Cálculo Avanzado
Algunas definiciones y enunciados de teoremas

Aclaración importante. La siguiente es una lista de **algunas** definiciones y **algunos** enunciados de proposiciones y teoremas vistos en el curso dada para unificar los resultados. De ninguna manera debe considerarse una lista exhaustiva.

(1) **Definición.** Sea $\mathbf{f}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$ es el *límite* de $\mathbf{f}$ cuando t tiende a t_0 si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - t_0| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon.$$

(2) **Proposición.** Sea $\mathbf{f}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t),\ f_2(t), \cdots, f_n(t))$. Entonces

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{t\to t_0} f_i(t) = \ell_i, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \cdots, n.$$

(3) **Definición.** Sean $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x}_0$ un punto de acumulación de A. Decimos que L es el *límite* de f cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \\ \mathbf{x} \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - L\| < \varepsilon.$$

(4) **Proposición.** Sean f, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si

a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$ y b) Existe $r > 0$ tal que g está acotada en $B_r^*(\mathbf{x}_0) \cap A$,

entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.

(5) **Definición.** Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es *continua* en $\mathbf{x}_0$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

(6) **Definición.** Sean $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A abierto y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es *diferenciable* en $\mathbf{x}_0$ si existen números a y b tales que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0\ .$$

(7) **Proposición.** Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$ y $a = f_x(\mathbf{x}_0)$, $b = f_y(\mathbf{x}_0)$. .

(8) **Definición.** Si f es una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$, llamamos *diferencial* de f en $\mathbf{x}_0$ a la función $Df(\mathbf{x}_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Df(\mathbf{x}_0)(x, y) = f_x(\mathbf{x}_0)x + f_y(\mathbf{x}_0)y$ (que, dicho sea de paso, es una transformación lineal).

Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, una *aproximación lineal* a f en $\mathbf{x}_0$ está dada por la función $L(x, y) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)(x - x_0, y - y_0)$.

(9) **Definición.** Sean $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto y $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que $\mathbf{f}$ es *diferenciable* en $\mathbf{x}_0$ si existe una matriz $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - M(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0\ .$$

(en la expresión $M(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ representa un vector columna)

(10) **Proposición.** Si $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in A$, entonces es continua en $\mathbf{x}_0$.

(11) **Regla de la cadena.**
Sean $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g}\colon B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones tales que $\mathbf{f}(A) \subset B$, A y B abiertos. Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in A$ y $\mathbf{g}$ es diferenciable en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

(12) **Proposición.** Sean $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{r}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{Im}(\mathbf{r}) \subset A$. Si $\mathbf{r}$ es diferenciable en t_0 y f es diferenciable en $\mathbf{r}(t_0)$, entonces $D(f \circ \mathbf{r})(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$.

(13) Sean $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\mathbf{v}\| = 1$. Llamamos *derivada direccional* de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección de $\mathbf{v}$ al número

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

si el límite existe.

(14) **Proposición.** Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces existe la derivada de f en $\mathbf{x}_0$ en cualquier dirección y $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$.

(15) **Proposición.** Con las hipótesis anteriores, si además $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe la derivada direccional máxima de f en $\mathbf{x}_0$, vale $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$ y se alcanza en la dirección $\mathbf{v} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$.

(16) **Definición.** Decimos que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una *curva* (simple y suave) si existe una función $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que
(a) $\mathrm{Im}(\alpha) = C$.
(b) α es inyectiva en $[a,b)$.
(c) α es C^1 y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t.

Dada una curva C, a toda función α que cumpla con las condiciones de la definición la llamamos una *parametrización* de C.

Si una parametrización de C verifica $\alpha(a) = \alpha(b)$ decimos que la curva es *cerrada*.

(17) **Definición.** Decimos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie* (simple y suave) si existe una función de clase C^1 $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que
(a) $\mathrm{Im}(\varphi) = S$.
(b) φ es inyectiva en $D^\circ = D - \partial D$.
(c) $\varphi_u \times \varphi_v \neq \mathbf{0}$.

Dada una superficie S, a toda función φ que verifique las condiciones de la definición la llamamos una *parametrización* de S.

Si S es una superficie, $\mathbf{x}_0 \in S$ y φ es una parametrización tal que $\varphi(u_0, v_0) = \mathbf{x}_0$, llamamos *plano tangente a S en $\mathbf{x}_0$* al plano de ecuación

$$\varphi_u \times \varphi_v(u_0, v_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

(18) **Definición.** Sean $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y C una curva contenida en A. Llamamos integral de f sobre C al número

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$$

donde $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de C.

(19) **Definición.** Sean $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continua y sea C una curva orientada contenida en A. Llamamos *integral* de $\mathbf{F}$ sobre C o *trabajo* de $\mathbf{F}$ a lo largo de C al número

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt$$

con $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de C que respeta la orientación.

(20) **Proposición.** Si C es una curva orientada y $\mathbf{F}$ un campo sobre C, entonces

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot ds = -\int_C \mathbf{F} \cdot ds.$$

(21) **Proposición.** Sean A abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F}\colon A \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Son equivalentes

(a) Existe $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\nabla\varphi = \mathbf{F}$.

(b) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds$ para todo par de curvas C_1 y C_2 contenidas en A que comienzan en un mismo punto $\mathbf{x}_1$ y terminan en un mismo punto $\mathbf{x}_2$.

(c) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada C contenida en A.

(22) **Definición.** Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que un campo vectorial continuo $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *conservativo* si alguno de los incisos de la proposición anterior es verdadero.

(23) **Proposición.** Sean A abierto y $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Sea $C \subset A$ una curva que comienza en $\mathbf{x}_0$ y termina en $\mathbf{x}_1$. Si existe $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = \mathbf{F}$, entonces $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_0)$.

(24) **Proposición.** Sean A abierto y $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial C^1. Si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces la matriz jacobiana es simétrica. En particular, si $n = 2$ y $\mathbf{F} = (P, Q)$, entonces $Q_x = P_y$. Si $n = 3$ y $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, entonces $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ y $Q_z = R_y$.

(25) **Teorema de Green.**
Sean $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1, $F = (P, Q)$ y D un recinto de tipo I o II contenido en A tal que ∂D es una curva suave a trozos. Si orientamos a ∂D en sentido directo, entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D Q_x - P_y \, dxdy.$$

(26) **Definición.** Decimos que una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es *orientable* si existe un campo de vectores normales, unitario y continuo en S; es decir si existe una función $\mathbf{N}\colon S \to \mathbb{R}^3$ tal que:

(a) $\mathbf{N}$ es continua.

(b) $\mathbf{N}(p)$ es perpendicular al plano tangente a S en p, para todo $p \in S$.

(c) $\|\mathbf{N}(p)\| = 1$, para todo $p \in S$.

Observación. Toda superficie orientable tiene al menos dos campos de vectores normales, unitario y continuo; en este curso sólo trabajaremos con superficies que tienen exactamente dos de estos campos (estas superficies se llaman conexas) . En este caso, si $\mathbf{N}$ es uno de los dos campos, el otro es $-\mathbf{N}$.

Definición. *Orientar* una superficie es elegir uno de los dos campos de vectores normales, unitario y continuo.

(27) **Definición.** Sean S una superficie $f\colon S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Llamamos *integral* de f sobre S al número

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\varphi(u,v))\,\|\varphi(u,v)\| dudv$$

con $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de S.

(28) **Definición.** Sean S una superficie orientada por un campo de vectores normales, unitario y continuo $\mathbf{N}$ y $\mathbf{F}\colon S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Llamamos *integral* (o *flujo*) de $\mathbf{F}$ a través de S al número

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS.$$

(29) **Proposición.** Sean S una superficie orientada por un campo continuo, normal y unitario $\mathbf{N}$ y $\mathbf{F}\colon S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo; entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D F(\varphi(u,v))\cdot \varphi_u \times \varphi_v(u,v)\,dudv$$

con $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de S que respeta la orientación (o sea, $\mathbf{N}(\varphi(u,v))$ y $\varphi_u \times \varphi_v(u,v)$ tienen la misma dirección y sentido).

(30) **Notación.** Si S es una superficie orientada, notamos con S^- a la misma superficie con la orientación opuesta a la dada.

Proposición. Si S es una superficie orientada y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo sobre S, entonces

$$\iint_{S^-} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

(31) **Teorema de Gauss (o de la divergencia)**

Sean $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1, A abierto y S una superficie cerrada suave a trozos que es el borde de un sólido regular V con $V \subset A$. Si orientamos a S con el campo de vectores normales exterior, entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz.$$

(32) **Teorema de Stokes (o del rotor).**

Sean S una superficie orientable con borde ∂S y $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1, A abierto y $S \subset A$. Si orientamos a S y ∂S de acuerdo con la regla de la mano derecha, entonces

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot ds = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$