.

En $P_0 = (0;0;0)$

$$u'_x = \lim_{x \to 0} \frac{f(x;0;0) - f(0;0;0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$u'_y = \lim_{y \to 0} \frac{f(0;y;0) - f(0;0;0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

$$u'_z = \lim_{z \to 0} \frac{f(0;0;z) - f(0;0;0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{0 - 0}{z} = 0$$

Vemos que f es derivable en P_0. Ahora calculamos las funciones derivadas parciales.

En $P_0 \neq (0;0;0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yz^2 .\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz^2 .2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{y^3 z^2 + yz^4 - x^2 yz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz^2 .\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz^2 .2y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{x^3 z^2 + xz^4 - xy^2 z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2xyz .\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xyz^2 .2z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{2x^3 yz + 2xy^3 z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}$$

Por lo tanto: $$u'_x = \begin{cases} \dfrac{y^3 z^2 + yz^4 - x^2 yz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} & (x;y;z) \neq (0;0;0) \\ 0 & (x;y;z) = (0;0;0) \end{cases}$$

$$u'_y = \begin{cases} \dfrac{x^3 z^2 + xz^4 - xy^2 z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} & (x;y;z) \neq (0;0;0) \\ 0 & (x;y;z) = (0;0;0) \end{cases}$$

$$u'_z = \begin{cases} \dfrac{2x^3 yz + 2xy^3 z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} & (x;y;z) \neq (0;0;0) \\ 0 & (x;y;z) = (0;0;0) \end{cases}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Derivadas parciales sucesivas

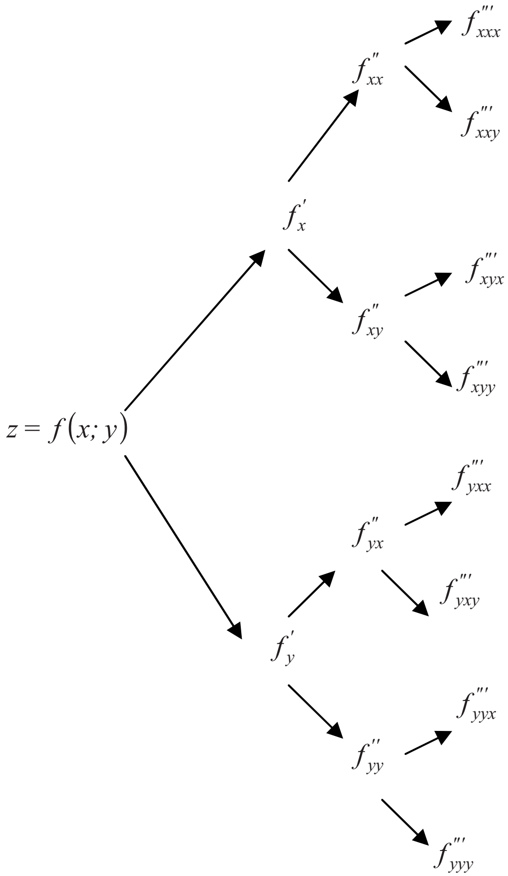
A partir de una función de dos o más variables, se pueden definir las funciones derivadas parciales primeras. Estas funciones pueden admitir, a su vez, nuevas derivadas parciales que se denominan funciones derivadas parciales sucesivas. Cada función derivada se puede volver a derivar respecto de una u otra variable. Veamos el ejemplo para una función de dos variables independientes.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & f'_x \\ z=f(x;y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & f'_y \end{tikzcd}$$

A su vez cada función derivada parcial puede volver a derivarse respecto de x o respecto de y lo que da origen a 4 funciones derivadas de 2º orden o derivadas parciales segundas.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & f''_{xx} \\ & f'_x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & f''_{xy} \\ z=f(x;y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\ & & f''_{xy} \\ & f'_y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & f''_{yy} \end{tikzcd}$$

Si las funciones derivadas parciales segundas se vuelven a derivar se obtienen las 8 funciones derivadas parciales de 3º orden: .



y así sucesivamente

Si hay dos variables independientes, hay $\mathbf{2^n}$ de orden **n**.

Pero algunas de estas derivadas veremos que son iguales, con lo cual el número de derivadas sucesivas distintas se reduce.

TEOREMA DE SCHWARZ

Si las derivadas parciales f'_x, f'_y *y* f''_{xy} *de una función* $z = f(x;y)$ *existen en un entorno del punto* $P_0 = (x_0;y_0)$ *interior al dominio de* f, *y además* f''_{xy} *es continua en ese punto, entonces también existe* $f''_{yx}(P_0)$ *y es igual a* $f''_{xy}(P_0)$.

A este teorema se lo conoce como el teorema de las derivadas cruzadas y establece la igualdad de las mismas en todos los puntos donde sean continuas.

NOTA: si las derivadas cruzadas no son continuas la igualdad no tiene porque verificarse.

SCHWARZ, ***Herman Amadeus (1843-1921):*** original matemático del siglo XIX. Se le debe la relación entre las derivadas sucesivas que lleva su nombre.

Veamos el siguiente ejemplo: $z=\begin{cases} \dfrac{xy.\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$

Calculamos $f''_{xy}(0;0)$ y $f''_{yx}(0;0)$. $f''_{xy}(0;0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f'_x(0;y)-f'_x(0;0)}{y-0}$

Para ello debemos previamente calcular f'_x.

$$f'_x=\frac{\left[y.\left(x^2-y^2\right)+xy2x\right]\left(x^2+y^2\right)-xy.\left(x^2-y^2\right).2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \text{en } (x;y)\neq(0;0).$$

$$\Rightarrow f'_x(0;y)=\frac{-y^5}{y^4}=-y$$

Para calcular $f'_x(0;0)$ debemos aplicar la definición porque *f* está definida por ramas.

$$f'_x(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0 \Rightarrow f''_{xy}(0;0)=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y-0}=-1$$

Calculamos ahora $f''_{yx}(0;0)$. $f''_{yx}(0;0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'_y(x;0)-f'_y(0;0)}{x-0}$

Para ello debemos previamente calcular f'_y.

$$f'_y = \frac{\left[x.\left(x^2-y^2\right)+xy\left(-2y\right)\right]\left(x^2+y^2\right)-xy.\left(x^2-y^2\right).2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \text{en } (x;y) \neq (0;0).$$

$$\Rightarrow f'_y(x;0) = \frac{x^5}{x^4} = x$$

Para calcular $f'_y(0;0)$ debemos aplicar la definición porque *f* está definida por ramas.

$$f'_y(0;0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0 \;\Rightarrow f''_{yx}(0;0) = \lim_{x \to 0} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Vemos que las derivadas cruzadas en (0;0) no son iguales. Esto ocurre porque no se verifican las condiciones de continuidad.

Ejemplo: verificar el teorema de Schwarz para $z = \frac{x}{y} - x^y$

$$z'_x = \frac{1}{y} - y.x^{y-1} \qquad z'_y = -\frac{x}{y^2} - x^y.\ln x$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{y^2} - x^{y-1} - y.x^{y-1}.\ln x \quad (1) \qquad\qquad z''_{yx} = -\frac{1}{y^2} - y.x^{y-1}.\ln x - x^{y-1} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2) vemos que se verifica el teorema de Schwarz en los puntos donde las derivadas segundas cruzadas son continuas.

Generalización

Este teorema se puede generalizar a derivadas parciales de orden superior a dos. Podemos establecer la igualdad de las funciones que han sido derivadas respecto de las mismas variables el mismo número de veces.

Así surge, por ejemplo, la igualdad entre:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} \;\; y \;\; f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}.$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO *o de Lagrange*

Antes de analizar el teorema para funciones de dos variables hacemos un breve repaso de lo que dice el teorema para funciones de una variable.

Si f es una función continua en el intervalo $[x_0;x]$ ***y derivable en el intervalo*** $(x_0;x)$ ***entonces existe un punto*** $c \in (x_0;x)$ ***en el que se verifica que:***

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Haciendo

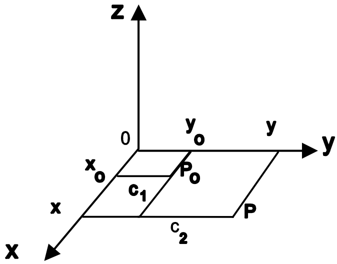
$c = x_0 + \alpha.\Delta x$ con $0 < \alpha < 1$ queda: $\Delta y = f'(x_0 + \alpha.\Delta x).\Delta x$

Eso significa que el incremento de la función al pasar de un punto x_0 a otro incrementado ***x***, se puede expresar como el producto entre la derivada de la función en un punto interior ***c*** y el incremento de la variable independiente.

Veamos que ocurre para funciones o campos escalares de dos variables.

LAGRANGE, ***Joseph Louis (1736-1813):*** uno de los matemáticos más notables de todos los tiempos. Nació en Turín y murió en París. Su padre perdió una fortuna y lo obligó a trabajar. Su obra más importante fue la Mecanique Analytique (1788). Napoleón lo condecoró y le llamó *la pirámide excelsa delas ciencias matemáticas*; lo nombró senador y lo elevó a la dignidad de conde. Reemplaza a Euler en la Academia de Ciencias de Berlín convocado por Federico II, cuando sólo tenía 22 años y le dice: *donde estoy yo, el más importante rey de Europa, debe estar usted, el más grande matemático*. En 1787, muerto Federico II, se traslada a París donde participa de la formación de la Escuela Politécnica. Aplica el análisis a la física.

Para un campo escalar de dos variables



Vamos a expresar también para un campo escalar de dos variables el incremento en función de las derivadas parciales en puntos interiores cuando se incrementan las variables x e y.

Partimos de un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ y pasamos al punto incrementado $P = (x;y) = (x_0+ \Delta x\ ;\ y_0+\Delta y)$.

$$\Delta z = f(x\,;\,y) - f(x_0\,;\,y_0) = [f(x;\,y) - f(x;\,y_0)] + [f(x;\,y_0) - f(x_0\,;\,y_0)]$$

Hemos sumado y restado la expresión $f(x;y_0)$.

Si observamos cada corchete vemos que en cada uno de ellos se incrementa una sola variable. Por lo tanto podemos aplicarle a cada corchete el teorema de Lagrange para funciones de una variable. En el primer corchete a la variable y y en el segundo corchete a la variable x.

Queda: $\Delta z = f'_y(c_2).\Delta y + f'_x(c_1).\Delta x$ ❶

Analizando el gráfico vemos que:

$$c_1 = (x_0 + \alpha_1.\Delta x;\, y_0),\ c_2 = (x_0 + \Delta x;\, y_0 + \alpha_2.\Delta y) \qquad \text{con } 0 < \alpha_1 < 1,\ 0 < \alpha_2 < 1.$$

De esta manera podemos expresar los puntos interiores c_1 y c_2 en función de las coordenadas del punto $P_0 = (x_0;y_0)$ y de los respectivos incrementos Δx y Δy.

Reemplazando en ❶ queda:

$$\boxed{\Delta z = f'_x(x_0 + \alpha_1.\Delta x;\, y_0).\Delta x + f'_y(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \alpha_2.\Delta y).\Delta y}$$

Veamos ahora el enunciado del teorema:

Si $z = f(x;y)$ es continua y derivable en un conjunto C se verifica que el incremento de la función al pasar de un punto P_0 a otro P pertenecientes al mismo es igual a la suma de los productos de los incrementos de las variables independientes multiplicados por las derivadas parciales respectivas calculadas en puntos intermedios.

Si bien el teorema asegura la existencia de los puntos intermedios su cálculo, en general, no es simple.

Ejemplos

a) Dada la función $z = x^2 + y^2$ indicar cuáles son los puntos intermedios en los cuales deben calcularse las derivadas parciales para que el incremento de la función (Δz), al pasar del punto $P_0 = (1;2)$ al punto $P = (1,2;2,1)$ se pueda calcular aplicando el teorema del valor medio.

$$\Delta z = f(1+\Delta x;2+\Delta y) - f(1;2) = (1+\Delta x)^2 + (2+\Delta y)^2 - 5 = 1+2\Delta x + \Delta x^2 + 4 + \\ + 4\Delta y + \Delta y^2 - 5$$

$$f'_x = 2x \;\rightarrow\; 2.(1+\alpha_1.\Delta x) = 2+2\alpha_1.\Delta x$$
$$f'_y = 2y \;\rightarrow\; 2.(2+\alpha_2.\Delta y) = 4+2\alpha_2.\Delta y$$

$2\Delta x + \Delta x^2 + 4\Delta y + \Delta y^2 = (2+2\alpha_1.\Delta x).\Delta x + (4+2\alpha_2.\Delta y).\Delta y = 2\Delta x + 2\alpha_1.\Delta x^2 + + 4\Delta y + 2\alpha_2.\Delta y^2 \Rightarrow 1 = 2\alpha_1 \wedge 1 = 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0,5 \wedge \alpha_2 = 0,5 \Rightarrow$ los puntos intermedios son: $(1+0,5.0,2;2) = (1,1;2) \wedge (1+0,2;2+0,5.0,1) = (1,2;2,05)$

b) Hallar los puntos intermedios para $z = 3x^2 + 2y^2$ entre $P_0 = (2;1)$ y $P = (2,01;1,02)$

$$\Delta z = f(2+\Delta x;1+\Delta y) - f(2;1) = 3(2+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta y)^2 - 14 = 12 + 2\Delta x + 3\Delta x^2 + \\ +2 + 4\Delta y + 2\Delta y^2 - 14$$

$$f'_x = 6x \;\rightarrow\; 6.(2+\alpha_1.\Delta x) = 12 + 6.\alpha_1.\Delta x \quad f'_y = 4y \;\rightarrow\; 4.(1+\alpha_2.\Delta y) = 4 + 4\alpha_2.\Delta y$$

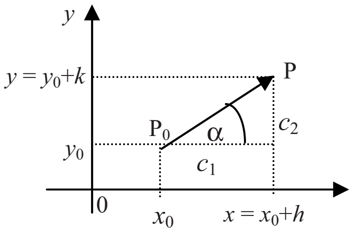
$12\Delta x + 3\Delta x^2 + 4\Delta y + 2\Delta y^2 = (12 + 6\alpha_1.\Delta x).\Delta x + (4 + 4\alpha_2.\Delta y).\Delta y = 12\Delta x + + 6\alpha_1.\Delta x^2 + 4\Delta y + 4\alpha_2.\Delta y^2 \;\therefore\; 3 = 6\alpha_1 \wedge 2 = 4\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0,5 \wedge \alpha_2 = 0,5.$

Por lo tanto los puntos intermedios son $(2 + 0,5.0,01;1) = (2,005;1) \wedge (2 + 0,01;1 + 0,5.0,02) = (2,01;1,01)$.

DERIVADA DIRECCIONAL

Dada $z = f(x;y)$ las derivadas parciales z'_x y z'_y miden las intensidades de variación de la función en la dirección de los ejes x e y. Las derivadas direccionales proporcionan las intensidades de variación de dichos valores en cualquier dirección y sentido.

Si consideremos un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ interior al domino de la función y un punto incrementado $P = (x;y)$ que no esté necesariamente en la dirección de los ejes coordenados, vemos que al pasar de P_0 a P, ambas variables se incrementan en cantidades que podemos designar como ***h*** y ***k*** respectivamente.



$$x = x_0 + h \qquad y = y_0 + k$$

h y ***k*** se pueden considerar como las componentes de un vector $\vec{v}$, que indica la dirección y sentido en el cual se ha incrementado el punto.

El vector $\vec{v} = (h;k)$ forma con el semieje positivo de las x un ángulo α tal que $tg\alpha = \frac{k}{h} \Rightarrow \alpha = arc\ tg\frac{k}{h}$. Este ángulo indica la dirección y sentido en el cual vamos a calcular la derivada direccional.

Nota: las derivadas parciales son un caso particular de las derivadas direccionales para $\alpha = 0º$ y $\alpha = 90º$ respectivamente.

Definición

Al pasar de P_0 a P la función se incrementa un Δz.

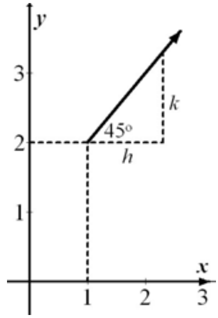
$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0)$$

Por otro lado el incremento entre los puntos es la distancia entre ambos, es decir $|P - P_0| = |\vec{v}| = \sqrt{h^2 + k^2}$

La derivada direccional en la dirección y sentido α es igual ***al límite del cociente incremental cuando el módulo de $\vec{v}$ tiende a 0.***

$$f'_\alpha = \lim_{P \to P_0} \frac{\Delta z}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|} = \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{f(x_0+h;y_0+k)-f(x_0;y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Ejemplos



1) $z = f(x;y) = x^2 + 2y$, $P_0 = (1;2)$ y $\alpha = 45º$.

Debemos buscar una relación entre h y k y determinar el signo de h. Luego reemplazamos en la fórmula.

$$tg\,45^o = \frac{k}{h} = 1 \Rightarrow h = k$$

$$f'_{45^o}(1;2) = \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{f(1+h;2+k)-f(1;2)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{(1+h)^2+2(2+k)-5}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

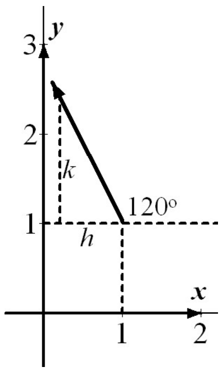
Como $h = k$ y h es positivo

$$f'_{45^o}(1;2) = \lim_{\sqrt{2h^2} \to 0} \frac{(1+h)^2+2(2+h)-5}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2+4+2h-5}{\sqrt{2}h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h+h^2}{\sqrt{2}h} = \lim_{h \to 0} \frac{4+h}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

2) $z = f(x;y) = x + 3y^2$, $P_0 = (1;1)$ y $\alpha = 120º$.

$$tg\,120º = \frac{k}{h} = -\sqrt{3} \Rightarrow k = -\sqrt{3}h$$



$$f'_{120^o}(1;1) = \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{f(1+h;1+k)-f(1;1)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

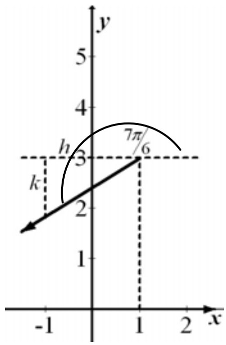
$$= \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{(1+h)+3(1+k)^2-4}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Como $k = -\sqrt{3}h$ y h es negativo

$$f'_{120^\circ}(1;1) = \lim_{\sqrt{4h^2}\to 0} \frac{(1+h)+3\left(1-\sqrt{3}h\right)^2-4}{\sqrt{4h^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{1+h+3-6\sqrt{3}h+3h^2-4}{-2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-6\sqrt{3}\right).h+3h^2}{-2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-6\sqrt{3}\right)+3h}{-2} = -\frac{1}{2}+3\sqrt{3}$$

3) $z = f(x;y) = x^2-3xy+3y$, $P_0 = (1;3)$ y $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$.



$$tg\ \frac{7\pi}{6} = \frac{k}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}h$$

$$f'_{7\pi/6}(1;3) = \lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}\frac{f(1+h;3+k)-f(1;3)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}\frac{(1+h)^2-3(1+h).(3+k)+3(3+k)-1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

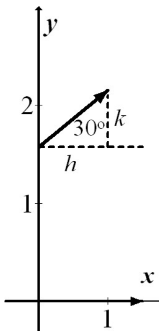
Como $k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}h$ y h es negativo

$$f'_{7\pi/6}(1;3) = \lim_{\sqrt{\frac{4}{3}h^2}\to 0}\frac{(1+h)^2-3(1+h).\left(3+\frac{\sqrt{3}h}{3}\right)+3\left(3+\frac{\sqrt{3}h}{3}\right)-1}{\sqrt{\frac{4}{3}h^2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+2h+h^2-9-\sqrt{3}h-9h-\sqrt{3}h^2\right)+\left(9+\sqrt{3}h\right)-1}{-\frac{2}{\sqrt{3}}h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-7h+\left(1-\sqrt{3}\right).h^2}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}h} = \frac{21}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

4) $z = f(x;y) = sen(xy)$, $P_0 = \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ y $\vec{v} = \left(3;\sqrt{3}\right)$



$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}h$$

$$f'_{\vec v}\left(0;\tfrac{\pi}{2}\right)=\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}\frac{f\left(h;\frac{\pi}{2}+k\right)-f\left(0;\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}\frac{sen\left[h.\left(\frac{\pi}{2}+k\right)\right]-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\sqrt{\frac{4}{3}h^2}\to 0}\frac{sen\left[h.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt3}{3}h\right)\right]}{\sqrt{\frac{4}{3}h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\left[h.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt3}{3}h\right)\right]}{\frac{2}{\sqrt3}h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sen\left[h.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt3}{3}h\right)\right]}{\left[h.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt3}{3}h\right)\right]}.\frac{\left[h.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt3}{3}h\right)\right]}{\frac{2}{\sqrt3}h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt3}{3}h\right)\right].h}{\frac{2}{\sqrt3}h}=\frac{\sqrt3}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt3\pi}{4}$$

Cálculo de la derivada direccional para cualquier dirección y sentido

Si en lugar de considerar una dirección y sentido en particular (α o $\vec v$), consideramos una dirección y sentido genéricos (cualquier α), obtenemos la expresión general de la derivada direccional. En este caso $k=h.tg\,\alpha$.

$$f'_\alpha=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h;y_0+h.tg\,\alpha\right)-f\left(x_0;y_0\right)}{\sqrt{h^2+h^2.tg^2\alpha}}$$

En el ejemplo 1) queda:

$$f'_\alpha(1;2)=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+2(2+h.tg\,\alpha)-5}{\sqrt{h^2+h^2.tg^2\alpha}}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+4+2h.tg\,\alpha-5}{h.\sqrt{1+tg^2\alpha}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2+2h.tg\,\alpha}{h.sec\,\alpha}=\lim_{h\to 0}\left(2+h+2.tg\,\alpha\right).cos\,\alpha=2\,cos\,\alpha+2sen\,\alpha$$

Vemos que la derivada direccional existe $\forall\alpha\in\Re$.

Si $\alpha=\pi/4$, $f'_{45°}(1;2)=\frac{2\sqrt2}{2}+\frac{2\sqrt2}{2}=2\sqrt2$, valor que coincide con el ya obtenido.

Cálculo de derivadas direccionales por fórmula

Vamos a demostrar que si z es continua, con derivadas parciales continuas en un entorno de un punto P_0, la derivada direccional en la dirección y sentido $\vec{v}$ o α es: $z'_\alpha(P_0) = z'_{\vec{v}}(P_0) = z'_x(P_0).cos\,\alpha + z'_y(P_0).sen\,\alpha$

Por Teorema de Lagrange: $\Delta z = z'_x(c_1).\Delta x + z'_y(c_2).\Delta y$

$$f'_\alpha(P_0) = \lim_{P \to P_0} \frac{\Delta z}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|} = \lim_{P \to P_0} \frac{z'_x(c_1).\Delta x + z'_y(c_2).\Delta y}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|} = \lim_{P \to P_0} \frac{z'_x(c_1).\Delta x}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|} + \frac{z'_y(c_2).\Delta y}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|}$$

$$= \lim_{P \to P_0} \left[z'_x(c_1).cos\,\alpha + z'_y(c_2).sen\,\alpha\right] = z'_x(P_0).cos\,\alpha + z'_y(P_0).sen\,\alpha$$

Por ser f continua, cuando $P \to P_0$, $c_1 \to P_0$ y $c_2 \to P_0$.

Ejemplo

Podemos calcular la derivada anterior utilizando esta expresión.

$z = f(x;y) = x^2 + 2y$, $P_0 = (1;2)$ y $\alpha = 45º$

$$f'_x = 2x \Rightarrow f'_x\ (1;2) = 2$$
$$f'_y = 2 \Rightarrow f'_y\ (1;2) = 2 \Rightarrow f'_{45º}\ (1;2) = 2.sen\ 45º + 2.cos\ 45º = 4.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Operador de Hamilton

El operador de Hamilton es $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z};....\right)$

Gradiente de una función

Si se aplica sobre una función escalar se obtiene el *gradiente* de la misma, que es el vector cuyas componentes son sus derivadas parciales. Veremos más adelante otros usos.

$$\nabla f(x;y)=f'_x\breve{i}+f'_y\breve{j}=\left(f'_x;f'_y\right),\nabla f(x;y;z)=f'_x\breve{i}+f'_y\breve{j}+f'_z\breve{k}=\left(f'_x;f'_y;f'_z\right)$$

Ejemplos: a) $f(x;y)=2x^2+3y \Rightarrow \nabla f(x;y)=(4x;3)$
b) $f(x;y;z)=x^2z+3yz^2 \Rightarrow \nabla f(x;y;z)=(2xz;3z^2;6yz)$
c) $f(x;y;z)=\cos x+y^2z^2 \Rightarrow \nabla f(x;y;z)=(-\operatorname{sen} x;2yz^2;2y^2z)$

Derivada direccional como producto escalar

Ya vimos que la derivada direccional en un punto P_0 en la dirección y sentido $\vec{v}$ o α es: $z'_\alpha(P_0)=z'_{\vec{v}}(P_0)=z'_x(P_0).\cos\alpha+z'_y(P_0).\operatorname{sen}\alpha$, si $z'_x(P_0)$ y $z'_y(P_0)$ son continuas. También la derivada direccional según la dirección y sentido α en un punto P_0 se puede expresar como el producto escalar entre el vector gradiente en P_0 y el versor director de la dirección y sentido α.

$$z'_\alpha(P_0)=z'_{\vec{v}}(P_0)=\left[z'_x(P_0);z'_y(P_0)\right]\bullet(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha)=\nabla z(P_0)\bullet(\breve{v}_1;\breve{v}_2)=\nabla z(P_0)\bullet\breve{v}$$

Ejemplos

a) Calcular $z'_{30^\circ}(1;1)$ si $z=x^2+2y^2$

$$\left.\begin{array}{l} z'_x=2x\Rightarrow z'_x(1;1)=2 \\ z'_y=4y\Rightarrow z'_y(1;1)=4 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \nabla z(1;1)=2\breve{i}+4\breve{j}$$

Por lo tanto $z'_{30^\circ}(1;1)=(2;4)\bullet(\cos 30^\circ;\operatorname{sen}30^\circ)=2.\frac{\sqrt{3}}{2}+4.\frac{1}{2}=\sqrt{3}+2$

Podemos verificarlo utilizando la fórmula ya vista.

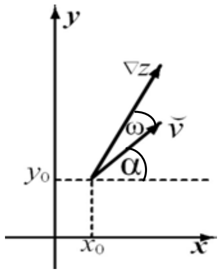
$$z'_{30^\circ}(1;1)=2.\cos 30^\circ+4.\operatorname{sen}30^\circ=2.\frac{\sqrt{3}}{2}+4.\frac{1}{2}=\sqrt{3}+2$$

b) Calcular $z'_{\vec{v}}(1;\pi/4)$, dada $z=x^2.\operatorname{sen}(2y)+y$ y $\vec{v}=3\breve{i}-4\breve{j}$.

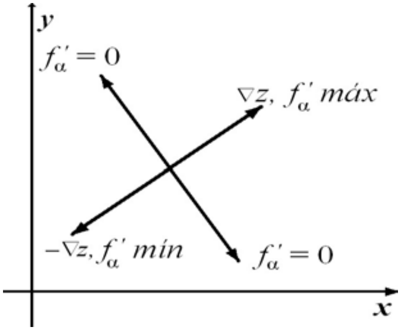
$$\left.\begin{array}{l} z'_x=2x.\operatorname{sen}(2y)\Rightarrow z'_x(1;\pi/4)=2 \\ z'_y=x^2.2\cos(2y)+1\Rightarrow z'_y(1;\pi/4)=1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \nabla z(1;\pi/4)=2\breve{i}+\breve{j}$$

$$z'_{\vec{v}}\left(1;\frac{\pi}{4}\right)=(2;1)\bullet\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)=2.\frac{3}{5}-1.\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

El gradiente y la derivada direccional máxima



Por definición de producto escalar:
$z'_{\alpha} = \nabla z \bullet \breve{v}_{\alpha} = |\nabla z|.|\breve{v}_{\alpha}|.cos\, w$, donde w es el ángulo que forman la dirección y sentido α con la dirección y sentido del vector gradiente. $0 \leq \omega \leq \pi$.
Por ser $\breve{v}_{\alpha}$ un versor, su módulo es 1. Por lo tanto la derivada direccional máxima es igual al módulo del vector gradiente y se verifica cuando el ángulo w es 0, es decir cuando la dirección y sentido α coincide con la dirección y sentido del vector gradiente.



En la dirección perpendicular a la del vector gradiente, la derivada direccional es nula (*cos* 90º = *cos* 270º = 0). En la dirección del vector gradiente y sentido opuesto la derivada direccional es mínima (*cos* 180º = –1). Toma el valor máximo, con signo opuesto. Si el gradiente es nulo, la derivada direccional en cualquier dirección y sentido es nula.

Acotación de la derivada direccional

La derivada direccional en un punto toma valores comprendidos entre su máximo valor y su mínimo valor: $-|\nabla z(\mathrm{P}_0)| \leq f'_{\vec{v}}(\mathrm{P}_0) = f'_{\alpha}(\mathrm{P}_0) \leq |\nabla z(\mathrm{P}_0)|$

Ejemplos

1) Dada $z = x^3 - 3xy^2$, calcular la derivada direccional, el gradiente y el valor de la derivada direccional máxima y mínima, si α =30º y P_0 = (–2;3).

$$z'_{30^o} = \left(3x^2 - 3y^2\right).cos\, 30^o + \left(-6xy\right).sen\, 30^o = \left(3x^2 - 3y^2\right).\frac{\sqrt{3}}{2} - 3xy$$

$$z'_{30^o}\ (-2;3) = -15.\frac{\sqrt{3}}{2} + 18 = \frac{-15\sqrt{3} + 36}{2}$$

$$\nabla z=\left(3x^2-3y^2\right)\breve{i}+\left(-6xy\right)\breve{j}\quad\Rightarrow\nabla z\left(-2;3\right)=-15\breve{i}+36\breve{j}$$

$$\left|\nabla z\left(-2;3\right)\right|=\sqrt{225+1296}=39$$

Esto significa que la dirección y sentido según la cual la derivada direccional es máxima en $P_0=(-2;3)$ es: $\alpha=arctg\dfrac{36}{-15}=112^{\circ}\,37'$ y vale 39.

De donde surge que en la dirección perpendicular (22º 37' y 202º 37') es nula y en la dirección del gradiente y sentido opuesto (292º 37') la derivada direccional es mínima (–39). Por lo tanto las derivadas direccionales toman valores en el intervalo [–39;39].

2) Dada $z=2x^3y-xy$, calcular la derivada direccional, el gradiente y el valor de la derivada direccional máxima y mínima, si $\vec{v}=4\breve{i}-3\breve{j}$ y $P_0=(-1;2)$.

$$z'_{\breve{v}}=\left(6x^2y-y\right).\frac{4}{5}+\left(2x^3-x\right).\left(\frac{-3}{5}\right)\Rightarrow z'_{\breve{v}}=\left(-1;2\right)=10.\frac{4}{5}+1.\frac{3}{5}=\frac{43}{5}$$

$$\nabla z=\left(6x^2y-y\right)\breve{i}+\left(2x^3-x\right)\breve{j}\Rightarrow\nabla z\left(-1;2\right)=10\breve{i}-\breve{j}$$

$$\left|\nabla z\left(-1;2\right)\right|=\sqrt{100+1}=\sqrt{101}$$

Esto significa que la dirección y sentido según la cual la derivada direccional es máxima en $P_0=(-1;2)$ es: $\alpha=arc\ tg\dfrac{-1}{10}=354^{\circ}\ 57'$ y vale $\sqrt{101}$.

De donde surge que en la dirección perpendicular (84º 57' y 264º 57') es nula y en la dirección del gradiente y en el sentido opuesto (174º 57') es mínima $\left(-\sqrt{101}\right)$. Por lo tanto las derivadas direccionales toman valores en el intervalo $\left[-\sqrt{101};\sqrt{101}\right]$.

Derivada direccional nula

La derivada direccional puede ser nula por dos causas:

a) Como ya vimos, en la dirección perpendicular a la del vector gradiente.
b) Si $\nabla z = \vec{0}$ (vector nulo), entonces la derivada direccional es nula en cualquier dirección y sentido.

Ejemplo

$z = x^2 - 2xy + 2y$ en $P_0 = (1;1)$

$$z'_x = 2x - 2y\Big|_{(1;1)} = 0 \qquad z'_y = -2x + 2\Big|_{(1;1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla z(1;1) = (0;0) = \vec{0}$$

Derivada direccional según una curva

En ese caso la dirección a seguir es la de la recta tangente a la curva en el punto. Si no se define específicamente una de las dos semirrectas tangentes, tenemos dos derivadas direccionales opuestas, correspondientes a dos vectores opuestos.

Ejemplo

Calcular la derivada direccional de $z = x^2 - 3xy$ en $P_0 = (1;2)$ a lo largo de la curva $y = x^2 - x + 2$. Calcular la derivada direccional máxima y mínima.

Debemos conocer la dirección de la recta tangente a la curva en $x_0 = 1$.
$y' = 2x - 1$, por lo tanto la pendiente de la recta tangente en $x_0 = 1$ es m =1.
Las direcciones y sentidos pueden ser $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$ o $\alpha_2 = \dfrac{5\pi}{4}$, o sea la de los vectores $\vec{v} = (1;1)$ o $-\vec{v} = (-1;-1)$.

a) $\vec{v} = (1;1)$

$$z'_x = 2x - 3y\Big|_{P_0} = -4$$

$$z'_y = -3x\Big|_{P_0} = -3$$

$$z'_{\vec{v}}(P_0) = (-4;-3) \bullet \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

b) $-\vec{v}=(-1;-1)$

$$z'_x = 2x-3y\big|_{P_0} = -4$$

$$z'_y = -3x\big|_{P_0} = -3$$

$$z'_{-\vec{v}}(P_0)=(-4;-3)\bullet\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\nabla z(P_0)=(-4;-3)\ \Rightarrow\ \left|\nabla z(P_0)\right|=\sqrt{16+9}=5$$

La derivada direccional máxima es 5 en la dirección y sentido $\vec{v}=\left(\frac{-4}{5};\frac{-3}{5}\right)$ y la derivada direccional mínima es –5 en la misma dirección y sentido opuesto, es decir $-\vec{v}=\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Generalización de la derivada direccional en $\Re^n$

Podemos generalizar lo visto en $\Re^2$ para $\Re^n$.

Ahora $u=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$, y $\vec{v}=(v_1;v_2;\dots;v_n)$.

Así $u'_{\vec{v}}(P_0)=\nabla u(P_0)\bullet\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|};\frac{v_2}{|\vec{v}|};\dots;\frac{v_n}{|\vec{v}|}\right)=\nabla u(P_0)\bullet(\breve{v}_1;\breve{v}_2;\dots;\breve{v}_n)=\nabla u(P_0)\bullet\breve{v}$

Ejemplos

1) Dada $u=x^2+2x+y^2+z$, calcular la derivada direccional en la dirección y sentido de $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en $P_0=(0;0;0)$. Calcular el gradiente y el valor de la derivada direccional máxima y mínima en P_0.

$$u'_x = 2x+2\big|_{P_0} = 2$$

$$u'_y = 2y\big|_{P_0} = 0 \quad , \quad u'_{\vec{v}}(P_0)=(2;0;1)\bullet\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$u'_z = 1$$

$$\nabla u(\text{P}_0) = (2;0;1) \Rightarrow \left|\nabla u(\text{P}_0)\right| = \sqrt{5}$$

La derivada direccional máxima es $\sqrt{5}$ en la dirección y sentido de $\vec{v} = (2;0;1)$ y la derivada direccional mínima es $-\sqrt{5}$ en igual dirección y sentido opuesto $-\vec{v} = (-2;0;-1)$.

2) Dada $u = x.y.z$, calcular la derivada direccional en la dirección y sentido que forma ángulos iguales con los ejes coordenados, si $\text{P}_0 = (1;2;3)$. Calcular el gradiente y el valor de la derivada direccional máxima y mínima en P_0.

$$u'_x = y.z\big|_{\text{P}_0} = 6$$

$$u'_y = x.z\big|_{\text{P}_0} = 3 \qquad \Rightarrow \quad \nabla u(\text{P}_0) = (6;3;2)$$

$$u'_z = x.y\big|_{\text{P}_0} = 2$$

$$\nabla u(\text{P}_0) = (6;3;2) \Rightarrow \left|\nabla u(\text{P}_0)\right| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

Si los ángulos directores son iguales, entonces sus cosenos directores también lo son, por lo tanto las componentes del versor director también son iguales. $\breve{v} = (\breve{v}_1;\breve{v}_2;\breve{v}_3)$, $|\breve{v}| = \sqrt{\breve{v}_1^{\,2} + \breve{v}_2^{\,2} + \breve{v}_3^{\,2}} = 1$

$\sqrt{3(\breve{v}_1)^2} = 1 \Rightarrow \breve{v}_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, por lo tanto $\breve{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ o

$$-\breve{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$u'_{\breve{v}}(\text{P}_0) = (6;3;2)\bullet\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$$

o $$u'_{-\breve{v}}(\text{P}_0) = (6;3;2)\bullet\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{11\sqrt{3}}{3}$$

La derivada direccional máxima es 7 en la dirección y sentido $\vec{v}=(6;3;2)$ y la derivada direccional mínima es –7 en igual dirección y sentido opuesto, es decir $-\vec{v}=(-6;-3;-2)$.

3) Dada $u=xye^{yz}$, calcular la derivada direccional en la dirección de la recta definida por $\begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$ en $P_0=(1;2;1)$ y el gradiente.

Buscamos la ecuación de la recta $\begin{cases} x-1=2z \\ y-1=z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2}=y-1=z$

Hay dos posibilidades, a) $\vec{v}=(2;1;1) \Rightarrow \breve{v}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y

b) $-\vec{v}=(-2;-1;-1) \Rightarrow -\breve{v}=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}};-\dfrac{1}{\sqrt{6}};-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

a)

$$u'_x=y.e^{yz}\Big|_{P_0}=2e^2$$

$$u'_y=x.e^{yz}+xyz.e^{yz}\Big|_{P_0}=3e^2 \qquad \Rightarrow \nabla u(P_0)=\left(2e^2;3e^2;4e^2\right)$$

$$u'_z=x.y^2.e^{yz}\Big|_{P_0}=4e^2$$

$$u'_{\breve{v}}(P_0)=\left(2e^2;3e^2;4e^2\right)\bullet\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{4e^2}{\sqrt{6}}+\frac{3e^2}{\sqrt{6}}+\frac{4e^2}{\sqrt{6}}=\frac{11e^2}{\sqrt{6}}$$

b)

$$u'_{-\breve{v}}(P_0)=\left(2e^2;3e^2;4e^2\right)\bullet\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{4e^2}{\sqrt{6}}-\frac{3e^2}{\sqrt{6}}-\frac{4e^2}{\sqrt{6}}=-\frac{11e^2}{\sqrt{6}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) *Calcular las derivadas parciales de los siguientes campos escalares aplicando la definición en los puntos indicados*

a) $z = 2x^2y - 3xy^2$ en $P_0 = (3;-1)$ b) $z = 3x^2y^3$ en $P_0 = (1;2)$

c) $z = 2x^3y - 5xy^2 + 2xy$ en $P_0=(2;-3)$ d) $z = 3x^2 - 4xy + 4$ en $P_0 = (2;1)$

e) $z = e^{x+y}$ en $P_0 = (0;0)$ f) $z = sen\,x + cos\,y$ en $P_0 = (0;0)$

g) $z = \sqrt{x+y}$ en $P_0 = (2;3)$ h) $z = \begin{cases} y^2.sen\dfrac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ en $P_0=(0;0)$

2) *Calcular, aplicando las reglas de derivación, las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones*

a) $z = (x+y)^2.(x-y)^3$ b) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$ c) $z = ln\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $z = e^{x^3-y}$ e) $z = \sqrt{ln(3x-y)}$ f) $z = \sqrt[3]{xy^2}.sen(xy)$

g) $z = 4^y x^2 y + arc\,sen\dfrac{x}{y}$ h) $z = \dfrac{x^2.e^{xy+y^2}}{2y+x}$ i) $z = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2.arc\,tg\dfrac{y}{x}$

j) $z = \dfrac{y.arc\,tg\,x^2 + ln(2x)}{xy^2+1}$ k) $z = \dfrac{3x^2.e^{xy}}{2y^2+x}$ l) $z = e^{xy}.tg\dfrac{x}{y}$

3) *Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen*

a) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ b) $z = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

c) $z = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x+y} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$ d) $z = \begin{cases} sg\left[(y-x^2).(y-2x^2)\right] & x^2+y^2 > 0 \\ 1 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

4) *Calcular las derivadas parciales de* $z = \sqrt{xy + \dfrac{y}{x}}$ en $P_0 = (1;2)$.

5) *Demostrar que si:*

a) $z = sen\dfrac{x-y}{x+y}$, *se verifica que:* $x.z'_x + y.z'_y = 0$

b) $z = \sqrt{x}.sen\dfrac{y}{x}$, *se verifica que:* $x.z'_x + y.z'_y = \dfrac{z}{2}$

c) $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$, *se verifica que:* $u'_x + u'_y + u'_z = 1$

d) $z = x^2.sen\dfrac{y}{x} + y^2.cos\dfrac{y}{x}$, *se verifica que:* $x.z'_x + y.z'_y = 2z$

e) $z = e^{\frac{x}{y}}\ ln\, y$, *se verifica que:* $x.z'_x + y.z'_y = \dfrac{z}{ln\, y}$

6) *Analizar la continuidad y derivabilidad en el origen de*

a) $z = \begin{cases} \dfrac{x.sen(xy)}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$ b) $z = \begin{cases} x+y & x.y = 0 \\ 1 & x.y \neq 0 \end{cases}$

7) *Calcular, si existen, las derivadas parciales en*

a) $P_0 = (0;8)$, $z = \sqrt[3]{xy}$ b) $P_0 = (0;0)$, $z = \begin{cases} \dfrac{sen\left(x^3+y^4\right)}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

c) $P_0 = (0;0)$, $z = \begin{cases} \dfrac{x - x.cos(x+y)}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

d) $P_0 = (0;0)$, $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x+y^2} & si\ \ x+y^2 \neq 0 \\ 0 & si\ \ x+y^2 = 0 \end{cases}$

8) *Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie* $z = x^3 - 6x^2y^2$ *con el plano y = 2 en el punto* P_0*=(1;2).*

9) *Hallar las pendientes de las rectas tangentes a las curvas intersección de la superficie* $z = 3x^2 + 4y^2 - 4$ *con los planos que pasan por el punto* P_0*=(1;1;3) y son paralelos a los planos:* a) *xz,* b) *yz.*

10) *Dada la función* $f(x;y) = \sqrt{\dfrac{x-y}{y-2x}}$ *, calcular, si existe, el valor de k para que la siguiente relación sea correcta:* $x.z'_x + y.z'_y = k.z$.

11) *Hallar las siguientes derivadas direccionales y el vector gradiente:*

a) $z = 2x^2 - 3y^2$ en $P_0 = (3;0)$ si $\alpha = 120^{\circ}$.

b) $z = x^3 - 2xy + y^2$ en $P_0 = (2;1)$ en la dirección y sentido creciente de la bisectriz del 1º cuadrante.

c) $z = ln\,(xy)$ en $P_0 = (1;1)$ en la dirección y sentido creciente de la bisectriz del 2º cuadrante.

d) $z = 3x^2 - 2y^2$ en $P_0 = (-1;3)$ en la dirección y sentido que va de P_0 a $P_1 = (1;-2)$.

e) $z = x^2 - 2xy + 2y$ en $P_0 = (1;3)$ en la dirección $\alpha = \pi/6$.

f) $z = xy + y^2$ en $P_0 = (1;2)$ en la dirección $\vec{v} = 3\breve{i} + 4\breve{j}$.

g) $z = x^2 - 5xy$ en $P_0 = (2;5)$ en la dirección $\vec{v} = 3\breve{i} - 3\breve{j}$.

h) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $P_0 = (1;1;0)$ en la dirección de $\vec{v} = \breve{i} - \breve{j} + 2\breve{k}$.

i) $u = 2xy - z^2$ en $P_0 = (2;-1;1)$ en la dirección y sentido de $P = (3;1;-1)$.

j) $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$ en $P_0 = (-1;1;3)$ en la dirección y sentido del vector director de la recta $x = -1-2t$; $y = 1+t$; $z = 3+2t$.

k) $z = xy + 2x - 1$ en $P_0 = (1;3)$ a lo largo de la curva $y = -x^2 + 2x - 3$.

l) $z = x^2 - 3xy$ en $P_0 = (1;2)$ a lo largo de la curva $y = x^2 - x + 2$.

m) $z = x.e^{x+y}$ en $P_0 = (-3;3)$ en dirección normal a la curva $y = x^2 + 3x + 3$.

n) $z = xy.e^{yz}$ en $P_0 = (1;2;1)$ en dirección de la recta: $x - 2z = 1;\ y - z = 1$.

12) *Indicar la dirección en la cual la función* z = x.y *crece más rápidamente en* $P_0 = (1;2)$.

13) *Dada la función* $z = f\left(xy\right)$, $f'_{\vec{v}_1}\left(x_0;y_0\right) = 4$, $f'_{\vec{v}_2}\left(x_0;y_0\right) = 6$, $\vec{v}_1 = \left(4;3\right)$, $\vec{v}_2 = \left(3;4\right)$, *hallar: a)* $f'_{\vec{v}_3}\left(x_0;y_0\right)$ *si* $\vec{v}_3 = \left(5;12\right)$, *b)* $f'_{\vec{v}}\left(x_0;y_0\right)$ *máx.*

14) 14) *Una función* $z = f\left(x;y\right)$ *tiene en el punto* $P_0 = (1;2)$ *derivada direccional igual a 2 en la dirección y sentido hacia el punto* $P_1 = (2;2)$ *y derivada direccional igual a –2 en la dirección y sentido hacia el punto* $P_2 = (1;1)$. *Hallar: a) el vector gradiente de la función en el punto* P_0, *b) la derivada direccional en la dirección y sentido hacia el punto* $P_3 = (4;6)$).

15) a) *Hallar la derivada direccional de* $u = 2x^3y - 3y^2z$ *en* $P_0 = (1;\ 2;\ -1)$ *en la dirección y sentido de P = (3; –1; 5), b) calcular el valor de la derivada direccional máxima y en que dirección y sentido se verifica en* P_0.

16) $T\left(x;y\right) = 3x^2 + 2xy$ *es la temperatura en un punto de una placa rectangular (x;y). Si la distancia se mide en metros, a) determinar la máxima tasa de variación de la temperatura en el punto (3;–6) de la placa, b) determinar la dirección y sentido para la cual se verifica la máxima variación de la temperatura.*

17) *Un insecto se encuentra sobre el punto (1;4) de una placa térmica cuya temperatura se rige por* $T\left(x;y\right) = x.e^{xy}$ *medida en ºC. Agobiado por el calor decide huir en dirección del frío lo más rápidamente posible. ¿en qué dirección y sentido le conviene dirigirse?*

18) *Dada* $z = f\left(x;y\right) = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)x^2y$, *se sabe que* $f'_x\left(1;0\right) = 5$ *y que la máxima derivada direccional en (1;0) vale 13. Calcular* A *y* B, *¿es f única?*

19) *Un insecto se halla en medio de un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por* $T\left(x;y\right) = 2x^2 - 4y^2$. *El insecto está en (–1;2)¿En qué dirección y sentido debe moverse para disminuir lo más rápidamente la toxicidad?*

20) *Si denotamos con* $h(x;y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ *la altura de una montaña en la posición (x;y). ¿En qué dirección y sentido desde (1;0) se debe comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?*

21) *La temperatura en el punto (x;y;z) de una habitación viene dada por la función* $T(x;y;z) = 3x^2 - 2xy + yz$ *en* ^{o} *centígrados. Un mosquito situado en el punto* $P_0 = (1;1;-7)$ *tiene frío. ¿A qué temperatura está sometido el insecto y en qué dirección y sentido debe moverse para entrar en calor lo más rápidamente posible?*

22) *Verificar que se cumple la relación de Schwarz*

a) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{xy^2}{8}$ b) $z = ln\left(x^2 + y\right)$ c) $z = e^{xy}$ d) $z = \dfrac{y}{x-y}$

23) *Si* $z = \dfrac{xy}{x-y}$, *demostrar que* $x^2.z''_{xx} + 2xy.z''_{xy} + y^2.z''_{yy} = 0$

24) *Si* $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2x + 3y}$, *demostrar que* $\dfrac{z''_{xy}}{z''_{yy}} = -\dfrac{y}{x}$

25) *Dada* $z = ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{sen(xy)}}$, *calcular* z''_{xx} *y* z''_{yy}

26) *Dada* $z = \begin{cases} x^2.arc\,tg\dfrac{y}{x} - y^2.arc\,tg\dfrac{x}{y} & x.y \neq 0 \\ 0 & x.y = 0 \end{cases}$, *demostrar que*

$f''_{xy}(0;0) \neq f''_{yx}(0;0)$

27) *Dada* $z = e^{-t}(sen\,x + cos\,y)$, *demostrar que* $z''_{xx} + z''_{yy} = z'_t$

28) Analizar derivabilidad en distintas direcciones en el origen de

$z = \begin{cases} \dfrac{x^2.sen\,y}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) \neq (0;0) \end{cases}$. Indicar la fórmula general f'_α.

RESPUESTAS

1) a) $z'_x = -15$; $z'_y = 36$ b) $z'_x = 48$; $z'_y = 36$

c) $z'_x = -123$; $z'_y = 80$ d) $z'_x = 8$; $z'_y = -8$

e) $z'_x = z'_y = 1$ f) $z'_x = 1$; $z'_y = 0$

g) $z'_x = z'_y = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$; h) $z'_x = z'_y = 0$

2) a) $z'_x = 2(x+y).(x-y)^3 + 3(x+y)^2.(x-y)^2$

$z'_y = 2(x+y).(x-y)^3 - 3(x+y)^2.(x-y)^2$

b) $z'_x = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$; $z'_y = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$ c) $z'_x = \dfrac{4xy^2}{x^4-y^4}$; $z'_y = \dfrac{-4x^2y}{x^4-y^4}$

d) $z'_x = 3x^2.e^{x^3-y}$; $z'_y = -.e^{x^3-y}$

e) $z'_x = \dfrac{3}{2\sqrt{ln(3x-y)}.(3x-y)}$; $z'_y = \dfrac{-1}{2\sqrt{ln(3x-y)}.(3x-y)}$

f) $z'_x = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(xy^2)^2}}.y^2.sen(xy) + \sqrt[3]{xy^2}.y.cos(xy)$

$z'_y = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(xy^2)^2}}.2xy.sen(xy) + \sqrt[3]{xy^2}.x.cos(xy)$

g) $z'_x = 2xy.4^y + \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $z'_y = 4^y.ln4.x^2y + 4^y.x^2 - \dfrac{x}{y.\sqrt{y^2-x^2}}$

h) $z'_x = \dfrac{\left(2x.e^{xy+y^2} + x^2.e^{xy+y^2}.y\right).(2y+x) - x^2.e^{xy+y^2}}{(2y+x)^2}$

$z'_y = \dfrac{x^2.e^{xy+y^2}.(x+2y)^2 - 2x^2.e^{xy+y^2}}{(2y+x)^2}$

i) $z'_x = \dfrac{2x}{y^2}.arc\,tg\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y.(x^2+y^2)}$; $z'_y = -\dfrac{2x^2}{y^3}.arc\,tg\dfrac{y}{x} + \dfrac{x^3}{y^2.(x^2+y^2)}$

j) $z'_x = \dfrac{\left(\dfrac{2xy}{1+x^4}+\dfrac{1}{x}\right).\left(xy^2+1\right)-\left(y.arc\,tg\,x^2+ln(2x)\right).y^2}{\left(xy^2+1\right)^2}$

$z'_y = \dfrac{arc\,tg\,x^2.\left(xy^2+1\right)-\left(y.arc\,tg\,x^2+ln(2x)\right).2xy}{\left(xy^2+1\right)^2}$

k) $z'_x = \dfrac{\left(6x.e^{xy}+3x^2.e^{xy}.y\right).\left(2y^2+x\right)-3x^2.e^{xy}}{\left(2y^2+x\right)^2}$

$z'_y = \dfrac{\left(3x^2.e^{xy}.x\right).\left(2y^2+x\right)-3x^2.e^{xy}.4y}{\left(2y^2+x\right)^2}$

l) $z'_x = e^{xy}.y.tg\dfrac{x}{y}+e^{xy}.sec^2\dfrac{x}{y}.\dfrac{1}{y}$; $\quad z'_y = e^{xy}.x.tg\dfrac{x}{y}+e^{xy}.sec^2\dfrac{x}{y}.\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$

3) a) z'_x y z'_y no existen b) $z'_x = z'_y = 1$ c) $z'_x = z'_y = 0$ d) $z'_x = z'_y = 0$

4) $z'_x = 0$; $\quad z'_y = \dfrac{1}{2}$

6) a) es continua y derivable y b) es derivable pero no continua, lo que significa que la derivabilidad no garantiza la continuidad como para funciones de una variable independiente.

7) a) $\nexists z'_x(\mathrm{P}_0)$, $z'_y(\mathrm{P}_0)=0$, b) $z'_x(\mathrm{P}_0)=1$, $z'_y(\mathrm{P}_0)=0$

c) $z'_x(\mathrm{P}_0)=\frac{1}{2}$, $z'_y(\mathrm{P}_0)=0$ d) $z'_x(\mathrm{P}_0)=0$, $z'_y(\mathrm{P}_0)=1$

8) m = – 45 9) a) m = 6, b) m = 8 10) $k = 0$

11) a) $f'_{120^\circ}(3;0)=-6$, $\nabla z(3;0)=12i$ b) $f'_{45^\circ}(2;1)=4\sqrt{2}$, $\nabla z(2;1)=10i-2j$

c) $f'_{135^\circ}(1;1)=0$, $\nabla z(1;1)=i+j$

d) $f'_{\vec{v}}(-1;3)=\dfrac{48\sqrt{29}}{29}$, $\nabla z(-1;3)=-6i-12j$

e) $f'_{\pi/6}(1;3)=-2\sqrt{3}$, $\nabla z(1;3)=-4\breve{i}$ f) $f'_{\vec{v}}(1;2)=\dfrac{26}{5}$, $\nabla z(1;2)=2\breve{i}+5\breve{j}$

g) $f'_{\vec{v}}(2;5)=\dfrac{-11\sqrt{2}}{2}$, $\nabla z(2;5)=-21\breve{i}-10\breve{j}$

h) $f'_{\vec{v}}(1;1;0) = -\sqrt{6}/3$, $\nabla u(1;1;0) = 2\breve{i} + 4\breve{j}$

i) $f'_{\vec{v}}(2;-1;1) = 10/3$, $\nabla u(2;-1;1) = -2\breve{i} + 4\breve{j} - 2\breve{k}$

j) $f'_{\vec{v}}(-1;1;3) = -7/6$, $\nabla u(-1;1;3) = 3/2\,\breve{i}\ -3/2\,\breve{j} + 1/2\,\breve{k}$

k) $f'_{\vec{v}}(1;3) = 5$ ó $f'_{-\vec{v}}(1;3) = -5$, $\nabla z(1;3) = 5\breve{i} + \breve{j}$.

l) $f'_{\vec{v}}(1;2) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ ó $f'_{-\vec{v}}(1;2) = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$, $\nabla z(1;2) = -4\breve{i} - 3\breve{j}$.

m) $f'_{\vec{v}}(-3;3) = -\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$ ó $f'_{-\vec{v}}(-3;3) = \dfrac{9\sqrt{10}}{10}$, $\nabla z(-3;3) = -2\breve{i} - 3\breve{j}$

n) $f'_{\vec{v}}(1;2;1) = \dfrac{11\sqrt{6}e^2}{6}$, $\nabla z(1;2;1) = 2e^2\breve{i} + 3e^2\breve{j} + 4e^2\breve{k}$

12) $\alpha =$ 26º33'54" 13) a) $f'_{\vec{v}_3}(x_0;y_0) = \dfrac{670}{91}$, b) $f'_{\vec{v}}(x_0;y_0)\ máx = \dfrac{\sqrt{3700}}{7}$

14) a) $\nabla z(1;2) = 2i + 2j$, b) $f'_{\vec{v}}(4;6) = \dfrac{14}{5}$

15) a) $f'_{\vec{v}}(1;2;-1) = -90/7$, , b) $máx\ \ f'_{\vec{v}}(1;2;-1) = 22$

16) a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, b) $|\nabla T(3;-6)| = 6\sqrt{2}$; 17) $-\nabla T(1;4) = \left(-5e^4;-e^4\right)$

18) A = 5, $B_1 = \dfrac{7}{2}$, $B_2 = -\dfrac{17}{2}$, $f_1(x;y) = 5x + \dfrac{7}{2}y + \dfrac{17}{2}x^2y$

$$f_2(x;y) = 5x - \frac{17}{2}y - \frac{7}{2}x^2y$$

19) $\vec{v} = (4;16)$ 20) $\vec{v} = \left(-4e^{-1};0\right)$ 21) $T(1;1;-7) = -6^o$, $\vec{v} = (4;-9;1)$

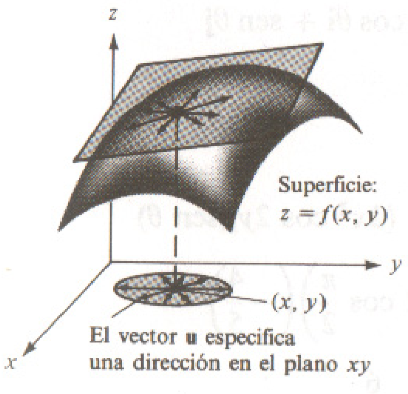
22 a) $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{y}{4}$ b) $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}$ c) $z''_{xy} = z''_{yx} = e^{xy} + xye^{xy}$

d) $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{-x-y}{(x-y)^3}$

25) $z''_{xx} = \dfrac{y^2}{2sen^2(xy)}$, $z''_{yy} = \dfrac{x^2}{2sen^2(xy)}$ 28) $f'_{\alpha} = sen\,\alpha.cos^2\,\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Capítulo 5

Diferencial



Diferencial de una función en un punto.

Relación entre diferencial e incremento.

Propiedades.

Plano tangente.

Interpretación geométrica.

Diferenciales sucesivos.

Diferenciales de orden n.

DIFERENCIAL

Hacemos un breve repaso de lo que ocurre para funciones de una variable independiente antes de analizar el tema campos escalares de dos variables independientes.

Recordemos antes la relación fundamental del límite:

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow f(x) - l = \varepsilon \Leftrightarrow f(x) = l + \varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon \to 0 \;\; si \\ x \to x_0 \end{cases}$$

PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Diferencial de una función en un punto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon \to 0 \;\; si \\ \Delta x \to 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta y = f'(x_0)\,.\,\Delta x + \varepsilon.\,\Delta x$$

A la primera parte de la expresión se la llama diferencial de la función f en el punto x_0.

$$dy = f'(x_0).\Delta x$$

El diferencial de una función en un punto es igual al producto de la derivada en el punto por el incremento de la variable independiente. Si en lugar de considerar un punto en particular tomamos un punto genérico se obtiene la **función diferencial**.

Función diferencial: $dy = f'(x).\Delta x$, el diferencial es función del punto y del incremento.

Ejemplos: $a)\ y = sen\ x \Rightarrow dy = d\left(sen\ x\right) = cos\ x.\Delta x$

$b)\ y = x^2 \Rightarrow dy = d\left(x^2\right) = 2x\,.\,\Delta\,x$

$c)\ y = x \Rightarrow dy = dx = 1.\Delta x \ \therefore\ dx = \Delta x$

Vemos que el diferencial de la variable independiente es igual a su incremento.

Otra expresión: $$dy = f'(x).\,dx$$

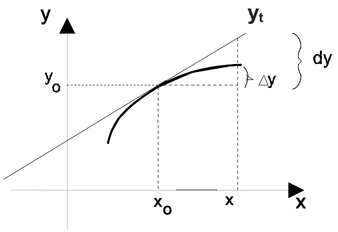
Relación entre el incremento Δy y el diferencial dy

Vimos que $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, donde $\varepsilon.\Delta x \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, por lo tanto, haciendo $\varepsilon.\Delta x = \varepsilon_1$ (por propiedad de los infinitésimos)

$$\Delta y = dy + \varepsilon_1 \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 \to 0\ si \\ \Delta x \to 0 \end{cases}$$

Es decir que el incremento y el diferencial difieren en un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$. Esto permite, para pequeñas variaciones de x ($\Delta x \to 0$), reemplazar el Δy por el dy.

Interpretación geométrica



El diferencial mide la variación de la recta tangente al pasar del punto x_0 al punto $x = x_0 + \Delta x$. En x_0 coinciden la imagen de la función y de la recta tangente.

PARA CAMPOS ESCALARES DE DOS VARIABLES

Diferencial de una función en un punto

Para obtener la expresión del diferencial para una función de dos variables partimos del teorema del valor medio.

$$\Delta z = f'_x\left(x_0 + \alpha_1.\Delta x;\, y_0\right).\Delta x + f'_y\left(x_0 + \Delta x\,;\, y_0 + \alpha_2.\,\Delta y\right).\Delta y \qquad (1)$$

Calculamos los siguientes límites y aplicamos la relación fundamental del límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f'_x(x_0 + \alpha_1 . \Delta x ; y_0) = f'_x(x_0 ; y_0) \Leftrightarrow f'_x(x_0 + \alpha_1 . \Delta x; y_0) = f'_x(x_0; y_0) + \varepsilon_1$$

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y) \to (0;0)} f'_y(x_0 + \Delta x; y_0 + \alpha_2 . \Delta y) = f'_y(x_0; y_0) \Leftrightarrow$$

$$f'_y(x_0 + \Delta x ; y_0 + \alpha_2 . \Delta y) = f'_y(x_0; y_0) + \varepsilon_2$$

Reemplazando en **(1)** queda:

$$\Delta z = \left[f'_x(x_0; y_0) + \varepsilon_1\right] . \Delta x + \left[f'_y(x_0; y_0) + \varepsilon_2\right] . \Delta y \,,$$ aplicando propiedad distributiva

$$\Delta z = f'_x(x_0; y_0) . \Delta x + f'_y(x_0; y_0) . \Delta y + \varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 . \Delta y \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0 \,, si \\ \Delta x \to 0 \; y \; \Delta y \to 0 \end{cases} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 . \Delta y$, por propiedades de los infinitésimos, es otro infinitésimo, se puede reemplazar por ε, por lo tanto queda:

$$\Delta z = f'_x(x_0 ; y_0) . \Delta x + f'_y(x_0; y_0) . \Delta y + \varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon \to 0, \; si \\ \Delta x \to 0 \; y \; \Delta y \to 0 \end{cases}$$

La parte principal del incremento es el diferencial de la función en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$:

$$dz(x_0; y_0) = f'_x(x_0; y_0) . \Delta x + f'_y(x_0; y_0) . \Delta y$$

que es la expresión del diferencial de una función de dos variables en un punto. Al igual que para funciones de una variable, si consideramos un punto genérico obtenemos la expresión analítica de la **función diferencial**.

Función diferencial: $dz = f'_x . \Delta x + f'_y . \Delta y$, el diferencial es función del punto y de los incrementos.

El diferencial de un campo escalar de dos variables es igual a la suma de los productos de sus derivadas parciales por los respectivos incrementos de las variables independientes.

Ejemplos

$$a)\ z = sen\ (x\ y) \Rightarrow\ dz = d[sen\,(x\ y)] = cos\,(x\ y)y.\Delta x + cos\,(x\ y)x.\Delta y$$

$$b)\ z = 3x^2 y\ \Rightarrow\ dz = d(3x^2 y) = 6xy.\Delta x + 3x^2.\Delta y$$

$$c)\ z = x\ \Rightarrow\ dz = dx = 1.\Delta\, x + 0.\Delta\, y\ \Rightarrow\ dx = \Delta x$$

$$d)\ z = y \Rightarrow dz = dy = 0.\Delta\, x + 1.\Delta y\ \Rightarrow\ dy = \Delta y$$

de los ejemplos c) y d) se deduce que los diferenciales de las variables independientes son iguales a su incrementos.

Otra expresión: $\boxed{dz = f'_x.dx + f'_y.dy}$

Relación entre el incremento Δ*z* y el diferencial *dz*

Vimos que $\Delta z = f'_x\,.\,\Delta x + f'_y\,.\,\Delta y + \varepsilon$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, por lo tanto:

$$\Delta z = dz + \varepsilon$$

Es decir que el incremento y el diferencial difieren en un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

Esto permite, para pequeñas variaciones de x e y ($\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$), reemplazar el Δz por el dz.

Ejemplo: calcular el valor aproximado de la función $z=x^4.y^3$ para P = (1,012;1,998).

El valor de la función en P = (1,012;1,998) es igual al valor que toma la función en P_0 = (1;2) más el incremento de la función al pasar de P_0 a P, que a su vez es aproximadamente igual al valor que toma la función en P_0 más el diferencial de la función, por ser los incrementos de las variables independientes muy pequeños. Es decir que podemos sustituir el incremento (Δz) por el diferencial (dz).

$f\,(1{,}012;1{,}998) = f\,(1;2) + \Delta z\ \cong f\,(1;2) + dz$
$dz = 4x^3.y^3dx + 3x^4.y^2dy\ \Rightarrow dz\,(1;2) = 32.0{,}012 + 12.(-0{,}002) = 0{,}36.$
$f\,(1{,}012;1{,}998) \cong 8 + 0{,}36 = 8{,}36.$

Este es el valor que obtenemos aplicando diferenciales. Una calculadora nos da el siguiente valor aproximado: 8,3658.

Función diferenciable - definición

Un campo escalar de dos variables $z = f\,(x;y)$ es diferenciable en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ interior a su dominio si existen dos números reales A y B tales que el incremento de la función al pasar de $P_0 = (x_0;y_0)$ a $P = (x;y)$ es:

$$\Delta z = A\,.\,\Delta x + B\,.\,\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2\,.\,\Delta y \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0\,, si \\ \Delta x \to 0 \; y \; \Delta y \to 0 \end{cases}$$

Propiedades

a) Si una función es diferenciable entonces es continua.

$$\Delta z = A\,.\,\Delta x + B\,.\,\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2\,.\,\Delta y$$

Tomamos $\lim\limits_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)}$ a ambos miembros de la igualdad:

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} \left[f(x;y) - f(x_0;y_0)\right] = \lim_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} \left(A\,.\,\Delta x + B\,.\,\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2\,.\,\Delta y\right) = 0$$

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} \left[f(x;y) - f(x_0;y_0)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0)$$

Por lo tanto la función es continua.

b) Si una función es diferenciable entonces es derivable.

Vamos a demostrar que A y B de (1) son respectivamente las derivadas parciales de $f\,(x;y)$.

Si $\Delta y = 0$, $\Delta z = A\,.\,\Delta x + \varepsilon_1.\Delta x \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta z}{\Delta x} = A\,.\dfrac{\Delta x}{\Delta x} + \varepsilon_1.\dfrac{\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \dfrac{\Delta z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1$,

tomando $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ a ambos miembros de la igualdad:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} A + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \varepsilon_1 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0) = A$, teniendo en cuenta $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y que A es constante respecto de Δx.

Análogamente haciendo $\Delta x = 0$, se demuestra que $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0; y_0) = B$.

Por lo tanto *f* es diferenciable si el incremento de la función se puede expresar:

$$\Delta z = f'_x(\mathrm{P}_0).\Delta x + f'_y(\mathrm{P}_0).\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y.$$

Es decir que: $f(x; y) - f(x_0; y_0) - f'_x(\mathrm{P}_0).\Delta x - f'_y(\mathrm{P}_0).\Delta y = \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$

y $\begin{cases} \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, si \\ \Delta x \to 0 \; y \; \Delta y \to 0 \end{cases}$

Ejemplos

Demostraremos, aplicando la definición, que los siguientes campos escalares son diferenciable en $\Re^2$.

a) $f(x; y) = 3xy$

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) - f'_x(\mathrm{P}_0).\Delta x - f'_y(\mathrm{P}_0).\Delta y =$$
$$= 3(x_0 + \Delta x).(y_0 + \Delta y) - 3x_0.y_0 - 3y_0.\Delta x - 3x_0.\Delta y =$$
$$= 3x_0.y_0 + 3x_0.\Delta y + 3y_0.\Delta x + 3\Delta x.\Delta y - 3x_0.y_0 - 3y_0.\Delta x - 3x_0.\Delta y =$$
$$= (3\Delta x).\Delta y = \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

Si hacemos $\varepsilon_1 = 0$ y $3\Delta x = \varepsilon_2$, vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, con lo cual queda demostrado que la función es diferenciable.

b) $f(x; y) = x^2 + 2xy$

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) - f'_x(\mathrm{P}_0).\Delta x - f'_y(\mathrm{P}_0).\Delta y =$$
$$= (x_0 + \Delta x)^2 + 2(x_0 + \Delta x).(y_0 + \Delta y) - (x_0^2 + 2x_0 y_0) - (2x_0 + 2y_0).\Delta x + 2x_0.\Delta y =$$
$$= x_0^2 + 2x_0.\Delta x + \Delta x^2 + 2x_0 y_0 + 2x_0 \Delta y + 2\Delta x.y_0 + 2\Delta x.\Delta y - x_0^2 - 2x_0 y_0 -$$
$$-2x_0.\Delta x - 2y_0.\Delta x + 2x_0.\Delta y = \Delta x^2 + 2\Delta x.\Delta y = \Delta x.\Delta x + (2\Delta x).\Delta y = \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

Si hacemos $\Delta x = \varepsilon_1$ y $2\Delta x = \varepsilon_2$, vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, con lo cual queda demostrado que la función es diferenciable.

Demostrar que una función es diferenciable aplicando la definición no es, por lo general, sencillo. Veremos algunas propiedades que pueden facilitar el análisis de la diferenciabilidad de una función.

Condición necesaria para que una función sea diferenciable

De las propiedades a) y b) surge que es condición necesaria para que una función $z = f(x;y)$ sea diferenciable en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ interior a su domino que sea continua y admita derivadas parciales de 1º orden finitas en dicho punto.

Por lo tanto si una función de dos variables no es continua o no es derivable, entonces no es diferenciable.

Condición suficiente para que una función sea diferenciable

De la expresión (2) surge que es condición suficiente para que una función $z = f(x;y)$ sea diferenciable en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ interior a su domino que las derivadas parciales de 1º orden finitas sean continuas en un entorno de dicho punto[1].

Nota: si la función es continua, con derivadas parciales finitas, pero no continuas en un entorno del punto, entonces no podemos asegurar nada acerca de la diferenciabilidad. Debemos recurrir a la definición de función diferenciable.

Síntesis de propiedades

1) Si $z = f(x;y)$ no es continua o no es derivable en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$, entonces no es diferenciable en ese punto.
2) Si $z = f(x;y)$ es diferenciable en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$, entonces es continua en ese punto y admite derivada en cualquier dirección y sentido.

---

[1] Se puede demostrar que es suficiente que una sola de las derivadas parciales sea continua para que la función sea diferenciable.

3) Si $z = f(x;y)$ es continua con derivadas parciales finitas no continuas en entorno del punto, puede o no ser diferenciable. Hay que recurrir a la definición.

Veamos algunos ejemplos

I) Analizar si son diferenciables en el origen las siguientes funciones utilizando las propiedades vistas.

$$1)\ z = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Primero analizamos la continuidad. Si no es continua sabemos que no es diferenciable.

a) $f(0;0) = 0$
b) Calculamos el *lim* radial:

$$L_r = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x.(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2.\left(1+m^2\right)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Vemos que la función no es continua en $P_0 = (0;0)$ y por lo tanto no es diferenciable en $P_0 = (0;0)$.

En este caso tenemos una función que por no ser continua no es diferenciable.

$$2)\ z = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Primero analizamos la continuidad de la función.

a) $f(0;0) = 0$ b) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left[y^2 . \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \right] = 0$

Por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que la función es continua en el origen. Ahora debemos analizar la derivabilidad.

En $P_0 = (0;0)$: $z'_x(0;0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x;0) - f(0;0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$

$$z'_y(0;0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Vemos que f es derivable en P_0. Ahora debemos ver si alguna de las derivadas parciales es continua. Calculamos entonces las funciones derivadas parciales.

En $P_0 \neq (0;0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy^2.(x^2+y^2) - x^2y^2.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y^2 + 2xy^4 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2y.(x^2+y^2) - x^2y^2.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y + 2x^2y^3 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

Por lo tanto: $z'_x = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

$$z'_y = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Debemos analizar la continuidad de las derivadas parciales en $P_0 = (0;0)$

a) $z'_x(0;0) = 0$ b) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left[2x.\dfrac{y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \right] = 0$

Por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que z'_x es continua en el origen.

a) $z'_y\,(0;0) = 0$ b) $L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x^4 y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \left[2y.\dfrac{x^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right] = 0$

Por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que z'_y es continua en el origen.

Hemos analizado la continuidad de ambas derivadas parciales como ejemplo pero con una sola alcanza.

Las derivadas parciales son continuas en $P_0 = (0;0)$, por lo tanto la función es diferenciable en dicho punto.

$$3)\ z = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$$

Analizamos la continuidad de la función.

a) $f\,(0;0) = 0$ b) $L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \left[3y.\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right] = 0$

Por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que la función es continua en el origen, por lo tanto no podemos saber si es diferenciable. Vamos a analizar la continuidad de las derivadas parciales, para lo cual las calculamos.

En $P_0 = (0;0)$: $z'_x(0;0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$

$$z'_y(0;0) = \lim_{y\to 0} \dfrac{f(0;y)-f(0;0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0$$

Vemos que la función es derivable en $P_0 = (0;0)$. Debemos analizar si las derivadas parciales son continuas.

En $P_0 \neq (0;0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{6xy\,.\left(x^2+y^2\right)-3x^2y\,.2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{6x^3y+6xy^3-6x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{6xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3x^2.\left(x^2+y^2\right)-3x^2y\,.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{3x^4+3x^2y^2-6x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Por lo tanto:

$$z'_x=\begin{cases}\dfrac{6xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$z'_y=\begin{cases}\dfrac{3x^4-3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

a) $z'_x\ (0;0) = 0$

b) Calculamos el límite radial

$$L_r=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{6xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x(mx)^3}{\left[x^2+(mx)^2\right]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6m^3x^4}{x^4+2m^2x^4+m^4x^4}=$$

$$=\frac{6m^3}{1+2m^2+m^4} \qquad \Rightarrow\ z'_x \text{ no es continua en } P_0=(0;0)$$

a) $z'_y\ (0;0) = 0$

b) Calculamos el límite radial

$$L_r = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{3x^4 - 3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4 - 3x^4m^2}{\left[x^2+(mx)^2\right]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4\left(1-m^2\right)}{x^4+2m^2x^4+m^4x^4} =$$

$$= \frac{3.\left(1-m^2\right)}{1+2m^2+m^4} \qquad \Rightarrow z'_y \text{ no es continua en } P_0 = (0;0)$$

Las derivadas parciales no son continuas en $P_0 = (0;0)$, por lo tanto no podemos saber si la función es o no diferenciable aplicando las propiedades vistas. Debemos recurrir a la definición.

$$f(x;y) - f(x_0;y_0) - f'_x(P_0).\Delta x - f'_y(P_0).\Delta y =$$

$$= \frac{3\Delta x^2.\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 - 0.\Delta x - 0.\Delta y = \frac{3\Delta x^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}.\Delta y = \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

Si hacemos $\varepsilon_2 = \dfrac{3\Delta x^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}$, vemos que cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, ε_2 no tiende a 0 ya que es una función acotada. Con lo cual queda demostrado que la función no es diferenciable.

4) $z = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right).sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Analizamos la continuidad de la función.

a) $f(0;0) = 0$ b) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left[\left(x^2+y^2\right).sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 0$

Por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que la función es continua en el origen, por lo tanto no podemos saber si es diferenciable. Vamos a analizar la continuidad de las derivadas parciales, para lo cual las calculamos.

En $P_0 = (0;0)$

$$z'_x(0;0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2.sen\frac{1}{|x|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x.sen\frac{1}{|x|} = 0$$

$$z'_y(0;0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2.sen\frac{1}{|y|} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} y.sen\frac{1}{|y|} = 0$$

Los límites valen 0 por ser productos entre infinitésimos y funciones acotadas.

Vemos que la función es derivable en $P_0 = (0;0)$. Debemos analizar si las derivadas parciales son continuas.

En $P_0 \neq (0;0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x.sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right).cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$= 2x.sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y.sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right).cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$= 2y.sen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Por lo tanto:

$$z'_x = \begin{cases} 2x.sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$$

$$z'_y = \begin{cases} 2y.sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x;y)\neq(0;0) \\ 0 & (x;y)=(0;0) \end{cases}$$

Vemos que no existe el $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\left[2x.sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

ya que en el sustraendo tenemos el producto de dos funciones acotadas cuyo límite no podemos determinar. Por lo tanto la derivada parcial no es continua en P_0.

Análogamente ocurre con la derivada parcial respecto de y.

Tampoco existe el $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\left[2y.sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$.

Por lo que esta derivada tampoco es continua.

Es decir que esta función no tiene derivadas parciales continuas, para saber si es diferenciable necesitamos recurrir a la definición.

$$f(x;y) - f(x_0;y_0) - f'_x(P_0).\Delta x - f'_y(P_0).\Delta y =$$

$$= \left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right).sen\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} - 0 - 0.\Delta x - 0.\Delta y =$$

$$= \left(\Delta x.sen\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\Delta x + \Delta y.sen\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\Delta y\right). = \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

Si hacemos $\varepsilon_1 = \Delta x.sen\dfrac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ y $\varepsilon_2 = \Delta y.sen\dfrac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, vemos que cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$, por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada. Por lo tanto queda demostrado que la función es diferenciable.

II) Demostrar que las siguientes funciones son continuas, con derivadas parciales finitas en el origen, pero no diferenciables.

1) $z = \sqrt{|x.y|}$

Analizamos la continuidad de la función.

a) $f(0;0) = 0$ b) $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \sqrt{|x.y|} = 0$

Vemos que la función es continua en el origen, por lo tanto no podemos saber si es diferenciable. Vamos a ver si existen las derivadas parciales, para lo cual las calculamos.

En $P_0 = (0;0)$: $z'_x(0;0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x;0) - f(0;0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$

$$z'_y(0;0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Vemos que f es derivable en P_0.

Analizamos si es diferenciable aplicando la definición.

$$f(x;y) - f(0;0) - f'_x(0;0).\Delta x - f'_y(0;0).\Delta y =$$
$$= \sqrt{|\Delta x|}.\sqrt{|\Delta y|} - 0 - 0.\Delta x - 0.\Delta y = \sqrt{|\Delta x|}.\sqrt{|\Delta y|} = \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$$

Si hacemos $\Delta x = \Delta y$, $\sqrt{|\Delta x|}.\sqrt{|\Delta x|} = \Delta x = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta x$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$.

Esto solo se verifica si $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, pero para que la función sea diferenciable ε_1 y ε_2 deben ser infinitésimos para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Al no cumplirse esta condición podemos asegurar que la función no es diferenciable en $P_0 = (0;0)$.

2) $$z = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x\,y^2}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Analizamos la continuidad de la función.

a) $f(0;0) = 0$

b) $$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3 - x\,y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} - \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x\,y^2}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} x.\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \lim_{(x;y)\to(0;0)} x.\frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Ambos límites son 0 por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Vemos que la función es continua en el origen, por lo tanto no podemos saber si es diferenciable. Vamos a ver si existen las derivadas parciales, para lo cual las calculamos.

En $P_0 = (0;0)$: $$z'_x(0;0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$z'_y(0;0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

Vemos que f es derivable en P_0.

Analizamos si es diferenciable aplicando la definición.

$$f(x;y)-f(0;0)-f'_x(0;0).\Delta x-f'_y(0;0).\Delta y=$$

$$=\frac{\Delta x^3-\Delta x.\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0-\Delta x-0.\Delta y=\frac{\Delta x^3-\Delta x.\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}-\Delta x=\varepsilon_1.\Delta x+\varepsilon_2.\Delta y$$

$$=\frac{\Delta x^3-\Delta x.\Delta y^2-\Delta x^3+\Delta x.\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0=\varepsilon_1.\Delta x+\varepsilon_2.\Delta y$$

Vemos que ε_1 y ε_2 pueden tomar cualquier valor por lo tanto no son infinitésimos. La función no se diferenciable en $P_0=(0;0)$.

III) Demostrar que la función $z=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & (x;y)=(0;0)\end{cases}$ admite derivadas parciales finitas en el origen, pero no es diferenciable.

En $P_0=(0;0)$: $z'_x(0;0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$

$$z'_y(0;0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0;y)-f(0;0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

Vemos que f es derivable en P_0. Analizamos si es diferenciable.

$$f(x;y)-f(x_0;y_0)-f'_x(P_0).\Delta x-f'_y(P_0).\Delta y=$$

$$=\frac{3(\Delta x)^2.(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}-0-0.\Delta x-0.\Delta y=\frac{3(\Delta x)^2.(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}=\varepsilon_1.\Delta x+\varepsilon_2.\Delta y$$

$$\frac{3\Delta x.(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}.\Delta x=\varepsilon_1.\Delta x+\varepsilon_2.\Delta y\ ,\quad \varepsilon_1=\frac{3\Delta x.(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}\ ,\ \varepsilon_2=0$$

$\lim\limits_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)}\dfrac{3\Delta x.(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}\neq 0$. Si consideramos el camino $\Delta x=(\Delta y)^2$, el

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} \frac{3\Delta x.(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4} = \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=(\Delta y)^2}} \frac{3(\Delta y)^4}{(\Delta y)^8+(\Delta y)^4} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{3(\Delta y)^4}{(\Delta y)^4.\left[(\Delta y)^4+1\right]} = 3$$

Por lo tanto la función no es diferenciable en $P_0 = (0;0)$.

DIFERENCIAL TOTAL EXACTO – LA FUNCIÓN POTENCIAL

Dada una expresión diferencial $P(x;y).dx+Q(x;y).dy$ es un *diferencial total exacto* si existe una función potencial $U=f(x;y)$ tal que su diferencial es $dU(x;y)=P(x;y).dx+Q(x;y).dy$.

Vamos a determinar la existencia de la función ***U*(*x;y*).**

Condición de simetría

Si $dU=P(x;y).dx+Q(x;y).dy \Rightarrow U'_x=P$ y $U'_y=Q$. Si calculamos las derivadas segundas cruzadas obtenemos: $U''_{xy}=P'_y$ y $U''_{yx}=Q'_x$. Por lo tanto $P'_y=Q'_x$, igualdad que se conoce como la ***condición de simetría***.

Es decir, para que una expresión sea un *diferencial total exacto* se debe cumplir la condición de simetría.

Una vez que hemos verificado que existe *U*(*x;y*), debemos calcularla.

Cálculo de U(x;y)

Como $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x;y) \Rightarrow U(x;y)=\int P(x;y).dx=F(x;y)+\alpha(y) \qquad (1)$

La constante de integración se puede expresar como una función de *y* porque estamos integrando según la variable *x*. Pero además

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x;y) \Rightarrow U(x;y)=\int Q(x;y).dy=F(x;y)+\beta(x) \qquad (2)$$

Ambas integrales deben ser iguales, por lo tanto pueden diferir solo en una constante.

Por lo tanto ***U*(*x;y*)** se obtiene comparando las integrales (1) y (2).

$$U(x;y)=F(x;y)+\alpha(x)+\beta(y)+C$$

Para cada valor de C se obtiene una función potencial.

Ejemplo: $(2x^3+y).dx+(x+2y^2).dy$

Primero verificamos la condición de simetría: $P_y'=1=Q_x'$.
Hemos verificado que la expresión es diferencial exacta. Ahora debemos encontrar la expresión general de ***U* (*x;y*)**.

$$U(x;y)=\int(2x^3+y).dx=\frac{x^4}{2}+yx+\alpha(y)$$

$$U(x;y)=\int(x+2y^2).dy=xy+\frac{2y^3}{3}+\beta(x)$$

Si comparamos las dos integrales, que como vimos deben ser iguales, vemos que la función de ***y*** que figura en la 1º integral es $\frac{2y^3}{3}$ que aparece en la 2º integral y que la función de ***x*** que aparece en la 2º integral es $\frac{x^4}{2}$, que aparece en la 1º integral. $U(x;y)=xy+\frac{x^4}{2}+\frac{2y^3}{3}+C$.

Verificación

Es muy fácil verificar si la expresión es diferencial exacta. Si calculamos el diferencial total de la función $U(x;y)$ que hemos obtenido, debemos obtener la expresión diferencial.

PLANO TANGENTE – LA APROXIMACIÓN LINEAL

Dada la función $z = f(x;y)$, consideramos el punto $P_0 = (x_0;y_0)$. Si en ese punto la función es diferenciable, podemos expresar el incremento al pasar de P_0 a P.
Ya vimos que si $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$: $\Delta z \cong dz$. Desarrollando queda:

$z - z_0 \cong f'_x(x_0;y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0).(y - y_0)$. Despejando z:

$$z \cong f'_x(x_0;y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0).(y - y_0) + z_0$$

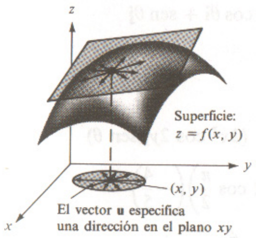
El 2do. miembro de la igualdad es la ecuación de un plano que recibe el nombre de ***plano tangente*** a la superficie en $P_0' = (x_0;y_0;z_0)$.

$$\boxed{z_t = f'_x(x_0;y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0).(y - y_0) + z_0} \quad ❶$$

Nota: Designamos como z_t a la z del plano tangente, para distinguirla de la z de la función.

En $P_0 = (x_0; y_0)$ coinciden la imagen de la función y del plano tangente.
$z(x_0; y_0) = z_t(x_0; y_0)$.

Nota: El plano tangente contiene a todas las rectas tangentes a las curvas que pasen por el punto.



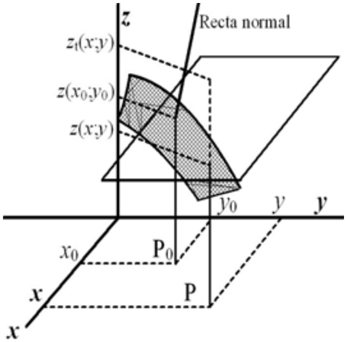
Nota: cuando se sustituye el incremento Δz por el diferencial dz para aproximar una función, geométricamente se sustituye la superficie por el plano tangente. En realidad se calcula la imagen del plano tangente y no de la superficie. Esto se denomina *aproximación lineal*.

Condiciones de diferenciabilidad: desde el punto de vista geométrico una función es diferenciable en un punto si admite plano tangente en ese punto, lo que equivale a decir que admite derivada en toda dirección y sentido.

Recta normal

La recta normal en un punto es la recta perpendicular al plano tangente en dicho punto. Como los denominadores (números directores) de la ecuación de la recta perpendicular a un plano son los coeficientes de la ecuación del plano, tenemos que una ecuación es: $\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0;y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0;y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

Interpretación geométrica del diferencial



El diferencial de una función de un campo escalar de dos variables mide la variación del plano tangente al pasar del punto $P_0 = (x_0;y_0)$ al punto incrementado $P = (x_0+\Delta x\ ;\ y_0+\Delta y)$.

De ❶ surge que $z_t = dz(x_0;y_0)+z_0$, entonces:

$z_t - z_0 = dz(x_0;y_0)$, por lo tanto: $dz\,(x_0;y_0) = \Delta z_t = z_t\,(x;y) - z_t\,(x_0;y_0)$.

Ejemplo

Dado el paraboloide $z = x^2 + y^2$, hallar la ecuación del plano tangente y de una recta normal si $P_0 = (2;1)$. Calcular la variación del plano tangente al pasar de P_0 a $P = (2{,}1;0{,}9)$ y verificar que coincide con el diferencial en P_0. Primero hallamos $z_0 = 4 + 1 = 5$.

Calculamos ahora las derivadas parciales en P_0.

$z_x' = 2x \Rightarrow z_x'\,(2;1) = 4$ $\qquad$ $z_y' = 2y \Rightarrow z_y'\,(2;1) = 2$,

la ecuación del plano tangente es: $z_t = 4(x-2) + 2(y-1)+5 = 4x + 2y - 5$.

Calculamos $\qquad z_t(P) = 4.2{,}1+2.0{,}9 - 5 = 5{,}2$

$$\Delta z_t = z_t\,(P) - z_t(P_0) = 5{,}2 - 5 = 0{,}2.$$

$$dz\,(2;1) = 4.0{,}1+2.(-0{,}1) = 0{,}2 \Rightarrow dz = \Delta z_t.$$

Una ecuación de la recta normal es: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$.

GENERALIZACIÓN PARA FUNCIONES DE N VARIABLES

Si $u = f(x_1; x_2; x_3; ...; x_n)$, el diferencial de u es:

1) $du = f'_{x_1}.dx_1 + f'_{x_2}.dx_2 + ... + f'_{x_n}.dx_n$

Ejemplo

$u = 3x^2 - 2xy^2 + 4xz \Rightarrow du = (6x - 2y^2 + 4z).dx + (-6xy^2).dy + 4x.dz$

2) Una función es diferenciable si

$$f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{P}_0) - f'_{x_1}(\mathrm{P}_0).\Delta x_1 - f'_{x_2}(\mathrm{P}_0).\Delta x_2 - ... - f'_{x_n}(\mathrm{P}_0).\Delta x_n$$
$$= \varepsilon_1.\Delta x_1 + \varepsilon_2.\Delta x_2 + ... + \varepsilon_n.\Delta x_n$$

$$\text{y} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, ..., \varepsilon_n \to 0 \; si \\ \Delta x_1 \to 0 \; y \; \Delta x_2 \to 0, ..., \Delta x_n \to 0 \end{cases}$$

Ejemplo $\quad u = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & (x;y;z) \neq (0;0;0) \\ 0 & (x;y;z) = (0;0;0) \end{cases}$

En la página 85 hemos demostrado que las derivadas parciales en el origen valen 0.

$$f(x;y;z) - f(0;0;0) - f'_x(0;0;0).\Delta x - f'_y(0;0;0).\Delta y - f'_z(0;0;0).\Delta z =$$
$$= \frac{\Delta x \Delta y (\Delta z)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} - 0 - 0.\Delta x - 0.\Delta y - 0.\Delta z$$

$$\frac{\Delta x \Delta y (\Delta z)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

Si hacemos $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta y\left(\Delta z\right)^2}{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2}, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y;\Delta z)\to(0;0;0)} \frac{\Delta y.(\Delta z)^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \lim_{(\Delta x;\Delta y;\Delta z)\to(0;0;0)} \Delta y.\frac{(\Delta z)^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 0$$

El límite es 0 por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada, por lo tanto la función es diferenciable.

DIFERENCIALES SUCESIVOS

Dada una función $z = f(x;y)$ se puede calcular, como ya hemos visto, su función diferencial que de ahora en más llamaremos función diferencial primero. Si esta función diferencial la volvemos a diferenciar, obtenemos una nueva función diferencial que llamamos función diferencial segundo, y así sucesivamente. Veremos como se obtienen estas expresiones.

Diferencial segundo

$$d^2z = d\left(dz\right) = d\left(f'_x.\,dx + f'_y\,.\,dy\right) = \left(f'_x.\,dx + f'_y\,.\,dy\right)'_x.\,dx + \left(f'_x.\,dx + f'_y.\,dy\right)'_y.\,dy$$
$$= \left(f''_{xx}.\,dx + f''_{yx}.\,dy\right).\,dx + \left(f''_{xy}\,.\,dx + f''_{yy}.\,dy\right).\,dy = f''_{xx}\,.\,dx^2 + 2f''_{xy}dx.dy + f''_{yy}.\,dy^2$$

Si queremos calcular el diferencial tercero, debemos calcular el diferencial del diferencial segundo.

Diferencial tercero

$$d^3z = d\left(d^2z\right) = d\left(f''_{xx}.\,dx^2 + 2f''_{xy}.\,dx\,.\,dy + f''_{yy}.\,dy^2\right) =$$
$$\left(f''_{xx}.dx^2 + 2f''_{xy}.dx.dy + f''_{yy}\,.dy^2\right)'_x.dx + \left(f''_{xx}.dx^2 + 2f''_{xy}.dx.\,dy + f''_{yy}.dy^2\right)'_y.dy =$$
$$\left(f'''_{xxx}.dx^2 + 2f'''_{xyx}.dx.dy + f'''_{yyx}.dy^2\right).dx + \left(f'''_{xxy}.dx^2 + 2f'''_{xyy}.dx.dy + f'''_{yyy}.dy^2\right).dy =$$
$$f'''_{xxx}.dx^3 + 3f'''_{xxy}.dx^2.dy + 3f'''_{xyy}.dx.dy^2 + f'''_{yyy}\,.dy^3$$

Diferenciales de orden n

Si observamos las expresiones del diferencial segundo y del diferencial tercero vemos que tienen el aspecto de la potencia de un binomio, donde los exponentes indican, para las derivadas orden de derivación y para los incrementos potencias efectivas.

$$d^2z = f''_{xx}.\,dx^2 + 2f''_{xy}.dx.dy + f''_{yy}.\,dy^2$$

$$d^3z = f'''_{xxx}.\,dx^3 + 3f'''_{xxy}.\,dx^2.\,dy + 3f'''_{xyy}.\,dx.dy^2 + f'''_{yyy}.\,dy^3$$

Generalizando esas expresiones obtenemos la forma general del diferencial de orden *n*.

$$d^nz = \left(f'_x.dx + f'_y.\,dy\right)^{(n)}$$

Expresión que se denomina ***operador simbólico.***

Ejemplos

a) Hallar d^2z en $P_0 = (1;2)$ si $z = x^3y^2 - 5x^2y^3$

Vimos que el diferencial segundo en un punto es:

$$d^2z(x_0;y_0) = f''_{xx}(x_0;y_0).\,dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0).dx.dy + f''_{yy}(x_0;y_0).\,dy^2$$

Calculamos las derivadas que intervienen en la expresión:

$$f'_x = 3x^2y^2 - 10xy^3 \Rightarrow f''_{xx} = 6xy^2 - 10y^3 \Rightarrow f''_{xx}(1;2) = -56$$
$$f'_y = 2x^3y - 15x^2y^2 \Rightarrow f''_{yy} = 2x^3 - 30x^2y \Rightarrow f''_{yy}(1;2) = -58$$
$$f''_{xy} = 6x^2y - 30xy^2 \Rightarrow f''_{xy}(1;2) = -108$$

Por lo tanto, $d^2z(1;2) = -56dx^2 - 216dx.dy - 58dy^2$

b) Hallar d^3z si $z = y^4x^2 + 4y^2x^4$

Vimos que: $d^3z = f'''_{xxx}.\,dx^3 + 3f'''_{xxy}.\,dx^2.\,dy + 3f'''_{xyy}.\,dx.dy^2 + f'''_{yyy}.\,dy^3$

Calculamos las derivadas que intervienen en la expresión:

$$f'_x = 2y^4x + 16y^2x^3 \Rightarrow f''_{xx} = 2y^4 + 48y^2x^2,\; f''_{xy} = 8y^3x + 32yx^3$$

$$f'_y = 4y^3x^2 + 8yx^4 \Rightarrow f''_{yy} = 12x^2y^2 + 8x^4$$

$$f'''_{xxx} = 96y^2x,\; f'''_{yyy} = 24yx^2,\; f'''_{xxy} = 8y^3 + 96yx^2,\; f'''_{xyy} = 24xy^2 + 32x^3$$

$$d^3z = 96y^2x.dx^3 + 3.\left(8y^3 + 96yx^2\right).dx^2.dy + 3.\left(24y^2x + 32x^3\right).dx.dy^2 + 24yx^2.dy^3$$

EL DIFERENCIAL Y LAS DERIVADAS DIRECCIONALES

Vimos en la página 98 que la derivada direccional según la dirección y sentido α en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ se puede expresar como el producto escalar entre el vector gradiente y el versor director de la dirección y sentido α. Si esto es así la función $z = f(x;y)$ es diferenciable en $P_0 = (x_0;y_0)$.

$$z'_{\breve{v}}(P_0) = z'_\alpha(P_0) = \nabla z(P_0) \bullet \breve{v}$$

Propiedad

Si en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ se verifica que $z'_{\breve{v}}(P_0) \neq \nabla z(P_0) \bullet \breve{v}$, entonces la función no es diferenciable. Esta es otra forma de verificar la no diferenciabilidad de una función en un punto.

El diferencial y el gradiente

En $\Re^2$:

Vimos que si $z = f(x;y)$ el diferencial de z en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ es $dz(P_0) = f'_x(P_0).dx + f'_y(P_0).dy = \left[f'_x(P_0); f'_y(P_0)\right] \bullet (dx;dy)$.

Si consideramos el vector desplazamiento $d\vec{x} = (dx;dy)$ que tiene la dirección de la recta tangente, entonces $dz(P_0) = \nabla f(P_0) \bullet d\vec{x}$.

El diferencial de una función en el punto P_0 es igual al producto escalar entre el gradiente de la función en el punto por el diferencial del vector que une los puntos $P_0 = (x_0;y_0)$ y $P = (x;y)$.

En $\Re^3$:

Si $u = f\ (x;y;z)$, $dz\left(\mathrm{P}_0\right) = f_x'\left(\mathrm{P}_0\right).dx + f_y'\left(\mathrm{P}_0\right).dy + f_z'\left(\mathrm{P}_0\right).dz$, por lo tanto $dz\left(\mathrm{P}_0\right) = \left[f_x'\left(\mathrm{P}_0\right); f_y'\left(\mathrm{P}_0\right); f_z'\left(\mathrm{P}_0\right)\right] \bullet \left(dx; dy; dz\right)$.

Si consideramos ahora al vector desplazamiento como $d\vec{x} = \left(dx; dy; dz\right)$, entonces $dz\left(\mathrm{P}_0\right) = \nabla f\left(\mathrm{P}_0\right) \bullet d\vec{x}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Diferenciales

1) Calcular el diferencial total de la función $z = x^3y + x^2y^2 + xy^2$ en $P_0 = (1;1)$, si $dx = 0{,}2$ y $dy = 0{,}05$.

2) Calcular el diferencial total de la función $z = x.\ln y - y.\ln x$ para $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $dx = 0{,}1$ y $dy = -0{,}2$.

3) Calcular el valor aproximado de la función $z = x^5y^6$, aplicando diferenciales, en $P = (1{,}0017;0{,}995)$.

4) Calcular el diferencial total de la función $z = arc\ tg\,\dfrac{y}{x}$.

5) Calcular el valor de $z = x^4y^5$ en $P = (1{,}017;1{,}99)$ aplicando diferenciales.

6) Calcular aproximadamente mediante diferenciales $\sqrt[5]{(3{,}8)^2 + 2.(2{,}1)^3}$.

7) Hallar a) d^2z en $P_0 = (1;2)$ si $z = x^3y^2 - 5x^2y^3$, b) d^3z si $z = y^4x^2 + 4y^2x^4$.

8) Investigar si las siguientes funciones son diferenciables en el origen.

a) $z = x^3 + 5xy - 4e^{2x}$

b) $z = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^6 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

c) $z = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

d) $z = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

9) Dada la función $z = \begin{cases} \dfrac{xy.(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & (x;y) = (0;0) \end{cases}$, demostrar en $\Re^2$:

a) es continua, b) es diferenciable.

10) Demostrar que en un entorno del origen $e^{x/y+1} + \ln(y+1) \cong x + y + 1$.

11) Calcular aplicando diferenciales $f(1{,}96;0{,}96)$ si $f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Plano tangente

Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a las siguientes superficies en los puntos indicados.

1) $z = 2x^2y + y^2 - x + 1$ en $P_0 = (1;3;z_0)$ 2) $z = x^2 - x + 2xy + 1$ en $P_0 = (1;2;z_0)$

3) $z = 2xy + x^3 - y^2 + 1$ en $P_0 = (1;2;z_0)$ 4) $z = x^2 - x + 2y^2 + 1$ en $P_0 = (1;2;z_0)$

5) $z = x^2 - 4y^2$ en $P_0 = (2;1;z_0)$ 6) $z = x^2 + y^2$ en $P_0 = (2;-1;z_0)$

7) Calcular la variación del plano tangente a la superficie $z = 2x^3 - y^2$ al pasar del punto $P_0 = (1;2)$ al punto $P = (1,1;2,5)$.

8) ¿Dónde corta al eje z el plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $P_0 = (1;1;z_0)$.

9) Hallar por aproximación lineal $f(0,1;-1,02)$ si $f(x;y) = x^2 + 2xy + 2y$.

10) Hallar por aproximación lineal $f(x_0 + 0,1;\, y_0 - 0,2)$ si $f(x_0;y_0)=2$, $z=f(x;y)$, $f'_{\vec{v}_1}(x_0;y_0) = 4/5$, $f'_{\vec{v}_2}(x_0;y_0) = 6/5$, $\vec{v}_1 = (4;3)$ y $\vec{v}_2 = (3;4)$.

Respuestas

Diferenciales

1) $dz\ (1;1) = 1{,}45$ 2) $dz\ (1;1) = -0{,}3$

3) $z \cong 0{,}9785$ 4) $dz = -\frac{y}{x^2+y^2}.dx + \frac{x}{x^2+y^2}.dy$ 5) $z \cong 33{,}376$ 6) 2,01

7) a) $d^2z = -56.dx^2 - 216.dx.dy - 58.dy^2$

b) $d^3z = 96y^2x.dx^3 + (24y^3 + 288yx^2).dx^2.dy + (72y^2x + 96x^3).dx.dy^2 + 24yx^2.dy^3$

8) a) sí, porque tiene derivadas parciales continuas, b) no, porque no es continua, c) no, no verifica la definición, d) es diferenciable.

11) $f(1{,}96;0{,}96) \cong 2{,}182$

Plano tangente

1) $z = 11x + 8y - 20,\ \frac{x-1}{11} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-15}{-1}$

2) $z = 5x + 2y - 4,\ \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-1}$

3) $z = 7x - 2y - 1,\ \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-1}$

4) $z = x + 8y - 8,\ x-1 = \frac{y-2}{8} = \frac{z-9}{-1}$

5) $z = 4x - 8y,\ \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z}{-1}$

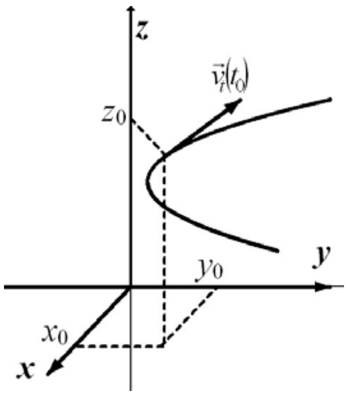
6) $z = 4x - 2y - 5,\ \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{-1}$

7) $dz = -1{,}4$ 8) $z = 1$ 9) $f(0{,}1;-1{,}02) \cong -2{,}24$

10) $f(x_0 + 0{,}1;\ y_0 - 0{,}2) \cong 1{,}63$

Capítulo 6

Funciones vectoriales



Algebra de funciones vectoriales.

Límite.

Derivadas.

Representación gráfica. Las curvas.

Recta tangente.

Plano normal.

Campo vectorial.

Matriz jacobiana.

Rotor de un campo vectorial.

Divergencia de un campo vectorial.

Campo vectorial armónico.

Ecuaciones paramétricas de una superficie.

FUNCIONES VECTORIALES

El concepto de función escalar visto en Análisis I y de campo escalar analizado en este texto, lo vamos a extender ahora al concepto de función y campo vectorial.

FUNCIÓN VECTORIAL

Una función vectorial es una función que transforma un número real o escalar en un vector o en un punto de $\mathbb{R}^n$.

$\vec{f} : A \subseteq \Re \to \Re^n \ / \ \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t);...; f_n(t)]$, donde las $f_i(t)$ son funciones escalares, es decir funciones que van de $A_i \to \Re$, con $A_i \subseteq \Re$ y $n \geq 2$.

Por lo tanto el estudio de una función vectorial se reduce al estudio de las funciones escalares componentes.

Si $n = 2$, la función vectorial asigna a un número real como imagen un vector de dos componentes o un par de números reales, es decir un punto de $\Re^2$, y si $n = 3$, la función vectorial asigna a un número real como imagen un vector de tres componentes o una terna de números reales, es decir un punto de $\Re^3$.

Ejemplos

a) $\vec{f} : A \to \Re^2 \ / \ \vec{f}(t) = (3t+1; t-2) = (3t+1)\breve{i} + (t-2)\breve{j}$

$\vec{f}(2) = (7;0)$, $\vec{f}(-1) = (-2;-3)$

b) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = (t+1; t+2; t^2) = (t+1)\breve{i} + (t+2)\breve{j} + t^2\breve{k}$

$\vec{f}(2) = (3;2;0)$, $\vec{f}(-1) = (0;1;1)$

c) $\vec{f} : A \to \Re^4 \ / \ \vec{f}(t) = (t-5; ln(t+2); t^2+1; 5t)$

$\vec{f}(2) = (-3; ln 4; 5; 10)$, $\vec{f}(-1) = (-6; 0; 2; -5)$

Dominio de una función vectorial

El dominio de una función vectorial es la intersección de los dominios de las funciones escalares componentes: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n$

Ejemplos

a) $\vec{f} : A \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(t) = \left(\dfrac{t}{t^2+2};5t\right)$. $Dom\ \vec{f} = \mathbb{R}$

b) $\vec{f} : A \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = (1-2t\,;3+t\,;-1+t)$. $Dom\ \vec{f} = \mathbb{R}$

c) $\vec{f} : A \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = \left(ln\,t;\sqrt{1-t}\,;t\right)$. $Dom\ \vec{f} = (0;1]$

d) $\vec{f} : A \to \Re^4 \,/\, \vec{f}(t) = \left(ln(t-1);t^3+2;\dfrac{5}{t-3};5\right)$. $Dom\ \vec{f} = (1;+\infty) - \{3\}$

Algebra de funciones vectoriales

Sean $\vec{f} : A \to \Re^n$ y $\vec{g} : B \to \Re^n$ dos funciones vectoriales, podemos definir las siguientes operaciones entre ellas.

Si $\vec{f} : A_1 \to \Re^n \,/\, \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t);\ldots; f_n(t)]$ y
$\vec{g} : A_2 \to \Re^n \,/\, \vec{g}(t) = [g_1(t); g_2(t);\ldots; g_n(t)]$

1) ***Suma algebraica***

$\vec{h}(t) = \left(\vec{f} \pm \vec{g}\right)(t) \Leftrightarrow \forall t : \vec{h}(t) = \vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)$.
$\vec{h} : A \to \Re^n \,/\, \vec{h}(t) = \left[f_1(t) \pm g_1(t); f_2(t) \pm g_2(t);\ldots; f_n(t) \pm g_n(t)\right]$

El dominio de $\vec{h}$ es $A = A_1 \cap A_2$.

2) ***Producto escalar***

$\vec{h}(t) = \left(\vec{f} \bullet \vec{g}\right)(t) \Leftrightarrow \forall t : \vec{h}(t) = \vec{f}(t) \bullet \vec{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t).g_i(t)$. El dominio de $\vec{h}$ es $A = A_1 \cap A_2$. Obsérvese que el producto escalar da por resultado un número real y no una función vectorial.

Ejemplos

a) Dadas $\vec{f} : A_1 \to \Re^2 / \vec{f}(t) = \left(t^2 + 5;5t - 2\right)$. $A_1 = \mathbb{R}$ y

$\vec{g} : A_2 \to \Re^2 / \vec{g}(t) = \left(t^3 + 5t - 2;t - 4\right)$. $A_2 = \mathbb{R}$

i) $\vec{h} : A \to \Re^2 / \vec{h}(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t) = \left(t^3 + t^2 + 5t + 3;6t - 6\right)$. $A = \mathbb{R}$

ii) $\vec{h} : A \to \Re^2 / \vec{h}(t) = \vec{f}(t) - \vec{g}(t) = \left(-t^3 + t^2 - 5t + 7;4t + 2\right)$. $A = \mathbb{R}$

iii)

$$\vec{h} : A \to \Re^2 / \vec{h}(t) = \vec{f}(t) \bullet \vec{g}(t) = \left(t^2 + 5\right).\left(t^3 + 5t - 2\right) + \left(5t - 2\right).\left(t - 4\right) =$$

$$= \left(t^5 + 10t^3 - 2t^2 + 25t - 10\right) + \left(5t^2 - 22t + 8\right) = t^5 + 10t^3 + 3t^2 + 3t - 2$$

$A = \mathbb{R}$

b) Dadas $\vec{f} : A_1 \to \Re^3 / \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t};4t - 2;\frac{3t}{t - 2}\right)$. $A_1 = \mathbb{R} - \{0;2\}$

$\vec{g} : A_2 \to \Re^3 / \vec{g}(t) = (t;2t;5)$. $A_2 = \mathbb{R}$

i) $\vec{h} : A \to \Re^3 / \vec{h}(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t) = \left(\frac{1 + t^2}{t};6t - 2;\frac{8t - 10}{t - 2}\right)$.

$A = \mathbb{R} - \{0;2\}$

ii) $\vec{h} : A \to \Re^3 / \vec{h}(t) = \vec{f}(t) - \vec{g}(t) = \left(\frac{1 - t^2}{t};2t - 2;\frac{10 - 2t}{t - 2}\right)$.

$A = \mathbb{R} - \{0;2\}$

iii) $\vec{h} : A \to \Re^3 / \vec{h}(t) = \vec{f}(t) \bullet \vec{g}(t) = \left(\frac{1}{t}\right).(t) + (4t - 2).2t + \frac{3t}{t - 2}.5 =$

$$= 1 + 8t^2 - 4t + \frac{15t}{t - 2}. \quad A = \mathbb{R} - \{0;2\}$$

3) *Producto entre una función vectorial y una función escalar*

Si f es una función escalar con domino A_1 y $\vec{g}$ una función vectorial con dominio A_2, entonces el producto entre ambas es una función vectorial $\vec{h}(t)$ tal que: $\vec{h}(t) = (f.\vec{g})(t) \Leftrightarrow \forall t : \vec{h}(t) = f(t).\vec{g}(t)$.

$\vec{h} : A \to \Re^n \,/\, \vec{h}(t) = [f(t).g_1(t); f(t).g_2(t);...; f(t).g_n(t)] \quad A = A_1 \cap A_2.$

Ejemplo

Dadas $f : A_1 \to \Re \,/\, f(t) = t^2$, $A_1 = \mathbb{R}$.

y $\vec{g} : A_2 \to \Re^3 \,/\, \vec{g}(t) = \left(t-1; 2t; \frac{5}{t}\right)$, $A_2 = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\vec{h} : A \to \Re^3 \,/\, \vec{h}(t) = f(t).\vec{g}(t) = (t^3 - t^2; 2t^3; 5t)$. $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

4) *Producto vectorial*

El producto vectorial se define para funciones con imágenes en $\mathbb{R}^3$, es decir que $\vec{f} : A_1 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t); f_3(t)]$ y

$\vec{g} : A_2 \to \Re^3 \,/\, \vec{g}(t) = [g_1(t); g_2(t); g_3(t)]$.

$\vec{h} : A \to \Re^3 \,/\, \vec{h}(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{g}(t) = (f_2.g_3 - f_3.g_2; f_3.g_1 - f_1.g_3; f_1.g_2 - f_2.g_1)$
$A = A_1 \cap A_2$.

También se puede expresar a través del siguiente determinante

$$\vec{f} \wedge \vec{g} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = (f_2.g_3 - f_3.g_2)\breve{i} + (f_3.g_1 - f_1.g_3)\breve{j} + (f_1.g_2 - f_2.g_1)\breve{k}$$

Ejemplo

Dadas $\vec{f} : A_1 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t}; 4t; 5t\right)$. $A_1 = \mathbb{R} - \{0\}$

$\vec{g} : A_2 \to \Re^3 \,/\, \vec{g}(t) = (t; 2t; 5)$. $A_2 = \mathbb{R}$

$$\vec{h}(t)=\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ \frac{1}{t} & 4t & 5t\\ t & 2t & 5\end{vmatrix}=(4t.5-5t.2t)\breve{i}+\left(5t.t-\frac{1}{t}.5\right)\breve{j}+\left(\frac{1}{t}.2t-4t.t\right)\breve{k}$$

$$=\left(20t-10t^2\right)\breve{i}+\left(5t^2-\frac{5}{t}\right)\breve{j}+\left(2-4t^2\right)\breve{k}$$

$A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Límite de una función vectorial

Si $\vec{f}:A\rightarrow\Re^n \,/\, \vec{f}(t)=[f_1(t); f_2(t);\ldots; f_n(t)]$, y t_0 es un punto de acumulación de su domino, entonces:

$\vec{l}=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=(l_1;l_2;l_3;\ldots;l_n)$, donde $l_i=\lim\limits_{t\to t_0}f_i(t)\quad(1\leq i\leq n)$

Las propiedades y la definición de límite para funciones vectoriales se reducen a las propiedades y definición de sus componentes, que son funciones escalares.

El límite $\vec{l}$ existe si existen los límites de cada una de las funciones escalares. El límite de una función vectorial como vemos es un vector.

Ejemplos

a) $\vec{f}:A\rightarrow\Re^2 \,/\, \vec{f}(t)=\left(t^2;t^3+5t-2\right)$, hallar $\lim\limits_{t\to 1}\vec{f}(t)$

$$\lim_{t\to 1}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to 1}\left(t^2\right);\lim_{t\to 1}\left(t^3+5t-2\right)\right)=(1;4)$$

b) $\vec{f}:A\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(t^2-2;\cos t;t^2\right)$, hallar $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)$

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to 0}\left(t^2-2\right);\lim_{t\to 0}\cos t;\lim_{t\to 0}t^2\right)=(-2;1;0)$$

c) $\vec{f}: A \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = \left(\dfrac{t^2-1}{t-1}; \dfrac{ln\ t}{sen(t-1)}; 2t \right)$, hallar $\lim\limits_{t\to 1} \bar{f}(t)$

$$\lim_{t\to 1} \bar{f}(t) = \left(\lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t-1}; \lim_{t\to 1} \frac{ln\ t}{sen(t-1)}; \lim_{t\to 1}(2t) \right)$$

$$= \left(\lim_{t\to 1} (t+1); \lim_{t\to 1} \frac{1/t}{cos(t-1)}; \lim_{t\to 1}(2t) \right) = (2;1;2)$$

Continuidad de una función vectorial

$\vec{f}: A \to \Re^n \,/\, \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t); ...; f_n(t)]$, es continua en $t_0 \in A$ si $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$. Una función es continua en $t_0 \in A$ si lo son todas las funciones $f_i(t)$ en t_0.

Ejemplos

a) $\vec{f}: A \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(t) = \left(2t+1; \dfrac{cos\,t}{t^2+1} \right)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{f}: A \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = \left(t^2-2; cos\,t; t^2 \right)$, es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\vec{f}: A \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = \left(\dfrac{t^2-1}{t-1}; \dfrac{3\,t}{t^2-4}; 2t \right)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{1;2;-2\}$.

d) $\vec{f}: A \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = \begin{cases} \left(t; t^2; \dfrac{sen\,t}{t} \right) & t \neq 0 \\ (0;0;0) & t = 0 \end{cases}$

En $t_0 = 0$, vemos que el $\lim\limits_{t\to 0} \vec{f}(t) = (0;0;1)$, y que $\vec{f}(0) = (0;0;0)$, por lo tanto la función no es continua en $t_0 = 0$.

Derivada de una función vectorial

Dada una función $\vec{f} : A \rightarrow \Re^n \,/\, \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t); ...; f_n(t)]$, la derivada en $t_0 \in A$, se expresa como $\vec{f}'(t_0)$, se denomina *gradiente* o *vector derivado* y se define como el límite:

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$, si este límite existe.

Si aplicamos la definición de derivada a cada una de las funciones escalares, tenemos que: $\vec{f}'(t) = [\vec{f}_1'(t); \vec{f}_2'(t); ...; \vec{f}_n'(t)]$

Ejemplos

a) $\vec{f} : A \rightarrow \Re^2 \,/\, \vec{f}(t) = [t^2 + 1; cos(2t)]$

$$\vec{f}'(t) = [2t; -2sen(2t)]$$

b) $\vec{f} : A \rightarrow \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = [ln\ t; tg(5t); \sqrt{2t}]$

$$\vec{f}'(t) = \left(\frac{1}{t}; 5\,sec^2(5t); \frac{1}{\sqrt{2t}}\right)$$

Punto ordinario o regular

Se dice que un punto de la curva correspondiente a un valor t_0 interior al conjunto A es un *punto ordinario* si las derivadas de las funciones escalares existen, son continuas en ese punto y al menos una es distinta de 0.

Algebra de derivadas

Las reglas de derivación de funciones escalares se extienden a las derivadas de funciones vectoriales. Así:

a) $[\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)]' = \vec{f}'(t) \pm \vec{g}'(t)$ y $t \in Dom\,\vec{f} \cap Dom\,\vec{g}$

b) $\left[k.\vec{f}(t)\right]' = k.\vec{f}'(t)$

c) $[f(t).\vec{g}(t)]' = f'(t).\vec{g}(t) + f(t).\vec{g}'(t)$. $f(t)$ es una función escalar.
y $t \in Dom\, f \cap Dom\, \vec{g}$

Demostración

Lo demostramos para el caso de tres variables.

Sea $f(t)$ y $\vec{g}(t) = [x(t); y(t); z(t)]$

$$f(t).\vec{g}(t) = f(t)[x(t); y(t); z(t)] = [f(t).x(t); f(t).y(t); f(t).z(t)]$$

$$[f(t).\vec{g}(t)]' = [f(t).x(t); f(t).y(t); f(t).z(t)]' =$$
$$= \left[f'(t).x(t) + f(t).x'(t); f'(t).y(t) + f(t).y'(t); f'(t).z(t) + f(t).z'(t)\right] =$$
$$= f'(t).[x(t); y(t); z(t)] + f(t).\left[x'(t); y'(t); z'(t)\right] = f'(t).\vec{g}(t) + f(t).\vec{g}'(t)$$

d) $\left[\vec{f}(t).\vec{g}(t)\right]' = \vec{f}'(t).\vec{g}(t) + \vec{f}(t).\vec{g}'(t)$

Demostración

Lo demostramos para el caso de tres variables.

Sea $\vec{f}(t) = [x_1(t); y_1(t); z_1(t)]$ y $\vec{g}(t) = [x_2(t); y_2(t); z_2(t)]$

$$\vec{f}(t) \bullet \vec{g}(t) = x_1(t).x_2(t) + y_1(t).y_2(t) + z_1(t).z_2(t)$$
$$\left[\vec{f}(t) \bullet \vec{g}(t)\right]' = [x_1(t).x_2(t) + y_1(t).y_2(t) + z_1(t).z_2(t)]' =$$
$$= x_1'(t).x_2(t) + x_1(t).x_2'(t) + y_1'(t).y_2(t) + y_1(t).y_2'(t) + z_1'(t).z_2(t) + z_1(t).z_2'(t) =$$
$$= \left[x_1'(t); y_1'(t); z_1'(t)\right][x_2(t); y_2(t); z_2(t)] + [x_1(t); y_1(t); z_1(t)].\left[x_2'(t); y_2'(t); z_2'(t)\right] =$$
$$= \vec{f}'(t) \bullet \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \bullet \vec{g}'(t)$$

Corolario: Si $\vec{f}(t)$ es un vector de módulo constante, entonces es perpendicular a su vector derivado.

Demostración: si $\left|\vec{f}(t)\right|$ es constante, calculamos el producto escalar

$$\vec{f}(t)\bullet\vec{f}(t)=\left|\vec{f}(t)\right|.\left|\vec{f}(t)\right|.cos\,0=\left|\vec{f}(t)\right|^2=k$$

Derivando a ambos miembros queda: $\left[\vec{f}(t)\bullet\vec{f}(t)\right]'=k'$

$$\left[\vec{f}(t)\right]'\bullet\vec{f}(t)+\vec{f}(t)\bullet\left[\vec{f}(t)\right]'=0\ \Rightarrow\ 2.\left[\vec{f}(t)\right]'\bullet\vec{f}(t)=0$$

Como $\left[\vec{f}(t)\right]'\bullet\vec{f}(t)=0$, ambos vectores, el vector $\vec{f}(t)$ y su vector derivado, son perpendiculares.

e) $\left[\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)\right]'=\vec{f}'(t)\wedge\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\wedge\vec{g}'(t)$

Demostración

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)\right]'=\left(f_2.g_3-f_3.g_2;\,f_3.g_1-f_1.g_3;\,f_1.g_2-f_2.g_1\right)'=\\
&=\left[\left(f_2.g_3-f_3.g_2\right)';\left(f_3.g_1-f_1.g_3\right)';\left(f_1.g_2-f_2.g_1\right)'\right]=\\
&=\left[\left(f_2'.g_3+f_2.g_3'-f_3'.g_2-f_3.g_2'\right);\left(f_3'.g_1+f_3.g_1'-f_1'.g_3-f_1.g_3'\right);\right.\\
&\quad\left.\left(f_1'.g_2+f_1.g_2'-f_2'.g_1-f_2.g_1'\right)\right]=\\
&=\left[\left(f_2'.g_3-f_3'.g_2\right);\left(f_3'.g_1-f_1'.g_3\right);\left(f_1'.g_2-f_2'.g_1\right)\right]+\\
&\quad\left[\left(f_2.g_3'-f_3.g_2'\right);\left(f_3.g_1'-f_1.g_3'\right);\left(f_1'.g_2-f_2.g_1'\right)\right]\\
&=\vec{f}'(t)\wedge\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\wedge\vec{g}'(t)
\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular: a) $\left[\vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\right]'$, b) $\left[\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)\right]'$ si $\vec{f}(t)=\left(e^t;2t;-3\right)$ y

$$\vec{g}(t)=\left(ln\,t;e^{-t};\frac{1}{t}\right)$$

$$\vec{f}'(t)=\left(e^t;2;0\right),\ \vec{g}'(t)=\left(\frac{1}{t};-e^{-t};-\frac{1}{t^2}\right)$$

a) $\left[\vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\right]'=\left(e^t;2;0\right)\bullet\left(ln\,t;e^{-t};\frac{1}{t}\right)+\left(e^t;2t;-3\right)\bullet\left(\frac{1}{t};-e^{-t};-\frac{1}{t^2}\right)=$

$$=e^t.ln\,t+2e^{-t}+\frac{e^t}{t}-2te^{-t}+\frac{3}{t^2}$$

b) $\vec{f}'(t)\wedge\vec{g}(t)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ e^t & 2 & 0\\ ln\,t & e^{-t} & \frac{1}{t}\end{vmatrix}=\frac{2}{t}\breve{i}-\frac{e^t}{t}\breve{j}+\left(1-2\,ln\,t\right).\breve{k}$

$$\vec{f}(t)\wedge\vec{g}'(t)=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ e^t & 2t & -3\\ \frac{1}{t} & -e^{-t} & -\frac{1}{t^2}\end{vmatrix}=\left(-\frac{2}{t}-3e^{-t}\right)\breve{i}+\left(-\frac{3}{t}+\frac{e^t}{t^2}\right)\breve{j}-3\breve{k}$$

$$\left[\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)\right]'=\left(-3e^{-t}\right)\breve{i}+\left(\frac{e^t-te^{-t}-3t}{t^2}\right)\breve{j}-\left(2+2\,ln\,t\right).\breve{k}$$

Función vectorial diferenciable

Una función $\vec{f}:A\to\Re^n\ /\ \vec{f}(t)=\left[f_1(t);f_2(t);f_3(t);...;f_n(t)\right]$ es diferenciable en $t_0\in A$ si es derivable en t_0.

Derivadas de orden *n*

Las derivadas de orden *n* de una función vectorial se obtienen calculando las derivadas *n*-ésimas de cada una de las funciones escalares.

Si $\vec{f}: A \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(t) = \left[t^2 + 1; cos(2t)\right]$, $\quad \vec{f}'(t) = [2t; -2sen(2t)]$

$\vec{f}''(t) = [2; -4\,cos(2t)]$, $\vec{f}'''(t) = [0; -8sen(2t)]$, y así sucesivamente.

Integral de una función vectorial

$\vec{f}: A \to \Re^n \,/\, \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t); \ldots; f_n(t)]$ es integrable si lo son $f_1(t), f_2(t),$ $\ldots, f_n(t)$, y su integral se calcula de la siguiente manera:

$$\int_a^b \vec{f}(t).dt = \left(\int_a^b f_1(t).dt; \int_a^b f_2(t).dt; \ldots; \int_a^b f_n(t).dt \right)$$

Rigen para las funciones vectoriales las mismas propiedades de las integrales de funciones escalares.

Ejemplos

a) $\vec{f}: A \to \Re^n \,/\, \vec{f}(t) = \left(t^3; ln\,t; \dfrac{1}{t} \right)$

$$\int_1^3 \vec{f}(t).dt = \left[\int_1^3 t^3.dt; \int_1^3 ln\,t.dt; \int_1^3 \frac{1}{t}.dt \right] = \left[\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^3; (t.ln\,t - t)\Big]_1^3; -ln\,t\Big]_1^3 \right] =$$

$$= (20; 3\,ln\,3 - 2; -ln\,3)$$

a) $\vec{f}(t) = \left(e^t; 2t; -3\right)$

$$\int_0^1 \vec{f}(t).dt = \left(\int_0^1 e^t.dt; \int_0^1 2t.dt; \ldots; \int_0^1 (-3).dt \right) = \left(e^t\Big]_0^1; t^2\Big]_0^1; -3t\Big]_0^1 \right)$$

$$= (e - 1; 1; -3)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Dadas las siguientes funciones vectoriales, resolver las operaciones indicadas.

$$\vec{f} : A \to \Re^4 \ / \ \vec{f}(t) = \left(t^2 + 1; 2t; \frac{1}{t-1}; 3t + 2 \right), \quad f : A \to \Re \ / \ f(t) = 2t$$

$$\vec{g} : A \to \Re^4 \ / \ \vec{g}(t) = \left(-t^2 + 2; t + 1; t - 1; 2t - 2 \right)$$

a) $\left(\vec{f} + \vec{g}\right)(t)$ b) $\left(\vec{f} - \vec{g}\right)(t)$ c) $\left(\vec{f} \bullet \vec{g}\right)(t)$ d) $\left(f.\vec{f}\right)(t)$

2) Dadas las siguientes funciones vectoriales, calcular los límites en los puntos indicados.

a) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = \left(\frac{sen\,t}{t}; t.ln\,t; 5t - 2 \right)$, hallar $\lim\limits_{t \to 0} \bar{f}(t)$

b) $\vec{f} : A \to \Re^2 \ / \ \vec{f}(t) = \left(\frac{t^3 - 3t + 2}{t-1}; \frac{1 - cos(t-1)}{t-1} \right)$, hallar $\lim\limits_{t \to 1} \bar{f}(t)$

3) Analizar intervalos de continuidad de

a) $\vec{f} : A \to \Re^2 \ / \ \vec{f}(t) = \left(\sqrt{2t}; \sqrt{t-1} \right)$

b) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = \left(t + 2; arc\,sen\,t; 2t - 5 \right)$

c) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = \left(8; \sqrt{t}; \sqrt[3]{t} \right)$

4) Dadas las siguientes funciones vectoriales, hallar sus respectivos gradientes.

a) $\vec{f} : A \to \Re^2 \ / \ \vec{f}(t) = \left(e^{3t}; \sqrt{t-1} \right)$

b) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = \left(t^3 + 2t; arc\,cos\,t^3; ln\,t^2 \right)$

c) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = \left(-8t; \sqrt{t}; tg^3(2t) \right)$

d) $\vec{f} : A \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(t) = \left(t^3 - cos(2t); e^{3t}; t^2 - ln\,t \right)$

5) Calcular $\vec{f}(t)\bullet\left(\vec{f}'(t)\wedge\vec{f}''(t)\right)$ si $\vec{f}(t)=\left(5t;t^2;-cos(3t)\right)$

6) Calcular: a) $\left(\vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\right)'$, b) $\left(\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)\right)'$

si $\vec{f}(t)=\left(t^2;-3t;\dfrac{1}{t}\right)$ y $\vec{g}(t)=\left(t;-3t^2;t^2\right)$

Respuestas

1) a) $\left(\vec{f}+\vec{g}\right)(t)=\left(3;3t+1;\dfrac{t^2-2t+2}{t-1};5t\right)$

b) $\left(\vec{f}-\vec{g}\right)(t)=\left(2t^2-1;t-1;\dfrac{-t^2+2t}{t-1};t+4\right)$

c) $\left(\vec{f}\bullet\vec{g}\right)(t)=-t^4+10t^2-1$

d) $\left(f.\vec{f}\right)(t)=\left(2t^3+2t;4t^2;\dfrac{2t}{t-1};6t^2+4t\right)$

2) a) $(1;0;-2)$, b) $(6;0)$

3) a) $[1,+\infty)$, b) $[-1,1]$, c) $[0,+\infty)$

4) a) $\nabla\vec{f}=\vec{f}'(t)=\left(3e^{3t};\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}\right)$, b) $\nabla\vec{f}=\vec{f}'(t)=\left(3t^2+2;-\dfrac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}};\dfrac{2}{t}\right)$

c) $\nabla\vec{f}=\vec{f}'(t)=\left(-8;\dfrac{1}{2\sqrt{t}};6tg^2(2t).sec^2(2t)\right)$

d) $\nabla\vec{f}=\vec{f}'(t)=\left(3t^2+2sen(2t);3e^{3t};2t-\dfrac{1}{t}\right)$

5) $\vec{f}(t)\bullet\left(\vec{f}'(t)\wedge\vec{f}''(t)\right)=\left(45t^2-10\right).cos(3t)-30t.sen(3t)$

6) a) $\left[\vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\right]'=30t^2+1$ b) $\left[\vec{f}(t)\wedge\vec{g}(t)\right]'=\left(3-9t^2;-4t^3;6t-12t^3\right)$

REPRESTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES VECTORIALES
LAS CURVAS PUNTUALES – LAS TRAYECTORIAS

Si $\vec{f}:[a;b]\to\Re^n$, con $n > 1$, es una función vectorial continua definida en el intervalo real cerrado $[a;b]$ denominado intervalo paramétrico, se denomina *curva* C a su imagen. Ésta une, en el espacio n-dimensional, los puntos $\vec{f}(a)$ y $\vec{f}(b)$. Estas curvas se denominan *curvas puntuales*.

Curva plana: si $n = 2$, tenemos una curva plana incluida en el plano $\mathbb{R}^2$.

El conjunto de puntos $(x;y)=[x(t);y(t)]$ del plano definen la gráfica de la curva.

Curva alabeada: si $n = 3$, tenemos una curva alabeada incluida en el espacio $\mathbb{R}^3$.

El conjunto de puntos $(x;y;z)=[x(t);y(t);z(t)]$ del espacio definen la gráfica de la curva.

Curva suave o regular: si la curva está asociada a una función vectorial con derivada continua y no nula en el intervalo. Es decir que el arco de curva está compuesto solamente de puntos ordinarios.

Curva suave o regular por tramos: si es continua, con derivada continua y no nula con excepción de un número finito de puntos, que definen arcos en los cuales la curva es suave.

Interesan en particular las *curvas planas* y las *curvas alabeadas*.

Ejemplos

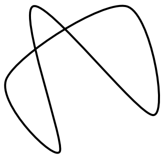
a) Si $\vec{f}:[1;4]\to\Re^2\ /\ \vec{f}(t)=(t;1+t)$, tenemos una curva en el plano $\mathbb{R}^2$ que une los puntos (1;2) con (4;5).

b) Si $\vec{f}:[1;4]\to\Re^3\ /\ \vec{f}(t)=\left(t^2;1+t;2t\right)$, tenemos una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$ que une los puntos (1;2;2) con (16;5;8).

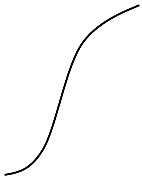
Clasificación

Si $\vec{f}:[a;b]\to\Re^n$ es una función vectorial continua y C es la curva asociada, ésta es:

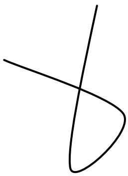
1) *cerrada* $\Leftrightarrow$ $\vec{f}(a)=\vec{f}(b)$.
2) un *arco* $\Leftrightarrow$ $\vec{f}(a)\neq\vec{f}(b)$. $\vec{f}(a)$ y $\vec{f}(b)$ son los extremos del arco.
3) *simple* $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ es inyectiva en $(a;b)$.
4) una *curva de Jordan* $\Leftrightarrow$ C es *cerrada* y *simple*. (cerrada y no se corta a sí misma).



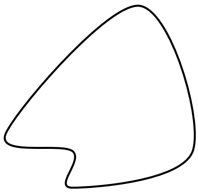
curva cerrada



simple



arco



curva de Jordan

Curvas en forma paramétrica

Se conoce como *parametrización* a la representación de una curva o superficie como imagen de una función vectorial.

Las curvas que son imagen de una función vectorial, quedan definidas en función de la variable o parámetro t, por eso se dice que están definidas en *forma paramétrica*.

Curvas planas o curvas en $\Re^2$

La función vectorial $\vec{f}:[a;b]\to\Re^2 \,/\, \vec{f}(t)=[x(t);y(t)]$ en su forma paramétrica es $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas definidas en un intervalo paramétrico [a;b]. $a\le t\le b$.

A cada valor de t le corresponde una par (x;y) que define un punto del plano. Este conjunto de pares (x;y) define una curva C en $\Re^2$ que es la imagen de la función vectorial.

$$\vec{f}(t_0)=(x_0;y_0)=\mathrm{P}_0\,,\ \vec{f}(t_1)=(x_1;y_1)=\mathrm{P}_1\,,\ \ldots,\ \vec{f}(t_n)=(x_n;y_n)=\mathrm{P}_n$$

Eliminando t en las ecuaciones paramétricas obtenemos una ecuación en x e y, que es la ecuación cartesiana de la curva.

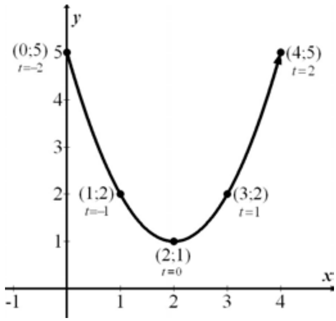
Ejemplos

a) $\bar{f}:[-2;2]\to\Re^2 \,/\, \bar{f}(t)=(t+2;t^2+1)$

en su forma paramétrica es $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t^2+1 \end{cases}$

Para representarla gráficamente efectuamos una tabla de valores dando a t valores en el intervalo paramétrico.

Observamos el sentido en que se va generando la curva a medida que t toma valores crecientes dentro del intervalo paramétrico. En este caso vemos que lo hace en sentido positivo o *antihorario.*



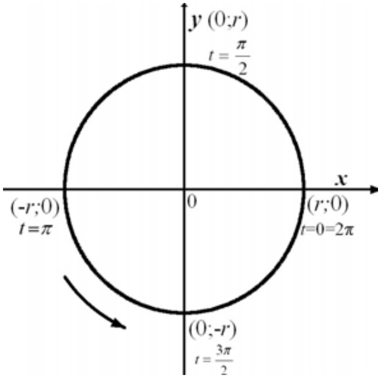
t	x	y
-2	0	5
-1	1	2
0	2	1
1	3	2
2	4	5

Si despejamos t de la primera ecuación y reemplazamos en la segunda, tenemos que $y=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$, que es la ecuación cartesiana de una parábola.

b) ecuación paramétrica de la circunferencia

$\bar{f}:[0;2\pi]\to\Re^2\,/\,\bar{f}(t)=(r.cos\,t;r.sen\,t)$

en su forma paramétrica es $\begin{cases} x=r.cos\,t \\ y=r.sen\,t \end{cases}$



t	x	y
0	r	0
π/2	0	r
π	- r	0
3π/2	0	- r
2π	r	0

Si elevamos al cuadrado ambas ecuaciones y sumamos, tenemos: $x^2+y^2=r^2$, que es la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro en el origen y radio r. La curva es recorrida en sentido positivo o antihorario.

En este caso tenemos una curva plana de Jordan.

Las trayectorias

Se denomina trayectoria a toda función vectorial continua de la forma $\vec{f}:[a;b]\to\Re^n$, con $n>1$.

Si $n = 2$, la trayectoria está en $\Re^2$ y si $n = 3$, está en $\Re^3$.

Dos o más funciones pueden tener el mismo conjunto imagen, es decir la misma *curva*, pero sus *trayectorias* pueden ser diferentes.

La misma curva se puede generar en distintos sentidos y/o velocidades.

Ejemplo

Consideremos las funciones $\bar{f}_1 : [0;2\pi] \rightarrow \Re^2 \,/\, \bar{f}_1(t) = (2.\cos t; 2.\operatorname{sen} t)$ y $\bar{f}_2 : [0;2\pi] \rightarrow \Re^2 \,/\, \bar{f}(t) = (2.\cos t; -2.\operatorname{sen} t)$. Tienen como imagen la misma curva que es la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 2, pero en el primer caso la curva es recorrida en sentido positivo o antihorario y en el segundo caso es recorrida en sentido horario o negativo.

Dos funciones vectoriales a las cuales les corresponde la misma curva pero distinta trayectoria se denominan *equivalentes*.

Si las trayectorias son opuestas son *opuestamente equivalentes*.

Ejemplo

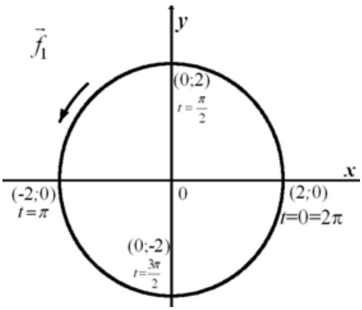
Veamos las tablas de valores correspondientes a $\vec{f}_1$ y a $\vec{f}_2$

$\vec{f}_1$

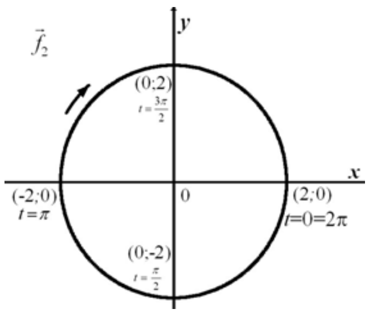
t	*x*	*y*
0	2	0
π/2	0	2
π	-2	0
3π/2	0	-2
2π	2	0

$\vec{f}_2$

t	*x*	*y*
0	2	0
π/2	0	-2
π	-2	0
3π/2	0	2
2π	2	0



Sentido negativo u horario



Sentido positivo o antihorario

Curvas alabeadas o curvas en $\Re^3$

La función vectorial $\vec{f}:[a;b]\to\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=[x(t);y(t);z(t)]$ en su forma paramétrica es $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$, donde $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son funciones continuas definidas en un intervalo $[a;b]$. $a\le t\le b$.

Las ecuaciones anteriores se denominan *ecuaciones paramétricas* de la curva C.

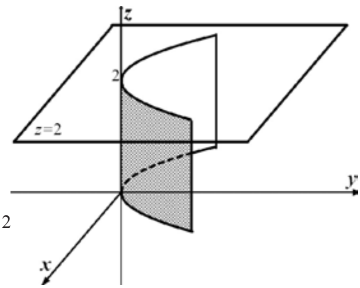
A cada valor de t le corresponde una terna $(x;y;z)$ que define un punto del espacio. Este conjunto de ternas $(x;y;z)$, por haber una sola variable independiente (t), define una curva C en $\Re^3$ que es la imagen de la función vectorial.

$$\vec{f}(t_0)=(x_0;y_0;z_0)=\mathrm{P}_0\,,\ \vec{f}(t_1)=(x_1;y_1;z_1)=\mathrm{P}_1\,,\ \ldots,\ \vec{f}(t_n)=(x_n;y_n;z_n)=\mathrm{P}_\mathrm{n}$$

Eliminando t en las ecuaciones paramétricas obtenemos dos ecuaciones en x, y, z. Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones cartesianas* de C. Cada ecuación cartesiana es la ecuación de una superficie y la curva C es la intersección de ambas superficies. Las ecuaciones de cualesquiera dos superficies que contienen a C pueden tomarse como las ecuaciones cartesianas que definen a C.

Ejemplos

a) $\vec{f}:[-1;2]\to\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=(t;t^2;2)$ $\begin{cases} x=t\\ y=t^2\\ z=2\end{cases}$



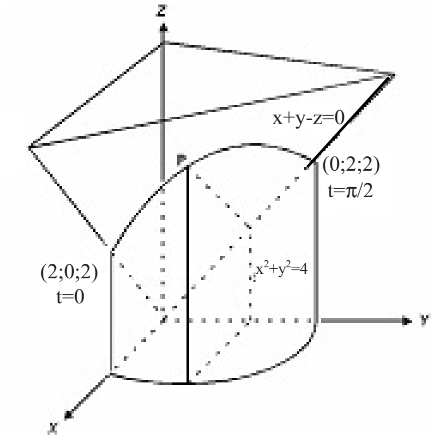
Si eliminamos el parámetro t queda: $\begin{cases} y=x^2\\ z=2\end{cases}$

La curva alabeada es la intersección del plano $z = 2$ con el superficie $y = x^2$.

b) $\vec{f}:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\Re^3\ /\ \vec{f}(t)=\left[2\cos t;2\operatorname{sen} t;2(\cos t+\operatorname{sen} t)\right]$

t	x	y	z
0	2	0	2
π/4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
π/2	0	2	2

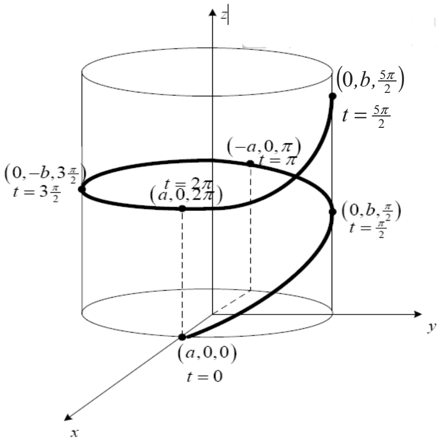
$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t \\ z=2(\cos t+\operatorname{sen} t) \end{cases}$$



La curva es la intersección de las superficies: $x^2+y^2=4$ y $z=x+y$.

c) $\vec{f}:\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]\to\Re^3\ /\ \vec{f}(t)=(a\cos t;b\operatorname{sen} t;t)$

t	x	y	z
0	a	0	0
π/2	0	b	π/2
π	-a	0	π
3π/2	0	-b	3π/2
2π	a	0	2π
5π/2	0	b	5π/2

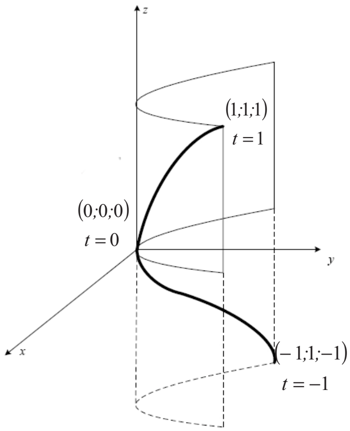


La curva que se genera en este caso se denomina *hélice* y lo hace dentro del cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Esta curva es una curva alabeada y es un arco.

La curva es la intersección de las superficies: $x=a\cos z$ y $y=b\operatorname{sen} z$.

d) $\vec{f}:[-1;1]\rightarrow \Re^3 \;/\; \vec{f}(t)=\left(t;t^2;t^3\right)$

t	x	y	z
-1	-1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1



La curva es la intersección de las superficies: $y=x^2$ y $z=x^3$.

Vemos que es una curva alabeada simple y es un arco.

Vector derivado – vector tangente

Ya hemos definido como *vector derivado* al que se obtiene de derivar una función vectorial. El vector derivado es tangente a la curva en $t = t_0$ o en P_0.

En $\Re^2$: $\vec{f}:[a;b]\rightarrow \Re^2 \;/\; \vec{f}(t)=[x(t);\,y(t)]$, en $t = t_0$, $P_0 = (x_0;y_0)$.

$$\vec{v}_t(P_0)=\vec{f}\,'(t_0)=\left[x'(t_0);\,y'(t_0)\right]$$

Ejemplos

a) $\vec{f}(t)=\left(t^2+2;-t^2+t\right)$, en $t_0=2$. $P_0=\vec{f}(2)=(6;-2)$

$\vec{f}\,'(t)=(2t;-2t+1) \Rightarrow \vec{v}_t(P_0)=\vec{f}\,'(2)=(4;-3)$

b) $\vec{f}(t)=\left(\sqrt{4t};\dfrac{2}{t}+2t\right)$, en $P_0 = (2; 4)$. Si $P_0 = (2; 4)$, $t_0 = 1$

$$\vec{f}\,'(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{4t}};-\frac{2}{t^2}+2\right) \Rightarrow \vec{v}_t(P_0)=\vec{f}\,'(1)=(1;0)$$

En $\Re^3$:

$\vec{f}:[a;b] \rightarrow \Re^3 \ / \ \vec{f}(t)=[x(t);y(t);z(t)]$, en $t = t_0$, $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$.
$\vec{v}_t(P_0)=\vec{f}'(t_0)=[x'(t_0);y'(t_0);z'(t_0)]$

Ejemplo

$\vec{f}(t)=(t^2+2;-t^2;2t)$, en $t_0=1$. $P_0=\vec{f}(1)=(3;-1;2)$
$\vec{f}'(t)=(2t;-2t+2) \Rightarrow \vec{v}_t(P_0)=\vec{f}'(1)=(2;-2;2)$

Punto singular

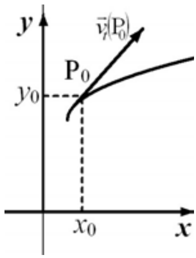
Es aquel en el cual el punto no admite vector tangente o éste es nulo.

Otra definición de curva suave

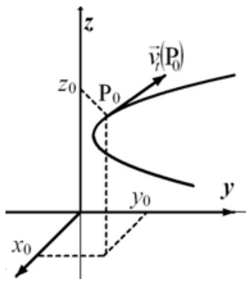
Una curva C asociada a una trayectoria es *suave* si $\forall t \in Dom\ \vec{f}$, $\vec{v}_t(t) \neq \vec{0}$.

Representación gráfica

En $\Re^2$:

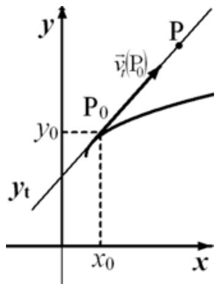


En $\Re^3$:



Rectas tangente y normal a una curva plana

Dada una curva asociada a una función vectorial $\vec{f}(t)$ derivable en $\vec{f}(t_0)=P_0$, con $\vec{v}_t(P_0)\neq\vec{0}$, se denomina recta tangente en P_0 a la recta que pasa por P_0 y es paralela a $\vec{v}_t(P_0)$.



Si consideramos un punto cualquiera de la recta P = $(x;y)$, el vector $\overrightarrow{P_oP}$ es paralelo a $\vec{v}_t(P_0)$, por lo tanto $\overrightarrow{P_oP} = \lambda.\vec{v}_t(P_o)$, $\lambda \in \Re$.

Desarrollando esta igualdad queda: $(x - x_0; y - y_0) = \lambda.[x_t'(t_0); y_t'(t_0)]$.
Esta igualdad se puede expresar como

$$(x; y) = (x_0; y_0) + \lambda.[x_t'(t_0); y_t'(t_0)] \quad \textit{ecuación vectorial}$$

Igualando las componentes obtenemos: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda.x_t'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda.y_t'(t_0) \end{cases}$

que son las *ecuaciones cartesianas paramétricas*.

Si eliminamos el parámetro λ, tenemos la *ecuación simétrica*.

$$r_t: \quad \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y_t - y_0}{y'(t_0)} \quad \Rightarrow \quad y_t = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0) + y_0 \qquad x'(t_0) \neq 0$$

Para cada valor de λ se obtiene un punto de la recta.

Recta normal: $y_n = -\dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}(x - x_0) + y_0 \qquad y'(t_0) \neq 0$

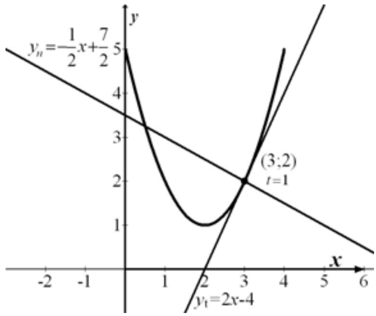
Ejemplo: consideramos la función $\bar{f} : [-2;2] \to \Re^2 \ / \ \bar{f}(t) = (t + 2; t^2 + 1)$, cuya gráfica ya analizamos en la página 162 y calculamos las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en $\vec{f}(1)$. $\vec{f}(1) = (3;2) =$ P$_0$.
$\vec{f}'(t) = \vec{v}_t(t) = (1;2t) \Rightarrow \vec{v}_t(1) = (1;2)$

ecuación vectorial: $(x; y_t) = (3;2) + \lambda.(1;2)$

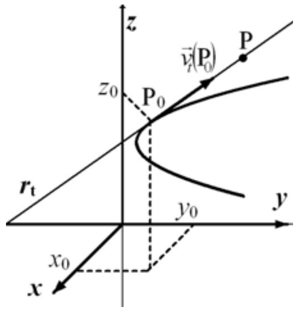
$$x - 3 = \frac{y_t - 2}{2} \Rightarrow y_t = 2x - 4$$

$$y_n = -\frac{1}{2}(x - 3) + 2 \Rightarrow y_n = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Verificamos gráficamente.



Recta tangente a una curva alabeada



Haciendo un razonamiento similar al hecho para el caso de una curva plana, obtenemos las distintas ecuaciones de la recta tangente a una curva alabeada.

Consideramos un punto cualquiera de la recta P = $(x;y;z)$, el vector $\overrightarrow{P_oP}$ es paralelo a $\vec{v}_t(P_0)$, por lo tanto $\overrightarrow{P_oP} = \lambda.\vec{v}_t(P_o)$, $\lambda \in \Re$.

Desarrollando esta igualdad queda:

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = \lambda.\left[x_t'(t_0); y_t'(t_0); z_t'(t_0)\right]$$

Esta igualdad se puede expresar como

$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda.\left[x_t'(t_0); y_t'(t_0); z_t'(t_0)\right]$ *ecuación vectorial*

Igualando las componentes obtenemos: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda.x_t'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda.y_t'(t_0) \\ z = z_0 + \lambda.z_t'(t_0) \end{cases}$

que son las *ecuaciones cartesianas paramétricas*.

Si eliminamos el parámetro λ, tenemos las *ecuaciones simétricas*.

$$r_t\,(P_0): \qquad \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

Ejemplo: $\vec{f}(t) = \left(2t^3; 2t; -t^3\right)$, para $t_0 = 1$, $\vec{f}(1) = (2;2;-1) = P_0$

$\vec{f}'(t) = \vec{v}_t(t) = \left(6t^2; 2; -3t^2\right) \Rightarrow \vec{v}_t(1) = (6;2;-3)$

ecuación vectorial: $(x; y; z) = (2;2;-1) + \lambda.(6;2;-3)$

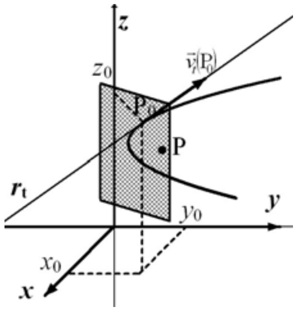
Para cada valor de λ se obtiene un punto de la recta.

ecuaciones simétricas: r_t (P_0): $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$

Interpretación física: si la función $\vec{f}(t)$ se asocia con el movimiento de una partícula sobre la curva *C* donde *t* es el tiempo, el vector derivado $\vec{f}'(t)$ indica la velocidad de la partícula en cada instante *t*.

Plano normal a una curva alabeada

La recta perpendicular a la recta tangente es la recta normal. En el espacio hay infinitas rectas normales que determinan un *plano normal* a la curva $\vec{f}(t)$ en $\vec{f}(t_0)=P_0$ y es perpendicular a la recta tangente que pasa por P_0. Lo designamos como π_n.



Ecuación

Si consideramos un punto genérico P = (*x*;*y*;*z*) del plano π_n, tenemos que los vectores $\overrightarrow{P_0P}$ y $\vec{v}_t(P_0)$ son perpendiculares.

$$\vec{v}_t(P_0)\bullet(x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0)=0$$

Por lo tanto

$$[x'(t_0);\,y'(t_0);\,z'(t_0)]\bullet(x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0)=0$$

Desarrollando el producto escalar tenemos la ecuación cartesiana del plano π_n.

Ejemplo

Sea $\vec{f}(t)=\left(2t^3+1;\,t^2+t;\,-t^2\right)$, hallar la ecuación de la recta tangente y del plano normal en el punto P_0 = (3;2; –1).

Si $P_0 = (3;2;-1)$, $t_0 = 1$, $\vec{f}'(t) = (6t^2;2t+1;-2t) \Rightarrow \vec{v}_t(P_0) = (6;3;-2)$

ecuaciones simétricas de la recta tangente: r_t (P_0): $\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

π_n (P_0): $(6;3;-2)\bullet(x-3;y-2;z+1) = 0 \Rightarrow 6(x-3)+3(y-2)-2(z+1) = 0$

π_n (P_0): $6x+3y-2z-26 = 0$

Problema clásico del escape de la tangente

El tema consiste en determinar la posición de una partícula cuando abandona una trayectoria en dirección de la recta tangente.

Ejemplo

Una partícula se mueve sobre la curva $\vec{f}(t) = (t;t^2;t^3)$ donde t representa el tiempo. Al cabo de 5 segundos se encuentra en $\vec{f}(5) = (5;25;125)$. En ese momento la partícula continúa siguiendo la trayectoria de la recta tangente.

a) ¿Dónde se encontrará la partícula cuando $t = 9$?

b) ¿Cuál sería la posición cuando $t = 9$ si se hubiese mantenido sobre la trayectoria?

a) buscamos la recta tangente en $t = 5$, cuando abandona la trayectoria

$$\vec{v}_t(t) = \vec{f}'(t) = (1;2t;3t^2) \Rightarrow \vec{v}_t(5) = (1;10;75)$$

ecuación vectorial de la recta tangente

r_t (P_0): $(x;y;z) = \vec{f}(\lambda) = (5;25;125) + \lambda.(1;10;75)$

Evaluamos para $\lambda=4$, que es tiempo transcurrido desde que abandona la trayectoria. $\vec{f}(4) = (5;25;125) + 4.(1;10;75) = (9;65;425)$.

b) $\vec{f}(9) = (9;81;729)$

Ejercicios Propuestos

1) Dadas las siguientes curvas planas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto considerado.

a) $\vec{f}(t)=\left(t^2+1;t-3\right)$, $P_0=(2;-2)$ b) $\vec{f}(t)=\left(t.e^t;e^t\right)$, $P_0=(e;e)$

c) $\vec{f}(t)=\left(sen\,t;\sqrt{t+1}\right)$, $t_0=0$ d) $\vec{f}(t)=\left(tg\,t;2t\right)$, $t_0=0$

e) $\vec{f}(t)=\left(cos\,t;sen\,t\right)$, $t_0=\pi/4$

2) Dadas las siguientes curvas alabeadas, hallar la ecuación de la recta tangente y del plano normal en el punto considerado.

a) $\vec{f}(t)=\left(t+1;t^2;-\sqrt{t}\right)$, $P_0=(5;16;-2)$ b) $\vec{f}(t)=\left(t.e^t;e^t;t\right)$, $t_0=0$

c) $\vec{f}(t)=\left(6t;3t^2;t^3\right)$, $t_0=1$ d) $\vec{f}(t)=\left(cos\,t;sen\,t;t\right)$, $t=\pi/4$

e) $\vec{f}(t)=\left(e^{3t};e^{-3t};3t\right)$, $P_0=(1;1;0)$ f) $\vec{f}(t)=\left(t-2;3t^2-1;2t^3\right)$ donde la curva corta al plano yz

RESPUESTAS

1) a) r_t: $\dfrac{x-2}{2}=y_t+2$, $y_t=\dfrac{x}{2}-3$, $y_n=-2x+2$

b) r_t: $\dfrac{x-e}{2}=y_t-e$, $y_t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{e}{2}$, $y_n=-2x+3e$

c) r_t: $x=\dfrac{y_t-1}{1/2}$, $y_t=\dfrac{x}{2}+1$, $y_n=-2x+1$

d) r_t: $x=\dfrac{y_t}{2}$, $y_t=2x$, $y_n=-\dfrac{1}{2}x$

e) r_t: $\dfrac{x-\sqrt{2}/2}{-1}=y_t-\sqrt{2}/2$, $y_t=-x+\sqrt{2}$, $y_n=x$

2) a) r_t: $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-16}{32}=\dfrac{z+2}{-1}$, $\pi_n:\ 4x+32y-z_n-534=0$

b) r_t: $x=y-1=z$, $\pi_n: x+y+z_n-1=0$

c) r_t: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{2}=z-1$, $\pi_n: 2x+2y+z_n-19=0$

d) r_t: $\dfrac{x-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2}=\dfrac{y-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=z-\dfrac{\pi}{4}$, $\pi_n:-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+z_n=\dfrac{\pi}{4}$

e) r_t: $x-1=-(y-1)=z$, $\pi_n: x-y+z_n=0$

f) r_t: $x=\dfrac{y-11}{12}=\dfrac{z-16}{24}$, $\pi_n: x+12y+24z_n=516$

CAMPO VECTORIAL

Un campo vectorial[1] es una función que transforma un punto de $\mathbb{R}^n$ $(\vec{x})^2$ en un vector de $\mathbb{R}^m$.

$\vec{f}: A \subseteq \Re^n \to \Re^m \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}); f_2(\vec{x}); \ldots; f_m(\vec{x})]$, donde las $f_i(\vec{x})$ son campos escalares, es decir funciones que van de $A_i \to \mathbb{R}$, con $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ y $n \geq 2$.

Las imágenes de puntos n-dimensionales son vectores m-dimensionales o m-uplas. Tenemos n variables y m componentes.

El dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de las f_i.

Ejemplos

a) $\vec{f}: \Re^2 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(x; y) = (x + y; y^2 - 1; x^2 - y)$
$\vec{f}(2;-1) = (1;0;5)$, $\vec{f}(-1;3) = (2;8;-2)$

b) $\vec{f}: \Re^3 \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(x; y; z) = (x + 2y - z; x^2 + yz)$
$\vec{f}(2;1;1) = (3;5)$, $\vec{f}(-1;1;2) = (-1;3)$

DERIVADA DE UN CAMPO VECTORIAL

En este caso tenemos m funciones de n variables, por lo tanto hay mxn derivadas parciales, que son los elementos de una matriz de orden mxn que se denomina Matriz Jacobiana.

---

[1] Como ejemplos de campos vectoriales tenemos el campo de velocidades de un fluido en movimiento, el campo gravitatorio, el campo eléctrico o el campo magnético.

[2] $(\vec{x}) = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$

Matriz Jacobiana

Si $\vec{f} : A \subseteq \Re^n \to \Re^m \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}); f_2(\vec{x}); ...; f_m(\vec{x})]$, la *matriz jacobiana* o de *las derivadas parciales* es la matriz formada por las *m*x*n* (número de funciones x número de variables) derivadas parciales de primer orden de las *n* funciones escalares componentes del campo vectorial.

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Las filas son los gradientes de cada función componente del campo vectorial.

Notación

La matriz jacobiana suele ser expresada también como: $\dfrac{\partial(f_1, f_2, ..., f_m)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$

Casos particulares

a) *Matriz jacobiana de un campo escalar*

Si $\vec{f} : A \subseteq \Re^n \to \Re \,/\, u = f(\vec{x})$, la matriz jacobiana es

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

b) *Matriz jacobiana de una función vectorial*

Si $\vec{f} : A \subseteq \Re \to \Re^m \,/\, \vec{f}(t) = [f_1(t); f_2(t); ...; f_m(t)]$, la matriz jacobiana es

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

a) Si $\vec{f} : \Re^2 \to \Re^3 / \vec{f}(\vec{x}) = (x^2 + y; y^3 + 2x; xy)$, la matriz jacobiana es

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2 & 3y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$$

b) Si $\vec{f} : \Re \to \Re^2 / \vec{f}(t) = (t^2 + 1; t^3 + 2t)$, la matriz jacobiana es

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

c) Si $f : \Re^3 \to \Re / f(\vec{x}) = 4x^2 y + z^3$, la matriz jacobiana es

$$Df = \begin{pmatrix} 8xy & 4x^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

CAMPOS VECTORIALES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

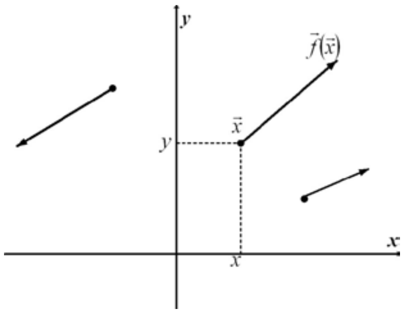
Interesan en particular los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

Campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ o *campo vectorial en el plano* es un campo vectorial de $A \subseteq \Re^2 \to \Re^2$. A un punto del plano le asigna como imagen un vector de dimensión 2. Se expresa por lo general como:

$$\vec{f} : A \subseteq \Re^2 \to \Re^2 / \vec{f}(x; y) = [P(x; y); Q(x; y)] = P(x; y)\breve{i} + Q(x; y)\breve{j}$$

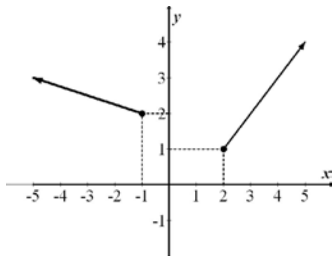
Representación: se acostumbra representar estos campos vectoriales dibujando en cada punto del dominio el vector imagen de $\vec{x} = (x;y)$ por $\vec{f}$.



Ejemplos

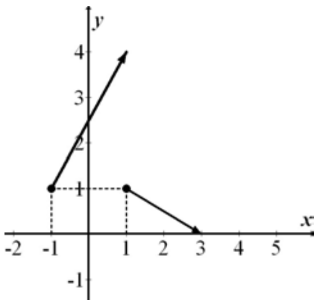
a) $\vec{f} : \Re^2 \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(x;y) = (2x - y; x + y) = (2x - y)\breve{i} + (x + y)\breve{j}$

$\vec{f}(2;1) = (3;3)$, $\vec{f}(-1;2) = (-4;1)$



b) $\vec{f} : \Re^2 \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(x;y) = (x^2 + 1; y - 2x) = (x^2 + 1)\breve{i} + (y - 2x)\breve{j}$

$\vec{f}(1;1) = (2;-1)$, $\vec{f}(-1;1) = (2;3)$

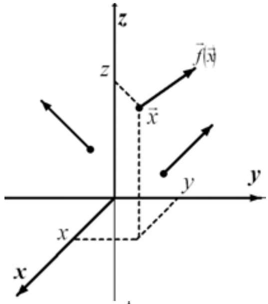


Campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$

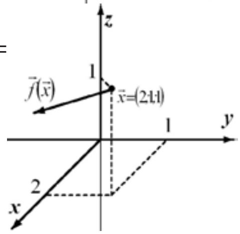
Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ o *campo vectorial en el espacio* es un campo vectorial de $A \subseteq \Re^3 \to \Re^3$. A un punto del espacio le asigna como imagen un vector de dimensión 3. Se lo expresa por lo general como:

$$\vec{f} : A \subseteq \Re^3 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(x;y;z) = [P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z)] =$$
$$= P(x;y;z)\breve{i} + Q(x;y;z)\breve{j} + R(x;y;z)\breve{k}$$

Representación: se acostumbra representar estos campos vectoriales dibujando en cada punto del dominio el vector imagen de $\vec{x}=(x;y;z)$ por $\vec{f}$.



Ejemplo



$$\vec{f}:\Re^3\to\Re^3\ /\ \vec{f}(x;y;z)=(2x-y;-x+2z;x+y-z)=$$
$$=(2x-y)\breve{i}+(-x+2z)\breve{j}+(x+y-z)\breve{k}$$

$$\vec{f}(2;1;1)=(3;0;2)$$

DIFERENCIAL DE UN CAMPO VECTORIAL

Un campo vectorial $\vec{f}(\vec{x})$ es diferenciable si lo son las funciones escalares que lo componen. El diferencial de $\vec{f}(\vec{x})$ es otro campo vectorial cuyas componentes son los diferenciales de las componentes de $\vec{f}(\vec{x})$. Si el campo es diferenciable, como ya vimos para campos escalares, podemos usar el diferencial para aproximar linealmente una función.

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$

$$\vec{f}:A\subseteq\Re^2\to\Re^2\ /\ \vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y)=[P(x;y);Q(x;y)]$$

$$d\vec{f}(\vec{x})=[dP(x;y);dQ(x;y)]=\left(\frac{\partial P}{\partial x}.dx+\frac{\partial P}{\partial y}.dy;\frac{\partial Q}{\partial x}.dx+\frac{\partial Q}{\partial y}.dy\right)$$

$$\begin{pmatrix}dP\\dQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial x}&\dfrac{\partial P}{\partial y}\\\dfrac{\partial Q}{\partial x}&\dfrac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

Ejemplo

$\vec{f} : \Re^2 \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x; y) = \left(xy; x^2 - y^2\right)$

Calculamos D $\vec{f} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} dP \\ dQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.dx + x.dy \\ 2x.dx - 2ydy \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^3$

$\vec{f} : A \subseteq \Re^3 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x; y; z) = \left[P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z)\right]$

$$d\vec{f}(\vec{x}) = \left[dP(x; y; z); dQ(x; y; z); dR(x; y; z)\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}.dx + \frac{\partial P}{\partial y}.dy + \frac{\partial P}{\partial z}.dz; \frac{\partial Q}{\partial x}.dx + \frac{\partial Q}{\partial y}.dy + \frac{\partial Q}{\partial z}.dz; \frac{\partial R}{\partial x}.dx + \frac{\partial R}{\partial y}.dy + \frac{\partial R}{\partial z}.dz \right)$$

$$\begin{pmatrix} dP \\ dQ \\ dR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

CAMPO VECTORIAL GRADIENTE

Los campos vectoriales se pueden construir a partir de campos escalares. Si $U = f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$: $A \subseteq \Re^n \to \Re$ es un campo escalar continuo y derivable, como ya hemos visto en el capítulo de derivadas, su función derivada se llama *gradiente*, y se denota como $\nabla U = \left(f'_{x_1}; f'_{x_2}; \ldots; f'_{x_n}\right)$.

Se obtiene así ∇U : $A \subseteq \Re^n \to \Re^n$ que es un campo vectorial continuo en *A*. Por lo tanto el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial denominado *campo vectorial gradiente en* $\Re^n$.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \nabla U = \left(f'_{x_1}; f'_{x_2}; \ldots; f'_{x_n}\right).$$

Ejemplos

1) $U = f(x;y) = x^2 + 4xy$, $\nabla U = (2x+2y)\breve{i} + 4x\,\breve{j}$

Por lo tanto se genera el campo vectorial gradiente $\vec{f}(\vec{x}) = (2x+2y;4x)$.

2) $U = f(x;y;z) = x^2 + 4xy + yz^2$, $\nabla U = (2x+4y)\breve{i} + \left(4x+z^2\right)\breve{j} + 2yz\,\breve{k}$

Por lo tanto se genera el campo vectorial $\vec{f}(\vec{x}) = \left(2x+4y;4x+z^2;2yz\right)$.

Recíprocamente se dice que un campo vectorial continuo $\vec{f}(\vec{x})$ en $\Re^n$ es un campo vectorial gradiente si existe un cierto campo escalar $U = f\,(x_1;x_2;\ldots;x_n)$: $A \subseteq \Re^n \to \Re$ continuo y derivable tal que $\vec{f}(\vec{x}) = \nabla U$.

En este caso U es una función potencial para $\vec{f}$ y $\vec{f}$ es un campo potencial.

Campo vectorial gradiente en $\mathbb{R}^2$

Consideramos un campo vectorial en el plano.

$\vec{f} : A \subseteq \Re^2 \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x;y) = [P(x;y);Q(x;y)] = \nabla U$.

Vamos a ver las condiciones que deben cumplirse para que $\vec{f}(\vec{x})$ sea un campo vectorial gradiente.

Propiedad

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y);Q(x;y)]$ es un campo vectorial gradiente donde P y Q son funciones continuas y derivables en un conjunto D (abierto y conexo[3]), entonces se verifica que $P'_y = Q'_x$.

[3] Ver página 10.

Demostración

Para que $\vec{f}(\vec{x})$ sea un campo vectorial gradiente debe existir un campo escalar $U = f(x;y): A \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, \nabla U = (U'_x ; U'_y) = [P(x;y); Q(x;y)]$.

Es decir que $U'_x = P$ y $U'_y = Q$. Si calculamos las derivadas segundas cruzadas obtenemos: $U''_{xy} = P'_y$ y $U''_{yx} = Q'_x \Rightarrow P'_y = Q'_x$ (por Teorema de Schwarz), igualdad que debe verificarse para que el campo vectorial sea vectorial gradiente y que se conoce como *condición de simetría*.

Cálculo de la función potencial U (x;y)

Una vez que hemos verificado que existe $U = f(x;y)$, debemos calcularla.

Como $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x;y) \Rightarrow U(x;y) = \int P(x;y).dx = F(x;y) + \alpha(y)$ (1)

La constante de integración se puede expresar como una función de y porque estamos integrando según la variable x.

Pero además

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y) \Rightarrow U(x;y) = \int Q(x;y).dy = F(x;y) + \beta(x) \qquad (2)$$

Ambas integrales deben ser iguales, por lo tanto pueden diferir solo en una constante.

Por lo tanto $U(x;y)$ se obtiene comparando las ecuaciones (1) y (2);

$$U(x;y) = F(x;y) + \alpha(x) + \beta(y) + C$$

Sumando a la expresión obtenida una constante numérica C, tenemos las infinitas funciones potenciales que generan el campo vectorial $\vec{f}(\vec{x})$.

Ejemplo

Dado el campo vectorial $\vec{f}(\vec{x}) = (2x^3 + y; x + 2y^2)$, primero verificamos la condición para que sea vectorial gradiente: $P'_y = 1 = Q'_x$.

Ahora debemos encontrar el campo escalar $U = f(x;y)$, es decir la función potencial.

$$U(x;y) = \int (2x^3 + y).dx = \frac{x^4}{2} + yx + \alpha(y)$$

$$U(x;y) = \int (x + 2y^2).dy = xy + \frac{2y^3}{3} + \beta(x)$$

Si comparamos las dos integrales, que como vimos deben ser iguales, vemos que la función de *y* que figura en la 1º integral es $\frac{2y^3}{3}$ que aparece en la 2º integral y que la función de *x* que aparece en la 2º integral es $\frac{x^4}{2}$, que aparece en la 1º integral. $U(x;y) = xy + \frac{x^4}{2} + \frac{2y^3}{3} + C$.

***Propiedad recíproca*:** si un campo vectorial $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y); Q(x;y)]$ es continuo en un conjunto abierto y conexo y verifica que $P'_y = Q'_x$, entonces es un campo vectorial gradiente.

Ejemplo

$\vec{f}(\vec{x}) = (3x^2 y; x^3 + 3y^2)$, $P'_y = 3x^2 = Q'_x$, por lo tanto el campo vectorial es un campo vectorial gradiente.

Campo vectorial gradiente en $\mathbb{R}^3$

Consideramos un campo vectorial en el espacio.

$$\vec{f} : A \subseteq \Re^3 \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x;y;z) = [P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z)]$$

Vamos a ver las condiciones que deben cumplirse para que $\vec{f}(\vec{x})$ sea un campo vectorial gradiente.

Propiedad

Si $\vec{f}(x;y;z) = [P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z)]$ es un campo vectorial gradiente donde *P, Q* y *R* son funciones continuas y derivables en un conjunto D (abierto y conexo[4]), entonces debe verificarse la igualdad entre las siguientes derivadas parciales: $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z};\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x};\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Esta propiedad la demostraremos más adelante. Luego plantearemos otra forma de verificar si un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es un campo vectorial gradiente.

Ejemplo

$$\vec{f}(\vec{x}) = (2xy; x^2 + z^2; 2yz)$$

Verificamos la igualdad de las derivadas:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2z = \frac{\partial Q}{\partial z};\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Entonces el campo vectorial $\vec{f}(\vec{x})$ es un campo vectorial gradiente y por lo tanto existe función potencial $U\,(x;y;z)$.

Cálculo de la función potencial U (x;y;z)

Una vez que hemos verificado que existe $U = (x;y;z)$, debemos calcularla.

Siguiendo un razonamiento análogo al seguido para el cálculo de la función potencial en $\Re^2$ tenemos que:

[4] Ver página 10.

$$U(x;y;z) = \int P(x;y;z).dx = F(x;y;z) + \alpha(y;z) \qquad (1)$$

$$U(x;y;z) = \int Q(x;y;z).dy = F(x;y;z) + \beta(x;z) \qquad (2)$$

$$U(x;y;z) = \int R(x;y;z).dz = F(x;y;z) + \gamma(x;y) \qquad (3)$$

Las tres integrales deben ser iguales, por lo tanto pueden diferir solo en una constante.

La función $U(x;y;z)$ se obtiene comparando las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$U(x;y;z) = F(x;y;z) + \alpha(y;z) + \beta(x;z) + \gamma(x;y) + C$$

Continuamos con el ejemplo anterior.

$$U(x;y;z) = \int P(x;y;z).dx = \int 2xy.dx = x^2y + \alpha(y;z) \qquad (1)$$

$$U(x;y;z) = \int Q(x;y;z).dy = \int (x^2 + z^2).dy = x^2y + z^2y + \beta(x;z) \qquad (2)$$

$$U(x;y;z) = \int R(x;y;z).dz = \int 2yz.dz = yz^2 + \gamma(x;y) \qquad (3)$$

Comparando las 3 integrales tenemos que: $U(x;y;z) = x^2y + z^2y + C$

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO[5]

Un campo vectorial es conservativo si es un campo vectorial gradiente.
Este es un concepto más vinculado a la Física que a la Matemática.

[5] En Física se ve que campos vectoriales como los gravitacionales, los magnéticos o los eléctricos son conservativos y el nombre se debe a que conservan la energía.

Otras aplicaciones del Operador de Hamilton

Ya hemos visto en la página 97 el Operador de Hamilton y su uso para calcular el vector gradiente. Veremos ahora otras aplicaciones del operador ∇ .

ROTOR DE UN CAMPO VECTORIAL[6]

Dado un campo vectorial $\vec{f}$ con derivadas parciales continuas se define como *rotor* o *rotacional* del campo vectorial al campo vectorial definido por el producto vectorial entre ∇ y $\vec{f}$. $rot\ \vec{f} = \nabla \wedge \vec{f}$.

El rotor le hace corresponder a un campo vectorial otro campo vectorial.

En el plano

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y);Q(x;y)]$, $rot\ \vec{f} = \nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) \breve{k}$

Ejemplo

Si $\vec{f}(\vec{x}) = (3x^2y; -2xy^3)$

$$rot\ \vec{f} = \nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & -2xy^3 & 0 \end{vmatrix} = \left(-2y^3 - 3x^2\right)\breve{k}$$

En el espacio

Dado en un campo vectorial $\vec{f}$ definido en $\Re^3$ con derivadas parciales continuas: $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z)]$,

---

[6] Rotor o rotacional: mide la tendencia de un campo vectorial a rotar alrededor de un punto.

$$rot\,\vec{f} = \nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\breve{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\breve{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\breve{k}$$

Ejemplo

$$\vec{f} : A \subseteq \Re^3 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x; y; z) = \left(2x^2 - y; -xy + 2z; x + 3y^2 - 2z^2\right)$$

$$rot\,\vec{f} = \nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 - y & -xy + 2z & x + 3y^2 - 2z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6y-2)\breve{i} + (0-1)\breve{j} + (-y-1)\breve{k} = (6y-2)\breve{i} - \breve{j} + (-y-1)\breve{k}$$

Campo vectorial irrotacional [7]

Un campo vectorial es *irrotacional en un punto* si en el mismo el rotor es el vector nulo. Si esto se verifica para todo punto en el que está definido el campo, entonces se dice que el campo vectorial es *irrotacional*.

Ejemplo

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x; y; z) = \left(2xy; x^2 + 2yz; y^2\right)$$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\breve{i} + 0\,\breve{j} + (2x - 2x)\breve{k} = \vec{0}$$

---

[7] Si el campo vectorial es un campo de velocidades de un fluido en movimiento, significa que no hay rotación alrededor de ese punto, no se forman remolinos. Si tenemos una pileta con agua y se saca el tapón, vemos que alrededor del sumidero se forma un "remolino". En ese punto el campo no es irrotacional.

En este caso el campo vectorial es irrotacional para todos los puntos del mismo.

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL[8]

Dado un campo vectorial $\vec{f}$, se define como *divergencia* del campo vectorial a la función escalar definida por el producto escalar entre ∇ y $\vec{f}$.

$$div\ \vec{f} = \nabla \bullet \vec{f}\ .$$

En el plano

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y);Q(x;y)],\ \ div\ \vec{f} = \nabla \bullet \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet (P;Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

Ejemplo

Si $\vec{f}(\vec{x}) = \left(3x^2y;-2xy^3\right)$

$$div\ \vec{f} = \nabla \bullet \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet \left(3x^2y;-2xy^3\right) = 6xy - 6xy^2$$

En el espacio

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z)],$

$$div\ \vec{f} = \nabla \bullet \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet (P;Q;R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\ .$$

La divergencia le hace corresponder a un campo vectorial un campo escalar.

---

[8] Si el campo vectorial es un campo de velocidades que representa la velocidad de un flujo de partículas en movimiento, la divergencia mide la cantidad de fluido, medida en volumen, que se "crea o destruye" por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Por ejemplo, si la divergencia es 3, el líquido aumenta a razón de 3 unidades cúbicas por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z)]$, su matriz jacobiana es

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

y por lo tanto la divergencia de $\vec{f}$ es igual a la traza de la matriz jacobiana.

Ejemplo

$\vec{f}(x; y; z) = (xyz; x^2 + y^2 z^3 ; 2xz)$, calculamos *div* $\vec{f}(-1;2;2)$

$$div\ \vec{f} = \nabla \bullet \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(xyz; x^2 + y^2 z^3 ; 2xz \right) = yx + 2yz^3 + 2x$$

$$div\ \vec{f}(-1;2;2) = -2 + 32 + 4 = 34$$

Campo vectorial solenoidal [9]

Un campo vectorial es *solenoidal en un punto* si en el mismo la divergencia es nula. Si esto se verifica para todo punto en el que está definido el campo, entonces se dice que el campo vectorial es *solenoidal*.

---

[9] La divergencia permite caracterizar aquellos puntos del campo en los cuales se “crea o destruye” la cantidad de fluido que pasa por ese punto. Si la divergencia es 0 quiere decir que la cantidad de partículas que entra se mantiene constante, por lo que es igual a la cantidad de fluido que sale. Si la divergencia es positiva quiere decir que en ese punto hay un *manantial o fuente*, la cantidad de fluido aumenta. Si la divergencia es negativa hay un *sumidero*, la cantidad de fluido en ese punto disminuye o se destruye. Por ejemplo, si por una tubería circula agua y en un punto interior a la misma hay una fuente de fuego (como una vela), en ese punto parte del agua se evapora, por lo tanto sale menos agua que la que entró, hay un sumidero.

Ejemplo: $\vec{f}(x;y;z)=\left(\frac{1}{2}cos(2x+2y+2z);sen^2(x+y+z);xy\right)$

$$div\ \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(\frac{1}{2}cos(2x+2y+2z);sen^2(x+y+z);xy\right)=$$
$$=-sen(2x+2y+2z)+sen(2x+2y+2z)+0=0$$

En este caso el campo es solenoidal para todos los puntos del mismo.

Propiedades del rotor y la divergencia

1) ***El rotor del gradiente***

Si $u=f(x;y;z)$ *es un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas en un conjunto D, entonces el rotor del vector gradiente de u es el vector nulo. Es decir que si un campo vectorial es conservativo entonces su rot es el vector nulo.*

Si $u=f(x;y;z)$ su gradiente es $\nabla u=u'_x\breve{i}+u'_y\breve{j}+u'_z\breve{k}$.
El campo vectorial gradiente es $\vec{f}(\vec{x})=u'_x\breve{i}+u'_y\breve{j}+u'_z\breve{k}$

$$rot\ \vec{f}=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u'_x & u'_y & u'_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial u'_z}{\partial y}-\frac{\partial u'_y}{\partial z}\right)\breve{i}+\left(\frac{\partial u'_x}{\partial z}-\frac{\partial u'_z}{\partial x}\right)\breve{j}+\left(\frac{\partial u'_y}{\partial x}-\frac{\partial u'_x}{\partial y}\right)\breve{k}=$$
$$=\left(u''_{zy}-u''_{yz}\right)\breve{i}+\left(u''_{xz}-u''_{zx}\right)\breve{j}+\left(u''_{yx}-u''_{xy}\right)\breve{k}=\vec{0}$$

Los paréntesis se anulan por el Teorema de Schwarz.

Propiedad recíproca*: Si el campo vectorial* $\vec{f}:A\subseteq\Re^3\rightarrow\Re^3$ *tiene derivadas parciales continuas y el rotor es el vector nulo, entonces* $\vec{f}$ *es un campo vectorial gradiente o conservativo, es decir que es el rotor de un vector gradiente.*

Conclusión: un campo vectorial es *irrotacional* sí y solo sí es *conservativo* y sí y solo sí es un *campo vectorial gradiente*. Son conceptos equivalentes.

Por lo tanto otra forma de determinar si un campo vectorial es conservativo o vectorial gradiente es calculando su rotor

Condiciones que deben verificarse para ser un campo irrotacional

en el plano: $rot\ \vec{f} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\breve{k} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ❶

en el espacio: $rot\ \vec{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\breve{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\breve{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\breve{k} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad ❷$$

En ❶ y ❷ vemos que llegamos a las mismas condiciones a las que llegamos cuando planteamos que un campo vectorial sea un campo vectorial gradiente (ver páginas 239, 240).

2) *Divergencia de un rotor*

Si $\vec{f}$ es un campo vectorial en $\Re^3$ cuyas componentes tienen derivadas parciales segundas continuas en un conjunto D, entonces la divergencia del rotor de $\vec{f}$ es nula.

Sea $\vec{f}(\vec{x}) = (P; Q; R)$ su rotor es:

$rot\ \vec{f}\ = \left(R'_y - Q'_z\right)\breve{i} + \left(P'_z - R'_x\right)\breve{j} + \left(Q'_x - P'_y\right)\breve{k}$

La divergencia del rotor es:

$$div\,(rot\,\vec{f}\,) = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(R'_y - Q'_z\right)\breve{i} + \left(P'_z - R'_x\right)\breve{j} + \left(Q'_x - P'_y\right)\breve{k} =$$

$$= R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz} = 0$$

En este caso el vector $\vec{f}$ se denomina potencial vector del rotor de $\vec{f}$.

Ejemplo: $\vec{f} = \left(x - z; x^3 + yz; -3xy^2\right)$

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - z & x^3 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix} = (-6xy - y)\breve{i} + \left(-1 + 3y^2\right)\breve{j} + 3x^2\breve{k}$$

Calculamos ahora la divergencia del rotor:

$$div\,(rot\,\vec{f}\,) = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(-6xy - y\right)\breve{i} + \left(-1 + 3y^2\right)\breve{j} + 3x^2\breve{k} =$$

$$= -6y + 6y + 0 = 0$$

3) *Todo campo vectorial se puede descomponer en la suma de un campo solenoidal y uno irrotacional.*

LAPLACIANO – LA DIVERGENCIA DEL GRADIENTE

a) de un campo escalar

Si f es un campo escalar, la *divergencia de su gradiente* se indica simbólicamente de la siguiente manera: $div\,(\nabla f) = \nabla \bullet (\nabla f) = (\nabla \bullet \nabla) f = \nabla^2 f$.

El operador ∇^2 se denomina *operador laplaciano* y también se lo representa como Δ.

Si f es un campo escalar de dos variables tenemos:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \bullet (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xx} + f''_{yy}$$

Si f es un campo escalar de tres variables tenemos:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \bullet (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$$

Este operador representa un papel muy importante en muchas leyes físicas (la ecuación de calor, ecuación del potencial y la ecuación de las ondas).

Ecuación de Laplace

Es la ecuación diferencial que se obtiene igualando a 0 el operador laplaciano. $\Delta f = \nabla^2 f = 0$.

Función armónica o campo armónico [10]

Si un campo escalar f tiene derivadas segundas continuas y verifica la ecuación de Laplace, entonces es un campo armónico.

Ejemplo

$$f(x; y) = ln\left(x^2 + y^2\right)$$

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f''_{xx} = \frac{2y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = f''_{xx} + f''_{yy} = \frac{2y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0$$

b) de un campo vectorial

Si $\vec{f}$ es un campo vectorial, el laplaciano es igual a un vector cuyas componentes son los laplacianos de cada campo escalar del campo vectorial.

---

[10] Las funciones armónicas tienen aplicaciones en física en el estudio de la transferencia del calor, radiación electromagnética y la acústica.

En $\Re^2$

$$\Delta\vec{f} = \nabla^2\vec{f} = \left(\nabla^2 P;\nabla^2 Q\right) = \left(P''_{xx} + P''_{yy};Q''_{xx} + Q''_{yy}\right)$$

En $\Re^3$

$$\nabla^2\vec{f} = \left(\nabla^2 P;\nabla^2 Q;\nabla^2 R\right) = \left(P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz};Q''_{xx} + Q''_{yy} + Q''_{zz};R''_{xx} + R''_{yy} + R''_{zz}\right)$$

Ejemplos

a) $\vec{f}(x;y) = \left(x^2y^3;2x^2y^2\right)$

$$P'_x = 2xy^3,\quad P''_{xx} = 2y^3,\quad P'_y = 3x^2y^2,\quad P''_{yy} = 6x^2y$$
$$Q'_x = 4xy^2\quad Q''_{xx} = 4y^2,\quad Q'_y = 4x^2y\quad Q''_{yy} = 4x^2$$

$$\Delta\vec{f} = \nabla^2\vec{f} = \left(2y^3 + 6x^2y;4y^2 + 4x^2\right)$$

b) $\vec{f}(x;y;z) = \left(x^3 + y^2;y^3;z^3\right)$

$$P'_x = 3x^2,\quad P''_{xx} = 6x,\quad P'_y = 2y,\quad P''_{yy} = 2\quad P'_z = 0,\quad P''_{zz} = 0$$
$$Q'_x = 0\quad Q''_{xx} = 0,\quad Q'_y = 3y^2,\quad Q''_{yy} = 6y,\quad Q'_z = 0,\quad Q''_{zz} = 0$$
$$R'_x = 0\quad R''_{xx} = 0,\quad R'_y = 0,\quad R''_{yy} = 0,\quad R'_z = 3z^2,\quad R''_{zz} = 6z$$

$$\Delta\vec{f} = \nabla^2\vec{f} = (6x + 2;6y;6z)$$

Propiedad que vincula al laplaciano de un vector con el gradiente, la divergencia y el rotor

Si un campo vectorial verifica que sus componentes tienen derivadas parciales mixtas de segundo orden continuas, entonces *"el laplaciano de un campo vectorial es igual al gradiente de la divergencia menos el rotor del rotor"*.

$$\Delta \vec{f} = \nabla^2 \vec{f} = \nabla\left(\nabla \bullet \vec{f}\right) - \nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{f}\right)$$

Ejemplo

Dada $\vec{f}(x;y;z) = \left(x^3 + y^2; y^3; z^3\right)$, verificamos la propiedad.
En el ejemplo anterior ya calculamos $\nabla^2 \vec{f} = (6x + 2; 6y; 6z)$.

Calculamos la divergencia de $\vec{f}$.

$\nabla \bullet \vec{f} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(x^3 + y^2; y^3; z^3\right) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, por lo tanto

el gradiente de la divergencia es:

$$\nabla\left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) = (6x; 6y; 6z)$$

Ahora calculamos el rotor de $\vec{f}$

$\nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + y^2 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = -2y\breve{k}$, ahora nos falta el rotor del rotor.

$$\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -2y \end{vmatrix} = -2\breve{i} = (-2; 0; 0)$$

Entonces se verifica que:

$$(6x; 6y; 6z) - (-2; 0; 0) = (6x; 6y; 6z) + (2; 0; 0) = (6x + 2; 6y; 6z)$$

Síntesis de las operaciones en un campo vectorial

- *Gradiente*: mide la tasa y la dirección del cambio en un campo escalar; el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial.
- *Rotor o rotacional*: mide la tendencia de un campo vectorial a rotar alrededor de un punto; el rotor de un campo vectorial es otro campo vectorial.
- *Divergencia*: mide la tendencia de un campo vectorial a originarse o converger hacia ciertos puntos; la divergencia de un campo vectorial es un campo escalar.
- *Laplaciano*: relaciona el "promedio" de una propiedad en un punto del espacio con otra magnitud, es un operador diferencial de segundo orden.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA SUPERFICIE

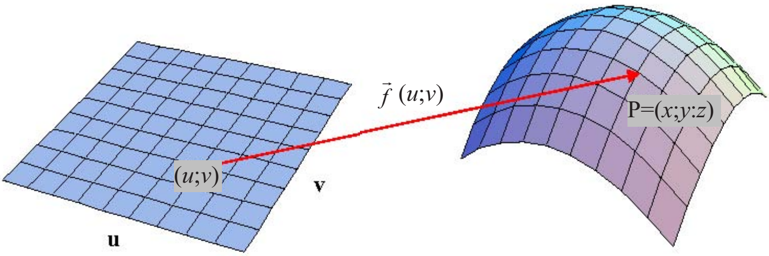
Veamos ahora otra forma de definir una superficie. Ya vimos que cuando un punto se mueve en el espacio con "dos grados de libertad", el lugar geométrico que queda definido es una superficie.

Ya hemos visto que la imagen de una función vectorial continua del tipo: $\vec{f} : D \subseteq \Re \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = [x(t); y(t); z(t)]$ es una curva en el espacio $\Re^3$.

Veremos ahora que la imagen de un campo vectorial continuo del tipo $\vec{f} : D \subseteq \Re^2 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(u;v) = [x(u;v); y(u;v); z(u;v)]$ es una superficie S en el espacio $\Re^3$. A cada par ordenado $(u;v)$ se le asigna como imagen un punto $(x;y;z)$ de dicho espacio. Esta es la *representación paramétrica* de una superficie.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, (x, y, z) = \vec{f}(u;v) = [x(u;v); y(u;v); z(u;v)] \text{ con } (u,v) \in D\}$$

Podemos imaginar una superficie en $\Re^3$ como la deformación de una malla rectangular.



A cada punto (u,v) sobre la malla rectangular le corresponde un punto P = (x,y,z) sobre la superficie, siendo

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v) \end{cases} \text{, con } u \in [u_1;u_2] \text{ y } v \in [v_1;v_2]$$

Estas ecuaciones se denominan ***ecuaciones paramétricas de la superficie***.

Ejemplos

1) El plano coordenado xy de $\mathbf{R}^3$ es imagen del campo vectorial $\vec{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \;/\; \vec{f}(u;v) = (u;v;0)$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases} \text{, con } u \in \mathbf{R} \text{ y } v \in \mathbf{R}$$

2) El paraboloide circular es imagen del campo vectorial

$$\vec{f} : [0;+\infty) \text{x} [0;2\pi) \subseteq \Re^2 \to \Re^3 \;/\; \vec{f}(u;v) = \left(u.cos\, v; u.sen\ v; u^2\right)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = u.cos\, v \\ y = u.sen\, v \\ z = u^2 \end{cases} \text{, con } u \in [0;+\infty) \text{ y } v \in [0;2\pi)$$

3) La esfera de radio r es imagen del campo vectorial

$\vec{f}:[0;\pi]\text{x}[0;2\pi)\subseteq\Re^2\rightarrow\Re^3$ /
$\vec{f}(u;v)=(r.cos\ u.cos\ v;\ r.cos\ u.sen\ v;\ r.sen\ u)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

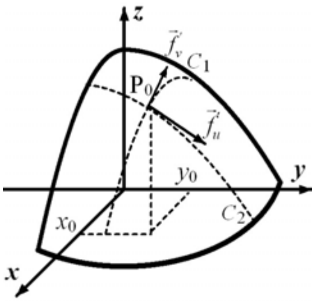
$$\begin{cases} x = r.sen\,u.cos\,v \\ y = r.sen\,u.sen\,v \\ z = r.cos\,u \end{cases} \text{, con } u\in[0;\pi] \text{ y } v\in[0;2\pi)$$

Ecuación del plano tangente

La superficie es diferenciable si el campo $\vec{f}$ lo es. En este caso podemos obtener la ecuación del plano tangente de la siguiente manera.

Si hacemos $u = u_0$ (u constante), obtenemos una función vectorial $\vec{f}_1$ que es función de v.

A esta función la podemos considerar como $\vec{f}_1: D\subseteq\Re\rightarrow\Re^3$ / $\vec{f}_1=\vec{f}_1(u_0;v)$ cuya imagen es una curva C_1 incluida en S.



Un vector tangente a esta curva en el punto $\vec{f}(u_0;v_0)=(x_0;y_0;z_0)\in\mathbf{R}^3$ es $\vec{f}'_v(\text{P}_0)=(x'_v;y'_v;z'_v)\big|_{(u_0;v_0)}$.

De la misma forma, fijando constante a v ($v = v_0$), tenemos una función vectorial $\vec{f}_2$ que es una $\vec{f}_2(u)$. $\vec{f}_2: D\subseteq\Re\rightarrow\Re^3$ / $\vec{f}_2=\vec{f}_2(u;v_0)$ cuya imagen también es una curva C_2 incluida en S.

Un vector tangente a esta curva en el punto $\vec{f}(u_0;v_0)=(x_0;y_0;z_0)\in\mathbf{R}^3$ es $\vec{f}_u'(\mathrm{P}_0)=\left(x_u';y_u';z_u'\right)\Big|_{(u_0;v_0)}$.

La superficie parametrizada es suave si el producto vectorial entre ambos vectores no es nulo, $\vec{f}_u'(\mathrm{P}_0)\wedge\vec{f}_v'(\mathrm{P}_0)\neq\vec{0}$ [11].

Si la superficie es suave admite plano tangente que denominamos π_t. El plano tangente a S en $\vec{f}(u_0;v_0)$ contiene a ambos vectores tangentes. Si tenemos en cuenta un vector $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ del plano tangente, la ecuación del mismo es: $\left(\vec{f}_u'(\mathrm{P}_0)\wedge\vec{f}_v'(\mathrm{P}_0)\right)\bullet(x-x_0;y-y_0;z-z_0)=0$, que se puede expresar como el siguiente determinante:

$$\pi_t:\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u'(u_0;v_0) & y_u'(u_0;v_0) & z_u'(u_0;v_0) \\ x_v'(u_0;v_0) & y_v'u_0;v_0 & z_v'(u_0;v_0) \end{vmatrix}=0$$

Vector normal a la superficie

El vector que resulta del producto vectorial entre $\vec{f}_u'$ y $\vec{f}_v'$ es perpendicular a ambos, y por lo tanto al plano tangente a la superficie S en $\vec{f}(u_0;v_0)$. Dicho vector es un vector normal a la superficie, lo designamos como $\vec{v}_n=(v_1;v_2;v_3)=\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'$.

$$\vec{v}_n=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_u'(u_0;v_0) & y_u'(u_0;v_0) & z_u'(u_0;v_0) \\ x_v'(u_0;v_0) & y_v'(u_0;v_0) & z_v'(u_0;v_0) \end{vmatrix}=(v_1;v_2;v_3)$$

[11] Ambos vectores deben ser no nulos y linealmente independientes.

Recta normal

Una ecuación de la recta normal en un punto $P_0 = (x_0;y_0;z_0) \in S$ es:

$$r_n(P_0): \ \frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

Ejemplo

$\vec{f}:\Re^2 \to \Re^3 \ / \ \vec{f}(u;v)=\left(u^2v;u^3-v;4u+2v\right)$ en $(u_0;v_0)=(1;2)$

$(u_0;v_0)=(1;2) \Rightarrow (x_0;y_0;z_0)=(2;-1;8)$

$\vec{f}_u'(P_0)=\left(2uv;3u^2;4\right)\Big|_{(1;2)}=(4;3;4),\quad \vec{f}_v'(P_0)=\left(u^2;-1;2\right)\Big|_{(1;2)}=(1;-1;2)$

$$\pi_t\,(P_0): \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$6.(x-2)-4.(z-8)+4.(y+1)-3.(z-8)+4.(x-2)-8.(y+1)=0$

$\pi_t\,(P_0):\ 10x-4y-7z-12=0$

$$\vec{v}_n=\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6\breve{i}-4\breve{k}+4\breve{j}+4\breve{i}-3\breve{k}-8\breve{j}=10\breve{i}-4\breve{j}-7\breve{k}$$

$\vec{v}_n=(10;-4;-7)$ $\qquad r_n(P_0):\ \dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-8}{-7}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Dados los siguientes campos vectoriales obtener las respectivas matrices jacobianas. Determinar conjunto A de continuidad de Df.

a) $\vec{f}(x;y)=\left(y+e^{x+y};xy^2\right)$ b) $\vec{f}(x;y)=\left(x^2+\cos y;ye^x\right)$

c) $\vec{f}(x;y;z)=\left(ze^x;-ye^z\right)$ d) $\vec{f}(x;y)=\left(xe^y+\cos y;x;x+e^y\right)$

e) $f(x;y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

2) Dados los siguientes campos escalares obtener los correspondientes campos vectoriales gradientes

a) $f(x;y)=x^3+5xy^2$ b) $f(x;y)=\ln x^3+5xy^2-\sqrt{xy}$

c) $f(x;y;z)=z^2x^3+\dfrac{y}{z^2}-xyz$

3) Verificar si los siguientes campos vectoriales son o no campos vectoriales gradientes. En caso de serlo determinar una función potencial.

a) $\vec{f}(\vec{x})=\left(4xy;2x^2\right)$ b) $\vec{f}(\vec{x})=\left(x^3+y;x-y^2\right)$

c) $\vec{f}(\vec{x})=\left(x^2+y^2;-2xy\right)$ d) $\vec{f}(\vec{x})=\left[e^x\operatorname{sen} y;e^x(\cos y+2)\right]$

e) $\vec{f}(\vec{x})=\left(2xy;x^2-y\right)$ f) $\vec{f}(\vec{x})=\left(ye^{xy};1+xe^{xy}\right)$

g) $\vec{f}(\vec{x})=\left(y^2+2xy;2xy+x^2\right)$ h) $\vec{f}(\vec{x})=(9x;4y;-36z)$

i) $\vec{f}(\vec{x})=\left(x^3y^2z;x^2z;x^2y\right)$ j) $\vec{f}(\vec{x})=\left(e^zy;e^zx;e^zxy\right)$

k) $\vec{f}(\vec{x})=\left(\dfrac{1}{y};-\dfrac{x}{y^2};2z-1\right)$ l) $\vec{f}(\vec{x})=\left(z^2+1;2yz;2xz+y^2\right)$

m) $\vec{f}(\vec{x})=\left(ze^x+e^y;xe^y-e^z;-ye^z+e^x\right)$

n) $\vec{f}(\vec{x})=\left(2x\cos y-3;-x^2\operatorname{sen} y-z^2;2-2yz\right)$

4) Dados los siguientes campos vectoriales obtener los correspondientes rotores y divergencias. Determinar si son irrotacionales o solenoidales.

a) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y)=(3x^2-2y^2;3-4xy)$
b) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y)=(ye^x;xe^y)$
c) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=(e^x sen\,y;-e^x cos\,y;0)$ en $\vec{x}_0=(0;0;3)$
d) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=[0;cos(xz);-sen(xy)]$
e) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=[sen(x-y);sen(y-z);sen(z-x)]$
f) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=(3z^3;3xz^2;4xy)$ en $\vec{x}_0=(-1;2;0)$
g) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=(e^{2x};3x^2yz;2y^2z+x)$
i) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=(x^2;-(x+y);z^3-sen\,x)$ en $\vec{x}_0=(0;1;2)$
j) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=\left(arc\,tg\,\frac{x}{y};ln\sqrt{x^2+y^2};1\right)$

5) Determinar la constante "*a*" de manera tal que el campo vectorial sea solenoidal.

a) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=(x+3y;y-2z;x+az)$
b) $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=\left[axy-z^3;(a-2).x^2;(2-a).xz^2\right]$ en $\vec{x}_0=(1;1;1)$

6) Determinar una "$a(\vec{x})$" de manera tal que el campo vectorial $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(x;y;z)=(3x^2+y;sen\,x+3z;a)$ sea solenoidal.

7) Hallar el $rot(\vec{f}\wedge\vec{g})$, si $\vec{f}(\vec{x})=(1;2x;3y)$ y $\vec{g}(\vec{x})=(x;-y;z)$

8) Dado $\vec{f}(\vec{x})=(xyz;y;z)$, hallar $rot(rot\,\vec{f})=\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{f})$

9) Comprobar que el campo $\vec{f}(\vec{x})=(2x;y;-3z)$ es solenoidal.

10) Comprobar que $\vec{f}(\vec{x})=\left[xy;\frac{x^2}{2}+z.cos(yz);y.cos(yz)\right]$ es irrotacional y calcular una función potencial.

11) Demuestre que cualquier campo vectorial donde f, g y h son funciones derivables definido por $\vec{f}(\vec{x}) = [f(x); g(y); h(z)]$, es irrotacional.

12) Hallar a, b y c para que el campo vectorial

$\vec{f}(\vec{x}) = (x + 2y + az; bx - 3y - z; 4x + cy + 2z)$ sea irrotacional.

13) Demostrar que la divergencia de $\vec{f}(\vec{x}) = (e^x sen\, y; e^x \cos y; z)$ es 1.

14) Hallar g(x) / $\vec{f}(\vec{x}) = [x.y^2; y.g(x)]$ admita función potencial si $\vec{f}(2;1) = (2;6)$.

15) Calcular la divergencia de

a) $\vec{f}(\vec{x}) = (xe^y; z.sen\, y; xy.ln\, z)$ en (–3;0;2)
b) $\vec{f}(\vec{x}) = (x^2 z; y^3 z^2 - x; xz^2 - y)$ en (1;2; –1)
c) $\vec{f}(\vec{x}) = (3x^2; 5y^2 z; -xyz^3)$ en (1; –2; 1)
d) $\vec{f}(\vec{x}) = (x^3 + z^3; x^2 y^2; -xy^2 z)$ en (–1;1; –1)

16) Si $\vec{r}(\vec{x}) = (x; y; z)$ y $r(x; y; z) = |\vec{r}|$, a) calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales y determinar si son solenoidales:

i) $\vec{r}$, ii) $\dfrac{\vec{r}}{r}$, iii) $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$, iv) $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

b) probar que: i) $\nabla \wedge (r^2.\vec{r}) = \vec{0}$ ii) $\nabla(ln\, r) = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$, iii) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

iv) $\nabla \wedge \left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{0}$

17) Verificar que las siguientes funciones son armónicas

a) $f(x; y) = ln\sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x; y) = e^x sen\, y + e^y \cos x$

c) $f(x; y) = ln(x^2 + y^2) + arc\ tg\dfrac{y}{x}$

d) $f(x; y; z) = x^2 - y^2 + 2z$

e) $f(x; y; z) = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2$

f) $f(x; y; z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

18) Calcular el laplaciano del campo $f(x;y;z)=\sqrt{2}x^3y^4z$ en (–1;0;2).

19) Demostrar que la función potencial escalar de un campo vectorial conservativo y solenoidal es una función armónica.

20) Dado $\vec{f}(\vec{x})=\left(-x^3+5xz;3y^3+z^2;z^4-3xy\right)$, demostrar que
$\nabla^2\vec{f}=\nabla\left(\nabla\bullet\vec{f}\right)-\nabla\wedge\left(\nabla\wedge\vec{f}\right)$

21) Determinar $g(x)$ tal que $f(x;y;z)=g(x)+y^2+z^2$ sea un campo armónico y que la superficie de nivel 1 de *f* pase por el origen de coordenadas y por P_0 = (2;2;2).

22) Si $f(x;y;z)=xy+yz+xz$ y $\vec{f}(\vec{x})=\left(x^2y;y^2z;z^2x\right)$, calcular:

a) $\left(\vec{f}\bullet\nabla f\right)$ en $(3;-1;2)$
b) $f.\left(\nabla\bullet\vec{f}\right)$ en $(3;-1;2)$
c) $\left(\nabla f\wedge\vec{f}\right)$ en $(3;-1;2)$
d) $\left(\nabla\wedge\vec{f}\right)$ en $(3;-1;2)$
e) $\nabla\left(\nabla\bullet\vec{f}\right)$ en $(3;-1;2)$ (gradiente de la divergencia)

23) Encontrar la ecuación de un vector normal, de la recta tangente y del plano tangente en:

a) $(u_0;v_0)=(1;1)$, de la superficie definida por la imagen de
$\vec{f}:\Re^2\to\Re^3\ /\ \vec{f}(u;v)=\left(u^2;v^2;u+2v\right)$.

b) $P_0=(-2;2;1)$, de la superficie definida por la imagen de
$$\vec{f}:\Re^2\to\Re^3\ /\ \vec{f}(u;v)=\left(u-v^2;\frac{v^2}{u};\frac{u}{v}\right).$$

RESPUESTAS

1) a) $D\vec{f}=\begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$ $A=\Re^2$ b) $D\vec{f}=\begin{pmatrix} 2x & -sen\,y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$ $A=\Re^2$

c) $D\vec{f}=\begin{pmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{pmatrix}$ $A=\Re^3$ d) $D\vec{f}=\begin{pmatrix} e^y & xe^y-sen\,y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$ $A=\Re^2$

e) $Df=\left[y.\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad x.\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right]$ $A=\Re^2-\{(0;0)\}$

2) a) $\vec{f}(\vec{x})=\left(3x^2+5y^2\right)\breve{i}+10xy\,\breve{j}$

b) $\vec{f}(\vec{x})=\left(\dfrac{3}{x}+5y^2-\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}\right)\breve{i}+\left(10xy-\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}\right)\breve{j}$

c) $\vec{f}(\vec{x})=\left(3x^2z^2-yz\right)\breve{i}+\left(\dfrac{1}{z^2}-xz\right)\breve{j}+\left(2x^3z-\dfrac{2y}{z^3}-xy\right)\breve{k}$

3) a) Sí, $U(x;y)=2x^2y$ b) Sí, $U(x;y)=\dfrac{x^4}{4}+xy-\dfrac{y^3}{3}$

c) No cumple la condición de simetría.
d) No cumple la condición de simetría.

e) Sí, $U(x;y)=x^2y-\dfrac{y^2}{2}$ f) Sí, $U(x;y)=e^{xy}+y$

g) Sí, $U(x;y)=xy^2+x^2y$ h) Sí, $U(x;y;z)=\dfrac{9}{2}x^2+2y^2-18z^2$

i) No es campo vectorial gradiente. $\dfrac{\partial P}{\partial z}\neq\dfrac{\partial R}{\partial x}$

j) Sí, $U(x;y;z)=xye^z$ k) Sí, $U(x;y;z)=\dfrac{x}{y}+z^2-z$

l) Sí, $U(x;y;z)=xz^2+x+y^2z$ m) Sí, $U(x;y;z)=ze^x+e^yx-e^zy$

n) Sí, $U(x;y;z)=x^2.cos\,y-yz^2-3x+2z$

4) a) $rot\,\vec{f}(\vec{x})=\vec{0}$, $div\,\vec{f}(\vec{x})=2x$, irrotacional

b) $rot\,\vec{f}(\vec{x})=(e^y-e^x)\breve{k}$, $div\,\vec{f}(\vec{x})=ye^x+xe^y$

c) $rot\,\vec{f}(0;0;3)=(0;0;-2)=-2\breve{k}$, $div\,\vec{f}(0;0;3)=0$, solenoidal

d) $rot\,\vec{f}(\vec{x})=[x.sen(xz)-x.cos(xy);y.cos(xy);-z.sen(xz)]$,

$div\,\vec{f}(\vec{x})=0$, solenoidal

e) $rot\,\vec{f}(\vec{x})=[cos(y-z);cos(z-x);cos(x-y)]$,

$div\,\vec{f}(\vec{x})=cos(x-y)+cos(y-z)+cos(z-x)$

f) $rot\,\vec{f}(-1;2;0)=(-4;-8;0)$, $div\,\vec{f}(\vec{x})=0$, solenoidal

g) $rot\,\vec{f}(\vec{x})=(4yz-3x^2y;-1;6xyz)$, $div\,\vec{f}(\vec{x})=2e^{2x}+3x^2z+2y^2$

h) $rot\,\vec{f}(0;1;2)=\breve{j}-\breve{k}$, $div\,\vec{f}(0;1;2)=11$

i) $rot\,\vec{f}(\vec{x})=\left(0;0;\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right)$, $div\,\vec{f}(\vec{x})=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

5) a) $a=-2$, b) $a=4$ 6) $a(\vec{x})=-6xz$

7) $rot\,(\vec{f}\wedge\vec{g})=(0;6x;-3y)$ 8) $rot\,(rot\,\vec{f})=(0;z;y)$

10) $U(x;y;z)=\dfrac{x^2y}{2}+sen(yz)$ 12) $a=4$, $b=2$, $c=-1$ 14) $g(x)=x^2+2$

15) a) $div\,\vec{f}(-3;0;2)=3$, b) $div\,\vec{f}(1;2;-1)=8$

c) $div\,\vec{f}(1;-2;1)=-8$ d) $div\,\vec{f}(-1;1;-1)=6$

16) a) i) 3, ii) 2 iii) $\dfrac{1}{r^2}$ iv) 0, es solenoidal

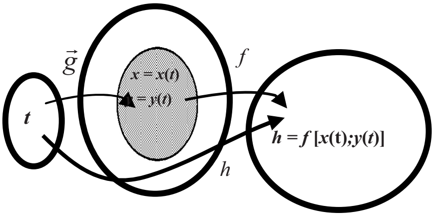
18) $\nabla^2 f=6\sqrt{2}xy^2z.(y^2+2x^2)$ 21) $g(x)=-2x^2+1$

22) a) 25, b) 2, c) (56; –30; 47), d) (–1; – 4; – 9), e) (2;10;4)

23) a) $x+2y-2z+3=0$, $x-1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\vec{v}_n=(1;2;-2)$

b) $x+3y+4z-8=0$, $x+2=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, $\vec{v}_n=(1;3;4)$

Capítulo 7



Funciones compuestas – implícitas - homogéneas

Funciones compuestas e implícitas de una y varias variables independientes.

Derivadas de funciones compuestas e implícitas.

Funciones definidas implícitamente por sistemas de ecuaciones.

Ecuaciones de las rectas tangente y normal.

Ecuación del plano tangente.

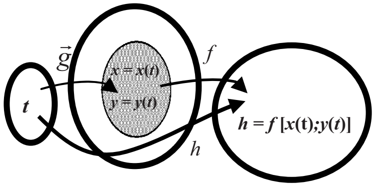
Funciones homogéneas: propiedades.

FUNCIONES COMPUESTAS

a) de una variable independiente – entre un campo escalar y una función vectorial

Consideramos un campo escalar $z = f\ (x;y)$ y una función vectorial $\vec{g}(t) = [x(t); y(t)]$, a través de la cual x e y son funciones escalares de otra variable t, con $Im\ x\ (t)$ y e $Im\ y\ (t) \subseteq\ Dom\ z$.

Calculamos la función compuesta h.

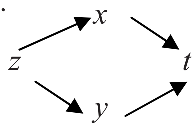


$$z = h(t) = (f \circ \vec{g})(t) = f[\vec{g}(t)]$$

Si reemplazamos se obtiene h en función de t: $h\,(t) = f\,[x\,(t); y\,(t)]$

Se dice que z es función compuesta de t a través de x e y.

Esta situación se puede expresar a través de la siguiente *red de variables*:

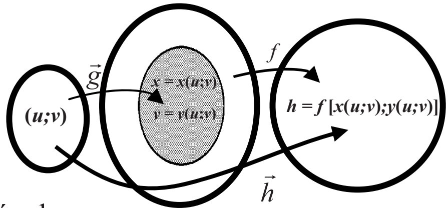


b) de dos variables independientes – entre un campo escalar y un campo vectorial

Consideramos un campo escalar $z = f\ (x;y)$ y un campo vectorial $\vec{g}(u;v) = [x(u;v); y(u;v)]$, a través del cual x e y son campos escalares de las variables u y v, con $Im\ x\ (u;v)$ e $Im\ y\ (u;v) \subseteq\ Dom\ z$.

Calculamos la función compuesta h.

$$z = h\,(u;v) = (f \circ \vec{g})(u;v) = f[\vec{g}(u;v)]$$



Si reemplazamos se obtiene h en función de u y v:

$$z = h\,(u;v) = f\,[x\,(u;v); y\,(u;v)]$$

Se dice que z es función compuesta de u y v a través de x e y.

Esta situación se puede expresar a través de la siguiente *red de variables*:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] \arrow[ddr] & u \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] \arrow[uur] & v \end{tikzcd}$$

DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Nos interesa conocer como calcular las derivadas en estos casos.

a) de una variable independiente (función escalar)

Si $z = f\,(x;y)$ es diferenciable y $\vec{g}(t)=[x(t);\,y(t)]$ es derivable, existe la derivada total de z respecto de t y la denominamos $\dfrac{dz}{dt}$.

Sabemos que $\dfrac{dz}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$. Para obtener dicha derivada partimos de la expresión del incremento de la función z, Δz.

$\Delta z=\dfrac{\partial z}{\partial x}.\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}.\Delta y+\varepsilon$, dividimos toda la expresión por Δt:

$\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\Delta x}{\Delta t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{\Delta y}{\Delta t}+\dfrac{\varepsilon}{\Delta t}$, ahora tomamos $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$, para obtener la $\dfrac{dz}{dt}$.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial z}{\partial x}.\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial z}{\partial y}.\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta t}$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada, el hecho de que $\dfrac{\partial z}{\partial x}\,y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}$ son constantes respecto de t y que el último término tiende a 0 por propiedad de los infinitésimos queda:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dh}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Relación entre la red de variables y la fórmula

Vemos que el número de términos que tiene la fórmula corresponde al número de *caminos* que hay para llegar de z a t. Además el número de factores de cada término coincide con el número de *tramos* que tiene cada camino.

Ejemplo: $z = x^2 + y^2$ con $\vec{g}(t) = (t^2;2t)$, hallar $h_t^{'}(1)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt} = 2x.2t + 2y.2 = 4x\,t + 4y$$

Si $t = 1 \Rightarrow (x;y) = (1;2)$, reemplazando: $\frac{dz}{dt}(1) = h_t^{'}(1) = 12$.

Expresión con matrices jacobianas

Expresamos las derivadas de la función compuesta a través de las matrices jacobianas.

$$\mathrm{D}h = \begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{1x1} = \begin{pmatrix} \frac{dh}{dt} \end{pmatrix}_{1x1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}_{1x2} \bullet \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}_{2x1} = \mathrm{D}f\,.\,\mathrm{D}\,\vec{g}$$

$$\mathrm{D}h = \begin{pmatrix} \frac{dh}{dt} \end{pmatrix}_{1x1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \end{pmatrix}_{1x1}$$

Vemos que multiplicando las matrices jacobianas llegamos a la misma fórmula.

b) de dos variables independientes (campo escalar)

Si $z = f\,(x;y)$ es diferenciable y $\vec{g}(u;v) = [x(u;v); y(u;v)]$ derivable, existen las derivadas parciales de z respecto de las variables u y v y las denominamos $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Empezamos calculando $\frac{\partial z}{\partial u}$. Sabemos que $\frac{\partial z}{\partial u} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u}$. Para obtener dicha derivadas partimos nuevamente de la expresión del incremento de la función z, Δz.

$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} . \Delta y + \varepsilon$, dividimos toda la expresión por Δu :

$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{\Delta y}{\Delta u} + \frac{\varepsilon}{\Delta u}$, ahora tomamos $\lim\limits_{\Delta u \to 0}$, para obtener la $\frac{\partial z}{\partial u}$.

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\partial z}{\partial x} . \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\partial z}{\partial y} . \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} + . \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta u} .$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada, el hecho de que $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son constantes respecto de u y que el último término tiende a 0 por propiedad de los infinitésimos queda: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial u}$

Análogamente, dividiendo por Δv, se puede demostrar que:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial v}$$

Expresión con matrices jacobianas

Expresamos las derivadas de la función compuesta a través de las matrices jacobianas.

$$\mathrm{D}h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}_{1x2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}_{1x2} \bullet \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix}_{2x2} = \mathrm{D}f . \mathrm{D}\vec{g}$$

Vemos que multiplicando las matrices jacobianas llegamos a la misma fórmula.

$$\mathrm{D}h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}_{1x2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{du} & \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{dv} \end{pmatrix}_{1x2}$$

Ejemplos: 1) $z = ln\dfrac{x}{y}$ y $\vec{g}(u;v) = \left(e^u + 5v; v^2 - 3u\right)$, calcular D$\vec{h}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{y}{x}.\frac{1}{y}.e^u + \frac{y}{x}.\left(-\frac{x}{y^2}\right).(-3) = \frac{e^u}{x} + \frac{3}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{y}{x}.\frac{1}{y}.5 + \frac{y}{x}.\left(-\frac{x}{y^2}\right).2v = \frac{5}{x} - \frac{2v}{y}$$

$$\mathrm{D}h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^u}{x} + \dfrac{3}{y} & \dfrac{5}{x} - \dfrac{2v}{y} \end{pmatrix}$$

2) $z = x.e^{xy}$, y $\vec{g}(u;v) = \left[sen\,(2u) + 3v^2; cos(2u) - 2uv\right]$, calcular D $h(0;0)$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u} = \left(e^{xy} + x.y.e^{xy}\right).2cos(2u) + x^2.\ e^{xy}.[2\ [-sen\ (2u)] - 2v]$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v} = \left(e^{xy} + xy.e^{xy}\right).6v + x^2.e^{xy}.(-2u)$$

Si $(u;v) = (0;0) \Rightarrow (x;y) = (0;1)$, reemplazando:

$h'_u(0;0) = 2$ y $h'_v(0;0) = 0 \Rightarrow \mathrm{D}\,h(0;0) = (2 \quad 0)$

3) Hallar mediante diferenciales el valor aproximado de z (1,01;0,02) siendo $z = h(u;v)$, definida por $z = xy^2$ con $\vec{g}(u;v) = \left(2u + v^2; u^2 + 2v\right)$.

$$dz = h'_x.dx + h'_y.dy = \left(z'_u.u'_x + z'_v.v'_x\right).dx + \left(z'_u.u'_y + z'_v.v'_y\right).dy$$

$$dz = \left(v^2.2 + 2uv.2x\right).dx + \left(v^2.2y + 2uv.2\right).dy$$

$x = 1$, $y = 0$, $u = 2$, $v = 1$, $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}02$

$dz(1;0) = 10.0{,}01 + 8.0{,}02 = 0{,}26$

$z\,(1{,}01;0{,}02) = z\,(1;0) + \Delta z \cong z\,(1;0) + dz\,(1;0) = 2 + 0{,}26 = 2{,}26$

Generalización

A partir de estos ejemplos podemos generalizar el cálculo de derivadas de funciones compuestas a otras situaciones utilizando las matrices jacobianas.

Si $\vec{f}:\Re^n \to \Re^m$ y $\vec{g}:\Re^p \to \Re^n$, entonces $\vec{h}=\vec{f}\circ\vec{g}:\Re^m \to \Re^p$ y la matriz jacobiana es $\mathrm{D}\vec{h}=\mathrm{D}\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)=\mathrm{D}\,\vec{f}\,.\mathrm{D}\,\vec{g}$

n: es el número de variables de $\vec{f}$

m: es el número de funciones de $\vec{f}$

p: es el número de variables de $\vec{g}$

m: es el número de funciones de $\vec{g}$

Para que el producto de matrices exista la cantidad de variables de $\vec{f}$ debe ser igual a la cantidad de funciones de $\vec{g}$.

Ejemplo

Dadas $\vec{f}(x;y)=\left(x+y;x;y^2\right)$ y $\vec{g}[x(u;v);y(u;v)]=\left(u^2+1;v^2\right)$, calcular la matriz jacobiana de $\vec{h}=\vec{f}\circ\vec{g}$ en (1;1)

Si $(u;v)=(1;1)$, $(x;y)=(2;1)$

$$D\vec{h}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}=D\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)=D\vec{f}\bullet D\vec{g}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & 0 \\ 0 & 4yv \end{pmatrix}$$

$$D\vec{h}=D\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)(1;1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular las funciones derivadas parciales que se indican como funciones compuestas

1) Dada $z = 3x^2 + 4y - 2xy$, $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$, hallar $\dfrac{dh}{dt}(1)$

2) Dada $z = 3x^2 + y - 2y^2$, $\vec{g}(t) = (2t^2 + 1;3t - 1)$, hallar $\dfrac{dh}{dt}(1)$

3) Dada $z = ln(x^2 + y^2)$, $\vec{g}(t) = (e^{-t};e^{t})$, hallar $\dfrac{dh}{dt}$ en $t = 0$

4) Dada $z = ln(x^2 + y^2)$, $\begin{cases} x = e^{-u} + 2u \\ y = e^{v} - 5v \end{cases}$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

5) Dada $z = x.e^{xy}$, $\begin{cases} x = sen(2u) + 3v^2 \\ y = cos(2u) - 2uv \end{cases}$, hallar D$h$ (0;0)

6) Dada $z = x^3 + y^2 - 2xy$, $\vec{g}(u;v) = (u + 3uv; v^2 - 3v + uv)$, hallar D$h$ (1;2)

7) Dada $u = e^{3xy} + xz^3$, $\vec{g}(t) = \left(\dfrac{1}{t};t^2;4t\right)$, hallar $\dfrac{du}{dt}$, en función de t.

8) Dada $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $\begin{cases} x = cos\, t \\ y = sen\, t \end{cases}$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = \dfrac{\pi}{2}$

9) Dada $z = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\vec{g}(t) = (cos\, t; sen\, t)$, hallar $\dfrac{dh}{dt}(0)$

10) Dada $z = \dfrac{x^3}{y^3}$, $\vec{g}(t) = (sen(2t);-cos\, t)$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = \dfrac{\pi}{3}$

11) Dada $z = x.ln\, y + y.ln\, x$, $\vec{g}(u;v) = (e^{u+v};e^{u-v})$, demostrar que:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 2.\left(ln\, y + \frac{y}{x}\right).e^{u+v}$$

12) Dada $z = e^{uv}.u$, $\begin{cases} u = sen(2x) + 3y^2 \\ v = cos(2x) - 2xy \end{cases}$, hallar $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ en (x;y) = 0;0)

13) Dada $z = x^3 + y^2$, $\vec{g}(u;v) = (u.cos\, v; u.sen\, v)$, analizar si se verifica que:

$$(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = (h'_u)^2 + \frac{1}{u^2}.(h'_v)^2$$

14) Demostrar que si $z = arc\ tg\,\dfrac{x}{y}$, $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$, se verifica que $h'_u + h'_v = \dfrac{u - v}{u^2 + v^2}$

15) Dada $z = e^x.sen\, y$, $\vec{g}(t) = (t^2;3t)$, calcular h''_{tt} .

16) Hallar mediante diferenciales el valor aproximado de h (1,01;0,02) si $z = h$ (x;y) función compuesta definida por $z = uv^2$ y $\begin{cases} u = x + y^2 \\ v = x^2 \end{cases}$.

17) Dada $z = u^3 - xv^2$ con $\begin{cases} u = x.\sqrt{y - x} \\ v = 2x + y^2 \end{cases}$ resulta $z = h$ (x;y). Hallar $h'_x(0;1)$.

18) Dada $z = 2uv - 2\sqrt{v - u}$ con $\vec{g}(x;y) = (x - y^2; x + 2xy - 1)$, es $z = h$ (x;y). Calcular la $\vec{h}'_{\vec{v}}(2;1)$ si $\vec{v}$ es la dirección que va hacia P_1 = (5; –3).

19) Dada $\vec{f}(x;y;z) = (x^2y; x^2z^2)$, $\vec{g}(u;v) = (u^2 + 2v; v^3 + 3u; u^2 + v^2)$, hallar D$h$ (1;0).

RESPUESTAS

1) $\dfrac{dh}{dt}(1)=20$ 2) $\dfrac{dh}{dt}(1)=51$ 3) $\dfrac{dz}{dt}(0)=0$

4) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}\left(-e^{-u}+2\right),\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}\left(e^{v}-5\right)$ 5) $Dh(0;0)=\begin{pmatrix}2 & 0\end{pmatrix}$

6) $Dh(0;0)=\begin{pmatrix}1.001 & 413\end{pmatrix}$

7) $\dfrac{du}{dt}(t)=3e^{3t}+128t$ 8) $\dfrac{dz}{dt}(\pi/2)=-2$ 9) $\dfrac{dh}{dt}(0)=2$

10) $\dfrac{dz}{dt}(\pi/3)=-9$ 12) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0;0)=2\,,\dfrac{\partial z}{\partial y}(0;0)=0$ 13) se verifica

15) $h''_{tt}=e^{t^2}\left[\left(4t^2-7\right).sen(3t)+12t.cos(3t)\right]$

16) h (1,01;0,02) $\cong$ 1,05 17) $h'_x(0;1)=-1$ 18) $h'_{\bar{v}}(2;1)=21$

19) $Dh(1;0)=\begin{pmatrix}15 & 12\\ 8 & 4\end{pmatrix}$

FUNCIONES IMPLÍCITAS

a) ***de una variable independiente***

Consideremos la ecuación $F(x;y) = 0$. Si en un entorno del punto $P_0 = (x_0;y_0)$ que satisface la ecuación y en el cual la misma es diferenciable, veremos bajo que condiciones se puede expresar en un entorno de $P_0 = (x_0 ; y_0)$ a una variable como función implícita de la otra.
Interesan saber dos problemas, primero bajo qué condiciones la expresión $F(x;y) = 0$ define, en un cierto conjunto, una función de una variable. Luego interesa calcular su derivada sin llevarla a la forma explícita. Estos dos problemas quedan definidos en el siguiente teorema.

b) ***de dos variables independientes***

Consideremos la ecuación $F(x;y;z) = 0$. Si en un entorno del punto $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$ que satisface la ecuación y en el cual la misma es diferenciable, veremos bajo que condiciones se puede expresar en el entorno de $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$ a una de las variables como función implícita de las otra dos.

DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Teorema de existencia y derivabilidad de una función definida en forma implícita

Teorema de Cauchy-Dini

Dada la ecuación $F(x;y) = 0$, y sea $P_0 = (x_0;y_0)$ un punto que la satisface, si se verifican las siguientes condiciones:

1) $F(x_0;y_0)=0$
2) F'_x y F'_y existen y son continuas en un entorno del punto P_0.
3) $F'_y(x_0;y_0)\neq 0$

entonces la ecuación $F(x;y)=0$ define a la variable y como función implícita de x en un entorno del punto P_0, y esta función es derivable y continua en P_0.

Si $F'_x(x_0; y_0) \neq 0$, entonces $F(x;y)=0$ define a la variable x como función implícita de y.

Generalización del teorema de existencia y derivabilidad

El teorema visto para la ecuación $F(x;y) = 0$ se puede extender para funciones definidas por ecuaciones del tipo $F(x;y;z) = 0$. Veremos bajo qué condiciones esta ecuación define, en un cierto conjunto, una función de dos variables derivable y continua en un entorno de un punto P_0.

1) $F(x_0; y_0; z_0) = 0$
2) F'_x, F'_y y F'_z existen y son continuas en un entorno del punto P_0.
3) $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$

Si estas condiciones se cumplen la ecuación $F(x;y;z) = 0$ define a la variable z como función implícita de x e y y esta función es derivable y continua en P_0.

Si $F'_x(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ la ecuación $F(x;y;z) = 0$ define a la variable x como función implícita de y y z y esta función es derivable y continua en P_0 y si $F'_y(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ la ecuación $F(x;y;z) = 0$ define a la variable y como función implícita de x y z y esta función es derivable y continua en P_0.

Nota: no siempre una ecuación del tipo $F(x;y) = 0$ o $F(x;y;z) = 0$ define a una variable como función implícita de las otras. Deben verificarse las condiciones del Teorema de Cauchy – Dini.

Si las condiciones del teorema de no se cumplen, no sabemos si la ecuación define o no a una variable como función implícita de las otras.

Veremos ahora como se obtienen las derivadas correspondientes cuando una función está definida en forma implícita.

Cálculo de las derivadas parciales

a) ***una variable independiente***

Partimos de la ecuación $F(x;y) = 0$, teniendo en cuenta que $y = f(x)$. Si $F(x;y) = 0$ en un conjunto A $\Rightarrow$ $dF(x;y) = 0$ (nos movemos sobre una curva de nivel).

$F'_x\,.\,dx + F'_y\,.\,dy = 0 \Rightarrow$ $\boxed{y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y} \;\; con \;\; F'_y \neq 0}$

Ejemplo: $F(x;y) = x^2 - 4xy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x-4y}{-4x} = \dfrac{x-2y}{2x} \quad x \neq 0$

Veamos si se puede calcular $y'(1;0{,}25)$. Vemos que se verifican las condiciones de existencia:

1) $F(1;0{,}25) = 0$
2) $F'_x = 2x - 4y$ y $F'_y = -4x$, existen y son continuas
3) $F'_y(1;0{,}25) = -4 \neq 0$

Por lo tanto se puede aplicar la fórmula para calcular $y'(1;0{,}25) = 4$

b) ***dos variables independientes***

Partimos de la ecuación $F(x;y;z) = 0$, teniendo en cuenta que $z = f(x;y)$.

Si $F(x;y;z) = 0$ en un conjunto A $\Rightarrow$ $dF(x;y;z) = 0$ (nos movemos sobre una superficie de nivel).

$F'_x\,.\,dx + F'_y\,.\,dy + F'_z.dz = 0$ (ver pág. 136) $\Rightarrow$ $dz = -\dfrac{F'_x}{F'_z}dx - \dfrac{F'_y}{F'_z}dy$ (1)

Si comparamos (1) con la expresión del diferencial de una función de dos variables (ver pág. 118) se deduce que:

$z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$ y $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$ con $F'_z \neq 0$.

Resumiendo: $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \;\; con \;\; F'_z \neq 0}$

Ejemplo: $F(x;y;z) = x^3 - 2xyz + z^2 = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\frac{3x^2 - 2yz}{-2xy + 2z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{-2xz}{-2xy + 2z} = \frac{xz}{-xy + z} \text{ con } -xy + z \neq 0$$

Veamos si verifican las condiciones de existencia en $P_0 = (-1;0;1)$.

1) $F(-1;0;1) = 0$

2) $F'_x = 3x^2 - 2yz$, $F'_y = -2xz$, $F'_z = -2xy + 2z$ existen y son continuas

3) $F_z(-1;0;1) = 2 \neq 0$

Por lo tanto se pueden aplicar las fórmulas para calcular:

$z'_x(-1;0;1) = -3/2$ y $z'_y(-1;0;1) = -1$

DERIVADAS SUCESIVAS

Si queremos calcular, por ejemplo, la derivada 2º de una función definida en forma implícita se procede de la siguiente forma:

Ejemplo: hallar z''_{xx} si $F(x;y;z) = 2x^2y - z^2 + x = 0$

Primero debemos calcular z'_x, derivando como función implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 1}{-2z} = \frac{4xy + 1}{2z}$$

Al calcular la derivada segunda, ya no tenemos que derivar una función implícita, sino que tenemos que obtener la derivada de la derivada primera que está definida en forma explícita.

Pero al derivar respecto de ***x*** debemos tener en cuenta que z es función de x e y, y que por lo tanto la derivada del denominador respecto de ***x*** entonces es: $2z'_x$.

$z''_{xx} = \dfrac{4y.2z - (4xy+1).2z'_x}{(2z)^2}$, procedemos a sustituir z'_x por su expresión:

$$z''_{xx} = \frac{8yz - (4xy+1).\,2\,.\,\dfrac{(4xy+1)}{2z}}{(2z)^2} = \frac{8yz^2 - (4xy+1)^2}{4z^3}$$

Conclusión: al obtener las derivadas sucesivas se deriva como se derivan funciones explícitas, pero teniendo en cuenta que $z = f(x;y)$.

Ejemplo general resuelto

Calcular las derivadas parciales en el punto $P_0 = (2;1)$ de la función $z(x;y) = \dfrac{\sqrt{g(x;y)}}{h(x;y)}$ si $u = g(x;y)$ viene definida implícitamente por $ue^{u-4} - 2xy = 0$. Suponemos que $h(x;y)$ es continua y derivable con plano tangente horizontal en (2;1;3).

Si $x_0 = 2$ y $y_0 = 1$, $u_0 = 4$. Calculamos $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ como funciones implícitas.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{-2y}{e^{u-4} + u.e^{u-4}}\bigg|_{(2;1;4)} = \frac{2}{5}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{-2x}{e^{u-4} + u.e^{u-4}}\bigg|_{(2;1;4)} = \frac{4}{5}$$

$$z'_x = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'_x.h(x;y) - \sqrt{u}.h'_x}{h^2(x;y)}\Bigg|_{(2;1;4)} = \frac{\dfrac{1}{4}.\dfrac{2}{5}.3 - 4.0}{9} = \frac{1}{30},$$

$$z'_y = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'_y.h(x;y) - \sqrt{u}.h'_y}{h^2(x;y)}\Bigg|_{(2;1;4)} = \frac{\dfrac{1}{4}.\dfrac{4}{5}.3 - 4.0}{9} = \frac{1}{15}$$

FUNCIONES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE POR SISTEMAS DE ECUACIONES

Así como una superficie puede estar definida en forma implícita por una ecuación, también se puede definir una curva en el espacio (función de una sola variable) a través de un sistema de dos ecuaciones.

Por ejemplo, si dos superficies están definidas respectivamente por las ecuaciones $F(x;y;z) = 0$ y $G(x;y;z) = 0$, y existe un punto $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$ que pertenece a ambas, entonces puede existir, bajo ciertas condiciones, una curva común a ambas definida por dos funciones f y g tales que $y = f(x)$ y $z = g(x)$.

Bajo estas condiciones decimos que el sistema de ecuaciones define implícitamente a dos de las variables como función de la restante. Es decir que $y = f(x)$, $z = g(x)$, quedan definidas implícitamente por el sistema:

$$\begin{cases} F(x;y;z) = 0 \\ G(x;y;z) = 0 \end{cases}$$

Buscamos ahora las derivadas de y y de z respecto de x (dy/dx, dz/dx).

Las condiciones de existencia son similares a las que se exige a funciones implícitas definidas por una sola ecuación. Si F y G son diferenciables queda:

$$\begin{cases} dF = F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_z\, dz = 0 \\ dG = G'_x\, dx + G'_y\, dy + G'_z\, dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_y\, dy + F'_z\, dz = -\ F'_x\, dx \\ G'_y\, dy + G'_z\, dz = -\ G'_x\, dx \end{cases}$$

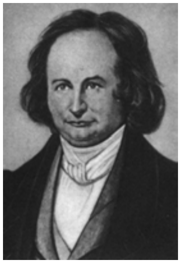
$$\Rightarrow \begin{cases} F'_y\, \dfrac{dy}{dx} + F'_z\, \dfrac{dz}{dx} = -F'_x \\ G'_y\, \dfrac{dy}{dx} + G'_z\, \dfrac{dz}{dx} = -G'_x \end{cases} \quad \text{si } dx \neq 0.$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$. El determinante formado por los coeficientes de las incógnitas recibe el nombre de ***jacobiano*** de F y G respecto de las variables y y z.

Se lo designa:

$$\frac{\partial(F;G)}{\partial(y;z)}=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

JACOBI, ***Karl Gustav Jacob (1804-1851):*** famoso matemático alemán de origen judío, destacado por sus aportes en Física y Astronomía. A los 21años era profesor de Konigsberg. Son reconocidos mundialmente sus estudios sobre las funciones elípticas, que estudió junto a Abel y se publican en 1829; las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones y la teoría de números. Se le deben estudios sobre determinantes funcionales, uno de los cuales se llama ***jacobiano*** debido a él.



Si este determinante no se anula, el sistema tiene solución única para las incógnitas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$. Por lo tanto el sistema define a las variables y y z como funciones implícitas de x. Las incógnitas se pueden obtener aplicando la regla de Cramer (o cualquier otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales).

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}$$

Si usamos una notación análoga a la ya vista para cada jacobiano, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F;G)}{\partial(x;z)}}{\dfrac{\partial(F;G)}{\partial(y;z)}} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F;G)}{\partial(y;x)}}{\dfrac{\partial(F;G)}{\partial(y;z)}}$$

Ejemplos

1) Suponiendo que se verifican las condiciones de existencia, calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ para las funciones definidas implícitamente por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 - 5z + 1 = 0 \\ x - y + z^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Primero calculamos el jacobiano del sistema para ver si existen las derivadas:

$$\frac{\partial (F;G)}{\partial (y;z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y^2 & -5 \\ -1 & 3z^2 \end{vmatrix} = 18y^2z^2 - 5 \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{18y^2z^2-5} = -\frac{\dfrac{\partial (F;\,G)}{\partial (x;\,z)}}{18y^2z^2-5} = -\frac{\begin{vmatrix} 3x^2 & -5 \\ 1 & 3z^2 \end{vmatrix}}{18\ y^2z^2-5} = -\frac{9x^2z^2+5}{18\ y^2z^2-5}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{18y^2z^2-5} = -\frac{\dfrac{\partial (F;\,G)}{\partial (y;\,x)}}{18y^2z^2-5} = -\frac{\begin{vmatrix} 6y^2 & 3x^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{18y^2z^2-5} = -\frac{6y^2+3x^2}{18y^2z^2-5}$$

2) Calcular $\dfrac{dz}{dt}$ si $z = y\,.\,a^{sen\,x}$ con $\begin{cases} 2x + y^2 = t \\ x^3 - 2y = t^2 \end{cases}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,.\,a^{sen\,x}.\,ln\,a\,.\,cos\,x \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = a^{sen\,x}$$

Para calcular $\dfrac{dx}{dt}\ y\ \dfrac{dy}{dt}$ debemos calcular los jacobianos.

$$\frac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(x;y)}=\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2y \\ 3x^2 & -2 \end{vmatrix}=-4-6x^2y$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_t & F'_y \\ G'_t & G'_y \end{vmatrix}}{-4-6x^2y}=-\frac{\frac{\partial\,(F;\,G)}{\partial\,(t;\,y)}}{-4-6x^2y}=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2y \\ -2t & -2 \end{vmatrix}}{-4-6x^2y}=-\frac{2+4yt}{-4-6x^2y}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_t \\ G'_x & G'_t \end{vmatrix}}{-4-6x^2y}=-\frac{\frac{\partial\,(F;\,G)}{\partial\,(x;\,t)}}{-4-6x^2y}=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3x^2 & -2t \end{vmatrix}}{-4-6x^2y}=-\frac{-4t+3x^2}{-4-6x^2y}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1+2\,yt}{2+3x^2y} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{-4t+3x^2}{4+6x^2y}$$

Reemplazando queda: $\dfrac{dz}{dt}=y.a^{sen\,x}.\ln a\,.\cos x\,.\dfrac{1+2\,yt}{2+3x^2y}+a^{sen\,x}.\dfrac{-4t+3x^2}{4+6x^2y}$

Otra situación

Consideremos el siguiente caso: $F\,(x;y;u;v)=0$ y $G\,(x;y;u;v)=0$ pueden definir implícitamente dos funciones de dos variables independientes, por ejemplo $u=f\,(x;y)$ y $v=g\,(x;y)$.

Se pueden obtener las derivadas parciales de f y g respecto de x e y.

Calculando los diferenciales de F y G tenemos:

$$\begin{cases} dF=F'_x\,dx+F'_y\,dy+F'_u\,du+F'_v\,dv=0 \\ dG=G'_x\,dx+G'_y\,dy+G'_u\,du+G'_v\,dv=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F'_u\ du + F'_v\ dv = -F'_x\ dx - F'_y\ dy \\ G'_u\ du + G'_v\ dv = -G'_x\ dx - G'_y\ dy \end{cases}$$

El jacobiano del sistema es: $\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial(u;v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$

Por lo tanto,

$$du = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x\,.\,dx + F'_y\,.\,dy & F'_v \\ G'_x\,.\,dx + G'_y\,.\,dy & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}\,.\,dx - \frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_v \\ G'_y & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}\,.\,dy$$

Es decir que $\quad du = -\dfrac{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(x;v)}}{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;v)}}\,.\,dx - \dfrac{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(y;v)}}{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;v)}}\,.\,dy$

Pero como además sabemos que $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy$, resulta que, para variables x e y independientes: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(x;v)}}{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;v)}}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(y;v)}}{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;v)}}$

Análogamente surge que: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;x)}}{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;v)}}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;y)}}{\dfrac{\partial\,(F;G)}{\partial\,(u;v)}}$

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} u+v-x-y=0 \\ xu+yv-1=0 \end{cases}$ define a u y v como funciones de x e y. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ u & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{-y-u}{y-x}=\frac{u+y}{y-x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ v & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{-y-v}{y-x}=\frac{v+y}{y-x}$$

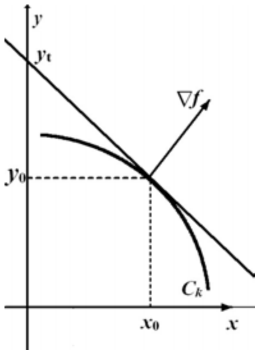
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{u+x}{y-x}=\frac{u+x}{x-y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & y\end{vmatrix}}=-\frac{v+x}{y-x}=\frac{v+x}{x-y}$$

La Ecuación de la Recta Tangente y de la Recta Normal para Funciones Implícitas en $\Re^2$

Consideramos la ecuación $F\,(x;y) = 0$, ecuación que suponemos define a y como función implícita de x. La representación gráfica es una curva en $\Re^2$.

Recta tangente a una curva de nivel

Sabemos por Análisis I que la ecuación de la recta tangente a una curva en $P_0=(x_0;y_0)$ es: $y_t-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.



Como la función está definida en forma implícita:

$$y_t-y_0=-\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.(x-x_0)$$

donde $P_0=(x_0;y_0)$ satisface la ecuación $F\,(x;y) = 0$.

$$F'_x(\mathrm{P}_0).(x-x_0)+F'_y(\mathrm{P}_0).(y_t-y_0)=0$$

$$\left[F'_x(\mathrm{P}_0);F'_y(\mathrm{P}_0)\right]\bullet(x-x_0;y_t-y_0)=0$$

Propiedad del vector gradiente en $\Re^2$

Si consideramos la ecuación $F(x;y)=0$ como la curva de nivel 0 de una función $z=f(x;y)$, esta función tiene derivadas parciales continuas.
En este caso las derivadas $F'_x(\mathrm{P}_0)$ y $F'_y(\mathrm{P}_0)$ coinciden con las derivadas parciales $f'_x(\mathrm{P}_0)$ y $f'_y(\mathrm{P}_0)$ de $z=f(x;y)$ y $\left[f'_x(\mathrm{P}_0);f'_y(\mathrm{P}_0)\right]=\nabla f(\mathrm{P}_0)$. Por lo tanto:

$$\nabla f(\mathrm{P}_0)\bullet(x-x_0;y_t-y_0)=0$$

Ecuación vectorial de la recta tangente

El vector gradiente es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel en el punto P_0. Eso quiere decir que la derivada direccional máxima está en la dirección perpendicular a la de la recta tangente.

El sentido del vector gradiente es aquel según el cual las curvas de nivel crecen más rápidamente.

Vector normal a una curva de nivel

Es el vector perpendicular a la recta tangente y su dirección y sentido coinciden con la dirección y sentido del vector gradiente en el punto.

Recta normal a una curva de nivel

Es la recta que tiene como vector director al vector normal, es decir al gradiente: $y_n(\mathrm{P}_0):(x;y)=(x_0;y_0)+\lambda.\vec{v}_n \qquad \lambda\in\Re$

Ejemplo

Si $z=f(x;y)=x^2+y^2-4x-6y+8$, la curva de nivel de nivel 0 es $x^2+y^2-4x-6y+8=0$. La ecuación $F(x;y)=x^2+y^2-4x-6y+8=0$ define a la variable *y* como función implícita de *x*.

El vector gradiente de f es $\nabla f = (2x-4;2y-6)$. Por ejemplo, en el punto $P_0 = (3;5)$ es $\nabla f(3;5) = (2;4) = 2\breve{i} + 4\breve{j}$.

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es: $\nabla f(3;5) \bullet (x-3; y_t - 5) = 0$

$y_t(P_0)$: $(2;4) \bullet (x-3; y_t - 5) = 0 \Rightarrow 2.(x-3) + 4.(y_t - 5) = 0$

$$2x + 4y_t - 26 = 0 \Rightarrow y_t = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{13}{2}$$

El vector normal en $P_0 = (3;5)$, es $\vec{v}_n = (2;4)$

Y la ecuación de la recta normal es $y_n(P_0): (x; y_n) = (3;5) + \lambda.(2;4)$

De donde surge que $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y_n - 5}{4} \Rightarrow 2(x-3) = y_n - 5$

En su forma explícita la ecuación de la recta normal es: $y_n = 2x - 1$

La Ecuación del Plano Tangente y de la Recta Normal para Funciones Implícitas en $\Re^3$

Consideramos la ecuación $F(x; y; z) = 0$. Si esta ecuación define a la variable z como función implícita de x e y, se pueden obtener las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal en un punto $P_0 = (x_0;y_0;z_0)$ reemplazando en las ecuaciones ya vistas (pág. 134):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} .$$

Así obtenemos: $z_t - z_0 = -\dfrac{F'_x(P_0)}{F'_z(P_0)}.(x - x_0) - \dfrac{F'_y(P_0)}{F'_z(P_0)}.(y - y_0)$

Multiplicando por $F'_z(\mathrm{P}_0)$ queda:

$F'_x(\mathrm{P}_0).(x-x_0)+F'_y(\mathrm{P}_0).(y-y_0)+F'_z(\mathrm{P}_0).(z_t-z_0)=0$ ❶, que es la ecuación del plano tangente cuando la función está expresada en forma implícita.

Haciendo la misma sustitución en la ecuación de la recta normal queda:

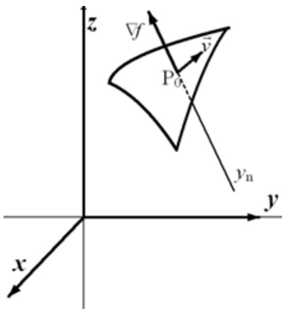
$$r_n(\mathrm{P}_0):\quad \frac{x-x_0}{F'_x(\mathrm{P}_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(\mathrm{P}_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(\mathrm{P}_0)}$$

Siempre y cuando las derivadas no se anulen en el punto P_0.

Propiedad del vector gradiente en $\Re^3$

Consideramos la función $u=f(x;y;z)$ de la cual la superficie de nivel o superficie equipotencial de nivel 0 es $F(x;y;z)=0$.

Obsérvese que las derivadas $F'_x(\mathrm{P}_0)$, $F'_y(\mathrm{P}_0)$ y $F'_z(\mathrm{P}_0)$ coinciden con las derivadas parciales de $u=f(x;y;z)$.



Pero $\left[f'_x(\mathrm{P}_0);f'_y(\mathrm{P}_0);f'_z(\mathrm{P}_0)\right]=\nabla f(\mathrm{P}_0)$, por lo tanto podemos expresar la ecuación del plano tangente ❶ de la siguiente manera:

$$\pi_t(\mathrm{P}_0):\ \nabla f(\mathrm{P}_0)\bullet(x-x_0;y-y_0;z_t-z_0)=0$$

Vemos que el vector gradiente es perpendicular a la superficie de nivel. Por lo tanto la recta normal es la que tiene la dirección del vector gradiente.

$$\vec{v}_n(\mathrm{P}_0)=\nabla f(\mathrm{P}_0)=\left[f'_x(\mathrm{P}_0);f'_y(\mathrm{P}_0);f'_z(\mathrm{P}_0)\right]$$

Ejemplos

a) $F(x;y;z)=2x^2+y^2-3xyz=0$ y $P_0=(1;1;1)$

$f'_x=4x-3yz\big|_{(1;1;1)}=1 \quad f'_y=2y-3xz\big|_{(1;1;1)}=-1 \quad f'_z=-3xy\big|_{(1;1;1)}=-3$

$\pi_t(P_0)$: $(1;-1;-3)\bullet(x-1;y-1;z_t-1)=0$

$\pi_t(P_0)$: $(x-1)-1.(y-1)-3.(z_t-1)=0 \Rightarrow x-y-3z_t+3=0$

La ecuación de la recta la normal es $r_n(P_0)$: $x-1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$

b) $F(x;y;z)=2x^2+4yz-5z^2+10=0$ y $P_0=(3;-1;2)$

$\nabla f=(4x;4z;4y-10z) \Rightarrow \nabla f(P_0)=(12;8;-24)$

$\pi_t(P_0)$: $(12;8;-24)\bullet[(x-3);(y+1);(z_t-2)]=0$

$\pi_t(P_0)$: $12(x-3)+8(y+1)-24(z_t-2)=0$

$\pi_t(P_0)$: $12x+8y-24z_t+20=0$ o $\pi_t: 3x+2y-6z_t+5=0$

La ecuación de la recta la normal es $r_n(P_0)$: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-6}$

c) ¿Es el vector (4;6;3) normal a la superficie del elipsoide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=3$ en el punto $P_0=(3;2;4)$?

Para que el vector sea normal a la superficie en P_0 debe ser proporcional al vector gradiente en P_0. Calculamos el vector gradiente.

$f'_x=2x/9$, $f'_y=y/2$, $f'_z=z/8 \Rightarrow \nabla(3;2;4)=\left(2/3;1;1/2\right)$

$(4;6;3)=6.\left(2/3;1;1/2\right)$, por lo tanto es proporcional a $\left(2/3;1;1/2\right)$. Entonces el vector (4;6;3) es normal a la superficie en P_0.

Recta tangente y plano normal a una curva definida por la intersección de dos superficies

Si un sistema de ecuaciones $\begin{cases} F(x;y;z)=0 \\ G(x;y;z)=0 \end{cases}$ define, en un entorno de $P_0=(x_0;y_0;z_0)$, que pertenece a ambas superficies, a una curva en el espacio como intersección de dos superficies, con ecuaciones $y=f(x)$ y $z=f(x)$, la dirección del vector $\vec{v}_t$, tangente a la curva, está dada por el producto vectorial entre los vectores gradientes de cada superficie. Esto se debe a que los vectores gradientes son perpendiculares a $\vec{v}_t$.

Debemos calcular los vectores gradientes, considerando que ambas ecuaciones corresponden a superficies equipotenciales correspondientes a las funciones $u_1=f(x;y;z)$, $u_2=g(x;y;z)$.

$$\nabla f(P_0)=\left(f'_x(P_0);f'_y(P_0);f'_z(P_0)\right),\quad \nabla g(P_0)=\left(g'_x(P_0);g'_y(P_0);g'_z(P_0)\right)$$

Luego calculamos $\vec{v}_t(P_0)$

$$\vec{v}_t(P_0)=\nabla f(P_0)\wedge\nabla g(P_0)=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ f'_x(P_0) & f'_y(P_0) & f'_z(P_0) \\ g'_x(P_0) & g'_y(P_0) & g'_z(P_0) \end{vmatrix}=v_1\breve{i}+v_2\breve{j}+v_3\breve{k}$$

Ecuaciones de la recta tangente

a) $r_t(P_0):\ \dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3}$

b) $r_t(P_0):\ (x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+\lambda.(v_1;v_2;v_3)$

Ecuación del plano normal

$$\pi_n(P_0):\ (v_1;v_2;v_3)\bullet(x-x_0;y-y_0;z-z_0)=0$$

Ejemplo: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{cases}$ en $P_0=(1;2;3)$

$$\nabla f=(1;1;1) \Rightarrow \nabla f(P_0)=(1;1;1) \qquad \nabla g=(2x;2y;2z) \Rightarrow \nabla g(P_0)=(2;4;6)$$

Calculamos $\vec{v}_t(P_0)=\nabla f(P_0)\wedge\nabla g(P_0)=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=2\breve{i}-4\breve{j}+2\breve{k}$

Ecuaciones de la recta tangente

a) $r_t(P_0):\ x-1=\dfrac{y-2}{-2}=z-3$ b) $r_t(P_0):\ (x;y;z)=(1;2;3)+\lambda.(1;-2;1)$

Ecuación del plano normal

$$\pi_n(P_0):\ (2;-4;2)\bullet(x-1;y-2;z-3)=0 \Rightarrow 2(x-1)-4(y-2)+2(z-3)=0$$
$$\pi_n(P_0):\ x-2y+z=0$$

Superficies tangentes

Si dos superficies tienen un plano tangente común en un punto P_0, se dice que son *tangentes*. Para eso los vectores gradientes correspondientes a ambas superficies en el punto deben ser paralelos.

$$\nabla f(P_0) /\!/ \nabla g(P_0) \Rightarrow \nabla f(P_0)=k.\nabla g(P_0)$$

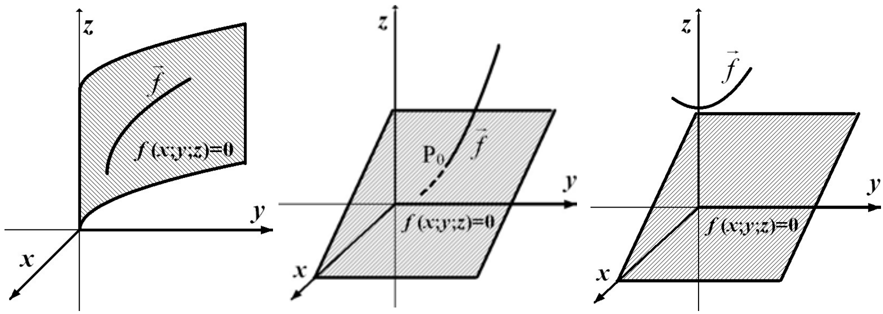
Ejemplo: $\begin{cases} xyz=36 \\ 4x^2+y^2+9z^2=108 \end{cases}$ en $P_0=(3;6;2)$

$$\nabla f=(yz;xz;xy) \quad\Rightarrow\quad \nabla f(P_0)=(12;6;18)$$
$$\nabla g=(8x;2y;18z) \quad\Rightarrow\quad \nabla g(P_0)=(24;12;36)$$

$\nabla g(P_0)=2.\nabla f(P_0) \Rightarrow$ las superficies son tangentes en $P_0=(3;6;2)$.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA CURVA ALABEADA Y UNA SUPERFICIE

Dada una curva $\vec{f}:[a;b]\to\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=[x(t);y(t);z(t)]$ y una superficie definida por $f(x;y;z)=0$, puede ocurrir que la superficie contenga a la curva (la curva yace sobre la superficie), que la curva interseque a la superficie o que la curva no tenga contacto con la superficie.



1) Curva que yace sobre una superficie

Para saber si la curva yace sobre la superficie debemos verificar si la curva satisface la ecuación. Si esto es así, entonces la curva yace sobre la superficie.

Ejemplos

a) $\vec{f}:[a;b]\to\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(-t^2-1;t^2+3;2t\right)$ y $z^2+2y+6x=0$

$$(2t)^2+2.\left(t^2+3\right)+6\left(-t^2-1\right)=4t^2+2t^2+6-6t^2-6=0$$

Vemos que la curva verifica la ecuación por lo tanto la curva yace sobre la superficie.

b) $\vec{f}:[a;b]\to\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(2t^2;1-t;3+t^2\right)$ y $3x-14y+z-10=0$

$$6t^2-14.(1-t)+3+t^2-10=7t^2+14t-21\neq 0$$

Vemos que la curva no verifica la ecuación por lo tanto la curva no yace sobre la superficie. Vemos ahora si hay intersección entre ambas.

2) Intersección entre una curva y una superficie

Para buscar la intersección de una curva y una superficie buscamos los valores de t que verifican la ecuación.

Ejemplos

a) Si volvemos al ejemplo anterior, buscamos las posibles intersecciones.

$$7t^2 + 14t - 21 = 0, \quad t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1 \text{ y } t_2 = -3.$$

La curva interseca a la superficie en dos puntos.

Si $t_1 = 1$, entonces $P_1 = (2;0;4)$; si $t_2 = -3$, entonces $P_2 = (18;4;12)$.

b) $\vec{f} : [a;b] \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(t) = (t + 2; 5t^2 - 3t; 2t)$ y $2x + y - z^2 = 0$

$$2(t+2) + 5t^2 - 3t - 4t^2 = t^2 - t + 4 = 0$$

Vemos que esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, por lo tanto la curva no interseca a la superficie.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) *Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones definidas implícitamente si $z = f(x;y)$*

a) $F(x;y;z) = x^2.z^2 + ysen(xz) - 2 = 0$
b) $F(x;y;z) = sen(xy) + sen(yz) + sen(xz) = 0$ en $P_0 = (\pi;0;0)$
c) $x + y + z = sen(xyz)$ en el origen
d) $F(x;y;z) = x + 3y + 2z - ln\, z = 0$
e) $F(x;y;z) = e^x.cos(x+z) - z = 1$ en el origen
f) $F(x;y;z) = 2sen(xyz) + z.x^3 - y^3 + 1 = 0$
g) $F(x;y;z) = z^2.e^{xy-2} + 2x - 4y - z = 0$
h) $F(x;y;z) = 4xz + 21 - 3x^2 - sen(yz) = 0$ en $P_0 = \left(-2;\frac{\pi}{2};1\right)$
i) $z.e^{yz} + 2x.e^{xz} = 3 + 4e^{xy}$
j) $ln(x+y+z) = z$ en $P_0 = (e;-1;1)$

2) $F(x;y;z) = z^2 - 2xy + y^2 = 0$, calcular z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

3) $F(x;y;z) = x + yz^2 = 0$, calcular z''_{xx}

4) Calcular z''_{xy}: a) $F(x;y;z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} - z^2 - 1 = 0$

b) $F(x;y;z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + z - 4 = 0$ en $P_0 = (1;1;1)$

5) Dada $F(x;y;z) = x + y + z + z^2 - 4 = 0$, demostrar que se verifica la relación de Schwarz.

6) Dada $F(x;y;z) = x^3z + 2xy - 3 = 0$, hallar $f'_{135^o}(1;1;z_0)$

7) Dado el elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$, calcular la pendiente de la recta tangente a la curva, situada en el primer octante, determinada:

a) por la intersección con el plano $y = 1$, en el punto $x_0 = 2$.
b) por la intersección con el plano $x = 2$, en el punto $y_0 = 1$.

8) Dada $xy - e^{z-x} = ln\, z$ que define a z como función implícita de x e y, hallar por aproximación lineal $z = f(1,1;0,97)$.

9) Calcular aplicando diferenciales f (0,1;0,09) si $z + cos(xz) - y.e^{yz} = 0$ define a $z = f(x;y)$ en forma implícita.

10) Dada $xy + xz + yz = 3$ que define a $z = f(x;y)$, hallar el $dz(1;1)$.

11) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal de las siguientes funciones definidas en forma implícita.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ en $P_0 = (3;5)$

b) $x^2 + y^2 - 2yx - 1 = 0$ en $P_0 = (1;2)$

c) $cos\, x + sen\, y - 2x = 1$ en $P_0 = (0;0)$

d) $x^2 + y^2 - yx - 3 = 0$ en $P_0 = (1;2)$

12) Hallar la ecuación del plano tangente, de la recta normal y de un vector normal de las siguientes funciones definidas en forma implícita.

a) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$ en $P_0 = (2;-2;z_0)$

b) $x^2yz^3 - 2xz + 4zy - 7 = 0$ en $P_0 = (1;-1;-1)$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ en $P_0 = (2;1;z_0)$

d) $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 - 10 = 0$ en $P_0 = (2;1;-1)$

e) $xyz = 12$ en $P_0 = (2;-2;-3)$

13) Encuentre el punto de la superficie $z = xy$ donde la recta normal es paralela a la recta $x = 2 - 6t$; $y = 3 - 12t$; $z = 2 + 3t$.

14) Dado el sistema $\begin{cases} 2\, sen\, x - cos\, y.sen\, z - \sqrt{2} = 0 \\ 2\, cos\, x - sen\, y.cos\, z - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$ que define a $y = f(x)$ y $z = g(x)$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ en $P_0 = \left(\dfrac{\pi}{4};0;0\right)$.

15) Dado el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases}$ que define a $y = f(x)$ y $z = g(x)$, calcular y'_x y z'_x en $P_0 = (1;1;1)$.

16) Dado el sistema $\begin{cases} u^5 + v^5 + x^5 = 3y - v \\ u^3 + v^3 + y^3 = -3x - 2 \end{cases}$ que define a u y v como funciones de x e y, calcular u'_x en $P_0 = (x_0;y_0;u_0;v_0) = (-1;0;1;0)$.

17) Dada $z = u - v^2 + 2$ y el sistema $\begin{cases} e^u + v - x + y = 1 \\ u + \cos v - xy = 0 \end{cases}$ que define a u y v como funciones de x e y, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en $P_0 = (x_0;y_0;u_0;v_0) = (1;1;0;0)$.

18) Dada $\begin{cases} x^2 - xy + v^2 - ux = 0 \\ xv + y^2 - vy - uv = 0 \end{cases}$ que define a u y v como funciones de x e y, calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en $P_0 = (x_0;y_0;u_0;v_0) = (1;1;1;1)$.

19) El sistema $\begin{cases} uy + uv - x - v = 0 \\ x.e^x + y.e^y - v.e^v = 0 \end{cases}$ que define a u y v como funciones de x e y, calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en $P_0 = (x_0;y_0;u_0;v_0) = (1;0;2;1)$.

20) Dada $z = 2uv$ y el sistema $\begin{cases} u^5 + v^5 + x^5 = 3y \\ u^3 + v^3 + y^3 = -3x \end{cases}$ que define a u y v como funciones de x e y, calcular z'_x.

21) El sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$ define a $y = f(x)$ y $z = g(x)$, calcular y''_{xx}.

22) El sistema $\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x^2 + y^2 + z^2 \\ w = x^3 + y^3 + z^3 \end{cases}$ define a u, v y w como funciones de $(x;y;z)$, calcular $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

23) Dado el sistema $\begin{cases} u = 3x + 4y - z \\ v = 2x - y + 3z \\ w = 6x + 8y - 2z + 1 \end{cases}$ determinar si define a ($x;y;z$) como funciones implícitas de ($u;v;w$).

24) Dada $z = ln\left[x^2.g(x;y)\right]$ donde $u = g(x;y)$ viene definida implícitamente por la ecuación $u.ln(u-1) + xy = 0$. Calcular: $z'_x(1;0)$ y $z'_y(1;0)$.

25) Hallar las derivadas parciales en (2;1) de la función $z(x;y) = \dfrac{ln\,u}{h^2(x;y)}$ si $u = g(x;y)$ viene definida implícitamente por $ue^{u-1} + xy = 3$. Suponemos a $h(x;y)$ continua y derivable en $P_0 = (2;1;5)$.

26) Calcular $z'_x(1;1)$ y $z'_y(1;1)$ si $z = e^{[x.g(x;y)]}$ y $u = g(x;y)$ viene definida por $u.ln\,(u-1) + xy - 1 = 0$.

27) Sea $z = f(x;y)$ definida implícitamente por $z + ln(z) + e^{xy} = 2$ verificar que se cumple: $f''_{xy}(0;0) = f''_{yx}(0;0)$.

28) Si $z + e^{z-1} + (x-1)^2 y = 2$, ver si se cumple que $f''_{xy}(1;0) = f''_{yx}(1;0)$.

29) Sea $z = f(x;y)$ definida implícitamente por $z.e^{y-2x} = 5$, determinar la ecuación del plano tangente en $(1;2;z_0)$ y utilizarlo para aproximar $f(1{,}01;1{,}97)$.

30) El plano $2x - 6y + 3z = 49$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. Calcular las coordenadas del punto de tangencia.

31) Hallar los valores de k para los cuales el plano $x + y + z = k$ es tangente a la esfera que $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

32) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que sean paralelos al plano $x + 2y - 2z = 10$.

33) El plano $z = x - y$ es paralelo al plano tangente al hiperboloide $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$. Calcular las coordenadas del punto de tangencia.

34) Dada $f(x;y;z)=x^2+2xz+y^2$ y $P_0=(1;1;2)$, hallar f'_α en la dirección y sentido de máximo crecimiento de $x^2+y^2+z^2=6$ en P_0.

35) Hallar las direcciones $\vec{v}$ según las cuales es nula la derivada direccional en $(u;v)=(2;1)$ de la función $z(x;y)=x+y.e^{x-y}$ si $x=g(u;v)$, $y=v^2$ y x está definida implícitamente por $2v-ux-ln\,x=0$.

36) La ecuación $ln\,z-3.e^{zy+x}+2y^3-xy^2=0$ define implícitamente a z como función de x e y. Determinar la derivada direccional de f en $(-1;1)$ en la dirección del punto $(7;7)$.

37) Sea $z=f(x;y)$ definida implícitamente por $z-y+ln(xz)=0$, calcular aproximadamente $h(1{,}02)$ si $h=f\circ\vec{g}$ con $\vec{g}(t)=(t;t^3)$.

38) La ecuación $ln(y+z)+z-x^2+y^2=0$ define implícitamente a z como función de x e y. Determinar la derivada direccional máxima de $h=f\circ\vec{g}$ en $(u;v)=(1;1)$ si $\vec{g}(u;v)=(uv^2;v-u^2)$.

39) Hallar la ecuación del plano tangente de la función $z=h(x;y)$ en el punto $(2;1;h(2;1))$ que resulta de $z=u.e^v$ con $u=\dfrac{x}{y}$, $v=g(x;y)$, donde $g(x;y)$ queda definida implícitamente por $ln(1-v)+xy.e^v=2$.

40) Dada $z=arc\,tg\dfrac{y}{x}$, $\begin{cases} x^3+\dfrac{1}{y}=t^3 \\ x-2y=4t \end{cases}$, hallar $\dfrac{dh}{dt}$.

41) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones que definen a una curva alabeada como intersección de dos superficies, obtener las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a las mismas en P_0.

a) $\begin{cases} x^2+4y^2+2z^2=27 \\ x^2+y^2-2z^2=11 \end{cases}$ en $P_0=(3;-2;1)$

b) $\begin{cases} x^2+z^2-25=0 \\ y^2+z^2-25=0 \end{cases}$ en $P_0 = (3;3;4)$

c) $\begin{cases} 3x^2+2y^2+z^2=49 \\ x^2+y^2-2z^2=10 \end{cases}$ en $P_0 = (3;-3;2)$

d) $\begin{cases} x^2+y^2-z=8 \\ x-y^2+z^2+2=0 \end{cases}$ en $P_0 = (2;-2;0)$

e) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ en $P_0 = (2;1;1)$

f) $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9 \\ 3x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$ en $P_0 = (1;-1;2)$

g) $\begin{cases} y-e^x sen(2\pi z)=2 \\ y^2-z-ln(x+1)=3 \end{cases}$ en $P_0 = (0;2;1)$

42) Verificar si las siguientes superficies son tangentes

a) $\begin{cases} x^2+4y+z^2=0 \\ x^2+y^2+z^2-6z=-7 \end{cases}$ en $P_0 = (0;-1;2)$

b) $\begin{cases} x^2+4y^2-4z^2=4 \\ x^2+y^2+z^2-6x+2z-6y=-10 \end{cases}$ en $P_0 = (2;1;1)$

43) Sea la curva C: $\begin{cases} x=g(y)+y^2-2y \\ z+3=3y \end{cases}$, determinar la posición relativa entre la recta tangente a C y el plano normal a C en $P_0 = (5;0;-3)$. Se sabe que $g'(0)=5,\ g'(2)=-2$.

44) Investigar la posición relativa entre las siguientes curvas y superficies

a) $\vec{f}:[a;b]\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(t;e^t;e^{2t}\right),\ \left(y-\sqrt{z}\right)^2+(x-ln\,y)^2=0$

b) $\vec{f}:[a;b]\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(-t^2-1;t^2+1;2t\right),\ z^2+2y+6x=0$

c) $\vec{f}:[a;b]\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(t-1;6t;2t^2+5\right),\ x^2+y-z=0$

d) $\vec{f}:[a;b]\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=[cos\,t;sen\,t;sen(2t)]$ sobre $2xy-z=0$

45) La intersección de las superficies $\begin{cases} y^2=x^2-z^2 \\ z=x \end{cases}$ definen una recta que es normal a la superficie definida por $z=f(x;y)$ en (1;0;1). Hallar la ecuación del plano tangente a z en dicho punto y utilizarlo para calcular aproximadamente $f(0{,}98;0{,}01)$.

46) Dada $z=x+y.u^2$ con $u=f(x)$ definida por $ln(u+x)-ux=2$, resulta $z=h(x;y)$. Determinar cuántos puntos en común tiene la curva de ecuación $\vec{f}(t)=\left(t^2;t-1;-t\right)$ con el plano tangente a la superficie de ecuación $z=h(x;y)$ en $P_0=(-1;2;z_0)$.

47) Determinar las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie imagen de la $\vec{f}:\Re^2\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(u;v)=\left(u+v;v^2-u;u^2\right)$ en un punto $P_0=(x_0;y_0;z_0)=\vec{f}(u_0;v_0)$ en el cual la misma sea paralela a la recta tangente a la curva definida por $\begin{cases} 2x+3y+2z=0 \\ x+y^4=0 \end{cases}$ en $P_1=(-1;1;z_1)$.

48) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie imagen de la $\vec{f}:\Re^2\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(u;v)=(uv;2u+3v;-u-6v)$ en un punto $P_0=(x_0;y_0;z_0)$ $=\vec{f}(u_0;v_0)$ en el cual el plano tangente a la misma es perpendicular a la recta tangente a la curva definida por $\begin{cases} 5x+5z^3-51z=0 \\ y+sen(z-2)-6z=0 \end{cases}$ en $P_1/z_1=2$.

RESPUESTAS

1) a) $z'_x = -\frac{z}{x}$, $z'_y = -\frac{sen(xz)}{2x^2z + xy.cos(xz)}$

b) $z'_x(\pi;0;0) = 0$, $z'_y(\pi;0;0) = -1$ c) $z'_x(0;0;0) = z'_y(0;0;0) = -1$

d) $z'_x = \frac{z}{1-2z}$, $z'_y = \frac{3z}{1-2z}$ e) $z'_x(0;0;0) = 1$, $z'_y(0;0;0) = 0$

f) $z'_x = -\frac{2yz\,cos(xyz) + 3zx^2}{2xy\,cos(xyz) + x^3}$, $z'_y = -\frac{2xz\,cos(xyz) + 3y^2}{2xy\,cos(xyz) + x^3}$

g) $z'_x = -\frac{z^2ye^{xy-2} + 2}{2zye^{xy-2} - 1}$, $z'_y = -\frac{z^2xe^{xy-2} - 4}{2zye^{xy-2} - 1}$

h) $z'_x\left(-2;\frac{\pi}{2};1\right) = 2$, $z'_y\left(-2;\frac{\pi}{2};1\right) = 0$

i) $z'_x = \frac{4ye^{xy} - 2e^{xz}(xz+1)}{e^{yz} + zy.e^{yz} + 2x^2e^{xz}}$, $z'_y = \frac{4xe^{xy} - z^2e^{yz}}{e^{yz} + zy.e^{yz} + 2x^2e^{xz}}$

j) $z'_x(e;-1;1) = z'_y(e;-1;1) = \frac{1}{e-1}$

2) $z'_x = \frac{y}{z}$, $z'_y = \frac{x-y}{z}$, $z''_{xx} = -\frac{y^2}{z^3}$, $z''_{xy} = \frac{z^2 - y(x-y)}{z^3}$, $z''_{yy} = \frac{-z^2 - (x-y)^2}{z^3}$

3) $z''_{xx} = -\frac{1}{4y^2z^3}$ 4) a) $z''_{xy} = -\frac{xy}{8z^3}$, b) $z''_{xy}(1;1;1) = \frac{1}{54}$ 5) $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-2}{(1+2z)^3}$

6) $f'_{135^o}(1;1;1) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 7) a) m $= z'_x = -1{,}61$, b) m $= z'_y = -1{,}81$ 8) 1,085

9) $f(0{,}1;0{,}09) = -0{,}91$ 10) $dz(1;1) = -dx - dy$

11) a) $y_t = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$, $y_n = 2x - 1$ b) $y_t = x + 1$, $y_n = -x + 3$

c) $y_t = 2x$, $y_n = -\frac{1}{2}x$ d) $y_t = 2$, $r_n : x = 1$

12) a) $\pi_t :\ x - y - 2z - 2 = 0$, $x - 2 = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$, $\vec{v}_n = (1;-1;-2)$ ó

$\pi_t :\ x - y + 2z - 2 = 0$, $x - 2 = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, $\vec{v}_n = (1;-1;2)$

b) $\pi_t:\ 4x-5y-9z-18=0$, $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+1}{-9}$, $\vec{v}_n=(4;-5;-9)$

c) $\pi_t: 2x+y+3z-14=0$, $x-2=y-1=\dfrac{z-3}{3}$, $\vec{v}_n=(1;1;3)$ ó

$\pi_t:\ 2x+y-3z-14=0$, $\dfrac{x-2}{2}=y-1=\dfrac{z+3}{-3}$, $\vec{v}_n=(2;1;-3)$

d) $\pi_t: 3x+4y-6z_t-16=0$, $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-6}$, $\vec{v}_n=(3;4;-6)$

e) $\pi_t: 3x-3y-2z_t-18=0$, $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+3}{-2}$, $\vec{v}_n=(3;-3;-2)$

13) $P_0=(4;2;8)$ 14) $y'_x=-\sqrt{2}$, $z'_x=\sqrt{2}$, 15) $y'_x(1;1;1)=-\dfrac{4}{5}$, $z'_x(1;1;1)=\dfrac{1}{5}$

16) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(-1;0;1;0)=-1$, 17) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1;1;0;0)=1$

18) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1;1;1;1)=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1;1;1;1)=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1;1;1;1)=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1;1;1;1)=\dfrac{1}{3}$

19) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1;0;2;1)=0$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1;0;2;1)=-\dfrac{4e+1}{2e}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1;0;2;1)=1$;

$\dfrac{\partial v}{\partial y}(1;0;2;1)=\dfrac{1}{2e}$ 20) $z'_x=2v\dfrac{v^2-x^4}{u^2(u^2-v^2)}+2u\dfrac{x^4-u^2}{v^2(u^2-v^2)}$

21) $y''_{xx}=\dfrac{2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)}{(z-y)^3}$; 22) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$

23) No, porque $\dfrac{\partial(F;G;H)}{\partial(x;y;z)}=0$ 24) $z'_x(1;0)=2$; $z'_y(1;0)=-\dfrac{1}{4}$;

25) $z'_x(2;1)=-{}^1\!/_{50}$; $z'_y(2;1)=-{}^1\!/_{25}$; 26) $z'_x(1;1)={}^3\!/_2\,e^2$; $z'_y(1;1)=-{}^1\!/_2\,e^2$

27) $f''_{xy}(0;0)=f''_{yx}(0;0)=-\dfrac{1}{2}$ 28) $f''_{xy}(1;0)=f''_{yx}(1;0)=0$

29) $z_t=10x-5y+5$, $f(1{,}01;1{,}97)\cong z_t(1{,}01;1{,}97)=5{,}25$

30) (2;–6;3); 31) $k=\pm 6$ 32) $x+2y-2z-9=0$ o $-x-2y+2z-9=0$

33) $P_0=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right);\ P_1=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$ 34) $f'_{\alpha}=2\sqrt{6}$

35) $\vec{v}_1=(2;1),\ \vec{v}_2=(-2;-1)$ 36) $f'_{\vec{v}}(-1;1)=-\dfrac{1}{10}$ 37) $h(1{,}02)\cong 1{,}02$

38) $máx\ h'_{\vec{v}}(1;1)=\dfrac{5}{2}$ 39) $z_t=-x-6y+10$

40) $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}.\dfrac{4-6t^2y^2}{1-6x^2y^2}+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}.\dfrac{12x^2-3t^2}{1-6x^2y^2}$

41) a) r_t: $\dfrac{x-3}{10}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-1}{9}$, $\pi_n: 10x+6y+9z_n-27=0$

b) r_t: $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{-3}$, $\pi_n: 4x+4y-3z_n-12=0$

c) r_t: $\dfrac{x-3}{10}=\dfrac{y+3}{14}=\dfrac{z-2}{-3}$, $\pi_n: 10x+14y-3z_n+18=0$

d) r_t: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{20}$, $\pi_n: 4x-y+20z_n-10=0$

e) r_t: $y-1=\dfrac{z-1}{-1};x=2$, $\pi_n: y-z_n=0$

f) r_t: $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$, $\pi_n: 8x+10y-7z_n=12$

g) r_t: $\dfrac{x}{1-8\pi}=\dfrac{y-2}{-2\pi}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\pi_n: (1-8\pi)x-2\pi y-z_n=-1-4\pi$

42) a) son tangentes, b) son tangentes

43) La recta interseca al plano en $P_0=(11;2;3)$

44) a) yace sobre la superficie b) no tiene contacto con la superficie
c) interseca a la superficie en $P_0=(1;12;13)$ d) yace sobre la superficie

45) $z_t=2-x$, $f(0{,}98;0{,}01)\cong 1{,}02$

46) La curva corta al plano tangente en $P_0=(0;-1;0)$ y en $P_1=(1;-2;1)$

47) r_n: $\dfrac{x-3}{-8}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{5}$ 48) $-9x+25y+5z-225=0$

FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Una función $f\,(x;y;...;w)$ es homogénea de grado n si al multiplicar las variables por un parámetro ***t*** se obtiene la función multiplicada por t^n.

$$\forall t \in \Re \ : f\,(tx;ty;...;tw) = t^n f\,(x;y;...;w)$$

Ejemplos: 1) $f(x;y) = x^3 - 2xy^2$

$$f(tx;\ ty) = (t\,x)^3 - 2tx.(ty)^2 = t^3.x^3 - 2t\,.x.t^2.\,y^2 = t^3.\left(x^3 - 2\,xy^2\right) = t^3.f(x;y)$$

$\Rightarrow$ que es homogénea de grado 3.

2) $f\,(x;y) = \sqrt{x^5 - 2x^4 y}$

$$f\,(tx;ty) = \sqrt{(tx)^5 - 2(tx)^4 ty} = \sqrt{t^5.\left(x^5 - 2x^4 y\right)} =$$
$$= t^{5/2}.\sqrt{x^5 - 2x^4.y} = t^{5/2}.\,f(x;y)$$

$\Rightarrow$ que es homogénea de grado $\dfrac{5}{2}$.

3) $f(x;y) = sen\ \dfrac{x}{y}$

$$f\,(tx;ty) = sen\ \frac{tx}{ty} = sen\ \frac{x}{y} = t^0.sen\ \frac{x}{y}$$

$\Rightarrow$ que es homogénea de grado 0.

Nota: que una función sea homogénea de grado 0 significa que la función permanece constante ante cambios proporcionales en sus variables.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES HOMOGÉNEAS

1) Teorema de Euler

Si una función ***f*** *es homogénea de grado* ***n****, en todo punto en el que sea diferenciable se verifica que la suma de los productos de cada variable por las derivadas parciales respectivas es igual al producto de* ***n*** *por la función dada.*

Lo vamos a demostrar para una función de tres variables, pero su demostración se puede generalizar.

EULER, ***Leonhard (1707-1783):***
nació en Basilea, Suiza, en cuya universidad estudió con Johann Bernoulli. Nunca fue profesor universitario pero frecuentó las Academias. Trabajó en Berlín y San Petersburgo, a donde se traslada en 1727 por sugerencia de Bernoulli y llamado por la emperatriz Catalina II.
Es allí donde muere de un ataque de apoplejía. Durante 25 años (1741-1776) por invitación del rey de Prusia, Federico II, trabaja en la Academia de Ciencias de Berlín, sin dejar sus actividades en San Petersburgo. Cuando se plantea quien lo va a suceder en Berlín, al decidir Euler su regreso definitivo a San Petersburgo, éste propone a Lagrange, candidatura que apoya también D'Alembert. Es el más prolífico matemático de todos los tiempos. Es uno de los creadores, tras Newton, Leibniz y los Bernoulli, del Análisis Matemático. A él se deben los estudios sobre el número ***e***, desarrollos en serie, la designación de ***i*** para la $\sqrt{-1}$, etc. Fue alumno de Johann Bernoulli, a quien fue presentado por su padre el pastor Paul Euler. Este hizo que Leonhard también fuese pastor. En 1735 perdió el ojo derecho en una congestión cerebral y a partir de ese momento sufre de una ceguera progresiva.

Consideramos $f(x;y;z)$:

$$x \,.\, f'_x(x;y;z) + y \,.\, f'_y(x;y;z) + z \,.\, f'_z(x;y;z) = n \,.\, f(x;y;z)$$

Demostración

Si f es homogénea de grado n se verifica que: $f(tx;ty;tz) = t^n.f(x;y;z)$.

Efectuamos el siguiente cambio de variables: $u=tx$, $v=ty$, $w=tz$, se obtiene así una función $f(u;v;w)$ que es función compuesta de t a través de u,v,w.

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dr] & \\
f \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v \arrow[r] & t \\
 & w \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Derivando respecto de t se obtiene:

$$f'_u(tx;ty;tz).\frac{du}{dt} + f'_v(tx;ty;tz).\frac{dv}{dt} + f'_w(tx;ty;tz).\frac{dw}{dt} = n.t^{n-1}.f(x;y;z)$$

pero $\dfrac{du}{dt} = x \quad \dfrac{dv}{dt} = y \quad \dfrac{dw}{dt} = z$, reemplazando queda:

$$x.f'_u(tx;ty;tz) + y.f'_v(tx;ty;tz) + z.f'_w(tx;ty;tz) = n.t^{n-1}.f(x;y;z)$$

expresión que se verifica para cualquier t. Hacemos $t = 1$:

$$x.\,f'_x(x;y;z) + y.f'_y(x;y;z) + z.f'_z(x;y;z) = n.f(x;y;z)$$

La propiedad se puede demostrar también en el otro sentido, es decir que si una función verifica el teorema de Euler, entonces es homogénea (para $n > 0$).

Ejemplos a) $f(x;y;z) = x^3 - 2xy^2 - z^2x$

primero verificamos que sea homogénea:

$$f(tx;ty;tz) = (tx)^3 - 2(xt)(yt)^2 - (tz)^2(tx) = t^3\left(x^3 - 2xy^2 - z^2x\right)$$

es homogénea de grado 3. Verificamos ahora el teorema de Euler:

$$x.f_x'(x;y;z) + y.f_y'(x;y;z) + z.f_z'(x;y;z) = 3.f(x;y;z)$$

$$x.\left(3x^2 - 2y^2 - z^2\right) + y.(-4xy) + z.(-2xz) = 3x^3 - 2xy^2 - xz^2 - 4xy^2 - 2xz^2$$

$$3x^3 - 6xy^2 - 3z^2x = 3\left(x^3 - 2xy^2 - z^2x\right) = 3.f(x;y;z)$$

con lo cual queda verificado el teorema de Euler.

Como las derivadas parciales son continuas para todo par ordenado de números reales, la función es diferenciable en todo $\Re^2$ por lo que el teorema se verifica para todo $(x;y) \in \Re^2$.

b) $f(x;y) = \sqrt{x^4 + 2y^4}$

primero verificamos que sea homogénea:

$$f(tx;ty) = \sqrt{(tx)^4 + 2(ty)^4} = \sqrt{t^4.\left(x^4 + 2y^4\right)} = t^2.\sqrt{x^4 + 2y^4} = t^2.f(x;y)$$

es homogénea de grado 2. Verificamos ahora el teorema de Euler:

$$x.f_x'(x;y) + y.f_y'(x;y) = 2.f(x;y)$$

$$x.\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 2y^4}} + y.\frac{8y^3}{2\sqrt{x^4 + 2y^4}} = \frac{4x^4 + 8y^4}{2\sqrt{x^4 + 2y^4}} = \frac{4\left(x^4 + 2y^4\right)}{2\sqrt{x^4 + 2y^4}} = 2.\sqrt{x^4 + 2y^4}$$

2) Toda función homogénea de dos variables de grado n se puede expresar como función del cociente entre las variables dividiendo la función por x^n:

$$\frac{f(x;y)}{x^n} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Demostración

$$f(tx\,;ty) = t^n . f(x;y) \Rightarrow \text{ haciendo } t = \frac{1}{x} \text{ que}$$

$$f\left(1;\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x;y)}{x^n} \Rightarrow \frac{f(x;y)}{x^n} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

3) Toda función homogénea de grado n tiene por derivadas a funciones homogéneas de grado $n-1$.

Demostración

$$f(tx;ty) = t^n . f(x;y) \Rightarrow f_x'(tx;ty).t = t^n . f_x'(x;y)$$

$$\therefore f_x'(tx;ty) = t^{n-1} . f_x'(x;y)$$

análogamente se demuestra que $f_y'(tx;ty) = t^{n-1} . f_y'(x;y)$

4) Si f es una función homogénea de grado n y g es una función homogénea de grado r, el cociente entre ambas funciones es una función homogénea de grado $n-r$.

Si $f(tx;ty) = t^n . f(x;y)$ y $g(tx;ty) = t^r . g(x;y) \Rightarrow \frac{f}{g}(tx\,;ty) = \frac{t^n . f(x;y)}{t^r . g(x;y)} =$

$$= t^{n-r}\frac{f}{g}(x;y), \text{ con } g(x;y) \neq 0$$

Caso particular: El cociente de dos funciones homogéneas de igual grado es una función homogénea de grado 0.

Propiedades de las funciones homogéneas lineales

a) $f(x;y) = x\,.\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Demostración

$f(tx;ty) = t\,.\,f(x;y) \Rightarrow$ haciendo $t = \dfrac{1}{x}$ se obtiene:

$$f\left(1;\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x;y)}{x} \Rightarrow f(x;y) = x\,.\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

b) $f(x;y) = y\,.\,\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Demostración

$f(tx;ty) = t.f(x;y) \Rightarrow$ haciendo $t = \dfrac{1}{y}$ se obtiene:

$$f\left(\frac{x}{y};1\right) = \frac{f(x;y)}{y} \Rightarrow f(x;y) = y\,.\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Derivando las expresiones de las propiedades **a** y **b** se obtienen las propiedades **c** y **d**.

c) $f'_x = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \left(\dfrac{y}{x}\right).\,\varphi'_x\left(\dfrac{y}{x}\right)$ d) $f'_y = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) - \left(\dfrac{x}{y}\right).\,\varphi'_y\left(\dfrac{x}{y}\right)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Determinar si las siguientes funciones son homogéneas o no. Si lo son verificar el teorema de Euler

1) $z = 3x^4 - xy^3 + y^4$ 2) $z = 2xy - 3x^3 + x^2 y$ 3) $u = x^3 - y^3 + xyz$

4) $z = \sqrt{x^4 + 2y^4}$ 5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 6) $z = \sqrt{x^3 + 4y^3}$

7) $z = cos\ \dfrac{x}{y}$ 8) $z = x.tg\dfrac{x}{y} + \sqrt{x^2 + y^2}$ 9) $u = \sqrt{x^2 y + 4y^3 - z^3}$

10) $z = y^2 .ln\dfrac{x+y}{x-y}$ 11) $z = \dfrac{ln\,x - ln\,y}{\sqrt{x+y}}$

B) Demostrar que si f(x;y) es una función homogénea de grado 4 entonces:

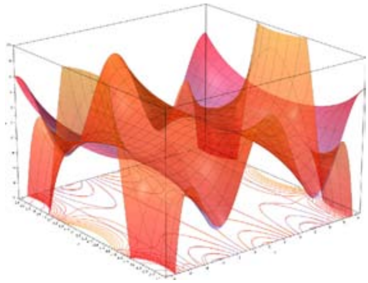
a) $x.f''_{xx} + y.f''_{xy} = 3f'_x$ b) $x.f''_{yx} + y.f''_{yy} = 3f'_y$

RESPUESTAS

A) 1) sí, de grado 4 2) no 3) sí, de grado 3 4) sí de grado 2
5) sí, de grado 1 6) sí, de grado 3/2 7) sí, de grado 0 8) sí, de grado 1
9) sí, de grado 3/2 10) sí, de grado 2 11) sí, de grado –1/2

B) sugerencia: partir del grado de homogeneidad de f'_x y f'_y respectivamente.

Capítulo 8



Desarrollo de campos escalares de dos variables

Fórmula de Taylor.

Fórmula de Mac Laurin.

Desarrollo en potencias.

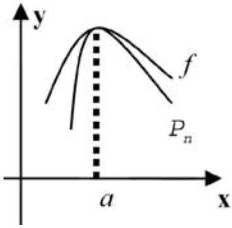
El término complementario.

Aproximación de funciones.

FÓRMULA DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Antes de analizar el tema para funciones de dos variables independientes repasamos brevemente la fórmula de Taylor y Mac Laurin para funciones de una variable independiente.

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE



Se trata de aproximar una función derivable mediante un polinomio particularmente elegido y precisar el error o aproximación que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto cualquiera x de su dominio por el valor en el mismo punto del polinomio seleccionado.

$$T_c = f(x) - p(x)$$

es el error que se comete y se denomina término complementario.

TAYLOR, Brook (1685-1731): matemático inglés, discípulo y colaborador de Newton. Fue secretario de la Academia de Ciencias de Londres mientras Newton era su presidente. Fue el primero en escribir las fórmulas de los desarrollos en serie que llevan su nombre y el de Mac Laurin.

Este último planteó el dominio de aplicabilidad de las mismas. Aunque quien da la fórmula para un número finito de términos es Lagrange. El desarrollo en serie fue descubierto en 1712 y publicado en su obra *Methodus incrementorum directa e inversa* escrita entre 1715 y 1717. Pero esto se ignoró durante medio siglo hasta que Lagrange la puso de relieve. Pero el teorema lo demuestra Cauchy. A él se debe el método de integración por partes.

Polinomio de Taylor

Si una función f tiene n derivadas sucesivas finitas en un punto x_0, existe y es único el polinomio de grado n cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función f (se llama polinomio de Taylor).

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}.(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}.(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}.(x-x_0)^n$$

Este polimonio recibe el nombre de *polinomio de Taylor*.

El polinomio se aproxima a la función en un entorno de $x = x_0$. Si queremos calcular el valor de la función en un punto $\boldsymbol{x}$ próximo a $\boldsymbol{x_0}$, calculando su valor en el polinomio en lugar de hacerlo en la función, su aproximación depende de la proximidad que tengan x_0 y x y de la cantidad de términos del polinomio de Taylor que se consideren.

Las n derivadas de $p(x)$ coinciden en x_0 con las n derivadas de $f(x)$:

$$p_n(x_0) = f(x_0),\ p_n'(x_0) = f'(x_0),\ p_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots, p_n^n(x_0) = f^n(x_0)$$

Término complementario

Falta determinar el error $\boldsymbol{T_c}$ que se comete al utilizar el polinomio en lugar de la función.

$R(x) = f(x) - p(x)$, es decir que el resto o término complementario es la diferencia que hay entre el valor real de la función y el que se obtiene con el polinomio. El valor del resto depende de la proximidad entre x y x_0 y de la cantidad de términos que se desarrollen del polinomio.

Lagrange, que fue el que descubrió la importancia de la fórmula de Taylor muchos años después de su muerte, fue el que determinó el valor del término complementario que lleva su nombre, término complementario de Lagrange.

Determinó que el resto es: $\dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-x_0)^{n+1}$ con $x_0 < c < x$

Finalmente se obtiene la ***fórmula de Taylor***:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}.(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}.(x-x_0)^3 + \\ &+ \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}.(x-x_0)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}}$$

La fórmula de Taylor se obtiene sumándole al polinomio de Taylor el término complementario.

Fórmula de Mac Laurin

Es un caso particular de la fórmula de Taylor, cuando $x_0 = 0$. El polinomio tiene potencias de x.

MAC LAURIN, *Colin (1698-1746):* matemático escocés, discípulo y colaborador de Newton. Fue profesor en la universidad de Edimburgo entre 1725 y 1745. Planteó el problema del dominio de aplicabilidad de las fórmulas que llevan su nombre y el de Taylor, aunque fue Taylor el primero en escribirlas. Lagrange da la fórmula para un número exacto de términos.

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n + \\ + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Expresión diferencial de ambas fórmulas

$$f(x) = f(x_0) + d f(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + T_c$$

$$f(x) = f(0) + d f(0) + \frac{d^2 f(0)}{2!} + \frac{d^3 f(0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(0)}{n!} + T_c$$

Si consideramos hasta el término de 1º orden tenemos la aproximación lineal que corresponde a la aproximación que se obtiene aplicando diferenciales, es decir que el polinomio de aproximación es el plano tangente.

FÓRMULA DE TAYLOR PARA CAMPOS ESCALARES DE DOS VARIABLES

Daremos una forma intuitiva de obtener la fórmula de Taylor para un campo escalar de dos variables a partir de la fórmula para funciones de una variable. Se trata ahora de obtener un polinomio que aproxime a una función de dos variables $z = f(x;y)$ en un entorno de un punto $P_0 = (x_0\,;y_0)$ que pertenece al dominio de la misma y en el cual es diferenciable hasta el orden n+1. Esto implica conocer el valor de las sucesivas derivadas continuas hasta el orden n en P_0 y las derivadas de orden n+1 en un entorno de P_0.

Para ello partimos de la expresión diferencial de la fórmula de Taylor para funciones de una variable.

Si reemplazamos los diferenciales por las expresiones correspondientes a los diferenciales sucesivos para campos escalares de dos variables se obtiene:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + d\,f(x_0;y_0) + \frac{d^2 f(x_0;y_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0;y_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0;y_0)}{n!} + T_c$$

Si desarrollamos los diferenciales obtenemos la fórmula de Taylor desarrollada.

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)\,.\,dx + f'_y(x_0;y_0)\,.\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0;y_0)\,.\,dx^2 + 2\,f''_{xy}(x_0;y_0)\,.\,dx\,.\,dy + f''_{xy}(x_0;y_0)\,.\,dy^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(x_0;y_0)\,.\,dx^3 + 3\,f'''_{xxy}(x_0;y_0).dx^2.dy + 3\,f'''_{xyy}(x_0;y_0).dx.\,dy^2 + f'''_{yyy}(x_0;y_0).\,dy^3\right] +$$

$$\ldots + T_{n+1}$$

Expresión del término complementario

Para una función de dos variables el término complementario tiene la siguiente expresión:

$$T_{n+1} = d^{n+1} f(c_1\,;c_2) \qquad x_0 < c_1 < x\,,\ \ y_0 < c_2 < y$$

Fórmula de MacLaurin

Si el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ es el origen de coordenadas, se obtiene la fórmula de Mac Laurin para campos escalares de dos variables.

$$f(x;y) = f(0;0) + f'_x(0;0)\,.\,dx + f'_y(0;0)\,.\,dy +$$

$$+\ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0;0)\,.dx^2 + 2\,f''_{xy}(0;0)\,.\,dx\,.\,dy + f''_{xy}(0;0)\,.dy^2\right] +$$

$$+\ \frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(0;0)\,.dx^3 + 3\,f'''_{xxy}(0;0)\,.dx^2.dy + 3\,f'''_{xyy}(0;0).dx\,.dy^2 + f'''_{yyy}(0;0).dy^3\right] + \ldots + Tc$$

Ejemplo

$z = x^2.e^{2y}$, hallar $f(1,1;0,1)$ utilizando la fórmula de Taylor hasta 2º orden.

Desarrollamos la función en un entorno de $P_0 = (1;0)$, punto próximo a $P = (1,1;0,1)$

Calculamos las derivadas hasta 2º orden inclusive.

$$f(1;0) = 1$$

$$f'_x = 2x.e^{2y}\Big|_{(1;0)} \rightarrow 2$$

$$f'_y = 2x^2e^{2y}\Big|_{(1;0)} \rightarrow 2$$

$$f''_{xx} = 2e^{2y}\Big|_{(1;0)} \rightarrow 2$$

$$f''_{xy} = 4x.e^{2y}\Big|_{(1;0)} \rightarrow 4$$

$$f''_{yy} = 4x.e^{2y}\Big|_{(1;0)} \rightarrow 4$$

reemplazando en la fórmula de Taylor:

$$x^2.e^{2y} = 1 + 2(x-1) + 2y + \frac{1}{2}\left[2(x-1)^2 + 8(x\text{-}1)\,y + 4y^2\right] + T_3 \quad \textit{fórmula de Taylor}$$

Calculamos ahora $f(1,1;0,1)$

$$1,1^2.e^{0,2} \cong 1 + 2.0,1 + 2.0,1 + \frac{1}{2}\left[2.0,01 + 8.0,1.0,1 + 4.0,1^2\right] = 1,47$$

Vemos ahora una demostración más formal que nos permite llegar a la misma expresión que hemos obtenido intuitivamente.

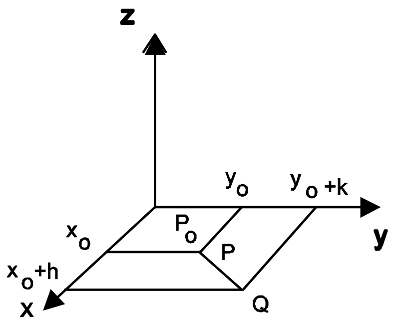
Demostración de la fórmula de Taylor

Conocidos el valor de la función y el de las sucesivas derivadas en $P_0 = (x_0;y_0)$, buscamos una expresión que permita conocer el valor de la función en un punto $P = (x;y)$ perteneciente al entorno de P_0.

Nos ubicamos en el punto $Q(x_0+h;y_0+k)$, siendo h y k los incrementos de x e y respectivamente. Expresamos las coordenadas de un punto $P \in E(x_0;y_0)$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = x_0 + t.h \\ y = y_0 + t.k \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Si $t = 0$, $P = P_0$, si $t = 1$, $P = Q$



De esta manera podemos expresar una función de dos variables en función de una sola variable que es t.

$$z = f\,(x;y) = f\,(x_0 + t.h\,;\,y_0 + t.k) = F\,(t)$$

Aplicamos a $F\,(t)$ la fórmula de Mac Laurin para funciones de una variable.

$$F\,(t) = F\,(0) + F'\,(0).\,t + \frac{F''\,(0)}{2!}.\,t^2 + \frac{F'''\,(0)}{3!}.\,t^3 + \ldots + \frac{F^n\,(0)}{n!}.\,t^n + T_c$$

Hacemos $t = 1$ para obtener el valor de $F(t)$ en Q.

$$F\,(1) = F\,(0) + F'\,(0) + \frac{F''\,(0)}{2!} + \frac{F'''\,(0)}{3!} + \ldots + \frac{F^n\,(0)}{n!} + T_c \qquad (1)$$

Calculamos las derivadas sucesivas de $F(t)$ en $t = 0$ para reemplazar en (1). Debemos tener en cuenta, al derivar, que F es función compuesta de t a través de x e y.

$$F'(t) = f'_x\,(x_0 + h\,t\,; y_0 + k\,t)\,.\frac{dx}{dt} + f'_y\,(x_0 + h\,t\,; y_0 + k\,t)\,.\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow\ F'(0) = f'_x\,(x_0; y_0).h + f'_y\,(x_0; y_0).k = df\,(x_0; y_0)$$

$$F''(t) = \left[f''_{xx}\,(x_0 + h\,t\,; y_0 + k\,t).h + f''_{yx}\,(x_0 + h\,t\,; y_0 + k\,t).k\right].h +$$

$$+\left[\ f''_{xy}\,(x_0 + h\,t\,; y_0 + k\,t).h + f''_{yy}\,(x_0 + h\,t\,; y_0 + k\,t).\,k\right].k$$

$$\Rightarrow F''(0) = f''_{xx}\,(x_0; y_0).h^2 + 2\,f''_{xy}\,(x_0; y_0)\,.h\,k + f''_{yy}\,(x_0; y_0)\,.k^2 = d^2 f\,(x_0; y_0)$$

.

.

$$F^n(0) = d^n f(x_0; y_0)$$

Si además tenemos en cuenta que $F(1) = f\,(x_0 + h\,t\,;\,y_0 + k\,t) = f\,(x; y)$ y que $F(0) = f(x_0; y_0)$, reemplazando en (1) se obtiene la expresión diferencial de la fórmula de Taylor:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + d\,f\,(x_0;y_0) + \frac{d^2\,f\,(x_0;y_0)}{2!} + \frac{d^3\,f(x_0;y_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n\,f\,(x_0;y_0)}{n!} +$$

$$+\,T_{n+1}$$

La Fórmula de Taylor y el Teorema de Lagrange

Si consideramos solo el primer término del desarrollo de Taylor y por lo tanto el término complementario es el diferencial de primer orden tenemos:

$$f\,(x; y) = f\,(x_0; y_0) + d\,f\,(c_1; c_2)$$

$$f\,(x; y) - f\,(x_0; y_0) = f'_x\,(c_1; c_2).dx + f'_y\,(c_1; c_2).dy = \Delta z$$

Que es la expresión del Teorema de Lagrange.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) *Desarrollar las siguientes funciones en el entorno de los puntos indicados hasta 2º orden aplicando la fórmula de Taylor.*

a) $z = ln\,(xy)$ en $P_0 = (1;1)$. b) $z = sen\,(2xy)$ en $P_0 = \left(\frac{\pi}{4};1\right)$.

c) $z = x.e^y$ en $P_0 = (1;0)$.

2) *Desarrollar las siguientes funciones en el entorno del punto indicado o en las potencias indicadas aplicando la fórmula de Taylor o Mac Laurin según corresponda, hasta las derivadas terceras inclusive.*

a) $z = x^3 + 2xy - x + y^3$ en un entorno de $P_0 = (1;2)$.
b) $z = e^{x+2y}$ en un entorno $P_0 = (2;0)$.
c) $z = e^x.cos\,y$ en un entorno del origen.
d) $z = e^{xy}$ en $P_0 = (1;1)$ y hallar aproximadamente $f\,(1,1;1,2)$
e) $z = e^{x+y}$ en potencias de $(x-1)$ y de $(y-1)$.
f) $z = sen\,(x+y)$ en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$.
g) $z = sen\,(x - 2y^2)$ en un entorno del origen.
h) $z = e^x.\,ln\,(1+y)$ en un entorno de $P_0 = (0;0)$.

3) *Calcular el valor aproximado aplicando la fórmula de Taylor o Mac Laurin hasta las derivadas segundas inclusive de:*

a) $arc\ tg\ \frac{1,05}{1,1}$ b) $1,1^2.(e^{0,1})^2$

4) *Calcular el valor aproximado aplicando la fórmula de Taylor o Mac Laurin hasta las derivadas terceras inclusive de* $(2,03)^3.(0,96)^2$.

5) *Utilizar la fórmula de Mac Laurin para aproximar* $f\left(\frac{\pi}{30};\frac{\pi}{36}\right)$ *si:*

$z = cos\,x.\,cos\,y$, *hasta* $n = 4$.

6) *Verificar que para pequeños valores de x e y es*: $e^x\,.\,sen\,y \cong y + xy$

7) *Desarrollando por Taylor hasta 2º orden inclusive calcular f* (0,09;1,1). *cuando* $z = f(x;y)$ *viene definida implícitamente por* $8xz - 3xy + ln\,(zy) = 0$.

8) *Probar que sen y.cos x* $\cong \left(x - \frac{\pi}{2}\right).(y - \pi)$ *en un entorno de* $P_0 = \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

9) *Dada* $F(x;y;z) = x^2 y - z^2 = 0$, *obtener el polinomio de Taylor de 2º grado en un entorno de* $P_0 = (1;1)$ *si* $z = f(x;y) > 0$. *Trabajar con la forma implícita de la función.*

RESPUESTAS

1) a) $ln\,(xy) = -2 + x + y - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + T_3$

b) $sen\,(2xy) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \pi\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(y-1) - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2 + T_3$

c) $x.e^y = x + y + (x-1).y + \frac{1}{2}y^2 + T_3$

2) a) $z = -22 + 6x + 14y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + 6(y-1)^2 + (x-1)^3 +$
$+ (y-1)^3 + T_4$

b) $z = e^2 + e^2(x-2) + 2e^2 y + \frac{1}{2}\left[e^2(x-2)^2 + 4e^2(x-2)y + 4e^2 y^2\right] +$
$\frac{1}{3!}\left[e^2(x-2)^3 + 6e^2(x-2)^2 y + 12e^2(x-2)y^2 + 8e^2 y^3\right] + T_4$

c) $z = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + T_4$

d) $z = e + e(x-1) + e(y-1) + \frac{1}{2}\left[e(x-1)^2 + 4e(x-1)(y-1) + e(y-1)^2\right] +$
$\frac{1}{3!}\left[e(x-1)^3 + 9e(x-1)^2(y-1) + 9e(x-1)(y-1)^2 + e^2(y-1)^3\right] + T_4$

e) $z = e^2 + e^2(x-1) + e^2(y-1) + \frac{1}{2}\left[e^2(x-1)^2 + 2e^2(x-1)(y-1) + e^2(y-1)^2\right] +$

$\frac{1}{3!}\left[e^2(x-1)^3 + 3e^2(x-1)^2(y-1) + 3e^2(x-1)(y-1)^2 + e^2(y-1)^3\right] + T_4$

$z\,(1{,}1;1{,}2) \cong 3{,}7367$

f) $z = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\left(y - \frac{\pi}{2}\right) +\right.$

$\left. 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3\right] + T_4$

g) $z = x - 2y^2 - \frac{x^3}{6} + T_4$

h) $z = y + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} - \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} + T_4$

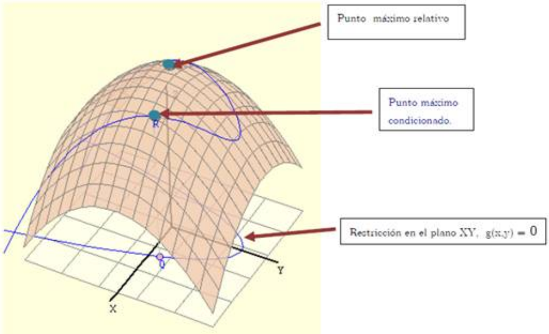
3) a) 0,762273 b) 1,47 4) 7,709571 5) $cos\frac{\pi}{30}.cos\frac{\pi}{36} \cong 0{,}9907374$

7) $f\,(0{,}09;1{,}1) \cong 1{,}02925$

9) $P_2(x;y) = -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(x-1).(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2$

Capítulo 9

Extremos



Extremos libres de campos escalares.

Condiciones necesarias, condición suficiente: el hessiano.

Extremos condicionados de campos escalares.

El método de los multiplicadores de Lagrange.

EXTREMOS LIBRES

PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Antes de analizar el tema para funciones de dos variables haremos un breve repaso del tema para funciones de una sola variable.

Máximo relativo

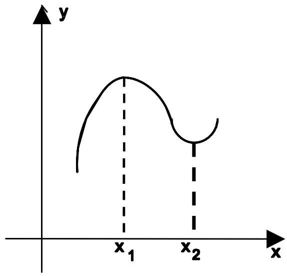
Una función definida en un conjunto A alcanza un ***máximo relativo*** en $x = x_0 \in Df$ si el valor que toma la función en ese punto $f(x_0)$ no es superado por ningún otro valor que toma la función en un entorno del punto $x = x_0$.

$$\Rightarrow \forall x \in E^*(x_0): f(x) < f(x_0)$$

Mínimo relativo

Una función definida en un conjunto A alcanza un ***mínimo relativo*** en $x = x_0 \in Df$ si el valor que toma la función en ese punto $f(x_0)$ no supera a ningún otro valor que toma la función en un entorno de $x = x_0$.

$$\Rightarrow \forall x \in E^*(x_0): f(x) > f(x_0)$$



En $x = x_1$ la función alcanza un máximo relativo

En $x = x_2$ la función alcanza un mínimo relativo

Criterios para el cálculo de extremos relativos *(para funciones derivables)*

Criterio de la derivada 1º o condición necesaria

Si una función alcanza un extremo relativo en $x = x_0$, la derivada 1º en ese punto es 0.

Eso se debe a que si $f'(x_0)$ fuese < 0, la función sería decreciente en ese punto, si $f'(x_0)$ fuese > 0 la función sería creciente en ese punto. Y como en los puntos en los cuales la función alcanza un extremo relativo no es creciente ni decreciente entonces su derivada primera debe ser 0. Esta condición es necesaria pero no suficiente.

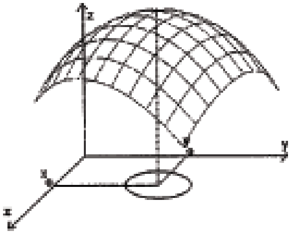
Criterio de la derivada 2º o condición suficiente

Si f tiene derivada finita en $x = x_0$, $f'(x_0) = 0$ y :

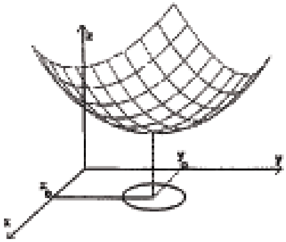
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ *en $x = x_0$ hay un máximo relativo.*
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ *en $x = x_0$ hay un mínimo relativo.*

EXTREMOS RELATIVOS LIBRES PARA CAMPOS DE DOS VARIABLES

Definiciones



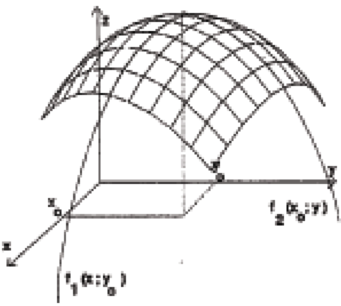
Un campo $z = f(x;y)$ alcanza un máximo relativo libre en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ de su dominio si $\forall(x;y)$ de un entorno reducido de P_0 se verifica que: $f(x;y) < f(x_0;y_0) \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) < 0$.



Un campo $z = f(x;y)$ alcanza un mínimo relativo libre en un punto $P_0=(x_0;y_0)$ de su dominio si $\forall(x;y)$ de un entorno reducido de P_0 se verifica que: $f(x;y) > f(x_0;y_0) \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) > 0$.

Buscamos ahora las condiciones necesarias y suficientes para que un campo escalar de dos variables $z = f(x;y)$ diferenciable alcance un extremo relativo libre en un punto de su dominio.

a) Condiciones necesarias



Para que el campo $z = f(x;y)$ alcance un extremo relativo libre en un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ de su dominio debe verificarse que: $z_x'(x_0;y_0) = 0$ y $z_y'(x_0;y_0) = 0$, es decir que el gradiente de f sea el vector nulo. $\nabla f(P_0) = \left[f_x'(P_0); f_y'(P_0)\right] = 0$.

Esto se debe a que si la función alcanza un extremo relativo libre en $P_0 = (x_0;y_0)$ también deben alcanzar un extremo relativo libre en ese punto las funciones $f_1\,(x;y_0)$ y $f_2\,(x_0;y)$ cuyas gráficas son las curvas intersección de la superficie con los planos $x = x_0$ e $y = y_0$.

Cada una de estas curvas representa una función de una sola variable. Si le aplicamos a cada una de estas funciones la condición necesaria para la existencia de extremos relativos libres para funciones de una variable queda: para $f_1(x;y_0)$ su derivada $f_1'\,(x_0) = 0$. Pero $f_1'\,(x_0) = z_x'\,(x_0;y_0)$.

Para $f_2\,(x_0;y)$ su derivada $f_2'\,(y_0) = 0$, siendo $f_2'\,(y_0) = z_y'\,(x_0;y_0)$. Las derivadas sobre las curvas en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ coinciden con las derivadas parciales sobre la superficie.

Pero estas condiciones son necesarias pero no suficientes, al igual que para funciones de una variable independiente la anulación de las derivadas de 1º orden no aseguran la existencia de extremos. Los puntos donde las derivadas primeras se anulan se llaman ***puntos críticos.***

b) Condición suficiente

Para hallar la condición suficiente consideramos el desarrollo de Taylor hasta las derivadas segundas inclusive en un entorno de un punto crítico.

$$f\,(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x'\,(x_0;y_0)\,.\,dx + f_y'\,(x_0;y_0)\,.\,dy +$$

$$\frac{1}{2}\left[f_{xx}''\,(x_0;y_0)\,.\,dx^2 + 2\,f_{xy}''\,(x_0;y_0)\,.\,dx\,.\,dy + f_{yy}''\,(x_0;y_0)\,.\,dy^2\right] + T_3\,(x;y)$$

Si el punto es crítico, las derivadas primeras se anulan, por lo tanto, pasando $f\,(x_0;y_0)$ al 1º miembro queda:

$$f\,(x;y) - f(x_0;y_0) =$$

$$\frac{1}{2}\left[f_{xx}''\,(x_0;y_0)\,.\,dx^2 + 2\,f_{xy}''\,(x_0;y_0)\,.\,dx\,.\,dy + f_{yy}''\,(x_0;y_0)\,.\,dy^2\right] + T_3\,(x;y)$$

Si la diferencia que figura en el 1º miembro es mayor que 0 en un entorno del punto, por las definiciones vistas, en $P_0 = (x_0;y_0)$ hay un mínimo relativo libre; si esa diferencia es menor que 0 en el punto la función alcanza un máximo relativo libre. Para saber si la función alcanza un extremo relativo libre debemos poder asegurar que el signo de esa diferencia se mantiene constante en un entorno de $P_0 = (x_0;y_0)$.

Pero analizar el signo de la diferencia equivale a analizar el signo del corchete que figura en el 2º miembro ya que $T_3(x;y)$ toma un valor despreciable para puntos suficientemente próximos a $(x_0;y_0)$. Por lo tanto el signo de esta diferencia depende del signo del $d^2f\,(x_0;y_0)$.

Si $d^2f\,(x_0;y_0) > 0$ la función alcanza un mínimo relativo libre en $P_0 = (x_0;y_0)$, si $d^2f\,(x_0;y_0) < 0$ la función alcanza un máximo relativo libre en $P_0 = (x_0;y_0)$.

El problema es asegurar el signo del $d^2f\,(x_0;y_0)\ \forall\ (x;y) \in E^*(x_0;y_0)$. Para eso debemos buscar otra expresión del d^2f cuyo signo no dependa de los signos de los dx y dy, porque si el signo del $d^2f\,(x_0;y_0)$ depende de los signos de los dx y dy para algunos $(x;y)$ la diferencia puede ser positiva y para otros negativa y por lo tanto no se puede asegurar la existencia de un extremo. Para obtener dicha expresión efectuamos las siguientes sustituciones:

$$f''_{xx}\,(x_0;y_0) = A\,,\quad f''_{xy}\,(x_0;y_0) = B\,,\quad f''_{yy}\,(x_0;y_0) = C$$

$d^2 f\left(x_0;y_0\right) = A.dx^2 + 2B\,dx.dy + C.dy^2$ multiplicando y dividiendo por $A \neq 0$ (luego veremos que ocurre si $A = 0$) queda:

$$d^2 f\left(x_0;y_0\right) = \frac{A^2.dx^2 + 2\,A\,B\,dx.dy + A\,C.dy^2}{A}$$, sumando y restando $B^2.dy^2$

queda:

$$d^2 f\left(x_0;y_0\right) = \frac{A^2.\,dx^2 + 2\,AB\,dx.dy + A\,C.dy^2 + B^2.\,dy^2 - B^2.dy^2}{A},$$

agrupando queda:

$$d^2 f\left(x_0;y_0\right) = \frac{\left(A.dx + B.dy\right)^2 + \left(AC - B^2\right).dy^2}{A}$$

El factor $AC–B^2$ recibe el nombre de *Hessiano* (H), debido al matemático alemán ***Hesse***.

Hemos obtenido una expresión cuyo signo ya no depende de los signos de los dx y dy. Analizamos ahora su signo:

Si $H\,(x_0;y_0) > 0$ el signo del $d^2f\,(x_0;y_0)$ depende del signo de A y por lo tanto hay extremo.

El plano tangente es paralelo al plano (xy).

$A > 0 \Rightarrow d^2 f\,(x_0;y_0) > 0$, por lo cual la función alcanza un mínimo relativo libre en P_0.

La superficie está por sobre el plano tangente.

$A < 0 \Rightarrow d^2 f\,(x_0;y_0) < 0$, por lo cual la función alcanza un máximo relativo libre en P_0.

HESSE, Ludwing Otto (1812-1874): matemático alemán que se dedicó a la geometría analítica conocido por el determinante hessiano introducido en 1842 mientras investigaba curvas cuadráticas y cúbicas. Enseñó en Heilderberg y en Munich.

La superficie está por debajo del plano tangente.

Si $H(x_0;y_0) < 0$ el signo del $d^2 f\,(x_0;y_0)$ depende de los signos de los dx y dy, por lo tanto no hay extremo relativo. Estamos en presencia de un ***punto de ensilladura*** (el plano tangente atraviesa la superficie).

Si $H(x_0;y_0) = 0$ el $d^2 f\,(x_0;y_0)$ puede ser positivo o 0, no se sabe si hay o no extremo, para saber lo que ocurre hay que analizar las derivadas de orden superior. Este caso recibe el nombre de caso dudoso.

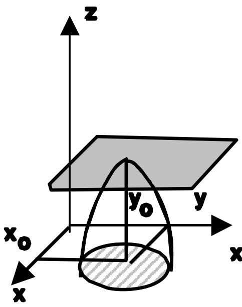
Finalmente podemos decir que la condición suficiente para que una función de dos variables alcance un extremo relativo en un punto $(x_0;y_0)$ de su dominio es que el Hessiano en el punto sea mayor que 0.

El Hessiano se puede expresar como un determinante formado por las derivadas segundas:

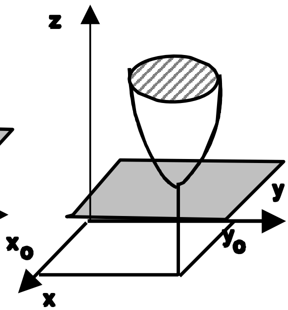
$$H\left(x_0;y_0\right)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f''_{xx}\left(x_0;y_0\right) & f''_{yx}\left(x_0;y_0\right) \\ f''_{yx}\left(x_0;y_0\right) & f''_{yy}\left(x_0;y_0\right) \end{vmatrix}$$

Clasificación de los puntos

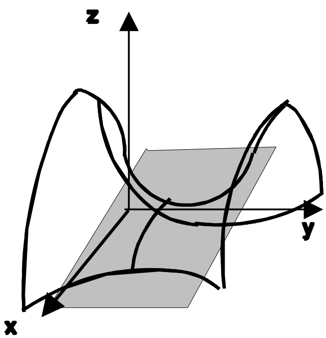
a) *Punto estacionario*: si las derivadas primeras se anulan.
b) *Punto elíptico*: si el hessiano es mayor a cero. $H > 0$. Hay extremo.
c) *Punto hiperbólico*: si el hessiano es menor a cero. $H < 0$. No hay extremo.
d) *Punto parabólico*: si el hessiano es cero. $H = 0$. Caso dudoso.



Máximo



Mínimo



Punto de ensilladura

Cálculo de los extremos relativos libres

Para calcular los extremos relativos libres se siguen los siguientes pasos:

a) se calculan las derivadas parciales de 1º orden y se igualan a 0. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los puntos críticos.
b) se calculan las derivadas parciales segundas, se forma el Hessiano y se analiza el signo del mismo en cada punto crítico para determinar cuales de los puntos críticos son extremos.
c) se analiza el signo de z''_{xx} en los puntos seleccionados en **b**) para determinar que tipo de extremos son.

Ejemplo: $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

a) $\begin{cases} z'_x = 2x - y + 3 = 0 \\ z'_y = -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{P}_0 = \left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right)$, hay un solo punto crítico.

b) $\begin{cases} z''_{xx} = 2 \\ z''_{xy} = -1 \\ z''_{xy} = 2 \end{cases} \Rightarrow H\left(\mathrm{P}_0\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow$ existe extremo.

c) $z''_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow$ el extremo es un mínimo relativo libre.

Caso en que $A = 0$ y $C \neq 0$

$d^2 f(x_0;y_0) = 2B\, dx.dy + C\, dy^2$, multiplicamos y dividimos por C y completamos cuadrados:

$$d^2 f(x_0;y_0) = \frac{B^2dx^2 + 2BC\, dx.dy + C^2dy^2 - B^2dx^2}{C} = \frac{(Bdx + Cdy)^2 - B^2dy^2}{C}$$

El signo del numerador no se mantiene constante por lo tanto en este caso no hay extremo.

Caso en que $A = 0$ y $C = 0$

Si A y C valen 0, $d^2 f(x_0;y_0) = 2B\, dx.dy$, vemos claramente que tampoco en este caso se mantiene constante el signo del d^2f y por lo tanto tampoco hay extremo.

Caso $\mathbf{H(x_0,y_0)=0}$[1]

Cuando $H(x_0,y_0) = 0$ tenemos que analizar la función alrededor del punto crítico. Veamos un ejemplo.

Calcular, si existen, los extremos libres de $f(x;y) = 5x^2 + 2y^4 - y^3$

Primero hallamos las derivadas parciales $f'_x = 10x$ y $f'_x = 8y^3 - 3y^2$

Luego para hallar los puntos críticos tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 10x = 0 \\ 8y^3 - 3y^2 = 0 \end{cases}$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$8y^3 - 3y^2 = y^2.(8y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = \frac{3}{8}$$

---

[1] Ejemplo propuesto por Rodolfo Murúa, docente de Análisis Matemático II de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.

Luego los puntos críticos son $\mathrm{P}_1 = \left(0; \frac{3}{8}\right)$ y $\mathrm{P}_2 = (0;0)$.

Para ver si son extremos necesitamos calcular las derivadas segundas y calcular el Hessiano para cada punto crítico:

$$f''_{xx} = 10 \qquad f''_{xy} = 0 \qquad f''_{yy} = 24y^2 - 6y$$

Luego, $H(\mathrm{P}_1) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} \end{vmatrix} \Rightarrow H(\mathrm{P}_1) > 0$ y $f''_{xx} = 10 > 0$

entonces en el punto crítico hay un mínimo relativo.

$H(\mathrm{P}_2) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow H(\mathrm{P}_2) = 0$, entonces el criterio no decide.

Como el criterio no decide vamos a estudiar la función más detalladamente alrededor del (0,0). Recordemos que una función presenta un extremo relativo libre en $\mathrm{P}_0 = (x_0; y_0)$ si $\forall(x;y)$: $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ o $f(x;y) > f(x_0;y_0)$ en un entorno de P_0.

En este caso $f(0,0) = 0$, entonces para demostrar que el (0,0) no es extremo basta ver que la función cambia de signo en un entorno del punto crítico.

Entonces vamos a elegir acercarnos al (0,0) por dos caminos $y = 0$ (eje x) y $x = 0$ (eje y).

Luego, $\begin{aligned} &f(x;0) = 5x^2 > 0 \ \forall x \neq 0 \\ &f(0;y) = 2y^4 - y^3 = y^3(2y-1) \end{aligned}$

Aquí podemos ver que $f(0;y)$ es negativa eligiendo convenientemente valores de y cercanos al 0, por ejemplo $y = 0{,}0001$. Entonces $f(0;y) < 0$ para ciertos valores de y en un determinado entorno del (0,0).
Entonces se puede elegir un entorno tal que $f(x;y) > 0 = f(0;0)$ y $f(x;y) < 0 = f(0;0)$, por lo tanto el (0,0) no es extremo o es un punto silla.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Calcular los extremos relativos libres de las siguientes funciones:

a) $z = x^3+3x\,y^2-15x-12\,y$ b) $z=2x^2+2xy+5\,y^2+2x-2\,y+1$

c) $z=x\,y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ d) $z=x^3+y^3+\dfrac{48}{x}+\dfrac{48}{y}$

e) $z=x^3+y^2-3x$ f) $z=x^2+x\,y+y^2-6x-9\,y+2$

g) $z=5-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}$ h) $z=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}+x^3-5x^2-2\,y^2+3\,y$

i) $z=x^4+y^4+x^2+y^2$ j) $z = x^4+y^4-x^2-y^2-1$

k) $z=e^{-x^2-2xy-y}$ l) $z=e^{-\left(x^2+2x-1\right)-\left(y^2-y\right)}$

m) $z=(x-1)^2+2\,y^2$ n) $z=3x^2+xy$

o) $z=\dfrac{4\,x^3}{3}+\dfrac{y^3}{3}-6x^2+y^2+9x+y-2$ p) $z=e^x.cos\;y$

q) $z=xy+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y}$ r) $z=2x^3-9x^2+12x+2\,y^3-3\,y^2+1$

2) Indicar si tienen puntos críticos y extremos:

a) $z = x\,y - ln\,(x^2+y^2)$ b) $z = x^2 - 6xy + 9y^2 + 3x - 10$

3) Hallar k para que $z = x^2 + 3xy + ky^2$ tenga mínimo relativo en algún punto de su dominio.

4) Si en $P_0 = (x_0;y_0)$, $z'_x=z'_y=0$, $z''_{xx}=3$ y $z''_{yy}=12$ para qué valores de z''_{xy} se verifica la existencia de un mínimo.

5) Buscar extremos de: a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

b) $x^2 + xy - 2xz + y^2 - z^2 + 21 = 0$ si $z = f\,(x;y)$.

6) Un investigador de la agricultura estimó que el beneficio anual de una granja del sur es $B(x;y) = 1.600x + 2.400y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$, donde x es el número de hectáreas plantadas con soja e y la cantidad de hectáreas plantadas con maíz. Hallar cuántas hectáreas conviene plantar con cada cultivo para maximizar el beneficio.

7) Hallar k para que $z = x^2 + kx + y^2$ presente un punto crítico en $P_0 = (-1;0)$. Clasificarlo.

8) Hallar k para que $z = x^2 + 2xy + ky^2 + 4x + 6y$ presente un punto crítico en $P_0 = (-3/2; -1/2)$. Clasificarlo.

9) Determinar los extremos relativos libres de $z = f(x;y)$ si su vector gradiente es: $\nabla z = \left(3x^2 - 3y\right)\breve{i} + \left(3y^2 - 3x\right)\breve{j}$.

10) Si $P_2(x;y) = 3 + 2.(x-1)^2 + 5.(x-1)(y-2) + 3.(y-2)^2$ es el polinomio de Taylor de grado 2 de una función $z = f(x;y)$, calcular los extremos relativos libres.

11) Si la función $z = f(x;y)$ presenta un punto crítico en el punto $P_0 = (1;5;-1)$ y el determinante hessiano en dicho punto es $H(P_0) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$, a) determinar si la función alcanza un extremo en dicho punto, clasificarlo, b) obtener el polinomio de Taylor de grado dos correspondiente a dicha función en potencias de $(x-1)$ e $(y-5)$.

12) Si $z = f(x;y)$ está definida implícitamente por $x + yz + e^z - 1 = 0$, demostrar que $h = f \circ \vec{g}$ con $\vec{g}\left(t^2; 2 - t^2\right)$ y $t \in [-1;1]$, alcanza un punto crítico en $t_0 = 0$.

13) Si $z = f(x;y)$ está definida implícitamente por $x^2y^2 + y + x - xyz = 0$, verificar que alcanza un mínimo local en $P_0 = (1;1;z_0)$.

14) La superficie de ecuación $z = f(x;y)$ tienen plano tangente horizontal en el punto $P_0 = (-1;1;3)$. Si además $H(x;y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix}$, hallar una expresión que permita calcular la imagen de $f(x;y), \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ si f es polinómica de 3º grado.

15) Dada $\vec{f}(x;y) = \left(9x^2 + 2y + y^2; 2x + 2xy\right)$, demostrar que $\vec{f}$ admite función potencial $U(x;y)$. Si $U(0;0) = 2$, analizar la existencia de extremos locales de $U(x;y)$, calcularlos y clasificarlos.

RESPUESTAS

1) a) (2;1;–28) mín., (–2; –1;28) máx. b) (–2/3;1/3;0) mín.
   c) (1;1;3) mín. d) (2;2;64) mín., (–2; –2; –64) máx.
   e) (1;0;–2) mín. f) (1;4; –19) mín.
   g) (0;0;5) máx. h) (0;1;4/3) máx., (2;3;–8) mín., (–5;3;–375/4) mín.
   i) (0;0;0) mín., j) (0;0;–1) máx., $\left(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\;;-3/2\right)$ mín.,
   $\left(\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2;-3/2\right)$ mín., $\left(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;-3/2\right)$ mín.,
   $\left(-\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2;-3/2\right)$ mín.
   k) No hay extremos. l) (–1;1/2;9,49) máx. m) (1;0;0) mín.
   n) No hay extremos. o) caso dudoso. p) No hay extremos.
   q) (2;1;6) mín. r) (2;1;4) mín., (1;0;5) máx.

2) a) tiene puntos críticos, (1;1) y (–1; –1), pero no extremos,
   b) no tiene puntos críticos

3) $k>\frac{9}{4}$ 4) $|z''_{xy}|<6$

5) a) (0;0;3) máx., (0;0;–3) mín. b) (–4;2;–3) máx., (4;–2;3) mín.

6) $x=200$, $y=200$, $B=400.000$ 7) $k=2$, mínimo; 8) $k=3$, mínimo

9) en (1;1) mín. 10) no tiene extremos

11) a) presenta un mín.
    b) $p_2(x;y)=-1+2(x-1)^2+4(x-1).(y-5)+4(y-5)^2$

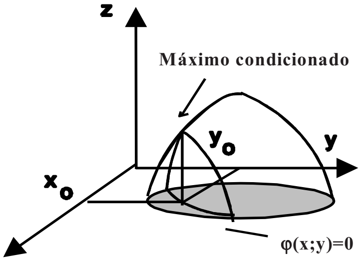
14) $f(x;y)=3-(x+1)^2-2(x+1)(y-1)+(y-1)^2+\frac{1}{3}(x+1)^3-(x+1)^2(y-1)$

15) en $\left(\frac{1}{3};-1\right)$, mín., en $\left(-\frac{1}{3};-1\right)$, máx.

EXTREMOS CONDICIONADOS

Se trata de hallar los extremos de una función del tipo $f:\Re^2\to\Re\ /\ z=f(x;y)$ donde las variables x e y están sujetas a la restricción $\varphi(x;y)=0$ (que define a la variable y como función implícita de x, $y=h(x)$). Ahora las variables x e y no son independientes como en el caso de los extremos libres y el punto debe pertenecer al dominio y a la curva $\varphi(x;y)=0$. Se puede expresar la función así: $z=f[x;h(x)]$ con la siguiente red de variables:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$



Para calcular los puntos críticos de una función sujeta a una restricción veremos el método de los ***multiplicadores de Lagrange***, que consiste en transformar la búsqueda de puntos críticos de una función con restricciones en la búsqueda de puntos críticos de una nueva función sin restricciones llamada función de ***Lagrange.*** Para eso $z=f(x;y)$ debe admitir derivadas parciales continuas y $\varphi(x;y)=0$ debe admitir derivadas parciales continuas, no todas nulas.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Condiciones necesarias

Si derivamos la restricción como función implícita queda:

$$y'_x=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y},\ \varphi'_y\neq 0 \quad (1)$$

z es función de una sola variable que es x. Por lo tanto, por la condición necesaria para la existencia de extremos relativos para funciones de una variable, la derivada primera $z'_x=0$. Si derivamos z respecto de x como función compuesta tenemos que: $z'_x=f'_x.1+f'_y.y'_x=0$, de donde surge que $y'_x=-\dfrac{f'_x}{f'_y},\ f'_y\neq 0\ (2)$. Igualando (1) y (2): $\dfrac{\phi'_x}{\phi'_y}=\dfrac{f'_x}{f'_y}\Rightarrow\dfrac{f'_x}{\phi'_x}=\dfrac{f'_y}{\phi'_y}$. Ahora igualamos a –λ (multiplicador de Lagrange): $\frac{f'_x}{\phi'_x}=\frac{f'_y}{\phi'_y}=-\lambda$, de donde surge que: $f'_x+\lambda.\varphi'_x=0$ y $f'_y+\lambda.\varphi'_y=0$. Si a estas dos ecuaciones agregamos la restricción se obtiene el siguiente sistema: $\begin{cases} f'_x+\lambda.\phi'_x=0 \\ f'_y+\lambda.\phi'_y=0 \\ \phi(x;y)=0 \end{cases}$

Pero a estas ecuaciones se llega aplicando las condiciones necesarias para la existencia de extremos relativos libres a la función de Lagrange:

$$F(x;y;\lambda)=f(x;y)+\lambda.\varphi(x;y)$$

Es decir que las condiciones necesarias para la existencia de extremos condicionados de la función $z=f(x;y)$ sujetos a la restricción $\varphi(x;y)=0$ son las mismas que para la existencia de extremos relativos libres de la función de Lagrange.

Si $F(x;y;\lambda)=f(x;y)+\lambda.\varphi(x;y)$, las derivadas son: $\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda.\phi'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda.\phi'_y=0 \\ F'_\lambda=\phi(x;y)=0 \end{cases}$

Condición suficiente

La condición suficiente es la misma que vimos para extremos relativos, es decir que $d^2F(P_0)\neq 0$.

Si $d^2F(P_0)>0$, el extremo es un mínimo condicionado; si $d^2F(P_0)<0$, el extremo es un máximo condicionado.

Nota: la dificultad que encontramos en el caso de los extremos relativos libres para determinar el signo del diferencial 2º que nos condujo a definir el Hessiano, será más fácil de resolver debido a la relación existente entre las variables x e y. Esto se debe a que consideramos puntos del entorno que se encuentran sobre la curva y no en todo el plano.

Ejemplo

Hallar los extremos de $f(x;y) = 4x^2 - 2y^2$, con $x + y = 6$. Formamos la función de Lagrange: $F(x;y;\lambda) = 4x^2 - 2y^2 + \lambda.(x + y - 6)$. Calculamos las derivadas parciales de 1º orden de la función de Lagrange: $\begin{cases} F'_x = 8x + \lambda = 0 \\ F'_y = -4y + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 6 = 0 \end{cases}$

Despejamos λ de las dos primeras ecuaciones y establecemos una relación entre las variables x e y: $y = -2x$. Reemplazamos en la 3º ecuación:

$$x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \therefore y = 12.$$

Una vez obtenido el punto crítico $P_0 = (-6;12)$, debemos verificar la condición suficiente:

$$d^2F(P_0) = F''_{xx}(P_0).dx^2 + 2F''_{xy}(P_0).dx.dy + F''_{yy}(P_0).dy^2 = 8.dx^2 - 4.dy^2$$

Si el problema fuese de extremos relativos no podríamos determinar el signo del d^2F, pero por ser un problema de extremos condicionados sabemos que: $y = 6 - x \Rightarrow dy = -dx$.

Sustituyendo obtenemos que el $d^2F(P_0) = 8.dx^2 - 4.dx^2 = 4.dx^2 > 0 \Rightarrow$ la función alcanza un mínimo condicionado en $P_0 = (-6;12)$.

OTRA EXPRESIÓN DE LA CONDICIÓN SUFICIENTE- EL HESSIANO ORLADO

Definimos el hessiano orlado correspondiente a una función de Lagrange del tipo $F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda.\varphi(x;y)$, de la siguiente forma:

$$\overline{H}(x;y;\lambda) = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & \varphi'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix}$$

Si $\overline{H}(x_0;y_0;\lambda) > 0 \Rightarrow$ en $P_0 = (x_0;y_0)$ f alcanza un máximo condicionado.
Si $\overline{H}(x_0;y_0;\lambda) < 0 \Rightarrow$ en $P_0 = (x_0;y_0)$ f alcanza un mínimo condicionado.

$P_0 = (x_0;y_0)$ es un punto crítico.

Nota: a veces resulta más fácil analizar el signo del hessiano orlado que el del diferencial segundo.

Ejemplo

Hallar extremos de $f(x;y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sujeto a $x + 2y = 2$

Formamos la función de Lagrange: $F(x;y;\lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda.(x + 2y - 24)$

Calculamos las derivadas parciales de 1º orden de la función de Lagrange:

$$\begin{cases} F'_x = 10x - y + \lambda = 0 \\ F'_y = 12y - x + 2\lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + 2y - 24 = 0 \end{cases}$$

Despejamos λ de las dos primeras ecuaciones y establecemos una relación entre las variables x e y: $y = \frac{3}{2}x$. Reemplazamos en la 3º ecuación:

$$x + 3x - 24 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 9.$$

Una vez obtenido el punto crítico $P_0 = (6;9)$, debemos verificar la condición suficiente. Primero obtenemos λ para P_0: $\lambda = y - 10x \Rightarrow \lambda(P_0) = 9 - 60 = -51$. Calculamos ahora el hessiano orlado:

$$\overline{H}(6;9;-51) = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -1 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -56 < 0 \Rightarrow$$ la función alcanza un mínimo condicionado en $P_0 = (6;9;-51)$

GENERALIZACIÓN A N VARIABLES

En el caso en que busquemos los extremos de $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ sujeto a $\phi(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, para obtener los puntos críticos armamos la función de Lagrange $F(x_1; x_2; \ldots; x_n; \lambda) = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) + \lambda.\phi(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Luego resolvemos el sistema de ecuaciones que surge de derivar F respecto de las n variables originales y del parámetro λ. Obtenemos así los puntos críticos. Determinar si estos puntos son extremos máximos o mínimos o no es bastante más complejo que para el caso de dos variables que hemos desarrollado.

En este caso no vamos a verificar la condición suficiente y las características del problema nos indicará si los puntos críticos obtenidos corresponden a máximos, mínimos o no son extremos.

Ejemplo

Maximizar $f(x;y;z)=xyz$ sujeta a la restricción $x+y+z=9$.
Armamos la función de Lagrange: $F(x;y;z;\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-9)$
Calculamos las derivadas respecto de x, y, z y λ.

$$\begin{cases} F_x' = yz+\lambda=0 \\ F_y' = xz+\lambda=0 \\ F_z' = xy+\lambda=0 \\ F_\lambda' = x+y+z-9=0 \end{cases}$$

Despejando λ de las tres primeras ecuaciones e igualando queda: $x=y=z$. Reemplazando en la 4º ecuación queda: $3x=9 \Rightarrow x=3$, por lo tanto $y=z=3$. Hay un punto crítico: $P_1=(3;3;3)$, que por el enunciado sabemos que corresponde a un máximo condicionado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

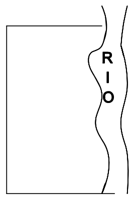
1) *Calcular los extremos de las siguientes funciones de dos variables sujetas a las restricciones indicadas. Determinar si son máximos o mínimos analizando el diferencial segundo.*

a) $f(x;y) = xy$, con $x + y = 12$
b) $f(x;y) = x^2 + 2y$, con $x = 2y$
c) $f(x;y) = 2x^2 + y^2$, con $2x - y = 0$
d) $f(x;y) = 4x^2 - 2y^2$, con $x + y = 6$
e) $f(x;y) = 6 - 4x - 3y$, con $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$

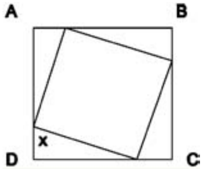
2) *Resolver los siguientes problemas utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. Determinar si son máximos o mínimos analizando el diferencial segundo.*

a) Un lote rectangular de $800 m^2$ tiene un lado sobre un río. Hallar las dimensiones del lote para que la longitud de la cerca sea mínima.

b) Se desea alambrar un campo rectangular limitado por un río como indica la figura. Si la longitud del alambre es de 1.500 mts., determinar las dimensiones del terreno para que la superficie encerrada sea máxima.



c) Determinar x de tal manera que el cuadrado inscripto sea de área mínima, si el lado del cuadrado ABCD es de 10 m.



d) Una escuela necesita aulas rectangulares de $16 m^2$ de superficie. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del aula para gastar la menor cantidad posible de material?

e) Se dispone de 36 mts. de cerca para encerrar un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que sea de superficie máxima?

f) Un hombre desea cercar un campo rectangular y luego subdividirlo en tres parcelas rectangulares colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. Si dispone de 1.000 mts. de cerca, ¿qué dimensiones le darán la superficie máxima? Calcularla.

g) Una caja rectangular de base cuadrada y sin tapa debe tener un volumen de 32 cm^3 ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo de fabricación sea mínimo? Determinar la superficie.

h) ¿Qué dimensiones debe tener un depósito de lata que utilice 108 dm^2 de material, abierto en su parte superior, de base cuadrada, para que su capacidad sea la mayor posible? Dar el volumen.

i) El número de fallas N es función de los números $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de cambios de dos partes de una máquina y está dado por: $N(x;y) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 22x + 60$. Para minimizar las fallas, ¿qué número de cambios deben realizarse de cada parte si $2x = y$? Calcular el número de fallas.

j) Hallar k para que $z = kx + y$ con $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ y $x > 0$, $y > 0$, presente un punto crítico en $P_0 = (2;2)$. Clasificarlo.

k) Demostrar que la función $f(x;y) = x^2 + y^2$ sujeta a que $x^2 - 8xy + 7y^2 = 405$ tiene dos puntos críticos. Calcularlos.

l) Calcular entre todos los cilindros circulares rectos de volumen 2 dm^3 las dimensiones del radio r de la base y h del cilindro de superficie total mínima.

m) Calcular la mínima distancia del punto $P = (1;0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

n) Calcular la mínima distancia del punto $P = (2;0)$ a la parábola $y = 4 - x^2$, con $x \geq 0$.

3) *Calcular los mínimos de las siguientes funciones de tres variables sujetas a las restricciones indicadas.*

a) $u = 3x^2 + 2y^2 + z^2$, con $\varphi\,(x;y;z) = 2x + y + z - 4 = 0$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2$, con $\varphi\,(x;y;z) = 2x + 3y - 4z + 8 = 0$

c) $u = 2x^2 + y^2 + 4z^2$, con $\varphi\,(x;y;z) = 2x + 2y - z - 4 = 0$

d) $u = x^2 + y^2 + z^2$, con $\varphi\,(x;y;z) = 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} - 1 = 0$

e) $u = 2x^2 + 4y^2 + z^2$, con $\varphi\,(x;y;z) = 2x + y + 3z - 9 = 0$

f) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, con $x + y + z = 6$, si $x > 0, y > 0, z > 0$.

4) *Resolver los siguientes problemas con tres variables*

a) Hallar tres números cuya suma sea 21 y cuyo producto sea máximo. Hallar el producto.

b) Descomponer el número 50 en 3 sumandos tales que $x^4.y^{10}.z^6$ sea máximo.

c) Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 500 cm^3 ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo de fabricación sea mínimo? Determinar la superficie.

d) Hallar las aristas del paralelepípedo trirectángulo de volumen máximo entre los que tienen 3 caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

e) Calcular las dimensiones de una caja rectangular de capacidad máxima si su superficie es de 216 cm^2. Calcular el volumen.

RESPUESTAS

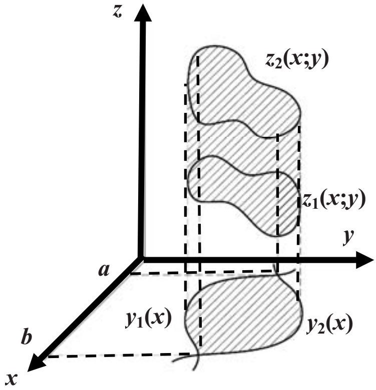
1) a) P = (6;6), máx. b) P = (–1/2;–1/4), mín. c) P = (0;0), mín.
d) P = (–6;12), mín. e) P = (4/5;3/5), mín.

2) a) l = 40 m., a = 20 m., b) l =750 m., a = 375 m., c) x = 5 m.
d) cuadrados de 4 m. de lado, e) cuadrado de lado 9 m.
f) 125 y 250 mts. respectivamente, S = 31.250 m^2.
g) base = 4 cm., h = 2 cm., S = 48 cm^2.
h) base = 6 dm., h = 3 dm. V = 108 dm^3. i) $x = 1$, $y = 2$, $N = 49$
j) $k = 1$, mínimo k) $P_1 = (3;-6)$, $P_2 = (-3;6)$ l) $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$, $h = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$
m) $d = 1$ n) $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

3) a) P = (16/17;12/17;24/17) b) P = (–16/29;–24/19;32/19)
c) P = (16/25;32/25;–4/25) d) P = (72/157;12/157;18/157)
e) P = (4/5;1/5;12/5) f) P = (2;2;2)

4) a) $x = y = z = 7$, P = 343 b) $x = 10$, $y = 25$, $z = 15$
c) base = 10 cm., h = 5 cm., S = 300 cm^2 d) $x = \dfrac{a}{3}; y = \dfrac{b}{3}; z = \dfrac{c}{3}$
e) cubo de lado 6 cm. V = 216 cm^3.

Capítulo 10



Integrales múltiples

Integrales dobles: el área y el volumen.

Integrales triples.

Integrales en coordenadas esféricas, cilíndricas.

Área de una superficie curva en R^3.

Momento estático.

Momento de inercia.

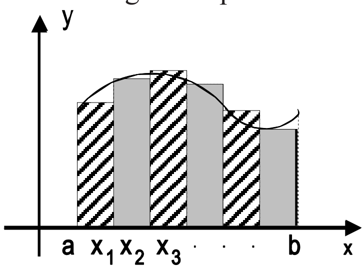
Centro de masa.

INTEGRALES DOBLES- EL VOLUMEN

Así como el problema del cálculo del área de una región plana conduce al concepto de integral definida simple, el problema del cálculo del volumen de un sólido conduce al concepto de integral doble. Las integrales dobles permiten calcular volúmenes.

EL ÁREA LIMITADA POR UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Pero antes de desarrollar el tema del volumen repasamos brevemente como se calcula el área de una región plana a través de una integral simple.



Se plantea el problema de calcular el área de la región plana limitada por una función continua del tipo $y=f(x)$ con $f(x)\geq 0$ en el intervalo $[a;b]$. Dividimos el intervalo $[a;b]$ en n subintervalos, cada uno de amplitud Δx_i (con $1 \leq i \leq n$) y consideramos de cada subintervalo un punto interior x_i al cual le corresponde, por ser ésta continua, un valor de la función $f(x_i)$.

El área de cada rectángulo se obtiene multiplicando cada $f(x_i)$ por cada Δx_i. La suma de las áreas de los n rectángulos da un valor aproximado del área bajo la curva, con x entre a y b.

Área aproximada $= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$.

Si la partición se hace más fina, esta sumatoria se aproxima cada vez más al área real.

Área = $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ máx\,\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

Se define como integral definida entre a y b al límite, cuando cada $\Delta x_i \to 0$ de la suma de los productos entre los $f(x_i)$ y los Δx_i.

Nota: si $f(x)$ es negativa la integral definida da negativa, y el área es el valor absoluto de la integral o $A = -\int_a^b f(x).dx$.

Propiedades

1) Propiedad aditiva

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).\,dx + \int_c^b f(x).\,dx \quad c \in (a;b)$$

2) Los factores se pueden extraer fuera de la integral

$$\int_a^b k.\,f(x).dx = k.\int_a^b f(x).\,dx$$

3) La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas

$$\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)].dx = \int_a^b f(x).\,dx + \int_a^b g(x).\,dx - \int_a^b h(x).\,dx$$

REGLA DE BARROW

Si $f(x)$ es continua en $[a;b]$ y $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

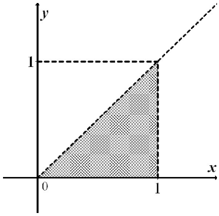
$$\int_a^b f(x).dx = G(b) - G(a)$$

Para calcular la integral definida entre a y b basta con encontrar una primitiva cualquiera de f y restar los valores que toma en los extremos del intervalo.

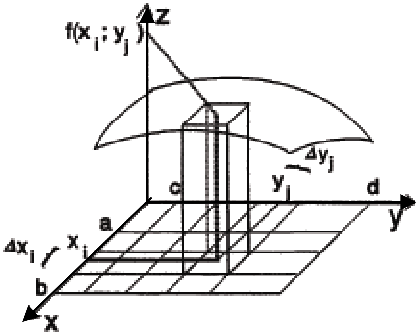
BARROW, *Isaac (1634-1677):* nació en Londres, ciudad en la cual también murió. Fue profesor de Cambridge, donde en 1669 renuncia a la cátedra para que lo reemplace Newton, quién había sido su alumno en esa misma cátedra, por considerarlo más digno que él para ser profesor. Luego se dedica a la teología. Fue el primero en observar que el problema del trazado de la recta tangente a una curva en un punto y el cálculo del área limitada por esta curva son mutuamente inversos.

Ejemplo

$$\int_0^1 x.dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$



EL PROBLEMA DEL VOLUMEN – LA INTEGRAL DOBLE



Habiendo recordado como se calculan áreas utilizando integrales simples, encaramos ahora el problema del cálculo del volumen.

Buscamos el volumen del sólido limitado por una superficie continua de ecuación $z = f(x;y) \geq 0$ en el rectángulo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por:
$a \leq x \leq b\,;\; c \leq y \leq d$.

Subdividimos los intervalos $(a;b)$ y $(c;d)$ en n y m subintervalos respectivamente de amplitudes Δx_i y Δy_j no necesariamente iguales.

El recinto de integración (la base del sólido cuyo volumen vamos a calcular) queda dividido en *nxm* rectángulos, cada uno de área $A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$. Consideramos un punto $(x_i;y_j)$ interior a cada rectángulo; a cada uno de esos puntos le corresponde un valor de la función que denominamos $f(x_i;y_j)$. Si multiplicamos el área de la base de cada rectángulo por el valor de la función se obtiene el volumen de un prisma: $V_{prisma\,(ij)} = f\left(x_i ; y_j\right) . \Delta x_i . \Delta y_j$.

Sumando los volúmenes de los *nxm* prismas se obtiene un volumen aproximado: $V\ aprox = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(x_i ; y_j\right) . \Delta x_i . \Delta y_j$.

Si afinamos la partición, al igual que hicimos para calcular el área, es decir el número de subintervalos tiende a infinito, o la amplitud de los mismos tienden a 0, obtenemos el volumen del sólido:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ máx\,\Delta x_i \to 0 \\ máx\,\Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i ; y_j\right).\Delta x_i.\Delta y_j = \iint_D f\,(x;y).dx.dy$$

El límite de esta sumatoria es lo que se denomina ***integral doble*** de la función $z = f(x;y)$ sobre la región D.

Nota: si $f\,(x;y) < 0 \Rightarrow V = \left|\iint_D f\,(x;y).dx.dy\right| = -\iint_D f\,(x;y).dx.dy$

Propiedades de la integral doble

1) Si en la función integral existe un factor constante, el mismo puede extraerse del símbolo integral

$$\iint_D k.f\,(x;y).dx.dy = k.\iint_D f\,(x;y).dx.dy$$

Dicha propiedad surge al sacar factor común la constante en la sumatoria que conduce a la integral doble.

2) La integral doble en un recinto D de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales en D de cada una de ellas.

$$\iint_D f\,(x;y) + g(x;y).dx.dy = \iint_D f\,(x;y).dx.dy + \iint_D g\,(x;y).dx.dy$$

La justificación de esta propiedad se obtiene descomponiendo la sumatoria original en la suma de dos sumatorias, los límites de las cuales dan las respectivas integrales dobles que figuran en el segundo miembro de la igualdad.

3) Si el recinto D es la unión de otros dos recintos disjuntos D_1 y D_2 ($D = D_1 \cup D_2$), la integral doble en D es igual a la suma de las integrales dobles en D_1 y D_2.

$$\iint_D f\,(x;y).dx.dy = \iint_{D_1} f\,(x;y).dx.dy + \iint_{D_2} f\,(x;y).dx.dy$$

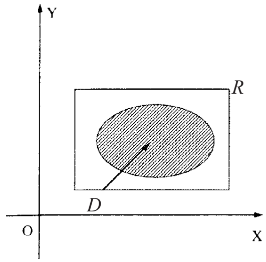
La justificación surge de agrupar los sumandos de la sumatoria en aquellos que corresponden a D_1 o a D_2.

Ampliación de las características del dominio de integración

Supongamos ahora que el recinto de integración $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado limitado por una curva rectificable (de longitud finita).

Procedemos a incluirlo en un rectángulo R.
Definimos en el rectángulo R una nueva función $f^*(x;y)$ /

$$f^*(x;y) = \begin{cases} f(x;y) & \forall (x;y) \in D \\ 0 & \forall (x;y) \in R - D \end{cases}$$



Por propiedad 3)

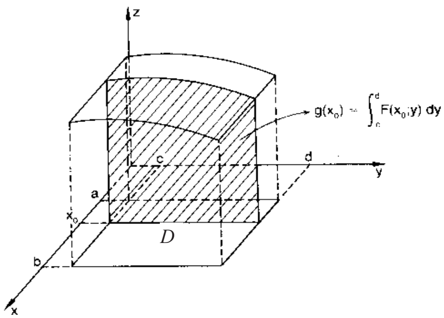
$$\iint_R f^*(x;y).dx.dy = \iint_D f^*(x;y).dx.dy + \iint_{R-D} f^*(x;y).dx.dy$$

$$\iint_R f^*(x;y).dx.dy = \iint_D f(x;y).dx.dy + 0 = \iint_D f(x;y).dx.dy$$

Con lo cual se demuestra que el cálculo de integrales dobles se puede aplicar a recintos no rectangulares.

Cálculo de la Integral Doble Mediante Integrales Iteradas

Teorema de Fubbini



Sea $z = f(x;y)$ una función continua definida y acotada sobre el rectángulo $D = [a;b] \times [c;d]$ (Dominio o recinto de integración).
Consideramos un valor fijo de la variable x, por ejemplo $x = x_0$ donde z es integrable respecto de la variable y en el intervalo $[c;d]$. Observemos que al considerar a x constante ($x = x_0$), la función z pasa a ser función exclusivamente de la variable y. $z = f(x_0;y) = h(y)$.

Definimos como $g\ (x_0)$ al área rayada correspondiente a $x = x_0$ que procedemos a calcular: $g(x_0) = \int_c^d f(x_0; y).dy$

Si $f\,(x_0;y) \geq 0$, entonces $g(x_0)$ es el valor del área rayada.
Si z es integrable respecto de la variable y para cualquier valor fijo de x, comprendido entre a y b, queda definida la función g:

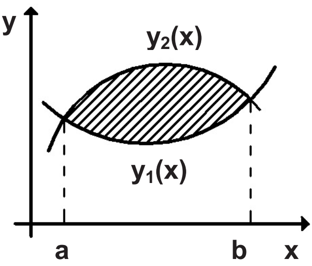
g: $[a;b] \rightarrow \Re\ /\ g\ (x) = \int_c^d f(x; y).dy$.

Si a su vez la función escalar g es integrable respecto de su única variable x, puede calcularse $V = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x; y).dy \right] dx. = \iint_D f\ (x; y).dy.dx$

Generalización

Si $D = \{(x;y) \in \Re^2 /\ a \leq x \leq b \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, dominio de integración es del tipo I

$$V = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y).dy.dx$$



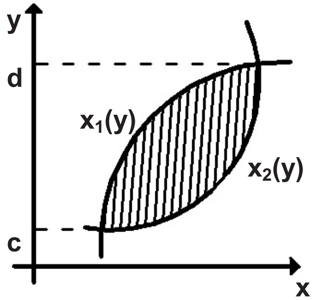
Dominio de integración

Nota: el diferencial externo (dx) debe corresponder a los valores de la primera integral (a y b son valores de x).

Si el dominio de integración es del tipo II

$D = \{(x;y) \in \Re^2 /\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \wedge c \leq y \leq d\}$

entonces: $V = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y).dx.dy$



Dominio de integración

Cálculo de áreas mediante integrales dobles

Cuando la función $f(x;y) = 1$, el área del dominio de integración coincide numéricamente con el volumen del sólido. Si el dominio de integración es del tipo I:

$$A = \iint_D dx.\,dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.\,dx$$

Los límites de integración surgen del recinto o dominio de integración cuya área vamos a calcular; a y b son los valores constantes entre los que varía la variable x, $y_1\,(x)$ e $y_2\,(x)$ son las funciones de x que limitan la región plana cuya área buscamos.

$$A = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right] dx = \int_a^b y\Big]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x) \right].dx$$

Se calcula primero la integral dentro del corchete, integrando según la variable y, considerando a la x constante. Como resultado de la integración se obtiene una función continua de x. Luego se integra esta función respecto de x entre los límites a y b. Es decir que una integral doble se desdobla en dos integrales simples.

Si el dominio de integración es del tipo II:

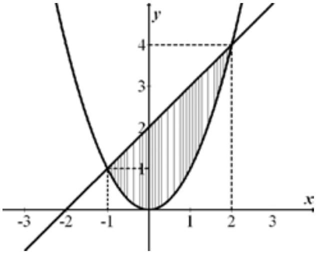
$$A = \iint_D dx.\,dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,.\,dy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \right].\,dy =$$

$$= \int_c^d x\Big]_{x_1(y)}^{x_2(y)}.dy = \int_c^d \left[x_2(y) - x_1(y) \right].dy$$

Donde c y d son los valores constantes entre los que varía la variable y, $x_1(y)$ y $x_2\,(y)$ son las funciones de y que limitan el dominio.

Nota importante: el orden de los diferenciales queda fijado una vez que se fijan los límites de integración, correspondiendo el segundo diferencial a la variable que corresponde a la primera integral. Es decir que si los límites de la primera integral son valores constantes de x, el 2º diferencial es el dx y viceversa.

Ejemplo: calcular el área limitada por $y = x^2$, $y = x+2$, utilizando integrales dobles.

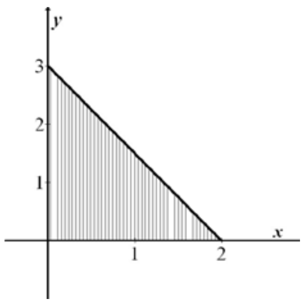


$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy.dx=\int_{-1}^{2}\left[\int_{x^2}^{x+2} dy\right]dx=\int_{-1}^{2} y\,\Big]_{x^2}^{x+2} dx=\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right).dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

Veamos ahora como se puede calcular un área por ambos caminos.

a) Área limitada por $\begin{cases} y=0 \\ y=3-\dfrac{3}{2}x \\ x=0 \end{cases}$



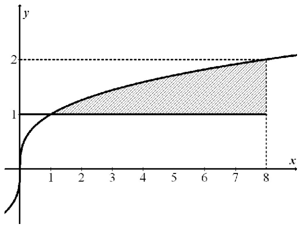
$$A=\int_{0}^{2}\int_{0}^{3-\frac{3}{2}x} dy.dx=\int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{3-\frac{3}{2}x} dy\right]dx=\int_{0}^{2} y\,\Big]_{0}^{3-\frac{3}{2}x} dx=$$

$$=\int_{0}^{2}\left(3-\frac{3}{2}x\right).dx=3x-\frac{3x^2}{4}\Bigg]_{0}^{2}=6-3=3$$

$$A=\int_0^3\int_0^{2-\frac{2}{3}y} dx.dy=\int_0^3\left[\int_0^{2-\frac{2}{3}y} dx\right]dy=\int_0^3 x\ \Big]_0^{2-\frac{2}{3}y} dx=$$

$$=\int_0^3\left(2-\frac{2}{3}y\right).dy=2y-\frac{y^2}{3}\Big]_0^3=\ 6-3=3$$

b) Área limitada por $\begin{cases} y^3=x & 1\leq x\leq 8 \\ y=1 \end{cases}$



$$A=\int_1^8\int_1^{\sqrt[3]{x}} dy.dx=\int_1^8\left[\int_1^{\sqrt[3]{x}} dy\right].dx=\int_1^8 y\ \Big]_1^{\sqrt[3]{x}}\ dx=$$

$$=\int_1^8\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-x\Big]_1^8=12-8-\frac{3}{4}+1=\frac{17}{4}$$

$$A=\int_1^2\int_{y^3}^8 dx.dy\ =\ \int_1^2\left[\int_{y^3}^8 dx\right].dy\ =\ \int_1^2 x\ \Big]_{y^3}^8\ dy\ =\ \int_1^2\left(8-y^3\right)dy=$$

$$=8y-\frac{y^4}{4}\Big]_1^2=16-4-8+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

La pregunta que surge es **¿qué método conviene?**

Y eso depende de las funciones que limitan el dominio de integración. En algunos casos, como el visto, es indistinto. En otros casos conviene utilizar alguno determinado.

CÁLCULO DE VOLÚMENES

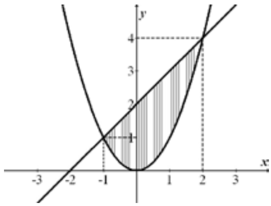
Veamos ahora como utilizar las integrales para calcular volúmenes. En realidad lo único que cambia es la función a integrar. Cuando $f(x;y)$ no es 1, lo que calculamos es el volumen.

$$V = \iint_D f(x;y).dx.dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y).dy\,.dx$$

o como ya vimos, también $V = \iint_D f(x;y).dx.dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y).dx.dy$

Ejemplos: a) calcular el volumen del sólido limitado por $z = x + 2y$

$D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$, utilizando integrales dobles.



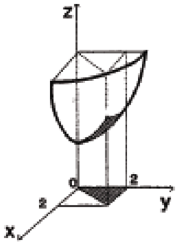
Graficamos el dominio de integración del cual obtenemos los límites de integración de las integrales.

$$V = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}(x+2y).dy.dx = \int_{-1}^{2}\left[\int_{x^2}^{x+2}(x+2y).dy\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(xy+y^2\right)\Big]_{x^2}^{x+2} dx =$$

$$\int_{-1}^{2}\left[\left[x.(x+2)+(x+2)^2\right]-\left(x^3+x^4\right)\right].dx = \int_{-1}^{2}\left(x^2+2x+x^2+4x+4-x^3-x^4\right).dx$$

$$\int_{-1}^{2}\left(-x^4-x^3+2x^2+6x+4\right).dx = \left(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+3x^2+4x\right)\Bigg]_{-1}^{2} = \frac{13}{20}$$

b) Hallar el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2 + 1$ con $D: \begin{cases} y = 2 \\ y = x \end{cases}$



$$V = \int_0^2 \int_x^2 \left(x^2 + y^2 + 1\right).dy.dx = \int_0^2 \left[\int_x^2 \left(x^2 + y^2 + 1\right).dy \right] dx =$$

$$\int_0^2 \left. x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_x^2 .\, dx = \int_0^2 \left(2x^2 + \frac{8}{3} + 2 - x^3 - \frac{x^3}{3} - x \right).dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{4x^3}{3} + 2x^2 - x + \frac{14}{3} \right).dx = \left. \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{14}{3} x \right) \right]_0^2 =$$

$$= \frac{22}{3}$$

Cambio de variables

A veces es conveniente efectuar un cambio de variables en las integrales dobles porque su cálculo resulta más sencillo.
Para funciones de una variable ($y = f(x)$), al hacer una sustitución de variables ($x = g(u)$), en la integral aparece el factor $g'(u)$:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u).g'(u).du$$

Veremos ahora que ocurre en una integral doble al hacer un cambio de variables.
En $z = f(x; y)$ hacemos el siguiente cambio de variables $\begin{cases} x = g(u;v) \\ y = h(u;v) \end{cases}$, que suponemos continuas y con derivadas parciales continuas.

La expresión $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(x;y)}{\partial(u;v)} = J\left(\dfrac{x;y}{u;v}\right)$ se denomina determinante funcional o *jacobiano* asociado al cambio de variables que suponemos distinto de cero. Si esto se verifica, entonces se puede demostrar que:

$$V=\iint_D f(x;y).dx.dy=\iint_R f(u;v).\left|J\left(\frac{x;y}{u;v}\right)\right|.du.dv$$

Así como cuando hacemos una sustitución en integrales de una variable aparece en la nueva integral el factor $g'(u)$ (la derivada de la variable original respecto de la nueva variable), ahora aparece el *jacobiano*, que es un determinante formado por las derivadas parciales de las variables originales respecto de las nuevas variables.

Llamamos D al recinto expresado en las variables originales y R al recinto expresado en las nuevas variables.

Al efectuar un cambio de variables se realizan los siguientes pasos:

1) Los límites de integración corresponden a las nuevas variables.
2) Se sustituyen los diferenciales de las variables originales por los diferenciales de las nuevas variables.
3) En la función a integrar se sustituyen las variables originales por las nuevas variables.
4) Se incorpora como factor en la función a integrar el jacobiano de las variables originales respecto de las nuevas variables.

Integrales en coordenadas polares

En algunos casos el cálculo de áreas y volúmenes se simplifica expresando las funciones en coordenadas polares. Es un caso particular de cambio de variables donde, como se vio en la página 20, $\begin{cases} x=r.cos\,\alpha \\ y=r.sen\,\alpha \end{cases}$

El jacobiano en este caso se calcula de la siguiente manera:

$$J\left(\frac{x;y}{r;\alpha}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\,\alpha & -r.sen\,\alpha\\ sen\,\alpha & r.cos\,\alpha\end{vmatrix}=r.\left(cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)=r$$

$$V=\int_a^b\int_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)} f(r;\alpha).r.d\alpha.dr=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} f(r;\alpha).r.dr.d\alpha \qquad \begin{array}{l} a\le r\le b,\quad \alpha_1(r)\le\alpha\le\alpha_2(r)\\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2,\ r_1(\alpha)\le r\le r_2(\alpha)\end{array}$$

El criterio para elegir el orden de los diferenciales es el mismo que el que se utiliza para las coordenadas rectangulares.

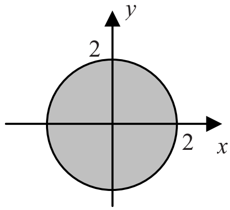
Si $f(x;y)=1$, como ya vimos, tenemos la fórmula del área.

$$A=\iint_D dxdy=\iint_R r.dr.d\alpha=\int_a^b\int_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)} r.d\alpha.dr=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} r.dr.d\alpha$$

Ejemplos

1) Hallar el área de un círculo de radio 2. Calculamos el área de un cuarto de círculo y luego la multiplicamos por 4.

$$D=\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\end{cases} \qquad R=\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$



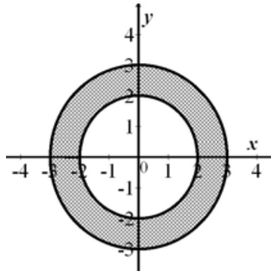
En este caso vemos que mientras r varía entre 0 y 2, los límites de variación de α son siempre los mismos, entre 0 y $\pi/2$. Por lo tanto:

$$A=4.\int_0^2\int_0^{\pi/2} r.d\alpha.dr=4.\int_0^2\left[\int_0^{\pi/2} r.d\alpha\right].dr=4.\int_0^2 r.\alpha\Big]_0^{\pi/2}.dr=$$

$$=4.\int_0^2 r.\frac{\pi}{2}.dr=4.\frac{\pi}{2}.\frac{r^2}{2}\Bigg]_0^2=4\pi$$

2) Hallar el área de la siguiente corona circular. Calculamos el área de un cuarto de la corona y luego la multiplicamos por 4.

$$R = \begin{cases} 2 \le r \le 3 \\ 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



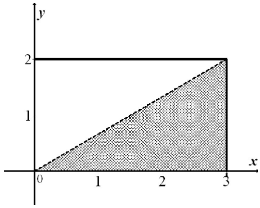
En este caso vemos que mientras r varía entre 2 y 3, los límites de variación de α son siempre los mismos, entre 0 y $\pi/2$. Por lo tanto:

$$A = 4.\int_2^3 \int_0^{\pi/2} r.d\alpha.dr = 4.\int_2^3 \left[\int_0^{\pi/2} r.d\alpha \right].dr = 4.\int_2^3 r.\alpha\Big]_0^{\pi/2} .dr =$$

$$= 4.\int_2^3 r.\frac{\pi}{2}.dr = 4.\frac{\pi}{2}.\frac{r^2}{2}\Bigg]_2^3 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$$

3) Hallar el área del rectángulo $D = \{(x;y) \in \Re^2 \wedge 0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 2\}$. Calculamos el área del triángulo inferior y luego la multiplicamos por 2.

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad R = \begin{cases} 0 \le r \le 3/\cos\alpha \\ 0 \le \alpha \le arctg\ 2/3 \end{cases}$$



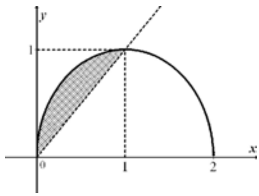
Si consideramos el triángulo inferior vemos que mientras α varía entre $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = arc\ tg\ 2/3$, los límites de variación de *r no* son siempre los mismos como en los casos anteriores, *r* ahora varía entre 0 y la recta $x = 3$, que debemos expresar en coordenadas polares, es decir $3 = r.\cos\alpha \Rightarrow r = \dfrac{3}{\cos\alpha}$. Por lo tanto:

$$A = 2.\int_0^{arc\,tg\,2/3}\left[\int_0^{3/cos\,\alpha} r.dr\right].d\alpha = 2.\int_0^{arc\,tg\,2/3} \left.\frac{r^2}{2}\right]_0^{3/cos\,\alpha}.d\alpha = \int_2^{arc\,tg\,2/3}\frac{9}{cos^2\alpha}.d\alpha =$$

$$= 9\,tg\,\alpha\Big]_0^{arc\,tg\,2/3} = 9.\frac{2}{3} = 6$$

4) Hallar el área del recinto $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 \wedge x \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$.

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \end{cases} \qquad R = \begin{cases} 0 \le r \le 2\,cos\,\alpha \\ \dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



Vemos que mientras α varía entre $\alpha_1 = \pi/4$ y $\alpha_2 = \pi/2$, los límites de variación de *r no* son siempre los mismos, *r* varía entre 0 y la circunferencia, que debemos expresar en coordenadas polares:

$$(r.cos\,\alpha - 1)^2 + (r.sen\alpha)^2 = 1 \;\Rightarrow\; r^2\,cos^2\,\alpha - 2r\,cos\,\alpha + 1 + r^2 sen^2\alpha = 1\,.$$

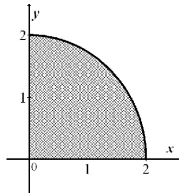
Por lo tanto $r^2 - 2r\,cos\,\alpha = 0 \;\Rightarrow\; r = 2\,cos\,\alpha$

$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\,cos\,\alpha} r.dr\right].d\alpha = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left.\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\,cos\,\alpha}.d\alpha = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\,cos^2\,\alpha.d\alpha =$$

$$= 2.\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+cos(2\alpha)}{2}.d\alpha = \alpha + \left.\frac{sen(2\alpha)}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 0 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cong 0{,}285$$

5) Hallar el volumen del sólido limitado por la superficie $z = e^{x^2+y^2}$ si el dominio es $D = \{(x;y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$



$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \qquad R = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

En este caso vemos que mientras r varía entre 0 y 2, los límites de variación de α son siempre los mismos, entre 0 y $\pi/2$. $z = e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$. Por lo tanto:

$$V = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} e^{r^2}.r.d\alpha.dr = \int_0^2 \left[\int_0^{\pi/2} e^{r^2}.r.d\alpha \right].dr = \int_0^2 e^{r^2}.r.\alpha\Big]_0^{\pi/2}.dr =$$

$$= \int_0^2 e^{r^2}.r\frac{\pi}{2}.dr = \frac{\pi.e^{r^2}}{4}\Bigg]_0^2 = \frac{\pi.e^4}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\left(e^4 - 1\right)$$

Generalización de la Integral Doble – La Integral Triple

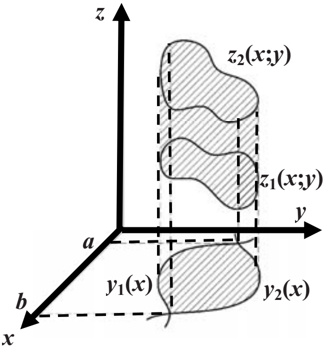
Supongamos ahora una función $u = f(x;y;z) \geq 0$ definida en el recinto sólido $D \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por: $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x;y) \leq z \leq z_2(x;y) \end{cases}$

Generalizando el concepto de integral doble, podemos considerar la integral triple de la siguiente manera:

$$\iiint_D f(x;y;z).dz.dy.dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z).dz.dy.dx$$

El orden de los diferenciales sigue el mismo criterio que para las integrales dobles. El último diferencial (dx) corresponde a la variable de la primera integral (x), el segundo diferencial (dy) corresponde a la variable de la segunda integral (y) y el primer diferencial (dz) corresponde a la variable de la última integral (z).

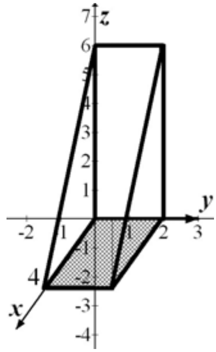
Caso particular-el volumen: si $u = f(x;y;z) = 1$, la integral triple mide el volumen del sólido. Esto nos indica otro camino para calcular el volumen de un sólido, el que se encuentra comprendido entre ambas superficies.



$$V = \iiint_D dz.dy.dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} dz.dy.dx$$

Ejemplos

1) Calcular mediante una integral triple el volumen del prisma de base triangular limitado por los planos coordenados y los planos $3x + 2z = 12$ e $y = 2$.

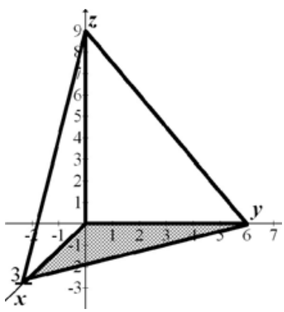


$$V = \int_0^4 \int_0^2 \left[\int_0^{6-1,5x} dz \right].dy.dx = \int_0^4 \int_0^2 z\Big]_0^{6-1,5x} dy.dx =$$

$$= \int_0^4 \left[\int_0^2 (6 - 1,5x - 0).dy \right].dx = \int_0^4 (6y - 1,5xy)\Big]_0^2 .dx =$$

$$= \int_0^4 (12 - 3x - 0).dx = 12x. - 1,5x^2\Big]_0^4 = 48 - 24 = 24$$

2) Calcular mediante una integral triple el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $6x + 3y + 2z = 18$.



$$V = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \left[\int_0^{9-3x-1,5y} dz \right].dy.dx = \int_0^3 \int_0^{6-2x} z\Big]_0^{9-3x-1,5y} dy.dx$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^{6-2x} (9 - 3x - 1,5y - 0) \right].dy.dx =$$

$$= \int_0^3 \left(9y - 3xy - 0,75y^2\right)\Big]_0^{6-2x} .dx =$$

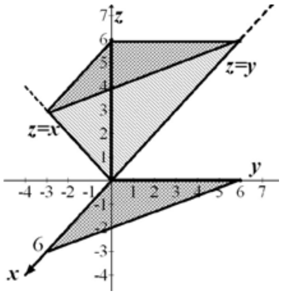
$$= \int_0^3 \left[9.(6-2x) - 3x.(6-2x) - 0,75.(6-2x)^2 - 0 \right].dx =$$

$$= \int_0^3 \left(54 - 18x - 18x + 6x^2 - 27 + 18x - 3x^2 \right).dx =$$

$$= \int_0^3 \left(27 - 18x + 3x^2 \right).dx = \left(27x - 9x^2 + x^3 \right) \Big]_0^3 = 81 - 81 + 27 = 27$$

3) Calcular mediante una integral triple el volumen del sólido limitado por los planos coordenados, y los planos $z = 6$ y $x + y = z$.

$$V = \int_0^6 \int_0^{6-x} \int_{x+y}^{6} dz.dy.dx = \int_0^6 \int_0^{6-x} z \Big]_{x+y}^{6} dy.dx$$



$$= \int_0^6 \left[\int_0^{6-x} \left[6 - (x+y) \right] \right].dy.dx =$$

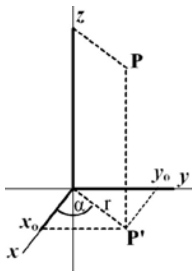
$$= \int_0^6 \left(6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg]_0^{6-x} .dx =$$

$$= \int_0^6 \left[6.(6-x) - x.(6-x) - 0,5.(6-x)^2 \right].dx =$$

$$= \int_0^6 \left(36 - 6x - 6x + x^2 - 18 + 6x - \frac{x^2}{2} \right).dx =$$

$$= \int_0^6 \left(18 - 6x + \frac{x^2}{2} \right).dx = \left(18x - 3x^2 + \frac{x^3}{6} \right) \Bigg]_0^6 = 108 - 108 + 36 = 36$$

Integrales en coordenadas cilíndricas



En algunos casos el cálculo de integrales triples se simplifica expresando las funciones en coordenadas cilíndricas. Es otro caso particular de cambio de variables donde las coordenadas de un punto P = (x;y;z) son $\begin{cases} x = r.cos\,\alpha \\ y = r.sen\,\alpha \\ z = z \end{cases}$ $\quad r > 0,\ 0 \le \alpha \le 2\pi$

Las coordenadas x e y se reemplazan por las coordenadas polares del punto P' que es la proyección del punto P sobre el plano (xy).

El jacobiano en este caso se calcula de la siguiente manera:

$$J\left(\frac{x;y;z}{r;\alpha;z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\,\alpha & -r.sen\,\alpha & 0 \\ sen\,\alpha & r.cos\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} cos\,\alpha & -r.sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & r.cos\,\alpha \end{vmatrix} = r.\left(cos^2\alpha + sen^2\alpha\right) = r$$

Por lo tanto

$$I = \iiint_D f(x;y;z)\,dz.dy.dx = \iiint_R f(r;\alpha;z)\,r.dz.d\alpha.dr =$$

$$= \int_a^b \int_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)} \int_{z_1(r;\alpha)}^{z_2(r;\alpha)} f(r;\alpha;z)\,r.dz.d\alpha.dr = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} \int_{z_1(r;\alpha)}^{z_2(r;\alpha)} f(r;\alpha;z)\,r.dz.dr.d\alpha$$

$a \le r \le b$, $\quad \alpha_1(r) \le \alpha \le \alpha_2(r)$, $\quad z_1(r;\alpha) \le z \le z_2(r;\alpha)$ ó
$\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, $\quad r_1(\alpha) \le r \le r_2(\alpha)$, $\quad z_1(r;\alpha) \le z \le z_2(r;\alpha)$

Nota: si $f(x;y;z) = 1$, la integral triple mide un volumen.

Ejemplos

1) Calcular mediante una integral triple, utilizando coordenadas cilíndricas, el volumen de una esfera de radio 3.

Calculamos la octava parte del volumen correspondiente al primer octante. Vemos que mientras r varía entre 0 y 3, los límites de variación de α son siempre los mismos, entre 0 y $\pi/2$. Por lo tanto:

$$V = 8.\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz.dy.dx = 8.\int_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r.dz.d\alpha.dr =$$

$$= 8.\int_0^3 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\sqrt{9-r^2}} r.dz \right].d\alpha.dr = 8.\int_0^3 \int_0^{\pi/2} r.z\Big]_0^{\sqrt{9-r^2}} d\alpha.dr =$$

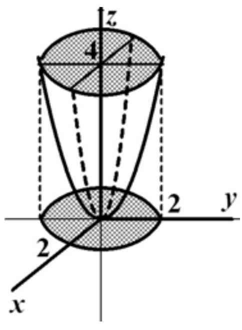
$$= 8.\int_0^3 \left[\int_0^{\pi/2} r.\sqrt{9-r^2} \right].d\alpha.dr = 8.\int_0^3 r.\sqrt{9-r^2}.\alpha\Big]_0^{\pi/2}.dr =$$

$$= 8.\int_0^3 r.\sqrt{9-r^2}.\frac{\pi}{2}.dr = -4\pi.\frac{\sqrt{\left(9-r^2\right)^3}}{3}\Bigg]_0^3 = 36\pi$$

2) Calcular mediante una integral triple, utilizando coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

Calculamos la cuarta parte del volumen correspondiente al primer octante.

$$V = 4.\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} dz.dy.dx = 4.\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_{r^2}^{4} r.dz.d\alpha.dr =$$



$$= 4.\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \left[\int_{r^2}^{4} r.dz \right].d\alpha.dr = 4.\int_0^2 \int_0^{\pi/2} r.z\Big]_{r^2}^{4} d\alpha.dr =$$

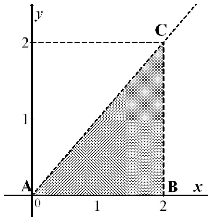
$$= 4.\int_0^2 \left[\int_0^{\pi/2} \left(4r - r^3\right) \right].d\alpha.dr = 4.\int_0^2 \left(4r - r^3\right).\alpha\Big]_0^{\pi/2}.dr =$$

$$= 4.\int_0^2 \left(4r - r^3\right).\frac{\pi}{2}.dr = 2\pi.\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)_0^2 = 8\pi$$

3) Calcular mediante una integral triple, utilizando coordenadas rectangulares y coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido limitado por la superficie $z = xy$ si la base del sólido es el triángulo de vértices A = (0;0), B = (2;0) y C = (2;2).

$$V = \int_0^2\int_0^x\int_0^{xy} dz.dy.dx = \int_0^2\int_0^x\left[\int_0^{xy} dz\right].dy.dx = \int_0^2\int_0^x z\Big]_0^{xy}.dy.dx =$$

$$= \int_0^2\left[\int_0^x xy\right].dy.dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2}\Big]_0^x.dx = \int_0^2\frac{x^3}{2}.dx = \frac{x^4}{8}\Big]_0^2 = 2$$



Veamos ahora la resolución en coordenadas cilíndricas.

Vemos que mientras α varía entre $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \pi/2$, los límites de variación de r *no* son siempre los mismos, r ahora varía entre 0 y la recta $x = 2$, que debemos expresar en coordenadas polares, es decir $2 = r.\cos\alpha \Rightarrow r = \dfrac{2}{\cos\alpha}$. Por lo tanto:

$$V = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos\alpha}\int_0^{r^2.\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha} r.dz.dr.d\alpha = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos\alpha}\left[\int_0^{r^2.\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha} r.dz\right].dr.d\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos\alpha} r.z\Big]_0^{r^2.\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha} dr.d\alpha = \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{2/\cos\alpha} r^3.\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha\right].dr.d\alpha =$$

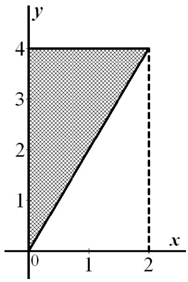
$$= \int_0^{\pi/4} \cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha.\frac{r^4}{4}\Big]_0^{2/\cos\alpha}.d\alpha = 4.\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha}{\cos^4\alpha}.d\alpha =$$

$$= 4.\int_0^{\pi/4}\cos^{-3}\alpha.\operatorname{sen}\alpha.d\alpha = \frac{2}{\cos^2\alpha}\Big]_0^{\pi/4} = 4 - 2 = 2$$

4) Calcular mediante una integral triple, utilizando coordenadas rectangulares y coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido limitado por la superficie $z = xy^2$ si $D = \{(x; y) \in \Re^2 \wedge 0 \le x \le 2 \wedge 2x \le y \le 4\}$

$$V = \int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{xy^2} dz.dy.dx = \int_0^2 \int_{2x}^4 z\Big]_0^{xy^2}.dy.dx = \int_0^2 \int_{2x}^4 xy^2.dy.dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{xy^3}{3}\Bigg]_{2x}^4 .dx = \int_0^2 \left(\frac{64x}{3} - \frac{8x^4}{3}\right).dx = \frac{32x^2}{3} - \frac{8x^5}{15}\Bigg]_0^2 = 25{,}6$$



Veamos ahora la resolución en coordenadas cilíndricas.

Vemos que mientras α varía entre $\alpha_1 = arc\ tg\ 2$ y $\alpha_2 = \pi/2$, los límites de variación de *r no* son siempre los mismos, *r* ahora varía entre 0 y la recta $y = 4$, que debemos expresar en coordenadas polares.

$r = \dfrac{4}{sen\,\alpha}$. $z = xy^2 = r\cos\alpha.r^2 sen^2\alpha = r^3.\cos\alpha.sen^2\alpha$. Por lo tanto:

$$V = \int_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} \int_0^{4/sen\,\alpha} \int_0^{r^3.\cos\alpha.sen^2\alpha} r.dz.dr.d\alpha = \int_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} \int_0^{4/sen\,\alpha} \left[\int_0^{r^3.\cos\alpha.sen^2\alpha} r.dz\right].dr.d\alpha =$$

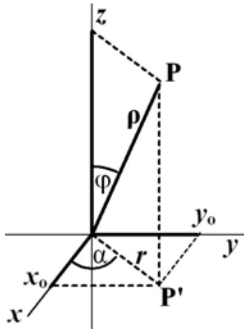
$$= \int_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} \int_0^{4/sen\,\alpha} r.z\Big]_0^{r^3.\cos\alpha.sen^2\alpha} dr.d\alpha = \int_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} \left[\int_0^{4/sen\,\alpha} r^4.\cos\alpha.sen^2\alpha.dr\right].d\alpha =$$

$$= \int_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} \cos\alpha.sen^2\alpha.\frac{r^5}{5}\Bigg]_0^{4/sen\,\alpha} .d\alpha = \frac{1.024}{5}.\int_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} \frac{\cos\alpha.sen^2\alpha}{sen^5\alpha}.d\alpha =$$

$$= \frac{1.024}{5}.\int_0^{\pi/2} \cos\alpha.sen^{-3}\alpha.d\alpha = \frac{512}{5.sen^2\alpha}\Bigg]_{arc\,tg\,2}^{\pi/2} = \frac{512}{5}\left(1 - \frac{1}{sen^2 arc\,tg\,2}\right) =$$

$$= \frac{512}{5}.0{,}25 = 25{,}6$$

Integrales en coordenadas esféricas



Además de las coordenadas cilíndricas, a veces conviene utilizar las coordenadas esféricas. Es otro caso particular de cambio de variables donde las coordenadas de un punto P = (*x*;*y*;*z*) son $\begin{cases} x = \rho.sen\varphi.cos\,\alpha \\ y = \rho.sen\varphi.sen\alpha \\ z = \rho.cos\,\varphi \end{cases}$

ρ es la longitud del segmento OP, α es la ángulo polar de la proyección del punto P sobre el plano (*xy*) y φ es el ángulo que forma el semieje positivo *z* con OP. $\rho > 0$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

El jacobiano en este caso se calcula de la siguiente manera:

$$J\left(\frac{x;y;z}{\rho;\alpha;\varphi}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\varphi.cos\,\alpha & -\rho.sen\varphi.sen\,\alpha & \rho.cos\,\varphi.cos\,\alpha \\ sen\varphi.sen\,\alpha & \rho.sen\varphi.cos\,\alpha & \rho.cos\,\varphi.sen\,\alpha \\ cos\,\varphi & 0 & -\rho.sen\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2.sen\,\varphi$$

Por lo tanto

$$\iiint_D f(x;y;z).dz.dy.dx = \iiint_R f(\rho;\alpha;\varphi)\rho^2 sen\,\varphi.d\varphi.d\alpha.d\rho$$

$$= \int_a^b \int_{\alpha_1(\rho)}^{\alpha_2(\rho)} \int_{\varphi_1(\rho;\alpha)}^{\varphi_2(\rho;\alpha)} f(\rho;\alpha;\varphi)\rho^2 sen\,\varphi.d\varphi.d\alpha.d\rho =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1(\alpha)}^{\rho_1(\alpha)} \int_{\varphi_1(\rho;\alpha)}^{\varphi_2(\rho;\alpha)} f(\rho;\alpha;\varphi)\rho^2 sen\,\varphi.d\varphi.d\rho.d\alpha$$

$a \le \rho \le b$, $\alpha_1(\rho) \le \alpha \le \alpha_2(\rho)$, $\varphi_1(\rho;\alpha) \le \varphi \le \varphi_2(\rho;\alpha)$ ó
$\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, $\rho_1(\alpha) \le \rho \le \rho_2(\alpha)$, $\varphi_1(\rho;\alpha) \le \varphi \le \varphi_2(\rho;\alpha)$

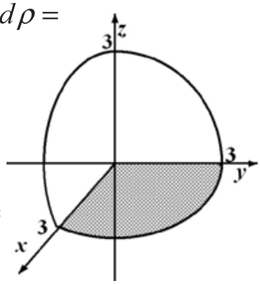
Nota: si $f(x;y;z) = 1$, la integral triple mide un volumen.

Ejemplos

a) Calcular mediante una integral triple, utilizando coordenadas esféricas, el volumen de: a) la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

Calculamos la octava parte del volumen correspondiente al primer octante. Mientras ρ varía entre 0 y 3, los límites de variación de α y de φ son siempre los mismos, entre 0 y $\pi/2$. Por lo tanto:

$$V=8.\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz.dy.dx=8.\int_0^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho^2 sen\phi.d\phi.d\alpha.d\rho=$$



$$=8.\int_0^3\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2}\rho^2 sen\phi\right].d\phi.d\alpha.d\rho=$$

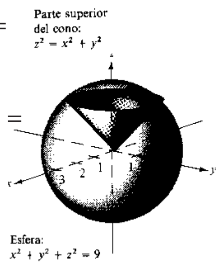
$$=8.\int_0^3\int_0^{\pi/2}\left(-\rho^2.cos\phi\right)\Big]_0^{\pi/2} d\alpha.d\rho=8.\int_0^3\left[\int_0^{\pi/2}\rho^2\right].d\alpha.d\rho=$$

$$=8.\int_0^3\rho^2.\alpha\Big]_0^{\pi/2}.d\rho=8.\int_0^3\rho^2.\frac{\pi}{2}.d\rho=4\pi.\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg]_0^3=36\pi$$

b) la región limitado por el interior de la hoja superior del cono $z=x^2+y^2$ y superiormente por la esfera de radio 3 $\left(x^2+y^2+z^2=9\right)$.

Ambas se cortan en $z=3/\sqrt{2}$, $\rho.cos\varphi=3/\sqrt{2}\Rightarrow cos\varphi=\sqrt{2}/2\therefore\varphi=\pi/4$
Calculamos la cuarta parte del volumen correspondiente al primer octante. Mientras ρ varía entre 0 y 3, α varía entre 0 y $\pi/2$ y φ varía entre 0 y $\pi/4$.

$$V=4.\int_0^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\rho^2 sen\,\varphi.d\varphi.d\alpha.d\rho=4.\int_0^3\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/4}\rho^2 sen\,\varphi\right].d\varphi.d\alpha.d\rho=$$



$$=4.\int_0^3\int_0^{\pi/2}\left(-\rho^2.cos\,\varphi\right)\Big]_0^{\pi/4} d\alpha.d\rho=-4.\int_0^3\left[\int_0^{\pi/2}\rho^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right].d\alpha.d\rho=$$

$$=\left(-2\sqrt{2}+4\right)\int_0^3\rho^2.\alpha\Big]_0^{\pi/2}.d\rho=\left(-\sqrt{2}+2\right)\pi.\int_0^3\rho^2.d\rho=$$

$$=\left(2-\sqrt{2}\right)\pi.\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg]_0^3=9\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

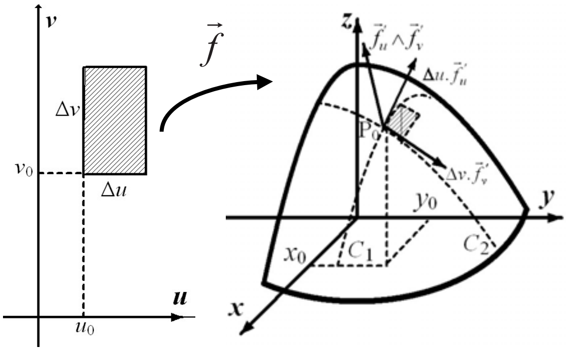
ÁREA DE UNA SUPERFICIE CURVA EN $\mathbb{R}^3$

a) La superficie está expresada en forma paramétrica

Partimos del planteo formulado en la página 196, donde tenemos una superficie definida como imagen de un campo vectorial el tipo:

$$\vec{f} : D \subseteq \Re^2 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(u;v) = [x(u;v); y(u;v); z(u;v)]$$

Vimos que a una subdivisión de la malla rectangular le corresponde una subdivisión curvilínea de la superficie *S*. Si consideramos en el conjunto *D* (conjunto en el que está definido el campo vectorial $\vec{f}$) un punto $(u_0;v_0)$ y un rectángulo de lados Δu y Δv y por lo tanto de área $\Delta u.\Delta v$, a dicho rectángulo le corresponde, a través de $\vec{f}$, una porción de la superficie *S*. El área de dicha porción de superficie puede aproximarse mediante el área de un paralelogramo ubicado en el plano tangente a la superficie en $(x_0;y_0;z_0) = \vec{f}(u_0;v_0)$ generado por los vectores $\Delta u.\vec{f}'_u$ y $\Delta v.\vec{f}'_v$.



Esto se debe que el segmento de longitud Δu se transforma, a través de $\vec{f}$, es una curva (C_2) situada sobre la superficie. El vector $\vec{f}'_u$ es el vector velocidad de esta curva, por lo tanto cuando *u* se incrementa en Δu, el punto correspondiente a $(u_0;v_0)$ sobre la superficie se desplaza a lo largo de dicha curva una distancia aproximadamente igual a $\Delta u.\vec{f}'_u$. Lo mismo sucede con $\Delta v.\vec{f}'_v$.

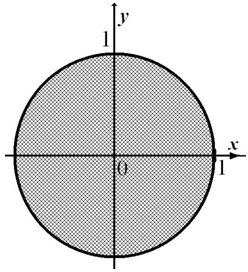
El área del paralelogramo (una porción de la superficie *S*) que generan los vectores $\Delta u.\vec{f}'_u$ y $\Delta v.\vec{f}'_v$ (*dS*) está dado el módulo de su producto vectorial.

$$dS = \left|\Delta u.\vec{f}'_u \wedge \Delta v.\vec{f}'_v\right| = \left|\vec{f}'_u \wedge \vec{f}'_v\right|.\Delta u.\Delta v\,.$$

Por lo tanto el área de la superficie es: $S=\iint_D \left|\vec{f}'_u \wedge \vec{f}'_v\right|.du.dv$

De esta forma el área de una superficie queda expresada por una integral doble.

Ejemplo



Si D es la región limitada por $0\le u\le 1$ y $0\le v\le 2\pi$, y $\vec{f}(u;v)=(u\cos v;u\,sen\,v;u)$

Calculamos los vectores $\vec{f}'_u$ y $\vec{f}'_v$

$\vec{f}'_u=(\cos v;sen\,v;1)$ $\quad\quad$ $\vec{f}'_v=(-u.sen\,v;u.\cos v;0)$

$$\vec{f}'_u\wedge\vec{f}'_v=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ \cos v & sen\,v & 1\\ -u.sen\,v & u.\cos v & 0\end{vmatrix}=\left(-u.\cos v;-usen\,v;u.\cos^2 v+u.sen^2 v\right)=$$
$$=(-u.\cos v;-u.sen\,v;u)$$

El área es $S=\iint_D\sqrt{u^2.\cos^2 v+u^2.sen^2 v+u^2}.du.dv=\iint_D\sqrt{2u^2}.du.dv=$

$$=\iint_D\sqrt{2}u.du.dv$$

Llegamos así a la expresión de la integral doble que nos permite calcular el área. Resolvemos la integral utilizando coordenadas polares.

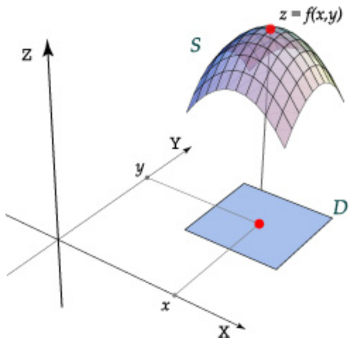
$$S=\iint_D\sqrt{2}u.du.dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}u.du.dv=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left.\frac{u^2}{2}\right]_0^1 dv=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}dv=\left.\frac{\sqrt{2}}{2}.v\right]_0^{2\pi}=\sqrt{2}\pi$$

b) La superficie está expresada en forma explícita

Si la superficie está expresada como $z=f(x;y)$, podemos adoptar la siguiente forma paramétrica: $x=x;\ y=y,\ z=f(x;y)$.

$\vec{f}(x;y)=[x;y;f(x;y)]$

$\vec{f}'_x=(1;0;z'_x)$ y $\vec{f}'_y=(0;1;z'_y)$



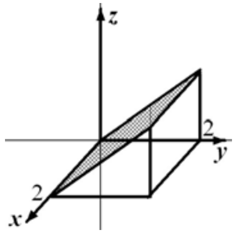
$$\vec{f}'_x \wedge \vec{f}'_y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = (-z'_x;-z'_y;1)$$

$$dS=\left|\vec{f}'_x \wedge \vec{f}'_y\right|.dx.dy=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,.dx.dy \quad ❶$$

Por lo tanto $S=\iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,.dx.dy$, donde D es la proyección de la superficie sobre el plano (xy).

Ejemplo

Calcular utilizando una integral doble el área del paralelogramo intersección del prisma: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, y el plano $z = 3y$.



$$S=\iint_D \sqrt{1+3^2+0}\,.dx.dy=\int_0^2\int_0^2 \sqrt{10}\,.dx.dy=\sqrt{10}\,x\Big]_0^2 .dy$$

$$=2\sqrt{10}\int_0^2 dy=2\sqrt{10}\,y\Big]_0^2=4\sqrt{10}$$

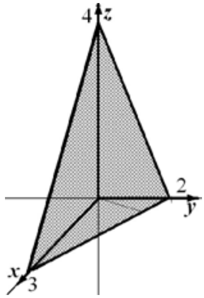
c) La superficie está expresada en forma implícita

Si la superficie está expresada como $F(x;y;z)=0$, el dS se obtiene reemplazando en ❶ las derivadas parciales: $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{F'_x}{F'_z}\right)^2+\left(\dfrac{F'_y}{F'_z}\right)^2}\,.dx.dy$

Por lo tanto $S=\iint_D \dfrac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{\left|F'_z\right|}.dx.dy$

Ejemplos

a) Calcular utilizando una integral doble el área del triángulo de vértices A = (3;0;0), B = (0;2;0) y C = (0;0;4).



La ecuación del plano es $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1 \Rightarrow$

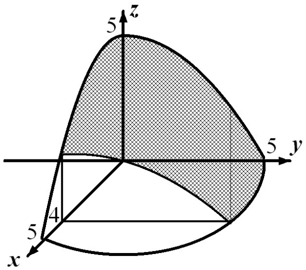
$4x+6y+3z-12=0$

$$S=\iint_D \frac{\sqrt{16+36+9}}{9}.dx.dy=\int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2}\frac{\sqrt{61}}{9}.dy.dx=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{9}\int_0^3 y\Big]_0^{-2/3x+2}.dx=\frac{\sqrt{61}}{9}\int_0^3\left(-\frac{2}{3}x+2\right).dx=\frac{\sqrt{61}}{9}.\left(-\frac{x^2}{3}+2x\right)\Bigg]_0^3=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{9}.(-3+6)=\frac{\sqrt{61}}{3}$$

b) Calcular utilizando una integral doble el área lateral de la zona esférica $x^2+y^2+z^2=25$, para $0\le x\le 4$.



$$S=4.\iint_D \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}.dx.dy=$$

$$=4.\int_0^4\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\frac{\sqrt{100}}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}.dy.dx=$$

$$=20.\int_0^4\left[\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{25-x^2}.\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{\sqrt{25-x^2}}\right)^2}}\right].dx=20\int_0^4 arc\,sen\frac{y}{\sqrt{25-x^2}}\Bigg]_0^{\sqrt{25-x^2}}.dx$$

$$=20\int_0^4\frac{\pi}{2}.dx=10\pi.x\Big]_0^4=40\pi$$

Otros casos

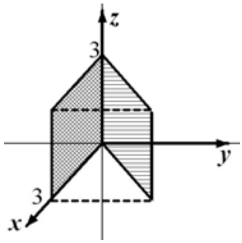
Si en lugar de proyectar sobre el plano ($x;y$), proyectamos sobre los otros planos coordenados, tenemos:

a) $y = f(x;z)$, proyectamos sobre el plano $(x;z)$

$$S = \iint_D \sqrt{1+\left(y_x'\right)^2+\left(y_z'\right)^2}\,.dx.dz \text{ o } S = \iint_D \frac{\sqrt{\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2+\left(F_z'\right)^2}}{\left|F_y'\right|}dx.dz$$

Ejemplo

i) Calcular utilizando una integral doble el área del paralelogramo intersección del prisma: $0 \le x \le 3$, $0 \le z \le 3$, y el plano $y = 3x$.

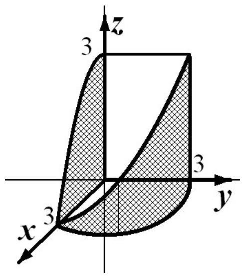


Pensamos a $y = f(x;z)$.

$$S = \iint_D \sqrt{1+3^2+0}\,.dx.dz = \int_0^3\int_0^3 \sqrt{10}\,.dx.dz = \int_0^3 \sqrt{10}\,x\Big]_0^3 .dz$$

$$= 3\sqrt{10}\int_0^3 dz = 3\sqrt{10}\,z\Big]_0^3 = 9\sqrt{10}$$

ii) Calcular el área de la parte de superficie del cilindro $x^2+y^2=9$, recortada por el cilindro $x^2+z^2=9$, en el primer octante.



Pensamos a $x^2+y^2=9$, como una función implícita que define a $y = f(x;z)$.

$$S = \iint_D \frac{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}{2y}.dx.dz = \int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}.dz.dx =$$

$$= \int_0^3\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}.dz\right).dx = 3\int_0^3 \frac{z}{\sqrt{9-x^2}}\Bigg]_0^{\sqrt{9-x^2}} .dx = 3\int_0^3 dx = 3\,x\Big]_0^3 = 9$$

b) $x = f(y;z)$, proyectamos sobre el plano $(y;z)$

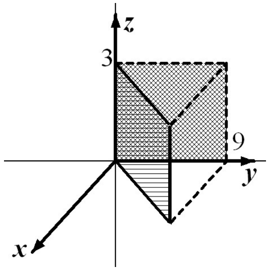
$$S = \iint_D \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}.dy.dz \text{ o } S = \iint_D \frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_x\right|}.dy.dz$$

Ejemplos

Resolvemos el caso anterior i), considerando a $x = f(y;z)$, $\quad x = \dfrac{y}{3}$

$$S = \iint_D \sqrt{1+\frac{1}{9}+0}.dy.dz = \int_0^3\int_0^9 \sqrt{\frac{10}{9}}.dy.dz = \int_0^3 \frac{\sqrt{10}}{3}\, y\Big]_0^9 .dz$$

$$= 3\sqrt{10}\int_0^3 dz = 3\sqrt{10}\, z\Big]_0^3 = 9\sqrt{10}$$



Vemos que por otro camino llegamos a lo mismo.

APLICACIONES FÍSICAS

De las integrales dobles

Cálculo de la masa

Consideremos una lámina delgada que tiene la forma de un recinto D. Suponemos que la materia está distribuida en la lámina y que $\rho(x;y)$ representa la densidad superficial[1] en un punto $(x;y)$. En este caso la integral doble representa la masa de la lámina.

$$M = \iint_D \rho(x;y).dx.dy$$

Cálculo de los momentos estáticos

En este caso los momentos estáticos o primeros se definen de la siguiente manera:

Respecto del eje x: $$M_x = \iint_D \rho(x;y).y.dx.dy$$

Respecto del eje y: $$M_y = \iint_D \rho(x;y).x.dx.dy$$

Cálculo del centro de masa

Las coordenadas del centro de masa son:

$$x_g = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D \rho(x;y).x.dx.dy}{\iint_D \rho(x;y).dx.dy} \qquad y_g = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D \rho(x;y).y.dx.dy}{\iint_D \rho(x;y).dx.dy}$$

---

[1] Cantidad de masa por unidad de superficie. Si la lámina es homogénea, la densidad ρ es constante.

Cálculo de los momentos de inercia

Los momentos segundos o de inercia se calculan de la siguiente manera:

Respecto del eje x: $I_x = \iint\limits_D \rho(x;y).y^2.dx.dy$

Respecto del eje y: $I_y = \iint\limits_D \rho(x;y).x^2.dx.dy$

Ejemplo

Hallar el centro de masa de la lámina correspondiente a la región parabólica $D = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 0 \le y \le 4 - x^2 \wedge x \ge 0\}$ si la densidad superficial ρ(*x*;*y*) es proporcional a la distancia entre (*x*;*y*) y el eje *x*.

$$M = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} ky.dy.dx = k.\int_0^2 \left.\frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{2}k\int_0^2 \left(4-x^2\right)^2.dx = \frac{1}{2}k\int_0^2 \left(16-8x^2+x^4\right).dx =$$

$$= k.\left(8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg]_0^2 = k.\left(16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{5}\right) = \frac{128}{15}k$$

$$M_x = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} k.y^2.dy.dx = k.\int_0^2 \left.\frac{y^3}{3}\right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{3}k\int_0^2 \left(4-x^2\right)^3.dx =$$

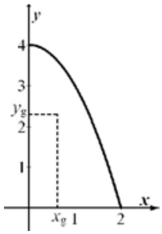
$$= \frac{1}{3}k\int_0^2 \left(64-48x^2+12x^4-x^6\right).dx = \frac{1}{3}k\left(64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\Bigg]_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}k\left(128 - 128 + \frac{387}{5} - \frac{128}{7}\right) = \frac{2048k}{15}$$

$$M_y = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} k.xy.dy.dx = \int_0^2 \left.\frac{xy^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{2}k\int_0^2 x.\left(4-x^2\right)^2.dx =$$

$$= \frac{1}{2}k\int_0^2 \left(16x - 8x^3 + x^5\right).dx = k.\left(4x^2 - x^4 + \frac{x^6}{12}\Bigg]_0^2\right) = k\left(16 - 16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}k$$

$$x_g = \frac{16k/3}{128k/15} = \frac{5}{8} \qquad y_g = \frac{2048k/105}{128k/15} = \frac{16}{7}$$



$$I_x = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} k.y^2.y.dy.dx = \int_0^2 \left.\frac{y^4}{4}\right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{4}k.\int_0^2 \left(4-x^2\right)^4.dx =$$

$$= \frac{1}{4}k.\int_0^2 \left(256-256x^2+96x^4-16x^6+x^8\right).dx = k.\left(64x-\frac{64x^3}{3}+\frac{24x^5}{5}-\frac{4x^7}{7}+\left.\frac{x^9}{36}\right]_0^2\right)$$

$$= k.\left(64x-\frac{64}{3}x^3+\frac{24x^5}{5}-\frac{4x^7}{7}+\left.\frac{x^9}{36}\right]_0^2\right) = k.\left(128-\frac{512}{3}+\frac{768}{5}-\frac{512}{7}+\frac{512}{36}\right) = \frac{16387k}{315}$$

$$I_y = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} k.x^2 y.dy.dx = \int_0^2 \left.\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{2}k\int_0^2 x^2.\left(4-x^2\right)^2.dx = \frac{1}{2}k\int_0^2 \left(16x^2-8x^4+x^6\right).dx =$$

$$= k.\left(\frac{8x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}+\left.\frac{x^7}{14}\right]_0^2\right) = k.\left(\frac{64}{3}-\frac{128}{5}+\frac{64}{7}\right) = \frac{512k}{105}$$

De las integrales triples

Si ahora consideremos una región sólida S en la cual la materia está distribuida y que $\rho(x;y;z)$ representa la densidad volumétrica[2] en un punto $(x;y;z)$, las fórmulas correspondientes a la masa y a los momentos son los siguientes.

$$M = \iiint_S \rho(x;y;z).dx.dy.dz$$

Respecto del plano xy: $\quad M_{xy} = \iiint_S z.\rho(x;y;z).dx.dy.dz$

Respecto del plano yz: $\quad M_{xz} = \iiint_S x.\rho(x;y;z).dx.dy.dz$

Respecto del plano xz: $\quad M_{xz} = \iiint_S y.\rho(x;y;z).dx.dy.dz$

[2] Cantidad de masa por unidad de volumen.

$$x_g = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_S x.\rho(x;y;z).dx.dy.dz}{\iiint\limits_S \rho(x;y;z).dx.dy.dz} \qquad y_g = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_S y.\rho(x;y;z).dx.dy.dz}{\iiint\limits_S \rho(x;y;z).dx.dy.dz}$$

$$z_g = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_S z.\rho(x;y;z).dx.dy.dz}{\iiint\limits_S \rho(x;y;z).dx.dy.dz}$$

Respecto del eje x: $$I_x = \iiint\limits_S \left(y^2+z^2\right).\rho(x;y;z).dx.dy.dz$$

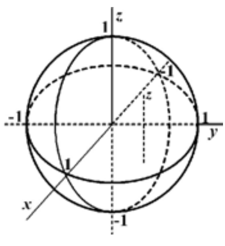
Respecto del eje y: $$I_y = \iiint\limits_S \left(x^2+z^2\right).\rho(x;y;z).dx.dy.dz$$

Respecto del eje z: $$I_z = \iiint\limits_S \left(x^2+y^2\right).\rho(x;y;z).dx.dy.dz$$

Ejemplo

Calcular la masa de una esfera de radio 1 si la densidad volumétrica en cada punto es proporcional a la distancia al plano $(x;y)$.

$\rho(x;y;z) = k.z$, lo resolvemos en coordenadas cilíndricas.



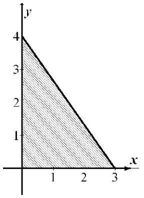
$$M = \iiint\limits_S k.z.dx.dy.dz = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} k.z.r.dz.dr.d\alpha =$$

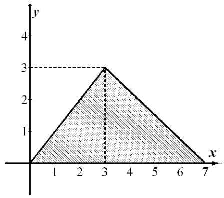
$$= 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^1 z^2\Big]_0^{\sqrt{1-r^2}} r.dr.d\alpha = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r.\left(1-r^2\right).dr.d\alpha =$$

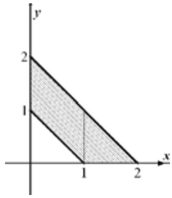
$$= 4k\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big]_0^1 d\alpha = = k\int_0^{\pi/2} d\alpha = k\alpha\Big]_0^{\pi/2} = \frac{k\pi}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular el área de los siguientes recintos aplicando integrales dobles.

1


2


3


4) $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 2 \\ eje\ x \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ x = y \end{cases}$ 1º cuadrante 7) $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y \\ y = -x \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = 2x \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \\ x = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 1 \le y \le e^x \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \sqrt{y} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

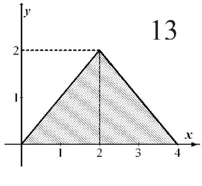
Calcular los volúmenes de los siguientes sólidos aplicando integrales dobles.

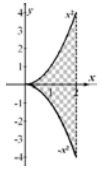
13) $\iint_D \left(2x + y^2 x\right).dx.dy$

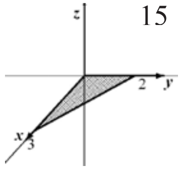
14) $\iint_D \left(x^2 + yx + 1\right).dx.dy$

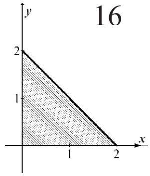
15) $\iint_D (2xy + 1).dx.dy$

16) $\iint_D \left(2xy + x^2\right).dx.dy$

13


14


15


16


17) Calcular el volumen de los cuerpos situados en el primer octante, limitados por los planos coordenados y las superficies que se indican. Graficar.

a) el plano $x + y + z = 2$.

b) los planos $z = 4$ e $y = -x + 2$.

c) el plano $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 1$.

d) los planos $z + 3x = 6$ e $y = 4$.

e) el plano $2x + 2y - z = 4$.

f) la superficie cilíndrica $y = x^2$ y los planos $y = x$ y $z = 2$ en el primer octante.

18) Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos x} y^2.sen\, x.dy.dx$ b) $\displaystyle\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{2} \frac{x^2}{y^2}.dy.dx$

c) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{2y}.dx.dy$, D es el triángulo de vértices (1;1), (2;1), (2;2).

d) $\displaystyle\iint_D e^{-x}.dx.dy$, $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / e^x \leq y \leq e^{2x} \wedge 0 \leq x \leq ln 2\right\}$

19) Calcular los volúmenes de los siguientes sólidos limitados por

a) la superficie $z = x^2 + 2y^2$ y el recinto $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

b) la superficie $z = x^2 + 5y^2$, si el recinto de integración es el triángulo de vértices (0;0), (2;0), (2;1).

c) la superficie $z = \dfrac{1}{(x+1)^2.(y+1)^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

20) Calcular las áreas de los siguientes recintos utilizando coordenadas polares

a) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq 0\right\}$

b) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 3\right\}$

c) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \leq 0\right\}$

d) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge y \leq x\right\}$

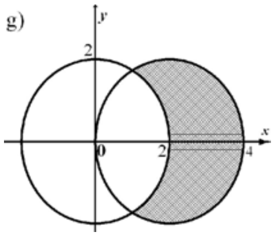
e) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq x\right\}$

f) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 0 \leq x \leq 2 \wedge 2x \leq y \leq 4\right\}$

g) La región sombreada

h) $D = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 1 \leq xy \leq 2 \wedge x \leq y \leq 4x\right\}$

g)



21) Calcular las siguientes integrales dobles utilizando coordenadas polares.

a) $\iint_D x.dx.dy$, $D=\{(x;y)\in\Re^2 / x^2+y^2\le 4\wedge x\le 0\}$

b) $\iint_D x.y^2.dx.dy$, $D=\{(x;y)\in\Re^2 /1\le x^2+y^2\le 4\wedge y\ge 0\}$

c) $\iint_D (x^2+5y^2).dx.dy$, $D=\{(x;y)\in\Re^2 / 4\le x^2+y^2\le 16\wedge y\ge 0\}$

d) $\iint_D y.dx.dy$, $D=\left\{(x;y)\in\Re^2 / 0\le y\le\sqrt{4x-x^2}\right\}$

e) $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}.dx.dy$, $D=\{(x;y)\in\Re^2 /1\le x^2+y^2\le 4\}$

f) $\iint_D (x^2+y^2).dx.dy$, $D=\{(x;y)\in\Re^2 /(x-1)^2+y^2\le 1\}$

g) $\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.dx.dy$ si D el recinto limitado por las rectas $y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$ y las circunferencias $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=9$, en el primer cuadrante.

h) $\iint_D e^{-x^2-y^2}.dx.dy$, $D=\Re^2$

i) $\iint_D \frac{x+4y}{x^2}.dx.dy$, $D=\{(x;y)\in\Re^2 / y\le x\wedge x+4y\le 4\wedge y\ge 0\}$

22) Calcular el área de la región limitada por las curvas de nivel 1 y e del campo escalar $f(x;y)=e^{x^2+y^2-1}$.

23) Calcular el área de la región en cuyos puntos son positivas las componentes del campo vectorial $\vec{f}(x;y)=(4-x^2-y^2;x^2+y^2-2)$.

24) Calcular el área de las regiones en las cuales están definidos los campos vectoriales con imagen en $\Re^3$.

a) $\vec{f}(x;y)=\left(\sqrt{2-x^2-y^2};\sqrt{x+y};\sqrt{y-x^2}\right)$

b) $\vec{f}(x;y)=\left(\sqrt{1-xy};ln(x-y);ln(8y-x^2)\right)$

25) Calcular los volúmenes de los sólidos limitados por las siguientes superficies utilizando integrales triples y coordenadas rectangulares.

a) $y = 4 - x^2 \wedge z = 6$, en el 1º octante

b) $y^2 = 16 - x^2 \wedge z = 4$, en el 1º octante

c) $S = \{(x; y; z) \in \Re^3 \wedge 0 \le y \le 6 \wedge 0 \le z \le 4 - x^2\}$

d) $x^2 + y^2 = 25$, el plano $x + y + z = 8$ y el plano (xy)

e) $z = 1, x + y + z = 2$ en el primer octante.

26) Graficar el sólido cuyo volumen viene dado por la integral triple $\int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \int_0^{3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}y} dz.dy.dx$ y calcularlo.

27) Calcular los volúmenes de los sólidos limitados por las siguientes superficies utilizando coordenadas cilíndricas. De ser posible, verificar utilizando coordenadas rectangulares.

a) Paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano (xy).

b) Superficies cilíndricas $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \le z \le 3$.

c) Cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $1 \le x^2 + y^2 \le 9$.

d) $z = y$, con $0 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le x$.

e) Cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el cilindro $1 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$.

f) Paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

g) Paraboloides $z = 4x^2 + 4y^2$ y $z = 5 - x^2 - y^2$.

h) Paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 0$.

28) Calcular la integral $\iiint_D \frac{dx.dy.dz}{(x + y + z + 1)^3}$, si D está limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

29) Calcular el volumen del sólido limitado por el cono $4z^2 = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ con $z \ge 0$, utilizando coordenadas esféricas.

30) Calcular la integral $\iiint_D xyz.dx.dy.dz$, utilizando coordenadas esféricas si $D=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x^2+y^2+z^2\leq 1 \wedge x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

31) Calcular la integral $\iiint_D (2zx^2+2zy^2).dx.dy.dz$, si D es el sólido limitado por el cono $z^2=x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+y^2=1$, con $z\geq 0$.

32) Calcular la integral $\iiint_D (x^2+y^2).dx.dy.dz$, si D es el sólido limitado por el paraboloide $2z=x^2+y^2$ y el plano $z=2$.

33) Calcular la masa de una placa homogénea con la forma del recinto definido por $D=\{(x;y)\in\Re^2 / y^2\leq x\leq y+2\}$.

34) Calcular el momento de inercia respecto del eje z de una pirámide triangular homogénea $S=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

35) Calcular el área de la porción de superficie cilíndrica $x^2+y^2=4$, situada en el primer octante entre los planos $z = 0$ y $z + y = 3$.

36) Calcular el área de la sección elíptica determinada en la superficie cilíndrica $x^2+y^2\leq 9$, por el plano $z = y$.

37) Calcular el área de la superficie cilíndrica $x^2+z^2=1$, situada en el 1º octante interior al prisma $0\leq y\leq x$, $0\leq x\leq ½$.

38) Calcular el área de la porción de paraboloide circular $z=x^2+y^2$, comprendida entre los planos $z = 2$ y $z = 6$.

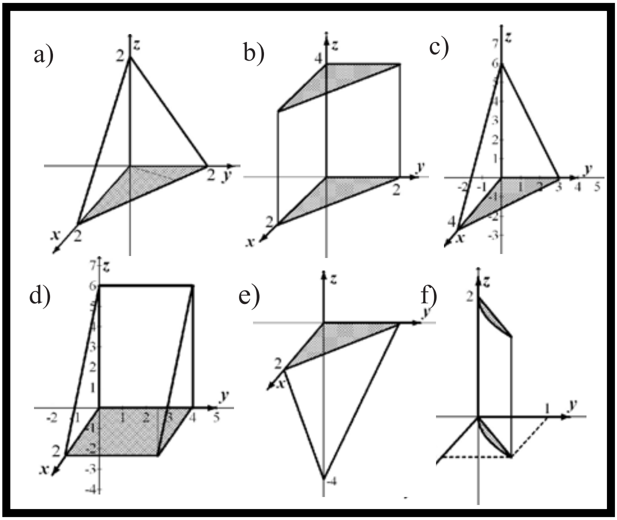
RESPUESTAS

1) $A=6$, 2) $A=10{,}5$ 3) $A=\dfrac{3}{2}$ 4) $A=\dfrac{8}{3}$ 5) $A=\dfrac{9}{2}$ 6) $A=\dfrac{1}{10}$ 7) $A=\dfrac{1}{3}$

8) $A=4$ 9) $A=2.ln\,2$ 10) $A=\dfrac{2}{3}$ 11) $A=e^2-3$ 12) $A=\dfrac{1}{3}$ 13) $V=\dfrac{64}{3}$

14) $V=\dfrac{272}{15}$ 15) $V=6$ 16) $V=\dfrac{8}{3}$

17) a) $V=\dfrac{4}{3}$ b) $V=8$ c) $V=12$ d) $V=24$ e) $V=\dfrac{8}{3}$ f) $V=\dfrac{1}{3}$



18) a) $I=\dfrac{4}{3}$ b) $I=\dfrac{31}{12}$ c) $I=\dfrac{4}{3}ln\,2-\dfrac{7}{18}$ d) $I=1-ln\,2$

19) a) $V=164$ b) $V=\dfrac{17}{6}$ c) $V=1$

20) a) $A=2\pi$ b) $A=3$ c) $A=6\pi$ d) $A=0{,}285$ e) $A=\dfrac{1}{6}$ f) $A=4$

g) $A=\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$ h) $A=ln\,2$

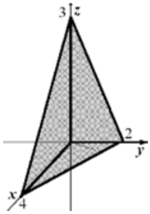
21) a) $I = -\dfrac{16}{3}$ b) $I = 0$ c) $I = 180\pi$ d) $I = \dfrac{16}{3}$ e) $I = 2\pi . ln\, 2$ f) $I = \dfrac{3\pi}{2}$

g) $I = \dfrac{5.\left(\sqrt{3}-2\right)}{8}$ h) $I = \pi$ i) $I = 4$

22) $A = \pi$ 23) $A = 2\pi$ 24) a) $A = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\pi}{2}$ b) $A = ln2 - \dfrac{5}{12}$

25) a) $V = 32$ b) $V = 16\pi$ c) $V = 64$ d) $V = 200\pi$ e) $V = \dfrac{1}{6}$

26) $V = 4$



27) a) $V = 8\pi$ b) $V = 45\pi$ c) $V = \dfrac{52}{3}\pi$ d) $V = \dfrac{32}{3}$ e) $V = \dfrac{2}{3}\pi$ f) $V = \pi$

g) $V = \dfrac{5}{2}\pi$ h) $V = \dfrac{\pi}{2}$

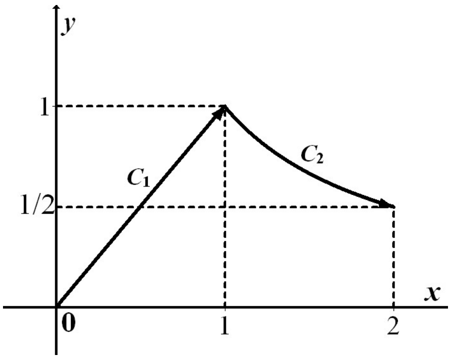
28) $I = -\dfrac{5}{16} + \dfrac{ln2}{2}$ 29) $V = \dfrac{10}{3}\pi.\left(\sqrt{5}-1\right)$ 30) $I = \dfrac{1}{48}$ 31) $I = \dfrac{16\pi}{3}$

32) $I = \dfrac{\pi}{3}$ 33) $M = \dfrac{9}{2}\rho$ 34) $I_z = \dfrac{\rho}{30}$ 35) $S = 3\pi - 4$

36) $S = 9\sqrt{2}\pi$ 37) $S = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 38) $S = \dfrac{49}{3}\pi$

Capítulo 11

Integrales curvilíneas



Integrales curvilíneas de un campo escalar.

Integrales curvilíneas de un campo vectorial.

Teorema de Gauss-Green.

Integrales curvilíneas de campos conservativos.

Teorema fundamental.

El trabajo de una fuerza.

INTEGRALES CURVILÍNEAS

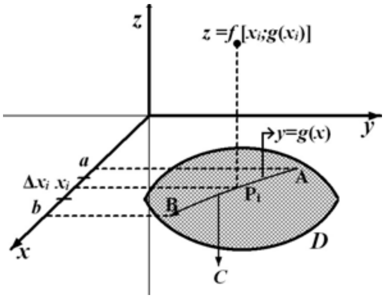
A) Integral curvilínea sobre una curva plana

La idea de integral simple se extendió de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ y a $\mathbb{R}^3$ a través de las integrales dobles y triples. Pero también se puede generalizar si se reemplaza el intervalo de integración incluido en la recta real por una curva plana o alabeada.

De un campo escalar

Según x

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, z = f(x;y)$, un campo escalar continuo en un cierto recinto D y sea $g : A \to \Re \,/\, y = g(x)$, $A \subseteq \Re$ otra función continua definida en un intervalo $[a;b]$ cuyo gráfico es la curva $C \subseteq D$ que cumple la condición que una paralela al eje de las y la corta a lo sumo en un punto.



Dividimos el intervalo $[a;b]$ en n subintervalos, cada uno de amplitud Δx_i y consideramos de cada subintervalo un punto interior x_i al cual le corresponde un valor de la función $g\,(x_i)$. Queda así definido para cada subintervalo un punto $\mathrm{P_i} = (x_i ; g(x_i))$.

A cada $\mathrm{P_i}$ le corresponde una imagen $z = f(\mathrm{P_i}) = f[x_i ; g(x_i)]$. Efectuamos la suma de los productos $f(\mathrm{P_i}).\Delta x_i$, $\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{P_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f[x_i ; g(x_i)].\Delta x_i$.

Calculamos el $\lim\limits_{máx\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left[x_i ; g(x_i)\right].\Delta x_i = \int_{C=\overset{\frown}{AB}} f(x;y).dx$

Obtenemos así la integral curvilínea de la función $z = f\,(x;y)$ a lo largo de la curva orientada C (de A a B), *según x*.

Según y

Si consideramos a la curva C como función de y, $x = g(y)$, con $c \leq y \leq d$, tenemos $\lim\limits_{máx\,\Delta y_j \to 0} \sum\limits_{j=1}^{n} f\left[g\left(y_j\right); y_j\right].\Delta y_j = \int\limits_{C=\widehat{AB}} f\left(x; y\right).dy$

Propiedades

1) $\int_C k.f(x;y).dx = k.\int_C f(x;y).dx$

2) $\int_C [f(x;y) \pm g(x;y)].dx = \int_C f(x;y).dx \pm \int_C g(x;y).dx$

3) $\int_{C^+} f(x;y).dx = -\int_{C^-} f(x;y).dx$ Inversión en la orientación

4) Si $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$, entonces

$$\int_C f(x;y).dx = \int_{C_1} f(x;y).dx + \int_{C_2} f(x;y).dx + ... + \int_{C_n} f(x;y).dx$$

Circulación: a la integral curvilínea de f a lo largo de una curva C se la denomina *circulación* de f a lo largo de C.

Cálculo de la integral curvilínea

$$\int\limits_{C=\widehat{AB}} f\left(x; y\right).dx = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left[x_i; g\left(x_i\right)\right].\Delta x_i = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F\left(x_i\right).\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b F\left(x\right).dx = \int_a^b f\left[x; g\left(x\right)\right].dx$$

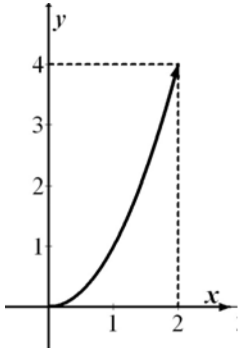
Es decir que la integral curvilínea de $z = f(x;y)$ a lo largo de la curva C, *según x* resulta ser igual a la integral definida entre los límites de variación de la x de la función que se obtiene al reemplazar la y de la curva por $y = g(x)$.

Por lo tanto queda una integral de una sola variable.
Análogamente la integral curvilínea de $z = f(x;y)$ a lo largo de la curva C, *según y* resulta ser igual a la integral definida entre los límites de variación

de la variable y de la función que se obtiene al reemplazar la x de la curva por $x = g(y)$.

$\int_C f(x;y)dy = \int_c^d f[g(y);y].dy$, donde c y d son los valores de y entre lo que varía la función $x = g(y)$.

Ejemplos



1) $\int_C (x+2y).dx$, $\int_C (x+2y).dy$ $\quad C = \begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

de (0;0) $\to$ (2;4)

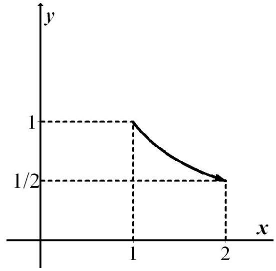
$$\int_C (x+2y).dx = \int_0^2 \left(x+2x^2\right).dx = \left.\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= 2 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\int_C (x+2y).dy = \int_0^4 \left(\sqrt{y}+2y\right).dy = \left.\frac{2y^{3/2}}{3} + y^2\right]_0^4 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}$$

2) $\int_C \left(x^2+y^2\right).dx$, $\int_C \left(x^2+y^2\right).dy$ $\quad C = \begin{cases} y = 1/x \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$

de (1;1) $\to$ (2;1/2)



$$\int_C \left(x^2+y^2\right).dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 =$$

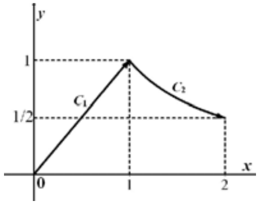
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{17}{6}$$

$$\int_C \left(x^2+y^2\right).dy = \int_1^{1/2} \left(\frac{1}{y^2} + y^2\right).dy = -\frac{1}{y} + \left.\frac{y^3}{3}\right]_1^{1/2} = -2 + \frac{1}{24} + 1 - \frac{1}{3} = -\frac{31}{24}$$

3) $\int_C (x^2+y).dx$, si $C = C_1 \cup C_2$. $\quad C_1 = \begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} xy = 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$

de $(0;0) \to (1;1) \to (2;1/2)$

Calculamos primero la $\int_{C_1}$ y luego la $\int_{C_2}$



$$\int_{C_1} (x^2+y).dx = \int_0^1 (x^2+x).dx = \left.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{C_2} (x^2+y).dx = \int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x}\right).dx = \left.\frac{x^3}{3}+ln\,x\right]_1^2 = \frac{8}{3}+ln\,2-\frac{1}{3}+ln\,1 = \frac{7}{3}+ln\,2$$

$$\int_C (x^2+y).dx = \frac{5}{6}+\frac{7}{3}+ln\,2 = \frac{19}{6}+ln\,2$$

Integral curvilínea de un campo vectorial[1]

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P\,(x;y);\,Q\,(x;y)]$ es un campo vectorial continuo entonces:

$$\int_C \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x}) = \int_C [P(x;y);Q(x;y)].(dx;dy) = \int_C [P(x;y).dx + Q(x;y).dy]$$

a) *La curva viene dada por una función explícita del tipo:* $y = f(x)$.

Para calcularla se desdobla en una integral de un campo escalar *según x* y otra integral de un campo escalar *según y*.

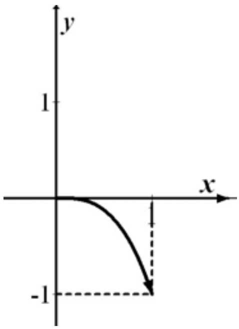
$$\int_C [P(x;y).dx + Q(x;y).dy] = \int_C P(x;y).dx + \int_C Q(x;y).dy$$

[1] La circulación es un escalar, y su significado depende de lo que represente el vector $\vec{f}$. Veremos luego algunas interpretaciones.

Ejemplos

1) $\int_C \left[yx^2.dx+(x+y).dy\right] \qquad C=\begin{cases} y=-x^3 \\ 0\le x\le 1\end{cases}$

de $(0;0)\to(1;-1)$

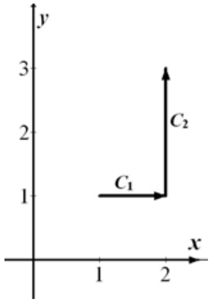


$$\int_C yx^2.dx+\int_C (x+y).dy=\int_0^1 -x^5.dx+\int_0^{-1}\left(-\sqrt[3]{y}+y\right).dy=$$

$$=-\left.\frac{x^6}{6}\right]_0^1-\left.\frac{3y^{4/3}}{4}+\frac{y^2}{2}\right]_0^{-1}=-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{12}$$

2) $\int_C \left[(x+1).dx+(y+1).dy\right] \qquad C=C_1\cup C_2$

de $(1;1)\to(1;2)\to(2;3)$



$$C_1=\begin{cases} y=1 \\ 1\le x\le 2\end{cases} \text{ y } C_2=\begin{cases} x=2 \\ 1\le y\le 3\end{cases}$$

Calculamos primero la $\int_{C_1}$ y luego la $\int_{C_2}$

$$\int_C=\int_{C_1}\left[(x+1).dx+(y+1).dy\right]+\int_{C_2}\left[(x+1).dx+(y+1).dy\right]$$

$$\int_{C_1}=\int_{C_1}(x+1).dx+\int_{C_1}(y+1).dy=\int_1^2(x+1).dx+\int_1^1(y+1).dy=\left.\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2+0=$$

$$=4-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}$$

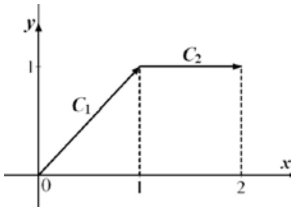
$$\int_{C_2}=\int_{C_2}(x+1).dx+\int_{C_2}(y+1).dy=\int_2^2(x+1).dx+\int_1^3(y+1).dy=0+\left.\frac{y^2}{2}+y\right]_1^3=$$

$$=\frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}-1=6\Rightarrow\int_C\left[(x+1).dx+(y+1).dy\right]=\frac{5}{2}+6=\frac{17}{2}$$

3) $\int_C [(x+y).dx + xy.dy] \quad C = C_1 \cup C_2$

$C_1 = \begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} y = 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$

de (0;0) $\rightarrow$ (1;1) $\rightarrow$ (2;1)



$$\int_C [(x+y).dx + xy.dy] = \int_{C_1} [(x+y).dx + xy.dy] + \int_{C_2} [(x+y).dx + xy.dy]$$

Calculamos primero la $\int_{C_1}$ y luego la $\int_{C_2}$

$$\int_{C_1} = \int_{C_1} (x+y).dx + \int_{C_1} xy.dy = \int_0^1 2x.dx + \int_0^1 y^2.dy = x^2\Big]_0^1 + \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

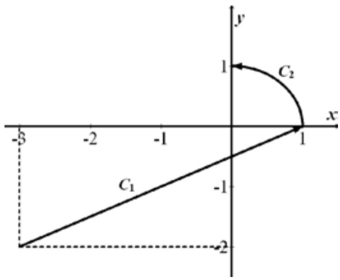
$$\int_{C_2} = \int_{C_2} (x+y).dx + \int_{C_2} xy.dy = \int_1^2 (x+1).dx + \int_1^1 xy.dy = \frac{x^2}{2} + x\Big]_1^2 + 0 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\int_C [(x+y).dx + xy.dy] = \frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{23}{6}$$

4) $\int_C \left[4xy.dx + \left(2x^2 - 3xy\right)dy\right] \quad C = C_1 \cup C_2$,

$C_1 = \begin{cases} \text{recta que une} \\ \text{P}_0 = (-3;-2) \\ \text{con P}_1 = (1;0) \\ -3 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \ge 0 \wedge y \ge 0 \end{cases}$

de (-3; -2) $\rightarrow$ (1;0) $\rightarrow$ (0;1)



$$\int_C \left[4xy.dx + \left(2x^2 - 3xy\right)dy\right] = \int_{C_1} \left[4xy.dx + \left(2x^2 - 3xy\right)dy\right]$$
$$+ \int_{C_2} \left[4xy.dx + \left(2x^2 - 3xy\right)dy\right]$$

Calculamos primero la $\int_{C_1}$ y luego la $\int_{C_2}$

$$\int_{C_1} = \int_{C_1} 4xy.dx + \int_{C_1} \left(2x^2 - 3xy\right).dy = \int_{-3}^{1} 4x.\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right).dx +$$

$$+ \int_{-2}^{0} \left[2(2y+1)^2 - 3(2y+1).y\right].dy = \int_{-3}^{1} \left(2x^2 - 2x\right).dx + \int_{-2}^{0} \left(2y^2 + 5y + 2\right).dy =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - x^2\Bigg]_{-3}^{1} + \frac{2y^3}{3} + \frac{5y^2}{2} + 2y\Bigg]_{-2}^{0} = \frac{2}{3} - 1 + 18 + 9 + \frac{16}{3} - 10 + 4 = 26$$

$$\int_{C_2} = \int_{C_2} 4xy.dx + \int_{C_2} \left(2x^2 - 3xy\right).dy = \int_{1}^{0} 4x.\sqrt{1-x^2}.dx +$$

$$+ \int_{0}^{1} \left[2.\left(1-y^2\right) - 3.\sqrt{1-y^2}\, y\right].dy =$$

$$= \int_{1}^{0} 4x.\sqrt{1-x^2}.dx + \int_{0}^{1} \left(2 - 2.y^2 - 3.\sqrt{1-y^2}\, y\right).dy =$$

$$= -\frac{4\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg]_{1}^{0} + 2y - \frac{2y^3}{3} + \left(1-y^2\right)^{3/2}\Bigg]_{0}^{1} = -\frac{4}{3} + 2 - \frac{2}{3} - 1 = -1$$

$$\int_{C} \left[4xy.dx + \left(2x^2 - 3xy\right)dy\right] = 26 - 1 = 25$$

b) *La curva viene dada por una función vectorial del tipo:* $\vec{f}(t) = [x(t); y(t)]$.

Si P $(x;y)$ y Q $(x;y)$ son campos escalares continuos y C una curva suave asociada a una función vectorial con derivada continua y no nula en el intervalo paramétrico $[a; b]$, $\vec{f} : [a;b] \to \Re^2 \,/\, \vec{f}(t) = [x(t); y(t)]$, entonces:

$$\int_{C} [P(x;y).dx + Q(x;y).dy] = \int_{a}^{b} \left[P[x(t);y(t)].x'(t) + Q[x(t);y(t)].y'(t)\right]dt\ .$$

Ejemplos

1) $\int_C [(x+y).dx+(y-x).dy]$, con $\vec{f}(t)=(\cos t;2sen\, t) \quad 0\le t\le 2\pi$

$$\int_C [(x+y).dx+(y-x).dy]=\int_0^{2\pi}[(\cos t+2sen\, t).(-sent)+(2sen\, t-\cos t).(2\cos t)].dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}[(3sen\, t.\cos t-2)].dt=\left.\frac{3sen^2 t}{2}-2t\right]_0^{2\pi}=-4\pi$$

2) $\int_C [(x^2-y).dx+(y^2+x).dy]$, con $\vec{f}(t)=(t;t^2+1) \quad 0\le t\le 1$

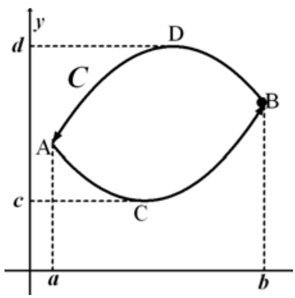
$$\int_C\left[(x^2-y).dx+(y^2+x).dy\right]=\int_0^1\left[(t^2-t^2-1)+(t^4+2t^2+1+t).2t\right].dt=$$

$$=\int_0^1(2t^5+4t^3+2t^2+2t-1).dt=\left.\frac{t^6}{3}+t^4+\frac{2t^3}{3}+t^2-t\right]_0^1=\frac{1}{3}+1+\frac{2}{3}=2$$

3) $\int_C [x.dy-y.dx]$, con $\vec{f}(t)=(a\cos t;\, a\, sen\, t) \quad 0\le t\le \pi/2$

$$\int_C[x.dy-y.dx]=\int_0^{\pi/2}\left[a\cos t.(a\cos t)\right].dt-\int_0^{\pi/2}\left[a\, sen t.(-a\, sen t)\right].dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[a^2\cos^2 t\right].dt+\int_0^{\pi/2}\left[a^2 sen^2 t\right].dt=a^2\int_0^{\pi/2}(\cos^2 t+sen^2 t).dt=a^2.t\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi.a^2}{2}$$



Integral curvilínea de una curva cerrada
Teorema de Gauss – Green

Este teorema establece una relación entre una integral curvilínea y una integral doble.

Sea D un recinto normal (una paralela a los ejes de coordenadas corta al contorno a lo sumo en dos puntos) limitado por una curva C cerrada que se puede descomponer en dos arcos $\overset{\frown}{ACB}$ (que responde a la ecuación $y = y_1(x)$) y $\overset{\frown}{ADB}$ (que responde a la ecuación $y = y_2(x)$) o también $\overset{\frown}{CAD}$, con ecuación $x = x_1(y)$ y $\overset{\frown}{CBD}$, con ecuación $x = x_2(y)$.

Sea también el campo vectorial $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y); Q(x;y)]$ en la cual suponemos que P, Q, P'_y y Q'_x son funciones continuas en el recinto D y su contorno. En estas condiciones se verifica que la integral curvilínea a lo largo de la curva C de $\vec{f}(\vec{x})$ (recorrida en sentido antihorario o positivo) es igual a la integral doble en D de la función $Q'_x - P'_y$.

$$\oint_{C^+} \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x}) = \oint_{C^+} [P(x;y).dx + Q(x;y).dy] = \iint_D (Q'_x - P'_y).dx.dy$$

Demostración

$$\oint_{C^+} P(x;y).dx = \int_{\overset{\frown}{ACB}} P(x;y).dx + \int_{\overset{\frown}{BDA}} P(x;y).dy =$$

$$= \int_a^b P[x; y_1(x)].dx + \int_b^a P[x; y_2(x)].dx = \int_a^b \{P[x; y_1(x)] - P[x; y_2(x)]\}.dx \quad ❶$$

$$\iint_D P'_y(x;y)dx.dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P'_y(x;y).dy.dx = \int_a^b \{P[x; y_2(x)] - P[x; y_1(x)]\}.dx \quad ❷$$

De ❶ y ❷: $\oint_C P(x;y).dx = -\iint_D P'_y(x;y).dx.dy$ ❺

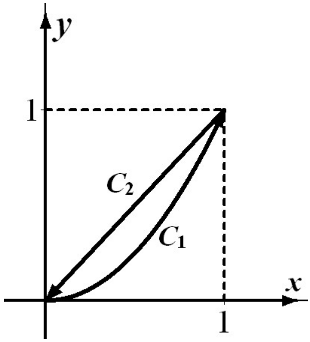
$$\oint_{C^+} Q(x;y).dy = \int_{\overset{\frown}{CBD}} Q(x;y).dy + \int_{\overset{\frown}{DAC}} Q(x;y).dy = \quad ❸$$

$$= \int_c^d Q[x_2(y); y].dy + \int_d^c Q[x_1(y); y].dy = \int_c^d \{Q[x_2(y); y] - Q[x_1(y); y]\}.dy$$

$$\iint_D Q'_x(x;y)dx.dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} Q'_x(x;y).dy.dx = \int_c^d \{Q[x_2(y); y] - Q[x_1(y); y]\}.dx \quad ❹$$

De ❸ y ❹: $\oint_{C^+} Q(x;y).dx = \iint_D Q'_x(x;y).dx.dy$ ❻

Sumando ❺ y ❻ obtenemos la tesis.



Ejemplos

1) $\oint_{C^+} \left(x^2 y.dx + xy.dy\right)$ $\quad C = C_1 \cup C_2$

$C_1 = \begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

de (0;0) → (1;1) → (0;0)

Calculamos la integral curvilínea recorriendo la curva en sentido antihorario, subimos por la parábola y bajamos por la recta.

$$\oint_{C^+} \left(x^2 y.dx + xy.dy\right) = \int_{C_1^+} \left(x^2 y.dx + xy.dy\right) + \int_{C_2^+} \left(x^2 y.dx + xy.dy\right)$$

$$\int_{C_1^+} = \int_0^1 x^2.x^2 dx + \int_0^1 \sqrt{y}.y.dy = \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 y^{3/2}.dy = \left.\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \left.\frac{2y^{5/2}}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\int_{C_2^+} = \int_1^0 x^2.x.dx + \int_1^0 y.y.dy = \int_1^0 x^3 dx + \int_1^0 y^2.dy = \left.\frac{x^4}{4}\right]_1^0 + \left.\frac{y^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{12}$$

$$\oint_{C^+} \left(x^2 y.dx + xy.dy\right) = \frac{3}{5} - \frac{7}{12} = \frac{1}{60}$$

Ahora verificamos el resultado aplicando el teorema de Gauss-Green.

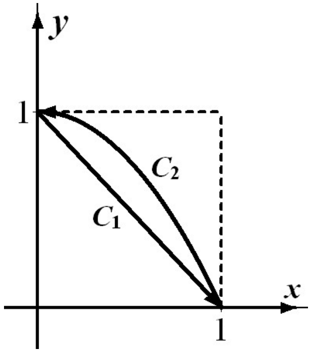
$$\iint_D \left(Q'_x - P'_y\right).dx.dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(y - x^2\right).dy.dx = \int_0^1 \left.\frac{y^2}{2} - x^2 y\right]_{x^2}^{x} .dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} + x^4\right).dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right).dx = \left.\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

2) $\oint_{C^+} \left[\left(x^2 + 2y\right).dx + 3x^2 y.dy\right] \qquad C = C_1 \cup C_2$

$$C_1 = \begin{cases} y = -x + 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \text{ y } C_2 = \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

de $(0;1) \rightarrow (1;0) \rightarrow (0;1)$



Calculamos la integral curvilínea recorriendo la curva en sentido antihorario, bajamos por la recta y luego subimos por la parábola.

$$\oint_{C^+} \left[\left(x^2 + 2y\right).dx + 3x^2 y.dy\right] =$$

$$= \int_{C_1^+} \left[\left(x^2 + 2y\right).dx + 3x^2 y.dy\right] + \int_{C_2^+} \left[\left(x^2 + 2y\right).dx + 3x^2 y.dy\right]$$

$$\int_{C_1^+} = \int_0^1 \left[x^2 + 2.(-x+1)\right].dx + \int_1^0 3.(1-y)^2 .y.dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 2\right).dx + \int_1^0 \left(3y - 6y^2 + 3y^3\right).dy = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \Bigg]_0^1 +$$

$$+ \frac{3y^2}{2} - 2y^3 + \frac{3y^4}{4} \Bigg]_1^0 = \frac{1}{3} - 1 + 2 - \frac{3}{2} + 2 - \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$$

$$\int_{C_2^+} = \int_1^0 x^2 + 2.\left(-x^2 + 1\right).dx + \int_0^1 3.(1-y).y.dy =$$

$$= \int_1^0 \left(x^2 - 2x^2 + 2\right).dx + \int_0^1 \left(3y - 3y^2\right).dy = -\frac{x^3}{3} + 2x \Bigg]_1^0 + \frac{3y^2}{2} - y^3 \Bigg]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + \frac{3}{2} - 1 = -\frac{7}{6}$$

$$\oint_{C^+} \left[x^2 y.dx + xy.dy\right] = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{12}$$

Ahora verificamos el resultado aplicando el teorema de Gauss-Green.

$$\iint_D (Q'_x - P'_y).dx.dy = \int_0^1 \int_{-x+1}^{-x^2+1} (6xy-2).dy.dx = \int_0^1 \left(3xy^2 - 2y\right)\Big]_{-x+1}^{-x^2+1}.dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^5 - 6x^3 + 3x + 2x^2 - 2 - 3x^3 + 6x^2 - 3x - 2x + 2\right).dx =$$

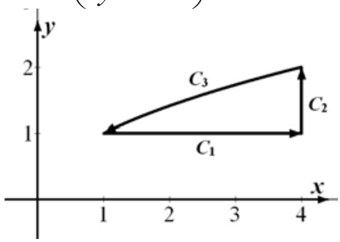
$$= \int_0^1 \left(3x^5 - 9x^3 + 8x^2 - 2x\right).dx = \frac{x^6}{2} - \frac{9x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - x^2 \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{4} + \frac{8}{3} - 1 = -\frac{1}{12}$$

3) Aplicando el teorema de Gauss-Green calcular $\oint_{C^+} \left(\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x}\right)$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ si: $C_1 = \begin{cases} y = 1 \\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

$C_2 = \begin{cases} x = 4 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$ y $C_3 = \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

de $(1;1) \to (4;1) \to (4;2)$



$$\oint_{C^+} \left(\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x}\right) = \iint_D (Q'_x - P'_y).dx.dy = \int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right).dy.dx = \int_1^4 -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y}\Big]_1^{\sqrt{x}}.dx =$$

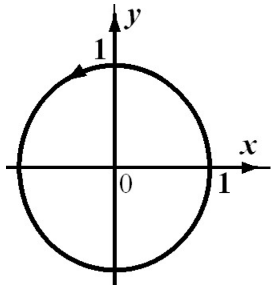
$$= \int_1^4 \left(-x^{-3/2} - x^{-1/2} + \frac{1}{x^2} + 1\right).dx = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + x\Big]_1^4 =$$

$$= 1 - 4 - \frac{1}{4} + 4 - 2 + 2 + 1 - 1 = \frac{3}{4}$$

4) $\int_C \left[(x+2y).dx + y^2.dy\right]$, con $\vec{f}(t) = (cos\, t; sen\, t) \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(cos\, t + 2sen\, t).(-sent) + \left(sen^2\, t.cos\, t\right)\right].dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\cos t.\operatorname{sen} t - 2.\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t.\cos t\right)\right].dt =$$



$$= \int_0^{2\pi} \left[-\cos t.\operatorname{sen} t - \left[1+\cos(2t)\right] + \operatorname{sen}^2 t.\cos t\right].dt =$$

$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2} - t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} - 2\pi - \frac{1}{2} = -2\pi$$

Verificamos ahora el teorema

$$\iint_D \left(Q'_x - P'_y\right).dx.dy = 4.\iint_D (-2).dx.dy = 4.\int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-2).r.d\alpha.dr = -8.\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} r.d\alpha\right].dr =$$

$$= -8.\int_0^1 \left[(\alpha.r)\right]_0^{\pi/2}.dr = -8.\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} r\right).dr = -4\pi.\left.\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = -2\pi$$

Integral curvilínea de un campo vectorial conservativo

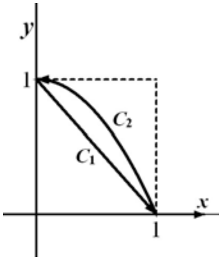
Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y);\ Q(x;y)]$ es un campo vectorial conservativo continuo en un conjunto conexo y abierto y $\vec{f}(t) = [x(t);\ y(t)]$ es una curva suave a trozos en $[a;b]$, se verifica que:

1) ***La integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada es 0.***

Si $\vec{f}(\vec{x}) = [P(x;y);\ Q(x;y)]$ es un campo conservativo, sabemos que $Q'_x = P'_y$, por lo tanto $\oint_{C^+} [P(x;y).dx + Q(x;y).dy] = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right).dx.dy = 0$.

Recíproco: Si $\oint_{C^+} [P(x;y).dx + Q(x;y).dy] = 0$, el campo es conservativo.

Ejemplo



Si $U(x;y)=2x^2y+xy^2$, $\vec{f}(\vec{x})=\left[\left(4xy+y^2\right);\left(2x^2+2xy\right)\right]$

Por lo tanto $\oint_{C^+}\left[\left(4xy+y^2\right).dx+\left(2x^2+2xy\right).dy\right]$ a lo largo

de $C=C_1\cup C_2$ con $C_1=\begin{cases}y=-x+1\\0\leq x\leq 1\end{cases}$ y $C_2=\begin{cases}y=-x^2+1\\0\leq x\leq 1\end{cases}$, debe ser 0.

$$\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right).dx.dy=\int_0^1\int_{-x+1}^{-x^2+1}\left(4x+2y-4x-2y\right).dy.dx=\int_0^1\int_{-x+1}^{-x^2+1}0.dy.dx=0$$

2) *Teorema fundamental de las integrales curvilíneas*

Si $\vec{f}(\vec{x})=$ [$P(x;y)$; $Q(x;y)$] es un campo conservativo continuo, la integral curvilínea a lo largo de una curva *C*, entre los puntos A y B de la misma, es igual a $U(\mathrm{B})-U(\mathrm{A})$, donde $U(x;y)$ es una función potencial de $\vec{f}(\vec{x})$.
Es decir que la integral curvilínea entre dos puntos A y B es independiente de la trayectoria, solo depende de los puntos.

$$\int_C\left[P(x;y).dx+Q(x;y).dy\right]=\int_{AB}dU(x;y)=U(x;y)\Big]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=U(\mathrm{B})-U(\mathrm{A})$$

Nota: debemos recordar que si $\vec{f}(\vec{x})=$ [$P(x;y)$; $Q(x;y)$] es un campo conservativo, $\nabla U(x;y)=\left[P(x;y);Q(x;y)\right]$.

Propiedad recíproca: Si $\vec{f}(\vec{x})$ es un campo vectorial continuo en un recinto *D* simplemente conexo, y $\int_C\vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x})$ no depende de la trayectoria, entonces el campo es conservativo y la integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada es 0.

Ejemplos

1) $\int_C\left[\left(4xy+y^2\right).dx+\left(2x^2+2xy\right).dy\right]$ a lo largo de las siguientes curvas entre A = (0;0) y B = (1;1), son iguales.

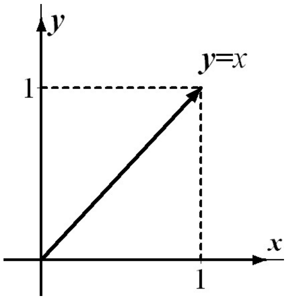
a) $C_1 = \begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$, b) $C_2 = \begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y c) $C_3 = \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Verificamos que $\vec{f}(\vec{x}) = \left(4xy + y^2 ; 2x^2 + 2xy\right)$ es un campo vectorial conservativo. $P'_y = 4x + 2y = Q'_x$. Por lo tanto la integral curvilínea no depende de la trayectoria.

a) $\int_C \left[\left(4xy + y^2\right).dx + \left(2x^2 + 2xy\right).dy\right] =$

$= \int_0^1 5x^2.dx + \int_0^1 4y^2.dy = \left.\frac{5x^3}{3}\right]_0^1 + \left.\frac{4y^3}{3}\right]_0^1 =$

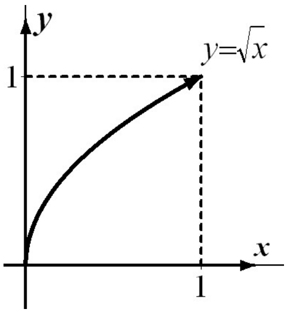
$= \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$



b) $\int_C \left[\left(4xy + y^2\right).dx + \left(2x^2 + 2xy\right).dy\right] =$

$= \int_0^1 \left(4x^3 + x^4\right).dx + \int_0^1 \left(2y + 2y^{3/2}\right).dy =$

$= \left.\left(x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\right]_0^1 + \left.\left(y^2 + \frac{4y^{5/2}}{5}\right)\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{5} + 1 + \frac{4}{5} = 3$

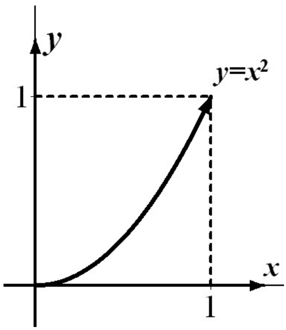


c) $\int_C \left[\left(4xy + y^2\right).dx + \left(2x^2 + 2xy\right).dy\right] =$

$= \int_0^1 \left(4x^{3/2} + x\right).dx + \int_0^1 \left(2y^4 + 2y^3\right).dy =$

$= \left.\left(\frac{8x^{5/2}}{5} + \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 + \left.\left(\frac{2y^5}{5} + \frac{y^4}{2}\right)\right]_0^1 =$

$= \frac{8}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = 3$



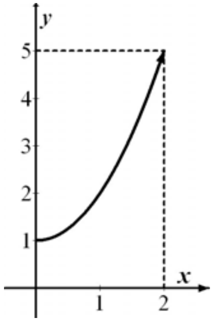
Vemos que en todos los casos la integral curvilínea vale lo mismo.
Ahora calculamos una función potencial para verificar el teorema.

$$U(x;y)=\int(4xy+y^2).dx=2x^2y+y^2x+\alpha(y)$$
$$U(x;y)=\int(2x^2+2xy).dy=2x^2y+y^2x+\beta(x)$$

Comparando las integrales surge que una $U(x;y)=2x^2y+y^2x$

$$\int_C\left[(4xy+y^2).dx+(2x^2+2xy).dy\right]=U(1;1)-U(0;0)=3-0=3$$

2) Tenemos el campo vectorial, $\vec{f}(\vec{x})=(2xy^3;3x^2y^2)$, que verificamos que es conservativo. Consideremos ahora la curva $y=x^2+1$ con $0\leq x\leq 2$. A = (0;1) y B = (2;5).



Calculamos una función potencial

$$U(x;y)=\int 2xy^3.dx=x^2y^3+\alpha(y)$$
$$U(x;y)=\int 3x^2y^2.dy=x^2y^3+\beta(x)$$

Por lo tanto una $U(x;y)=x^2y^3$

$$\int_C\left(2xy^3dx+3x^2y^2dy\right)=x^2y^3\Big]_{(0;1)}^{(2;5)}=500-0=500$$

Lo verificamos resolviendo la integral curvilínea.

$$\int_C\left(2xy^3dx+3x^2y^2dy\right)=\int_0^2 2x^6.dx+\int_1^5 3y^3.dy=\frac{2x^7}{7}\Big]_0^2+\frac{3y^4}{4}\Big]_1^5=32+\frac{1875}{4}-\frac{3}{4}=500$$

B) Integral curvilínea sobre una curva alabeada

Si $\vec{f}(\vec{x})=$ [*P* (*x;y;z*); *Q* (*x;y;z*); *R* (*x;y;z*)] es un campo vectorial continuo entonces:

$$\int_C \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x}) = \int_C [P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z)].(dx;dy;dz) =$$
$$= \int_C [P(x;y;z).dx + Q(x;y;z).dy + R(x;y;z).dz]$$

Si la curva viene dada por una función vectorial del tipo:

$\vec{f}:[a;b]\rightarrow\Re^3 \,/\, \vec{f}(t)=[x(t);y(t);z(t)]$, entonces:

$$\int_C [P(x;y;z).dx + Q(x;y;z).dy + R(x;y;z).dz] =$$
$$= \int_a^b \big[P[x(t);y(t);z(t)].x'(t) + Q[x(t);y(t);z(t)].y'(t) + R[x(t);y(t);z(t)].z'(t)\big]dt$$

Ejemplos

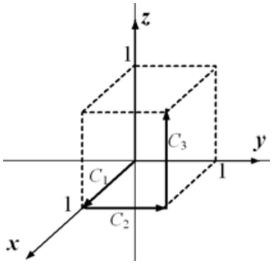
$\vec{f}(\vec{x}) = \left(3x^2+6y;-14yz;20xz^2\right)$

a) $\vec{f}(t)=\left(t;t^2;t^3\right)$, $0\le t\le 1$.

$$\int_C \left[\left(3x^2+6y\right).dx - 14yz.dy + 20xz^2.dz\right] = \int_0^1 \left[\left(3t^2+6t^2\right) - 14t^5.2t + 20t^7.3t^2\right].dt =$$

$$= \int_0^1 \left(9t^2-28t^6+60t^9\right).dt = 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big]_0^1 = 3-4+6 = 5$$

b) La poligonal (0;0;0) → (1;0;0) → (1;1;0) → (1;1;1)



$$C_1=\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 0\le x\le 1\end{cases} \quad C_2=\begin{cases} x=1 \\ z=0 \\ 0\le y\le 1\end{cases} \quad \text{y} \quad C_3=\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ 0\le z\le 1\end{cases}$$

Calculamos primero la $\int_{C_1}$, luego la $\int_{C_2}$ y por último la $\int_{C_3}$

$$\int_{C_1}\left[\left(3x^2+6y\right).dx-14yz.dy+20xz^2.dz\right]=\int_0^1 3x^2.dx=x^3\Big]_0^1=1$$

$$\int_{C_2}\left[\left(3x^2+6y\right).dx-14yz.dy+20xz^2.dz\right]=\int_0^1 0.dy+0.dz=0$$

$$\int_{C_3}\left[\left(3x^2+6y\right).dx-14yz.dy+20xz^2.dz\right]=\int_0^1 20z^2.dz=\frac{20z^3}{3}\Bigg]_0^1=\frac{20}{3}$$

$$\int_{C}\left[\left(3x^2+6y\right).dx-14yz.dy+20xz^2.dz\right]=1+\frac{20}{3}=\frac{23}{3}$$

Condición necesaria y suficiente de independencia de la trayectoria en $\mathbb{R}^3$

Es condición necesaria y suficiente para que la $\int_C \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x})$ no dependa de la trayectoria que el campo $\vec{f}(\vec{x})=(P;Q;R)$ sea un campo vectorial conservativo continuo con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto y conexo. En ese caso existe función potencial $U\,(x;y;z)$ / $\vec{f}(\vec{x})=\nabla U$.

$$\int_C (Pdx+Qdy+Rdz)=\int_C \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x})=\int_C \nabla U.d(\vec{x})=$$

$$=\int_C\left(\frac{\partial U}{\partial x}.dx+\frac{\partial U}{\partial y}.dy+\frac{\partial U}{\partial z}.dz\right)=\int_A^B dU(x;y;z)=U(x;y;z)\Big]_A^B=U(B)-U(A)$$

Ejemplos

1) $\int_C \left[\left(2xy+z^3\right).dx+x^2.dy+3xz^2.dz\right]$ entre A = (1; –2;1) y B = (3;1;4)

Verificamos que el campo $\vec{f}(\vec{x})=\left(2xy+z^3\,;\,x^2\,;3xz^2\right)$ sea conservativo.

$$rot\ \vec{f}=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix}=0\breve{i}+\left(3z^2-3z^2\right)\breve{j}+\left(2x-2x\right)\breve{k}=\vec{0}$$

El campo es conservativo, por lo tanto:

$$\int_{(1;-2;1)}^{(3;1;4)}\left[\left(2xy+z^3\right).dx+x^2.dy+3xz^2.dz\right]=U(3;1;4)-U(1;-2;1)$$

Debemos calcular una función potencial $U\,(x;y;z)$

$$\int P(x;y;z).dx=\int\left(2xy+z^3\right).dx=x^2y+z^3x+\alpha(y;z) \qquad (1)$$

$$\int Q(x;y;z).dy=\int x^2.dy=x^2y+\beta(x;z) \qquad (2)$$

$$\int R(x;y;z).dz=\int 3xz^2.dz=xz^3+\gamma(x;y) \qquad (3)$$

Comparando las 3 integrales tenemos que una $U(x;y;z)=x^2y+z^3x$

$$\int_{(1;-2;1)}^{(3;1;4)}\left[\left(2xy+z^3\right).dx+x^2.dy+3xz^2.dz\right]=x^2y+z^3x\Big]_{(1;-2;1)}^{(3;1;4)}=201+1=202$$

2) $\int_C \left[(2xy+z).dx+\left(x^2+z^2\right).dy+(2yz+x+2z).dz\right]$ entre A=(0;0;0) y B=(1;1;1)

Verificamos que el campo $\vec{f}(\vec{x})=\left(2xy+z;x^2+z^2;2y+x+2z\right)$ sea conservativo.

$$rot\,\vec{f}=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z & x^2+z^2 & 2yz+x+2z \end{vmatrix}=$$

$$=(2z-2z)\breve{i}+(1-1)\breve{j}+(2x-2x)\breve{k}=\vec{0}$$

El campo es conservativo, por lo tanto:

$$\int_{(0;0;0)}^{(1;1;1)}\left[(2xy+z).dx+\left(x^2+y^2\right).dy+(2yz+x+2z).dz\right]=U(1;1;1)-U(0;0;0)$$

Debemos calcular una función potencial $U\,(x;y;z)$

$$\int P(x;y;z).dx=\int(2xy+z).dx=x^2y+zx+\alpha(y;z) \qquad (1)$$

$$\int Q(x;y;z).dy=\int\left(x^2+z^2\right).dy=x^2y+x^2z+\beta(x;z) \qquad (2)$$

$$\int R(x;y;z).dz=\int(2yz+x+2z).dz=yz^2+xz+z^2+\gamma(x;y) \qquad (3)$$

Comparando las 3 integrales tenemos que una

$$U(x;y;z)=x^2y+yz^2+xz+z^2$$

$$\int_{(0;0;0)}^{(1;1;1)}\left[(2xy+z).dx+\left(x^2+y^2\right).dy+(2yz+x+2z).dz\right]=$$

$$=x^2y+yz^2+xz+z^2\Big]_{(0;0;0)}^{(1;1;1)}=4-0=4$$

3) $\int_C \left[\left(6xy+2z\right).dx+\left(3x^2-3y^2z\right).dy+\left(2x-y^3\right).dz\right]$ entre A= (1;1;1) y B = (2;1;0)

Verificamos que el campo $\vec{f}(\vec{x})=\left(6xy+2z;3x^2-3y^2z;2x-y^3\right)$ sea conservativo.

$$rot\,\vec{f}=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 6xy+2z & 3x^2z-3y^2z & 2x-y^3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(-3y^2+3y^2\right)\breve{i}+\left(2-2\right)\breve{j}+\left(6x-6x\right)\breve{k}=\vec{0}$$

El campo es conservativo, por lo tanto:

$$\int_{(1;1;1)}^{(2;1;0)}\left[\left(6xy+2z;3x^2-3y^2z;2x-y^3\right)\right]=U\left(2;1;0\right)-U\left(1;1;1\right)$$

Debemos calcular una función potencial $U\,(x;y;z)$

$$\int P\left(x;y;z\right).dx=\int\left(6xy+2z\right).dx=3x^2y+2zx+\alpha\left(y;z\right) \qquad (1)$$

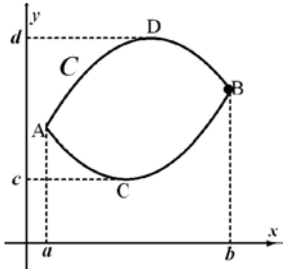
$$\int Q\left(x;y;z\right).dy=\int\left(3x^2-3y^2z\right).dy=3x^2y-y^3z+\beta\left(x;z\right) \qquad (2)$$

$$\int R\left(x;y;z\right).dz=\int\left(2x-y^3\right).dz=2xz-y^3z+\gamma\left(x;y\right) \qquad (3)$$

Comparando las 3 integrales tenemos que una $U\left(x;y;z\right)=3x^2y+2xz-y^3z$

$$\int_{(1;1;1)}^{(2;1;0)}\left[\left(6xy+2z;3x^2-3y^2z;2x-y^3\right)\right]=3x^2y+2zx-y^3z\Big]_{(1;1;1)}^{(2;1;0)}=12-4=8$$

CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS MEDIANTE INTEGRALES CURVILÍNEAS



Sea D un recinto normal (una paralela a los ejes de coordenadas corta al contorno a lo sumo en dos puntos) limitado por una curva C cerrada que se puede descomponer en dos arcos $\overset{\frown}{ACB}$ (que responde a la ecuación $y = y_1(x)$) y $\overset{\frown}{ADB}$ (que responde a la ecuación $y = y_2(x)$) o también $\overset{\frown}{CAD}$, con ecuación $x = x_1(y)$ y $\overset{\frown}{CBD}$, con ecuación $x = x_2(y)$.

El área del recinto es: $A = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)].dx$

$$A = \int_a^b y_2(x).dx + \int_b^a y_1(x).dx \quad ❶$$

Por otro lado la integral curvilínea

$$\oint_{C^+} y.dx = \int_{\overset{\frown}{ACB}} y.dx + \int_{\overset{\frown}{BDA}} y.dx = \int_a^b y_1(x).dx + \int_b^a y_2(x).dx \quad ❷$$

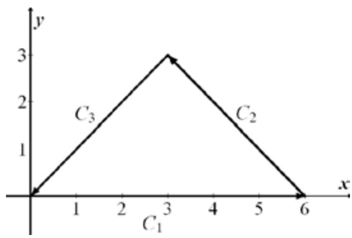
De ❶ y ❷ surge que $A = -\oint_{C^+} y.dx$

Análogamente se puede demostrar que

$A = \oint_{C^+} x.dy$, considerando $\overset{\frown}{CAD}$, con ecuación $x = x_1(y)$ y $\overset{\frown}{CBD}$, con ecuación $x = x_2(y)$.

Ejemplos

1) Área del siguiente triángulo



$$A = -\int_{C^+} y.dx = -\left(\int_{C_1^+} y.dx + \int_{C_2^+} y.dx + \int_{C_3^+} y.dx \right)$$

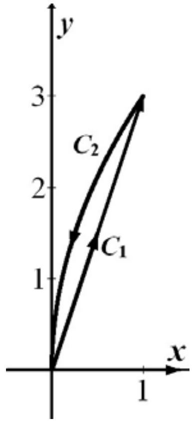
$$\int_{C_1^+} y.dx = \int_0^6 y.dx = \int_0^6 0.dx = 0$$

$$\int_{C_2^+} y.dx = \int_6^3 (6-x).dx = 6x - \frac{x^2}{2}\Bigg]_6^3 = 18 - \frac{9}{2} - 36 + 18 = -\frac{9}{2}$$

$$\int_{C_3^+} y.dx = \int_3^0 x.dx = \frac{x^2}{2}\Bigg]_3^0 = 0 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$A = -\oint_{C^+} y.dx = -\left(\int_{C_1^+} y.dx + \int_{C_2^+} y.dx + \int_{C_3^+} y.dx \right) = 9$$

2) Área del siguiente recinto limitado por $C = C_1 \cup C_2$



$$C_1 = \begin{cases} y^2 = 9x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}, \quad C_2 = \begin{cases} y = 3x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$A = -\oint_{C^+} y.dx = -\left(\int_{C_1^+} y.dx + \int_{C_2^+} y.dx \right)$$

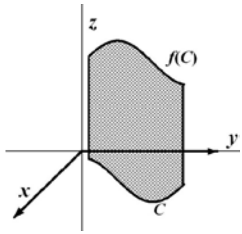
$$\int_{C_1^+} y.dx = \int_0^1 3x.dx = \frac{3x^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$\int_{C_2^+} y.dx = \int_1^0 \sqrt{9x}.dx = \int_1^0 3x^{1/2}.dx = 2x^{3/2}\Big]_1^0 = -2$$

$$A = -\oint_{C^+} y.dx = -\left(\int_{C_1^+} y.dx + \int_{C_2^+} y.dx \right) = -\left(\frac{3}{2} - 2 \right) = \frac{1}{2}$$

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES CURVILÍNEAS

Cálculo del área de una superficie cilíndrica



Si $z = f(x;y)$, es una función continua definida en un arco de curva regular $C \subset \Re^2$ / que toma valores positivos, entonces $\int_C f(x;y).dx$ mide el área de la superficie cilíndrica limitada inferiormente por la curva C y superiormente por su imagen a través de z.

El trabajo de una fuerza

Si el campo vectorial $\vec{f}$ representa un campo de fuerzas, entonces $\int_C \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x})$ mide el trabajo T realizado por el campo de fuerzas $\vec{f}$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva regular C.

Ejemplos

1) Si $\vec{f}(x;y;z)=(x;y;z)$, es un campo de fuerzas, calcular el trabajo T realizado $\vec{f}$ al desplazar una partícula a lo largo C: $f(t)=(\cos t;\text{sen}\, t;3t)$ entre A = (1;0;0) y B = (–1;0;3π).

Evaluamos si el campo de fuerzas es conservativo:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k} = \vec{0}$$

Por lo tanto el trabajo no depende de la trayectoria. Si calculamos una función potencial vemos que es: $U(x;y;z)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}$.

$$T=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\Bigg]_{(1;0;0)}^{(-1;0;3\pi)}=\frac{1}{2}+\frac{9\pi^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9\pi^2}{2}$$

2) Si $\vec{f}(x;y;z)=\left(3x^2;2xz-y;z\right)$, es un campo de fuerzas, calcular el trabajo T realizado $\vec{f}$ al desplazar una partícula a lo largo C: $\begin{cases} x^2=4y \\ 3x^3=8z \end{cases}$, $0\le x\le 2$.

Haciendo $x = t$, obtenemos la forma paramétrica de C: $f(t)=\left(t;\frac{t^2}{4};\frac{3t^3}{8}\right)$ con $0\le t\le 2$. $\quad dx=dt,\, dy=\frac{t.dt}{2},\, dz=\frac{9t^2.dt}{8}$

$$T=\int_{t=0}^{t=2}\left[3t^2+\left(\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{4}\right).\frac{t}{2}+\frac{3t^3.9t^2}{8}\right].dt=\int_{t=0}^{t=2}\left(\frac{51t^5}{64}-\frac{t^3}{8}+3t^2\right).dt=$$

$$=\frac{51t^6}{384}-\frac{t^4}{32}+t^3\Bigg]_0^2=\frac{17}{2}-\frac{1}{2}+8=16$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Calcular las siguientes integrales curvilíneas en $\Re^2$

a) $\int_C \left[\left(x^2 y\right).dx + y.dy\right]$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si: $C_1 = \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y

$C_2 = \begin{cases} x = 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$, de (0;0) $\rightarrow$ (1;1) $\rightarrow$ (1;0)

b) $\int_C \left[(x+y).dx + xy.dy\right]$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si: $C_1 = \begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y

$C_2 = \begin{cases} y = 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$, de (0;0) $\rightarrow$ (1;1) $\rightarrow$ (2;1)

c) $\int_C \left(2xy^3.dx + 3y^2x^2.dy\right)$ a lo largo de $C = \begin{cases} y = 2x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$, de (0;0) $\rightarrow$ (1;2).

Verificar que por otro camino da lo mismo.

d) $\int_C yx.dx$, con $\vec{f}(t) = (2t;t) \quad 0 \le t \le 2$

e) $\int_C \left(x^2 + y^2\right).dx$, a lo largo de $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$C_1 = \begin{cases} y = t \\ x = t \end{cases}, 0 \le t \le 1$, $C_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 1/t \end{cases}$ $1 \le t \le 2$ y $C_3 = \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$ $0 \le t \le 0{,}5$

de (0;0) $\rightarrow$ (1;1) $\rightarrow$ (2;0,5) $\rightarrow$ a (2;0)

f) $\int_C \left[(x-y).dx + \left(y^2 + x\right).dy\right]$, a lo largo de $C = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$

de (0;1) $\rightarrow$ (1;2)

g) $\int_C \left(y\cos x.dx + sen\, x.dy\right)$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si:

$C_1 = \begin{cases} y = 0 \\ 0 \le x \le \pi/2 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} x = \pi/2 \\ 0 \le y \le \pi/2 \end{cases}$ de (0;0) $\rightarrow$ ($\pi/2$;0) $\rightarrow$ ($\pi/2$;$\pi/2$)

h) $\int_C \left[\left(y\,x^2 \right).dx + \frac{x^3}{3}.dy \right]$ entre A = (0;0) y B = (2;2), verificar que por los siguientes caminos da lo mismo.

i) $C_1 : \overline{AB}$, A = (0;0), B = (2;2)

ii) $C_2 :$ la poligonal ACDB, A = (0;0), C = (2;0), D = (0;2), B = (2;2)

iii) $C_3 :$ la poligonal ACDB, A = (0;0), C = (1;0), D = (1;1), B = (2;2)

iv) $C_4 : \sqrt{2x}$

i) $\int_C \frac{y.dx + x.dy}{x^2 + y^2}$, a lo largo del segmento de la recta $y = x,\ \ 1 \le x \le 2$.

2) Aplicando el teorema de Gauss-Green resolver las siguientes integrales Verificar el resultado calculándolas como integrales curvilíneas.

a) $\oint_{C^+} \left(x^2 y.dx + y^3.dy \right)$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si: $C_1 = \begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} y^3 = x^2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

b) $\oint_{C^+} \left[\left(y - x \right).dx + y.dy \right]$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si: $C_1 = \begin{cases} y = 2x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} y = 2x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

c) $\oint_{C^+} \left(y^2.dx + x.dy \right)$ si C es el cuadrado de vértices (1;1), (1;−1), (−1;1) y (−1;−1).

d) $\oint_{C^+} \left(xy.dx - 3y^2.dy \right)$ si $\vec{f}\left(t\right) = \left(2\cos t; 2 sen\, t\right)$. $0 \le t \le 2\pi$.

e) $\oint_{C^+} \left[\left(x^2 + y^2 \right).dx - 2xy.dy \right]$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si:

$C_1 = \begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ y $C_2 = \begin{cases} y^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

f) $\oint_{C^+} \left[e^{xy}.\left(y.dx + x.dy \right) \right]$, si C es la poligonal cerrada ABCA, con A= (0;1), B = (2;1), C = (2;2).

g) $\oint_{C^+} \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x})$ si $\vec{f}(\vec{x})=\left(y+1;x^2\right)$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ si:

$$C_1=\begin{cases} y=0 \\ 0\le x\le 2\end{cases},\; C_2=\begin{cases} y=-x^2+4 \\ 0\le x\le 2\end{cases} \text{ y } C_3=\begin{cases} x=0 \\ 0\le y\le 4\end{cases}$$

h) $\oint_{C^+} \vec{f}(\vec{x}).d(\vec{x})$ si $\vec{f}(\vec{x})=\left(y^2;xy\right)$ a lo largo de C, si C es el triángulo de vértices (0;0), (1;0), (1;1).

i) $\oint_{C^+} [(x+y).dx+(y-x).dy]$ si C es la elipse $4.(x^2-1)+y^2=0$ utilizando una parametrización adecuada.

3) Aplicando el teorema de Gauss-Green resolver las siguientes integrales curvilíneas.

a) $\oint_{C^+} \left[\left(2y+\sqrt{9+x^3}\right).dx+\left(5x+e^{arc\,tg\,y}\right).dy\right]$ si $C: x^2+y^2=4$

b) $\oint_{C^+} \left(3xy.dx+2x^2.dy\right)$ si $C:\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=x\end{cases}$

c) $\oint_{C^+} \left(x^2y.dx+y^3.dy\right)$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ si: $C_1=\begin{cases} y=x \\ 0\le x\le 1\end{cases}$ y

$$C_2=\begin{cases} y^3=x^2 \\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

d) $\oint_{C^+} \left(xy^4.dx+x^2y^3.dy\right)$ a lo largo del triángulo de vértices (0;0), (1;0), (1;1).

e) Calcular $\oint_{C^+} \dfrac{y.dx-x.dy}{x^2+y^2}$, si:

i) C es el cuadrado de lados paralelos a los ejes de coordenadas de centro en el origen y lado 2. Determinar si es posible aplicar el teorema de Gauss - Green.

ii) $C = C_1 \cup C_2$, $C_1=\begin{cases} x=cos\,t \\ y=sen\,t\end{cases}$, $C_2=\begin{cases} x=2\,cos\,t \\ y=2sen\,t\end{cases}$ $\quad 0\le t\le 2\pi$.

4) Aplicando el teorema fundamental de las integrales curvilíneas resolver las siguientes integrales. Luego verificar el resultado resolviendo la integral curvilínea según una curva cualquiera que una los puntos inicial y final.

a) $\int_C \left[\left(2xy - y^4 + 3\right).dx + \left(x^2 - 4xy^3\right).dy\right]$ entre A = (1;0) y B = (2;1).

b) $\int_C \left[\left(2xy - x^2 + 1\right).dx + \left(x^2 - y^2\right).dy\right]$ entre A = (0;0) y B = (1;1).

c) $\int_C \left(2xy^3.dx + 3x^2y^2.dy\right)$ entre A = (0;0) y B = (1;2).

d) $\int_C \left(2xy.dx + x^2.dy\right)$ entre A = (0;1) y B = (2;5).

e) $\int_C \left[\left(3x^2y - y^3 + 3\right).dx + \left(x^3 - 3y^2x - 2\right).dy\right]$ entre A= (0;1) y B= (1;2).

f) $\int_C \left[\left(1 - \frac{sen\, y}{e^x}\right).dx + \left(\frac{cos\, y}{e^x} - 1\right).dy\right]$ entre A= (0;0) y B= (1;π).

g) $\int_{(0;1)}^{(2;3)} \left[(x+y).dx + (x-y).dy\right]$ h) $\int_{(0;0)}^{(3;5)} \left[e^{xy}.(xy+1).dx + e^{xy}.x^2.dy\right]$

5) Si $\int_{(0;0)}^{(1;1)} \left[\left(3Bxy + Ax^2\right).dx + \left(2x^2 + y^2\right).dy\right] = 5$ y es independiente de la trayectoria, calcular A y B si $x \neq 0$.

6) Calcular las siguientes integrales curvilíneas en $\Re^3$

a) $\vec{f}(\vec{x}) = \left(3xy; 4y^2 - xz; 6z\right)$, $\vec{f}(t) = \left(t; t^2; t^3\right)$, $0 \le t \le 1$.

b) $\vec{f}(\vec{x}) = \left(y^2; z^2; x^2\right)$, $\vec{f}(t) = \left(t-1; t+1; t^2\right)$, $0 \le t \le 1$.

c) $\vec{f}(\vec{x}) = \left(3x^2 + 6y; -14yz; 20xz^2\right)$, i) recta que une el punto A= (0;0;0) con B= (1;1;1), ii) $\vec{f}(t) = \left(t; t^2; t^3\right)$, $0 \le t \le 1$.

d) $\vec{f}(\vec{x}) = (3x; 2xy; z)$, $\vec{f}(t) = (cos\, t; sen\, t; t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

7) Demostrar que las siguientes integrales son independientes de la trayectoria y calcularlas por algún método.

a) $\int_C [3y.dx + (3x+4y).dy - 2z.dz]$ entre A = (0;1;−1) y B = (1;2;0).

b) $\int_C \left[\left(\frac{1}{y} - \frac{2z}{x^2}\right).dx - \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{y^2}\right).dy + \left(\frac{2}{x} + \frac{y}{z^2}\right).dz\right]$ entre A= (2; −1;1) y B = (4;2; −2).

c) $\int_C [9x.dx + 4y.dy - 36z.dz]$ entre A = (0;0;0) y B = (1;1;1).

d) $\int_C [tg\, z.dx - dy + x.sec^2\, z.dz]$ entre A = (0;0;0) y B = (2;1; $\pi/4$).

8) Hallar *k* para que el campo $\vec{f}(\vec{x}) = (2xy + kz; x^2 - 2; 4x)$ sea conservativo. Calcular la circulación de $\vec{f}$ desde (0;2;1) hasta (2;2;0) usando la función potencial.

9) Calcular las áreas de los siguientes recintos como integrales curvilíneas. Verificar calculándolas utilizando integrales dobles.

a) $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$ b) $D: \begin{cases} y^2 = x^3 \\ y^2 = x \end{cases}$ c) $D: \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ d) $D: \begin{cases} 2x + y = 20 \\ y^2 = x \\ y = 0 \end{cases}$

10) La matriz jacobiana de un campo vectorial $\vec{f} = [P(x;y); Q(x;y)]$ es $D\vec{f} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$, calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de A en sentido positivo si A= $\{(x;y) / x + y \le 2 \wedge y \ge x^2\}$.

11) Calcular la circulación de $\vec{f}(\vec{x}) = [x^3 - ln(x^2 + y^2); 3y^2 + ln(x^2 + y^2)]$ a lo largo de la frontera de A en sentido positivo si A es la región plana limitada por los arcos de circunferencias C [(0;0);2] y C [(1;0);1] y la recta $y = \sqrt{3}x$.

12) $\vec{f}(x;y;z)=\left(2kyx+zy-y;kx^2+zx-x;xy\right)$ es un campo vectorial irrotacional. Determinar el valor de k para que la circulación entre el punto (3;3;1) y cualquier punto del plano $x-5z=3$ sea –27.

13) Si $\vec{f}(x;y;z)=\left(3x^2+6y;-14yz;20xz^2\right)$ calcular $\int_C \vec{f}.d\vec{x}$ si C es la intersección de los planos $z=x+y$ y $z+y=4$, en el primer octante en el sentido positivo del eje x.

14) $\vec{f}(x;y)=\left(2xy;x^2+y^2\right)$ es un campo de fuerzas, calcular el trabajo necesario para desplazar una partícula a lo largo del segmento C: de (0;0) a (1;1).

15) Si $\vec{f}(x;y)=\left(y-x;x^2y\right)$ es un campo de fuerzas, calcular el trabajo que se necesita para desplazar una partícula a lo largo del segmento C del punto (1;1) al punto (2;4).

16) Si $\vec{f}\in C^1$ en $\Re^2$ con matriz jacobiana $D\vec{f}=\begin{pmatrix} x^2y & 3x \\ y & -y \end{pmatrix}$ y la $\int_C \vec{f}(\vec{x}).d\vec{x}$ entre (–2;0) y (2;0) a lo largo del eje x es 4, calcular la $\int_C \vec{f}.d\vec{x}$ entre ambos puntos a lo largo de la curva $y=\sqrt{4-x^2}$.

17) Sea C_1 una curva suave simple, contenida en el semiplano $y\geq 0$ que comienza en $A=(-3;0)$ y termina en $B=(4;0)$. Si el área de la región encerrada por la curva C y el eje x es 5, calcular la integral curvilínea entre A y B de $\vec{f}(x;y)=\left(3y+2xy+x;x+x^2\right)$ a lo largo de C_1.

RESPUESTAS

1) a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{56}{15}$, c) 8, d) $\frac{32}{3}$, e) $\frac{7}{2}$, f) $\frac{13}{6}$, g) $\frac{\pi}{2}$, h) $\frac{16}{3}$, i) $ln\,2$

2) a) $-\frac{1}{44}$, b) $-\frac{1}{3}$, c) 4, d) 0, e) $-\frac{3}{5}$, f) 0, g) $\frac{8}{3}$, h) $-\frac{1}{6}$, i) -4π

3) a) 12π, b) $\frac{27}{4}$ c) $-\frac{1}{44}$ d) $-\frac{1}{12}$

e) i) -4π, no es posible aplicar el teorema porque la función no es continua en (0:0) que pertenece al recinto dado.

ii) 0, en este caso se puede aplicar el teorema.

4) a) 5, b) $\frac{4}{3}$, c) 8, d) 20, e) –5, f) $1-\pi$, g) 4, h) $3e^{15}$

5) $A = 8,\ B = \frac{4}{3}$

6) a) $\frac{19}{4}$, b) $\frac{27}{10}$, c) i) $\frac{13}{3}$, ii) 5, d) $2\pi^2$

7) a) 13, b) 2, c) $-\frac{23}{2}$, d) 1

8) $k = 4$, $\int_{(0;2;1)}^{(2;2;0)} \vec{f}(\vec{x}).d\vec{x} = 8$

9) a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{4}{15}$, c) $\frac{9}{2}$, d) 4

10) $-\frac{45}{4}$

11) $\frac{9\sqrt{3}-4\pi+3}{6}$

12) $k = 1$

13) $\int_C \vec{f}.d\vec{x} = \frac{3.208}{3}$

14) $T = \frac{4}{3}$

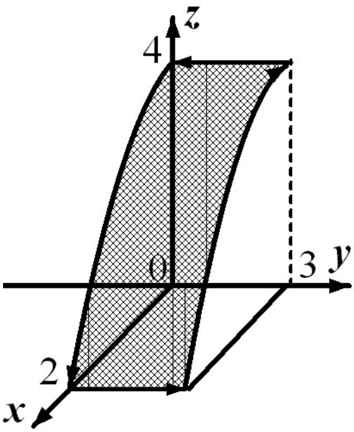
15) $T = \frac{83}{4}$

16) $\int_C \vec{f}.d\vec{x} = -\frac{4}{3}$

17) $\int_C \vec{f}.d\vec{x} = \frac{27}{2}$

Capítulo 12

Integrales de superficie



Integral de superficie de campos escalares.

La orientación de las superficies.

Integral de superficie de campos vectoriales.

Integral de superficie de un sólido.

Teorema de la divergencia.

Teorema del rotor.

La masa de una superficie.

El flujo de un campo vectorial.

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Presentada una superficie en cualquiera de sus tres formas (explícita, implícita o paramétrica) vamos a definir una integral sobre ella.

Así como extendimos el concepto de integral simple sobre un intervalo al de integral curvilínea, ahora extendemos el concepto de integral doble sobre una superficie plana al de integral sobre superficie curva.

Ya vimos que para resolver una integral curvilínea la trasformamos en una integral simple, para evaluar una integral de superficie la vamos a transformar en una integral doble.

Vamos a analizar dos casos:

A) el integrando es un campo escalar de tres variables definido sobre una superficie cualquiera. En estos casos no interesa la orientación de la superficie.

a) *S* está definida por una función del tipo $z = f(x; y)$.

b) *S* está definida por una expresión del tipo $F(x; y; z) = 0$.

c) *S* está definida por una función vectorial $\vec{f}(u; v) = [x(u; v); y(u; v); z(u; v)]$.

B) el integrando es un campo vectorial. En este caso interesa la orientación de la superficie.

A) El integrando es un campo escalar

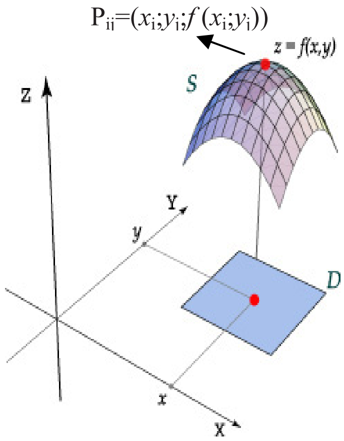
Plantemos el caso en que tenemos un campo escalar continuo de tres variables $G: A \subseteq \Re^3 \rightarrow \Re \,/\, u = G(x; y; z)$ definido sobre una superficie *S,* cuya proyección sobre el plano (*xy*) es un recinto cerrado *D* como indica la figura.

a) La superficie *S* corresponde a la ecuación $z = f(x; y)$, continua con derivadas parciales continuas en *D*.

Subdividimos el recinto *D* en subrecintos rectangulares de áreas ΔA_{ij}, tal cual se hizo cuando se definió la integral doble. Sea $(x_i; y_j)$ un punto cualquiera perteneciente al rectángulo de área ΔA_{ij}. Consideramos su imagen a través de *f*, $f(x_i; y_j)$.

Queda así determinado para cada subrecinto de área ΔA_{ij}, sobre la superficie *S*, un punto $P_{ij} = \left[x_i ; y_j ; f\left(x_i ; y_j\right)\right]$.

A cada $P_{ij} = \left[x_i ; y_j ; f\left(x_i ; y_j\right)\right]$ le corresponde una imagen a través de *G*, que denominamos $G\left(P_{ij}\right) = G\left[x_i ; y_j ; f\left(x_i ; y_j\right)\right]$. Llamamos ΔS_{ij} al área de la superficie *S* que corresponde al rectángulo ΔA_{ij}.



Multiplicamos $G\left[x_i ; y_j ; z\left(x_i ; y_j\right)\right] . \Delta S_{ij}$ y efectuamos la suma.

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} G\left[x_i ; y_j ; f\left(x_i ; y_j\right)\right] \Delta S_{ij}$. Ahora consideramos el

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} G\left[x_i ; y_j ; f\left(x_i ; y_j\right)\right] \Delta S_{ij} = \iint_S G(x; y; z).dS$$

Este límite doble es una integral doble y se denomina *integral de superficie* del campo escalar *G* sobre la superficie *S*.

Cálculo de la integral de superficie

Ya hemos visto (ver capítulo 10) que si $z = f(x; y)$,

$dS = \sqrt{1 + \left(z_x'\right)^2 + \left(z_y'\right)^2}.dx.dy$, por lo tanto la integral de superficie es:

$$\iint_S G(x; y; z).dS = \iint_D G[x; y; f(x; y)].\sqrt{1 + \left(z_x'\right)^2 + \left(z_y'\right)^2}.dx.dy \quad ❶$$

D es la proyección de la superficie sobre el plano (*xy*).

De esta manera transformamos una integral de superficie en un integral doble.

Ejemplos

1) $\iint_S y.dS$, donde S es la superficie $z = \sqrt{8}x + y^2$, con $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 2$.

$$\iint_S y.dS = \iint_D y.\sqrt{1+8+(2y)^2}\,dx.dy = \int_0^1\int_0^2 y.\sqrt{9+4y^2}\,dy.dx$$

Resolvemos la primitiva por sustitución.

$$t = 9 + 4y^2 \quad \therefore \quad dt = 8ydy \Rightarrow \quad dy = \frac{dt}{8y}$$

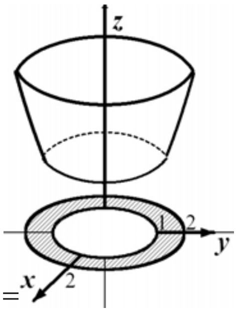
$$\int y.\sqrt{9+4y^2}\,dy = \int y.\sqrt{t}.\frac{dt}{8y} = \frac{1}{12}t^{3/2} = \frac{1}{12}\left(9+4y^2\right)^{3/2}$$

$$\int_0^1\int_0^2 y.\sqrt{9+4y^2}\,dy.dx = \frac{1}{12}\int_0^1 \left(9+4y^2\right)^{3/2}\Big]_0^2 .dx = \frac{1}{12}\int_0^1 125.dx$$

$$= \frac{1}{12}125x\Big]_0^1 = \frac{125}{12}$$

2) $\iint_S x^2 z^2.dS$, donde S es la porción del cono

$z = \sqrt{x^2+y^2}$, entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.



$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\iint_S x^2 z^2.dS = \iint_D x^2.\left(x^2+y^2\right).\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,.dx.dy =$$

$$= \sqrt{2}\iint_D x^2.\left(x^2+y^2\right).dx.dy$$

Resolvemos la integral utilizando integrales coordenadas polares

$$4\sqrt{2}\int_1^2\int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2 \alpha . r^2 . r . d\alpha . dr = 4\sqrt{2}\int_1^2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} . r^5 . d\alpha . dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_1^2 \left(\alpha + \frac{sen(2\alpha)}{2}\right)_0^{\pi/2} r^5 . dr = 2\sqrt{2}\int_1^2 \frac{\pi}{2} . r^5 . dr = \sqrt{2}\pi . \frac{r^6}{6}\Bigg]_1^2 = \frac{21\sqrt{2}\pi}{2}$$

b) S está definida por una expresión del tipo $F(x;y;z)=0$ que define a $z=f(x;y)$.

Ya vimos en el capítulo 10 que en este caso:

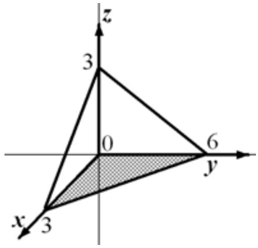
$$dS = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} . dx . dy$$

Por lo tanto

$$\iint_S G(x;y;z) . dS = \iint_D G[x;y;f(x;y)] . \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} dx . dy$$

Ejemplo

$\iint_S (y^2 + 2yz) . dS$, donde S es la parte del plano $2x + y + 2z = 6$, en el 1º octante.



$$\iint_S (y^2 + 2yz) . dS = \iint_D \left[y^2 + 2y . \left(3 - x - \frac{y}{2}\right)\right] . \frac{\sqrt{4+1+4}}{2} . dx . dy$$

$$= \frac{3}{2}\iint_D (y^2 + 6y - 2xy - y^2) . dx . dy = \frac{3}{2}\iint_D (6y - 2xy) . dx . dy =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^3\int_0^{-2x+6} (6y - 2xy) . dy . dx = \frac{3}{2}\int_0^3 (3y^2 - xy^2)\Big]_0^{-2x+6} . dx =$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^3 (-2x+6)^2.(3-x).dx=\frac{3}{2}\int_0^3 \left(-4x^3+36x^2-108x+108\right).dx=$$

$$=\frac{3}{2}\left(-x^4+12x^3-54x^2+108x\right)\Big]_0^3=\frac{3}{2}(-81+324-486+324)=\frac{243}{2}$$

c) S está definida por una función vectorial $\vec{f}(u;v)=[x(u;v);\,y(u;v);\,z(u;v)]$.

Vimos en el capítulo 10 que $dS=\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|.du.dv$, por lo tanto

$$\iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G[x(u;v);\,y(u;v);\,z(u;v)].\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|.du.dv$$

Ejemplo

$\iint_S x^2.dS$, donde S es la esfera de radio 1 definida por

$\vec{f}(u;v)=(sen\ u.cos\ v;\ sen\ u.sen\ v;\ cos\ u)$, con $0\le u\le\pi$, $0\le v\le 2\pi$

$$\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ cos\,u.cos\,v & cos\,u.sen\,v & -sen\,u\\ -sen\,u.sen\,v & sen\,u.cos\,v & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\left(sen^2u.cos\,v;\,sen^2u.sen\ v;\,sen\ u.cos\,u.cos^2 v+sen\ u.cos\,u.sen^2v\right)=$$
$$=\left(sen^2u.cos\,v;\,sen^2u.sen\,v;\,sen\,u.cos\,u\right)$$

$$\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|=\sqrt{sen^4u.cos^2 v+sen^4u.sen^2 v+sen^2u.cos^2 u}=$$
$$=\sqrt{sen^4u+sen^2u.cos^2 u}=\sqrt{sen^2u}=sen\,u$$

$$\iint_S x^2.dS = \iint_D \left(sen^2 u.cos^2 v\right).sen\,u.du.dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(sen^3 u.cos^2 v\right).du.dv$$

$$= \int_0^{2\pi} cos^2 v \int_0^{\pi}\left[sen\,u.\left(1-cos^2 u\right)\right].du.dv = \int_0^{2\pi} cos^2 v.\int_0^{\pi}\left(sen\,u - sen\,u.cos^2 u\right).du.dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} cos^2 v.\left(-cos\,u + \frac{cos^3 u}{3}\right)_0^{\pi}.dv = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} cos^2 v.dv = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[1+cos(2v)\right].dv =$$

$$= \frac{2}{3}\left(v + \frac{sen(2v)}{2}\right)_0^{2\pi} = \frac{2}{3}.2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

Caso particular

Si $G(x;y;z)=1$, entonces $\iint_S 1.dS$ mide el área superficial.

Casos en que se proyecta sobre otros planos

a) Si la superficie *S* está definida por una función del tipo $y = f(x;z)$, proyectamos la superficie sobre el plano (*x*;*z*). En ese caso:

$$\iint_S G(x;y;z).dS = \iint_D G[x; f(x;z); z].\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}\,.dx.dz$$

$$\text{o}\quad \iint_S G(x;y;z).dS = \iint_D G[x; f(x;z); z].\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_y\right|}.dx.dz$$

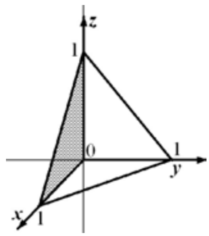
Ejemplo

$\iint_S x.dS$, donde *S* es la porción del plano $x+y+z=1$ en el primer octante.

Podemos pensar a $y = f(x;z)$, $y = 1-x-z$

$$\iint_S x.dS = \iint_D x.\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dz.dx = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x.dz.dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 xz\Big]_0^{1-x}.dx = \sqrt{3}\int_0^1 x.(1-x).dx = \sqrt{3}.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



b) Si la superficie S está definida por una función del tipo $x = f(y;z)$, proyectamos la superficie sobre el plano (y;z). En ese caso:

$$\iint_S G(x;y;z).dS = \iint_D G[f(y;z);y;z].\sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2}\,dy.dz$$

$$\text{o} \quad \iint_S G(x;y;z).dS = \iint_D G[f(y;z);y;z]..\frac{\sqrt{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}}{|F_x'|}dy.dz$$

Ejemplo

$\iint_S (x+2y-z).dS$, donde S es la porción del plano $x+y+z=2$ en el primer octante.

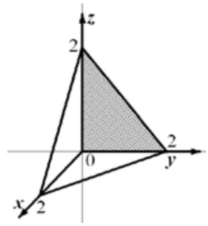
Podemos pensar a $x = f(y;z)$, $x = 2-y-z$

$$\iint_S (x+2y-z).dS = \iint_D (2-y-z+2y-z).\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dz.dy =$$

$$\sqrt{3}\int_0^2\int_0^{2-y}(2+y-2z).dz.dy = \sqrt{3}\int_0^2 (2z+yz-z^2)\Big]_0^{2-y}.dy =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^2 \left(4-2y+2y-y^2-(2-y)^2\right).dy = \sqrt{3}.\int_0^2 (4y-2y^2).dy =$$

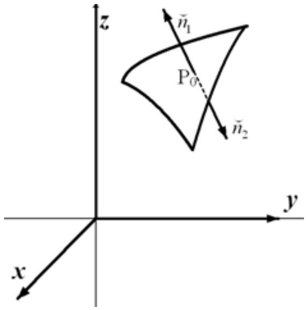
$$= \sqrt{3}.\left(2y^2-\frac{2y^3}{3}\right) = \sqrt{3}.\left(2y^2-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg]_0^2 = \sqrt{3}.\left(8-\frac{16}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



B) El integrando es un campo vectorial

Ahora tenemos un campo vectorial continuo $\vec{G}(x;y;z)$. En este caso importa la orientación de la superficie, por lo tanto primero analizamos este tema.

Superficies orientadas



Una superficie orientada *S* es una superficie de dos lados, uno de ellos *exterior* o *positivo* y el otro *interior* o *negativo*. Tratamos el caso de superficies que son suaves, es decir que admiten plano tangente en todos los puntos, excepto en cualquier punto frontera.

Un versor normal $\breve{n}$ admite en cada punto dos sentidos posibles, que denominamos $\breve{n}_1$ y $\breve{n}_2$.

Cada uno de estos versores se puede asociar con un lado de la superficie *S*.

La selección de uno de los dos versores define la orientación de la superficie.

Si consideramos el versor que apunta hacia afuera desde el lado positivo $(\breve{n}_1)$, la superficie está orientada positivamente. Si consideramos el otro versor $(\breve{n}_2)$, la superficie está orientada negativamente.

Para determinar la orientación de la superficie debemos ver el *signo de la componente* $\breve{k}$. Si el signo es positivo, el versor normal es *superior* y si el signo es negativo, el versor normal es *inferior*.

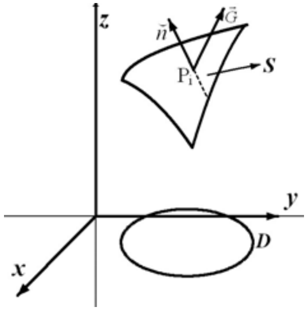
Si la superficie está definida por una función vectorial, como vimos en el capítulo 6, $\breve{n} = \pm \dfrac{\vec{f}'_u \wedge \vec{f}'_v}{\left|\vec{f}'_u \wedge \vec{f}'_v\right|}$. Según el signo que adoptemos, la orientación es positiva o negativa.

Si la superficie está expresada en forma implícita, $z = f(x;y)$, vimos en el capítulo 10 que $\vec{f}'_u \wedge \vec{f}'_v = \left(-z'_x; -z'_y; 1\right)$ y por lo tanto $\breve{n} = \pm \dfrac{\left(-z'_x; -z'_y; 1\right)}{\sqrt{\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1}}$. ❶

Si la superficie esté definida en forma explícita, $F(x;y;z)=0$, la expresión del versor $\breve{n}$ se obtiene reemplazando en ❶ las derivadas parciales.

$$\breve{n}=\frac{\left(\frac{F'_x}{F'_z};\frac{F'_y}{F'_z};1\right)}{\sqrt{\left(\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2+\left(\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2+1}}=\frac{\frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{F'_z}}{\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|}}=\pm\frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}$$

Integral de una superficie abierta orientada



Consideramos un campo vectorial $\vec{G}(x;y;z)=$ $=[P(x;y;z);Q(x;y;z);R(x;y;z)]$ (al cual para simplificar la notación nos referiremos como $\vec{G}$), definido en un conjunto abierto que incluye una superficie S en el espacio definida a su vez sobre un conjunto D. Dividimos la superficie S en subrecintos, cada una de área ΔS_i. De cada subrecinto consideramos un punto P_i interior al mismo, en el cual suponemos que la superficie está orientada en *sentido positivo*, y en éste consideramos dos vectores, el vector $\vec{G}(P_i)$ y el versor normal $\breve{n}(P_i)$.

Efectuamos el producto escalar entre ambos vectores y lo multiplicamos por el área ΔS_i. Efectuamos la suma de esos productos.

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{G}(P_i)\bullet\breve{n}(P_i).\Delta S_i$$

Definimos la integral de superficie como el límite de esa suma, cuando el diámetro de todas las áreas tienden a 0.

$$\lim_{diam.\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{G}(P_i)\bullet\breve{n}(P_i).\Delta S_i=\iint_S\vec{G}\bullet\breve{n}.dS \quad ❷$$

Nota: estamos considerando en esta definición el sentido positivo del vector normal. Si consideramos el sentido negativo, obtenemos una integral con signo opuesto.

Cálculo de la integral de superficie

Para obtener las fórmulas de la integral de superficie, debemos reemplazar en ❷ las respectivas de expresiones de $\breve{n}$ y dS. Estas expresiones dependen de como esté definida la superficie S.

a) *la superficie está definida en forma paramétrica,*

$\vec{f}(u;v)=[x(u;v); y(u;v); z(u;v)]$, donde $\vec{f}$ es un campo vectorial continuo.

$$\breve{n}=\frac{\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'}{\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|},\quad dS=\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|.du.dv$$

$$\iint_S \vec{G}\bullet\breve{n}.dS=\iint_D \vec{G}[x(u;v); y(u;v); z(u;v)]\bullet\frac{\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'}{\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|}.\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|.du.dv=$$

$$=\iint_D \left[\vec{G}[x(uv); y(uv); z(uv)]\bullet\left(\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right)\right]du.dv$$

Ejemplo

Calcular $\iint_S \vec{G}\bullet\breve{n}.dS$ si $\vec{G}(x;y;z)=(z;y;x)$ y S es la esfera de radio 2.

El recinto D es el círculo de radio 2 definido por:

$\vec{f}(u;v)=(2sen\,u.cos\,v;\ 2sen\,u.sen\,v;\ 2cos\,u)$, con $0\le u\le\pi,\ 0\le v\le 2\pi$

$$\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 2cos\,u.cos\,v & 2cos\,u.sen\,v & -2sen\,u\\ -2sen\,u.sen\,v & 2sen\,u.cos\,v & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\left(4sen^2u.cos\,v;4sen^2u.sen\,v;4sen\,u.cos\,u.cos^2v+4sen\,u.cos\,u.sen^2v\right)=$$
$$=\left(4sen^2u.cos\,v;4sen^2u.sen\,v;4sen\,u.cos\,u\right)$$

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS =$$

$$= \iint_D (\cos u;\ sen\, u.sen\, v;\ sen\, u.\cos v) \bullet \left(4sen^2 u.\cos v; 4sen^2 u.sen\, v; 4sen\, u.\cos u\right).du.dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(8sen^2 u.\cos v.\cos u + 4sen^3 u.sen^2 v\right).du.dv =$$

$$= 4.\left[\int_0^{2\pi} \left[\cos v.\frac{2sen^3 u}{3}\right]_0^{\pi} + sen^2 v.\left[-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^{\pi}\right].dv =$$

$$= 4.\int_0^{2\pi} sen^2 v.\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right).dv = \frac{16}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2v)}{2}.dv = \frac{8}{3}.\left(v+\frac{sen(2v)}{2}\right)_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}$$

b) *la superficie está definida en forma explícita:* $z = f(x;y)$

$$\breve{n} = \frac{\left(-z_x';-z_y';1\right)}{\sqrt{\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2+1}},\quad dS = \sqrt{\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2+1}.dx.dy \quad ❸$$

$$\iint_S \vec{G}\bullet\breve{n}dS = \iint_D \vec{G}\left[x;y;f(x;y)\right]\bullet\frac{\left(-z_x';-z_y';1\right)}{\sqrt{\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2+1}}.\sqrt{\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2+1}.dx.dy =$$

$$= \iint_D \vec{G}\left[x;y;f(x;y)\right]\bullet\left(-z_x';-z_y';1\right).dx.dy$$

Ejemplo

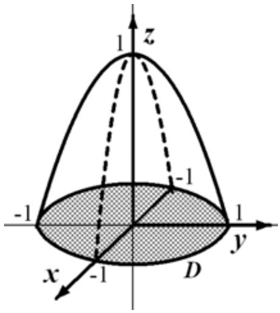
Calcular $\iint_S \vec{G}\bullet\breve{n}.dS$ si $\vec{G}(x;y;z)=(y;x;z)$ y S es la superficie limitada por el paraboloide $z=1-x^2-y^2$ y el plano $z=0$.

El recinto D es la proyección del paraboloide sobre el plano (xy), o sea el círculo de radio 1.

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left(y;x;1-x^2-y^2 \right) \bullet \left(2x;2y;1 \right).dx.dy =$$

$$= \iint_D \left(2xy+2xy+1-x^2-y^2 \right).dx.dy =$$

$$= \iint_D \left(4xy+1-x^2-y^2 \right).dx.dy$$



Lo resolvemos aplicando coordenadas polares.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r.cos\,\alpha.r.sen\alpha+1-r^2.cos^2\,\alpha-r^2.sen^2\alpha \right).r.dr.d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r^3.cos\,\alpha.sen\alpha+r-r^3 \right).dr.d\alpha = \int_0^{2\pi} r^4.cos\,\alpha.sen\alpha+\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big]_0^1 .d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(cos\,\alpha.sen\alpha+\frac{1}{4} \right).d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(sen(2\alpha)+\frac{1}{2} \right).d\alpha = -\frac{1}{2}\frac{cos(2\alpha)}{2}+\frac{\alpha}{4}\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

c) *la superficie está definida en forma implícita:* $F(x;y;z)=0$

$$\breve{n} = \frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}} \;,\; dS = \frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|}.dx.dy$$

Por lo tanto $\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS =$

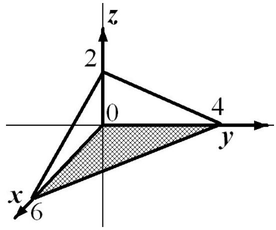
$$= \iint_D \vec{G}[x;y;f(x;y)] \bullet \frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}} . \frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|}.dx.dy =$$

$$= \iint_D \vec{G}[x;y;f(x;y)] \bullet \frac{(F'_x;F'_y;F'_z)}{|F'_z|}.dx.dy$$

Ejemplo

Calcular $\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS$ si $\vec{G}(x;y;z) = (18z;-12;3y)$ y

S es la parte del plano 2*x* + 3*y* + 6*z* =12 en el primer octante.



El recinto *D* es la proyección del plano sobre el plano (*xy*), es el triángulo rayado en la figura.

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D [3(12-2x-3y);-12;3y] \bullet \frac{(2;3;6)}{6}.dx.dy =$$

$$= \iint_D [(36-6x-9y);-12;3y] \bullet \left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right).dx.dy =$$

$$= \iint_D (12-2x-3y-6+3y).dx.dy = \iint_D (6-2x).dx.dy =$$

$$= \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} (6-2x).dy.dx = \int_0^6 (6y-2xy)\Big]_0^{4-\frac{2}{3}x}.dy = \int_0^6 \left(24-4x-8x+\frac{4}{3}x^2\right).dx =$$

$$= \int_0^6 \left(24-12x+\frac{4}{3}x^2\right).dx = 24x-6x^2+\frac{4}{9}x^3\Big]_0^6 = 144-216+96 = 24$$

Casos en que se proyecta sobre otros planos

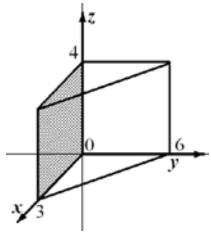
a) Si la superficie se puede expresar como $y = f(x;z)$, proyectamos sobre el plano (*x*;*z*), entonces:

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \vec{G}[x;f(x;z);z] \bullet (-y'_x;1;-y'_z).dx.dz$$

$$\text{o} \quad \iint_S \vec{G}(x;y;z).dS = \iint_D \vec{G}[x;f(x;z);z] \bullet \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_y|} dx.dz$$

Ejemplo

Calcular $\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS$, si $\vec{G} = (y;2x;-z)$ y S: $2x + y = 6$.



Planteamos a $y = f(x;z)$, $y = 6-2x$ y proyectamos sobre el plano (x;z).

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (6-2x;2x;-z) \bullet (2;1;0).dx.dz =$$

$$= \int_0^3 \int_0^4 (12-2x).dz.dx = \int_0^3 12z - 2xz\Big]_0^4 .dz = \int_0^3 (48-8x).dx = 48x - 4x^2\Big]_0^4 = 108$$

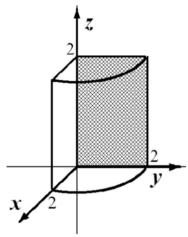
b) Si la superficie se puede expresar como $x = f(y;z)$, proyectamos sobre el plano (y;z), entonces:

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \vec{G}[f(y;z);y;z] \bullet (1;-x'_y;-x'_z).dy.dz$$

$$\text{o} \quad \iint_S \vec{G}(x;y;z).dS = \iint_D \vec{G}[f(y;z);y;z] \bullet \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_x|} dy.dz$$

Ejemplo

Calcular $\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS$, si $\vec{G} = (x^2;xy;xz)$ y S: $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 2$, en el 1º octante.



Planteamos a $x = f(y;z)$, $x = \sqrt{4-y^2}$ y proyectamos sobre el plano (y;z).

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left(4-y^2; \sqrt{4-y^2}.y; \sqrt{4-y^2}.z\right) \bullet \left(1; \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}; 0\right).dy.dz =$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \left(4-y^2+y^2\right).dz.dy = \int_0^2 4z\Big]_0^2.dy = \int_0^2 8.dy = 8y\Big]_0^2 = 16$$

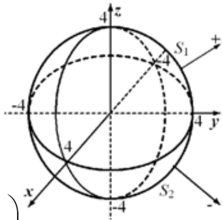
Integral de superficie de un sólido o superficie cerrada

Si la superficie encierra un sólido, por ejemplo el caso de una esfera, para calcular la integral debemos calcular la integral respecto de cada cara y luego sumarlas. En este caso se conviene en considerar la orientación dada por el versor normal hacia afuera desde S (*versor normal saliente unitario*), a no ser que se indique lo contrario y se considere el versor normal hacia adentro (*versor normal entrante unitario*). En cada caso el signo de $\breve{n}$ corresponde al signo de la componente k.

Ejemplo

Si $\vec{G}(x; y; z) = (0; 0; 5z)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Tenemos que considerar dos superficies, a) la parte de la esfera que está por sobre el plano (xy), para la cual $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ y b) la parte de la esfera que está por debajo del plano (xy), para la cual $z = -\sqrt{16-x^2-y^2}$.



a) Consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS =$$

$$= \iint_D \left(0; 0; 5\sqrt{16-x^2-y^2}\right) \bullet \left(\frac{2x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}; 1\right).dx.dy =$$

$$= \iint_D 5\sqrt{16-x^2-y^2}.dx.dy$$

D es la proyección de la esfera sobre el plano (xy), es decir el círculo de radio 4. Resolvemos la integral en coordenadas polares.

$$5.\int_0^4\int_0^{2\pi}\sqrt{16-r^2}\,r.d\alpha.dr = 5.\int_0^4 \sqrt{16-r^2}\,r.\alpha\Big]_0^{2\pi}.dr = 10\pi.\int_0^4\sqrt{16-r^2}\,r.dr =$$

$$=10\pi.\left[-\frac{1}{3}\left(16-r^2\right)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{10\pi}{3}.64 = \frac{640\pi}{3}$$

b) Consideramos el sentido negativo de $\breve{n}$.

$$\iint_S \vec{G}\bullet\breve{n}.dS = \iint_D\left(0;0;-5\sqrt{16-x^2-y^2}\right)\bullet\left(\frac{-2x}{\sqrt{16-x^2-y^2}};\frac{-2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}};-1\right).dx.dy =$$

$$= \iint_D 5\sqrt{16-x^2-y^2}\,.dx.dy = 5\int_0^4\int_0^{2\pi}\sqrt{16-r^2}\,r.d\alpha.dr = 5\int_0^4\int_0^{2\pi}\sqrt{16-r^2}\,r.d\alpha.dr$$

$$=5.\int_0^4\sqrt{16-r^2}\,r.\alpha\Big]_0^{2\pi} dr = 10\pi\int_0^4\sqrt{16-r^2}\,r.dr = 10\pi.\left[-\frac{1}{3}\left(16-r^2\right)^{3/2}\right]_0^4 =$$

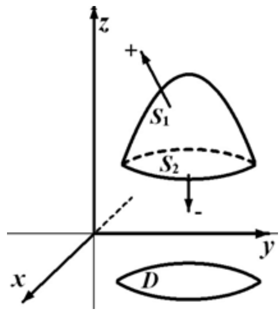
$$=\frac{10\pi}{3}.64 = \frac{640\pi}{3}$$

La integral es igual a la suma de las integrales, es decir:

$$\frac{640\pi}{3}+\frac{640\pi}{3}=\frac{1280\pi}{3}$$

Teorema de la divergencia de Gauss - Ostrogradski

Así como el Teorema de Gauss-Green permite, bajo ciertas condiciones, transformar una integral curvilínea en una integral doble, este teorema permite, también bajo ciertas condiciones, transformar una integral de superficie cerrada (un sólido) en una integral triple, que muchas veces es más fácil de resolver.



Si V es un sólido simple en $\Re^3$ *proyectable sobre los planos coordenados y* $\vec{G}$ *un campo vectorial derivable con continuidad definido en V, entonces la integral de superficie del campo vectorial a través de la superficie cerrada S orientada con versor normal dirigido hacia el exterior, que es la frontera de V, es igual a la integral triple sobre V de la divergencia de* $\vec{G}$.

$$\oiint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iiint_V div\,\vec{G}.dx.dy.dz$$

Ejemplos

1) Verificar el teorema si $\vec{G}(x;y;z) = (0;0;5z)$ y S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. La integral de superficie ya la calculamos en la página 384 y vimos que es igual a $\dfrac{1280\pi}{3}$.

Calculamos ahora la divergencia y su integral triple

$$div\,\vec{G} = 5\,, \quad \iiint_V 5.dx.dy.dz = 5\iiint_V dV = 5.\frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{1280\pi}{3}$$

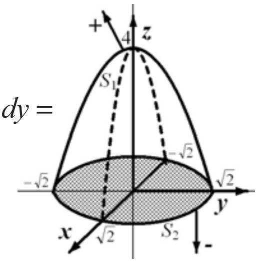
$\iiint_V dV$ es el volumen de una esfera de radio 4. Vemos que se verifica el teorema.

2) Verificar el teorema si $\vec{G}(x;y;z) = (x;y;2z)$ y S es la superficie cerrada limitada por el paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ que se encuentra por sobre el plano (xy).

a) por integral de superficie

Debemos calcular dos integrales de superficie, una referida al paraboloide (S_1) y la otra a la base (S_2).

i) a través de S_1, consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.



$$\iint_{S_1} \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left[x;y;2.\left(4-2x^2-2y^2\right)\right] \bullet (4x;4y;1).dx.dy =$$

$$= \iint_D \left(4x^2+4y^2+8-4x^2-4y^2\right).dx.dy = \iint_D 8.dx.dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 8r.d\alpha.dr = \int_0^{\sqrt{2}} 8r\alpha\Big]_0^{2\pi}.dr = 16\pi \int_0^{\sqrt{2}} r.dr = 8\pi r^2\Big]_0^{\sqrt{2}} = 16\pi$$

ii) a través de S_2, $z = 0$. Consideramos el sentido negativo de $\breve{n}$.

$$\iint_{S_2} \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (x;y;0) \bullet (0;0;-1).dx.dy = \iint_D 0.dx.dy = 0$$

$$\oiint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_{S_1} \vec{G} \bullet \breve{n}.dS + \iint_{S_2} \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = 16\pi + 0 = 16\pi$$

b) por integral triple

Calculamos la divergencia de $\vec{G}$. $\quad div\,\vec{G} = 1 + 1 + 2 = 4$. Resolvemos la integral triple por coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_V 4.dx.dy.dz = 4.\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{4-2r^2} r.dz\right].d\alpha.dr = 4.\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} rz\Big]_0^{4-2r^2}.d\alpha.dr =$$

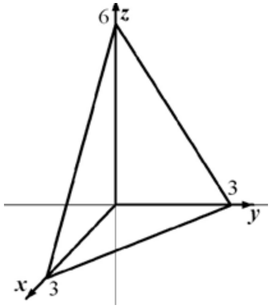
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(16r-8r^3\right).d\alpha.dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left(16r-8r^3\right).\alpha\Big]_0^{2\pi} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(16r-8r^3\right).2\pi.dr =$$

$$= 2\pi.\left(8r^2-2r^4\right)\Big]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.(16-8) = 16\pi$$

Vemos una vez más que el teorema de verifica. En este caso es más sencillo calcular la integral triple que las dos integrales de superficie.

Aplicación el teorema

1) Si V es la región sólida limitada por el plano $2x + 2y + z = 6$ y los planos coordenados, tal cual se ve en la figura, y $\vec{G} = \left(x;\, y^2;\, z\right)$, calcular $\oiint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS$.



Calculamos la integral triple.

Primero calculamos la $div\,\vec{G} = 1 + 2y + 1 = 2 + 2y$.

$$\oiint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iiint_V (2+2y).dx.dy.dz = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-2y} (2+2y).dz.dy.dx =$$

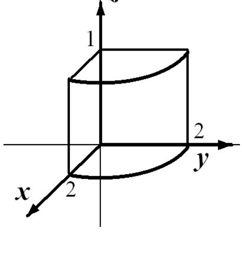
$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left[(2+2y)z\right]_0^{6-2x-2y} .dy.dx = \int_0^3 \int_0^{3-x} \left[(2+2y).(6-2x-2y)\right].dy.dx =$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2\right).dy.dx = \int_0^3 \left. 12y - 4xy + 4y^2 - 2xy^2 - \frac{4y^3}{3} \right]_0^{3-x} .dx =$$

$$= \int_0^3 \left(36 - 30x + 8x^2 - \frac{2x^3}{3}\right).dx = 36x - 15x^2 + \frac{8x^3}{3} - \left.\frac{x^4}{6}\right]_0^3 = \frac{63}{2}$$

Vemos que el cálculo de esta integral es más sencillo que haber calculado la integral de superficie, lo que hubiera implicado calcular la integral a través de cada una da las 4 caras del sólido, es decir 4 integrales de superficie.

2) V es la región sólida limitada por la superficie $x^2 + y^2 = 4$, y los planos coordenados, con $0 \le z \le 1$, y $\vec{G} = \left(x^2;\, xy;\, xz\right)$, calcular $\oiint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS$.



Calculamos la integral triple.

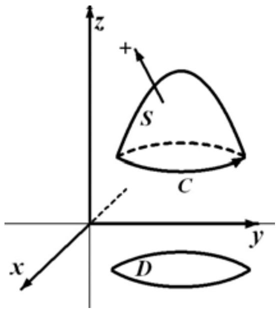
$$\oiint\limits_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iiint\limits_V (2x+x+x).dx.dy.dz =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^1 4x.dz.dy.dx = 4.\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xz\Big]_0^1.dy.dx = 4.\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x.dy.dx =$$

$$= 4.\int_0^2 xy\Big]_0^{\sqrt{4-x^2}}.dx = 4.\int_0^2 x.\sqrt{4-x^2}.dx = -\frac{4}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{4}{3}.4^{3/2} = \frac{32}{3}$$

Teorema del rotor o de Stokes

Sea una superficie orientada S con versor normal positivo, limitada por una curva cerrada simple C, suave a trozos. Si $\vec{G} = (P,Q,R)$ es un campo vectorial continuo con derivadas parciales continuas, en una región abierta que contiene a S y a C, entonces la circulación en sentido positivo sobre la curva C del campo vectorial $\vec{G}$ es igual a la integral de superficie del $rot\,\vec{G}$.



$$\oint\limits_{C^+} \vec{G}(P;Q;R).d\vec{x} = \oint\limits_{C^+} [P(x;y;z).dx + Q(x;y;z).dy + R(x;y;z).dz] =$$

$$= \iint\limits_S rot\,\vec{G} \bullet \breve{n}.dS$$

Es decir que una integral curvilínea, bajo ciertas condiciones, puede expresarse como una integral de superficie y viceversa. Habrá que ver luego cual es más fácil de resolver.

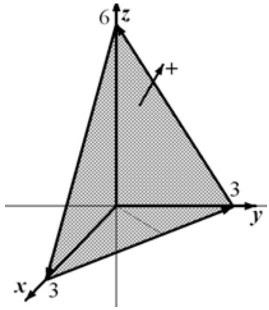
Ejemplos

En todos los casos consideramos el vector normal positivo.

1) Calcular $\oint\limits_{C^+} \vec{G}(P;Q;R).d\vec{x}$. donde C es el triángulo orientado situado en el plano $2x + 2y + z = 6$, tal cual se ve en la figura, y $\vec{G} = \left(-y^2;z;x\right)$.

Calculamos la integral de superficie que es mucho más sencillo que calcular la integral curvilínea que hubiera demandado el cálculo de 3 integrales curvilíneas en el espacio. Para eso primero calculamos el rotor de $\vec{G}$,

$$rot\ \vec{G} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\breve{i} - \breve{j} + 2y\breve{k}$$



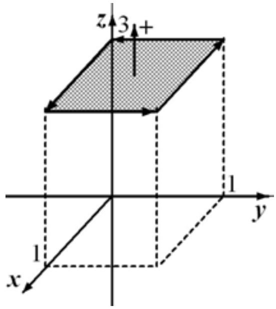
Ahora calculamos la integral de superficie, para eso despejamos *z*, $z = 6 - 2x - 2y$. De esta manera estamos en el caso en que $z = f(x;y)$. Consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.

$$\oint_{C^+} \vec{G}(P;Q;R).d\vec{x} = \iint_S rot\ \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (-1;-1;2y) \bullet (2;2;1).dx.dy =$$

$$= \iint_D (-2-2+2y).dx.dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} (-4+2y).dy.dx = \int_0^3 -4y+y^2 \Big]_0^{3-x} .dx =$$

$$= \int_0^3 (-12+4x+9-6x+x^2).dx = \int_0^3 (-3-2x+x^2).dx = -3x - x^2 + \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^3 = -9$$

2) Calcular $\oint_{C^+} (y;2x;-1).d\vec{x}$ a lo largo del cuadrado de vértices (0;0;3), (0;1;3), (1;1;3) y (1;0;3).



Calculamos el rotor.

$$rot\ \vec{G} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x & -1 \end{vmatrix} = 2\breve{k} - \breve{k} = \breve{k} = (0;0;1)$$

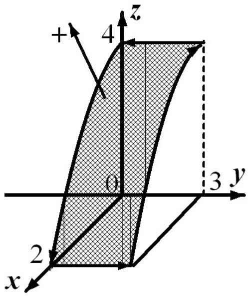
Planteamos la integral de superficie. Consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.

$$\oint_{C^+} (y;2x;-1).d\vec{x} = \iint_S rot\ \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (0;0;1) \bullet (0;0;1).dx.dy = \iint_D dx.dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 dy.dx = \int_0^1 y\Big]_0^1 .dx = \int_0^1 dx = x\Big]_0^1 = 1$$

3) Calcular $\oint_{C^+} (xz;\ xy;\ y^2).d\vec{x}$ si C es la frontera de la superficie que consta de la porción de cilindro $z = 4 - x^2$ en el primer octante cortado por los planos coordenados y el plano $y = 3$.

Calculamos el rotor y luego planteamos la integral de superficie considerando el sentido positivo de $\breve{n}$.



$$rot\ \vec{G} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & y^2 \end{vmatrix} = 2y\breve{i} + x\breve{j} + y\breve{k}$$

$$\oint_{C^+} (xz;\ xy;\ y^2).d\vec{x} = \iint_S rot\ \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (2y;\ x;\ y) \bullet (2x;0;1).dx.dy =$$

$$= \iint_D (4xy + y).dx.dy = \int_0^2 \int_0^3 (4xy + y).dy.dx = \int_0^2 2xy^2 + \frac{y^2}{2}\Big]_0^3 .dx =$$

$$= \int_0^2 \left(18x + \frac{9}{2}\right).dx = 9x^2 + \frac{9x}{2}\Big]_0^2 = 36 + 9 = 45$$

4) Verificar el teorema de Stokes si $\vec{G}(x;\ y;\ z) = (3y;4z;-6x)$ alrededor de la curva borde de la superficie cerrada limitada por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra por sobre el plano (xy).

La curva C es la circunferencia de radio 3, ubicada sobre el plano (xy).

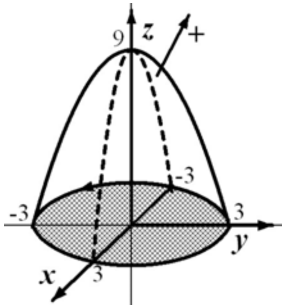
C: $\vec{f}(t) = (3cos\,t;3sen\,t;0) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

a) Calculamos la integral curvilínea

$$\oint_{C^+} \vec{G}(P;Q;R).d\vec{x} = \oint_{C^+} (3y.dx + 4z.dy - 6x.dz) = \int_0^{2\pi} 9sent.(-3sen\,t).dt =$$

$$= -27\int_0^{2\pi} sen^2 t.dt = -\frac{27}{2}\int_0^{2\pi} [1 - cos\,(2t)].dt = -\frac{27}{2}\left(t - \frac{sen(2t)}{2}\right)\Bigg]_0^{2\pi} = -27\pi$$

b) Calculamos la integral de superficie. Consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.



Primero calculamos el rotor

$$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\breve{i} + 6\breve{j} - 3\breve{k}$$

$$\iint_S (-4;6;-3) \bullet (2x;2y;1).dx.dy = \iint_D (-8x + 12y - 3).dx.dy =$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} (-8r.cos\,\alpha + 12r.sen\,\alpha - 3).r.d\alpha\right].dr =$$

$$= \int_0^3 \left(-8r^2.sen\,\alpha - 12r^2.cos\,\alpha - 3r\alpha\right)\Bigg]_0^{2\pi}.dr = \int_0^3 \left(-12r^2 - 6\pi r + 12r^2\right).dr$$

$$= -3\pi r^2\Big]_0^3 = -27\pi$$

Vemos que el teorema se verifica.

APLICACIONES FÍSICAS

La masa de una superficie

Si la medida de la densidad de área en un punto $(x;y;z)$ de una superficie S es $\rho(x;y;z)$, entonces la masa M de S es:

$$M = \iint_S \rho(x;y;z).dS$$

Ejemplo

Determinar la masa de la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante si la densidad de área en un punto $(x;y;z)$ es proporcional a x^2.

Despejamos z, $z = 1 - x - y$

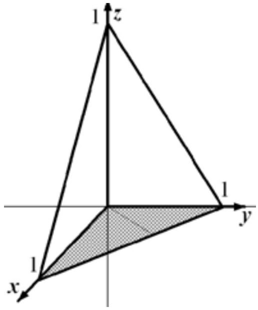
$$M = \iint_S k.x^2.dS = \iint_D k.x^2.\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}.dx.dy = k.\sqrt{3}\iint_D x^2.dx.dy$$

El recinto D es el triángulo sombreado en la figura,

$$k.\sqrt{3}\iint_D x^2.dx.dy = k.\sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x^2.dy.dx =$$

$$= k.\sqrt{3}\int_0^1 \left. x^2 y\right]_0^{1-x}.dx = k.\sqrt{3}\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right).dx =$$

$$= k.\sqrt{3}.\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_0^1 = k.\sqrt{3}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}k$$



Integral de flujo

Si $\vec{G}$ es un campo de velocidades que representa la velocidad de un líquido que fluye por el punto P, entonces la integral de superficie representa el flujo ϕ (cantidad de líquido que pasa por unidad de tiempo) a través de la superficie S.

Consideramos la orientación positiva del versor normal.

$$\phi = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS$$

Como ya hemos visto:

a) si la superficie está definida en forma paramétrica:

$$\phi = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left[\vec{G}[x(uv); y(uv); z(uv)] \bullet \left(\vec{f}_u' \wedge \vec{f}_v'\right)\right] du.dv$$

b) si la superficie está definida en forma explícita:

$$\phi = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \vec{G}[x; y; f(x; y)] \bullet \left(-z_x'; -z_y'; 1\right).dx.dy$$

c) si la superficie está definida en forma implícita:

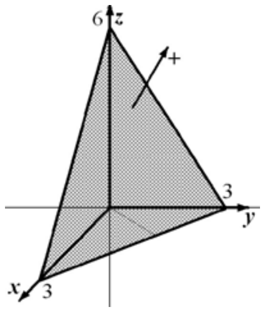
$$\phi = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \vec{G}[x; y; f(x; y)] \bullet \frac{\left(F_x'; F_y'; F_z'\right)}{\left|F_z'\right|}.dx.dy$$

Si la superficie está formada por varias caras S_1, S_2, …, S_n, el flujo se obtiene sumando los flujos ϕ_1, ϕ_2,…, ϕ_n de cada una de las caras.

Ejemplos

1) Calcular el flujo a través de la superficie S: $2x + 2y + z = 6$ del campo vectorial $\vec{G} = \left(xy; -x^2; x + z\right)$, en el primer octante.

Consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.



$$\varphi = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left(xy;-x^2;x+6-2x-2y\right) \bullet (2;2;1).dx.dy =$$

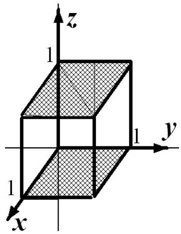
$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(2xy-2x^2-x+6-2y\right).dy.dx = \int_0^3 xy^2-2x^2y-xy+6y-y^2\Big]_0^{3-x}.dx =$$

$$= \int_0^3 \left(3x^3-12x^2+6x+9\right).dx = \frac{3x^4}{4}-4x^3+3x^2+9x\Big]_0^3 = \frac{243}{4}-108+27+27=\frac{27}{4}$$

2) $\vec{G} = (4xz;-y;yz)$, obtener el flujo a través de la cara superior y de la cara inferior del cubo unitario de la figura,

$z = 1$

El recinto D es el cuadrado de lado 1.



$$\phi_1 = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (4x;-y;y) \bullet (0;0;1).dx.dy = \int_0^1 \int_0^1 y.dy.dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big]_0^1.dx = \int_0^1 \frac{1}{2}.dx = \frac{1}{2}x\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$z = 0$

El recinto D es el cuadrado de lado 1.

$$\phi_2 = \iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (0;-y;0) \bullet (0;0;1).dx.dy = \int_0^1 \int_0^1 0.dy.dx = 0$$

El flujo total $\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

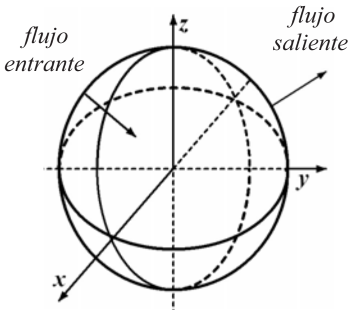
3) $\vec{G} = (y;-x;8)$, obtener el flujo a través de la parte de la esfera que está por sobre el plano (xy) acotada por la circunferencia $x^2+y^2=4$. La esfera tiene por ecuación $x^2+y^2+z^2=9$.

$$\iint_S \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D (y;-x;8) \bullet \left(\frac{2x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{9-x^2-y^2}};1 \right).dx.dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{2xy}{\sqrt{9-x^2-y^2}} - \frac{2yx}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + 8 \right).dx.dy = \iint_D 8.dx.dy =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 8r.d\alpha.dr = 8.\int_0^2 r.\alpha \Big]_0^{2\pi} .dr = 16\pi.\int_0^2 r.dr = 8\pi r^2 \Big]_0^2 = 32\pi$$

Caso de una superficie cerrada

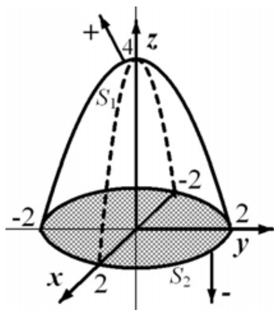


En este caso el flujo se puede considerar como *saliente* (el versor normal apunta hacia afuera) o *entrante* (el versor normal apunta hacia adentro).

El flujo se obtiene sumando los flujos ϕ_1, ϕ_2,…, ϕ_n de cada una de las caras S_1, S_2, …, S_n que delimitan la superficie cerrada.

Ejemplos

1) Calcular el flujo saliente del campo vectorial $\vec{G} = (2z; x; y^2)$ a través de la región sólida limitada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano (xy).



Debemos calcular dos integrales de superficie, una referida al paraboloide (S_1) y la otra a la base (S_2).

i) a través de S_1, consideramos el sentido positivo de $\breve{n}$.

$$\varphi_1 = \iint_{S_1} \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left[2z; x; y^2 \right] \bullet (2x; 2y; 1).dx.dy =$$

$$= \iint_D (4zx + 2xy + y^2).dx.dy = \iint_D (4zx + 2xy).dx.dy + \iint_D y^2.dx.dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left[4x.\left(4-x^2-y^2\right)+2xy \right].dx.dy + \iint_D y^2.dx.dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left[16x-4x^3-4xy^2+2xy \right].dx.dy + \iint_D y^2.dx.dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8x^2-x^4-2x^2y^2+x^2y\right)\Big]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}.dy + \iint_D y^2.dx.dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \Big[8.(4-y)-(4-y)^2-2(4-y)^2y^2+(4-y)^2y-$$

$$= -\left(8.(4-y)-(4-y)^2-2(4-y)^2y^2+(4-y)^2y\right)\Big].dy + \iint_D y^2.dx.dy =$$

$$= 0 + \iint_D y^2.dx.dy = \iint_D y^2.dx.dy$$

ii) a través de S_2, $z = 0$. Consideramos el sentido negativo de $\breve{n}$.

$$\phi_2 = \iint_{S_2} \vec{G} \bullet \breve{n}.dS = \iint_D \left[2z; x; y^2\right] \bullet (0;0;-1).dx.dy = -\iint_D y^2.dx.dy$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \iint_D y^2.dx.dy - \iint_D y^2.dx.dy = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) $\iint\limits_S 6xy.dS$, donde S es la parte del plano $x+y+z=1$, en el 1º octante.

2) $\iint\limits_S z.dS$, donde S es la mitad superior de una esfera de radio 2 cuya parametrización es $\vec{f}(u;v)=$ (2 *sen u.cos v*; 2 *sen u.sen v;* 2 *cos u*), con $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$

3) $\iint\limits_S \left(y^2+2yz\right).dS$, donde S es la parte del plano $2x+y+2z=6$, en el 1º octante.

4) Calcular $\iint\limits_S xyz.dS$, si S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 4$, entre los planos $y = 1$ e $y = 3$.

5) $\iint\limits_S z^2.dS$, donde S es la porción de cono $x^2+y^2=z^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$, y $z = 2$.

6) Calcular el flujo de:

a) $\vec{G}(x;y;z)=(x;y;z)$ si S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ en el primer octante.

b) $\vec{G}(x;y;z)=(-2y;2x;5)$ si S es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que se encuentra por sobre el plano (xy).

c) $\vec{G}(x;y;z)=\left(z;x;-3y^2z\right)$ si S es la parte de la superficie cilíndrica $x^2+y^2=16$ que se encuentra en el primer octante, con z entre 0 y 5.

d) $\vec{G}(x;y;z)=\left(\dfrac{4}{\pi}zx;\dfrac{4}{\pi}zy;0\right)$ si S es la superficie cerrada formada por $x^2+y^2=1$, $z = 10$ y los planos coordenados.

e) $\vec{G}(x;y;z)=(6z;2x+y;-x)$ si S es la parte de la superficie cilíndrica $x^2+y^2=9$ que se encuentra en el primer octante, delimitada por y entre 0 y 8.

7) Calcular el flujo saliente del campo vectorial $\vec{G}(x;y;z)=(x;y;2z)$: a) directamente, b) utilizando el teorema de Gauss, si S es la superficie cerrada limitada por el sólido $V=\{(x;y;z)/\,0\leq z\leq 4-2x^2-2y^2\}$ y el plano (xy).

8) Calcular el flujo saliente del campo vectorial $\vec{G}(x;y;z)=(x^2y;y^2;xz)$ utilizando el teorema de la divergencia, si S es el cubo limitado por los planos $x=1$, $y=1$, $z=1$ y los planos coordenados en el primer octante.

9) Calcular el flujo saliente de $\vec{G}(x;y;z)$ a través del sólido S limitado por el plano $x+z=6$ y el cilindro $x^2+y^2=4$, utilizando el teorema de la divergencia si $\vec{G}(x;y;z)=(x^2+sen\,z;xy+cos\,z;e^y)$.

10) Calcular la circulación en sentido positivo de $\vec{G}(x;y;z)=(z-x;xy;z)$ alrededor de la curva borde de la superficie cerrada limitada por el paraboloide $z=4-x^2-y^2$ y el plano $z=2$, utilizando el teorema de Stokes.

11) Verificar el teorema de Stokes si $\vec{G}(x;y;z)=(-4y;2z;3x)$ alrededor de la curva borde de la superficie cerrada limitada por el paraboloide $z=10-x^2-y^2$ que se encuentra por sobre el plano $z=1$.

12) Calcular la $\oint_{C^+}\vec{G}(\vec{x}).d\vec{x}$ donde C es la curva borde de la superficie cerrada limitada por el cilindro $z^2=1-y^2$, el plano $x+y=1$ y los planos coordenados si $D\vec{G}=\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 1 & 0 & 2z \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$.

13) Dada $\vec{G}(x;y;z)=[3x+g(x;y);y+g(x;y);g(x;y)-4z]$, hallar el flujo a través de la frontera del cuerpo limitado por $x^2+y^2=4$ con $-1\le z\le 1$, si $\nabla g(x;y)=(x^2+y;x-y)$.

14) $\vec{G}(x;y;z)=(6a^3x;6aby;b^2z)$, con a y b reales, la superficie S es la frontera del cuerpo definido por $x^2+y^2\le 4$ con $1\le z\le 4$. Hallar a y b para que el flujo a través de S alcance un extremo relativo y clasificarlo. Suponemos la superficie orientada hacia afuera.

RESPUESTAS

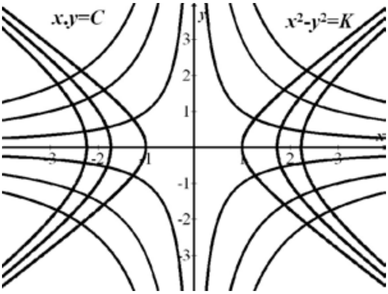
1) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 2) 8π 3) $\dfrac{243}{2}$ 4) 0 5) $\dfrac{15\sqrt{2}\pi}{2}$

6) a) $\phi=18$, b) $\phi=80\pi$ c) $\phi=90$ d) $\phi=100$ e) $\phi=180$

7) $\phi=16\pi$ 8) $\phi=2$ 9) -12π 10) 0 11) 36π 12) $\dfrac{1}{3}$ 13) $\phi=\dfrac{16}{3}$

14) $a=1$, $b=-3$, es un mínimo relativo.

Capítulo 13



Ecuaciones diferenciales de 1° orden

Definiciones y conceptos fundamentales; orden, grado, solución general, solución particular.

Ecuaciones diferenciales de variables separables, lineales, exactas, factor integrante, homogéneas, de Bernoulli, reducibles a homogéneas, Ricatti, Clairaut.

Trayectoria ortogonales.

Líneas de campo en $\mathbb{R}^2$.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Se llama así a una ecuación que vincula a un número finito de variables con las derivadas de una de ellas respecto de las otras, o lo que es equivalente, los diferenciales de las variables.

Ejemplos: $y' - 2xy = 2y$, $\dfrac{dy}{dx} = 3xy$, $\dfrac{\partial z}{dx} = xz$

Ecuación diferencial ordinaria

Una ecuación diferencial es ordinaria si hay una sola variable independiente, por lo tanto la derivada es total, no hay derivadas parciales. Las otras ecuaciones diferenciales reciben el nombre de ecuaciones diferenciales en ***derivadas parciales***.

Orden de una ecuación diferencial

Está dado por el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial.

Ejemplos: $y' - 2xy = 3$ es de 1º orden porque aparece la derivada primera.
$y'' - 4y' = 2y$ es de 2º orden porque aparece la derivada segunda.

Podemos pensar a una ecuación diferencial de orden ***n*** como una ecuación del tipo: $F\left(x; y; y'; \ldots; y^n\right) = 0$ (forma implícita) o $y^n = f\left(x; y; y'; \ldots; y^{n-1}\right)$ (forma explícita).

Grado de una ecuación diferencial

Es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.

Ejemplos: $y'' + y'^2 = 2xy$ es de 2º orden y de 1º grado, porque la derivada de mayor orden es la 2º que tiene exponente 1.
$2xy'^2 + 2y''^3 = 2y$ es de 2º orden y 3º grado.

Solución general de una ecuación diferencial

La solución general de una ecuación diferencial está constituida por todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Hay que tener en cuenta que así como en una ecuación algebraica la solución son números, la solución de una ecuación diferencial son funciones.

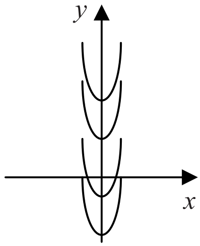
Ejemplo: resolver $y' = x$

Se trata de encontrar todas las funciones cuyas derivadas sean iguales a x.

Para resolverla expresamos la derivada como cociente de diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \Rightarrow \quad dy = x.dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int x.dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} + C$$

Integrando a ambos miembros se obtiene la solución general, constituida en este caso por una familia de parábolas.



Obsérvese que no hay una única función sino que son infinitas que difieren en una constante. Por eso se dice que la solución general de una ecuación diferencial es una ***familia*** de funciones.

Solución particular

Se llama así a la función que además de pertenecer a la solución general cumple con alguna condición adicional, por ejemplo la de pasar por un punto $\mathbf{P_0}$ determinado.

Si en el ejemplo anterior queremos la solución que pasa por $P_0 = (1;1)$, estamos buscando una solución particular. Para obtenerla debemos calcular la constante C:

$y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$ por lo tanto la solución particular es:

$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, que de todas las parábolas que forman parte de la solución general es la que pasa por el punto $P_0 = (1;1)$.

Solución singular

Son soluciones que no se deducen de la solución general. En el proceso de resolución de una ecuación diferencial hay que resolver integrales en las cuales, muchas veces, aparecen denominadores, cuyo valor se considera siempre no nulo.

Ejemplo

Resolver $x.dy = y.dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln|y| = ln|x| + C$$

$$ln|y| = ln|x| + ln\,k \Rightarrow |y| = k.|x| \qquad SG$$

Esta resolución es válida si $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Pero ¿qué ocurre si $x = 0$ o $y = 0$?

Si $x = 0$, $dx = 0$: queda $0.dy = y.0$, $0 = 0$, vemos que $x = 0$ verifica la ecuación y por lo tanto es una solución de la ecuación.

Si $y = 0$, $dy = 0$: queda $x.0 = 0.dx$, $0 = 0$, vemos que $x = 0$ verifica la ecuación y por lo tanto es una solución de la ecuación.

Lo que tenemos que ver es si estas soluciones están incluidas en la solución general $|y| = k.|x|$ o $|x| = C.|y|$.

$y = 0$, se obtiene como solución particular cuando $k = 0$.
$x = 0$, se obtiene como solución particular cuando $C = 0$.

Por lo tanto no son soluciones singulares.

Analizaremos otros ejemplos más adelante.

En este capítulo veremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de 1º grado y de 1º orden.

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar la familia de funciones que la satisface. Esto no siempre es tan sencillo. Los pasos a seguir dependen de la estructura de la misma. Lo que veremos ahora es como se resuelven distintos tipos de ecuaciones diferenciales según la estructura a la que respondan.

Teorema de existencia y unicidad de la solución

Planteamos ahora qué condiciones deben cumplirse para que una ecuación diferencial tenga solución y que ésta sea única.

Dada $y^n = f\left(x; y; y'; ...; y^{n-1}\right)$, si $f, y, y', ..., y^{n-1}$ son continuas en un conjunto A, entonces existe y es única la solución $y = h(x)$ definida en un entorno de x_0, que verifica las condiciones iniciales, $h(x_0) = y_0, \ldots, h^{n-1}(x_0) = y_0^{\ n-1}$.

Pasa el caso particular de una ecuación diferencial de 1º orden del tipo $y' = f(x; y)$, deben verificarse la continuidad de f y de y'.

ECUACIÓN DIFERENCIAL CORRESPONDIENTE A UNA FAMILIA DE FUNCIONES

Dada una familia de funciones definidas por $\varphi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, donde φ es n veces diferenciable respecto de x e y y continua para las constantes C_1, C_2,…, C_n, existe una ecuación diferencial de la cual dicha familia de curvas es la solución general.

Para encontrar dicha familia de funciones debemos eliminar las constantes en el sistema de ecuaciones formado por $\varphi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ y sus n primeras derivadas.

Ejemplos

1) $y = Cx^2$ generamos el sistema $\begin{cases} y = Cx^2 \\ y' = 2Cx \end{cases}$, despejando C en la segunda ecuación y reemplazando en la primera queda: $2y = y'x$, que es la ecuación diferencial que buscamos.

2) $y = C_1 + C_2.e^x + 3x$ generamos el sistema $\begin{cases} y = C_1 + C_2.e^x + 3x \\ y' = C_2.e^x + 3 \\ y'' = C_2.e^x \end{cases}$, si reemplazamos $C_2.e^x$ en la 2º ecuación por y'' tenemos la ecuación diferencial que buscamos: $y' = y'' + 3$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN

Podemos pensar en forma genérica a una ecuación diferencial de 1º orden como una ecuación de la forma: $F(x;y;y') = 0$ o $y' = f(x;y)$. Veremos los siguientes casos: variables separables, homogéneas, reducibles a homogéneas, lineales, Bernoulli, exactas, factor integrante, Riccati y Clairaut.

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Se llama así a las ecuaciones diferenciales en las cuales se pueden ***separar*** las variables, es decir que en cada miembro de la ecuación quede una sola variable con su diferencial de modo que se puedan integrar. Eso ocurre cuando la ecuación diferencial se puede llevar a la siguiente forma:

$$y' = P(x).Q(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = P(x).Q(y) \Rightarrow \frac{dy}{Q(y)} = P(x).dx \Rightarrow \int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x).dx$$

Ejemplo: resolver $3xy' - x^2y = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{3}y$

Si expresamos la derivada como cociente de diferenciales, se pueden separar las variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{3}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{3}dx \quad \Rightarrow \quad ln|y| = \frac{x^2}{6} + C \quad \text{S.G.}$$

Pero no en todas las ecuaciones diferenciales se pueden separar las variables. Vemos ahora como se resuelven algunos de esos casos.

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Las ecuaciones diferenciales homogéneas tienen la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{P(x;y).dx+Q(x;y).dy=0}$$

donde $\boldsymbol{P(x;y)}$ y $\boldsymbol{Q(x;y)}$ son funciones homogéneas del mismo grado. Para resolver estas ecuaciones diferenciales se recurre a un cambio de variables para transformarlas en ecuaciones diferenciales de *variables separables*.

Para ello se divide toda la ecuación diferencial por x^n, donde n es el grado de homogeneidad de las funciones $\boldsymbol{P(x;y)}$ y $\boldsymbol{Q(x;y)}$. Por la 2º propiedad de las funciones homogéneas vista en el capítulo 7 queda:

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right).dx+Q_1\left(\frac{y}{x}\right).dy=0$$

Si hacemos las siguientes sustituciones: $\frac{y}{x}=v\Rightarrow y=x.v\Rightarrow dy=x.dv+v.dx$ queda una nueva ecuación diferencial cuyas variables son $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{v}$ que se pueden separar:

$$P_1(v).dx+Q_1(v).(x.dv+v.dx)=0$$

Procedemos a resolver esta nueva ecuación diferencial:

$$[P_1(v)+Q_1(v).v].dx+Q_1(v).x.dv=0 \quad\Rightarrow$$

$$[P_1(v)+Q_1(v).v].dx=-Q_1(v).x.dv\Rightarrow\frac{dx}{x}=-\frac{Q_1(v).dv}{P_1(v)+Q_1(v).v}$$

ya hemos separado las variables, ahora hay que integrar:

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{Q_1(v).dv}{P_1(v)+Q_1(v).v}\Rightarrow x.C=e^{-\int\frac{Q_1(v).dv}{P_1(v)+Q_1(v).v}}$$

que es la solución general de la ecuación general homogénea, finalmente debemos volver a las variables originales.

Ejemplo: resolver $(x^2 + y^2).dx + xy.dy = 0$

Las funciones son homogéneas de grado 2, por lo tanto es una ecuación diferencial homogénea. Dividimos por $\boldsymbol{x^2}$ y efectuamos las sustituciones vistas. Queda:

$$(1+v^2)..dx + v.(xdv + vdx) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(1+2v^2).dx = -xv.dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{v.dv}{1+2v^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{v.dv}{1+2v^2} \quad \Rightarrow$$

$$ln\,x + C = -\frac{1}{4}ln(1+2v^2) \Rightarrow x.C = \frac{1}{\sqrt[4]{1+2v^2}} \Rightarrow x.C = \frac{1}{\sqrt[4]{1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

Al final debe expresarse la solución en función de las variables originales.

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Tienen la siguiente estructura: $(a_1x + b_1y + c_1).dx + (a_2x + b_2y + c_2).dy = 0$

Esta ecuación diferencial sería homogénea de grado 1 si no fuese por los términos c_1 y c_2**.** Este tipo de ecuaciones diferenciales se las puede transformar en ecuaciones diferenciales homogéneas de grado 1 si $a_1.b_2 - a_2.b_1 \neq 0$. Veremos luego que ocurre si $a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$.

Esto se logra a través del siguiente cambio de variables: $x = u+h$, $y = z+k$, de donde surge que $dx = du$ y $dy = dz$; h y k son valores numéricos que hay que obtener para que la nueva ecuación diferencial, cuyas variables son u y z, sea homogénea. Reemplazando queda:

$$(a_1u + b_1z + a_1h + b_1k + c_1).du + (a_2u + b_2z + a_2h + b_2k + c_2).dz = 0$$

Hay que encontrar valores de h y k que hagan que

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0 \text{ y } a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

Para que estas expresiones se hagan 0 simultáneamente hay que resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por estas dos ecuaciones que tiene solución única si $a_1.b_2 - a_2.b_1 \neq 0$.

De esta forma la ecuación diferencial queda:

$(a_1 u + b_1 z).du + (a_2 u + b_2 z).dz = 0$, que es homogénea de grado 1.

Luego se resuelve la nueva ecuación diferencial y finalmente se vuelve a las variables originales.

Ejemplo: resolver $(4x + 3y + 1).dx + (3x + 2y + 1).dy = 0$

Hacemos $x = u + h$, $y = z + k$, queda:

$$(4u + 3z + 4h + 3k + 1).du + (3u + 2z + 3h + 2k + 1).dz = 0$$

Buscamos los valores de ***h*** y ***k*** : $\begin{cases} 4h + 3k = -1 \\ 3h + 2k = -1 \end{cases} \Rightarrow (h;k) = (-1:1)$

Queda entonces que $x = u - 1$ e $y = z + 1$

Reemplazando se obtiene la nueva ecuación diferencial que debe ser homogénea:

$$(4u + 3z).du + (3u + 2z).dz = 0$$

Esta nueva ecuación diferencial es homogénea de grado 1, se resuelve como tal haciendo el cambio de variables $\frac{z}{u} = v$ y $dz = u.dv + v.du$, luego de haber dividido la ecuación por u (por ser homogénea de grado 1).

$(4u + 3v).du + (3u + 2z).(u.dv + v.du) = 0$ esta nueva ecuación diferencial debe ser de variables separables.

$$\left(4 + 3v + 3v + 2v^2\right).du = -(3 + 2v).u.dv = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{3 + 2v}{2v^2 + 6v + 4}.dv$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{3 + 2v}{2v^2 + 6v + 4}.dv \Rightarrow ln|u| = -\frac{1}{2} ln\left|v^2 + 3v + 2\right|.C \therefore u = \frac{C}{\sqrt{v^2 + 3v + 2}}$$

$$u^2 = \frac{C}{\left[\left(\dfrac{z}{u}\right)^2 + 3.\dfrac{z}{u} + 2\right]} \Rightarrow z^2 + 3uz + 2u^2 = C\,,$$

debemos volver ahora a las variables originales.

$$(y-1)^2 + 3.(x+1).(y-1) + 2.(x+1)^2 = C \Rightarrow y^2 - 2y + 1 + 3xy - 3x +$$
$$+ 3y - 3 + 2x^2 + 4x + 2 = C \quad \Rightarrow \quad y^2 + 3xy + 2x^2 + y + x = C$$

Si $a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$, los coeficientes de las variables son proporcionales, entonces la ecuación diferencial se puede transformar en variables separables efectuando la siguiente sustitución: $a_1x + b_1y = z$ (ó $a_2x + b_2y = z$, según convenga).

$$dz = a_1.dx + b_1.dy \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dz}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}.dx$$

Ejemplo: $(2x + y - 1).dx - (4x + 2y + 5).dy = 0$ $\qquad$ $2.2 - 1.4 = 0$

Hacemos $2x+y = z \Rightarrow dz = 2.dx + dy \quad \therefore \quad dy = dz - 2.dx$, reemplazamos:

$$(z-1).dx - (2z+5).(dz - 2dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad (5z+9).dx = (2z+5).dz$$

$$\therefore \quad dx = \frac{2z+5}{5z+9}.dz \Rightarrow \int dx = \int \frac{2z+5}{5z+9}.dz = \int \frac{2}{5} + \frac{\frac{7}{5}}{5z+9}.dz$$

$$x + C = \frac{2}{5}z + \frac{7}{25} ln\left|5z+9\right| \quad \Rightarrow 25x + C_1 = 10.(2x+y) + 7\,ln\left|5.(2x+y)+9\right|$$

$$\therefore \quad 10y - 5x + 7\,ln\left|10x + 5y + 9\right| = C_1$$

Ecuaciones diferenciales de 1º orden lineales

Estas ecuaciones diferenciales tienen la siguiente estructura:
$y'+P(x).y=Q(x)$, donde ***P*(*x*)** y ***Q*(*x*)** son funciones continuas de ***x***.

La solución la constituyen todas las funciones ***y* = *f* (*x*)** que satisfagan la ecuación. Para resolverla se recurre a un cambio de variables: ***y* = *u*.*v***, donde ***u*** y ***v*** son funciones de ***x***. Debemos calcular ***u*(*x*)** y ***v*(*x*)**, luego efectuando su producto se obtiene la función ***y*** que es la solución general.

Si $y=u \Rightarrow y'=u'.v+u.v'$. Sustituyendo en la ecuación diferencial queda:

$u'.v+u.v'+P(x).u.v=Q(x)$ sacamos factor común entre el 1º término y el 3º término: $v.[u'+P(x).u]+u.v'=Q(x)$. Elegimos ***u(x)*** de tal forma que: $u'+P(x).u=0$.

$$u'+P(x).u=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=-P(x).u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u}=-P(x).dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{du}{u}=-\int P(x).dx \quad \Rightarrow \quad \ln u=-\int P(x).dx \quad \Rightarrow \quad u=e^{-\int P(x).dx}$$

Ahora debemos determinar cuánto vale ***v*(*x*)**:

$$u.v'=Q(x) \quad \Rightarrow \quad e^{-\int P(x).dx}.\frac{dv}{dx}=Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad dv=e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx \quad \Rightarrow \quad \int dv=e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx \quad \Rightarrow \quad v=\int e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx$$

por lo tanto: $$\boxed{y=u.v=e^{-\int P(x).dx}.\left[\int e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx+C\right]}$$ es la solución general

Ejemplo: resolver: $y'+x.y=2x$

Debemos determinar quienes son $P(x)$ y $Q(x)$ para luego poder aplicar las fórmulas demostradas.

$P(x) = x, \ Q(x) = 2x.$

$$u = e^{-\int x.dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \ v = \int e^{\frac{x^2}{2}}.2x.dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} + C \quad \Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(2e^{\frac{x^2}{2}} + C\right)$$

Ecuaciones diferenciales totales exactas – la función potencial

Una ecuación diferencial con la estructura: ***P*(*x,y*).*dx* + *Q*(*x;y*).*dy* = 0** es una ecuación diferencial total exacta si ***P*(*x,y*).*dx* + *Q*(*x;y*).*dy* = 0** es un diferencial total exacto[1]. Por lo tanto la ecuación diferencial se puede expresar así: ***dU*(*x;y*) = 0**, y la solución general se obtiene integrando ambos miembros:

$$\int dU(x;y) = C \quad \Rightarrow \quad U(x;y) = C\ .$$

Para resolver la ecuación diferencial debemos encontrar una función potencial ***U*(*x;y*)**[2].

Ejemplo: resolver $(2x^3 + y).dx + (x + 2y^2).dy = 0$

Primero verificamos la condición de simetría: $P_y^{'} = 1 = Q_x^{'}$.

Hemos verificado que la ecuación diferencial es exacta. Ahora debemos encontrar la función ***U* (*x;y*)**.

$$U(x;y) = \int (2x^3 + y).dx = \frac{x^4}{2} + yx + \alpha(y)$$

$$U(x;y) = \int (x + 2y^2).dy = xy + \frac{2y^3}{3} + \beta(x)$$

---

[1] Ver página 132.
[2] Ver página 132.

Si comparamos las dos integrales, que como vimos deben ser iguales, vemos que la función de ***y*** que figura en la 1º integral es $\frac{2y^3}{3}$ que aparece en la 2º integral y que la función de ***x*** que aparece en la 2º integral es $\frac{x^4}{2}$, que aparece en la 1º integral. La solución general es: $U(x;y) = xy + \frac{x^4}{2} + \frac{2y^3}{3} = C$

Verificación

Es muy fácil verificar la solución general de este tipo de ecuaciones diferenciales. Si calculamos el diferencial total de la función $U(x;y)$ que hemos obtenido, debemos obtener el primer miembro de la ecuación diferencial.

Otra forma de resolver ecuaciones exactas

Vimos que $U(x;y) = \int [P(x;y).dx] + \alpha(y)$. Debemos calcular $\alpha(y)$.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \int P(x;y)dx}{\partial y} + \alpha'(y) = Q(x;y).$$

De esta expresión surge $\alpha'(y)$ y de allí $\alpha(y)$.

Ejemplos

1) $(2xy - 3x^2).dx + (x^2 - 2y).dy = 0$

Verificamos la condición de simetría: $P'_y = 2x = Q'_x$

Buscamos ahora $U(x;y) = \int (2xy - 3x^2).dx = x^2y - x^3 + \alpha(y)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial (x^2y - x^3)}{\partial y} + \alpha'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow x^2 + \alpha'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow \alpha'(y) = -2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(y) = -y^2 \Rightarrow \quad U(x;y) = x^2y - x^3 - y^2 = C$$

2) $\dfrac{1}{y}.dx - \dfrac{x}{y^2}.dy = 0$

Verificamos la condición de simetría: $P'_y = -\dfrac{1}{y^2} = .Q'_x$

Buscamos ahora $U(x;y) = \int \dfrac{1}{y}.dx = \dfrac{x}{y} + \alpha(y)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y} + \alpha'(y) = \frac{-x}{y^2} \Rightarrow \frac{-x}{y^2} + \alpha'(y) = \frac{-x}{y^2} \therefore \alpha'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(y) = C$$

Por lo tanto: $U(x;y) = \dfrac{x}{y} = C$

Factor integrante

A veces una ecuación diferencial con estructura de exacta (o que se puede llevar a esa estructura) no es exacta, es decir que no cumple con la condición de simetría. Pero se la puede transformar en exacta multiplicando toda la ecuación por un factor denominado ***factor integrante*.** Este factor integrante puede ser una función de x: $\boldsymbol{\mu}$ **(*x*)**, o de y: $\boldsymbol{\mu}$ **(*y*)**, o de ambas variables: $\boldsymbol{\mu}$**(*x;y*)**. Analizamos primero el caso en que el factor integrante es una función de x. Debemos determinar las condiciones que se deben cumplir para que exista $\boldsymbol{\mu}$ **(*x*)** y luego proceder a calcularlo.

Partimos de una ecuación diferencial con estructura de exacta:

$$P(x;y).dx + Q(x;y).dy = 0$$

Si multiplicamos la ecuación diferencial por $\boldsymbol{\mu}$**(*x*)** debe quedar una ecuación diferencial exacta, es decir que se debe cumplir la condición de simetría.

$$\mu(x).P(x;y).dx + \mu(x).Q(x;y).dy = 0$$

Hacemos $\mu(x).P(x;y) = M(x;y)$ y $\mu(x).Q(x;y) = N(x;y)$, queda una ecuación diferencial que debe ser exacta: $M(x;y).dx + N(x;y).dy = 0 \quad \Rightarrow \quad M'_y = N'_x$

$$\mu(x).P_y' = \mu'(x).Q + \mu(x).Q_x' \quad \therefore \quad \mu'(x) = \frac{P_y' - Q_x'}{Q}.\mu(x) \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y' - Q_x'}{Q}$$

Si $\dfrac{P_y' - Q_x'}{Q}$ es una función exclusivamente de x, entonces existe $\mu(x)$ y se obtiene de la siguiente forma:

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = \int \frac{P_y' - Q_x'}{Q}dx \Rightarrow ln\,\mu(x) = \int \frac{P_y' - Q_x'}{Q}dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{P_y' - Q_x'}{Q}dx}$$

Una vez calculado el factor integrante se multiplica toda la ecuación diferencial por dicho factor y se obtiene una nueva ecuación diferencial que es exacta. Finalmente se resuelve como exacta.

Ejemplo: resolver $(y + ln\,x).dx - x.dy = 0$

Es una ecuación diferencial con estructura de exacta, verificamos la condición de simetría: $P_y' = 1 \neq -1 = Q_x'$. Buscamos la existencia de un factor integrante.

Calculamos $\dfrac{P_y' - Q_x'}{Q} = \dfrac{1+1}{-x} = -\dfrac{2}{x}$, vemos que es una función exclusivamente de ***x*** y por lo tanto existe el factor integrante $\mu(x)$.

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\,ln\,x} = e^{ln\,x^{-2}} = x^{-2}$$

Una vez obtenido el factor integrante multiplicamos a la ecuación diferencial por dicho factor: $\left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{ln\,x}{x^2}\right).dx - \dfrac{1}{x}.dy = 0$. Esta nueva ecuación debe ser exacta. Verificamos la condición de simetría: $P_y' = \dfrac{1}{x^2} = Q_x'$

Finalmente resolvemos la ecuación diferencial exacta.

$$U(x;y) = \int \left(\frac{y}{x^2} + \frac{ln\,x}{x^2}\right).dx = -\frac{y}{x} - \frac{ln\,x + 1}{x} + \alpha(y)$$

$$U(x;y)=\int\left(-\frac{1}{x}\right).dy.=-\frac{y}{x}+\beta(x)\ \Rightarrow U(x;y)=-\frac{y}{x}-\frac{ln\,x+1}{x}=C \quad \text{S.G.}$$

Factor integrante según y

Partimos de una ecuación diferencial con estructura de exacta:

$$\boldsymbol{P(x;y).dx + Q(x;y).dy = 0}$$

Si ahora multiplicamos la ecuación diferencial por $\boldsymbol{\mu(y)}$ debe quedar una ecuación diferencial exacta, es decir que se debe cumplir la condición de simetría.

$$\boldsymbol{\mu\,(y).P(x;y).dx + \mu\,(y).Q(x;y).dy = 0}$$

Hacemos $\boldsymbol{\mu\,(y).P(x;y) = M(x;y)}$ y $\boldsymbol{\mu\,(y).Q(x;y) = N(x;y)}$, queda una ecuación diferencial que debe ser exacta: $\boldsymbol{M(x;y).dx + N(x;y).dy = 0} \quad \Rightarrow \quad M'_y = N'_x$

$$\mu'(y).P+.\mu(y).P'_y=\mu(y).Q'_x \quad \therefore \quad \mu'(y)=\frac{Q'_x-P'_y}{P}.\mu(y)\Rightarrow\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{Q'_x-P'_y}{P}$$

Si $\dfrac{Q'_x-P'_y}{P}$ es una función exclusivamente de $\boldsymbol{y}$, entonces existe $\boldsymbol{\mu\,(y)}$ y se obtiene de la siguiente forma:

$$\int\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}dy=\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy \ \Rightarrow\ ln\,\mu(y)=\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy \ \Rightarrow \mu(y)=e^{\int\frac{Q'_x-P'_y}{P}dy}$$

Una vez calculado el factor integrante se multiplica toda la ecuación diferencial por dicho factor y se obtiene una nueva ecuación diferencial que es exacta. Finalmente se resuelve como exacta.

Más complicado es el cálculo de $\boldsymbol{\mu\,(x;y)}$ porque conduce a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que está fuera del alcance de este curso.

Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Estas ecuaciones diferenciales tienen la siguiente estructura:

$$y' + P(x).y = Q(x).y^n$$

Si $n = 0$, la ecuación diferencial es lineal, si $n = 1$, la ecuación diferencial es de variables separables. Vemos que la ecuación diferencial lineal es un caso particular de la ecuación diferencial de Bernoulli. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se efectúa un cambio de variables y se la transforma en una ecuación diferencial lineal. Se divide la ecuación diferencial por y^n:

$$y'.y^{-n} + P(x).y^{1-n} = Q(x)$$

Hacemos: $y^{1-n} = z$ derivando

$$(1-n).y^{-n}.y' = z'$$

$$y^{-n}.y' = \frac{z'}{1-n}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial queda:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x),$$

multiplicando por $(1-n)$:

$$z' + (1-n).P(x)z = Q(x).(1-n).$$

Si hacemos $\mathbf{(1-n).P(x) = P_1(x)}$ y $\mathbf{(1-n).Q(x) = Q_1(x)}$, queda una ecuación diferencial lineal de variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{z}$:

$$z' + .P_1(x)z = Q_1(x)$$

Se resuelve la ecuación diferencial, se obtiene $\boldsymbol{z}$, y luego se vuelve a las variables originales: $y^{1-n} = z$, que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli.

BERNOULLI, *Johann (1667-1748)*
BERNOULLI, *Jakob (1634, 1705)*:

Los hermanos Bernoulli nacieron en Basilea, Suiza. Fueron progenitores de una familia que dio 8 matemáticos importantes en los siglos XVII – XVIII. El más importante de esos descendientes fue Daniel, hijo de Johann. Fueron alumnos de Leibniz y difundieron por Europa su Teoría del Cálculo Diferencial e Integral. Fueron los que propusieron por primera vez el uso de la palabra *integral* a su profesor Leibniz, ya que éste usaba la palabra *suma.* Johann fue maestro de Euler y de L´Hopital. Mientras Jakob siguió los principios de Newton, Johann siguió la filosofía de Descartes. La obra más importante de Jakob es Ars Conjectandi, el primer trabajo notable sobre el Cálculo de Probabilidades.El padre de Johann quería que éste siguiera comercio, pero su hermano mayor Jakob ya lo había iniciado en las ciencias al darle clases de matemática y física. Pero el ejercicio como profesor de Matemática en la Universidad de Basilea le daba pocas posibilidades para una vida acomodada, lo cual lo obligó a licenciarse en medicina y durante años se ganó la vida como médico.

Ejemplo: resolver $y' - \frac{1}{x}.y = \frac{3}{x}.y^3$, dividimos por y^3

$$y^{-2} = z \Rightarrow -2y^{-3}.y' = z'$$

$$y'.y^{-3} - \frac{1}{x}.y^{-2} = \frac{3}{x} \qquad \text{hacemos:} \qquad y^{-3}.y' = \frac{z'}{-2} \quad \textit{reemplazando}$$

$$\frac{z'}{-2} - \frac{1}{x}.z = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2}{x}.z = -\frac{6}{x}$$

resolvemos ahora la ecuación diferencial lineal cuyas variables son ***x*** y ***z***.

$$P_1(x) = \frac{2}{x}, \quad Q_1(x) = -\frac{6}{x} \quad \therefore \quad u = e^{-\int \frac{2}{x}.dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

$$v = \int\left(-x^2\,\frac{6}{x}\right).dx = -\int 6x.dx = -6.\frac{x^2}{2} + C = -3x^2 + C \Rightarrow z = x^{-2}.\left(-3x^2 + C\right) = -3 + C.x^{-2}$$

Finalmente queda: $y^{-2} = -3 + C.x^{-2}$

Ecuaciones diferenciales de Ricatti

Tienen la siguiente estructura: $y' + A(x).y^2 + B(x).y + C(x) = 0$

Son de 1º orden, no lineales. Se puede resolver si se conoce una solución particular: $y_p(x)$. De esta manera se reduce, por lo general, a una ecuación diferencial lineal de 1º orden luego de pasar por una ecuación diferencial de Bernoulli.

RICCATI, ***Jacopo Franceso (1676-1754)***
Fue un matemático veneciano, que estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana, a cuya introducción en Italia colaboró. En su momento se le ofreció la presidencia de la Academia de Ciencias de San Petersburgo pero rechazó el honor en favor de su retirada y aristocrática vida.

Se le recuerda por el estudio de ecuaciones que llevan su nombre, un tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden. En general, esta ecuación no se puede resolver elementalmente (o en términos finitos); lo que fue demostrado en el siglo XIX. Aunque ello es un accidente histórico, pues su trabajo se limitó al análisis de casos particulares de la ecuación. Siendo ésta planteada y analizada en la forma que conocemos por la familia Bernoulli.

Se efectúa un cambio de variables, reemplazamos la variable y por una nueva variable igual a la suma de la solución particular y de una función que denominamos $z(x)$. $y = y_p + z \Rightarrow y' = y'_p + z'$

Reemplazamos en la ecuación de Ricatti:

$$y'_p + z' + A(x).(y_p + z)^2 + B(x).(y_p + z) + C(x) = 0$$

Desarrollando queda:

$$y'_p + z' + A(x)y_p^2 + 2A(x)y_p z + A(x)z^2 + B(x)y_p + B(x)z + C(x) = 0$$

Si agrupamos obtenemos:

$$\left[y'_p + A(x)y_p^2 + B(x)y_p + C(x)\right] + z' + 2A(x)y_p z + A(x)z^2 + B(x)z = 0$$

El paréntesis se anula porque y_p es una solución particular de la ecuación diferencial, por lo tanto queda:

$$z' + 2A(x)y_p z + A(x)z^2 + B(x)z = 0 \Rightarrow z' + \left[2A(x)y_p + B(x)\right].z = -A(x)z^2$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli.

Al resolver esta ecuación, obtenemos $z(x)$, luego la solución general de la ecuación diferencial de Ricatti es: $y = y_{\mathrm{p}} + z$.

Ejemplos

1) $y' + y^2 - 2x^2 y - 2x + x^4 = 0$, $y_p = x^2$

hacemos: $y = x^2 + z \Rightarrow y' = 2x + z'$

reemplazando: $2x + z' + (x^2 + z)^2 - 2x^2.(x^2 + z) - 2x + x^4 = 0$

operando y reagrupando: $2x + z' + x^4 + 2x^2 z + z^2 - 2x^4 - 2x^2 z - 2x + x^4 = 0$

cancelando queda: $z' + z^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = -z^2 \ \therefore \ \dfrac{dz}{z^2} = -dx \Rightarrow -\dfrac{1}{z} = -x + C$

Despejando z tenemos que: $z = \dfrac{1}{x+C}$, por lo tanto $y = x^2 + \dfrac{1}{x+C}$

2) $\left(2x^2 - x\right).y' + y^2 - (1+4x)y + 4x = 0$, y_p=1

$$y' + \frac{1}{2x^2 - x}.y^2 - \frac{(1+4x)}{2x^2 - x}.y + \frac{4x}{2x^2 - x} = 0$$

hacemos: $y = 1 + z \Rightarrow y' = z'$

reemplazando: $z' + \dfrac{(1+z)^2 - (1+4x).(1+z) + 4x}{2x^2 - x} = 0$

operando y reagrupando: $z' + \dfrac{1 + 2z + z^2 - 1 - z - 4x - 4xz + 4x}{2x^2 - x} = 0$

$$z' + \frac{(1-4x).z + z^2}{2x^2 - x} = 0 \Rightarrow z' + \frac{1-4x}{2x^2 - x}.z = -\frac{1}{2x^2 - x}.z^2$$

Llegamos así a una ecuación diferencial de Bernoulli cuyas variables son x y z.

Dividimos por z^2: $z^{-2}.z' + \dfrac{1-4x}{2x^2 - x}.z^{-1} = -\dfrac{1}{2x^2 - x}$

$z^{-1} = w \Rightarrow -z^{-2}.z' = w'$

$z^{-2}.z' = -w'$ *reemplazando*

$$-w' + \frac{1-4x}{2x^2 - x}.w = -\frac{1}{2x^2 - x} \quad \Rightarrow \quad w' - \frac{1-4x}{2x^2 - x}.w = \frac{1}{2x^2 - x}$$

Ahora debemos resolver la ecuación diferencial lineal.

$$P(x) = -\frac{1-4x}{2x^2 - x}, \quad Q(x) = \frac{1}{2x^2 - x}$$

$$u = e^{-\int -\frac{(1-4x)}{2x^2 - x}.dx} = e^{-ln\left(2x^2 - x\right)} = e^{ln\left(2x^2 - x\right)^{-1}} = \frac{1}{2x^2 - x}$$

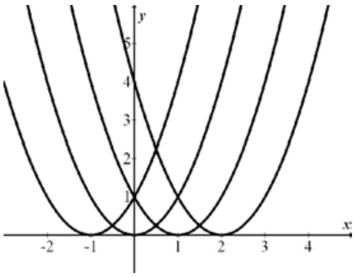
$$v=\int\left[\left(2x^2-x\right).\frac{1}{2x^2-x}\right].dx=\int dx=x+C \Rightarrow w=z^{-1}=\frac{1}{2x^2-x}\left(x+C\right)$$

Por lo tanto $z=\dfrac{2x^2-x}{x+C}$, que es la solución de la ecuación de Bernoulli.

La solución de la ecuación de Riccati es: $y=1+\dfrac{2x^2-x}{x+C}=\dfrac{2x^2+C}{x+C}$

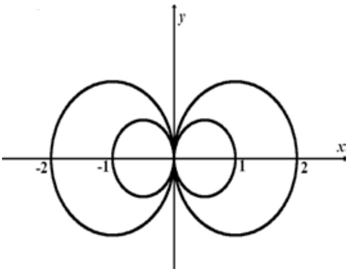
Envolvente

Dado una familia de curvas planas se dice que una curva es la *envolvente* de dicha familia si ocurre que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva de la familia dada.



Ejemplo:

a) si consideramos la familia de curvas $y=(x-a)^2$, la envolvente es la recta $y = 0$.



b) para la familia de curvas $a=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, la envolvente es la recta $x = 0$.

Cálculo de la envolvente

Dada una familia simplemente infinita de curvas $\varphi(x,y,C)=0$ ❶ para hallar la envolvente de dicha familia derivamos la ecuación ❶ respecto del parámetro C: $\varphi_C'(x,y,C)=0$ ❷.

Entre ❶ y ❷ se elimina el parámetro C. Se llega así a una expresión del tipo $F(x,y)=0$, que es la ecuación de la envolvente.

Teorema de existencia de la envolvente

Dada la familia de curvas $\varphi(x, y, C) = 0$, si en cada punto de estas curvas se verifica que $\varphi''_{CC} \neq 0$ y además $\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi''_{xC} & \varphi''_{yC} \end{vmatrix} \neq 0$, entonces existe la envolvente $F(x, y) = 0$.

Ejemplos

a) $y = (x-a)^2$, primero vemos si existe la envolvente verificando el teorema.

$$\begin{aligned} &\varphi(x, y, C) = y - (x-a)^2 = 0 \\ &\varphi'_C = -2(x-a) \qquad \text{, además } \begin{vmatrix} y' - 2(x-a) & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ &\varphi''_C = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

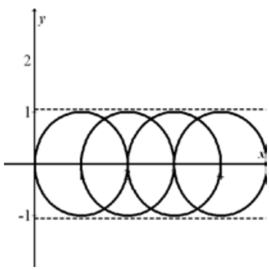
Se verifican las condiciones del teorema por lo tanto hay envolvente.

Calculamos la envolvente: $\begin{cases} y = (x-a)^2 \\ 0 = -2(x-a) \end{cases} \Rightarrow x - a = 0 \;\therefore\; y = 0$

b) $(x-a)^2 + y^2 = 1$, primero vemos si existe la envolvente verificando el teorema.

$$\begin{aligned} &\varphi(x, y, C) = (x-a)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ &\varphi'_C = -2(x-a) \qquad \text{, además } \begin{vmatrix} 2yy' - 2(x-a) & 2y \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4y \neq 0 \\ &\varphi''_C = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

Se verifican las condiciones del teorema por lo tanto hay envolvente.



Calculamos la envolvente: $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 1 \\ 0 = -2(x-a) \end{cases}$

$\Rightarrow\ x-a=0\ \therefore\ y^2=1$. Las envolventes son: $y=1,\ y=-1$

Ecuaciones diferenciales de Clairaut

Tienen la siguiente estructura: $y=y'\,x+\varphi(y')$
Para resolver estas ecuaciones diferenciales se efectúan los siguientes pasos:

Derivamos respecto de *x*: $y'=y''\,x+y'+\varphi'(y').y''\ \Rightarrow\ 0=y''\,x+\varphi'(y').y''$

$0=y''\left[x+\varphi'(y')\right]$, de donde surge que:

a) $y''=0\ \Rightarrow\ y'=C$, reemplazando en la ecuación de Clairaut, se obtiene la solución general: $y=Cx+\varphi(C)$, o sea $y=Cx+K$, que constituye una familia de rectas.

CLAIRAUT, ***Alexis Claude (1713-1765)***
Astrónomo y uno de los matemáticos más precoces de todos los tiempos. Se cuenta que a la edad de diez años ya leía los libros de Guillaume l'Hopital sobre cónicas y cálculo infinitesimal. Con tan sólo doce años de edad, Clairaut presentó una memoria sobre cuatro curvas de cuarto grado a la Academia de Ciencias de Paris, la cual, y tras haberse asegurado que era el autor verdadero, se deshizo en grandes elogios. Nació en París el 7 de mayo de 1713 y murió en la misma ciudad el 11 de mayo de 1765. Su padre, Jean-Baptiste, era maestro de matemáticas de París y miembro de la Academia de Berlín, lo que acredita su calidad como matemático. Con sólo dieciocho años, en 1731, publicó la obra *Investigaciones sobre las curvas* con doble curvatura, gracias a la cual fue admitido en la Academia de Ciencias, aunque hubo de hacerse una excepción con él, ya que el reglamento exigía una edad mínima de veinte años. En 1734 estudió la ecuación diferencial que lleva su nombre.

b) $x+\varphi'(y')=0\ \Rightarrow\ x=-\varphi'(y')$, reemplazando en la ecuación de Clairaut:

$$y=-y'.\varphi'(y')+\varphi(y')$$

Con ambas ecuaciones formamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=-y'.\varphi'(y')+\varphi(y') \\ x=-\varphi'(y') \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de una curva que satisface la ecuación diferencial pero que no es una recta, es decir que no satisface la solución general, sino que es una solución singular expresada en forma paramétrica, cuyo parámetro es y'. Estas ecuaciones diferenciales tienen solución singular.

Propiedad: La solución singular de la ecuación de Clairaut es la envolvente de la solución general.

Ejemplos

1) $y = y'\,x + y'^2$, derivamos: $y' = y''\,x + y' + 2y'.y'' \;\Rightarrow\; 0 = y''\left(x + 2y'\right)$

a) $y'' = 0 \;\Rightarrow\; y' = C \;\therefore\; y = Cx + C^2$ S.G.

b) $x + 2y' = 0 \;\Rightarrow\; x = -2y'$, reemplazando en la ecuación: $y = -2y'^2 + y'^2 = -y'^2$

formamos el sistema $\begin{cases} x = -2y' \\ y = -y'^2 \end{cases}$, es una solución singular en forma paramétrica. Pasamos a la forma cartesiana: $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

Verificamos ahora que esta función es la envolvente de la familia de funciones $y = Cx + C^2$.

Derivamos respecto del parámetro C: $0 = x + 2C \Rightarrow C = -\dfrac{x}{2}$.

Reemplazando en la solución general: $y = -\dfrac{x}{2}.x + \left(-\dfrac{x}{2}\right)^2 = -\dfrac{x^2}{4}$

2) $y = y'\,x + \dfrac{1}{y'}$ derivamos: $y' = y''\,x + y' - y'^{-2}.y'' \;\Rightarrow\; 0 = y''\left(x - y'^{-2}\right)$

a) $y'' = 0 \;\Rightarrow\; y' = C \;\therefore\; y = Cx + \dfrac{1}{C}$ S.G.

b) $x - y'^{-2} = 0 \;\Rightarrow\; x = y'^{-2}$, reemplazando en la ecuación: $y = \dfrac{1}{y'} + \dfrac{1}{y'} = \dfrac{2}{y'}$

formamos el sistema $\begin{cases} x = y'^{-2} \\ y = \dfrac{2}{y'} \end{cases}$, es una solución singular en forma paramétrica. Pasamos a la forma cartesiana: $x = \left(\dfrac{2}{y}\right)^{-2} \Rightarrow \; y = 2\sqrt{x}$.

Verificamos ahora que esta función es la envolvente de la familia de funciones $y = Cx + \dfrac{1}{C}$.

Derivamos respecto del parámetro: $0 = x - \dfrac{1}{C^2} \Rightarrow C = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Reemplazando en la solución general: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$

Observación: vemos que la solución general de la ecuación diferencial de Clairaut se obtiene reemplazando en la misma y' por *C*.

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES –

Las trayectorias ortogonales

Dos curvas son ortogonales si en un punto que pertenece a ambas sus rectas tangentes son perpendiculares entre sí. Si una curva es ortogonal a cada una de las curvas de una familia, se dice que es una *trayectoria ortogonal* de dicha familia.

Si dos familias de curvas son tales que cada una de ellas es ortogonal a la otra familia, las familias son trayectorias mutuamente ortogonales.
El cálculo de las trayectorias ortogonales correspondientes a una familia de curvas dadas requiere el planteo y resolución de ecuaciones diferenciales.

Ejemplos

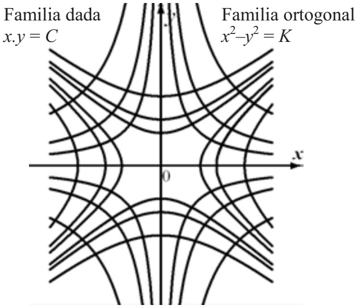
1) Sea la familia de curvas $y = \dfrac{C}{x}$, buscamos la familia de curvas ortogonales a la misma.

$$y' = -\frac{C}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x.y}{x^2} = -\frac{y}{x}.$$

Como dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son inversas y opuestas, reemplazamos la pendiente y' por $-\frac{1}{y'}$:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x} \Rightarrow y.dy = x.dx \therefore \int y.dy = \int x.dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$



La familia de trayectorias ortogonales es: $x^2 - y^2 = K$

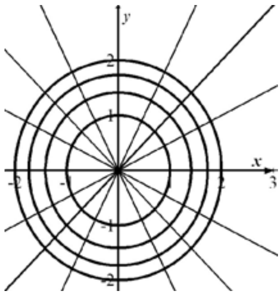
Es decir que las trayectorias ortogonales son una familia de hipérbolas.

2) Sea la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = C$, buscamos la familia de curvas ortogonales a la misma.

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

reemplazamos la pendiente y' por $-\frac{1}{y'}$:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \therefore \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\, y = ln\, x + C$$



La familia de trayectorias ortogonales es: $y = K.x$

Es decir que las trayectorias ortogonales son una familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

El modelo de crecimiento-disminución exponencial

Si consideramos el modelo de crecimiento exponencial, vemos que la población crece según la ley: $P(t) = C.a^t$, con $a > 0$.
Si $a > 1$, el modelo es de *crecimiento exponencial* y si $a < 1$ el modelo es de *disminución exponencial*.

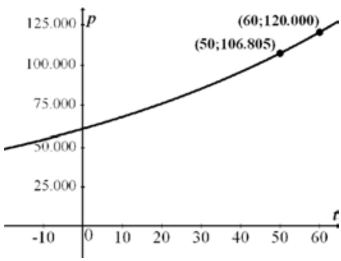
El modelo malthusiano[3] de crecimiento de una población supone que el crecimiento-disminución de la población es directamente proporcional a la misma. Tenemos entonces que en cada instante se verifica que: $\dfrac{dP}{dt} = k.P(t)$, donde k es una constante de proporcionalidad y $P(t)$ es el tamaño de la población en el instante t.

De donde surge que $\dfrac{dP}{P(t)} = k.dt \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dP}{P(t)} = \int k.dt$

$$ln\, P(t) = kt + C_1 \quad \Rightarrow \quad P(t) = e^{kt+C_1} = C.e^{kt} = C.\left(e^k\right)^t = C.a^t$$

Ejemplos

1) La tasa de crecimiento natural de la población de una ciudad es directamente proporcional al número de habitantes. Si la población se duplica en 60 años y si en 1970 era de 60.000 habitantes. Calcular la población para el año 2020.



Si consideramos que para 1970, $t = 0$, $P(60) = 2P(0)$

$P(0) = 60.000 = C \Rightarrow \quad P(t) = 60.000a^t$

$P(60) = 60.000.a^{60} = 120.000$

$a^{60} = 2 \quad \therefore \quad a = 1{,}0116$

$P(t) = 60.000.1{,}0116^t \qquad P(50) = 60.000.1{,}0116^{50} = 106.805$

[3] Nombre debido a Tomas Walter Malthus (1766-1834), científico británico que se dedicó al estudio del crecimiento de las poblaciones.

En el año 2020 habrá 106.805 habitantes.

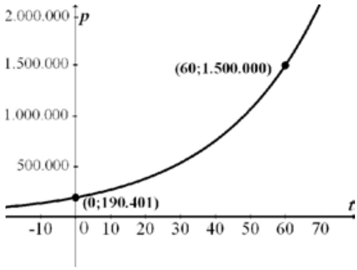
2) La tasa de crecimiento bacteriano en un cierto cultivo es directamente proporcional al número de bacterias presente y este número se duplica cada 20 minutos. Si al cabo de 1 hora hay 1.500.000 bacterias, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

$P(t) = C.a^t$

$P(0) = C$ y $P(20) = C.a^{20}$

$P(20) = 2P(0) \Rightarrow Ca^{20} = 2C$

$\therefore \quad a^{20} = 2 \Rightarrow a = 1{,}035$



$$P(60) = C.1{,}035^{60} = 1.500.000 \;\Rightarrow\; C = \frac{1.500.000}{1{,}035^{60}} = 190.401$$

$P(0) = 190.401$, es decir que inicialmente había 190.401 bacterias.

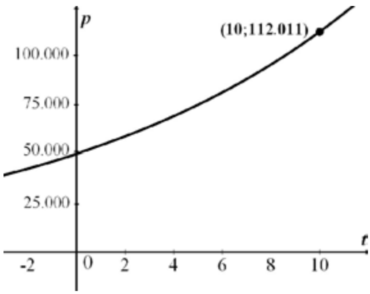
3) Se descubre un cardumen cuya tasa de crecimiento natural es directamente proporcional al número de peces. Inicialmente había 50.000 peces, cinco años después había 75.000. Hallar cuántos peces habrá diez años después de descubierto el cardumen.

La función es $P(t) = C.a^t$

Si consideramos que para $t = 0$,

$P(0) = 50.000 = C$

$P(t) = 50.000.a^t$

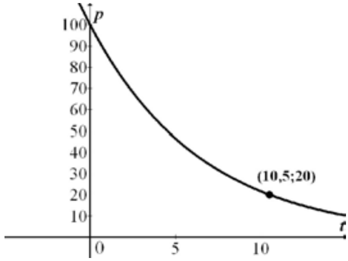


$P(5) = 50.000.a^5 = 75.000 \;\Rightarrow\; a^5 = 1{,}5 \;\therefore\; a = 1{,}084$

$P(t) = 50.000.1{,}084^t \qquad P(10) = 50.000.1{,}084^{10} = 112.011$

A los 10 años habrá 112.011 peces.

4) Se administra a una persona una medicación con una dosis de 100 miligramos. La cantidad de medicamento en la sangre disminuye en forma proporcional a la cantidad de medicación en la sangre. Al cabo de 6 horas, una muestra de sangre revela que la concentración en el organismo es de 40 miligramos, determinar en cuanto tiempo la presencia del fármaco es de 20 miligramos.



La función es $P(t) = C.a^t$

Si consideramos que para $t = 0$,

$P(0) = 100 = C$

La función es $P(t) = 100.a^t$

Si consideramos que para $t = 6$,

$$P(6) = 100.a^6 = 40 \qquad a^6 = 0{,}4 \quad \therefore \quad a = 0{,}858$$

$$P(t) = 100.0{,}858^t \qquad 20 = 100.0{,}858^t \Rightarrow t = \frac{log\,0{,}2}{log\,0{,}858} = 10{,}5$$

Luego de 10,5 horas de suministrado el medicamento habrá 20 miligramos en la sangre.

La desintegración radiactiva

La desintegración radiactiva se mide en términos de *semividas*, que es el número de años requerido para que la mitad de los átomos de una muestra radiactiva se desintegre.

La razón de desintegración es proporcional a la masa. Este caso es de disminución exponencial.

Ejemplos

1) Si la semivida de un elemento radiactivo particular es de 25 años y la desintegración es proporcional a la masa, ¿Cuánto quedará de 1 gramo 15 años después?

Si llamamos y a la masa (en gramos), tenemos que $y = C.a^t$

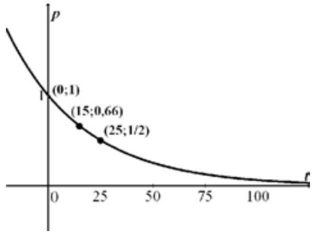
$y(0)=1$ e $y(25)=1/2$

$y=C.a^t \quad \Rightarrow \quad 1=C.a^0 \quad \therefore \quad C=1$

$y=a^t, \quad 0{,}5=a^{25} \quad \Rightarrow$

$log\, a=\dfrac{log\ 0{,}5}{25}=-0{,}012 \quad \therefore \quad a=0{,}973$

$y=0{,}973^t \quad \Rightarrow \quad y(15)=0{,}973^{15}=0{,}66$



Por lo tanto después de 15 años quedan 0,66 gramos.

2) Si la semivida de un elemento radiactivo particular es de 1900 años, y la desintegración es proporcional a la masa ¿Cuánto tardará en desaparecer el 95% de la cantidad inicial?

Si llamamos *y* a la masa (en gramos), tenemos que $y=C.a^t$
Llamamos m_0 a la cantidad inicial.

$y(0)=m_0=C \qquad\qquad y(1.900)=\dfrac{1}{2}m_0$

$\dfrac{1}{2}m_0=m_0.a^{1.900} \quad \Rightarrow \quad a^{1.900}=0{,}5$

$log\, a=\dfrac{log\ 0{,}5}{1.900} \quad \Rightarrow \quad a=0{,}999635$

$0{,}05m_0=m_0.0{,}999635^t \quad \Rightarrow \quad t=\dfrac{log\, 0{,}05}{log\, 0{,}999635}=8.206$

Por lo tanto después de 8.206 años queda el 5% de la masa inicial.

Ley de enfriamiento de Newton

La razón de cambio de la temperatura T=T(t) de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura A del medio ambiente y la temperatura T del cuerpo.

Luego, si *T=T(t)* representa la temperatura de un cuerpo en el instante *t*, entonces la ecuación diferencial que modela esta situación es:

$$\frac{dT}{dt} = k.(A-T)$$

Resolviendo queda:

$$\frac{dT}{k.(A-T)} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dT}{k.(A-T)} = \int dt$$

$$-\ln(A-T) = k.t + C_1 \quad \Rightarrow \quad A-T = e^{-kt+C_1} = C.a^t$$

De donde: $T(t) = A + Ca^t$

Ejemplos

1) Si una torta sale del horno a una temperatura de 300°, después de dos minutos se encuentra a una temperatura de 200°, ¿cuanto tiempo más tardará en llegar a una temperatura de 100°, si se encuentra en una habitación cuya temperatura es 30 F?

La función es $T(t) = 30 + C.a^t$

Sea T (0) = 300, sustituyendo en la ecuación, determinamos el valor de la constante C, $300 = 30 + C.a^0$, de donde surge que C = 270.
Ahora calculamos la constante a.

Como T (2) = 200, $200 = 30 + 270.a^2$, $a^2 = 0{,}63$

Por lo tanto $\log a = \dfrac{\log 0{,}63}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}7937$

Entonces la ley de enfriamiento de Newton es:

$T(t) = 30 + 270.0{,}7937^t$. Ahora buscamos t para que T sea 100.

$100 = 30 + 270.0{,}7937^t \Rightarrow 0{,}7937^t = 0{,}26$

$t = \dfrac{\log 0{,}26}{\log 0{,}7937} \quad \Rightarrow \quad t = 5{,}83$ minutos.

2) Si un objeto está en una habitación cuya temperatura constante es de 60°, después de diez minutos se enfría a 100° a 90º, ¿cuánto tiempo más tardará en llegar a una temperatura de 80°?

La función es $T(t) = 60 + C.a^t$

Sea T (0) = 100, sustituyendo en la ecuación, determinamos el valor de la constante C, $100 = 60 + C.a^0$, de donde surge que C = 40.

Ahora calculamos la constante a.

Como T (10) = 90, $90 = 60 + 40.a^{10}$, $a^{10} = 0{,}75$.

Por lo tanto $log\ a = \dfrac{log\ 0{,}75}{10} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}9716$.

Entonces la ley de enfriamiento de Newton es: $T(t) = 60 + 40.0{,}9716^t$.
Ahora buscamos t para que T sea 80.

$$80 = 60 + 40.0{,}9716^t \Rightarrow 0{,}9716^t = 0{,}5$$

$$t = \frac{log\ 0{,}5}{log\ 0{,}9716} \quad \Rightarrow \quad t = 24{,}05 \text{ minutos.}$$

El modelo del aprendizaje humano

El aprendizaje humano es un proceso extremadamente complicado. La biología y la química del aprendizaje están aún muy lejos de entenderse completamente. Si bien los modelos simples del aprendizaje no abarcan esta complejidad, sí pueden dar los aspectos limitados del proceso.

En este caso suponemos que la tasa a la cual un estudiante puede memorizar parte de una lista de n datos es proporcional a la cantidad de datos que le falta memorizar. Por lo tanto $\dfrac{dy}{dt} = k.(n - y)$.

$$\frac{dy}{k.(n-y)} = dt \therefore ln(n-y) = k.t$$
$$n - y = e^{k.t} \Rightarrow y(t) = n - a^t K$$

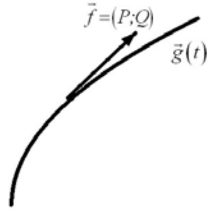
Donde y (t) es la fracción de una lista de n datos ya memorizada en un instante t, y K depende de las características de cada individuo.

Ejemplo: un estudiante tiene 3 horas para presentarse a un examen y durante este tiempo tiene que memorizar 60 datos. Si el estudiante memoriza 15 datos en los primeros 20 minutos, ¿cuántos logrará memorizar en las 3 horas?, ¿y en dos horas?

$$y(t) = 60 - a^t K\,, \quad y(0) = 0 = 60 - a^0 K \Rightarrow K = 60$$
$$y(t) = 60 - a^t 60\,,\ 15 = 60 - a^{1/3} 60 \Rightarrow a = \frac{27}{64}$$
$$y(t) = 60 - \left(\frac{27}{64}\right)^t .60 \Rightarrow y(3) = 60 - \left(\frac{27}{64}\right)^3 .60 = 55{,}5$$
$$y(2) = 60 - \left(\frac{27}{64}\right)^2 .60 = 49{,}3$$

Las líneas de campo de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

Se denomina *línea de campo* de un campo vectorial $\vec{f} = (P;Q)$ a toda curva C de ecuación $\vec{g}(t) = [x(t);y(t)]$ tal que en cada punto $\vec{g}(t_0) = (x_0;y_0)$ el vector $\vec{f}$ es tangente a ella.



$$g'(t) = [x'(t);y'(t)] = (P;Q) \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = P(x;y) \\ y'(t) = Q(x;y) \end{cases}$$

Si desarrollamos el sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x;y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x;y) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{P(x;y)}{Q(x;y)} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x;y)}{P(x;y)}$$

Llegamos así a una ecuación diferencial de primer orden. La solución general de la misma constituye la expresión cartesiana de las líneas de campo.

Ejemplos

1) $\vec{f}(x;y)=(xy;-y^2)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{xy}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\therefore ln\,y=-ln\,x+C\Rightarrow xy=C$$

Por lo tanto las líneas de campo son la familia de hipérbolas: $xy=C$.

2) $\vec{f}(x;y)=(x+y;x^2-y)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x+y}\Rightarrow(y-x^2).dx+(x+y).dy$$

Es una ecuación diferencial exacta.

$$U(x;y)=\int(y-x^2).dx=yx-\frac{x^3}{3}+\alpha(y)$$

$$U(x;y)=\int(x+y).dy.=xy+\frac{y^2}{2}+\beta(x)\ \Rightarrow\ U(x;y)=xy-\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=C$$

Obtenemos así la expresión cartesiana de las líneas de campo.

En el capítulo siguiente veremos como se determinan las líneas de campo de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ como una aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

Variables separables

1) $\frac{dy}{dx}=x$ 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ 3) $y.y'=k$ 4) $\left(1+x^2\right).y^3.dx+\left(1+y^2\right).dy=0$

5) $\frac{dy}{dx}+e^x.y=e^x.y^2$ 6) $e^x.\cos y.dx+\left(1+e^x\right).\operatorname{sen} y.dy=0$

7) $\left(3+x^2\right).dy-2xy.dx=0$ 8) $3y.\left(x^2-3x+2\right)..dy-\sqrt{1-y^2}.dx=0$

9) $\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2+3y^2}}.dy+\frac{dx}{3y}=0$ 10) $y'=\frac{\sqrt{4-4y^2}.(2x+1)}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$, hallar la solución particular para $P_0=(1;0)$

11) $\sqrt{y^2+2y+4}.\operatorname{sen}\ x.dx+(6y+6).\cos^2 x.dy=0$

Homogéneas

1) $y^2-x^2=2xy.\frac{dy}{dx}$, hallar la solución particular para $P_0=(1;1)$

2) $(x+y).dx+x.dy=0$ 3) $\left(y^2+xy\right).dx-x^2.dy=0$

4) $xy^2.dy=\left(y^3-3x^3\right).dx$ 5) $\left(y^2-x^2\right).y'+2xy=0$

6) $(x-y).dx+(x+y).dy=0$ 7) $(2x-3y).dx=(2y+3x).dy$

8) $\left(2x^2+2y^2\right).dx-4x^2.dy=0$ 9) $\frac{dy}{dx}=-\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

10) $\left(e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right).dx-dy=0$ 11) $y.dx+\left(2\sqrt{xy}-x\right).dy=0$

Lineales

1) $y'+\operatorname{sen}x.y=3\operatorname{sen}x$, hallar la solución particular para $P_0=\left(\frac{\pi}{2};0\right)$

2) $y'+\cos x.y=3\cos x$ 3) $y'-\frac{2}{x}.y=2x^2-x+1$ 4) $y'+\frac{3}{x}.y=x^2-x$

5) $\frac{dy}{dx}+\operatorname{sen}x.y=2x.e^{\cos x}$ 6) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$ 7) $y'+\frac{2x}{x^2+1}.y=x$

8) $y'+5y=e^{5x}$ 9) $(x-1).y'+y=x^2-1$ 10) $y'=e^x-y$

11) $y'-y.tg\,x=\dfrac{1}{cos\,x}$, hallar la S.P. para $P_0=(0;0)$

Exactas

1) $(x+y).dx+(2y+x).dy=0$, hallar la S.P. para $P_0=(2;1)$

2) $(2x-y)+(y^2-x).\dfrac{dy}{dx}=0$ 3) $y'=\dfrac{2xy}{y^2-x^2}$

4) $(x^2+y.e^{2y}).dx+(2xy+x)..e^{2y}.dy=0$ 5) $y'=\dfrac{x+y+1}{y-x+3}$

6) $\left(e^x+ln\,y+\dfrac{y}{x}\right).dx+\left(\dfrac{x}{y}+ln\,x+sen\,y\right).dy=0$

7) $sen\,y+(1+x.cos\,y).y'=0$

8) $(sen\,y+sen\,x.\,y).dx+(x.cos\,y-cos\,x).dy=0$, hallar la S.P. si $P_0=(\pi;\frac{\pi}{2})$

Factor integrante

1) $(x-2y^2).dx+2xy.dy=0$, hallar la solución particular para $P_0=(1;0)$

2) $(x^2+y^2+x).dx+xy.dy=0$ 3) $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right).dx+(x^2+y^2).dy=0$

4) $2x+y^2+xyy'=0$ 5) $(3xy+2y^2).dx+(x^2+2xy).dy=0$

Bernoulli

1) $y'+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+4}{y^2}$ 2) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{3x}=y^4.lnx$ 3) $xy'-y=y^3$

4) $x^2y'+2xy=y^3$ 5) $y'+\dfrac{1}{x}y=x^3.y^4$ 6) $y'+y.tg\,x=\dfrac{cos^2x}{y}$

7) $y'+y=xy^3$ 8) $xy'+y=-xy^2$ 9) $xy'+y=x^2y^2$

10) $xy'-2y=4x^3\sqrt{y}$

Reducibles a homogéneas

1) $(-x+y-3).dx+(x+y-1).dy=0$ 2) $(x-2y+5).dx+(2x-y+4).dy=0$

3) $(4x+3y+1).dx+(3x+2y+1).dy=0$ 4) $(3x+3y-1).dx+(x+y+1).dy=0$

5) $(2x-5y+3).dx-(5x-12y+8).dy=0$ 6) $y^{'}=\dfrac{x+3y-5}{x-y-1}$

Ricatti

1) $y'-xy^2+2x^2y-2x-x^3-1=0$, $y_p=x$

2) $y'-2x^2-x^{-1}y+2y^2=0$, $y_p=x$

3) $y'-6-18x-\dfrac{1+12x}{x}y+\dfrac{2}{x}y^2=0$, $y_p=3x$

Clairaut (calcular la S.G. y la S.S.)

1) $y=y'x+ln\,y'$ 2) $y=y'x+y'^3$ 3) $y=y'x-e^{y'}$ 4) $y=y'(x-5)+y'^2$

Generales

1) $y'+2xy=4x$

2) $x^2.dy+xy.dx=8x^2.cos^2x.dx$

3) $\dfrac{x^2+x-2}{3x-2}.dy+\dfrac{\sqrt{3y^2-6y}}{y-1}.dx=0$

4) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{cos^2x}\right).dx+\left(\dfrac{1}{y}+tg\,x\right).dy=0$

5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)\,xy}$

6) $y'=\dfrac{ln\left(x^2+1\right)}{y^3}$

7) $x.dy+y.dx=sen\,x.dx$

8) $\left(2xy.e^{x^2}-2x\right).dx+e^{x^2}.dy=0$

9) $(3+y^2.cos\,x).dx+2y.sen\,x.dy=0$

10) $(3xy^2+8x^2).dx+2x^2y.dy=0$

11) $\dfrac{dy}{dx}-6y=x$

12) $\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$ hallar la solución particular para $P_0=(0;2)$

13) $(y+xy^2).dx-x.dy=0$

14) $(x^4+y^4).dx-xy^3.dy=0$

15) $(-x-2y-1).dx+(2x+4y+3).dy=0$

Trayectorias ortogonales

a) $y^4 = Cx$ b) $x + 2y = C$ c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = C$

Problemas

1) Calcular mediante una integral doble el área de la región plana del 1º cuadrante limitada $y = 4x$, $2y = 3x$ e $y = f(x)$ si esta última es la solución particular de la ecuación $x.y' + y = 2$ que pasa por $P_0 = (1;4)$.

2) Calcular el área de la región plana limitada por la curva solución de la ecuación $x.y' = y + x^2$ que pasa por (2;4) y la recta de ecuación $x + y = 6$.

3) Analice los puntos críticos de $f(x, y)$ si $\nabla f = (h(x) + 6xy - 2y - 3;\ 3x^2 - 2x - 1)$, donde h es la solución particular de $\dfrac{h'}{2} + \dfrac{3}{x} = -x^{-1}.h$ que pasa por (1;15).

4) Dada $f(x, y) = 2y.h(x)$ con $h(x)$ derivable, determine el valor y la dirección de derivada direccional máxima de $f(x, y)$ en (1;2) si $h(x)$ es la solución de $xh' - (1 + 3x).h = 0$, con $h(1) = e^3$.

5) Si $y = f(x)$ es la S. P. de $y' + y = x^2 + 1$ que pasa por $P_0 = (1;2)$, hallar el punto más cercano de la gráfica de la misma a $P_1 = (1;1)$.

6) Dada $\vec{f}(x;y) = \left(y.g(x); y^2 - g(x) + x^2\right)$, hallar $g(x)$ para que $\vec{f}$ tenga matriz jacobiana simétrica si $\vec{f}(0;2) = (2;3)$.

7) Calcular el área de la superficie S de ecuación $y = f(x)$ con $0 \le z \le 1$ y $x \le 1$ si y es la solución particular de $y' + y = x^2 + 2x$ que pasa por (0;0).

8) Calcular la circulación de $\vec{f}(x;y) = \left(y - x; 2x^2\right)$ desde (1;1) a (0;–4) con a lo largo de la curva la solución particular de $xy' - 2y = 8$ que pasa por dichos puntos.

9) Al sacar una torta del horno, su temperatura es de 180 °C. Después de 3 minutos, su temperatura es de 120 °C. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 22 °C?

RESPUESTAS

Variables separables

1) $y=\frac{x^2}{2}+C$ 2) $y=C.x$ 3) $\frac{y^2}{2}=k.x+C$ 4) $\frac{1}{2y^2}-ln\,y=x+\frac{x^3}{3}+C$

5) $ln\,\frac{y-1}{y}=e^x+C$ 6) $\left(1+e^x\right).C=cos\,y$ 7) $y=\left(3+x^2\right).C$

8) $ln\frac{x-2}{x-1}=-3\sqrt{1-y^2}+C$ 9) $\sqrt{2+3y^2}+C=-ln\frac{x-2}{x-1}$

10) $\frac{1}{2}arc\,sen\,y=x+C$ S.P.: $\frac{1}{2}arc\,sen\,y=x-1$

11) $sec\,x+C=-6\sqrt{y^2+2y+4}$

Homogéneas

1) $x^{-1}.C=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1$ S.P.: $x^{-1}.2=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1$ 2) $x^{-1}.C=\sqrt{1+2\frac{y}{x}}$

3) $ln\,(x.C)=-\frac{x}{y}$ 4) $y^3=-9x^3.ln\,x+Cx^3$ 5) $\frac{y}{y^2+x^2}=C$

6) $\frac{1}{2}ln\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]+arc\,tg\,\frac{y}{x}=-ln\,x+C$ 7) $x.C=\sqrt{\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{3y}{x}-1\right)^{-1}}$

8) $ln\,x=-\frac{2x}{y-x}+C$ 9) $x.C=\sqrt{x^2+y^2}-x$ 10) $ln\,x=-e^{-\frac{y}{x}}+C$

11) $\sqrt{\frac{x}{y}}+ln\,y=C$

Lineales

1) $y=e^{cos\,x}\left(3e^{-cos\,x}+C\right)$; S.P. $y=e^{cos\,x}\left(3e^{-cos\,x}-3\right)$

2) $y=e^{-sen\ x}\left(3e^{sen\ x}+C\right)$ 3) $y=x^2\left(2x-ln\ x-\dfrac{1}{x}+C\right)$

4) $y=x^{-3}\left(\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^5}{5}+C\right)$ 5) $y=e^{cos\,x}\left(x^2+C\right)$ 6) $y=(x+1)^2\left(\dfrac{x^2}{2}+x+C\right)$

7) $y=\left(x^2+1\right)^{-1}\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C\right)$ 8) $y=e^{-5x}\left(\dfrac{e^{10x}}{10}+C\right)$ 9) $y=\dfrac{x^3-3x+C}{3(x-1)}$

10) $y=\dfrac{1}{2}e^x+C.e^{-x}$ 11) $y=\dfrac{1}{cos\ x}(x+C)$ S.P.: $y=\dfrac{x}{cos\ x}$

Exactas

1) $xy+x^2+y^2=C$, S.P.: $xy+\dfrac{x^2}{2}+y^2=5$ 2) $xy-x^2+\dfrac{y^3}{3}=C$

3) $-x^2y+\dfrac{y^3}{3}=C$ 4) $\dfrac{x^3}{3}+x\,y.e^{2y}=C$ 5) $x^2+2xy-y^2+2x-6y=C$

6) $x.ln\,y+y.ln\,x+e^x-cos\,y=C$ 7) $x.sen\,y+y=C$

8) $x.sen\,y-y.cos\,x=C$; S.P.: $x.sen\,y-y.cos\,x=\dfrac{3\pi}{2}$

Factor integrante

1) $-x^{-1}+y^2x^{-2}=C$, S.P.: $-x^{-1}+y^2x^{-2}=-1$ 2) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}=C$

3) $x^2e^xy+e^x\dfrac{y^3}{3}=C$ 4) $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2y^2}{2}=C$ 5) $x^3y+x^2y^2=C$

Bernoulli

1) $y^3=3x^{-3}\left(\dfrac{x^6}{6}+x^4+C\right)$ 2) $y^{-3}=-3\left(\dfrac{x}{2}ln\ x-\dfrac{x^4}{4}+Cx^{-1}\right)$

3) $y^{-2}=C.x^{-2}-1$ 4) $y^{-2}=\dfrac{2}{5x}+C.x^4$ 5) $y^{-3}=x^3(-3x+C)$

6) $y^2=2\cos^2 x.(x+C)$ 7) $y^{-2}=x+\dfrac{1}{2}+C.e^{2x}$ 8) $y^{-1}=x.(ln\ x+C)$

9) $y=\dfrac{1}{Cx-x^2}$ 10) $y=\left(x^3+Cx\right)^2$

Reducibles a homogéneas

1) $y^2+2xy-x^2-6x-2y=C$ 2) $(x+y-1)^3=(y-x-3).C$

3) $y^2+3xy+2x^2+y+x=C$ 4) $C=3x+y+2\,ln|x+y-1|$

5) $x^2-5xy+6y^2+3x-8y+2=C$ 6) $\dfrac{4-2x}{x+y-3}=ln|x+y-3|+C$

Ricatti

1) $y=x+\dfrac{2}{C-x^2}$ 2) $y=x+\dfrac{2x}{1+Ce^{2x^2}}$ 3) $y=3x+\dfrac{1}{2+Cx}$

Clairaut

1) $y=x.C+ln\ C$, S.S.: $y=-[1+ln(-x)]$

2) $y=x.C+C^3$, S.S.: $27y^2+4x^3=0$

3) $y=x.C-e^C$, S.S.: $y=-x.(ln\,x+1)$

4) $y=C(x-5)+C^2$, S.S.: $y=-\dfrac{(x-5)^2}{4}$

Generales

1) $y=e^{-x^2}\left(2e^{x^2}+C\right)$, lineal, y V.S.

2) $y=x^{-1}\left(2x^2+2x\,sen\,2x+cos\,2x+C\right)$, lineal

3) $\dfrac{1}{3}ln(x-1)+\dfrac{8}{3}ln(x+2)+ln\ C=-\dfrac{1}{3}\sqrt{3y^2-6y}$, V.S.

4) $ln\,x+y.tg\,x+ln\,y=C$, exacta 5) $\left(1+y^2\right).\left(x^2+1\right)=x^2C$, V.S.

6) $x.ln\left(1+x^2\right)-2x+2arc\,tg\ x+C=\dfrac{y^4}{4}$, V.S.

7) $y=x^{-1}(-cos\ x+C)$, lineal y exacta 8) $y.e^{-x^2}-x^2=C$, exacta y lineal

9) $3x+y^2.sen\ x=C$. exacta, Bernoulli 10) $x^3y^2+2x^4=C$, F.I., Bernoulli

11) $y = -\frac{x}{6} - \frac{1}{36} + e^{6x}.C$, lineal

12) $y = e^{-2x}\left(e^{x} + C\right)$, lineal; S.P.: $y = e^{-2x}\left(e^{x} + 1\right)$

13) $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$, F.I., Bernoulli 14) $ln\, x - \frac{y^4}{4x^4} = C$, F.I.

15) $ln\left|4x + 8y + 5\right| + 8y - 4x = C,$ red. a V.S.

Trayectorias ortogonales

a) $2x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ b) $y = 2x + C$ c) $y - 1 = C.(x-1)$

Problemas

1) A = $1 + 2\,ln\,2$, 2) A = $\frac{125}{6}$

3) No hay extremos, (1, –3) y (–1/3, 39) son puntos de ensilladura

4) $f'_{\vec{v}}\ máx = 2\sqrt{65}e^3$ en la dirección y sentido $\vec{v} = (8;1)$

5) P = (1;2) 6) $g(x) = 2x + e^{-x} - 2$ 7) A= $\sqrt{2}$ 8) $\int_C \vec{f}(\vec{x}).d\vec{x} = -\frac{13}{6}$

9) A los 50 minutos la temperatura es T = 22,05 °C

Capítulo 14

$$W\left(x\right)=\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1.e^{r_1 x} & r_2.e^{r_2 x} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ecuaciones diferenciales de 2º orden y orden superior

Enunciado de las condiciones de existencia y unicidad de la solución.

Ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes: ecuación característica, distintos casos.

Ecuaciones diferenciales no homogéneas: distintos métodos.

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Líneas de campo en $\mathbb{R}^3$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN

Si en la ecuación diferencial la derivada de mayor orden que aparece involucrada es la derivada segunda, estamos en presencia de una *ecuación diferencial de 2º orden*. Su expresión general es $y'' = f(x; y; y')$.

Si el exponente de la derivada 2º es 1, la ecuación diferencial es lineal. Si además los coeficientes de las derivadas que aparecen involucradas son constantes tenemos las *ecuaciones diferenciales lineales de 2º orden con coeficientes constantes,* que son las que analizamos en este texto.

Dicha ecuación diferencial tiene la siguiente expresión general:

$$a_2.y'' + a_1.y' + a_0 y = F(x) \text{ con } a_2 \neq 0$$

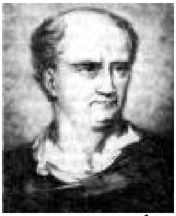
Si en dicha expresión general $F(x)=0$, la ecuación diferencial se denomina *homogénea.*

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2º ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEAS

$$a_2.y'' + a_1.y' + a_0 y = 0 \text{ con } a_2 \neq 0 \quad (1)$$

Vemos como se obtiene la solución general de este tipo de ecuaciones diferenciales. Si y_1 e y_2 son soluciones particulares *linealmente independientes* $\left(\frac{y_2}{y_1} \neq k\right)$ de (1) entonces $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ también es solución.

WRONSKI, *Joseph* (1778-1853)**:** Matemático polaco que escribió sobre la filosofía de la matemática. Nació con el nombre de Hoené pero adoptó el nombre de Wronski cuando se casó en 1810.



Es conocido entre otros temas por sus determinantes llamados ***wronskianos***.

Dem: Si $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow \; y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$ e $y'' = C_1 y''_2 + C_2 y''_2$

Por lo tanto, reemplazando en (1)

$$a_2.\left(C_1 y_1'' + C_2 y_2''\right) + a_1.\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_0.\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = 0$$

Aplicando propiedad distributiva y agrupando queda:

$C_1.\left(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1\right) + C_2.\left(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2\right) = 0$ porque cada paréntesis es 0 por ser y_1 e y_2 soluciones particulares de (1).

Además puede probarse que si

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$$ es la solución general.

Este determinante se denomina ***wronskiano*** por el matemático polaco *Joseph Wronski*.

El problema es encontrar $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$. D'Alembert propuso como solución particular a $y = e^{rx}$. Debemos determinar cuánto vale r.

De lo visto surge que $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2 e^{rx}$. Si $y = e^{rx}$ es una solución particular, debe satisfacer la ecuación diferencial, por lo tanto, reemplazando en la ecuación diferencial queda:

$$\boldsymbol{a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0}$$

Sacando factor común queda:

$$\boldsymbol{e^{rx}.(a_2 r^2 + a_1 r + a_0) = 0}.$$

D'ALEMBERT, *Juan Le Rond (1717-1783):* científico, filósofo y literato francés que nació y murió en París, es quién formula por primera vez el *Teorema Fundamental del Algebra* demostrado posteriormente por Gauss. Su nombre proviene del nombre de una iglesia (Saint Jean le Rond) en las gradas de la cual se había descubierto un niño abandonado por su madre, una aristócrata dama de la cual era hijo natural. Es el continuador directo de las ideas de Leibniz y Newton. Ingresó a la Academia de Ciencias de París en 1741 y poco después a la de Berlín. Dio un paso muy importante en el campo de la teoría de las funciones al aclarar que el argumento y los valores de una función pueden ser reales o complejos.

Esta ecuación vale cero, para los valores para los cuales $\boldsymbol{a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0}$.

La ecuación $\boldsymbol{a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0}$ recibe el nombre de *ecuación característica* asociada a la ecuación diferencial.

Si llamamos $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ a las raíces de la ecuación característica queda: $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$, que son las soluciones particulares que estamos buscando. Debemos ver ahora que ocurre con el determinante, si éste no se anula habremos obtenido la solución general de la ecuación diferencial.

$y_1 = e^{r_1 x} \Rightarrow y'_1 = r_1\, e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x} \therefore y'_2 = r_2\, e^{r_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$r_2 . e^{(r_1+r_2).x} - r_1 . e^{(r_1+r_2).x} = e^{(r_1+r_2).x} .(r_2 - r_1) \neq 0 \;\Rightarrow\; r_1 \neq r_2$$

Por lo tanto si las raíces de la ecuación característica son distintas la solución general es:

$$\boxed{y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}}$$

Caso en el que $\boldsymbol{r_1 = r_2}$

Analicemos el caso en que $\boldsymbol{r_1 = r_2}$. En este caso las soluciones no son linealmente independientes, no se cumple que el determinante es no nulo. Debemos buscar otras soluciones particulares de la ecuación diferencial.

Probamos ahora con $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = x.\, e^{r_1 x}$. Debemos primero probar que $y = x\,.\,e^{r_1 x}$ es solución de la ecuación diferencial y luego que el determinante es $\neq 0$.

$$y = x\,.\,e^{r_1 x} \;\Rightarrow\; y' = e^{r_1 x} + x.r_1\, e^{r_1 x} \;\therefore\; y'' = 2\, r_1\, e^{r_1 x} + r_1^2 x.\, e^{r_1 x}$$

$$a_2\left(2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x.e^{r_1 x}\right) + a_1\left(e^{r_1 x} + r_1 x.e^{r_1 x}\right) + a_0\, x.e^{r_1 x} =$$

$$= e^{r_1 x}\left(2a_2 r_1 + a_1\right) + x.e^{r_1 x}.\left(a_2 r_1^2 + a_1 r_1 + a_0\right) = 0$$

$a_2 r_1^{\,2} + a_1 r_1 + a_0 = 0$ porque r_1 es raíz de la ecuación característica.
$2a_2\, r_1 + a_1 = 0$ porque r_1 es raíz doble de la ecuación característica $\therefore$

$$r_1 = -\frac{a_1}{2\, a_2} \;\Rightarrow\; 2a_2\, r_1 + a_1 = 0$$

Veremos ahora que el determinante no se anula.

$$y_1 = e^{r_1 x} \Rightarrow y'_1 = r_1\, e^{r_1 x} \text{ e } y_2 = x.e^{r_1 x} \Rightarrow y'_2 = e^{r_1 x} + r_1\, x\,.\,e^{r_1 x} \Rightarrow$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x.e^{r_1 x} \\ r_1\, e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + r_1 x.e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} + e^{2r_1 x}\, r_1 x - x r_1\, e^{2r_1 x} = e^{2r_1 x} \neq 0$$

$\Rightarrow\; y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2 x.\,e^{r_1 x}$ es la solución general.

Caso en el que r_1 y r_2 son complejas

Si bien este caso está incluido en el caso en el cual $r_1 \neq r_2$, conviene expresar la solución en su forma aparentemente real.

Si $\boldsymbol{r_1 = a + bi}$, debe ser $\boldsymbol{r_2 = a - bi}$, por ser las raíces complejas conjugadas. La solución general es:

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}$$

Si utilizamos las fórmulas de Euler: $\begin{cases} e^{bix} = cos\,(bx) + i.sen(bx) \\ e^{-bix} = cos\,(bx) - i.sen(bx) \end{cases}$ la solución general queda: $y = C_1 e^{ax}.\,e^{bix} + C_2\, e^{ax}.\,e^{-bix}$, por lo tanto

$$y \;=\; e^{ax}.\left[C_1\left(cos\,(bx) + i\;sen\,(bx)\right) + C_2\,\left(cos\,(bx) - i\;sen\,(bx)\right)\right]$$

$$y = e^{ax}.\left[\left(C_1 + C_2\right).\,cos\,(bx) + i\,.\left(C_1 - C_2\right).\,sen\,(bx)\right]$$

Si hacemos $C_1 + C_2 = K_1$ e $i.(C_1 - C_2) = K_2$, queda:

$y = e^{ax}.\left[K_1\;cos\,(bx) + K_2\;sen\,(bx)\right]$, que es la solución general, en este caso (llamada solución aparentemente real).

Ejemplos

a) $\boldsymbol{y'' - 4y' + 3y = 0}$

Obtenemos la ecuación característica: $r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 3$ y $r_2 = 1$, por lo tanto la solución general es: $y = C_1\, e^{3x} + C_2\, e^{x}$.

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Obtenemos la ecuación característica: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2$ y $r_2 = 2$, por lo tanto la solución general es: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x . e^{2x}$

c) $y'' + 4y = 0$

Obtenemos la ecuación característica: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2i$ y $r_2 = -2i$, por lo tanto la solución general es: $y = K_1 cos\,(2x) + K_2 sen\,(2x)$

¿Cómo se obtienen las soluciones particulares?

En este caso vimos que la solución general tiene dos constantes C_1 y C_2. Debemos recordar un teorema debido a Cauchy que expresa que dado un punto $P_0 = (x_0;y_0)$ del plano y una pendiente en dicho punto $y'(x_0)$, de las doblemente infinitas curvas que componen la solución general una sola pasa por ese punto y tiene esa pendiente. Es decir que prefijados el punto y la pendiente, quedan determinados C_1 y C_2.

Por lo tanto para obtener la solución particular de una ecuación diferencial de 2º orden debemos fijar el punto y la pendiente.

Ejemplo

Del ejemplo a) visto anteriormente busquemos la solución particular que pasa por $P_0 = (0;0)$ y tal que $y'(0) = 1$. La solución general es:
$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$.

Con las dos condiciones formamos un sistema de ecuaciones, la primera ecuación surge de reemplazar en la solución general y la segunda de reemplazar en la derivada de la solución general.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \; C_1 = \frac{1}{2} \;\; y \;\; C_2 = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la solución particular es: $y = \frac{1}{2} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{x}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2º ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEAS

En este caso $F(x) \neq 0$, tienen la siguiente forma:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = F(x) \quad F(x) \neq 0 \text{ y con } a_2 \neq 0$$

La solución general de este tipo de ecuaciones diferenciales es igual a *la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y de una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.*

Demostración

Si llamamos y_h a la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada e y_p a la solución particular, tenemos que la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es $y = y_h + y_p$.

Demostraremos que satisface la ecuación diferencial:

$$a_2.\left(y_h'' + y_p''\right) + a_1.\left(y_h' + y_p'\right) + a_0.\left(y_h + y_p\right) = F(x) \Rightarrow$$

$$\left(a_2 y_h'' + a_1 y_h' + a_0\, y_h\right) + \left(a_2 y_p'' + a_1 y_p' + a_0\, y_p\right) = 0 + F(x) = F(x)$$

Vemos que el primer paréntesis es 0 por ser solución de la ecuación diferencial homogénea y el segundo paréntesis es $F(x)$ por ser y_p una solución particular.

El problema que se presenta para resolver estas ecuaciones diferenciales es encontrar la solución particular (y_p). Esta solución particular depende de $F(x)$. Para distintas formas de $F(x)$ probaremos distintas soluciones particulares.

Veremos algunos casos que se pueden aplicar cuando las $F(x)$ son funciones de los siguientes tipos: polinómicas, exponenciales de la forma e^{bx} o trigonométricas del tipo *sen x*, *cos x*. Esto se debe a que las derivadas de este tipo de funciones son funciones del mismo tipo. Hay varios métodos para obtener y_p.

MÉTODOS PARA HALLAR Y_P

Analizamos en primer lugar el *método de los coeficientes indeterminados*.

A) Método de los coeficientes indeterminados

Ejemplos: Si $F(x)$ es:

a) un polinomio de grado n, y_p es un polinomio del mismo grado completo. Las incógnitas son los coeficientes del polinomio.

b) Si $F(x)$ es del tipo $A.e^{bx}$, y_p tiene la forma $\alpha.e^{bx}$, donde la incógnita es α.

c) Si $F(x) = m.sen\,(nx)$, o $F(x) = r.cos\,(nx)$, o
$$F(x) = m.sen\,(nx) + r.cos\,(nx),$$
$y_p = \alpha\,.sen\,(nx) + \beta\,.cos\,(nx)$, las incógnitas son α y β.

d) Si $F(x)$ fuese una combinación lineal de los casos anteriores, la solución particular es una combinación lineal de las soluciones particulares vistas.

Planteada la forma genérica de y_p, debemos encontrar los coeficientes.

Nota importante: los términos de y_p deben ser *linealmente independientes* con los términos *de* y_h. Si no fuese así esos términos deben, como ya vimos, multiplicarse por x hasta que se obtenga la independencia lineal.

Ejemplos

a) $y''+2y'-3y = 6$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada: $y''+2y'-3y=0$. Obtenemos la ecuación característica: $r^2+2r-3 = 0 \Rightarrow r_1 = -3$ y $r_2 = 1$. La solución de la ecuación diferencial homogénea es: $y_h = C_1e^{-3x} + C_2e^x$.

Buscamos ahora la solución particular, y_p debe ser un polinomio grado 0: $(y = k)$.

$$y_p = k \;\Rightarrow\; y'_p = 0 \;\;\therefore\;\; y''_p = 0$$

Por ser una solución particular de la ecuación diferencial debe satisfacer la misma, por lo tanto:

$$0 + 2.0 - 3k = 6 \Rightarrow k = -2 \;\therefore\; y_p = -2 \;\Rightarrow\; y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - 2$$

b) $y'' - y' - 6y = 2x^2 - 3x$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada: $y'' - y' - 6y = 0$. Obtenemos la ecuación característica: $r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 3$ y $r_2 = -2$. La solución de la ecuación diferencial homogénea es: $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$.

Buscamos ahora la solución particular, y_p debe ser un polinomio completo de 2º grado. Debemos encontrar los coeficientes.

$y_p = Ax^2 + Bx + C$
$y'_p = 2Ax + B$
$y''_p = 2A$

Por ser una solución particular de la ecuación diferencial debe satisfacer la misma, por lo tanto: $2A - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 2x^2 - 3x$,

$$\begin{cases} -6A = 2 \\ -2A - 6B = -3 \\ 2A - B - 6C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3},\; B = \frac{11}{18},\; C = -\frac{23}{108} \;\therefore\; y_p = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{18}x - \frac{23}{108}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{18}x - \frac{23}{108}$$

c) $y'' - 6y' + 9y = \cos x$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Obtenemos la ecuación característica: $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3$ y $r_2 = 3$. La solución de la ecuación diferencial homogénea es: $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 x.e^{3x}$.

Buscamos ahora la solución particular, y_p debe ser de la forma: $y_p = \alpha.\operatorname{sen} x +$ $+ \beta.\cos x$. Debemos encontrar los coeficientes α y ß.

$y_p = \alpha.\operatorname{sen} x + \beta.\cos x$ $\quad y'_p = \alpha.\cos x - \beta.\operatorname{sen} x$ $\quad y''_p = -\alpha.\operatorname{sen} x - \beta.\cos x$

Por ser una solución particular de la ecuación diferencial debe satisfacer la misma, por lo tanto:

$-\alpha.sen\ x - \beta.cos\ x - 6\alpha.cos\ x + 6\beta.sen\ x + 9\alpha.sen\ x + 9\beta.cos\ x = cos\ x$
$(8\alpha + 6\beta).\ sen\ x + (8\beta - 6\alpha).\ cos\ x = cos\ x$

$$\begin{cases} 8\beta - 6\alpha = 1 \\ 6\beta + 8\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow\ \alpha = -\frac{3}{50},\ \beta = \frac{2}{25}.\quad \text{La } y_p = -\frac{3}{50} sen\ x + \frac{2}{25} cos\ x$$

$$\Rightarrow\ y = C_1 e^{3x} + C_2 x.e^{-3x} - \frac{3}{50} sen\ x + \frac{2}{25} cos\ x$$

d) $y'' - y' - 2y = 4e^{3x} + 2x$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada: $y'' - y' - 2y = 0$.

Obtenemos la ecuación característica: $r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. La solución de la ecuación diferencial homogénea es: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Buscamos ahora la solución particular, y_p debe ser una combinación entre una exponencial y un polinomio completo de 1º grado. Debemos encontrar los coeficientes.

$$y_p = \alpha.e^{3x} + Ax + B\ \Rightarrow\ y'_p = 3\alpha.e^{3x} + A\quad \therefore\quad y''_p = 9\alpha.e^{3x}$$

Por ser una solución particular de la ecuación diferencial debe satisfacer la misma, por lo tanto: $9\alpha.e^{3x} - 3\alpha.e^{3x} - A - 2\alpha.e^{3x} - 2A - 2B = 4e^{3x} + 2x$

$$\begin{cases} 4\ \alpha = 4 \\ -2A = 2 \\ -A\ - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1,\ A = -1,\ B = \frac{1}{2}\ \therefore\ y_p = e^{3x} - x + \frac{1}{2}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + e^{3x} - x + \frac{1}{2}$$

Caso en que algún término de y_p no es linealmente independiente con y_h

$$y'' + y' - 2y = 3e^x$$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada: $y'' + y' - 2y = 0$.

Obtenemos la ecuación característica: $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -2$ y $r_2 = 1$. La solución de la ecuación diferencial homogénea es: $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Buscamos ahora la solución particular, y_p debe ser una función exponencial de la forma αe^x multiplicada por x ($\alpha x.e^x$) porque e^x forma parte de y_h y por lo tanto no se respeta la independencia lineal. Debemos encontrar el coeficiente α.

$$y_p = \alpha.x.e^x \Rightarrow y_p' = \alpha.\left(e^x + x.e^x\right) \Rightarrow y_p'' = \alpha.\left(e^x + e^x + x.e^x\right) \Rightarrow 3\alpha.e^x = 3e^x$$
$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + x.e^x$$

Si no hubiésemos multiplicado por x hubiera ocurrido lo siguiente: $y_p = \alpha.e^x$ $\Rightarrow y_p' = y_p'' = \alpha.e^x + \alpha.e^x - 2\alpha.e^x = 3e^x \therefore 0 = 3e^x$. Llegamos a un absurdo. Por eso siempre que en la solución particular aparezca una solución que no sea linealmente independiente con una que ya apareció en y_h, la solución debe multiplicarse por x.

B) Método de las partes variables

El método consiste en trabajar con las llamadas *partes variables* de $F(x)$.

Parte variable

Dada una función se llama *parte variable* a la parte que depende de la variable (no se tienen en cuenta los coeficientes). Por ejemplo, si $F(x) = 3x^2$, la p.v. es x^2, si $F(x) = 4\cos x + 3e^{2x}$, las p.v. son $\cos x$ y e^{2x}. Si $F(x) = C$, la p.v se puede pensar como $x^0 = 1$.
Dada una $F(x)$ hallamos sus derivadas sucesivas hasta que observemos que en sus términos no aparecen nuevas partes variables.

Por ejemplo: $F(x) = x^2 + \cos x$

$$F'(x) = 2x - \operatorname{sen} x$$
$$F''(x) = 2 - \cos x$$
$$F'''(x) = \operatorname{sen} x$$

Por el primer término (x^2) las p.v. son (x^2, x, 1), por el segundo término ($\cos x$), las p.v. son ($\cos x$, $\operatorname{sen} x$). Por lo tanto las p.v. de $F(x)$ son (x^2, x, 1, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$).

Si $G(x) = x - cos\ x + sen\ x$

$G'(x) = 1 + sen\ x + cos\ x$

$G''(x) = cos\ x - sen\ x$

Por el primer término (x) las p.v. son (x,1), por el segundo término ($cos\ x$), las p.v. son ($cos\ x$, $sen\ x$) y por el tercer término las p.v. son ($sen\ x$, $cos\ x$). Por lo tanto las p.v. de $F(x)$ son (x, 1, $cos\ x$, $sen\ x$). Si algún término se repite en las p.v. de distintas funciones, se considera una sola vez.

Determinación de y_p

Para determinar y_p hay que tener en cuenta la función $F(x)$ que figura en el segundo miembro de la ecuación diferencial. De esa función se calculan sus partes variables para cada término. Una vez determinados estos grupos se hace el siguiente análisis: se observa la expresión de la solución de la ecuación homogénea asociada y si las partes variables de los términos de ésta se repiten en algún grupo de las partes variables de $F(x)$, se debe multiplicar por x cada término de este grupo. Si en el nuevo grupo así formado se vuelve a repetir una parte variable de la homogénea, se vuelve a multiplicar todo el grupo por x y así sucesivamente hasta que no se repitan las partes variables.

En los grupos así formados no deben haber partes variables que se repitan, si así ocurriera se consideran una sola vez.

Una vez determinadas todas las partes variables, la y_p es una combinación lineal de ellas. Una vez determinada y_p se procede igual que en el método visto anteriormente.

Ejemplos: a) $y'' - 5y' + 6y = 2x^2$

Primero calculamos y_h: $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 3$, $r_2 = 2$. $y_h = C_1.e^{3x} + C_2.e^{2x}$. Calculamos ahora las p.v. de $F(x)$: $F(x) = 2x^2$, $F'(x) = 4x$, $F''(x) = 4$, las p.v. $(2x^2) = (x^2; x; 1)$.

Como no se repiten con las p.v. de y_h (e^{3x}, e^{2x}), entonces $y_p = Ax^2 + Bx + C$.

b) $y''+4y'=x+3$

Primero calculamos y_h: $r^2+4r=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=-4 \Rightarrow y_h=C_1+C_2.e^{-4x}$
Calculamos ahora las p.v. de $F(x)$: $F(x)=x+3$, $F'(x)=1$, las p.v.$(x)=(x;1)$, las p.v.$(3)=1$.

Vemos que se repite x^0 (C_1 y 1). Debemos multiplicar todo el grupo $(x;1)$ por x, nos queda el nuevo grupo (x^2, x) y el grupo (1) también por x, nos queda el nuevo grupo (x). Ahora no hay repetición entre las p.v. de la solución de la homogénea y estos nuevos grupos. Finalmente las p.v. de $F(x)$ quedan: $(x^2;x)$. La x está en ambos grupos, la consideramos una sola vez.
Entonces $y_p=Ax^2+Bx$.

c) $y''-y=e^x.sen\,x$

Primero calculamos y_h: $r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1.\ \ y_h=C_1e^x+C_2\,e^{-x}$.
Calculamos ahora las p.v. de $F(x)$: $F(x)=e^x.sen\,x$, $F'(x)=e^x.sen\,x+e^x.cos\,x$, $F''(x)=e^x.sen\,x+e^x.cos\,x+e^x.cos\,x-e^x.sen\,x$, las p.v. $(e^x.sen\,x)=(e^x.sen\,x;\ e^x.cos\,x)$.

Vemos que no se repiten las partes variables del grupo con las que aparecen en la solución de la homogénea $(e^x;e^{-x})$, por lo tanto las p.v. de $F(x)$ quedan: $(e^x.sen\,x;\ e^x.cos\,x)$. Entonces $y_p=Ae^x.sen\,x+Be^x.cos\,x$.

C) Método Variación de Parámetros de Lagrange[1]

Se trata de un método para resolver ecuaciones diferenciales lineales de enésimo orden. Comenzaremos estudiando el método para ecuaciones de según-do orden y lo generalizaremos.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=g(x) \quad \text{con } a(x)\neq 0$$

[1] Tema desarrollado por Pablo Caviezel, docente de Análisis Matemático II de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA.

La superioridad de este método con respecto a los métodos vistos anteriormente radica en dos puntos fundamentales:

- No es necesario que la ecuación tenga coeficientes constantes.
- $g(x)$ puede ser **cualquier** función que dependa de *x,* no debiendo necesariamente limitarse a polinomios, exponenciales o trigonométricas.

En el caso en que $a(x)=0$, la ecuación diferencial es de primer orden, lineal, y el método aprendido para estas ecuaciones es justamente éste.

Por simplicidad de notación, reduciremos los coeficientes de la ecuación a letras simbólicas, entendiéndose que pueden ser funciones en *x*. Así, tenemos:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Para resolverla, resolvemos por algún método conocido la ecuación diferencial homogénea asociada: $ay''_h + by'_h + cy_h = 0$, cuya solución es de la forma: $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$. y_1 e y_2 son soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación diferencial y C_1 y C_2 constantes indeterminadas.

Entendemos que la solución de la ecuación diferencial completa es la suma de la solución de la ecuación diferencial homogénea más una solución particular. Es decir: $y = y_h + y_p$ Lagrange propone como solución particular a la expresión que surge de reemplazar en la solución de la ecuación diferencial homogénea las constantes por funciones de *x* a determinar. Es decir:
$y_p = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$.

El problema es determinar qué funciones son éstas. Simplificando la notación, podemos expresar la solución particular como: $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$. Sabemos que la solución particular es solución particular de la ecuación completa y, como tal, debe satisfacerla. Entonces procedemos a calcular sus derivadas para reemplazar en la ecuación: $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$.

$y'_p = v'_1\, y_1 + v_1y'_1 + v'_2\, y_2 + v_2y'_2$

Vamos a imponerle una condición a ambas funciones. Pedimos que: $v'_1\, y_1 + v'_2\, y_2 = 0$. A esta condición la llamaremos Condición Nº 1. Es decir que:

- $v'_1\, y_1 + v'_2\, y_2 = 0$ **Condición N º 1**

Bajo tal esquema, tenemos entonces:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$
$$y'_p = v_1 y'_1 + v_2 y'_2$$
$$y''_p = v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2$$

Reemplazando en la ecuación completa: $ay'' + by' + cy = g(x)$, resulta:

$$a(v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2) + b(v_1 y'_1 + v_2 y'_2) + c(v_1 y_1 + v_2 y_2) = g(x)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$av'_1 y'_1 + av_1 y''_1 + av'_2 y'_2 + av_2 y''_2 + bv_1 y'_1 + bv_2 y'_2 + cv_1 y_1 + cv_2 y_2 = g(x)$$

Agrupando convenientemente, resulta:

$$av_1 y''_1 + bv_1 y'_1 + cv_1 y_1 + av_2 y''_2 + bv_2 y'_2 + cv_2 y_2 + av'_1 y'_1 + av'_2 y'_2 = g(x)$$

Extrayendo factor común,

$$v_1(ay''_1 + by'_1 + cy_1) + v_2(ay''_2 + by'_2 + cy_2) + a(v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2) = g(x)$$

Pero, dado que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada a la dada, resulta que: $ay''_1 + by'_1 + cy_1 = 0$, $ay''_2 + by'_2 + cy_2 = 0$

Con lo cual la expresión anterior se reduce a: $a(v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2) = g(x)$
A esta expresión la llamaremos Condición N º 2.

Es decir: $a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = g(x)$ **Condición N º 2**

Entonces nos quedaron dos condiciones impuestas sobre las funciones v_1 y v_2. Es decir: $\begin{cases} v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \\ a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = g(x) \end{cases}$

Se trata de un sistema de ecuaciones que, escrito en forma ordenada resulta ser:

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' = 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

Dicho sistema se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{g(x)}{a} \end{bmatrix}$$

La matriz asociada al sistema de ecuaciones se denomina **Matriz de Wronski** y se trata de una matriz no singular (es decir, admite inversa), en virtud de que las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Se resuelve el sistema para v_1' y v_2'. Se integra finalmente para hallar v_1 y v_2. La solución complementaria se obtiene entonces de la forma: $y_p = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$, que se suma finalmente a la homogénea para obtener la solución del sistema completo. Notar que se puede elegir **cualquier** constante de integración al integrar para hallar v_1 y v_2. Esto es así porque el sistema de ecuaciones impone condiciones sobre v_1' y v_2'.

***Ejemplo* 1**

Resolver la siguiente ecuación diferencial: $y''-2y'-3y=e^{2x}+3x$

Resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada: $y''-2y'_h-3y_h=0$, cuya ecuación característica es: $r^2-2r-3=0$. Vemos que las raíces características son $r_1=3$ y $r_2=-1$.
Entonces armamos la solución: $y_h=C_1\,e^{3x}+C_2.e^{-x}$.

Planteamos como solución complementaria: $y_p=v_1e^{3x}+v_2e^{-x}$
Luego, el sistema de ecuaciones resulta, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x}+3x \end{pmatrix}$$

Elegimos el método de Cramer para su resolución:

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{vmatrix}=-e^{3x}e^{-x}-3e^{3x}e^{-x}=-4e^{3x}e^{-x}=-4e^{2x}$$

$$\Delta_{v_1'}=\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{2x}+3x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-e^{-x}(e^{2x}+3x) \quad \Delta_{v_2'}=\begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & e^{2x}+3x \end{vmatrix}=e^{3x}(e^{2x}+3x)$$

Entonces:

$$v_1'=\frac{\Delta_{v_1'}}{\Delta}=\frac{-e^{-x}(e^{2x}+3x)}{-4e^{2x}}=\frac{1}{4}e^{-3x}(e^{2x}+3x)=-\frac{1}{4}(e^{-x}+3e^{-3x}x)$$

O sea que: $v_1=\int\frac{1}{4}(e^{-x}+3e^{-3x}x)dx=\frac{1}{4}\left[\int e^{-x}dx+3\int e^{-3x}xdx\right]$. Eligiendo cero para las constantes de integración resulta:

$$v_1 = \frac{1}{4}\left[-e^{-x} + 3(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}) \right] = -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-3x} - \frac{1}{12}e^{-3x}$$

Análogamente:

$$v_2' = \frac{\Delta_{v_2'}}{\Delta} = \frac{e^{3x}(e^{2x} + 3x)}{-4e^{2x}} = -\frac{1}{4}e^{x}(e^{2x} + 3x) = -\frac{1}{4}(e^{3x} + 3e^{x}x)$$

O sea que: $v_2 = \int -\frac{1}{4}(e^{3x} + 3e^{x}x)dx = -\frac{1}{4}\left[\int e^{3x}dx + 3\int e^{x}xdx \right]$.

Eligiendo cero para las constantes de integración resulta:

$$v_2 = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3x}}{3} + 3(xe^{x} - e^{x}) \right] = -\frac{1}{12}e^{3x} - \frac{3}{4}xe^{x} + \frac{3}{4}e^{x}$$

Entonces, dado que: $y_p = v_1 e^{3x} + v_2 e^{-x}$

Haciendo el reemplazo correspondiente resulta:

$$y_p = \left(-\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}x.e^{-3x} - \frac{1}{12}e^{-3x} \right).e^{3x} + \left(-\frac{1}{12}e^{3x} - \frac{3}{4}x.e^{x} + \frac{3}{4}e^{x} \right).e^{-x}$$

Aplicando la propiedad distributiva resulta:

$$y_p = -\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{12} - \frac{1}{12}e^{2x} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

O sea: $y_p = -\frac{1}{3}e^{2x} - x + \frac{2}{3}$

Y la solución general resulta de sumar la solución homogénea con la solución complementaria hallada.

Solución General: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x} - x + \frac{2}{3}$

Generalización del método

Sea la siguiente una ecuación diferencial de enésimo orden:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+a_{n-2}(x)y^{(n-2)}+...+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$$

con $a_n(x)\neq 0$ (El supraíndice entre paréntesis implica orden de derivación).

Simplificando la notación, podemos escribir:

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+...+a_2y''+a_1y'+a_0y=g(x) \qquad a_n(x)\neq 0$$

Se resuelve la ecuación homogénea asociada y su solución será del tipo:

$$y_h=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+...+C_{n-1}y_{n-1}+C_ny_n$$

Siendo $y_1; y_2; y_3;...; y_{n-1}; y_n$ funciones linealmente independientes.

Se plantea como solución complementaria la misma expresión pero variando las constantes:

$$y_p=v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3+...+v_{n-1}y_{n-1}+v_ny_n \quad \text{con } v_i=v_i(x)$$

El sistema, escrito en forma matricial para obtener las v_i' se demuestra es como sigue:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & ... & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & ... & y_{n-1}' & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & ... & y_{n-1}'' & y_n'' \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & ... & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} & ... & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ ... \\ v_{n-1}' \\ v_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ \dfrac{g(x)}{a_n} \end{bmatrix}$$

Integrando, se obtienen las $v_i=v_i(x)$ y se obtiene la solución general:

$$y=y_h+y_p$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

Lo visto para ecuaciones diferenciales de segundo orden es fácilmente generalizables a ecuaciones diferenciables de orden superior como veremos en los siguientes ejemplos.

a) Ecuaciones diferenciales homogéneas

1) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

La ecuación característica es $r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$.

$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

2) $y''' - 2y'' + y' = 0$

La ecuación característica es $r^3 - 2r^2 + r = 0$.

$r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2 x.e^x + C_3$

3) $y^{iv} - y = 0$

La ecuación característica es $r^4 - 1 = 0$.

$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = i, \quad r_4 = -i \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x$

4) $y''' - y = 0$

La ecuación característica es $r^3 - 1 = 0$.

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad r_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \Rightarrow$$
$$y = C_1 e^x + e^{x/2}\left[K_1 \cos\left(\sqrt{3}/_2\, x\right) + K_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}/_2\, x\right)\right]$$

b) Ecuaciones diferenciales no homogéneas

1) $y'''-\frac{1}{2}y''=e^{-x/2}$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es $r^3-\frac{1}{2}r^2=0$. $\quad r_1=0, \quad r_2=0, \quad r_3=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_h=C_1+C_1x+C_3e^{x/2}$

Calculamos y_p

$$y_p=Ae^{-x/2} \qquad y'_p=-\frac{1}{2}Ae^{-x/2} \qquad y''_p=\frac{1}{4}Ae^{-x/2} \qquad y'''_p=-\frac{1}{8}Ae^{-x/2}$$

Reemplazando:

$$-\frac{1}{8}Ae^{-x/2}-\frac{1}{8}Ae^{-x/2}=e^{-x/2}$$

$$-\frac{1}{4}Ae^{-x/2}=e^{-x/2}\Rightarrow -\frac{1}{4}A=1 \therefore A=-4$$

Finalmente queda que $y=C_1+C_1x+C_3e^{x/2}-4e^{-x/2}$

2) $y'''-3y''+2y'=e^{-x}+5x$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es $r^3-3r^2+2r=0$. $\quad r_1=0, \quad r_2=1, \quad r_3=2 \quad \Rightarrow \quad y_h=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{2x}$

Calculamos y_p

$$y_p=Ae^{-x}+Bx+C \qquad y'_p=-Ae^{-x}+B \qquad y''_p=Ae^{-x} \qquad y'''_p=-Ae^{-x}$$

Reemplazando:

$$-Ae^{-x}-3Ae^{-x}-2e^{-x}+2B=e^{-x}+6x$$

$$-6Ae^{-x}+2B=e^{-x}\Rightarrow -6A=1 \wedge 2B=6 \therefore A=-\frac{1}{6} \wedge B=3$$

Finalmente queda que $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-x}+3x$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2º ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

Hasta ahora hemos analizado el caso en que los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes. Veremos ahora la ecuación diferencial de Cauchy-Euler, que es un caso en el que los coeficientes son funciones de *x*.

Forma general

La forma general es:

$a_n(x)x^n y^n + a_{n-1}(x)x^{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, donde los exponentes de la *y*, indican órdenes de derivación.

Ecuación diferencial de Cauchy-Euler

Esta ecuación tiene el siguiente formato:

$$a_n x^n y^n + a_{n-1}x^{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Es un caso particular donde los coeficientes son potencias de *x* multiplicadas por constantes.

Analizamos el caso particular en que $n = 2$ y $f(x) = 0$.

$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$, con $x \neq 0$.

En este caso se ensaya como solución particular a $y = x^m$. Debemos determinar cuánto vale *m*.

De lo visto surge que $y' = mx^{m-1}$ e $y'' = m.(m-1)x^{m-2}$. Si $y = x^m$ es una solución particular, debe satisfacer la ecuación diferencial, por lo tanto, reemplazando en la ecuación diferencial queda:

$$a_2 x^2 m.(m-1)x^{m-2} + a_1 m x x^{m-1} + a_0 .x^m = 0$$

Sacando factor común x^m queda: $x^m\left[a_2 m.(m-1) + a_1 m + a_0\right] = 0$, con $x \neq 0$.

Esta ecuación vale cero, para los valores para los cuales

$a_2 m.(m-1)+a_1 m+a_0=a_2 m^2+(a_1-a_2).m+a_0=0,$ ecuación que recibe el nombre de *ecuación característica* asociada a la ecuación diferencial.

Las raíces de la ecuación son: $m_{1,2}=\dfrac{-(a_2-a_1)\pm\sqrt{(a_2-a_1)^2-4a_2.a_0}}{2a_2}$

Si llamamos m_1 y m_2 a las raíces de la ecuación característica queda: $y_1=x^{m_1}$ e $y_2=x^{m_2}$, que son las soluciones particulares que estamos buscando. Debemos ver ahora que ocurre con el determinante, si éste no se anula habremos obtenido la solución general de la ecuación diferencial.

$y_1=x^{m_1}\Rightarrow y'_1=m_1\,x^{m_1-1}$ e $y_2=x^{m_2}\Rightarrow y'_2=m_2\,x^{m_2-1}$

$$W(x)=\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\,x^{m_1-1} & m_2\,x^{m_2-1}\end{vmatrix}\neq 0$$

$$x^{m_1}\,m_2\,x^{m_2-1}-x^{m_2}\,m_1\,x^{m_1-1}=x^{m_2+m_1-1}.(m_2-m_1)\neq 0\ \Rightarrow\ m_1\neq m_2$$

Por lo tanto si las raíces de la ecuación característica son distintas la solución general es:

$$\boxed{y=C_1\,x^{m_1}+C_2\,x^{m_2}}$$

Caso en el que $m_1=m_2$

Analicemos el caso en que $m_1=m_2$, $m=-\dfrac{a_1-a_2}{2a_2}$. En este caso las soluciones no son linealmente independientes, no se cumple que el determinante es no nulo. Debemos buscar otras soluciones particulares de la ecuación diferencial.

Probamos ahora con $y_1=x^m$ e $y_2=x^m.\ln x$. Debemos primero probar que $y_2=x^m.\ln x=y_1.\ln x$ es solución de la ecuación diferencial y luego que el determinante es $\neq 0$.

$$y_2 = y_1 . \ln x \Rightarrow y_2' = y_1' . \ln x + y_1 \frac{1}{x} \therefore y_2'' = y_1'' . \ln x + 2 y_1' \frac{1}{x} - \frac{y_1}{x^2}$$

Verificamos que $a_2 x^2 y_2'' + a_1 x y_2' + a_0 y_2 = 0$.

$$a_2 x^2 \left(y_1'' . \ln x + 2\, y_1' \frac{1}{x} - \frac{y_1}{x^2} \right) + a_1 x \left(y_1' . \ln x + y_1 \frac{1}{x} \right) + a_0 y_1 . \ln x =$$

$$= \ln x \left(a_2 x^2 y_1'' + a_2 x y_1' + a_0 y_1 \right) + a_2 x^2 2\, y_1' \frac{1}{x} - a_2 x^2 \frac{y_1}{x^2} + a_1 x y_1 \frac{1}{x}$$

$a_2 x^2 y_1'' + a_2 x y_1' + a_0 y_1 = 0$ porque y_1 es solución particular de la ecuación.

Queda entonces: $2 a_2 x y_1' - a_2 y_1 + a_1 y_1 = 2 a_2 x y_1' + (a_1 - a_2) y_1$

Pero $y_1 = x^m$ $y_1' = m x^{m-1}$, reemplazando queda:

$$2 a_2 x m x^{m-1} + (a_1 - a_2) . x^m = 2 a_2 m x^m + (a_1 - a_2) . x^m = x^m . (2 a_2 m + a_1 - a_2) =$$

$$= x^m . \left[2 a_2 \left(- \frac{a_1 - a_2}{2 a_2} \right) + a_1 - a_2 \right] = x^m . [a_2 - a_1 + a_1 - a_2] = 0.$$

Por lo tanto $y_2 = x^m . \ln x$ es solución.

Veremos ahora que el determinante no se anula.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^m & x^m \ln x \\ m x^{m-1} & m x^{m-1} \ln x + x^{m-1} \end{vmatrix} = x^m \left(m x^{m-1} \ln x + x^{m-1} \right) - x^m \ln x . m x^{m-1} =$$

$$= m x . \ln x + x - m x . \ln x = x \neq 0$$

$\Rightarrow y = C_1\, x^m + C_2 x^m . \ln x$ es la solución general.

Caso en el que m_1 y m_2 son complejas

Si bien este caso está incluido en el caso en el cual $m_1 \neq m_2$, conviene expresar la solución en su forma aparentemente real.

Si $\boldsymbol{m_1 = a + bi}$, debe ser $\boldsymbol{m_2 = a - bi}$, por ser las raíces complejas conjugadas. La solución general es:

$$y = C_1 x^{a+bi} + C_2 x^{a-bi}$$

Si utilizamos las fórmulas de Euler: $\begin{cases} e^{bi} = cos\, b + i.sen\, b \\ e^{-bi} = cos\, b - i.sen\, b \end{cases}$ la solución general queda: $y = C_1 x^a . e^{bi.ln\, x} + C_2\, x^a . e^{-bi.ln\, x}$, por lo tanto

$$y = x^a . \left[C_1 \left(cos\,(b.ln\, x) + i\, sen\,(b.ln\, x)\right) + C_2\, \left(cos\,(b.ln\, x) - i\, sen\,(b.ln\, x)\right)\right]$$

$$y = e^a . \left[(C_1 + C_2) . cos\,(b.ln\, x) + i\, .(C_1 - C_2) . sen\,(b.ln\, x)\right]$$

Si hacemos $C_1 + C_2 = K_1$ e $i.(C_1 - C_2) = K_2$, queda:

$y = x^a . \left[K_1\, cos\,(b.ln\, x) + K_2\, sen\,(b.ln\, x)\right]$, que es la solución general, en este caso (llamada solución aparentemente real).

Ejemplos

Sabemos que $y' = mx^{m-1}$ e $y'' = m.(m-1).x^{m-2}$. Reemplazamos en cada caso en la ecuación para obtener los valores de m.

1) $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$

$$x^2 m.(m-1)x^{m-2} - 2xmx^{m-1} - 4x^m = x^m \left(m^2 - 3m - 4\right) = 0$$

Por lo tanto: $m^2 - 3m - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 4 \quad \wedge \quad m_2 = -1$

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^{-1}$$

2) $x^2y''-3xy'+4y=0$

$$x^2m.(m-1)x^{m-2}-3xmx^{m-1}+4x^m=x^m\left(m^2-4m+4\right)=0$$

Por lo tanto: $m^2-3m-4=0 \quad \Rightarrow \quad m_1=2 \quad \wedge \quad m_2=2$

$$y=C_1x^2+C_2x^2.ln\,x$$

3) $x^2y''+3xy'+3y=0$

$$x^2m.(m-1)x^{m-2}+3xmx^{m-1}+3x^m=x^m\left(m^2+2m+3\right)=0$$

Por lo tanto: $m^2+2m+3=0 \quad \Rightarrow \quad m_1=-1+\sqrt{2}i \quad \wedge \quad m_2=-1-\sqrt{2}i$

$$y=x^{-1}.\left[K_1\,cos\left(\sqrt{2}.ln\,x\right)+K_2\,sen\left(\sqrt{2}.ln\,x\right)\right]$$

UNA APLICACIÓN, LAS OSCILACIONES MECÁNICAS LIBRES

Oscilaciones no amortiguadas

Una de las aplicaciones que tienen las ecuaciones diferenciales de 2º orden es la descripción del movimiento de un resorte. Según la Ley de Hooke, el resorte se expande o comprime una cantidad y de unidades a partir de su posición de equilibrio (longitud natural). La fuerza F con la que tiende a volver a su posición de equilibrio es proporcional a la distancia $y.F(y)=-ky$. $k>0$, se denomina *constante elástica del resorte* y depende del material del mismo.

Si se ata una masa m al extremo del resorte, éste se va a estirar y produce un desplazamiento y a partir de su posición de equilibrio. La posición y del resorte en función del tiempo t, suponiendo que el movimiento *no es amortiguado* (es decir que no actúan otras fuerzas más que la del resorte y el peso) está dada por la ecuación diferencial: $y''+\dfrac{k}{m}y=0$.

Oscilaciones amortiguadas

En este caso actúa además otra fuerza (fuerza de fricción que amortigua el movimiento que es proporcional a la velocidad). Esta fuerza es igual a $-\,p.v,$ con $p > 0$.

La ecuación diferencial que describe este movimiento es: $y''+\dfrac{p}{m}y'+\dfrac{k}{m}y=0.$

Bajo ciertas condiciones que veremos, en este caso se producen oscilaciones amortiguadas. Resolvemos la ecuación característica $r''+\dfrac{p}{m}r+\dfrac{k}{m}=0$,

$r=-\dfrac{p}{m}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{m^2}-\dfrac{4k}{m}}$, se presentan las siguientes situaciones:

a) *Reales distintas*: $y=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$, $r_1<0,\ r_2<0$. En este caso, cuando $t \to \infty$, $y \to 0$, por lo tanto el resorte tiende a frenarse y no hay oscilaciones.

b) *Reales iguales*: $y=C_1e^{r_1t}+C_2t.e^{r_1t}$, $r_1<0,\ r_2<0$. En este caso, cuando $t \to \infty$, también $y \to 0$, por lo tanto el resorte tiende a frenarse, a una velocidad menor que el caso a) y no hay oscilaciones.

c) *Reales complejas*: $y=e^{at}\left(K_1\cos(bt)+K_2sen\,(bt)\right)$. En este caso, hay oscilaciones amortiguadas.

Ejemplo:

Calcular para qué valores de a la solución $y(t)$ de $y''+ay'+9y=0$, presenta oscilaciones amortiguadas si $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Planteamos la ecuación característica: $r^2+ar+9=0$, la resolvemos

$r=-a\pm\sqrt{a^2-36}$. $\quad a^2-36<0 \Rightarrow 0<a<6$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Vamos a ver algunos casos de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

A)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$, donde x e y son funciones continuas de t.

Para resolverlo procedemos de la siguiente manera: despejamos la variable y de la una ecuación y calculamos y'_t. Reemplazamos ambas expresiones en la otra ecuación. Obtenemos así una ecuación de segundo orden de variable independiente t. Resolvemos la ecuación, obtenemos $x(t)$. Luego reemplazamos $x(t)$ y x'_t para obtener $y(t)$.

Ejemplos

1)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$, hallar la solución particular $x(0) = 1 \wedge y(0) = 0$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = 4x - x_t'$ ❶, $y_t' = 4x_t' - x_t''$

Reemplazamos en la segunda ecuación: $4x_t' - x_t'' = x + 2(4x - x_t')$

$x_t'' - 6x_t' + 9x = 0 \Rightarrow x(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}$

Calculamos $x'(t) = 3C_1e^{3t} + C_2e^{3t} + 3C_2te^{3t}$

Reemplazamos $x(t)$ y $x'(t)$ en ❶, así obtenemos $y(t)$.

$$y(t) = 4(C_1e^{3t} + C_2te^{3t}) - (3C_1e^{3t} + C_2e^{3t} + 3C_2te^{3t}) = C_1e^{3t} - C_2e^{3t} + C_2te^{3t}$$

La solución general es $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \\ y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \end{cases}$

Buscamos ahora la solución particular: $\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

La solución particular es $\begin{cases} x(t) = e^{3t} + t e^{3t} \\ y(t) = t e^{3t} \end{cases}$

2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - 36t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y - 2e^t \end{cases}$$, hallar la solución particular $x(0) = 0 \wedge y(0) = 1$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = x_t' - 4x + 36t$ ❶, $y_t' = x_t'' - 4x_t' + 36$

Reemplazamos en la segunda ecuación:

$$x_t'' - 4x_t' + 36 = -2x + x_t' - 4x + 36t - 2e^t$$

$x_t'' - 5x_t' + 6x = 36t - 36 - 2e^t$. Debemos calcular $x_h(t)$ y $x_p(t)$

$$x_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

$$\begin{cases} x_p(t) = At + B + Ce^t \\ x_p'(t) = A + Ce^t \\ x_p''(t) = Ce^t \end{cases} \Rightarrow Ce^t - 5A - 5Ce^t + 6At + 6B + 6Ce^t = 36t - 36 - 2e^t$$

$$\begin{cases} 2C = -2 \\ 6A = 36 \\ -5A + 6B = -36 \end{cases} \Rightarrow A = 6, B = -1, C = -1 \quad \therefore \quad x_p(t) = 6t - 1 - e^t$$

$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + 6t - 1 - e^t$. Calculamos $x'(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t} + 6 - e^t$

Reemplazamos $x(t)$ y $x'(t)$ en ❶, así obtenemos $y(t)$.

$$y(t) = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t} + 6 - e^t - 4\left(C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 6t - 1 - e^t\right) + 36t =$$
$$= -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + 10 + 12t + 3e^t$$

La solución general es $\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 6t - 1 - e^t \\ y(t) = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + 10 + 12t + 3e^t \end{cases}$

Buscamos ahora la solución particular: $\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - 2 \\ 1 = -2C_1 - C_2 + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = -8 \end{cases}$

La solución particular es $\begin{cases} x(t) = 10e^{2t} - 8e^{3t} + 6t - 1 - e^t \\ y(t) = -20C_1e^{2t} + 8e^{3t} + 10 + 12t + 3e^t \end{cases}$

B) Planteamos ahora sistemas de ecuaciones que responden al siguiente formato:

$$\begin{cases} a\dfrac{dx}{dt} + b\dfrac{dy}{dt} = cx + dy + f(t) \\ e\dfrac{dx}{dt} + f\dfrac{dy}{dt} = gx + hy + g(t) \end{cases} \quad \text{con } a.f - b.e \neq 0$$

Expresamos el sistema matricialmente: $\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ g & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$

Premultiplicando por $\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}^{-1}$ obtenemos $\begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix}$ y llegamos al caso A)

Ejemplo

$$\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = -3x + sen\,t \\ \dfrac{dx}{dt} = -y + cos\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sen\,t \\ cos\,t \end{pmatrix}$$

Premultiplicamos por $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} sen\, t \\ cos\, t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\, t \\ -sen\, t + 4 cos\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + cos\, t \\ 3x - 4y - sen\, t + 4 cos\, t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_t' = -y + cos\, t \\ y_t' = 3x - 4y - sen\, t + 4 cos\, t \end{cases}$$

Llegamos así a un problema del caso A)

Despejamos *y* de la primera ecuación: $y = -x_t' + cos\, t$ ❶, $y_t' = -x_t'' - sen\, t$

Reemplazamos en la segunda ecuación:

$-x_t'' - sen\, t = 3x - 4(-x_t' + cos\, t) - sen\, t + 4 cos\, t \Rightarrow x_t'' + 4x_t' + 3x = 0$.

$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

Calculamos $x'(t) = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t}$

Reemplazamos $x(t)$ y $x'(t)$ en ❶, así obtenemos $y(t)$.

$y(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + cos\, t$

La solución general es $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \\ y(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + cos\, t \end{cases}$

2)

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = y + e^{-t} \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -2y + sen\, t \end{cases}$, hallar la solución particular $x(0) = -2 \wedge y(0) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ sen\, t \end{pmatrix}$$

Premultiplicamos por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} \\ sen\ t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-t} + sen\ t \\ 2e^{-t} - sen\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - e^{-t} + sen\ t \\ 4y + 2e^{-t} - sen\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_t' = -3y - e^{-t} + sen\ t \\ y_t' = 4y + 2e^{-t} - sen\, t \end{cases}$$

Llegamos así a un problema del caso A)

Despejamos y de la primera ecuación: $y = -\frac{x_t'}{3} - \frac{e^{-t}}{3} + \frac{sen\, t}{3}$ ❶,

$$y_t' = -\frac{x_t''}{3} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{cos\ t}{3}$$

Reemplazamos en la segunda ecuación:

$$-\frac{x_t''}{3} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{cos\ t}{3} = -\frac{4x_t'}{3} - \frac{4e^{-t}}{3} + \frac{4sen\, t}{3} + 2e^{-t} - sen\, t$$

$x_t'' - 4x_t' = cos\ t - e^{-t} - sen\, t$. Debemos calcular $x_h(t)$ y $x_p(t)$

$$x_h(t) = C_1 + C_2 e^{4t}$$

$$x_p(t) = Asen\, t + B\cos t + Ce^{-t}$$

$$x_p'(t) = A\cos t - Bsen\, t - Ce^{-t}$$

$$x_p''(t) = -Asen\, t - B\cos t + Ce^{-t}$$

$$-Asen\, t - B\cos t + Ce^{-t} - 4A\cos t + 4Bsen\, t + 4Ce^{-t} = \cos t - e^{-t} - sen\, t$$

$$\begin{cases} -A+4B=-1 \\ -B-4A=1 \\ 5C=-1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{3}{17}, B=-\frac{5}{17}, C=-\frac{1}{5} \qquad \therefore$$

$$x_p(t)=-\frac{3}{17}sen\,t-\frac{5}{17}cos\,t-\frac{1}{5}e^{-t}$$

$$x(t)=C_1+C_2e^{4t}-\frac{3}{17}sen\,t-\frac{5}{17}cos\,t-\frac{1}{5}e^{-t}.$$

Calculamos $x'(t)=4C_2e^{4t}-\frac{3}{17}cos\,t+\frac{5}{17}sen\,t+\frac{1}{5}e^{-t}$

Reemplazamos $x(t)$ y $x'(t)$ en ❶, así obtenemos $y(t)$.

$$y(t)=-\frac{4}{3}C_2e^{4t}+\frac{1}{17}cos\,t-\frac{5}{51}sen\,t-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{sen\,t}{3}$$

$$y(t)=-\frac{4}{3}C_2e^{4t}+\frac{1}{17}cos\,t+\frac{4}{17}sen\,t-\frac{2}{5}e^{-t}$$

La solución general es $\begin{cases} x(t)=C_1+C_2e^{4t}-\frac{3}{17}sen\,t-\frac{5}{17}cos\,t-\frac{1}{5}e^{-t} \\ y(t)=-\frac{4}{3}C_2e^{4t}+\frac{1}{17}cos\,t+\frac{4}{17}sen\,t-\frac{2}{5}e^{-t} \end{cases}$

Buscamos ahora la solución particular para las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} -2=C_1+C_2-\frac{5}{17}-\frac{1}{5} \\ 1=-\frac{4}{3}C_2+\frac{1}{17}-\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow C_1=-\frac{1}{2} \quad C_2=-\frac{171}{170}$$

La solución particular es $\begin{cases} x(t)=-\frac{1}{2}-\frac{171}{170}e^{4t}-\frac{3}{17}sen\,t-\frac{5}{17}cos\,t-\frac{1}{5}e^{-t} \\ y(t)=\frac{114}{85}e^{4t}+\frac{1}{17}cos\,t+\frac{4}{17}sen\,t-\frac{2}{5}e^{-t} \end{cases}$

UNA APLICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Las líneas de campo de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

En el capítulo anterior vimos como una aplicación de las ecuaciones diferenciales la determinación de las líneas de campo de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$. Vemos ahora lo que ocurre en $\mathbb{R}^3$. Siguiendo un razonamiento análogo para un campo vectorial $\vec{f} = (P;Q;R)$, tenemos las líneas de campo C de ecuación $\vec{g}(t) = [x(t);y(t);z(t)]$.

$$g'(t) = [x'(t);y'(t);z'(t)] = (P;Q;R) \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = P(x;y;z) \\ y'(t) = Q(x;y;z) \\ z'(t) = R(x;y;z) \end{cases}$$

Si desarrollamos el sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x;y;z) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x;y;z) \\ \dfrac{dz}{dt} = R(x;y;z) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}$$

Igualando y resolviendo las ecuaciones de a dos llegamos a un sistema de ecuaciones lineales del tipo A. La solución del mismo nos da las expresiones de las líneas de campo en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: $\vec{f}(x;y;z) = (1;y+4z;2y-z)$, hallar SP para P=(0;3;0)

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y+4z} = \frac{dz}{2y-z}$$

Tomando las ecuaciones de a dos tenemos: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y+4z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y-z \end{cases}$

Llegamos a un sistema de ecuaciones del tipo que ya vimos en el caso A.

Despejamos z de la 1º ecuación: $z=\frac{y'}{4}-\frac{y}{4}$ ❶ $\Rightarrow$ $z'=\frac{y''}{4}-\frac{y'}{4}$. Reemplazamos en la 2º ecuación. $\frac{y''}{4}-\frac{y'}{4}=2y-\frac{y'}{4}+\frac{y}{4}\Rightarrow y''-9y=0$. Llegamos a una ecuación diferencial de 2º orden homogénea. La ecuación característica es $r^2-9=0$, las raíces son $r_1=3\wedge r_2=-3$, por lo tanto: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. Calculamos $y'=3C_1e^{3x}-3C_2e^{-3x}$. Reemplazando en ❶ obtenemos z.

$$\frac{3}{4}C_1e^{3x}-\frac{3}{4}C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}C_1e^{3x}-\frac{1}{4}C_2e^{-3x}=\frac{1}{2}C_1e^{3x}-C_2e^{-3x}$$

La solución general es $\begin{cases} y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x} \\ z=\frac{1}{2}C_1e^{3x}-C_2e^{-3x} \end{cases}$. Buscamos ahora la solución particular.

$$\begin{cases} 3=C_1+C_2 \\ 0=\frac{1}{2}C_1-C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1=2 \wedge C_1=1 \therefore \text{S.P.:} \begin{cases} y=2e^{3x}+e^{-3x} \\ z=e^{3x}-e^{-3x} \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

1) $y''-3y'+2y=0$, hallar la S.P. para y (0) = 0; $y'(0)=-1$
2) $y''+6y'+9y=0$, hallar la S.P. para y (0) =1; $y'(0)=0$
3) $y''-2y'+y=0$
4) $y''+4y=0$
5) $y''-2y'=2x$, hallar la S.P. si la recta tangente en (0;3) es $y=3-2x$

B) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas

1) $y''+y'-2y=2x^2-3x$
2) $y''+5y'+4y=20e^x$, hallar la solución particular para y (0) = 0; $y'(0)=-2$
3) $y''-4y'+4y=sen\,x$
4) $y''-2y'-3y=e^{2x}+3x$
5) $y''+y'=x+1$, hallar la solución particular para y(0) = 0; $y'(0)=1$
6) $y''-2y'=cos\,x$, hallar la solución particular para y(0)=1; $y'(0)=\frac{4}{5}$
7) $y''-3y'=x^2+2x$
8) $y''+3y'=x^2-2x+1$
9) $2y''+y'+6y=3\,cos\,4x-sen\,4x$
10) $3y''+4y'-y=2e^x-3e^{-2x}$
11) $y''+2y'+y=2x^2-3x+2$
12) $y''-2y'+y=x^3+2$
13) $y''+y'=x+e^{-x}$
14) $y''=6x-2$
15) $2y''+4y'=e^{-2x}.cos\ x$
16) $y''+y'=e^{-x}.cos\,(2x)$
17) $y'''-6y''+11y'-6y=0$
18) $y'''-3y''+7y'-5y=0$
19) $y'''-3y''+3y'-y=0$
20) $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$
21) $y'''+y''=x^2+1+3xe^x$
22) $y^{iv}-5y''+4y'=0$
23) $y'''-3y'+2y=2e^{-2x}$
24) $y'''-y''+y'-y=x^2+x$
25) $y'''-y'=sen\,x$
26) $y'''-y''=12x^2+6x$
27) $y^{iv}-y'=5\,cos\,x$
28) $y^{iv}-2y'''+y''=x^3$
29) $x^2y''+3xy'+y=0$
30) $y''+\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=0$
31) $x^2y''+xy'+4y=0$
32) $x^2y''=2y$

C) Sistemas de ecuaciones

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + y \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = x \\ \dfrac{dx}{dt} = -2x - y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y + \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$, hallar S.P. si $x(0) = 2 \wedge y(0) = 0$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x + t \\ \dfrac{dy}{dt} = -4y - 3x + 2t \end{cases}$, hallar S.P. si $x(0) = 0 \wedge y(0) = 1$

D) Problemas

1) Determinar la función $g(x)$ para que el campo $\vec{f}(x;y) = [y.g''(x);2.g(x)]$ admita función potencial si $\vec{f}(0;1) = (2;4)$. Calcularla.

2) Hallar el área limitada por $z = 2 - h(x)$, con $x \geq y \geq 0$, si h (x) es la solución particular de $y''+4y'+4y = 4x^2 + 8x + 2$. $y(0) = y'(0) = 0$.

3) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x)$, si ésta es la S.P. de $y''+ y = 1$ con $y(0) = y'(0) = 0$, y el eje x con $0 \leq x \leq 2\pi$.

4) Dado el campo vectorial $\vec{f}(x;y) = \left[y.h'(x);h'(x) + 2h(x)\right]$, continuo y derivable, con $\vec{f}(0;1) = (2;2)$, aplicando el teorema de Gauss-Green determinar $h(x)$ para que $\oint_{C^+} \vec{f}(\vec{x}).d\vec{x}$ a lo largo de la frontera de una región D resulte igual a 4 veces el área de la región D.

5) Calcular $\oint_C \left[(x+y).dx + y^2.dy\right]$ desde (0;0) a (1;1) a lo largo de la curva solución particular de $y''- y' = 2 - 2x$, con $y'(0) = 0$.

RESPUESTAS

A) 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x}$, S.P.: $y = -e^{2x} + e^{x}$

2) $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$, S.P.: $y = e^{3x} + 3xe^{-3x}$

3) $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$ 4) $y = K_1cos(2x) + K_2\,sen(2x)$

B) 5) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

6) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x} + 2e^{x}$, S.P.: $y = 2e^{-4x} - 4e^{-x} + 2e^{x}$

7) $y = C_1e^{2x} + C_1x.e^{2x} + \frac{3}{25}sen\,x + \frac{4}{25}cos\,x$

8) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x} - x + \frac{2}{3}$ 9) $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

10) $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{5}cos\,x - \frac{2}{5}sen\,x$, S.P.: $y = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}e^{2x} - \frac{1}{5}cos\,x - \frac{2}{5}sen\,x$

11) $y = C_1 + C_2e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x$

12) $y = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{17}{27}x$

13) $y = e^{-\frac{1}{4}x}\left(K_1cos\left(\sqrt{47}/_4\,x\right) + K_2\,sen\left(\sqrt{47}/_4\,x\right)\right) - \frac{37}{346}cos(4x) + \frac{19}{346}sen(4x)$

14) $y = C_1e^{\left(-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)x} + C_2e^{\left(-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)x} + \frac{1}{3}e^{x} - e^{-2x}$

15) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 2x^2 - 11x + 20$

16) $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + x^3 + 6x^2 + 18x + 26$

17) $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x - xe^{-x}$ 18) $y = C_1 + x.C_2 + x^3 - x^2$

19) $y = C_1 + C_2e^{-2x} + e^{-2x}\left(-\frac{1}{10}cos\,x - \frac{1}{5}sen\,x\right)$

20) $y = C_1 + C_2e^{-x} - e^{-x}\left(\frac{1}{5}cos(2x)\frac{1}{10}sen(2x)\right)$

21) $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ 22) $y = C_1e^{x} + e^{x}[K_1cos(2x) + K_2sen(2x)]$

23) $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3x^2e^{x}$ 24) $y = C_1e^{x} + C_2x.e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$

25) $y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}xe^x - \frac{15}{4}e^x$

26) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$

27) $y = C_1e^x + C_2x.e^x + C_3e^{-2x} + \frac{2}{9}x.e^{-2x}$

28) $y = C_1e^x + K_1 cos\, x + K_2 sen\, x - x^2 - 3x - 1$

29) $y = C_1e^x + e^{-1/2x}\left(K_1 cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + K_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

30) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$

31) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + K_1\, cos\, x + K_2 sen\, x - \frac{5}{4}x.sen\, x$

32) $y = C_1 + C_2x + +12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + C_3e^x + C_4xe^x$

33) $y = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}.ln\, x$ 34) $y = K_1\, cos(ln\, x) + K_2 sen(ln\, x)$

35) $y = K_1\, cos(2\, ln\, x) + K_2 sen(2\, ln\, x)$ 36) $y = C_1x^2 + C_2x^{-1}$

C) 1) $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} \\ y(t) = -C_1e^{-2t} + C_2e^{-2t} - C_2te^{-2t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = e^{-t}(K_1\, cos\, t + K_2 sen\, t) \\ y(t) = \frac{1}{5}e^{-t}[(K_2 - 2K_1)cos\, t - (K_1 + 2K_2)sen\, t] \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} \\ y(t) = -C_1e^{-t} - C_2te^{-t} - C_2e^{-t} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x(t) = -C_1 + C_2e^{2t} + \frac{1}{4}(t^2 - t - 1) \\ y(t) = C_1 + C_2e^{2t} - \frac{1}{4}(t^2 + t) \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(t) = e^t + e^{-5t} \\ y(t) = -e^t + e^{-5t} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x(t) = -14e^{-t} - 12te^{-t} - 6t + 14 \\ y(t) = 10e^{-t} + 6te^{-t} + 5t - 9 \end{cases}$

D) 1) $g(x) = 2e^x$, $U(x;y) = 2e^x y$ 2) A $= 13/6$ 3) A $= 2\pi$

4) $h(x) = 2e^{-x} + 4x - 2$ 5) $\int_C \vec{f}.d\vec{x} = 7/6$

RESUMEN DE FÓRMULAS

CURVAS EN $\mathbb{R}^2$

a) En forma explícita: $y=f(x)$ $\quad P_0=x_0$

b) En forma implícita: $F(x;y)=0$ $\quad P_0=(x_0;y_0)$

c) En forma paramétrica: $\vec{f}(t)=\left[x(t);y(t)\right]$ $\quad \vec{f}(t_0)=(x_0;y_0)=P_0$

Rectas tangente y normal

En forma explícita: $y_t=f_x'(x_0).(x-x_0)+y_0$ $\quad y_n=-\dfrac{1}{f_x'(x_0)}.(x-x_0)+y_0$

En forma implícita: $r_t:\left(F_x'(P_0);F_y'(P_0)\right)\bullet(x-x_0;y_t-y_0)=0$

$$\nabla f(P_0)\bullet(x-x_0;y_t-y_0)=0$$

$$r_n:\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y_n-y_0}{F_y'(P_0)}$$

En forma paramétrica: $\vec{v}_t(P_0)=\left(x_t'(t_0);y_t'(t_0)\right)\Rightarrow\quad r_t:\quad\dfrac{x-x_0}{x_t'(t_0)}=\dfrac{y_n-y_0}{y_t'(t_0)}$

CURVAS EN $\mathbb{R}^3$

En forma paramétrica: $\vec{f}(t)=\left[x(t);y(t);z(t)\right]$

Recta tangente y plano normal

$$\vec{v}_t(P_0)=\left(x_t'(t_0);y_t'(t_0);z_t'(t_0)\right)\Rightarrow\quad r_t:\quad\frac{x-x_0}{x_t'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y_t'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z_t'(t_0)}$$

$$\pi_n:\quad x_t'(t_0)(x-x_0)+y_t'(t_0)(y-y_0)+z_t'(t_0)(z_n-z_0)=0$$

SUPERFICIES

a) En forma explícita: $z=f(x;y)$, $x=f(y;z)$, $y=f(x;z)$ $P_0=(x_0;y_0)$

b) En forma implícita: $F(x;y;z)=0$ $P_0=(x_0;y_0;z_0)$

c) En forma paramétrica: $\vec{f}(u;v)=\left[x(u;v);y(u;v);z(u;v)\right]$

$$\vec{f}(u_0;v_0)=(x_0;y_0;z_0)=P_0$$

Plano tangente y recta normal

En forma explícita: $z_t=f_x'(P_0).(x-x_0)+f_y'(P_0).(y-y_0)+z_0$

$$r_n:\quad \frac{x-x_0}{f_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

En forma implícita: $F_x'(P_0).(x-x_0)+F_y'(P_0).(y-x_0)+F_z'(P_0).(z_t-z_0)=0$

$$\left(F_x'(P_0);F_y'(P_0);F_z'(P_0)\right)\bullet(x-x_0;y-y_0;z_t-y_0)=0$$

$$\nabla F(P_0)\bullet(x-x_0;y-y_0;z_t-z_0)=0$$

$$r_n:\quad \frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}$$

En forma paramétrica

$$\pi_t:\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u'(u_0;v_0) & y_u'(u_0;v_0) & z_u'(u_0;v_0) \\ x_v'(u_0;v_0) & y_v'u_0;v_0 & z_v'(u_0;v_0) \end{vmatrix}=0$$

$$\vec{v}_n=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_u'(u_0;v_0) & y_u'(u_0;v_0) & z_u'(u_0;v_0) \\ x_v'(u_0;v_0) & y_v'u_0;v_0 & z_v'(u_0;v_0) \end{vmatrix}=(v_1;v_2;v_3)$$

$$r_n:\quad \frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

Área de una región plana

En coordenadas cartesianas

$$A = \iint dx.dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.dy$$

En coordenadas polares

$$A = \iint dx.dy = \int_a^b \int_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)} r.d\alpha.dr = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} r.dr.d\alpha$$

Volumen de un sólido (integrales dobles)

En coordenadas cartesianas

$$V = \iint f(x;y).dx.dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y).dy.dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y).dx.dy$$

En coordenadas polares

$$V = \iint f(x;y).dx.dy = \int_a^b \int_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)} f(r;\alpha).r.d\alpha.dr = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} f(x;y).r.dr.d\alpha$$

Volumen de un sólido (integrales triples)

En coordenadas cartesianas

$$V = \iiint dx.dy.dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} dz.dy.dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} dz.dx.dy$$

En coordenadas cilíndricas

$$V=\int_a^b\int_{\alpha_1(r)}^{\alpha_2(r)}\int_{z_1(r;\alpha)}^{z_2(r;\alpha)} r.dz.d\alpha.dr=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)}\int_{z_1(r;\alpha)}^{z_2(r;\alpha)} r.dz.dr.d\alpha$$

En coordenadas esféricas

$$V=\int_a^b\int_{\alpha_1(\rho)}^{\alpha_2(\rho)}\int_{\phi_1(\rho;\alpha)}^{\phi_2(\rho;\alpha)} \rho^2 sen\phi.d\phi.d\alpha.d\rho=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\rho_1(\alpha)}^{\rho_1(\alpha)}\int_{\phi_1(\rho;\alpha)}^{\phi_2(\rho;\alpha)} \rho^2 sen\phi.d\phi.d\rho.d\alpha$$

Área de una superficie en $\mathbb{R}^3$

a) En forma explícita: si $z=f(x;y)$ $\quad A=\iint_D\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}.dx.dy$

si $x=f(y;z)$ $\quad A=\iint_D\sqrt{1+\left(z_y'\right)^2+\left(z_z'\right)^2}.dy.dz$

si $y=f(x;z)$ $\quad A=\iint_D\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2+\left(y_z'\right)^2}.dx.dz$

b) En forma implícita

$F(x;y;z)=0$ define a $z=f(x;y)$: $A=\iint_D\frac{\sqrt{\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2+\left(F_z'\right)^2}}{\left|F_z'\right|}.dx.dy$

$F(x;y;z)=0$ define a $x=f(y;z)$: $A=\iint_D\frac{\sqrt{\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2+\left(F_z'\right)^2}}{\left|F_x'\right|}.dy.dz$

$F(x;y;z)=0$ define a $y=f(x;z)$: $A=\iint_D\frac{\sqrt{\left(F_x'\right)^2+\left(F_y'\right)^2+\left(F_z'\right)^2}}{\left|F_y'\right|}.dx.dz$

c) En forma paramétrica: $A=\iint_D\left|\vec{f}_u'\wedge\vec{f}_v'\right|.du.dv$

Integrales de superficie

A) De un campo escalar

a) En forma explícita

$$z=f(x;y):\ \iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(x;y;f(x;y)).\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}.dx.dy$$

$$x=f(y;z)\quad \iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(f(y;z);y;z).\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}.dy.dz$$

$$y=f(x;z)\quad \iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(x;f(x;z);z).\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}.dx.dz$$

b) En forma implícita

$F(x;y;z)=0$ define a $z=f(x;y)$

$$\iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(x;y;f(x;y)).\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|}.dx.dy$$

$F(x;y;z)=0$ define a $y=f(x;z)$

$$\iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(x;f(x;z);z).\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_y\right|}.dx.dz$$

$F(x;y;z)=0$ define a $x=f(y;z)$

$$\iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(f(y;z);y;z).\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2+\left(F'_y\right)^2+\left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_x\right|}.dy.dz$$

c) En forma paramétrica: $\iint_S G(x;y;z).dS=\iint_D G(u;v).\left|\vec{f}'_u\wedge\vec{f}'_v\right|.du.dv$

B) De un campo vectorial

a) En forma explícita

$$z=f(x;y):\ \iint_S \vec{G}(x;y;z).dS=\iint_D \vec{G}\left(x;y;f(x;y)\right)\bullet\left(-z'_x;-z'_y;1\right).dx.dy$$
$$y=f(x;z):\ \iint_S \vec{G}(x;y;z).dS=\iint_D \vec{G}\left(x;f(x;z);z\right).\bullet\left(-y'_x;1;-y'_z\right).dx.dz$$
$$x=f(y;z):\ \iint_S \vec{G}(x;y;z).dS=\iint_D \vec{G}\left(f(y;z);y;z\right).\bullet\left(1;-x'_y;-x'_z\right).dy.dz$$

b) En forma implícita

$F(x;y;z)=0$ define a $z=f(x;y)$

$$\iint_S \vec{G}(x;y;z)\bullet\breve{n}.dS=\iint_D \vec{G}\left(x;y;f(x;y)\right)\bullet\frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{\left|F'_z\right|}.dx.dy$$

$F(x;y;z)=0$ define a $y=f(x;z)$

$$\iint_S \vec{G}(x;y;z)\bullet\breve{n}.dS=\iint_D \vec{G}\left(x;f(x;z);z\right)\bullet\frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{\left|F'_y\right|}.dx.dz$$

$F(x;y;z)=0$ define a $x=f(y;z)$

$$\iint_S \vec{G}(x;y;z)\bullet\breve{n}.dS=\iint_D \vec{G}\left(f(y;z);y;z\right)\bullet\frac{\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)}{\left|F'_x\right|}.dy.dz$$

c) En forma paramétrica: $\iint_S \vec{G}(x;y;z)\bullet\breve{n}.dS=\iint_D \vec{G}(u;v)\bullet\left(\vec{f}'_u\wedge\vec{f}'_v\right).du.dv$

Teorema de Gauss: $\oiint_S \vec{G}(x;y;z).dS=\iiint_V div\,\vec{G}.dx.dy.dz$

Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{G}(x;y;z).d\vec{x}=\iint_S rot\,\vec{G}\bullet\breve{n}.dS$

BREVE RESEÑA BIBLIOGRÁFICA

Chiang, Alpha (1974), **Fundamental Methods of Mathematical Economics,** McGraw Hill, Nueva York.

Finocchiaro, María (1988)**, Funzioni di piu variabili**, CISU, Roma.

Larson, Roland y Hostetler, Robert (1986), **Cálculo y Geometría Analítica,** Mc Graw Hill, España.

Leithold, Louis (1992), **El Cálculo con geometría analítica**, Harla, México DF.

Pita Ruiz, Claudio (1995), **Cálculo Vectorial**, Prentice Hall Hispanoamericana, México.

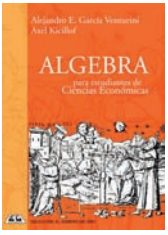
Rabuffetti, Hebe T. (1983), **Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 2)**, El Ateneo, Buenos Aires.

Steward, James (1993), **Calculus**, Wadsworth, PWS Publishers, Nelmont, USA.

Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba (1988), **Cálculo Vectorial,** Addison – Wessley Iberoamericana, Delaware, Estados Unidos.

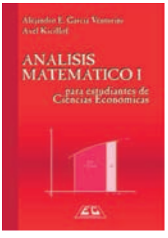
ÍNDICE

Publicaciones del autor



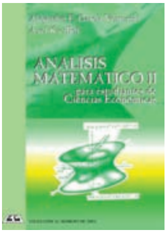
Algebra para estudiantes de Ciencias Económicas

Coautor: Axel Kicillof



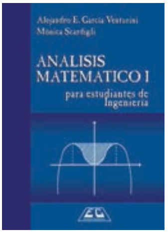
Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencias Económicas

Coautor: Axel Kicillof



Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas

Coautor: Axel Kicillof

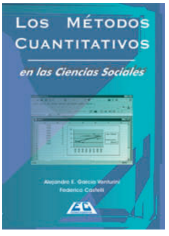


Análisis Matemático I para estudiantes de Ingeniería

Coautora: Mónica Scardigli

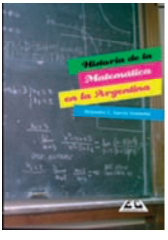
Análisis Matemático II para estudiantes de Ingeniería

Los matemáticos que hicieron la historia



Los métodos cuantitativos en las Ciencias Sociales

Coautor: Federico Castelli



Historia de la Matemática en la Argentina