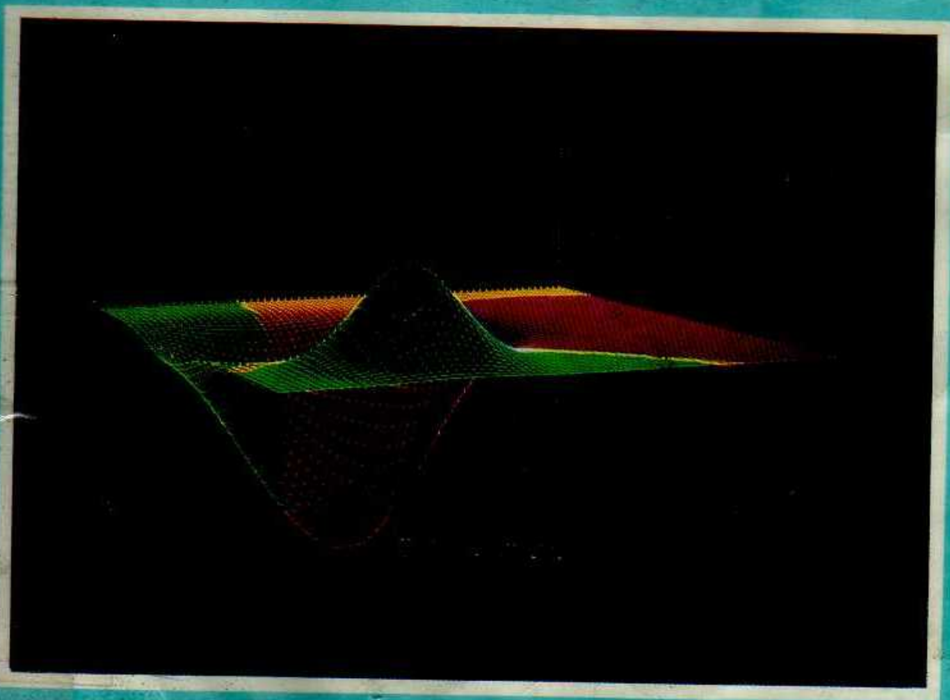
Schaum

CÁLCULO SUPERIOR

Murray R. Spiegel



McGraw Hill

89 - 93

CÁLCULO SUPERIOR

MURRAY R. SPIEGEL, Ph. D.

Professor of Mathematics
Rensselaer Polytechnic Institute

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

JESÚS MARÍA CASTAÑO

Profesor de Matemáticas de la Universidad del Valle,

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

CÁLCULO SUPERIOR

Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 970-10-0065-X

Traducido de la primera edición en inglés de
ADVANCED CALCULUS

ISBN 0-07-091871-6

5678901234 M.G.91 9087651234

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Mayo de 1994 en
Impresora Publi-Mex, S.A. de C.V.
Calz. San Lorenzo 279-32
Deleg. Iztapalapa
México 13, D.F.

Se tiraron 1000 ejemplares

Prólogo

La denominación «Cálculo superior» no tiene el mismo significado para todo el mundo. Para unos, se trata en esencia del cálculo elemental desde un punto de vista superior, o sea, con enunciados y demostraciones rigurosos de los teoremas. Para otros, representa una variedad de temas especiales superiores que se consideran importantes y que, sin embargo, no es posible abarcar en un curso elemental.

Hemos tratado de equilibrar estos dos extremos adoptando una posición de compromiso razonable entre ambos, lo que suponemos será de utilidad a muy distintos lectores. Los primeros capítulos del libro sirven, en general. para revisar y ampliar los conceptos fundamentales estudiados ya en el cálculo elemental. Esta especie de repaso ampliado será provechoso a aquellos que hayan olvidado, en mayor o menor medida, el cálculo estudiado y que necesiten refrescar un poco sus conocimientos. Puede servir igualmente de base común a estudiantes que han recibido previamente tipos distintos de cursos sobre cálculo elemental. Los capítulos posteriores presentan temas especiales superiores, que son fundamentales para el científico, el ingeniero y el matemático que quiera llega a ser eficiente en su respectivo campo.

El libro ha sido concebido de manera que pueda ser utilizado tanto como complemento de un texto cualquiera que como texto en sí mismo, en un curso concreto de cálculo superior. Será igualmente útil a los estudiantes que toman cursos de física, ingeniería o de cualquiera de los numerosos campos en que se emplean los métodos matemáticos superiores.

Cada capítulo comienza con un claro enunciado de las definiciones, principios y teoremas pertinentes acompañados de abundante material ilustrativo y descriptivo, al que siguen series graduadas de problemas resueltos y de problemas propuestos. Los resueltos ilustran y amplían la teoría y enfocan con amplia y aguda perspectiva aquellos aspectos de detalle sin cuyo conocimiento el estudiante se siente continuamente en terreno inseguro. Procurar la repetición de principios básicos, tan importantes para la enseñanza efectiva. Finalmente, se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y proposiciones deducidas de los principios fundamentales. Los numerosos problemas propuestos, con respuestas, sirven de revisión completa del material de cada capítulo.

Los temas estudiados abarcan el cálculo diferencial e integral de funciones de una o más variables y sus aplicaciones. Los métodos vectoriales, que por sí mismos se acomodan fácilmente a una notación concisa y a interpretaciones geométricas y físicas, se estudian casi desde el principio y se emplean siempre que contribuyan a la comprensión y al estímulo del estudiante. Entre los temas especiales se incluyen las integrales curvilíneas y de superficie y los teoremas sobre integrales, las series, las integrales impropias, las funciones gamma y beta y las series de Fourier. De gran interés e importancia son los capítulos sobre las integrales de Fourier, las integrales elípticas y las funciones de variable compleja, extremadamente útiles en estudios superiores de ingeniería, física y matemáticas.

Con objeto de dotar al libro de una mayor flexibilidad y de hacerlo más útil como libro de referencia, se ha procurado que los temas tratados sobrepasen en número y amplitud a aquellos que pueden ser estudiados en la mayoría de los cursos de duración normal. Se intenta asimismo estimular un ulterior interés por estos temas.

Quiero aprovechar la ocasión para agradecer al personal de la Schaum Publishing Company su valiosa cooperación con el autor para ayudarle en sus, al parecer, interminables ensayos de perfección.

M. R. SPIEGEL

Tabla de materias

Capítulo 1

Números

CONJUNTOS

Es fundamental en matemáticas el concepto de *conjunto, clase* o *colección* de objetos que tienen características específicas. Por ejemplo, se habla del conjunto de todos los profesores de la universidad, del conjunto de las letras $A, B, C, D, \ldots, Z$ del alfabeto, etc. Los objetos del conjunto se llaman *elementos*. Toda parte de un conjunto se dice *subconjunto* del conjunto dado, como A, B, C que es un subconjunto de $A, B, C, D, \ldots, Z$. El conjunto que carece de elementos se llama *conjunto vacío*.

NUMEROS REALES

Son conocidos los tipos de números siguientes.

1. **Números naturales,** $1, 2, 3, 4, \ldots,$ o *enteros positivos*, que se emplean para contar los elementos de un conjunto. Los símbolos han cambiado con las épocas, pues los romanos, por ejemplo, utilizaban I, II, III, IV, ... La *suma* $a + b$ y el *producto* $a \cdot b$ o ab de dos números naturales a y b es también un número natural, lo cual se suele expresar diciendo que el conjunto de números naturales es *cerrado* respecto de la operación *adición* y respecto de la operación *multiplicación*, o que cumple la *propiedad de clausura* con respecto a estas operaciones.

2. **Enteros negativos y cero,** denotados por $-1, -2, -3, \ldots$ y 0, respectivamente, que permiten resolver ecuaciones como $x + b = a$ con a y b naturales, que llevan a la operación *sustracción* o *inversa de la adición* y se escribe $x = a - b$.

   El conjunto de los enteros positivos y negativos con el cero se llama conjunto de los *enteros*.

3. **Números racionales** o *fracciones*, tales como $\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, \ldots$ permiten resolver ecuaciones como $bx = a$ para a y b enteros cualesquiera con $b \neq 0$, que llevan a la operación de *división* o *inversa de la multiplicación*, y se escribe $x = a/b$ o $a \div b$ llamándose *a numerador* y *b denominador*.

   El conjunto de los enteros es un subconjunto de los números racionales, pues los enteros corresponden a números racionales con $b = 1$.

4. **Números irracionales** tales como $\sqrt{2}$ y π son números no racionales, es decir, que no se pueden expresar como $\dfrac{a}{b}$ (llamado *cociente* de a y b) con a y b enteros y $b \neq 0$.

   El conjunto de todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los *números reales*.

REPRESENTACION DECIMAL DE LOS NUMEROS REALES

Todo número real se puede expresar en *forma decimal*, por ejemplo, $17/10 = 1{,}7$, $9/100 = 0{,}09$, $1/6 = 0{,}16666\ldots$. Si el número es racional el desarrollo decimal termina, o si no termina hay una cifra o grupo de cifras del desarrollo que se repiten, como, por ejemplo, en $\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142\ldots$. Si el número es irracional, como $\sqrt{2} = 1{,}41423\ldots$ o $\pi = 3{,}14159\ldots$, no puede presentarse repetición semejante. Siempre se puede considerar un desarrollo o fracción decimal como infinito, pues $1{,}375$ es lo mismo que $1{,}37500000\ldots$ o $1{,}3749999\ldots$. Para indicar estos decimales que se repiten o periódicos pondremos puntos sobre el periodo de cifras que se repite, así $\frac{1}{7} = 0{,}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$, $\frac{19}{6} = 3{,}1\dot{6}$.

El sistema decimal utiliza las diez cifras $0, 1, 2, \ldots, 9$. Se pueden también emplear sistemas de numeración con menos o más cifras, como el *sistema binario* que solo emplea las cifras 0 y 1, por ejemplo (Problemas 32 y 33).

REPRESENTACION GEOMETRICA DE NUMEROS REALES

Es conocida la representación de los números reales sobre una recta llamada *eje real*, como se ve en la figura. A cada número real corresponde un punto, y solo uno, de la recta y recíprocamente; es decir, existe una *correspondencia biunívoca* entre el conjunto de los números reales y el de puntos de la recta, por lo cual los conceptos de punto y de número se podrán emplear uno por otro.

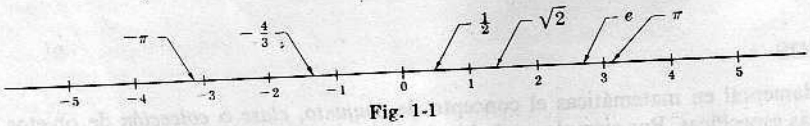


Fig. 1-1

El conjunto de números reales a la derecha del 0 es el llamado conjunto de los *números positivos*; el conjunto a la izquierda del 0 es el conjunto de los *números negativos*, en tanto que el 0 no es positivo ni negativo.

Entre dos racionales cualesquiera (o irracionales) de la recta hay infinitos números racionales (e irracionales). Lo cual lleva a decir que el conjunto de los racionales (o irracionales) es un conjunto *denso en todas partes.*

OPERACIONES CON NUMEROS REALES

Si a, b, c pertenecen al conjunto R de los reales,

1. $a + b$ y ab pertenecen a R — Ley de clausura
2. $a + b = b + a$ — Ley conmutativa de la adición
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — Ley asociativa de la adición
4. $ab = ba$ — Ley conmutativa de la multiplicación
5. $a(bc) = (ab)c$ — Ley asociativa de la multiplicación
6. $a(b + c) = ab + ac$ — Ley distributiva
7. $a + 0 = 0 + a = a$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

   0 se llama *elemento neutro de la adición*, 1 se llama *elemento neutro de la multiplicación.*
8. Para todo a existe un número x de R tal que $x + a = 0$.

   x se llama *simétrico de a respecto de la adición* o también *opuesto de a* y se denota por $-a$.
9. Para todo $a \neq 0$ existe un número x de R tal que $ax = 1$.

   x se llama *simétrico de a respecto de la multiplicación* o también *inverso de a* y se denota por a^{-1} o $1/a$.

Esto permite operar según las reglas usuales del álgebra. Un conjunto como R, cuyos elementos cumplen lo que antecede, se llama *cuerpo.*

DESIGUALDADES

Si $a - b$ es positivo se dice que *a es mayor que b* o que *b es menor que a* y se escribe $a > b$ o $b < a$, respectivamente. Si se da también la posibilidad $a = b$, se escribe $a \geqq b$ o $b \leqq a$. Geométricamente, $a > b$ si el punto del eje real que corresponde a a está a la derecha del punto que corresponde a b.

Ejemplos. $3 < 5$ ó $5 > 3$. $-2 < -1$ ó $-1 > -2$; $x \leqq 3$ significa que x es un número real que puede ser 3 o menor que 3.

Si a, b y c son números reales dados,

1. O bien $a > b$, o bien $a = b$, o bien $a < b$ — Ley de tricotomia
2. Si $a > b$ y $b > c$ es $a > c$ — Ley de transitividad
3. Si $a > b$ es $a + c > b + c$
4. Si $a > b$ y $c > 0$ es $ac > bc$
5. Si $a > b$ y $c < 0$ es $ac < bc$

VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

El valor absoluto de un número real a, que se denota $|a|$, se define como a si $a > 0$, $-a$ si $a < 0$ y 0 si $a = 0$.

Ejemplos: $|-5| = 5$, $|+2| = 2$, $|-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|0| = 0$.

1. $|ab| = |a|\,|b|$ o $|abc\cdots m| = |a|\,|b|\,|c|\cdots|m|$
2. $|a+b| \leqq |a| + |b|$ o $|a+b+c+\ldots+m| \leqq |a|+|b|+|c|+\ldots+|m|$
3. $|a-b| \geqq |a| - |b|$

La distancia entre dos puntos (o números reales) a y b del eje real es $|a-b| = |b-a|$.

EXPONENTES Y RAICES

El producto $a \cdot a \ldots a$ de un número real a por sí mismo p veces se denota por a^p llamándose p *exponente* y a *base*. Se verifican las reglas siguientes:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ 3. $(a^p)^r = a^{pr}$

2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ 4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Estas leyes y sus generalizaciones a números reales cualesquiera son siempre posibles mientras se excluya la división por cero. En particular para la 2, con $p = q$ y $p = 0$ respectivamente se llega a las definiciones $a^0 = 1$, $a^{-q} = 1/a^q$.

Si $a^p = N$, siendo p entero positivo, se dice que a es una *raíz p-ésima* de N, que se escribe $\sqrt[p]{N}$. Puede haber más de una raíz p-ésima real de N. Por ejemplo, como $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$ hay dos raíces cuadradas reales de 4, que son 2 y -2. Es costumbre designar la raíz cuadrada positiva por $\sqrt{4} = 2$ y la negativa por $-\sqrt{4} = -2$.

Si p y q son enteros positivos se define $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

LOGARITMOS

Si $a^p = N$, p se llama *logaritmo* de N en base a, lo que se escribe $p = \log_a N$. Si a y N son positivos y $a \neq 1$, existe solo un valor real de p. Se verifican las reglas que siguen:

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 2. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3. $\log_a M^r = r \log_a M$

En la práctica se utilizan dos bases: la base $a = 10$ para el *sistema de logaritmos decimales, vulgar o de Briggs*, y la *base natural* $a = e = 2{,}71828\ldots$ para el *sistema natural* o *neperiano*.

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS DEL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

El sistema de números se puede construir lógicamente a partir de un conjunto fundamental de *axiomas* o verdades «evidentes por sí mismas» que por lo general se toman de la experiencia, como los enunciados 1-9, página 2.

Si tomamos los números naturales y las operaciones de adición y multiplicación como dados (si bien también es posible partir de más atrás con el concepto de conjunto), se encuentra que los enunciados 1-6, página 2, valen para los números naturales, pero los 7-9 no se verifican con ellos.

Añadiendo como requisitos los 7 y 8 se introducen los números $-1, -2, -3, \ldots$ y el 0. Y con el 9 se introducen los números racionales.

Se pueden definir operaciones con estos números así obtenidos adoptando los axiomas 1-6 y el conjunto de números es ahora el de los enteros. Esto lleva a *demostraciones* de enunciados tales como $(-2)(-3) = 6$, $-(-4) = 4$, $(0)(5) = 0$, etc., que por lo común se dan por ciertos en las matemáticas elementales.

Se puede introducir también el concepto de orden o desigualdad para los enteros y a partir de éstos para los racionales. Por ejemplo, si a, b, c, d son enteros positivos, se define $a/b > c/d$ si, y solo si, $ad > bc$, con generalizaciones parecidas para los números negativos.

Una vez establecidos el conjunto de los racionales y las leyes de desigualdad entre ellos se les puede ordenar geométricamente como puntos del eje real como ya se ha indicado. Se puede mostrar entonces que hay puntos de la recta que no representan números racionales (como $\sqrt{2}$, π, etc.). Estos números irracionales se pueden definir de varias maneras, una de las cuales emplea el concepto de *cortaduras de Dedekind* (Problema 34); con éstas se puede demostrar que las reglas usuales del álgebra se aplican a los números irracionales y que no hay ya otros números reales.

CONJUNTOS DE PUNTOS, INTERVALOS

Un conjunto de puntos (números reales) del eje real se dice *conjunto de puntos unidimensional.*

El conjunto de puntos x tales que $a \leqq x \leqq b$ se llama *intervalo cerrado* y se denota por $[a, b]$. El conjunto $a < x < b$ se llama *intervalo abierto* y se denota $]a, b[$. Los conjuntos $a < x \leqq b$ y $a \leqq x < b$, denotados $]a, b]$ y $[a, b[$, respectivamente, se llaman *intervalos semiabiertos* o *semicerrados.*

El símbolo x, que puede representar cualquier número o punto de un conjunto, se llama *variable.* Los números dados a o b se llaman *constantes.*

Ejemplo: El conjunto de los x tales que $|x| < 4$, o sea, tales que $-4 < x < 4$, se representa por $]-4, 4[$ un intervalo abierto.

El conjunto $x > a$ se puede representar, asimismo, por $a < x < \infty$. Un conjunto semejante se llama *intervalo infinito.* Análogamente, $-\infty < x < \infty$ representa todos los números reales x.

CONJUNTOS ENUMERABLES

Se dice que un conjunto es *enumerable* si sus elementos se pueden poner en correspondencia *biunívoca* con los números naturales.

Ejemplo: Los números naturales pares 2, 4, 6, 8, ... son un conjunto enumerable en vista de la correspondencia biunívoca.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Conjunto dado} & 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Números naturales} & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{array}$$

Un conjunto se dice *infinito* si se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto suyo.

Si bien un conjunto infinito puede ser enumerable como se ha visto, hay conjuntos infinitos no enumerables como es el caso de los números irracionales o el de todos los números reales (Problemas 17-20).

El número de elementos de un conjunto se dice su *número cardinal*. Un conjunto infinito tiene por cardinal el número $\aleph_0$ (alef subcero, primera letra hebrea). El conjunto de los números reales (o cualquier conjunto que se pueda poner en correspondencia biunívoca con éste) tiene por cardinal el número C, llamado *cardinal del continuo.*

ENTORNOS

El conjunto de todos los puntos x tales que $|x - a| < \delta$ con $\delta > 0$ se llama *entorno* δ del punto a. El conjunto de los puntos x tales que $0 < |x - a| < \delta$ en que se excluye $x = a$ se llama *entorno* δ *reducido* de a.

PUNTOS LIMITE

Se llama *punto límite* o *punto de acumulación* de un conjunto de números un número l tal que todo entorno δ reducido de l contiene elementos del conjunto. Es decir, tal que para todo $\delta > 0$, por pequeño que sea, se puede hallar siempre un elemento x del conjunto distinto de l, pero tal que $|x - l| < \delta$. Considerando valores más y más pequeños de δ, se ve que debe haber infinitos de tales elementos x.

Un conjunto finito no puede tener punto límite. Un conjunto infinito puede o no tener punto límite. Así, por ejemplo, los números naturales no tienen punto límite mientras que el conjunto de los números racionales tiene infinitos puntos límites.

Un conjunto que contenga todos sus puntos límites se dice *conjunto cerrado*. El conjunto de los racionales no es cerrado, pues, por ejemplo, el punto límite $\sqrt{2}$ no es elemento del conjunto (Problema 5). En cambio, el conjunto $0 \leqq x \leqq 1$ es çerrado.

MAYORANTES, MINORANTES, EXTREMOS

Si para todos los números x de un conjunto existe un número M tal que $x \leqq M$ se dice que el conjunto está mayorado y M es un *mayorante*. De igual manera, si $x \geqq m$ el conjunto se dice minorado y m es un *minorante*. Si para todo x se tiene $m \leqq x \leqq M$ el conjunto se dice *acotado*.

Si $\underline{M}$ es un número tal que ningún elemento del conjunto es mayor que $\underline{M}$, pero hay uno al menos que supera $\underline{M} - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $\underline{M}$ es el *mínimo mayorante* o *extremo superior* del conjunto. Análogamente, si ningún elemento del conjunto es menor que $\bar{m}$, pero hay al menos uno que es inferior a $\bar{m} + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $\bar{m}$ es el *máximo minorante* o *extremo inferior* del conjunto.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Establece que todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite. Se da una demostración en el Problema 23, Capítulo 3.

NUMEROS ALGEBRAICOS Y NUMEROS TRASCENDENTES

Un número x, que es solución de la *ecuación algebraica*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

donde $a_0 \neq 0$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros y n es entero positivo, el llamado *grado* de la ecuación se llama *número algebraico*. Un número que no es expresable como solución de una ecuación algebraica de coeficientes enteros se llama *trascendente*.

Ejemplos: $\frac{2}{3}$ y $\sqrt{2}$, que son soluciones de $3x - 2 = 0$ y de $x^2 - 2 = 0$, respectivamente, son números algebraicos.

Los números π y e son trascendentes, como puede demostrarse, pero aún no se ha podido determinar si números como $e\pi$ son algebraicos o no.

El conjunto de los números algebraicos es infinito enumerable (Problema 23), pero el de los trascendentes es un infinito no enumerable.

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Como no existe número real x que satisfaga la ecuación algebraica $x^2 + 1 = 0$ o ecuaciones parecidas se introduce el conjunto de los números complejos.

Se puede considerar un número complejo en la forma $a + bi$ con a y b reales, que se llaman *parte real* y *parte imaginaria*, respectivamente, y donde $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si, y solo si, $a = c$ y $b = d$. Se pueden considerar los números reales como subconjunto de los números complejos con $b = 0$. El número complejo $0 + 0i$ corresponde al número real 0.

El *valor absoluto* o *módulo* de $a + bi$ se define como $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. El número $a - bi$ se define como *conjugado complejo* de $a + bi$. El complejo conjugado del complejo z se suele denotar por $\bar{z}$ o z^*.

El conjunto de los complejos obedece las reglas 1-9 de la página 2 y, por tanto, constituye un cuerpo. Al hacer operaciones con complejos se puede operar como en el álgebra de los reales, remplazando luego i^2 por -1. No se definen desigualdades entre números complejos.

Desde el punto de vista de una fundamentación axiomática de los números complejos es conveniente tratar un número complejo como un par ordenado (a, b) de números reales a y b sujetos a ciertas reglas de operación que resultan equivalentes a las ya mencionadas. Por ejemplo, se define $(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$, $m(a, b) = (ma, mb)$, etc. Se halla luego que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ y se asocia esto con $a + bi$, siendo i entonces el símbolo de $(0, 1)$.

FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

Si se eligen ejes reales sobre dos rectas perpendiculares $X'OX$ y $Y'OY$ (los ejes x y y) como en la Figura 1-2 se puede entonces situar cualquier punto del plano determinado por estas rectas mediante el par ordenado de números (x, y) o *coordenadas cartesianas* del punto. En la Fig. 1-2 se indican ejemplos de localización de puntos en esta forma en P, Q, R, S y T.

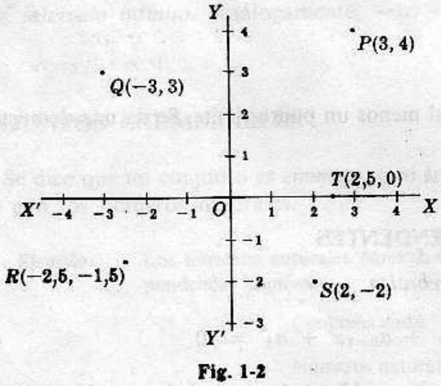


Fig. 1-2

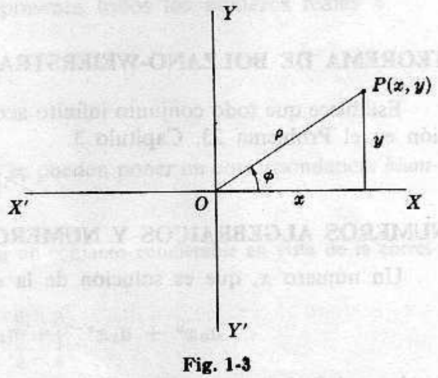


Fig. 1-3

Como un número complejo $x + iy$ se puede considerar como un par ordenado (x, y), se pueden representar esos números como puntos del plano xy que se llamará entonces *plano complejo* o *diagrama de Argand*. En la Fig. 1-3 se tiene $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi$ donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ y ϕ, llamado *amplitud* o *argumento*, es el ángulo que la recta OP forma con el eje positivo de las x OX. Se sigue que

$$z = x + iy = \rho(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \tag{2}$$

llamada *forma polar* del número complejo, donde ρ y ϕ son las llamadas *coordenadas polares*. A veces es cómodo escribir cis ϕ en vez de $\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$.

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1(\cos\phi_1 + i \operatorname{sen}\phi_1)$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2(\cos\phi_2 + i \operatorname{sen}\phi_2)$ se puede demostrar que

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\{\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)\} \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \operatorname{sen}(\phi_1 - \phi_2)\} \tag{4}$$

$$z^n = \{\rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)\}^n = \rho^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) \tag{5}$$

siendo n un número real. La igualdad (*5*) es el *teorema de De Moivre*. Puede emplearse para determinar las raíces de los números complejos. Por ejemplo, si n es un entero positivo,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{\rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)\}^{1/n} \\ &= \rho^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{6}$$

de donde se deduce que hay, en general, n distintos valores para $z^{1/n}$. Más adelante (Cap. 11) se verá que $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$ siendo $e = 2{,}71828\ldots$. Esta es la llamada *fórmula de Euler*.

INDUCCION MATEMATICA

El principio de *inducción matemática* es una importante propiedad de los enteros positivos. Es útil sobre todo para demostrar enunciados en que intervienen enteros positivos cuando se sabe, por ejemplo, que los enunciados son válidos para $n = 1, 2, 3$, pero se *sospecha* o *conjetura* que son válidos para todos los enteros positivos. El método consiste en los siguientes pasos.

1. Verificar el enunciado para $n = 1$ (o para otro entero positivo).
2. Suponer cierto el enunciado para $n = k$ siendo k un entero positivo.
3. A partir de la suposición de 2 se demuestra que el enunciado es válido para $n = k + 1$. Esta es la parte de la demostración que establece la inducción y puede ser difícil y hasta imposible.
4. Como el enunciado es cierto para $n = 1$ [por el primer paso] debe ser cierto [por el paso 3] para $n = 1 + 1 = 2$ y, por tanto, para $n = 2 + 1 = 3$, etc., y entonces debe ser cierto para todos los enteros positivos.

Problemas resueltos

OPERACIONES CON NUMEROS

1. Si $x = 4$, $y = 15$, $z = -3$, $p = \frac{2}{3}$, $q = -\frac{1}{6}$, y $r = \frac{3}{4}$, calcular (*a*) $x + (y + z)$, (*b*) $(x + y) + z$, (*c*) $p(qr)$, (*d*) $(pq)r$, (*e*) $x(p + q)$.

(*a*) $x + (y + z) = 4 + [15 + (-3)] = 4 + 12 = 16$

(*b*) $(x + y) + z = (4 + 15) + (-3) = 19 - 3 = 16$

El que (*a*) y (*b*) sean iguales ilustra la *ley asociativa de la adición*.

(*c*) $p(qr) = \frac{2}{3}\{(-\frac{1}{6})(\frac{3}{4})\} = (\frac{2}{3})(-\frac{3}{24}) = (\frac{2}{3})(-\frac{1}{8}) = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$

(*d*) $(pq)r = \{(\frac{2}{3})(-\frac{1}{6})\}(\frac{3}{4}) = (-\frac{2}{18})(\frac{3}{4}) = (-\frac{1}{9})(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$

El que (*c*) y (*d*) sean iguales ilustra la *ley asociativa de la multiplicación*.

(*e*) $x(p + q) = 4(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) = 4(\frac{4}{6} - \frac{1}{6}) = 4(\frac{3}{6}) = \frac{12}{6} = 2$

Otra manera: $x(p + q) = xp + xq = (4)(\frac{2}{3}) + (4)(-\frac{1}{6}) = \frac{8}{3} - \frac{4}{6} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ aplicando la *ley distributiva*.

2. Explicar por qué no son números $(a)\ \frac{0}{0}$ $(b)\ \frac{1}{0}$.

(*a*) Si se define a/b como el número (si existe) tal que $bx = a$, entonces $0/0$ es el número x tal que $0x = 0$. Pero esto es cierto para todos los números x, y no habiendo un número x único que represente a $0/0$ no se puede considerar como número.

(*b*) Como en (*a*) si se define $1/0$ como el número x (si existe) tal que $0x = 1$, se concluye que tal número no existe.

Por esto hay que considerar la división por cero como carente de sentido.

3. Simplificar $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3}$.

$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+1}$ siempre que el factor cancelado $(x - 3)$ no sea nulo, $x \neq 3$. Para $x = 3$ la fracción dada no está definida.

NUMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

4. Demostrar que el cuadrado de un entero impar es impar.

Todo impar tiene la forma $2m + 1$. Como $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ supera en 1 al entero par $4m^2 + 4m = 2(2m^2 + 2m)$, es impar.

5. Demostrar que no hay número racional cuyo cuadrado sea 2.

Sea p/q un número racional cuyo cuadrado sea 2 y tal que p/q es una fracción irreducible, o sea, que p y q no tienen más factores comunes que ± 1 (o sea, que p y q son *primos entre sí*, como se dice).

Entonces $(p/q)^2 = 2$, $p^2 = 2q^2$ y p^2 es par. Según el Problema 4, p es par porque si p fuera impar p^2 sería impar. Así, pues, $p = 2m$.

Sustituyendo $p = 2m$ en $p^2 = 2q^2$ resulta $q^2 = 2m^2$, o sea, que q^2 es par y q es par.

De modo que p y q tienen el factor común 2 contra lo supuesto que no tenían más factores comunes que ± 1. Esta contradicción permite afirmar que no hay número racional cuyo cuadrado sea 2.

6. Mostrar cómo se pueden encontrar números racionales cuyos cuadrados se puedan aproximar a 2 tanto como se quiera.

Limitándose a considerar solamente números racionales positivos, por ser $(1)^2 = 1$ y $(2)^2 = 4$, habrá que escoger números racionales entre 1 y 2, por ejemplo, 1,1, 1,2, 1,3, . . . , 1,9.

Como $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ y $(1{,}5)^2 = 2{,}25$, se consideran números racionales entre 1,4 y 1,5 como 1,41, 1,42, . . . , 1,49.

Continuando así se pueden obtener aproximaciones racionales cada vez mejores a 2; así, por ejemplo, $(1{,}414213562)^2$ es menor que 2 y $(1{,}414213563)^2$ es mayor que 2.

7. Dada la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ enteros y a_0 y $a_n \neq 0$. Mostrar que si la ecuación tiene una raíz racional p/q, entonces p divide a a_n y q divide a a_0.

Como p/q es raíz, sustituyéndola en la ecuación y multiplicando por q^n se tiene

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \tag{1}$$

o bien dividiendo por p,

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p} \tag{2}$$

Como el primer miembro de (*2*) es entero, también ha de serlo el segundo miembro. Y como p y q son primos entre sí, p no divide a q^n y entonces debe dividir a a_n.

De manera semejante, pasando al segundo miembro el primer término de (*1*) y dividiendo por q, se puede demostrar que q tiene que dividir a a_0.

8. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no puede ser racional.

Si $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, entonces $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ y, elevando al cuadrado, $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Las únicas raíces racionales posibles de esta ecuación son ± 1 según el Problema 7, pero éstas no satisfacen la ecuación. De modo que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, que sí satisface la ecuación, no puede ser racional.

9. Demostrar que entre dos números racionales hay otro número racional.

Si a y b son racionales, entonces $\frac{a+b}{2}$ es racional y está entre a y b.

Para demostrarlo supóngase $a < b$. Entonces, agregando a a ambos miembros, $2a < a + b$ y $a < \frac{a+b}{2}$.

Análogamente, sumando b a ambos miembros, $a + b < 2b$ y $\frac{a+b}{2} < b$.

Así, pues, $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Para demostrar que $\frac{a+b}{2}$ es racional, sea $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{r}{s}$ con p, q, r, s enteros y $q \neq 0$, $s \neq 0$.

Entonces, $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}\right) = \frac{ps+qr}{2qs}$ es un número racional.

DESIGUALDADES

10. ¿Para qué valores de x es $x + 3(2 - x) \geqq 4 - x$?

$x + 3(2 - x) \geqq 4 - x$ si $x + 6 - 3x \geqq 4 - x$, $6 - 2x \geqq 4 - x$, $6 - 4 \geqq 2x - x$, $2 \geqq x$, es decir, $x \leqq 2$.

11. ¿Para qué valores de x es $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$?

La desigualdad se verifica si

$$x^2 - 3x - 2 - 10 + 2x < 0, \quad x^2 - x - 12 < 0 \quad \text{o} \quad (x-4)(x+3) < 0$$

Esta última desigualdad se verifica solamente en los casos siguientes:

Caso 1: $x - 4 > 0$ y $x + 3 < 0$, es decir, $x > 4$ y $x < -3$. Pero esto es *imposible* porque x no puede ser mayor que 4 y menor que -3.

Caso 2: $x - 4 < 0$ y $x + 3 > 0$, es decir, $x < 4$ y $x > -3$. Esto es posible si $-3 < x < 4$.

Así que la desigualdad se verifica para el conjunto de todos los x tales que $-3 < x < 4$.

12. Si $a \geqq 0$ y $b \geqq 0$, demostrar que $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$.

Se llega a menudo a tener un método de demostración *suponiendo* que el resultado es cierto y efectuando operaciones válidas hasta que se llega a un resultado de validez *conocida*. Invirtiendo el proceso (suponiendo que esto sea posible) se tiene la demostración.

En este problema partimos del resultado para obtener sucesivamente $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$, $(a+b)^2 \geqq 4ab$, o sea, $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$, es decir, $(a-b)^2 \geqq 0$, lo que es cierto. Invirtiendo los pasos se llega al resultado.

Otro método: Como $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ se tiene $a - 2\sqrt{ab} + b \geqq 0$ o $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$.

Este resultado se puede generalizar a $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números no negativos. El primer miembro se llama *media aritmética* y el segundo miembro *media geométrica* de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

13. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son reales cualesquiera se verifica la *desigualdad de Schwarz*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Demostrarla.

Para todo real λ se tiene

$$(a_1\lambda + b_1)^2 + (a_2\lambda + b_2)^2 + \cdots + (a_n\lambda + b_n)^2 \geqq 0$$

Desarrollando y reduciendo términos

$$A^2\lambda^2 + 2C\lambda + B^2 \geqq 0 \qquad (1)$$

con

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \quad B^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2, \quad C = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad (2)$$

Entonces (*1*) se puede escribir

$$\lambda^2 + \frac{2C}{A^2}\lambda + \frac{B^2}{A^2} \geqq 0 \quad \text{o sea} \quad \left(\lambda + \frac{C}{A^2}\right)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{C^2}{A^4} \geqq 0 \qquad (3)$$

Pero esta última desigualdad es cierta para todo real λ si, y solo si, $\frac{B^2}{A^2} - \frac{C^2}{A^4} \geqq 0$, o sea, $C^2 \leqq A^2B^2$, de donde resulta la desigualdad de Schwarz mediante (*2*).

14. Demostrar que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqq$ para todo natural $n > 1$.

Sea $\quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Entonces, $\quad \frac{1}{2}S_n = \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}$

Restando, $\quad \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n}$. Así, $S_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqq 1$ para todo n.

EXPONENTES, RAICES Y LOGARITMOS

15. Calcular:

(a) $\dfrac{3^4 \cdot 3^8}{3^{14}} = \dfrac{3^{4+8}}{3^{14}} = 3^{4+8-14} = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

(b) $\sqrt{\dfrac{(5 \cdot 10^{-6})(4 \cdot 10^2)}{8 \cdot 10^5}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 4}{8} \cdot \dfrac{10^{-6} \cdot 10^2}{10^5}} = \sqrt{2{,}5 \cdot 10^{-9}} = \sqrt{25 \cdot 10^{-10}} = 5 \cdot 10^{-5}$ ó 0.00005

(c) $\log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right) = x$. Luego $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ o $x = -3$.

(d) $(\log_a b)(\log_b a) = u$. Sea $\log_a b = x$, $\log_b a = y$ suponiendo $a, b > 0$ y $a, b, \neq 1$.

Entonces, $a^x = b$, $b^y = a$ y $u = xy$.

Como $(a^x)^y = a^{xy} = b^y = a$ se tiene $a^{xy} = a^1$ o sea $xy = 1$ el valor buscado.

16. Si $M > 0$, $N > 0$ y $a > 0$, pero $a \neq 1$, demostrar que $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

Sea $\log_a M = x$, $\log_a N = y$. Luego $a^x = M$, $a^y = N$ y, por tanto,

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{o sea} \quad \log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

CONJUNTOS ENUMERABLES

17. Demostrar que el conjunto de los números racionales entre 0 y 1 inclusive es enumerable.

Escríbanse todas las fracciones de denominador 2, 3, ... considerando solo una vez las fracciones equivalentes tales como $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ Entonces se puede establecer una correspondencia biunívoca con los números naturales como sigue

Números racionales	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Números naturales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

De modo que el conjunto de los números racionales entre 0 y 1 inclusive es enumerable y tiene cardinal $\aleph_0$ (véase página 4).

18. Si A y B son dos conjuntos enumerables, demostrar que el conjunto formado por todos los elementos de A o B (o de ambos) es también enumerable.

Como A es enumerable hay una correspondencia biunívoca entre sus elementos y los números naturales, de modo que se pueden denotar los elementos de A como $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Análogamente se pueden denotar los elementos de B como $b_1, b_2, b_3, \ldots$

Caso 1: Supóngase que los elementos de A son todos distintos de los de B. Entonces el conjunto de elementos de A o de B es enumerable, pues se puede establecer una correspondencia biunívoca como sigue:

A o B	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Números naturales	1	2	3	4	5	6	...

Caso 2: Si algunos elementos de A y de B son los mismos, se les cuenta solamente una vez como en el Problema 17. Entonces el conjunto de elementos que pertenecen a A o a B (o a ambos) es enumerable.

El conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A *o* a B (o a ambos) se llama *unión* de A y B y se denota por $A \cup B$ o por $A + B$.

El conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A *y* B se llama *intersección* de A y B y se denota por $A \cap B$ o por AB. Si A y B son enumerables, también $A \cap B$ es enumerable.

El conjunto formado por todos los elementos de A que *no* están en B se escribe $A - B$. Si $\bar{B}$ es el conjunto de elementos que no están en B, también puede escribirse $A - B = A\bar{B}$. Si A y B son enumerables, también lo es $A - B$.

19. Demostrar que el conjunto de todos los números racionales positivos es enumerable.

Considérense todos los racionales $x > 1$. A cada número racional de éstos se puede asociar un, y solo un, número racional $1/x$ del $(0, 1)$, esto es, hay una *correspondencia biunívoca* entre todos los racionales > 1 y todos los racionales del $(0, 1)$. Como este último es enumerable, según el Problema 17, se deduce que el conjunto de todos los racionales > 1 es enumerable.

Del Problema 18 se sigue entonces que el conjunto de todos los números racionales positivos es enumerable, pues está formado por los dos conjuntos enumerables de racionales entre 0 y 1 y de los mayores o iguales a 1.

A partir de aquí se puede demostrar que el conjunto de todos los racionales es enumerable (Problema 59).

20. Demostrar que el conjunto de los reales de $[0, 1]$ no es enumerable.

Todo real de $[0, 1]$ tiene una expresión decimal $0,a_1\, a_2\, a_3 \ldots$, donde $a_1, a_2, \ldots$ son cifras cualesquiera de las $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Se supone que los números cuya expresión en forma decimal es finita, tal como 0,7324, se escribe 0,73240000... y que lo mismo sería 0,73239999...

Si todos los reales de $[0, 1]$ forman conjunto enumerable se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números naturales así:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \leftrightarrow & 0,a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots \\ 2 & \leftrightarrow & 0,a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots \\ 3 & \leftrightarrow & 0,a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots \\ \cdot & & \quad\cdot \\ \cdot & & \quad\cdot \\ \cdot & & \quad\cdot \end{array}$$

$$0,b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$$

siendo $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $b_4 \neq a_{44}$, ... y no todos los b a partir de una cierta posición son 9.

Este número, que pertenece a $[0, 1]$, es diferente de todos los números enumerados y, por tanto, no está contado, lo cual contradice la hipótesis de que todos los números de $[0, 1]$ estaban incluidos en la enumeración.

En virtud de esta contradicción se deduce que los reales de $[0, 1]$ no se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números naturales, es decir, el conjunto de los números reales de $[0, 1]$ no es enumerable.

PUNTOS LIMITES, MAYORANTES Y MINORANTES, TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

21. (*a*) Demostrar que el conjunto infinito de numeros $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ es acotado. (*b*) Determinar el extremo superior y el extremo inferior del conjunto. (*c*) Demostrar que 0 es un punto límite del conjunto. (*d*) ¿Es cerrado el conjunto? (*e*) ¿Cómo ilustra este conjunto el teorema de Bolzano-Weierstrass?

(*a*) Como todos los elementos del conjunto son menores que 2 y mayores que -1 (por ejemplo), el conjunto es acotado; 2 es un mayorante y -1 un minorante.

Se pueden hallar menores mayorantes ($\frac{3}{2}$, por ejemplo) y mayores minorantes ($-\frac{1}{2}$, por ejemplo).

(*b*) Como ningún elemento del conjunto es mayor que 1 y como al menos hay un elemento (el 1) mayor que $1 - \epsilon$ para todo ϵ positivo, se tiene que 1 es el extremo superior del conjunto.

Como ningún elemento del conjunto es menor que 0 y como al menos hay un elemento menor que $0 + \epsilon$ para todo ϵ positivo (siempre se puede escoger para esto el número $1/n$ con n entero positivo mayor que $1/\epsilon$), se tiene que 0 es el extremo inferior del conjunto.

(c) Sea x un elemento del conjunto. Como siempre se puede hallar un número x tal que $0 < |x| < \delta$ para todo positivo δ (por ejemplo, se puede tomar siempre para x el número $1/n$, siendo n un entero mayor que $1/\delta$), se ve que 0 es un punto límite del conjunto. Es decir, que todo entorno δ reducido de 0 tiene siempre elementos del conjunto por pequeño que se tome $\delta > 0$.

(d) El conjunto no es cerrado puesto que el punto límite 0 no pertenece al conjunto dado.

(e) Como el conjunto es acotado e infinito debe tener al menos un punto límite, por el teorema de Bolzano-Weierstrass. Puesto que éste es el caso aquí, queda ilustrado el teorema.

NUMEROS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

22. Demostrar que $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ es un número algebraico.

Sea $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Entonces $x - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$. Elevando al cubo ambos miembros y simplificando resulta $x^3 + 9x - 2 = 3\sqrt{3}(x^2 + 1)$. Elevando entonces al cuadrado ambos miembros y simplificando se tiene $x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 + 36x - 23 = 0$.

Como ésta es una ecuación algebraica de coeficientes enteros se sigue que $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, que es una solución de la misma, es un número algebraico.

23. Demostrar que el conjunto de los números algebraicos es enumerable.

Los números algebraicos son soluciones de ecuaciones algebraicas de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a^n = 0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros.

Sea $P = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + n$. Para todo valor dado de P hay solo un número finito de ecuaciones algebraicas posibles y, por tanto, solo un número finito de números algebraicos posibles.

Escribiendo todos los números algebraicos que corresponden a $P = 1, 2, 3, 4, \ldots$ evitando las repeticiones, resulta que todos se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números naturales, siendo, por tanto, enumerables.

NUMEROS COMPLEJOS

24. Efectuar las operaciones indicadas.

(a) $(4-2i) + (-6+5i) = 4 - 2i - 6 + 5i = 4 - 6 + (-2+5)i = -2+3i$

(b) $(-7+3i) - (2-4i) = -7 + 3i - 2 + 4i = -9 + 7i$

(c) $(3-2i)(1+3i) = 3(1+3i) - 2i(1+3i) = 3 + 9i - 2i - 6i^2 = 3 + 9i - 2i + 6 = 9 + 7i$

(d) $$\frac{-5+5i}{4-3i} = \frac{-5+5i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2} = \frac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}$$
$$= \frac{-35+5i}{25} = \frac{5(-7+i)}{25} = \frac{-7}{5} + \frac{1}{5}i$$

(e) $$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \frac{i - 1 + (i^2)(i) + (i^2)^2 + (i^2)^2 i}{1+i} = \frac{i-1-i+1+i}{1+i}$$
$$= \frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{i-i^2}{1-i^2} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

(f) $|3-4i|\,|4+3i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2}\,\sqrt{(4)^2+(3)^2} = (5)(5) = 25$

(g) $$\left|\frac{1}{1+3i} - \frac{1}{1-3i}\right| = \left|\frac{1-3i}{1-9i^2} - \frac{1+3i}{1-9i^2}\right| = \left|\frac{-6i}{10}\right| = \sqrt{(0)^2+(-\tfrac{6}{10})^2} = \tfrac{3}{5}$$

25. Si z_1 y z_2 son dos complejos, demostrar que $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Luego

$$\begin{aligned}|z_1z_2| &= |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)|\\ &= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2}\\ &= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |x_1+iy_1|\,|x_2+iy_2| = |z_1|\,|z_2|.\end{aligned}$$

26. Resolver $x^3 - 2x - 4 = 0$.

Las posibles raíces racionales, según el Problema 7, son ± 1, ± 2, ± 4. Ensayando se encuentra que $x = 2$ es una raíz. De modo que la ecuación dada se puede escribir $(x-2)(x^2+2x+2) = 0$. Las soluciones de esta ecuación de *segundo grado* son

$ax^2+bx+c = 0$ son $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Para $a=1$, $b=2$, $c=2$ esto da $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$.

El conjunto de soluciones es $2, -1+i, -1-i$.

FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

27. Expresar en forma polar (*a*) $3+3i$, (*b*) $-1+\sqrt{3}i$, (*c*) -1, (*d*) $-2-2\sqrt{3}i$.

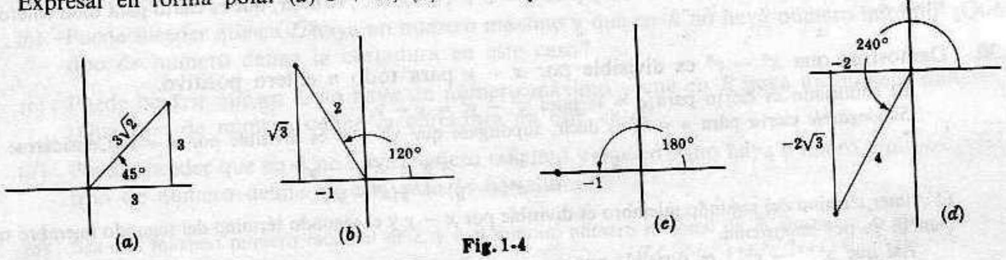


Fig. 1-4

(*a*) Amplitud $\phi = 45° = \pi/4$ radianes. Módulo $\rho = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Entonces,

$$3+3i = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) = 3\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i \operatorname{sen}\pi/4) = 3\sqrt{2}\operatorname{cis}\pi/4 = 3\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$$

(*b*) Amplitud $\phi = 120° = 2\pi/3$ radianes. Módulo $\rho = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Entonces,

$$-1+\sqrt{3}\,i = 2(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3) = 2\operatorname{cis} 2\pi/3 = 2e^{2\pi i/3}$$

(*c*) Amplitud $\phi = 180° = \pi$ radianes. Módulo $\rho = \sqrt{(-1)^2+(0)^2} = 1$. Entonces,

$$-1 = 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = \operatorname{cis}\pi = e^{\pi i}$$

(*d*) Amplitud $\phi = 240° = 4\pi/3$ radianes. Módulo $\rho = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4$. Entonces,

$$-2-2\sqrt{3} = 4(\cos 4\pi/3 + i \operatorname{sen} 4\pi/3) = 4\operatorname{cis} 4\pi/3 = 4e^{4\pi i/3}$$

28. Calcular (*a*) $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$, (*b*) $(-1+i)^{1/3}$.

(*a*) Por el Problema 27(*b*) y el teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}\,i)^{10} &= [2(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)]^{10} = 2^{10}(\cos 20\pi/3 + i \operatorname{sen} 20\pi/3)\\ &= 1024[\cos(2\pi/3+6\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi/3+6\pi)] = 1024(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)\\ &= 1024(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i) = -512 + 512\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

(*b*) $-1+i = \sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = \sqrt{2}[\cos(135° + k\cdot 360°) + i \operatorname{sen}(135° + k \cdot 360°)]$

Entonces,

$$(-1+i)^{1/3} = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{135° + k\cdot 360°}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{135° + k\cdot 360°}{3}\right)\right]$$

Los resultados para $k = 0, 1, 2$ son

$$\sqrt[6]{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°),$$
$$\sqrt[6]{2}(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°),$$
$$\sqrt[6]{2}(\cos 285° + i \operatorname{sen} 285°)$$

Los resultados para $k = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ son repeticiones de los anteriores. Estas raíces complejas se representan geométricamente en el plano complejo por los puntos P_1, P_2, P_3 del círculo de la Figura 1-5.

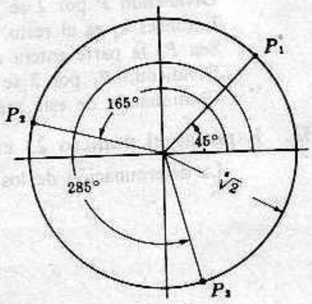


Fig. 1-5

INDUCCION MATEMATICA

29. Demostrar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

El enunciado es cierto para $n = 1$, pues $1^2 = \frac{1}{6}(1)(1+1)(2\cdot 1+1) = 1$.

Supóngase cierto para $n = k$. Entonces,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Sumando $(k+1)^2$ a ambos miembros,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = (k+1)[\tfrac{1}{6}k(2k+1) + k + 1] \\ &= \tfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \tfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

que muestra que el enunciado es cierto para $n = k+1$ *si* es cierto para $n = k$. Pero como es cierto para $n = 1$, se sigue que lo es para $n = 1 + 1 = 2$ y para $n = 2 + 1 = 3, \ldots$, es decir, que es cierto para todo entero positivo n.

30. Demostrar que $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$ para todo n entero positivo.

El enunciado es cierto para $n = 1$, pues $x^1 - y^1 = x - y$.

Supóngasele cierto para $n = k$, es decir, supóngase que $x^k - y^k$ es divisible por $x - y$. Considérese

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} \\ &= x^k(x-y) + y(x^k - y^k) \end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro es divisible por $x - y$ y el segundo término del segundo miembro también lo es por suposición.

Así que $x^{k+1} - y^{k+1}$ es divisible por $x - y$ *si* $x^k - y^k$ lo es.

Entonces, como $x^1 - y^1$ es divisible por $x - y$ se sigue que $x^2 - y^2$ es divisible por $x - y$, que $x^3 - y^3$ también es divisible por $x - y$, etc.

31. Demostrar la *desigualdad de Bernoulli* $(1+x)^n > 1 + nx$ para $n = 2, 3, \ldots$ si $x > -1$, $x \neq 0$.

El enunciado es cierto para $n = 2$ pues $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$.

Supóngase el enunciado cierto para $n = k$, es decir, que $(1+x)k > 1 + kx$.

Multiplicando ambos miembros por $1 + x$ (que es positivo por ser $x > -1$) se tiene

$$(1+x)^{k+1} > (1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$$

De modo que el enunciado es cierto para $n = k+1$ si lo es para $n = k$.

Pero como el enunciado es cierto para $n = 2$, debe serlo también para $n = 2 + 1 = 3, \ldots$ y es entonces cierto para todo entero mayor o igual que 2.

Nótese que el resultado no es cierto para $n = 1$. Pero modificando el enunciado así: $(1+x)^n \geqq 1 + nx$ es cierto para $n = 1, 2, 3, \ldots$

PROBLEMAS VARIOS

32. Demostrar que todo entero positivo P se puede expresar de manera única en la forma $P = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \cdots + a_n$, siendo las a 0 o 1.

Dividiendo P por 2 se tiene $P/2 = a_0 2^{n-1} + a_1 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} + a_n/2$.

Entonces a_n es el resto, 0 o 1, obtenido al dividir P por 2 y es único.

Sea P_1 la parte entera de $P/2$. Entonces $P_1 = a_0 2^{n-1} + a_1 2^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$.

Dividiendo P_1 por 2 se ve que a_{n-1} es el resto, 0 o 1, obtenido al dividir P_1 por 2 y es único.

Continuando de esta manera se pueden determinar todas las a como 0 o 1 y son únicas.

33. Expresar el número 23 en la forma del Problema 32.

La determinación de los coeficientes se puede disponer así:

$$\begin{array}{rl} 2\,)\,\underline{23} & \\ 2\,)\,\underline{11} & \text{Resto } 1 \\ 2\,)\,\underline{5} & \text{Resto } 1 \\ 2\,)\,\underline{2} & \text{Resto } 1 \\ 2\,)\,\underline{1} & \text{Resto } 0 \\ 0 & \text{Resto } 1 \end{array}$$

Los coeficientes son 1 0 1 1 1. **Prueba:** $23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$.

El número 10111 representa a 23 en el *sistema de numeración binaria o de base dos.*

34. Dedekind definía una *cortadura, sección* o *partición* en el conjunto de los números racionales como una separación de *todos* los racionales en dos clases o conjuntos L (clase de la izquierda) y R (clase de la derecha) con las siguientes propiedades:

I. Las clases no son vacías (es decir, hay al menos un número en cada clase).
II. Todo número racional está en una clase o en la otra.
III. Todo número de L es menor que todo número de R.

Demostrar que:

(*a*) No puede haber un número máximo en L y uno mínimo en R.

(*b*) Puede suceder que en L haya un número máximo y que en R no haya número mínimo. ¿Qué tipo de número define la cortadura en este caso?

(*c*) Puede ocurrir que en L no haya un número máximo y que en R haya un número mínimo. ¿Qué tipo de número define la cortadura en este caso?

(*d*) Puede suceder que en L no haya número máximo y que en R no haya número mínimo. ¿Qué tipo de número define en este caso la cortadura?

(*a*) Sea a el máximo número racional de L y b el mínimo número racional de R. Entonces, o bien $a = b$ o bien $a < b$.

No se puede tener $a = b$ porque, por definición de la cortadura, todo número de L es *menor* que todo número de R.

No puede ser tampoco $a < b$, pues, según el Problema 9, $\frac{1}{2}(a + b)$ es un número racional mayor que a (y entonces pertenece a R), pero menor que b (y entonces pertenece a L), y, por definición, un número racional no puede estar *a la vez* en L y en R.

(*b*) Como indicación de la posibilidad, sea L la clase que contiene el número $\frac{2}{3}$ y todos los racionales menores que $\frac{2}{3}$, en tanto que R contiene todos los racionales mayores que $\frac{2}{3}$. En este caso la cortadura define el racional $\frac{2}{3}$. Un razonamiento semejante cambiando $\frac{2}{3}$ por cualquier otro racional muestra que en este caso la cortadura define un número racional.

(*c*) Como indicación de la posibilidad, sea L la clase que consiste en todos los racionales menores que $\frac{2}{3}$ mientras que R contiene todos los racionales mayores o iguales que $\frac{2}{3}$. Esta cortadura define también el número racional $\frac{2}{3}$. Un razonamiento semejante muestra que esta cortadura siempre define un número racional.

(*d*) Como indicación de la posibilidad, sea L la clase formada por todos los racionales negativos y todos los racionales positivos cuyos cuadrados son menores que 2, en tanto que R sea la clase de todos los positivos de cuadrado mayor que 2. Se puede mostrar que si a es un número cualquiera de la clase L hay siempre un número mayor en la clase L, en tanto que si b es un número cualquiera de la clase R hay siempre un número menor en la clase R (Problema 106). Una cortadura de este tipo define un número irracional.

De (*b*), (*c*), (*d*) se sigue que toda cortadura en el conjunto de los números racionales, llamada *cortadura de Dedekind*, define un número racional o un número irracional. Empleando cortaduras de Dedekind se pueden definir operaciones (como adición, multiplicación, etc.) con los números irracionales.

Problemas propuestos

OPERACIONES CON NUMEROS

35. Dados $x=-3$, $y=2$, $z=5$, $a=\frac{3}{2}$ y $b=-\frac{1}{4}$, calcular:

(a) $(2x-y)(3y+z)(5x-2z)$, (b) $\dfrac{xy-2z^2}{2ab-1}$, (c) $\dfrac{3a^2b+ab^2}{2a^2b^2+1}$, (d) $\dfrac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{(ay+bx)^2+(ax-by)^2}$.

Sol. (a) 2200, (b) 32, (c) $-51/41$, (d) 1

36. Hallar el conjunto de valores de x para los cuales son válidas las ecuaciones siguientes. Justificar todos los pasos en cada caso.

(a) $4\{(x-2)+3(2x-1)\}+2(2x+1) = 12(x+2)-2$ (c) $\sqrt{x^2+8x+7}-\sqrt{2x+2}=x+1$

(b) $\dfrac{1}{8-x}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{4}$ (d) $\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\dfrac{3}{5}$

Sol. (a) 2, (b) $6,-4$, (c) $-1,1$, (d) $-\frac{1}{2}$

37. Demostrar que $\dfrac{x}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{y}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{z}{(y-z)(z-x)}=0$ dando las condiciones si las hay.

NUMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

38. Hallar fracciones decimales para (a) $\frac{3}{7}$, (b) $\sqrt{5}$. *Sol.* (a) $0,\dot{4}2857\dot{1}$, (b) $2,2360679\ldots$

39. Mostrar que una fracción de denominador 17 y de numerador $1, 2, 3, \ldots, 16$ tiene 16 cifras en la parte que se repite en su expresión decimal. ¿Hay alguna relación entre los órdenes de las cifras en estas fracciones decimales?

40. Demostrar que (a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt[3]{2}$ son números irracionales.

41. Demostrar que (a) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}$, (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ son números irracionales.

42. Determinar un número racional positivo cuyo cuadrado difiera de 7 en menos de 0,000001.

43. Demostrar que todo número racional se puede expresar como fracción decimal periódica.

44. Hallar los valores de x tales que

(a) $2x^3-5x^2-9x+18=0$, (b) $3x^3+4x^2-35x+8=0$, (c) $x^4-21x^2+4=0$.

Sol. (a) $3, -2, 3/2$ (b) $8/3, -2\pm\sqrt{5}$ (c) $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{17})$, $\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{17})$

45. Si m no es cuadrado perfecto, demostrar que $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$ si, y solo si, $a=c$ y $b=d$.

46. Demostrar que $\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}-2\sqrt{15}+14\sqrt{3}-7}{11}$.

DESIGUALDADES

47. Hallar el conjunto de valores de x para los cuales se verifica:

(a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2x}\geqq 5$, (b) $x(x+2)\leqq 24$, (c) $|x+2|<|x-5|$, (d) $\dfrac{x}{x+2}>\dfrac{x+3}{3x+1}$.

Sol. (a) $0<x\leqq\frac{1}{2}$, (b) $-6\leqq x\leqq 4$, (c) $x<3/2$, (d) $x>3$, $-1<x<-\frac{1}{3}$, o $x<-2$

48. Demostrar (a) $|x+y|\leqq|x|+|y|$, (b) $|x+y+z|\leqq|x|+|y|+|z|$, (c) $|x-y|\geqq|x|-|y|$.

49. Demostrar que para todo real x, y, z, $x^2+y^2+z^2\geqq xy+yz+zx$.

50. Si $a^2+b^2=1$ y $c^2+d^2=1$, demostrar que $ac+bd\leqq 1$.

51. Si $x>0$, demostrar que $x^{n+1}+\dfrac{1}{x^{n+1}}>x^n+\dfrac{1}{x^n}$ para n natural.

52. Demostrar que para todo $a\neq 0$, $|a+1/a|\geqq 2$.

53. Mostrar que en la desigualdad de Schwarz (Problema 13) la igualdad es válida si, y solo si, $a_p=kb_p$, $p=1, 2, 3, \ldots, n$, siendo k una constante.

54. Si a_1, a_2, a_3 son positivos, demostrar que $\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

EXPONENTES, RAICES Y LOGARITMOS

55. Calcular (*a*) $4^{\log_2 8}$, (*b*) $\frac{3}{4}\log_{1/8}(\frac{1}{128})$, (*c*) $\sqrt{\dfrac{(0{,}00004)(25.000)}{(0{,}02)^5(0{,}125)}}$, (*d*) $3^{-2\log_3 5}$, (*e*) $(-\frac{1}{8})^{4/3} - (-27)^{-2/3}$.
Sol. (*a*) 64, (*b*) 7/4, (*c*) 50.000, (*d*) 1/25, (*e*) $-7/144$

56. Demostrar que (*a*) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$, (*b*) $\log_a M^r = r\log_a M$ dando posibles condiciones.

57. Demostrar que $b^{\log_b a} = a$ dando las restricciones si las hay.

CONJUNTOS ENUMERABLES

58. (*a*) Demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ y los del $-5 \leqq x \leqq -3$. (*b*) ¿Cuál es el número cardinal de los conjuntos de (*a*)?
Sol. (*b*) *C*, el cardinal del continuo.

59. (*a*) Demostrar que el conjunto de todos los números racionales es enumerable. (*b*) ¿Cuál es el número cardinal del conjunto de (*a*)? *Sol.* (*b*) $\aleph_0$

60. Demostrar que el conjunto de (*a*) los reales, (*b*) los irracionales, no es enumerable.

61. La *intersección* de dos conjuntos *A* y *B*, denotada $A \cap B$ o AB, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a *A* y *B*. Demostrar que si *A* y *B* son enumerables, también lo es su intersección.

62. Demostrar que un conjunto enumerable de conjuntos enumerables es enumerable.

63. Demostrar que el número cardinal del conjunto de puntos interiores de un cuadrado es igual al cardinal del conjunto de puntos de (*a*) un lado, (*b*) de los cuatro lados. (*c*) ¿Cuál es el cardinal en este caso? (*d*) ¿Es válido un resultado correspondiente para un cubo? *Sol.* (*c*) *C*

PUNTOS LIMITE. MAYORANTES Y MINORANTES. TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

64. Dado el conjunto 1, 1,1, 0,9, 1,01, 0,99, 1,001, 0,999, . . . (*a*) ¿Es acotado? (*b*) ¿Existen los extremos superior e inferior? En caso afirmativo, averiguarlos. (*c*) ¿Tiene el conjunto puntos límites? Si los hay, determinarlos. (*d*) ¿Es cerrado el conjunto?
Sol. (*a*) Sí, (*b*) extremo superior = 1,1, extremo inferior = 0,9, (*c*) 1, (*d*) sí

65. Dado el conjunto −0,9, 0,9, −0,99, 0,99, −0,999, 0,999 responder las preguntas del Problema 64.
Sol. (*a*) Sí, (*b*) extremo superior = 1, extremo inferior = −1, (*c*) 1, −1, (*d*) No

66. Dar un ejemplo de un conjunto que (*a*) tiene 3 puntos límite, (*b*) no tiene puntos límite.

67. (*a*) Demostrar que todo punto del intervalo $0 < x < 1$ es punto límite del mismo.
(*b*) ¿Hay puntos límites que no estén en el conjunto de (*a*)? Justificar la respuesta.

68. Sea *S* el conjunto de los números racionales de (0, 1) que tienen denominador 2^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*a*) ¿Tiene *S* puntos límites? (*b*) ¿Es *S* cerrado?

69. (*a*) Dar un ejemplo de un conjunto que tenga puntos límites sin ser acotado. (*b*) ¿Contradice esto el teorema de Bolzano-Weierstrass? Explicar.

NUMEROS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

70. Demostrar que (*a*) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, (*b*) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ son números algebraicos.

71. Demostrar que el conjunto de los números trascendentes de (0, 1) no es enumerable.

72. Demostrar que todo número racional es algebraico, pero que no todo número irracional es necesariamente algebraico.

NUMEROS COMPLEJOS. FORMA POLAR

73. Hacer las operaciones indicadas: (*a*) $2(5-3i) - 3(-2+i) + 5(i-3)$, (*b*) $(3-2i)^3$, (*c*) $\dfrac{5}{3-4i} + \dfrac{10}{4+3i}$, (*d*) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$, (*e*) $\left|\dfrac{2-4i}{5+7i}\right|^2$, (*f*) $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$.
Sol. (*a*) $1-4i$, (*b*) $-9-46i$, (*c*) $\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$, (*d*) -1, (*e*) $\frac{10}{37}$, (*f*) $\frac{16}{5}-\frac{2}{5}i$

74. Si z_1 y z_2 son números complejos demostrar (*a*) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, (*b*) $|z_1^2| = |z_1|^2$ dando algunas restricciones.

75. Demostrar (*a*) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, (*b*) $|z_1 + z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, (*c*) $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$.

76. Hallar todas las soluciones de $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0$. *Sol.* $3, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

77. Sean z_1 y z_2 representados por los puntos P_1 y P_2 en el diagrama de Argand. Construir los segmentos OP_1 y OP_2, a partir del origen O. Mostrar que $z_1 + z_2$ se puede representar por el punto P_3, siendo OP_3 la diagonal de un paralelogramo de lados OP_1 y OP_2. Esta es la llamada *regla del paralelogramo* de la adición de números complejos. Por esta y otras propiedades, los números complejos se pueden considerar como *vectores* en dos dimensiones.

78. Interpretar geométricamente las desigualdades del Problema 75.

79. Expresar en forma polar (*a*) $3\sqrt{3} + 3i$, (*b*) $-2 - 2i$, (*c*) $1 - \sqrt{3}\,i$, (*d*) 5, (*e*) $-5i$.
Sol. (*a*) $6 \operatorname{cis} \pi/6$ (*b*) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} 5\pi/4$ (*c*) $2 \operatorname{cis} 5\pi/3$ (*d*) $5 \operatorname{cis} 0$ (*e*) $5 \operatorname{cis} 3\pi/2$

80. Calcular (*a*) $[2(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)][5(\cos 110^\circ + i \operatorname{sen} 110^\circ)]$, (*b*) $\dfrac{12 \operatorname{cis} 16^\circ}{(3 \operatorname{cis} 44^\circ)(2 \operatorname{cis} 62^\circ)}$.
Sol. (*a*) $-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i$, (*b*) $-2i$

81. Determinar todas las raíces indicadas y representarlas gráficamente:
(*a*) $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i)^{1/3}$, (*b*) $(-1)^{1/5}$, (*c*) $(\sqrt{3} - i)^{1/3}$, (*d*) $i^{1/4}$.
Sol. (*a*) $2 \operatorname{cis} 15^\circ$, $2 \operatorname{cis} 135^\circ$, $2 \operatorname{cis} 255^\circ$
(*b*) $\operatorname{cis} 36^\circ$, $\operatorname{cis} 108^\circ$, $\operatorname{cis} 180^\circ = -1$, $\operatorname{cis} 252^\circ$, $\operatorname{cis} 324^\circ$
(*c*) $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 110^\circ$, $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 230^\circ$, $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} 350^\circ$
(*d*) $\operatorname{cis} 22{,}5^\circ$, $\operatorname{cis} 112{,}5^\circ$, $\operatorname{cis} 202{,}5^\circ$, $\operatorname{cis} 292{,}5^\circ$

82. Demostrar que $-1 + \sqrt{3}\,i$ es un número algebraico.

83. Si $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \phi_1$ y $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \phi_2$, demostrar (*a*) $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \operatorname{cis}(\phi_1 + \phi_2)$, (*b*) $z_1/z_2 = (\rho_1/\rho_2)\operatorname{cis}(\phi_1 - \phi_2)$. Interpretar geométricamente.

INDUCCION MATEMATICA

Demostrar:

84. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

85. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

86. $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$

87. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

88. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1$

89. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

90. $1(5) + 2(5)^2 + 3(5)^3 + \cdots + n(5)^{n-1} = \dfrac{5 + (4n - 1)5^{n+1}}{16}$

91. $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

92. $(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)^n = \cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi$. ¿Se puede demostrar esto si n es un número racional?

93. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x}, \quad x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

94. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \dfrac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}, \quad x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

95.
$$(a + b)^n = a^n + {}_nC_1\, a^{n-1} b + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}\, a\, b^{n-1} + b^n$$
donde ${}_nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = {}_nC_{n-r}$. Aquí es $p! = p(p-1)\cdots 1$ y $0!$ es por definición 1. Este es el llamado *teorema del binomio*. Los coeficientes ${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_1 = n$, ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2!}$, $\ldots$, ${}_nC_n = 1$ son los *coeficientes del binomio*. ${}_nC_r$ se escribe también $\dbinom{n}{r}$.

PROBLEMAS VARIOS

96. Expresar los enteros que siguen (en el sistema decimal) en el sistema que se indica: (*a*) 87 (binario), (*b*) 64 (ternario o de base tres), (*c*) 1736 (enario o de base nueve). Probar la respuesta.
Sol. (*a*) 1010111, (*b*) 2101, (*c*) 2338

97. Si un número es 144 en el sistema de base 5, ¿cómo se expresa en el sistema de base (*a*) 2, (*b*) 8?
Sol. (*a*) 110001, (*b*) 61

98. Demostrar que todo número racional p/q entre 0 y 1 se puede expresar en la forma

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots$$

donde las a se pueden determinar unívocamente como 0 o 1 y el proceso puede acabar o no. La representación $0{,}a_1\,a_2\,\ldots\,a_n\ldots$ se llama entonces *forma binaria* del número racional. [Sugerencia: Multiplicar ambos miembros sucesivamente por 2 y considérense los restos.]

99. Expresar $\frac{2}{3}$ en el sistema de base (*a*) 2, (*b*) 3, (*c*) 8, (*d*) 10.
Sol. (*a*) 0,1010101 . . . , (*b*) 0,2 o 0,2000. . . , (*c*) 0,5252 . . . , (*d*) 0,6666 . . .

100. Un número en sistema binario es 11,01001. ¿Qué número es en sistema decimal? *Sol.* 3,28125

101. ¿En qué sistema de numeración es $3 + 4 = 12$? *Sol.* En base 5

102. En el sistema de base 12 hay que utilizar otros dos símbolos t y e para indicar las «cifras» diez y once respectivamente. Representar el entero 5110 (sistema decimal) en base 12. *Sol.* $2e5t$

103. Hallar un número racional cuyo desarrollo decimal es 1,636363 . . . *Sol.* 18/11

104. Un número en el sistema de base 10 tiene seis cifras. Si se quita la última cifra y se coloca antes de la primera, el nuevo número es un tercio del primero. Hallar este número. *Sol.* 428571

105. Mostrar que los números racionales forman un cuerpo.

106. Utilizando como axiomas las relaciones 1-9 de la página 2 demostrar que

(*a*) $(-3)(0) = 0$, (*b*) $(-2)(+3) = -6$, (*c*) $(-2)(-3) = 6$.

107. (*a*) Si x es un racional de cuadrado inferior a 2, mostrar que $x + (2 - x^2)/10$ es un número mayor con igual propiedad. (*b*) Si x es un racional de cuadrado mayor que 2, hallar en función de x un número racional de cuadrado mayor que 2.

108. Ilustrar cómo se usarían las cortaduras de Dedekind para definir

(*a*) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, (*b*) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, (*c*) $(\sqrt{3})(\sqrt{2})$, (*d*) $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Capítulo 2

Funciones, límites y continuidad

FUNCIONES

Función es una correspondencia entre dos conjuntos, que por ahora serán conjuntos de números reales. Si a cada valor que puede tomar una variable x corresponde uno o más valores de una variable y se dice que y es *función* de x y se escribe $y = f(x)$, $y = G(x)$, . . ., en donde las letras f, G, . . . simbolizan la función en tanto que $f(a)$, $G(a)$ . . . denotan el *valor de la función* en $x = a$.

El conjunto de valores que puede tomar x se llama *dominio de definición* o simplemente *dominio* de la función; x se llama *variable independiente* y y *variable dependiente*.

Si a cada valor de x del dominio de definición corresponde un solo valor de y, la función se dice *uniforme*; si a ciertos valores de x corresponde más de un valor de y, la función se dice *multiforme*. Como una función multiforme se puede considerar como un conjunto de funciones uniformes, se supondrá que las funciones són uniformes si no se indica otra cosa.

Ejemplos: **1.** Si a cada número en $-1 \leqq x \leqq 1$ se asocia un número y dado por x^2, entonces la correspondencia entre x y x^2 define una función f que es uniforme.

El dominio de f es $-1 \leqq x \leqq 1$. El valor de f en x lo da $y = f(x) = x^2$. Por ejemplo, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ es el valor de la función en $x = -1$.

2. A cada fecha t posterior al año 1800 se puede asociar un valor P de la población de los Estados Unidos. La correspondencia entre P y t define una función uniforme F y se puede escribir $P = F(t)$.

3. Si $y^2 = x$ con $x > 0$, entonces a cada x corresponden dos valores de y. Así que y es una función biforme de x. Se la puede considerar como dos funciones uniformes f y g haciendo $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$.

Obsérvese que si bien a veces una función se define mediante una fórmula como en los Ejemplos 1 y 3, no es preciso que así sea, como se ve en el Ejemplo 2.

Por comodidad se suele hablar de la función $f(x)$ en vez de la función f cuyo valor en x es $f(x)$. Pero hay que tener en cuenta la distinción.

GRAFO DE UNA FUNCION

El grafo de una función $y = f(x)$ es una representación visible de la función y se puede obtener situando en un sistema cartesiano los puntos definidos por los pares de números (x, y), o sea, $[x, f(x)]$.

FUNCIONES ACOTADAS

Si existe una constante M tal que $f(x) \leqq M$ para todo x en un intervalo (o en otro conjunto de números), se dice que $f(x)$ es *acotada superiormente* en el intervalo (o conjunto) y M se dice *cota superior* de la función.

Si existe una constante m tal que $f(x) \geqq m$ para todo x en un intervalo se dice que $f(x)$ es *acotada inferiormente* en el intervalo y se dice que m es una *cota inferior*.

Si $m \leqq f(x) \leqq M$ en un intervalo se dice que $f(x)$ es *acotada*. Se suele indicar que una función es acotada escribiendo $|f(x)| < P$.

Ejemplos: **1.** $f(x) = 3 + x$ es acotada en $-1 \leqq x \leqq 1$. Una cota superior es 4 (o cualquier número mayor que 4). Una cota inferior es 2 (o cualquier número menor que 2).

2. $f(x) = 1/x$ no es acotada en $0 < x < 4$, pues eligiendo x suficientemente cerca de cero, $f(x)$ se puede hacer tan grande como se desee, de modo que no hay cota superior. Sin embargo, $\frac{1}{4}$ (o cualquier número inferior a $\frac{1}{4}$) es cota inferior.

Si $f(x)$ tiene cota superior, tiene *extremo superior*; si tiene cota inferior, tiene *extremo inferior*. (Véase Capítulo 1 para estas definiciones.)

FUNCIONES MONOTONAS

Se dice que una función es *monótona creciente* en un intervalo si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo tales que es $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leqq f(x_2)$. Si $f(x_1) < f(x_2)$ la función se dice *estrictamente creciente*.

Análogamente, si $f(x_1) \geqq f(x_2)$ con $x_1 < x_2$, entonces $f(x)$ es *monótona decreciente*; si $f(x_1) > f(x_2)$ es *estrictamente decreciente*.

FUNCIONES RECIPROCAS. VALORES PRINCIPALES

Si y es función de x dada por $f(x)$, entonces x es una función de y, denotada $x = f^{-1}(y)$, que se llama *función recíproca*. Intercambiando x y y se tendría $y = f^{-1}(x)$.

Si $f(x)$ es uniforme, $f^{-1}(x)$ puede no serlo, en cuyo caso se la puede considerar como un conjunto de funciones uniformes cada una de las cuales se llama *rama*. Es conveniente a veces elegir una de estas ramas, llamada *rama principal*, y denotarla por $f^{-1}(x)$. En tal caso, el valor de la función recíproca es el llamado *valor principal*.

Ejemplos: La función $y = \operatorname{sen} x$ lleva a $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, que es multiforme, pues por cada x de $-1 \leqq x \leqq 1$ hay muchos valores de y. Restringiendo $\operatorname{sen}^{-1} x$ a $-\pi/2 \leqq \operatorname{sen}^{-1} x \leqq \pi/2$, por ejemplo, la función se convierte en uniforme. En este caso el valor principal de $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$.

MAXIMOS Y MINIMOS

Si x_0 es un punto de un intervalo tal que $f(x) \leqq f(x_0)$ [o bien $f(x) \geqq f(x_0)$] para todo x del intervalo, entonces se dice que $f(x)$ tiene un *máximo absoluto* [o un *mínimo absoluto*] en el intervalo $x = x_0$ de valor $f(x_0)$. Si esto es cierto solamente para x en un entorno δ reducido de x_0 con $\delta > 0$ [es decir, para todo x tal que $0 < |x - x_0| < \delta$], entonces se dice que $f(x)$ tiene un *máximo relativo* (o un *mínimo relativo*) en x_0.

TIPOS DE FUNCIONES

1. Funciones polinómicas, que tienen la forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes y n es un entero positivo llamado *grado* del polinomio si $a_0 \neq 0$.

El *teorema fundamental del álgebra* establece que toda ecuación algebraica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz. De aquí se puede demostrar que si el grado es n la ecuación tiene exactamente n raíces (contando una de multiplicidad r por r raíces).

2. **Funciones algebraicas,** que son las $y = f(x)$ que satisfacen a una ecuación de la forma

$$p_0(x)\,y^n + p_1(x)\,y^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x)\,y + p_n(x) = 0 \tag{2}$$

donde $p_0(x), \dots, p_n(x)$ son polinomios en x.

Si la función se puede expresar como cociente de dos polinomios, o sea, $P(x)/Q(x)$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, se llama *función racional algebraica*: en otro caso se dice *función irracional algebraica*.

3. **Funciones trascendentes,** que son las funciones no algebraicas, es decir, que no satisfacen a ecuaciones de la forma (2).

Nótese la analogia con los números reales, correspondiendo los polinomios a los enteros, las funciones racionales a los números racionales, etc.

FUNCIONES TRASCENDENTES ESPECIALES

Las siguientes se suelen llamar *funciones trascendentes elementales*.

1. **Función exponencial:** $f(x) = a^x$, $a \neq 0, 1$. Propiedades en página 3.

2. **Función logarítmica:** $f(x) = \log_a x$, $a \neq 0, 1$. Esta función y la exponencial son recíprocas. Si $a = e = 2{,}71828\dots$, llamada *base natural de logaritmos*, se escribe $f(x) = \log_e x = \ln x$, que es el *logaritmo natural* de x. Propiedades en página 3.

3. **Funciones trigonométricas:**

$$\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

La variable x se expresa generalmente en radianes (π radianes $= 180°$). Para valores reales de x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ están entre -1 y 1 inclusive.

He aquí algunas propiedades de estas funciones:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

4. **Funciones trigonométricas recíprocas.** He aquí una lista de las funciones trigonométricas recíprocas y sus valores principales:

(*a*) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, $(-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2)$
(*b*) $y = \cos^{-1} x$, $(0 \leqq y \leqq \pi)$
(*c*) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$, $(-\pi/2 < y < \pi/2)$
(*d*) $y = \operatorname{cosec}^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1} 1/x$, $(-\pi/2 \leqq y \leqq \pi/2)$
(*e*) $y = \sec^{-1} x = \cos^{-1} 1/x$, $(0 \leqq y \leqq \pi)$
(*f*) $y = \cot^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} x$, $(0 < y < \pi)$

5. **Funciones hiperbólicas,** que se definen como sigue por funciones exponenciales:

(*a*) $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
(*b*) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
(*c*) $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
(*d*) $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$
(*e*) $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
(*f*) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Algunas propiedades de estas funciones son:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$$

$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$ $\qquad$ $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$ $\qquad$ $\cosh(-x) = \cosh x$

$\operatorname{tgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$ $\qquad$ $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$

6. Funciones hiperbólicas recíprocas. Si $x = \operatorname{sen} y$, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es la *función recíproca del seno hiperbólico* de x. Se dan en seguida los valores principales de las funciones hiperbólicas recíprocas expresados por logaritmos naturales, junto con el dominio en que son reales.

(*a*) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, todo x $\qquad$ (*d*) $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right)$, $x \neq 0$

(*b*) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \geqq 1$ $\qquad$ (*e*) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, $0 < x \leqq 1$

(*c*) $\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$ $\qquad$ (*f*) $\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, $|x| > 1$

LIMITES DE FUNCIONES

Sea $f(x)$ una función uniforme definida para todos los valores de x en torno a $x = x_0$ con la posible excepción de $x = x_0$ (o sea, en un entorno δ reducido de x_0). Se dice que el número l es el *límite* de $f(x)$ cuando x *tiende* a x_0, lo que se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si para todo número positivo ϵ (por pequeño que sea) se puede hallar un número positivo δ (por lo general dependiente de ϵ) tal que $|f(x) - l| < \epsilon$, siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Se dice también en tal caso que $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a x_0 y se escribe $f(x) \to l$ si $x \to x_0$.

Esto quiere decir que se puede hacer el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y l tan pequeño como se quiera eligiendo x suficientemente cerca de x_0, es decir, eligiendo la diferencia en valor absoluto entre x y x_0 suficientemente pequeña (pero no nula, o sea que se *excluye* $x = x_0$).

Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Entonces al acercarse x a 2 (de modo que x tiende a 2) $f(x)$ se acerca a 4. *Parece* entonces que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. Para *demostrar* esto habrá que ver si la definición anterior de límite (con $l = 4$) se verifica. Para esta demostración véase Problema 10.

Nótese que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, es decir, que el límite de $f(x)$ cuando $x \to 2$ no es el mismo que el valor de $f(x)$ en $x = 2$ ya que $f(2) = 0$ por definición. El límite sería de todos modos 4, aunque $f(x)$ no estuviera definida en $x = 2$.

Cuando existe el límite de una función es único, es decir, que no hay más que ese límite en el punto que se considera (Problema 17).

LIMITES A DERECHA Y A IZQUIERDA

Al definir el límite no se hizo ninguna restricción sobre la manera como había de tender x a x_0. Suele ser conveniente hacer esto. Considerando x y x_0 como punto sobre el eje real, x_0 fijo y x móvil, entonces x puede acercarse a x_0 por la derecha o por la izquierda, lo cual se indica escribiendo $x \to x_0+$ y $x \to x_0-$, respectivamente.

Si $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l_2$, l_1 y l_2 se llaman, respectivamente, *límites a la derecha* y a la *izquierda* de $f(x)$ en x_0 y se les denota por $f(x_0+)$ o $f(x_0 + 0)$ y $f(x_0-)$ o $f(x_0 - 0)$. Las definiciones con ϵ, δ del límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0+$ o $x \to x_0-$ son las mismas que para $x \to x_0$, excepto en que los valores de x se restringen a $x > x_0$ o a $x < x_0$, respectivamente.

Se tiene $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si, y solo si, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l$.

TEOREMAS SOBRE LIMITES

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, es

1. $\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) + g(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = A + B$

2. $\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - g(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = A - B$

3. $\lim_{x \to x_0} \Big(f(x)\, g(x) \Big) = \Big(\lim_{x \to x_0} f(x) \Big) \Big(\lim_{x \to x_0} g(x) \Big) = A\,B$

4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$

Resultados parecidos valen para límites a la derecha y a la izquierda.

INFINITOS

A veces ocurre que cuando $x \to x_0$, $f(x)$ crece o disminuye sin límite. En tal caso es costumbre escribir $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, respectivamente. Los símbolos $+\infty$ (escrito también ∞) y $-\infty$ se leen *más infinito* (o *infinito*) y *menos infinito*, respectivamente; pero adviértase bien que no son números.

En lenguaje riguroso se dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para cada número positivo M se puede hallar un número positivo δ (que en general depende de M) tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Análogamente, se dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si para cada número positivo M se puede hallar un número positivo δ tal que $f(x) < -M$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Observaciones análogas son aplicables en el caso $x \to x_0+$ o $x \to x_0-$.

Es frecuente que ocurra examinar el comportamiento de una función al aumentar o disminuir x sin límite. En tales casos se suele escribir $x \to +\infty$ (o ∞) o $x \to -\infty$, respectivamente.

Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ o $f(x) \to l$ cuando $x \to +\infty$ si para todo número positivo ϵ se puede hallar un número positivo N (que depende en general de ϵ) tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ siempre que $x > N$. Definición análoga se puede formular para $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

LIMITES ESPECIALES

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\qquad \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

2. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e$, $\qquad \lim_{x \to 0+} (1 + x)^{1/x} = e$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, $\qquad \lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x} = 1$

CONTINUIDAD

Sea $f(x)$ definida y uniforme para todos los valores de x próximos a $x = x_0$, como también para $x = x_0$ (es decir, en un entorno δ de x_0). La función $f(x)$ se dice *continua* en $x = x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Nótese que esto implica tres condiciones para que $f(x)$ sea continua en $x = x_0$.

1. Existencia de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
2. Existencia de $f(x_0)$, es decir, $f(x)$ debe estar definida en $x = x_0$.
3. $l = f(x_0)$.

De manera equivalente, si $f(x)$ es continua en x_0 se puede expresar este hecho en la forma $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$.

Ejemplo: **1.** Si $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ entonces, por el ejemplo de la página 23, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Pero $f(2) = 0$. Luego $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ y la función no es continua en $x = 2$.

2. Si $f(x) = x^2$ para todo x, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$ y $f(x)$ es continua en $x = 2$.

Los puntos en que $f(x)$ deja de ser continua se llaman *discontinuidades* de $f(x)$ y se dice que $f(x)$ es *discontinua* en esos puntos.

Al construir el grafo de una función continua el lápiz no se levanta del papel, mientras que para una función discontinua esto no ocurre, pues hay en general un salto en la discontinuidad; desde luego esto no es más que una propiedad característica, pero no una definición de la continuidad o de la discontinuidad.

Además de la anterior definición de continuidad se puede decir que $f(x)$ es continua en $x = x_0$ si para todo $\epsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Nótese que esto no es más que la definición de límite con $l = f(x_0)$ y quitando la restricción $x \neq x_0$.

CONTINUIDAD A LA DERECHA Y A LA IZQUIERDA

Si $f(x)$ está definida solamente para $x \geqq x_0$, la definición anterior no es aplicable. En tal caso se dice que $f(x)$ es *continua (a la derecha)* en $x = x_0$ si $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$, esto es, si $f(x_0+) = f(x_0)$. Análogamente, $f(x)$ es *continua (a la izquierda)* en $x = x_0$ si $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$, es decir, si $f(x_0-) = f(x_0)$. Pueden darse definiciones empleando ϵ y δ.

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Se dice que una función $f(x)$ es *continua en un intervalo* si es continua en todo punto del intervalo. En particular, si $f(x)$ está definida en el intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$ o $[a, b]$, $f(x)$ es continua en el intervalo si, y solo si, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para $a < x_0 < b$, $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

TEOREMAS SOBRE CONTINUIDAD

Teorema 1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = x_0$, también lo son las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, en este último caso si $g(x_0) \neq 0$. Resultados semejantes son válidos para la continuidad en un intervalo.

Teorema 2. Son continuas en todo intervalo finito: (*a*) los polinomios; (*b*) sen x y cos x; (*c*) a^x, $a > 0$.

Teorema 3. Si $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$ y si $z = g(y)$ es continua en $y = y_0$ y si $y_0 = f(x_0)$, entonces la función $z = g[f(x)]$, llamada *función de función* o *función compuesta*, es continua en $x = x_0$. Dicho brevemente: *una función continua de una función continua es continua.*

Teorema 4. Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, es acotada en el intervalo.

Teorema 5. Si $f(x)$ es continua en $x = x_0$ y $f(x_0) > 0$ [o bien $f(x_0) < 0$], existe un intervalo al que pertenece $x = x_0$ en el cual $f(x) > 0$ [o bien $f(x) < 0$].

Teorema 6. Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo y es monótona estrictamente creciente o estrictamente decreciente, la función recíproca $f^{-1}(x)$ es uniforme, continua y estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema 7. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y si $f(a) = A$ y $f(b) = B$, entonces a todo número C entre A y B corresponde un número al menos c de $[a, b]$ tal que $f(c) = C$. Este es el llamado *teorema del valor intermedio.*

Teorema 8. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, hay al menos un número c para el cual $f(c) = 0$ con $a < c < b$. Esto se relaciona con el Teorema 7.

Teorema 9. Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, $f(x)$ tiene un máximo M para un valor al menos de x en el intervalo y un mínimo m para un valor al menos de x en el intervalo. Además, $f(x)$ toma todos los valores entre m y M para uno o más valores de x en el intervalo.

Teorema 10. Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado y si M y m son, respectivamente, el extremo superior y el extremo inferior de $f(x)$, existe al menos un valor de x en el intervalo para el cual $f(x) = M$ o $f(x) = m$. Este teorema se relaciona con el Teorema 9.

FUNCIONES CASICONTINUAS

Se dice que una función es *casicontinua* o *continua a trozos* en un intervalo $a \leqq x \leqq b$ si el intervalo se puede subdividir en un número finito de intervalos en cada uno de los cuales la función es continua y tiene límites finitos a la derecha y a la izquierda. Una función semejante tiene solamente un número finito de discontinuidades. Un ejemplo de función casi continua en $a \leqq x \leqq b$ se ve gráficamente en la Fig. 2-1. Esta función tiene discontinuidades en x_1, x_2, x_3 y x_4.

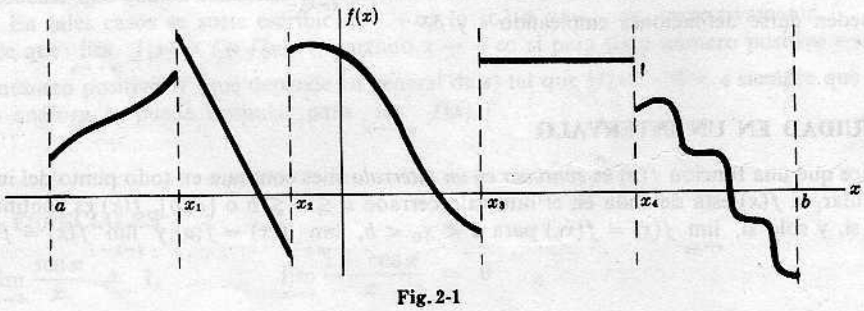


Fig. 2-1

CONTINUIDAD UNIFORME

Sea $f(x)$ continua en un intervalo. Entonces, por definición, en cada punto x_0 del intervalo y para todo $\epsilon > 0$, se puede hallar un $\delta > 0$ (que en general depende tanto de ϵ como del punto particular x_0) tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Si se puede hallar para todo ϵ un δ válido para todo punto del intervalo (esto es que δ dependa *solamente* de ϵ y *no* de x_0), se dice que $f(x)$ es *uniformemente continua* en el intervalo.

De otra manera, $f(x)$ es uniformemente continua en un intervalo si para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para $|x_1 - x_2| < \delta$, siendo x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del intervalo.

Teorema. Si $f(x)$ es continua en un intervalo *cerrado* es uniformemente continua en el intervalo.

Problemas resueltos

FUNCIONES

1. Si $f(x) = (x-2)(8-x)$ para $2 \leqq x \leqq 8$. (*a*) Hallar $f(6)$ y $f(-1)$. (*b*) ¿Cuál es el dominio de definición de $f(x)$? (*c*) Hallar $f(1-2t)$ y dar el dominio de definición. (*d*) Hallar $f[f(3)]$, $f[f(5)]$. (*e*) Grafo de $f(x)$.

(*a*) $f(6) = (6-2)(8-6) = 4 \cdot 2 = 8$
$f(-1)$ no está definido porque $f(x)$ lo está solamente para $2 \leqq x \leqq 8$.

(*b*) El conjunto de los x tales que $2 \leqq x \leqq 8$.

(*c*) $f(1-2t) = \{(1-2t)-2\}\{8-(1-2t)\} = -(1+2t)(7+2t)$ donde t es tal que $2 \leqq 1-2t \leqq 8$, es decir, $-7/2 \leqq t \leqq -1/2$.

(*d*) $f(3) = (3-2)(8-3) = 5$, $f[f(3)] = f(5) = (5-2)(8-5) = 9$.
$f(5) = 9$ de modo que $f[f(5)] = f(9)$ no está definido.

(*e*) La tabla siguiente da $f(x)$ para varios valores de x.

x	2	3	4	5	6	7	8	2,5	7,5
$f(x)$	0	5	8	9	8	5	0	2,75	2,75

Situar los puntos (2, 0), (3, 5), (4, 8), (5, 9), (6, 8), (7, 5), (8, 0), (2,5, 2,75), (7,5, 2,75).

Estos puntos son solamente unos pocos de los infinitos puntos del grafo que se muestra en la adjunta Figura 2-2. Este conjunto de puntos define una curva que es parte de una *parábola*.

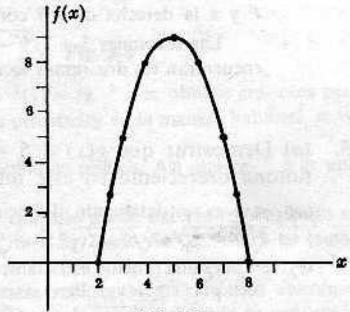


Fig. 2-2

2. Sea $g(x) = (x-2)(8-x)$ para $2 < x < 8$. (*a*) Estudiar la diferencia entre los grafos de $g(x)$ y de $f(x)$ del Problema 1. (*b*) ¿Cuáles son los extremos de $g(x)$? (*c*) ¿Alcanza $g(x)$ su extremo superior y su extremo inferior para algún valor de x del dominio de definición? (*d*) Responder las partes (*b*) y (*c*) para la función $f(x)$ del Problema 1.

(*a*) El grafo de $g(x)$ es el mismo que el del Problema 1 excepto que los dos puntos (2, 0) y (8, 0) no están en el de $g(x)$ porque esta función no está definida en $x = 2$ y $x = 8$.

(*b*) El extremo superior de $g(x)$ es 9; el inferior es 0.

(*c*) $g(x)$ alcanza su extremo superior para $x = 5$, pero no alcanza su extremo inferior porque no hay valor de x del dominio de definición para el cual $g(x) = 0$.

(*d*) Como en (*b*) el extremo superior de $f(x)$ es 9 y el inferior es 0; el superior es accesible para $x = 5$ y el inferior es accesible para $x = 2$ y $x = 8$.

Obsérvese que una función como $f(x)$ que es *continua* en un intervalo cerrado, alcanza sus extremos en algún punto del intervalo, pero una función como la $g(x)$ que no es continua en un intervalo cerrado puede no alcanzar sus extremos. Problema 34.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$. (*a*) Averiguar $f(\frac{2}{3})$, $f(-5)$, $f(1{,}41423)$, $f(\sqrt{2})$, (*b*) Construir un grafo de $f(x)$ y explicar por qué es ambiguo.

(*a*) $f(\frac{2}{3}) = 1$ pues $\frac{2}{3}$ es racional
$f(-5) = 1$ pues -5 es racional
$f(1{,}41423) = 1$ pues 1,41423 es racional
$f(\sqrt{2}) = 0$ pues $\sqrt{2}$ es irracional

(*b*) El grafo se ve en la adjunta Figura 2-3. Por su apariencia se creería que hay dos valores funcionales 0 y 1, que corresponden a cada valor de x, es decir, que $f(x)$ es multiforme, cuando en realidad es uniforme.

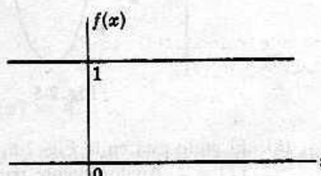


Fig. 2-3

4. En referencia con el Problema 1. (*a*) construir el grafo de $f^{-1}(x)$, (*b*) hallar una expresión para $f^{-1}(x)$ y mostrar que $f^{-1}(x)$ no es uniforme.

(*a*) El grafo de $y = f(x)$ o $x = f^{-1}(y)$ se ve en la Fig. 2-2 del Problema 1(*e*). Para obtener el grafo de $y = f^{-1}(x)$ no hay más que intercambiar los ejes x y y. Se obtiene el grafo que se ve en la Fig. 2-4 luego de orientar los ejes de la manera habitual.

$y = f(x)$

$x = f^{-1}(y)$

(*b*) Se tiene $y = (x-2)(8-x)$ o $x^2 - 10x + 16 + y = 0$.

Por la fórmula

$$x = f^{-1}(y) = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(16+y)}}{2} = 5 \pm \sqrt{9-y}.$$

Luego, $y = f^{-1}(x) = 5 \pm \sqrt{9-x}$.

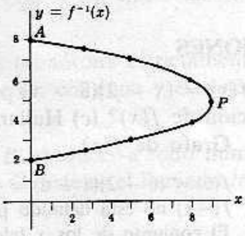


Fig. 2-4

En el grafo, AP representa $y = 5 + \sqrt{9-x}$, BP representa $y = 5 - \sqrt{9-x}$. Así, para cada valor de x en $0 \leqq x \leqq 9$, $f^{-1}(x)$ es biforme. Esto se ve gráficamente en que toda recta paralela a la izquierda de P y a la derecha de AB corta el grafo en dos puntos.

Las funciones $5 + \sqrt{9-x}$ y $5 - \sqrt{9-x}$ representan las dos *ramas* de $f^{-1}(x)$. El punto en que se encuentran las dos ramas (o en el cual tienen el mismo valor) suele llamarse *punto múltiple* aquí en (9, 5).

5. (*a*) Demostrar que $g(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ es estrictamente decreciente en $0 \leqq x \leqq 9$. (*b*) ¿Es monótona decreciente en este intervalo? (*c*) ¿Posee $g(x)$ una recíproca uniforme?

$x_1 < x_2$

(*a*) $g(x)$ es estrictamente decreciente si $g(x_1) > g(x_2)$ para $x_1 < x_2$. Si $x_1 < x_2$ luego $9 - x_1 > 9 - x_2$, $\sqrt{9-x_1} > \sqrt{9-x_2}$, $5 + \sqrt{9-x_1} > 5 + \sqrt{9-x_2}$ lo que muestra que $g(x)$ es estrictamente decreciente.

(*b*) Sí, pues una función estrictamente decreciente es también monótona decreciente, porque si $g(x_1) > g(x_2)$ también $g(x_1) \geqq g(x_2)$. Pero si $g(x)$ es monótona decreciente, no es necesariamente estrictamente decreciente.

(*c*) Si $y = 5 + \sqrt{9-x}$ es $y - 5 = \sqrt{9-x}$ o, elevando al cuadrado, $x = -16 + 10y - y^2 = (y-2)(8-y)$ y x es función uniforme de y, es decir, la función recíproca es uniforme.

En general, toda función estrictamente decreciente (creciente) tiene una recíproca uniforme (véase Teorema 6, página 26).

Los resultados de este problema se pueden interpretar gráficamente con la figura del Problema 4.

6. Construir grafos de las funciones (*a*) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, (*b*) $f(x) = [x]$ = mayor entero $\leqq x$.

(*a*) El grafo se ve en la Fig. 2-5. Como $|x \operatorname{sen} 1/x| \leqq |x|$ el grafo está entre $y = x$ y $y = -x$. Obsérvese que $f(x) = 0$ si $\operatorname{sen} 1/x = 0$ o $1/x = m\pi$, $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$, esto es, para $x = 1/\pi, 1/2\pi, 1/3\pi, \ldots$. La curva oscila indefinidamente entre $x = 1/\pi$ y $x = 0$.

$\frac{\operatorname{Sen} x}{x}$

$\operatorname{Sen} x = \frac{1}{x}$

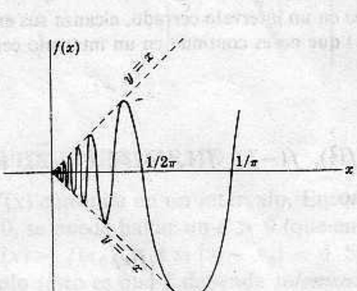


Fig. 2-5

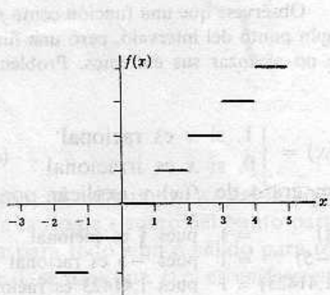


Fig. 2-6

(*b*) El grafo está en la Fig. 2-6. Si $1 \leqq x < 2$, es $[x] = 1$. Así que $[1.8] = 1$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[1.99999] = 1$. Pero $[2] = 2$. Análogamente para $2 \leqq x < 3$, $[x] = 2$, etc. Hay, pues, *saltos* en las abscisas enteras; es una función de las llamadas *en escalera*.

7. (*a*) Construir el grafo de $f(x) = \operatorname{tg} x$. (*b*) Construir el grafo de $\operatorname{tg}^{-1} x$. (*c*) Mostrar gráficamente por qué $\operatorname{tg}^{-1} x$ es función multiforme. (*d*) Indicar valores principales posibles de $\operatorname{tg}^{-1} x$. (*e*) Escogido uno de tales valores principales, calcular $\operatorname{tg}^{-1}(-1)$.

(*a*) El grafo de $f(x) = \operatorname{tg} x$ se ve en la Figura 2-7.

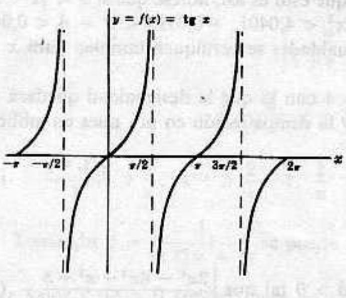


Fig. 2-7

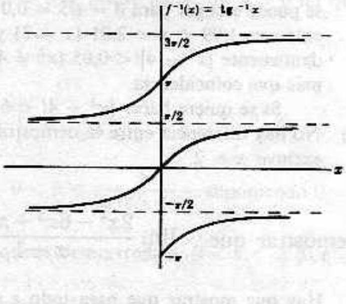


Fig. 2-8

(*b*) Si $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, entonces $x = f^{-1}(y) = \operatorname{tg}^{-1} y$. El grafo de $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ se obtiene entonces permutando los ejes x y y en el grafo de (*a*). El resultado, con los ejes orientados en la manera habitual, se ve en la Figura 2-8.

(*c*) En la Fig. 2-8 de (*b*) toda recta paralela a y corta al grafo en infinitos puntos. Así que $\operatorname{tg}^{-1} x$ es una función multiforme de infinitas ramas.

(*d*) Para definir $\operatorname{tg}^{-1} x$ como función uniforme se ve por el grafo que ello solo puede hacerse restringiendo su valor a uno de los intervalos: $-\pi/2 < \operatorname{tg}^{-1} x < \pi/2$, $\pi/2 < \operatorname{tg}^{-1} x < 3\pi/2$, etc. Se convendrá en tomar el primero para definir el valor principal.

Nótese que en cualquiera de estas ramas, $\operatorname{tg}^{-1} x$ es estrictamente creciente con recíproca uniforme.

(*e*) $\operatorname{tg}^{-1}(-1) = -\pi/4$ es el único valor entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, o sea, que es el valor principal según lo convenido en (*d*).

8. Mostrar que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$, $x \neq -1$, es una función irracional algebraica.

Si $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ es $(x+1)y - 1 = \sqrt{x}$ o, elevando al cuadrado, $(x+1)^2y^2 - 2(x+1)y + 1 - x = 0$, una ecuación algebraica en y cuyos coeficientes son polinomios en x. Así, pues, $f(x)$ es función algebraica, si bien no es el cociente de dos polinomios, por lo que es una función irracional algebraica.

9. Si $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, demostrar que se puede elegir como valor principal de la función recíproca $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geqq 1$.

Si $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. Entonces, mediante la fórmula, $e^x = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Luego $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$.

Como $y - \sqrt{y^2-1} = (y - \sqrt{y^2-1})\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2-1}}{y+\sqrt{y^2-1}}\right) = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$, se puede también escribir

$$x = \pm \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \quad \text{o} \quad \cosh^{-1} y = \pm \ln(y + \sqrt{y^2-1})$$

Tomando el signo + para definir el valor principal y remplazando y por x se tiene $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Se elige $x \geqq 1$ para que la función recíproca sea real.

LIMITES

10. Si (*a*) $f(x) = x^2$, (*b*) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$, demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

(*a*) Hay que mostrar que dado un $\epsilon > 0$ cualquiera se puede hallar un $\delta > 0$ (que en general depende de ϵ) tal que $|x^2 - 4| < \epsilon$ si $0 < |x - 2| < \delta$.

Elíjase $\delta \leqq 1$ de modo que $0 < |x - 2| < 1$ o $1 < x < 3$, $x \neq 2$.

Luego $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2|\,|x + 2| < \delta|x + 2| < 5\delta$.

Tómese para δ 1 o bien $\epsilon/5$, según cuál sea el menor valor. Entonces se tiene $|x^2 - 4| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$ y queda demostrado el resultado.

Es interesante considerar algunos valores numéricos. Si, por ejemplo, se quiere hacer $|x^2 - 4| < 0{,}05$, se puede escoger para $\delta = \epsilon/5 = 0{,}05/5 = 0{,}01$. Para ver que esto es así, nótese que si $0 < |x - 2| < 0{,}01$, entonces $1{,}99 < x < 2{,}01$ $(x \neq 2)$ y entonces $3{,}9601 < x^2 < 4{,}0401$, $-0{,}0399 < x^2 - 4 < 0{,}0401$ y evidentemente $|x^2 - 4| < 0{,}05$ $(x^2 \neq 4)$. El que estas desigualdades se verifiquen también para $x = 2$ no es más que coincidencia.

Si se quiere hacer $|x^2 - 4| < 6$, se puede tomar $\delta = 1$ con lo que la desigualdad quedará satisfecha.

(*b*) No hay diferencia entre la demostración para este caso y la demostración en (*a*), pues en ambos casos se excluye $x = 2$.

11. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = -8$.

Hay que mostrar que para todo $\epsilon < 0$ se puede hallar $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} - (-8)\right| < \epsilon$ si $0 < |x - 1| < \delta$. Como $x \neq 1$ se puede escribir $\dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = \dfrac{(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)(x - 1)}{x - 1} = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$ suprimiendo el factor común $x - 1 \neq 0$.

Hay que demostrar entonces que para todo $\epsilon > 0$ se puede hallar $\delta > 0$ tal que $|2x^3 - 4x^2 - 3x + 5| < \epsilon$ si $0 < |x - 1| < \delta$. Tomando $\delta \leqq 1$ se tiene $0 < x < 2$, $x \neq 1$.

Ahora bien, $|2x^3 - 4x^2 - 3x + 5| = |x - 1|\,|2x^2 - 2x - 5| < \delta|2x^2 - 2x - 5| < \delta(|2x^2| + |2x| + 5) < (8 + 4 + 5)\delta = 17\delta$. Tomando para δ el menor valor de los 1 y $\epsilon/17$ se tiene el resultado pedido.

12. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$, (*a*) Grafo de la función. (*b*) Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 3+} f(x)$. (*c*) Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 3-} f(x)$. (*d*) Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$.

(*a*) Para $x > 3$, $\dfrac{|x - 3|}{x - 3} = \dfrac{x - 3}{x - 3} = 1$.

Para $x < 3$, $\dfrac{|x - 3|}{x - 3} = \dfrac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$.

Luego el grafo, que se ve en la adjunta Figura 2-9, consiste en las rectas $y = 1$, $x > 3$; $y = -1$, $x < 3$ y el punto $(3, 0)$.

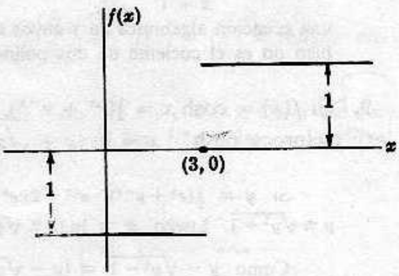


Fig. 2-9

(*b*) Al tender $x \to 3$ por la derecha, $f(x) \to 1$, esto es, $\displaystyle\lim_{x\to 3+} f(x) = 1$, como se ve claramente en el grafo. Para demostrar esto hay que hacer ver que dado cualquier $\epsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 1| < \epsilon$ siempre que $0 < x - 1 < \delta$.

Y como $x > 1$, $f(x) = 1$ y así la demostración consiste en la trivialidad de que $|1 - 1| < \epsilon$ si $0 < x - 1 < \delta$.

(*c*) Al tender $x \to 3$ por la izquierda, $f(x) \to -1$, es decir, $\displaystyle\lim_{x\to 3-} f(x) = -1$. Se puede dar una demostración como en (*b*).

(*d*) Como $\displaystyle\lim_{x\to 3+} f(x) \neq \lim_{x\to 3-} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe.

13. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} 1/x = 0$.

Hay que hacer ver, pues, que dado cualquier $\epsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que $|x \operatorname{sen} 1/x - 0| < \epsilon$ si $0 < |x - 0| < \delta$.

Si $0 < |x| < \delta$, es $|x \operatorname{sen} 1/x| = |x|\,|\operatorname{sen} 1/x| \leqq |x| < \delta$, pues $|\operatorname{sen} 1/x| \leqq 1$ para todo $x \neq 0$. Tomando $\delta = \epsilon$ se ve que $|x \operatorname{sen} 1/x| < \epsilon$ si $0 < |x| < \delta$, lo que completa la demostración.

14. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{2}{1+e^{-1/x}}$.

Al tender $x \to 0+$ *parece* que $1/x$ crece indefinidamente, $e^{1/x}$ crece indefinidamente, $e^{-1/x}$ tiende a 0, $1 + e^{-1/x}$ tiende a 1; de modo que el límite pedido es 2.

Para *demostrar* esta conjetura hay que mostrar que dado $\epsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{2}{1+e^{-1/x}} - 2\right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < x < \delta$$

Como $$\left|\frac{2}{1+e^{-1/x}} - 2\right| = \left|\frac{2-2-2e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}\right| = \frac{2}{e^{1/x}+1} < \epsilon$$

si $\dfrac{e^{1/x}+1}{2} > \dfrac{1}{\epsilon}$, $e^{1/x} > \dfrac{2}{\epsilon} - 1$, $\dfrac{1}{x} > \ln\left(\dfrac{2}{\epsilon} - 1\right)$; así $0 < x < \dfrac{1}{\ln(2/\epsilon - 1)}$ suponiendo $0 < \epsilon < 2$.

Tomando $\delta = \dfrac{1}{\ln(2/\epsilon - 1)}$ se puede ver que la conjetura queda demostrada si $0 < \epsilon < 2$. Si $\epsilon \geqq 2$, cualquier valor de $\delta > 0$ servirá, pues en tal caso $\dfrac{2}{e^{1/x}+1} < \epsilon$ para todo $x > 0$.

15. Explicar exactamente qué se entiende por $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \infty$ y demostrar la validez de este enunciado.

Esto significa que para todo número positivo M se puede encontrar un número positivo δ (que depende en general de M) tal que

$$\frac{1}{(x-1)^4} > M \qquad \text{si} \qquad 0 < |x-1| < \delta$$

Para demostrar esto obsérvese que $\dfrac{1}{(x-1)^4} > M$ si $0 < (x-1)^4 < \dfrac{1}{M}$ o $0 < |x-1| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$.
Tomando $\delta = 1/\sqrt[4]{M}$ se tiene el resultado.

16. Dar una demostración geométrica de que $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$.

Construir un círculo de centro O y radio $OA = OD = 1$, como se ve en la Fig. 2-10. Tómese un punto B sobre la prolongación de OA y un punto C en OD de modo que BD y AC sean perpendiculares a OD.

Por geometría se ve que

$$\text{Area del triángulo } OAC < \text{Area del sector } OAD < \text{Area del triángulo } OBD$$

o sea, que $\quad \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$

Dividiendo por $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$,

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

o bien $$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Al tender $\theta \to 0$, $\cos\theta \to 1$ se tiene que $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$.

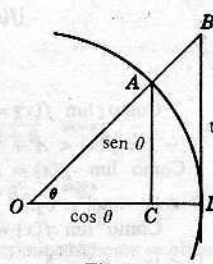


Fig. 2-10

TEOREMAS SOBRE LIMITES

17. Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, demostrar que debe ser único.

Hay que demostrar que si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ y $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$, es $l_1 = l_2$.

Por hipótesis, dado un $\epsilon > 0$, se puede hallar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l_1| < \epsilon/2 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$|f(x) - l_2| < \epsilon/2 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta$$

225169

Entonces, según la desigualdad 2, página 3,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

es decir, $|l_1 - l_2|$ es menor que cualquier número positivo ϵ (por pequeño que sea) y así, pues, debe ser cero. Con lo que $l_1 = l_2$.

18. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x)| > \tfrac{1}{2}|B| \quad \text{para} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Como $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que $|g(x) - B| < \frac{1}{2}|B|$ para $0 < |x - x_0| < \delta$.

Escribiendo $B = B - g(x) + g(x)$, se tiene

$$|B| \leq |B - g(x)| + |g(x)| < \tfrac{1}{2}|B| + |g(x)|$$

o sea, $|B| < \frac{1}{2}|B| + |g(x)|$, de donde $|g(x)| > \frac{1}{2}|B|$.

19. Dados $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, demostrar que (*a*) $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$, (*b*) $\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = AB$, (*c*) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$ si $B \neq 0$, (*d*) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$.

(*a*) Hay que mostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ se puede hallar $\delta > 0$ tal que

$$|[f(x) + g(x)] - (A + B)| < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Mediante la desigualdad 2, página 3, se tiene

$$|[f(x) + g(x)] - (A + B)| = |[f(x) - A] + [g(x) - B]| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \tag{1}$$

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ se pueden hallar $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - A| < \epsilon/2 \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \tag{2}$$

$$|g(x) - B| < \epsilon/2 \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \tag{3}$$

Luego por (*1*), (*2*) y (*3*),

$$|[f(x) + g(x)] - (A + B)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

siendo δ el menor de los δ_1 y δ_2.

(*b*) Se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)\,g(x) - AB| &= |f(x)[g(x) - B] + B[f(x) - A]| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - B| + |B|\,|f(x) - A| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - B| + (|B| + 1)\,|f(x) - A| \end{aligned} \tag{4}$$

Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ se puede hallar δ_1 tal que $|f(x) - A| < 1$ para $0 < |x - x_0| < \delta_1$, o sea, $A - 1 < f(x) < A + 1$, de modo que $f(x)$ es acotada, esto es $|f(x)| < P$ siendo P una constante positiva.

Como $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, dado $\epsilon > 0$, se puede hallar un $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - B| < \epsilon/2P$ para $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, dado $\epsilon > 0$, se puede hallar $\delta_3 > 0$ tal que $|f(x) - A| < \dfrac{\epsilon}{2(|B| + 1)}$ para $0 < |x - x_0| < \delta_3$.

Aplicando éstas en (*4*) se tiene

$$|f(x)\,g(x) - AB| < P \cdot \frac{\epsilon}{2P} + (|B| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|B| + 1)} = \epsilon$$

para $0 < |x - x_0| < \delta$, siendo δ el menor de los δ_1, δ_2, δ_3, con lo que la demostración queda completa.

(*c*) Hay que mostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B|\,|g(x)|} < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \tag{5}$$

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, hay un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - B| < \tfrac{1}{2}B^2\epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

Por el Problema 18, como $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$ se puede averiguar un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x)| > \tfrac{1}{2}|B| \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Entonces, si δ es el menor de los δ_1 y δ_2 se puede escribir

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B|\,|g(x)|} < \frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B| \cdot \frac{1}{2}|B|} = \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

lo que demuestra el resultado.

(*d*) Por las partes (*b*) y (*c*),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

Esto también se puede demostrar directamente (Problema 69).

Los resultados anteriores se pueden demostrar también para $x \to x_0+$, $x \to x_0-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

Nota: En la demostración de (*a*) se han utilizado los resultados $|f(x) - A| < \epsilon/2$ y $|g(x) - B| < \epsilon/2$ de manera que el resultado final fuese $|f(x) + g(x) - (A + B)| < \epsilon$. Desde luego la demostración sería igualmente *válida* si se hubiera empleado 2ϵ (o cualquier múltiplo positivo de ϵ) en vez de ϵ. Una observación semejante vale para las demostraciones de (*b*), (*c*) y (*d*).

20. Calcular los límites siguientes empleando los teoremas:

(*a*) $$\lim_{x \to 2} (x^2 - 6x + 4) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} (-6x) + \lim_{x \to 2} 4$$
$$= \left(\lim_{x \to 2} x\right)\left(\lim_{x \to 2} x\right) + \left(\lim_{x \to 2} -6\right)\left(\lim_{x \to 2} x\right) + \lim_{x \to 2} 4$$
$$= (2)(2) + (-6)(2) + 4 = -4$$

En la práctica se omiten los pasos intermedios

(*b*) $$\lim_{x \to -1} \frac{(x+3)(2x-1)}{x^2 + 3x - 2} = \frac{\lim_{x \to -1} (x+3) \lim_{x \to -1} (2x-1)}{\lim_{x \to -1} (x^2 + 3x - 2)} = \frac{2 \cdot (-3)}{-4} = \frac{3}{2}$$

(*c*) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^3 - 3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}}$$
$$= \frac{\lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty} \frac{-3}{x^2} + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \to \infty} 6 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{-3}{x^3}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

por el Problema 19.

(*d*) $$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(*e*) $$\lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Nótese en (*c*), (*d*) y (*e*) que si se aplican los teoremas sobre límites indiscriminadamente se obtienen las llamadas *formas indeterminadas* ∞/∞ y $0/0$. Para evitar esto, nótese que en cada caso se modifica la forma del límite en forma apropiada. Para otros métodos de calcular límites, véase Capítulo 4.

CONTINUIDAD

21. Demostrar que $f(x) = x^2$ es continua en $x = 2$.

Método 1:

Según el Problema 10, $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$ y así $f(x)$ es continua en $x = 2$.

Método 2:

Hay que demostrar que dado un $\epsilon > 0$ cualquiera existe un $\delta > 0$ (que depende de ϵ) tal que $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| < \epsilon$ si $|x - 2| < \delta$. La demostración sigue el esquema dado en el Problema 10.

22. (*a*) Demostrar que $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$ no es continua en $x = 0$. (*b*) ¿Se puede definir de otra manera $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

(*a*) Por el Problema 13, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Pero este límite no es igual a $f(0) = 5$, de modo que $f(x)$ es discontinua en $x = 0$.

(*b*) Definiendo $f(x)$ de modo que $f(0) = 0$, la función se vuelve continua. Por ser la función tal que se la puede hacer continua en un punto simplemente definiéndola adecuadamente en ese punto, se dice que el punto es una *discontinuidad evitable*.

23. La función $f(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$ ¿es continua en $x = 1$?

$f(1)$ no existe, de modo que $f(x)$ no es continua en $x = 1$. Definiéndola $f(x)$ de modo que $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = -8$ (Problema 11), se hace continua en $x = 1$, es decir, $x = 1$ es una discontinuidad evitable.

24. Demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = x_0$, también lo son (*a*) $f(x) + g(x)$, (*b*) $f(x)\,g(x)$, (*c*) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $f(x_0) \neq 0$.

Estos resultados se siguen inmediatamente de las demostraciones dadas en el Problema 19 tomando $A = f(x_0)$ y $B = g(x_0)$ y escribiendo $0 < |x - x_0| < \delta$ en la forma $|x - x_0| < \delta$ para que quede *incluido* $x = x_0$.

25. Demostrar que $f(x) = x$ es continua en cualquier punto $x = x_0$.

Hay que demostrar que dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Tomando $\delta = \epsilon$ se tiene este resultado.

26. Demostrar que $f(x) = 2x^3 + x$ es continua en todo punto $x = x_0$.

Como x es continua en todo punto $x = x_0$ (Problema 25) también lo son $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, $2x^3$ y, por último, $2x^3 + x$, aplicando el teorema (Problema 24) que dice que sumas y productos de funciones continuas son funciones continuas.

27. Demostrar que $f(x) = \sqrt{x - 5}$ para $5 \leqq x \leqq 9$, $f(x)$ es continua en este intervalo.

Si x_0 es un punto cualquiera tal que $5 < x_0 < 9$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{x - 5} = \sqrt{x_0 - 5} = f(x_0)$. Así, pues, $\lim_{x\to 5+} \sqrt{x - 5} = 0 = f(5)$ y $\lim_{x\to 9-} \sqrt{x - 5} = 2 = f(9)$ que demuestra la continuidad de $f(x) = \sqrt{5 - x}$.

Aquí se ha utilizado $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt{f(x_0)}$ si $f(x)$ es continua en x_0. También se puede demostrar directamente aplicando la definición con ϵ y δ.

28. Para qué valores de x en el dominio de definición es continua la función:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ *Sol.* Para todo x excepto $x = \pm 1$ (en que el denominador es cero)

(*b*) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{3 + \operatorname{sen} x}$ *Sol.* Para todo x

(*c*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{10 + x}}$ *Sol.* Para todo $x > -10$

(*d*) $f(x) = 10^{-1/(x-3)^2}$ *Sol.* Para todo $x \neq 3$ (véase Problema 55)

(*e*) $f(x) = \begin{cases} 10^{-1/(x-3)^2}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$ *Sol.* Para todo x, pues $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

(*f*) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$

Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x - x}{x} = 0$. Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x + x}{x} = 2$. En $x = 0$, $f(x)$ no está definida.

Así que $f(x)$ es continua para todo x excepto $x = 0$.

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$

Como en (f), $f(x)$ es continua para $x < 0$. Entonces, como

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x+x}{x} = \lim_{x\to 0-} 2 = 2 = f(0)$$

se sigue que $f(x)$ es continua (a la izquierda) en $x = 0$.

De modo que $f(x)$ es continua para todo $x \leqq 0$, esto es, en todo punto de su dominio de definición.

(h) $f(x) = x \operatorname{cosec} x = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$. *Sol.* Para todo x excepto 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi, \ldots$

(i) $f(x) = x \operatorname{cosec} x$, $f(0) = 1$. Como $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cosec} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 = f(0)$, se ve que $f(x)$ es continua para todo x excepto $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi, \ldots$ [comparar con (h)].

CONTINUIDAD UNIFORME

29. Demostrar que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $0 < x < 1$.

Método 1, utilizando la definición.

Hay que demostrar que dado cualquier $\epsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$, donde δ *solo* depende de ϵ y *no* de x_0 con $0 < x_0 < 1$.

Si x y x_0 son puntos cualesquiera de $0 < x < 1$,

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0|\,|x - x_0| < |1+1|\,|x - x_0| = 2\,|x - x_0|$$

Así que si $|x - x_0| < \delta$ se sigue que $|x^2 - x_0^2| < 2\delta$. Eligiendo $\delta = \epsilon/2$, se ve que $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$, donde δ depende solamente de ϵ y no de x_0. Luego $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $0 < x < 1$.

Lo anterior se puede aplicar también para demostrar que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $0 \leqq x \leqq 1$.

Método 2:

La función $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo cerrado $0 \leqq x \leqq 1$. Luego por el teorema de la página 26 es uniformemente continua en $0 \leqq x \leqq 1$ y, por tanto, en $0 < x < 1$.

30. Demostrar que $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua en $0 < x < 1$.

Método 1:

Supóngase que $f(x)$ es uniformemente continua en el intervalo dado. Entonces para todo $\epsilon > 0$ debe poderse hallar un δ, por ejemplo, entre 0 y 1, tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$ para todo x y x_0 del intervalo.

Sean $x = \delta$ y $x_0 = \dfrac{\delta}{1+\epsilon}$. Luego $|x - x_0| = \left|\delta - \dfrac{\delta}{1+\epsilon}\right| = \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}\delta < \delta$.

En cambio, $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| = \left|\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1+\epsilon}{\delta}\right| = \dfrac{\epsilon}{\delta} > \epsilon$ (puesto que $0 < \delta < 1$).

Así, pues, hay contradicción y se deduce que $f(x) = 1/x$ no puede ser uniformemente continua en $0 < x < 1$.

Método 2:

Sean x_0 y $x_0 + \delta$ dos puntos cualesquiera de $(0, 1)$. Entonces,

$$\left|f(x_0) - f(x_0 + \delta)\right| = \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta}\right| = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)}$$

se puede hacer mayor que cualquier número positivo eligiendo x_0 suficientemente próximo a 0. Luego la función no puede ser uniformemente continua.

PROBLEMAS VARIOS

31. Si $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$ y $z = g(y)$ es continua en $y = y_0$ siendo $y_0 = f(x_0)$, demostrar que $z = g\{f(x)\}$ es continua en $x = x_0$.

Sea $h(x) = g\{f(x)\}$. Como por hipótesis $f(x)$ y $g(y)$ son continuas en x_0 y y_0, respectivamente, se tiene

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$$

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = g\left(\lim_{y\to y_0} y\right) = g(y_0) = g\{f(x_0)\}$$

Luego
$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g\{f(x)\} = g\left\{\lim_{x\to x_0} f(x)\right\} = g\{f(x_0)\} = h(x_0)$$

lo que demuestra que $h(x) = g\{f(x)\}$ es continua en $x = x_0$.

32. Demostrar el Teorema 8, página 26.

Supóngase que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Como $f(x)$ es continua, entonces debe haber un intervalo $(a, a + h)$, $h > 0$ para el cual $f(x) < 0$. El conjunto de puntos $(a, a + h)$ tiene un mayorante y, por tanto, un extremo superior c. Entonces, $f(c) \leqq 0$. Pero no se puede tener $f(c) < 0$, porque si $f(c)$ fuera negativa se podría hallar un intervalo en torno a c (en el cual habría valores mayores que c) para el cual $f(x) < 0$; pero como c es el extremo superior, esto es imposible, y así, pues, debe ser $f(c) = 0$.

Si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ se puede emplear un razonamiento similar.

33. (*a*) Dada $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 10$, calcular $f(1)$ y $f(2)$. (*b*) Demostrar que $f(x) = 0$ para algún número real x tal que $1 < x < 2$. (*c*) Mostrar cómo se puede calcular el valor de x en (*b*).

(*a*) $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 7(1) - 10 = -4$, $\quad f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 10 = 8$.

(*b*) Si $f(x)$ es continua en $a \leqq x \leqq b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, hay entonces un valor de x entre a y b tal que $f(x) = 0$ (Problema 32).

Para aplicar este teorema basta ver que el polinomio dado es continuo en $1 \leqq x \leqq 2$, pues ya se ha visto en (*a*) que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Así, pues, *existe* un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$.

(*c*) $f(1{,}5) = 2(1{,}5)^3 - 3(1{,}5)^2 + 7(1{,}5) - 10 = 0{,}5$. Aplicando entonces el teorema de (*b*) nuevamente se ve que la raíz buscada está entre 1 y 1,5 y que «probablemente» está más cerca de 1,5 que de 1, pues $f(1{,}5) = 0{,}5$ tiene un valor más próximo a 0 que $f(1) = -4$ (ésta no es siempre una conclusión válida, pero es interesante en la práctica).

Se toma, pues, $x = 1{,}4$. Como $f(1{,}4) = 2(1{,}4)^3 - 3(1{,}4)^2 + 7(1{,}4) - 10 = -0{,}592$, se concluye que hay una raíz entre 1,4 y 1,5 que está probablemente más próxima de 1,5 que de 1,4.

Siguiendo de esta manera se halla que la raíz es 1,46 con dos decimales exactos.

34. Demostrar el Teorema 10, página 26.

Dado cualquier $\epsilon > 0$ se puede hallar x tal que $M - f(x) < \epsilon$ por definición del extremo superior M.

Entonces, $\dfrac{1}{M - f(x)} > \dfrac{1}{\epsilon}$ de modo que $\dfrac{1}{M - f(x)}$ no es acotada y, por tanto, no puede ser continua según el Teorema 4, página 26. Pero si se supone que $f(x) \neq M$, entonces como $M - f(x)$ es continua, por hipótesis, se debe tener que $\dfrac{1}{M - f(x)}$ es también continua. En vista de esta contradicción debe ser $f(x) = M$ para un valor al menos de x en el intervalo.

Análogamente se puede demostrar que existe un x en el intervalo tal que $f(x) = m$ (Problema 93).

Problemas propuestos

FUNCIONES

35. Dar el dominio de definición para el cual cada una de las funciones que siguen es real y uniforme:

(a) $\sqrt{(3-x)(2x+4)}$, (b) $(x-2)/(x^2-4)$, (c) $\sqrt{\operatorname{sen} 3x}$, (d) $\log_{10}(x^3-3x^2-4x+12)$.

Sol. (a) $-2 \leqq x \leqq 3$, (b) todo $x \neq \pm 2$, (c) $2m\pi/3 \leqq x \leqq (2m+1)\pi/3$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, (d) $x > 3$, $-2 < x < 2$.

36. Si $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, $x \neq 2$, hallar: (a) $\dfrac{5f(-1) - 2f(0) + 3f(5)}{6}$; (b) $\{f(-\frac{1}{2})\}^2$; (c) $f(2x-3)$;

(d) $f(x) + f(4/x)$, $x \neq 0$; (e) $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$, $h \neq 0$; (f) $f\{f(x)\}$.

Sol. (a) $\frac{61}{18}$ (b) $\frac{1}{25}$ (c) $\dfrac{6x-8}{2x-5}$, $x \neq 0, \frac{5}{2}, 2$ (d) $\frac{5}{2}$, $x \neq 0, 2$ (e) $\dfrac{7}{2h-4}$, $h \neq 0, 2$ (f) $\dfrac{10x+1}{x+5}$, $x \neq -5, 2$

37. Si $f(x) = 2x^2$, $0 < x \leqq 2$, hallar (a) el extremo superior y (b) el extremo inferior de $f(x)$. Determinar si $f(x)$ alcanza sus extremos. *Sol.* (a) 8, (b) 0

38. Construir el grafo de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = |x|$, $-3 \leqq x \leqq 3$

(b) $f(x) = 2 - \dfrac{|x|}{x}$, $-2 \leqq x \leqq 2$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leqq x \leqq 0 \\ x, & 0 \leqq x \leqq 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$, $x \neq 0$

(f) $\dfrac{x-[x]}{x}$ donde $[x] =$ mayor entero $\leqq x$

(g) $f(x) = \cosh x$

(h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

(i) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(j) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

39. Construir grafos para (a) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, (b) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, (c) $y^2 = 2px$ y (d) $y = 2ax - x^2$, siendo a, b, p constantes dadas. Si $y = f(x)$ en cada uno de estos casos, ¿es uniforme $f(x)$?

40. (a) A partir del grafo de $y = \cos x$ construir el de $y = \cos^{-1} x$. (b) Mostrar gráficamente por qué $\cos^{-1} x$ es función multiforme. Indicar posibles elecciones de un valor principal de $\cos^{-1} x$. (c) Mediante lo escogido en (b) hallar $\cos^{-1}(1/2) - \cos^{-1}(-1/2)$. ¿Depende el valor de esta función de la elección de valor principal? Explicar.

41. Hacer las partes (a) y (b) del Problema 40 para (a) $y = \sec^{-1} x$, (b) $y = \cot^{-1} x$.

42. Dado el grafo de $y = f(x)$, mostrar cómo obtener el de $y = f(ax + b)$, siendo a y b constantes dadas. Ilustrar el procedimiento obteniendo el grafo de
(a) $y = \cos 3x$, (b) $y = \operatorname{sen}(5x + \pi/3)$, (c) $y = \operatorname{tg}(\pi/6 - 2x)$.

43. Construir grafos para (a) $y = e^{-|x|}$, (b) $y = \ln |x|$, (c) $y = e^{-|x|} \operatorname{sen} x$.

44. Mediante los valores principales, páginas 22 y 23, calcular:

(a) $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)$

(b) $\operatorname{tg}^{-1}(1) - \operatorname{tg}^{-1}(-1)$

(c) $\cot^{-1}(1/\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-1/\sqrt{3})$

(d) $\cosh^{-1}\sqrt{2}$

(e) $e^{-\coth^{-1}(25/7)}$

(f) $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$, $-1 \leqq x \leqq 1$

(g) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos 2x)$, $0 \leqq x \leqq \pi/2$

(h) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos 2x)$, $\pi/2 \leqq x \leqq 3\pi/2$

(i) $\operatorname{tgh}(\operatorname{cosech}^{-1} 3x)$, $x \neq 0$

(j) $\cos(2 \operatorname{tg}^{-1} x^2)$

Sol. (a) $-\pi/3$ (b) $\pi/2$ (c) $-\pi/3$ (d) $\ln(1+\sqrt{2})$ (e) $\frac{3}{4}$ (f) $\pi/2$ (g) $\pi/2 - 2x$ (h) $2x - 3\pi/2$ (i) $\dfrac{|x|}{x\sqrt{9x^2+1}}$ (j) $\dfrac{1-x^4}{1+x^4}$

45. Calcular (a) $\cos\{\pi \operatorname{senh}(\ln 2)\}$, (b) $\cosh^{-1}\{\coth(\ln 3)\}$. *Sol.* (a) $-\sqrt{2}/2$, (b) $\ln 2$

46. (*a*) Demostrar que $\operatorname{tg}^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$ si se conviene en tomar como valores principales los de la página 22. (*b*) ¿Es también $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1}(1/x) = \pi/2$? Explicar.

47. Si $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$, demostrar que $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$, estudiando el caso $xy = 1$.

48. Demostrar que $\operatorname{tg}^{-1} a - \operatorname{tg}^{-1} b = \cot^{-1} b - \cot^{-1} a$.

49. Demostrar las identidades:
(*a*) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$, (*b*) $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$, (*c*) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,
(*d*) $\operatorname{tgh} \frac{1}{2}x = (\operatorname{senh} x)/(1 + \cosh x)$, (*e*) $\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| = \ln|\operatorname{tg} \frac{1}{2}x|$.

50. Hallar los máximos y mínimos relativos y absolutos de (*a*) $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $f(0) = 1$; (*b*) $f(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, $f(0) = 1$. Estudiar los casos cuando $f(0)$ no está definida o $f(0)$ está definida pero es $\neq 1$.

LIMITES

51. Calcular los límites siguientes, aplicando primero la definición y luego los teoremas sobre límites:
(*a*) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 3x + 2)$, (*b*) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{2x-5}$, (*c*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, (*d*) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}$, (*e*) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^4 - 16}{h}$,
(*f*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. *Sol.* (*a*) 2, (*b*) $-\frac{1}{7}$, (*c*) 4, (*d*) $-\frac{1}{4}$, (*e*) 32, (*f*) $\frac{1}{2}$

52. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 2x+5, & x>0 \end{cases}$. (*a*) Construir un grafo de $f(x)$.
Calcular (*b*) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, (*c*) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$, (*d*) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, (*e*) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, (*f*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, justificando la respuesta en cada caso. *Sol.* (*b*) 9, (*c*) -10, (*d*) 5, (*e*) -1, (*f*) no existe.

53. Calcular (*a*) $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(h) - f(0+)}{h}$ y (*b*) $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(h) - f(0-)}{h}$, donde $f(x)$ es la función del Prob. 52.
Sol. (*a*) 2, (*b*) 3

54. (*a*) Si $f(x) = x^2 \cos 1/x$, calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ justificando la respuesta. (*b*) ¿Sigue siendo la respuesta de (*a*) la misma si se considera $f(x) = x^2 \cos 1/x$, $x \neq 0$, $f(0) = 2$? Explicar.

55. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 3} 10^{-1/(x-3)^2} = 0$ aplicando la definición.

56. Sea $f(x) = \dfrac{1 + 10^{-1/x}}{2 - 10^{-1/x}}$, $x \neq 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$. Calcular (*a*) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, (*c*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, justificando las respuestas. *Sol.* (*a*) $\frac{1}{2}$, (*b*) -1, (*c*) no existe.

57. Hallar (*a*) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x|}{x}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{|x|}{x}$. Ilustrar las respuestas gráficamente. *Sol.* (*a*) 1, (*b*) -1

58. Si $f(x)$ es la función definida en el Problema 56, ¿existe $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|)$? Explicar.

59. Explicar lo que se entiende *exactamente* al escribir:
(*a*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2-x}{(x-3)^2} = -\infty$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0+} (1 - e^{1/x}) = -\infty$, (*c*) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+5}{3x-2} = \dfrac{2}{3}$.

60. Demostrar que (*a*) $\lim\limits_{x\to \infty} 10^{-x} = 0$, (*b*) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos x}{x + \pi} = 0$.

61. Explicar por qué (*a*) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe, (*b*) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x} \operatorname{sen} x$ existe.

62. Si $f(x) = \dfrac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$, calcular (*a*) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$, (*b*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, (*c*) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, (*d*) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, (*e*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Sol. (*a*) 2, (*b*) 1/6, (*c*) 2, (*d*) 1/6, (*e*) no existe

63. Si $[x]$ = mayor entero $\leqq x$, calcular (*a*) $\lim\limits_{x\to 2+} \{x - [x]\}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 2-} \{x - [x]\}$. *Sol.* (*a*) 0, (*b*) 1

64. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, demostrar que (*a*) $\lim\limits_{x\to x_0} \{f(x)\}^2 = A^2$, (*b*) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{A}$.
¿Qué generalizaciones parecen verdaderas? ¿Se pueden demostrar?

65. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, demostrar que
(*a*) $\lim\limits_{x\to x_0} \{f(x) - g(x)\} = A - B$, (*b*) $\lim\limits_{x\to x_0} \{a\,f(x) + b\,g(x)\} = aA + bB$ donde a, b = constantes.

66. Si los límites de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son A, B y C, respectivamente, demostrar que:

(a) $\lim_{x \to x_0} \{f(x) + g(x) + h(x)\} = A + B + C$, (b) $\lim_{x \to x_0} f(x)\,g(x)\,h(x) = ABC$. Generalizar estos resultados

67. Calcular aplicando los teoremas sobre límites:

(a) $\lim_{x \to 1/2} \left\{ \dfrac{2x^2 - 1}{(3x+2)(5x-3)} - \dfrac{2 - 3x}{x^2 - 5x + 3} \right\}$ *Sol.* (a) $-8/21$

(b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(3x-1)(2x+3)}{(5x-3)(4x+5)}$ (b) $3/10$

(c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{2x}{x+1} \right)$ (c) 1

(d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} \left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{3x+5} \right)$ (d) $1/32$

68. Calcular $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$. (Sugerencia: Sea $8 + h = x^3$) *Sol.* $1/12$

69. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$, demostrar directamente que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

70. Dado $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, calcular:

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{6x - \operatorname{sen} 2x}{2x + 3 \operatorname{sen} 4x}$ (g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$ (d) $\lim_{x \to 3} (x - 3) \operatorname{cosec} \pi x$ (f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ (h) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3 \operatorname{sen} \pi x - \operatorname{sen} 3\pi x}{x^3}$

Sol. (a) 3, (b) 0, (c) 1/2, (d) $-1/\pi$, (e) 2/7, (f) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, (g) -1, (h) $4\pi^3$

71. Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, demostrar que:

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b - a$; (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \ln \dfrac{a}{b}$, $a, b > 0$; (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} ax}{x} = a$.

72. Demostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si, y solo si, $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = l$.

CONTINUIDAD

73. Demostrar que $f(x) = x^2 - 3x + 2$ es continua en $x = 4$.

74. Demostrar que $f(x) = 1/x$ es continua (a) en $x = 2$, (b) en $1 \leqq x \leqq 3$.

75. Estudiar la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; $x \neq 0$, $f(0) = 0$; $x = 0$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$; $x \neq 2$, $f(2) = 3$; $x = 2$

(b) $f(x) = x - |x|$; $x = 0$ (d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x, & 0 < x < 1 \\ \ln x & 1 < x < 2 \end{cases}$; $x = 1$.

Sol. (a) discontinua, (b) continua, (c) continua, (d) discontinua

76. Si $[x]$ = mayor entero $\leqq x$, estudiar la continuidad de $f(x) = x - [x]$ en el intervalo (a) $1 < x < 2$, (b) $1 \leqq x \leqq 2$.

77. Demostrar que $f(x) = x^3$ es continua en todo intervalo finito.

78. Si $f(x)/g(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = x_0$, demostrar que $f(x)$ debe ser continua en $x = x_0$.

79. Demostrar que $f(x) = (\operatorname{tg}^{-1} x)/x$, $f(0) = 1$ es continua en $x = 0$.

80. Demostrar que un polinomio es continuo en todo intervalo finito.

81. Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, demostrar que $f(x)/g(x)$ es continua en cada punto $x = x_0$ para el cual $g(x_0) \neq 0$.

82. Dar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x-4)}$ (*c*) $f(x) = \sqrt{(x-3)(6-x)},\ 3 \leqq x \leqq 6$

(*b*) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x,\ x \neq 0,\ f(0) = 0$ (*d*) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x}$.

Sol. (*a*) $x = 2, 4$, (*b*) hay, (*c*) hay, (*d*) $x = 7\pi/6 \pm 2m\pi,\ 11\pi/6 \pm 2m\pi,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

CONTINUIDAD UNIFORME

83. Demostrar que $f(x) = x^3$ es uniformemente continua en (*a*) $0 < x < 2$, (*b*) $0 \leqq x \leqq 2$, (*c*) todo intervalo finito.

84. Demostrar que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $0 < x < \infty$.

85. Si a es constante, demostrar que $f(x) = 1/x^2$ es (*a*) continua en $a < x < \infty$ si $a \geqq 0$, (*b*) uniformemente continua en $a < x < \infty$ si $a > 0$, (*c*) no es uniformemente continua en $0 < x < 1$.

86. Si $f(x)$ y $g(x)$ son uniformemente continuas en el mismo intervalo, demostrar que (*a*) $f(x) \pm g(x)$ y (*b*) $f(x)g(x)$ son uniformemente continuas en el intervalo. Enunciar y demostrar un teorema semejante para $f(x)/g(x)$.

PROBLEMAS VARIOS

87. Dar una demostración «ϵ, δ» del teorema del Problema 31.

88. (*a*) Demostrar que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene una raíz real positiva en cada uno de los intervalos $\pi/2 < x < 3\pi/2$, $3\pi/2 < x < 5\pi/2$, $5\pi/2 < x < 7\pi/2, \ldots$

(*b*) Ilustrar el resultado anterior gráficamente construyendo los grafos de $y = \operatorname{tg} x$ y de $y = x$ y situando sus puntos de intersección.

(*c*) Determinar el valor de la menor raíz positiva de $\operatorname{tg} x = x$. *Sol.* (*c*) 4,49 aproximadamente

89. Demostrar que la única solución real de $\operatorname{sen} x = x$ es $x = 0$.

90. (*a*) Demostrar que $\cos x \cosh x + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales.

(*b*) Demostrar que para valores elevados de x las raíces son aproximadamente las de $\cos x = 0$.

91. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = 0$.

92. Suponiendo que $f(x)$ es continua en $x = x_0$ y que $f(x_0) > 0$, demostrar que existe un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ con $h > 0$, en el cual $f(x) > 0$. (Véase Teorema 5, página 26.) [Sugerencia: Mostrar que puede hacerse $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0)$ y luego que $f(x) \geqq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| > \frac{1}{2}f(x_0) > 0$.]

93. (*a*) Demostrar el Teorema 10, página 26, para el extremo inferior m (véase Problema 34). (*b*) Demostrar el Teorema 9, página 26, y explicar su relación con el Teorema 10.

Capítulo 3

Sucesiones

DEFINICION DE SUCESION

Una función de variable entera positiva (natural) denotada $f(n)$ o bien u_n, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, se llama *sucesión*. Así, pues, una sucesión es un conjunto de números $u_1, u_2, u_3, \ldots$ en un orden definido (esto es, en *correspondencia* con los números naturales) y construidos de acuerdo con una ley definida. Cada número de la sucesión es un *término*; u_n es el *término n*-ésimo. La sucesión será *finita* o *infinita* según que haya o no un número finito de términos. La sucesión $u_1, u_2, u_3, \ldots$ se denota brevemente por $\{u_n\}$.

Ejemplos. 1. El conjunto de números 2, 7, 12, 17, ..., 32 es una sucesión finita, el término n-ésimo viene dado por $u_n = f(n) = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$, $n = 1, 2, \ldots, 7$.

2. El conjunto de números 1, 1/3, 1/5, 1/7, ... es una sucesión infinita de término n-ésimo $u_n = 1/(2n-1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Si no se dice otra cosa, las sucesiones de que aquí se trata son infinitas.

LIMITE DE UNA SUCESION

Se dice que un número l es el *límite* de una sucesión infinita $u_1, u_2, u_3, \ldots$ si para todo número positivo ϵ se puede hallar un número positivo N que depende de ϵ tal que $|u_n - l| < \epsilon$ para todo entero $n > N$. En tal caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Ejemplo Si $u_n = 3 + 1/n = (3n+1)/n$, la sucesión es 4, 7/2, 10/3, ... y se puede mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$.

Si el límite de una sucesión existe, la sucesión se dice *convergente*; si no, se llama *divergente*. Una sucesión puede converger solamente hacia un límite, es decir, que si el límite existe es único. Véase Problema 8.

Una manera más intuitiva, pero menos rigurosa, de expresar este concepto de límite consiste en decir que una sucesión $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tiene un límite l si los términos sucesivos van quedando «más y más cerca» de l. A menudo se empieza esta manera de ver para «conjeturar» el valor del límite, después de lo cual se aplica la definición para ver si la conjetura es realmente correcta.

Son de observar las semejanzas y las diferencias entre límites de funciones y límites de sucesiones. Al definir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, el límite l se alcanza para *todas las posibles maneras* de tender x a infinito. Al definir $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$, el límite l ha de existir solamente para una cierta manera de tender al infinito, o sea, por los enteros positivos. Hay otras posibilidades, desde luego; por ejemplo, en ciertos casos, puede ser interesante considerar el límite de $f(x)$ al tender x a ∞ (o a cualquier número x_0) por una sucesión de números racionales.

TEOREMAS SOBRE LIMITES DE SUCESIONES

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, entonces,

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$

3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \;=\; \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \;=\; AB$

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \;=\; \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \;=\; \dfrac{A}{B}$ si $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$

Si $B=0$ y $A\neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ no existe.

Si $B=0$ y $A=0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ puede o no existir.

5. $\lim_{n\to\infty} a_n^p \;=\; \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p \;=\; A^p$, para p = cualquier real si A^p existe.

6. $\lim_{n\to\infty} p^{a_n} \;=\; p^{\lim_{n\to\infty} a_n} \;=\; p^A$, para p = cualquier real si p^A existe.

LIMITES INFINITOS

Se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ si para todo número positivo M se puede hallar un número positivo N (que depende de M) tal que $a_n > M$ para todo $n > N$. Análogamente, se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si para todo número positivo M se puede hallar un número positivo N tal que $a_n < -M$ para todo $n > M$. Téngase muy en cuenta que ∞ y $-\infty$ no son números y que las sucesiones no son convergentes. La terminología que se emplea no hace más que indicar que la sucesión diverge de algún modo.

SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

Si $u_n \leqq M$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ con M constante (independiente de n), se dice que la sucesión $\{u_n\}$ es *mayorada acotada superiormente* y que M es un *mayorante*. Si $u_n \geqq m$ la sucesión es *minorada* y m es un *minorante**.

Si $m \leqq u_n \leqq M$ la sucesión se dice *acotada*, lo que se indica a menudo con $|u_n| \leqq P$. Toda sucesión convergente es acotada, pero la recíproca no es necesariamente cierta.

Si $u_{n+1} \geqq u_n$ la sucesión se llama *monótona creciente*; si $u_{n+1} > u_n$ se llama *estrictamente creciente*. Análogamente, si $u_{n+1} \leqq u_n$ la sucesión se llama *monótona decreciente*, y si $u_{n+1} < u_n$ es *estrictamente decreciente*.

Ejemplos. 1. La sucesión 1, 1,1, 1,11, 1,111, . . . es acotada y monótona creciente, siendo estrictamente creciente.
2. La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ es acotada pero no es monótona ni creciente ni decreciente.
3. La sucesión $-1, -1{,}5, -2, -2{,}5, -3, \ldots$ es monótona decreciente pero no es acotada, si bien es mayorada.

El siguiente teorema es fundamental y se relaciona con el de Bolzano-Weierstrass (Capítulo 1, página 5) que se demuestra en el Problema 23.

Teorema. Toda sucesión monótona acotada (creciente o decreciente) tiene un límite.

EXTREMO SUPERIOR Y EXTREMO INFERIOR DE UNA SUCESION

Se dice que un número $\underline{M}$ es *extremo superior* de una sucesión $\{u_n\}$ si $u_n \leqq \underline{M}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y existe al menos un término mayor que $\underline{M} - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Se dice que un número $\bar{m}$ es *extremo inferior* de una sucesión $\{u_n\}$ si $u_n \geqq \bar{m}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y existe al menos un término menor que $\bar{m} + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

* Llamábase cotas superiores los mayorantes y cotas inferiores los minorantes en la antigua nomenclatura. (*N. del T.*)

Compárese con la definición de extremos superior e inferior de conjuntos de números en general (página 5).

LIMITE SUPERIOR, LIMITE INFERIOR

Se dice que un número $\bar{l}$ es *límite superior* (lim sup o $\overline{\lim}$) de la sucesión $\{u_n\}$ si hay infinitos términos de la sucesión mayores que $\bar{l} - \epsilon$ y solo un número finito de términos mayores que $\bar{l} + \epsilon$, para todo ϵ positivo.

Se dice que un número $\underline{l}$ es *límite inferior* (lim inf o $\underline{\lim}$ de la sucesión $\{u_n\}$ si hay infinitos términos de la sucesión menores que $\underline{l} + \epsilon$ y solo un número finito de términos menores que $\underline{l} - \epsilon$, para todo ϵ positivo.

Estos límites corresponden a los puntos límites mínimo y máximo de los conjuntos de números en general.

Si hay infinitos términos de $\{u_n\}$ que superan a todo número positivo M se define lim sup $\{u_n\} = \infty$. Si hay infinitos términos de la sucesión menores que $-M$, siendo M cualquier número positivo, se define lim inf $\{u_n\} = -\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, se define lim sup $\{u_n\}$ = lim inf $\{u_n\} = \infty$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, se define lim sup $\{u_n\}$ = lim inf $\{u_n\} = -\infty$.

Si bien no toda sucesión acotada es necesariamente convergente, siempre tiene un lim sup y un lim inf finitos.

Una sucesión $\{u_n\}$ converge si, y solo si, lim sup u_n = lim inf u_n es finito.

ENCAJES DE INTERVALOS

Considérese un conjunto de intervalos $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, tales que cada intervalo está contenido en el precedente y que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Tales intervalos forman lo que se llama un *encaje*.

Se puede demostrar que a todo encaje de intervalos corresponde un número real único, lo cual se puede aplicar para demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass del Capítulo 1. (Problemas 22 y 23.)

CRITERIO DE CONVERGENCIA DE CAUCHY

Este criterio enuncia que una sucesión $\{u_n\}$ converge si, y solamente si, para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número N tal que $|u_p - u_q| < \epsilon$ para cualesquiera $p, q > N$. Este criterio tiene la ventaja de que no es preciso conocer el límite l para demostrar la convergencia.

SERIES

Sea $u_1, u_2, u_3, \ldots$ una sucesión dada. La nueva sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ con

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \quad \ldots$$

siendo, pues, S_n, la *n-ésima suma parcial*, suma de los primeros n términos de la sucesión $\{u_n\}$.

La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ se simboliza por

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

que toma el nombre de *serie*. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, la serie se dice *convergente* y S es su suma; en caso contrario se llama *divergente*.

Un estudio más detenido de las series y otros temas relacionados con las sucesiones se encuentra en el Capítulo 11.

Problemas resueltos

SUCESIONES

1. Escribir los primeros cinco términos de las sucesiones siguientes:

(*a*) $\left\{\dfrac{2n-1}{3n+2}\right\}$ *Sol.* $\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{11}, \dfrac{7}{14}, \dfrac{9}{17}$

(*b*) $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ *Sol.* $\dfrac{2}{1^3}, 0, \dfrac{2}{3^3}, 0, \dfrac{2}{5^3}$

(*c*) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right\}$ *Sol.* $\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2\cdot 4}, \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \dfrac{-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$

(*d*) $\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right\}$ *Sol.* $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

(*e*) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}$ *Sol.* $\dfrac{x}{1!}, \dfrac{-x^3}{3!}, \dfrac{x^5}{5!}, \dfrac{-x^7}{7!}, \dfrac{x^9}{9!}$

Se define $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n$. Así que $1! = 1$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$, etc. Se define asimismo $0! = 1$.

2. Dada la sucesión 1, 16, 81, 256, . . . para encontrar el 5.° término, ¿cuál de las expresiones siguientes se debe aplicar: (*a*) $u_n = n^4$. (*b*) $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$?

Si $u_n = n^4$, entonces $u_1 = 1^4 = 1$, $u_2 = 2^4 = 16$, $u_3 = 3^4 = 81$, $u_4 = 4^4 = 256$, lo que concuerda con los cuatro primeros términos de la sucesión. De modo que entonces el 5.° término es $u_5 = 5^4 = 625$.

Si $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$, resulta $u_1 = 1$, $u_2 = 16$, $u_3 = 81$, $u_4 = 256$, que concuerda también con los primeros cuatro términos dados; y entonces el 5.° término sería $u_5 = 601$.

Ambas fórmulas son, pues, correctas. Esto no significa sino que un número finito de términos de una sucesión no define unívocamente el *n*-ésimo término y de hecho son posibles infinitos términos *n*-ésimos diferentes.

10-35x50-24

LIMITES DE UNA SUCESION

3. El término *n*-ésimo de una sucesión es $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$. (*a*) Escribir los términos 1.°, 5.°, 10, 100, 1000, 10.000 y 100.000 en forma decimal. *Conjeturar* el límite de esta sucesión para $n \to \infty$. (*b*) Aplicando la definición de límite comprobar si la conjetura en (*a*) es correcta.

(*a*)	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10.000$	$n = 100.000$
	0,22222 . . .	0,56000 . . .	0,64444 . . .	0,73827 . . .	0,74881 . . .	0,74988 . . .	0,74998 . . .

$4n+5>0$

Una buena conjetura es que el límite sea $0{,}75000\ldots = \frac{3}{4}$. Nótese que un posible límite solo puede ser aparente para valores *suficientemente grandes* de *n*.

$4n>-5$
$n>-5/4$

(*b*) Hay que mostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un número *N* (que depende de ϵ) tal que $|u_n - \frac{3}{4}| < \epsilon$ para todo $n > N$.

Entonces, $\left|\dfrac{3n-1}{4n+5} - \dfrac{3}{4}\right| = \left|\dfrac{-19}{4(4n+5)}\right| < \epsilon$ si $\dfrac{19}{4(4n+5)} < \epsilon$ o sea,

$3n-1>0$

$$\frac{4(4n+5)}{19} > \frac{1}{\epsilon}, \qquad 4n+5 > \frac{19}{4\epsilon}, \qquad n > \frac{1}{4}\left(\frac{19}{4\epsilon} - 5\right)$$

$3n>1$
$n>1/3$

Tomando $N = \frac{1}{4}(19/4\epsilon - 5)$, se ve que $|u_n - \frac{3}{4}| < \epsilon$ para todo $n > N$, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{3}{4}$, lo cual completa la demostración.

Obsérvese que si $\epsilon = 0{,}001$ (por ejemplo), $N = \frac{1}{4}(19000/4 - 5) = 1186{,}25$, lo que significa que todos los términos de la sucesión posteriores al de orden 1186 difieren en valor absoluto de $\frac{3}{4}$ en menos de 0,001.

4. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$ con $c \neq 0$ y $p > 0$ constantes.

Hay que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay un número N tal que $|c/n^p - 0| < \epsilon$ para todo $n > N$.

Ahora $\left|\frac{c}{n^p}\right| < \epsilon$ si $\frac{|c|}{n^p} < \epsilon$, o sea, $n^p > \frac{|c|}{\epsilon}$ o $n > \left(\frac{|c|}{\epsilon}\right)^{1/p}$. Tomando $N = \left(\frac{|c|}{\epsilon}\right)^{1/p}$ (depende, pues, de ϵ), se ve que $|c/n^p| < \epsilon$ para todo $n > N$, lo que demuestra que $\lim_{n\to\infty} (c/n^p) = 0$.

5. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n} = \frac{2}{3}$.

Hay que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un número N tal que $\left|\frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$ para todo $n > N$.

Entonces, $\left|\frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-7}{3(5 + 3\cdot 10^n)}\right| < \epsilon$ si $\frac{7}{3(5 + 3\cdot 10^n)} < \epsilon$, o sea, si

$\frac{3}{7}(5 + 3\cdot 10^n) > 1/\epsilon$, $\quad 3\cdot 10^n > 7/3\epsilon - 5$, $\quad 10^n > \frac{1}{3}(7/3\epsilon - 5)$ $\quad$ o $\quad n > \log_{10}\{\frac{1}{3}(7/3\epsilon - 5)\} = N$,

lo que demuestra la existencia de N y del límite dicho.

Obsérvese que el valor de N anterior es real solamente si $7/3\epsilon - 5 > 0$, o sea, si $0 < \epsilon < 7/15$. Si $\epsilon \geqq 7/15$, se ve que $\left|\frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$ para todo $n > 0$.

6. Explicar con precisión el significado de (*a*) $\lim_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$, (*b*) $\lim_{n\to\infty} (1 - 2n) = -\infty$.

(*a*) Si para todo número positivo M se puede hallar un número positivo N (que depende de M) tal que $a_n > M$ para todo $n > N$, se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

En este caso, $3^{2n-1} > M$ si $(2n - 1)\log 3 > \log M$, o sea, $n > \frac{1}{2}\left(\frac{\log M}{\log 3} + 1\right) = N$.

(*b*) Si para todo número positivo M se puede hallar un número positivo N (que depende de M) tal que $a_n < -M$ para todo $n > N$, se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

En este caso, $1 - 2n < -M$ si $2n - 1 > M$, o sea, $n > \frac{1}{2}(M + 1) = N$.

Téngase en cuenta que el empleo de las notaciones ∞ y $-\infty$ para límites no quiere decir de ningún modo que las sucesiones dadas son convergentes, pues ∞ y $-\infty$ *no* son números. Estas notaciones solo indican que las sucesiones divergen en alguna manera.

7. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ si $|x| < 1$.

Método 1.

Si $x \neq 0$ el resultado es obvio. Para $x = 0$ hay que demostrar que dado un $\epsilon > 0$ existe un N tal que $|x^n| < \epsilon$ para $n > N$. Como $|x^n| = |x|^n < \epsilon$ si $n \log_{10} |x| < \log_{10} \epsilon$. Dividiendo por $\log_{10} |x|$, que es negativo, resulta $n > \frac{\log_{10} \epsilon}{\log_{10} |x|} = N$, lo que demuestra el resultado dicho.

Método 2:

Sea $|x| = 1/(1 + p)$, con $p > 0$. Por la desigualdad de Bernoulli (Prob. 31, Cap. 1) se tiene

$|x^n| = |x|^n = (1 + p)^n < 1/(1 + np) < \epsilon$ para todo $n > N$. Así, pues, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

TEOREMAS SOBRE LIMITES DE SUCESIONES

8. Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe, es único.

Hay que demostrar que si $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ y $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$, es $l_1 = l_2$.

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, existe un N tal que

$$|u_n - l_1| < \tfrac{1}{2}\epsilon \quad \text{para} \quad n > N, \qquad |u_n - l_2| < \tfrac{1}{2}\epsilon \quad \text{para} \quad n > N$$

Entonces,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leqq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

esto es, $|l_1 - l_2|$ es menor que cualquier positivo ϵ (por pequeño que sea) y, siendo entonces cero, se tiene $l_1 = l_2$.

9. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Hay que demostrar que para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un $N > 0$ tal que $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \epsilon$ para todo $n > N$. Por la desigualdad 2, página 3, se tiene

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leqq |a_n - A| + |b_n - B| \tag{1}$$

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, existen N_1 y N_2 tales que

$$|a_n - A| < \tfrac{1}{2}\epsilon \text{ para todo } n > N_1 \tag{2}$$
$$|b_n - B| < \tfrac{1}{2}\epsilon \text{ para todo } n > N_2 \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) resulta

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon \text{ para todo } n > N$$

tomando para N el mayor de los N_1 y N_2, lo cual demuestra lo dicho.

10. Demostrar que una sucesión convergente es acotada.

Dado $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ hay que demostrar que existe un número positivo P tal que $|a_n| < P$ para todo n. Se tiene

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqq |a_n - A| + |A|$$

Pero, por hipótesis, existe un N tal que $|a_n - A| < \epsilon$ para todo $n > N$, esto es,

$$|a_n| < \epsilon + |A| \text{ para todo } n > N$$

Se deduce que $|a_n| < P$ para todo n si se elige para P el mayor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_N, \epsilon + |A|$.

11. Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, demostrar que existe un número N tal que $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$ para todo $n > N$.

Como $B = B - b_n + b_n$, se tiene: (1) $|B| \leqq |B - b_n| + |b_n|$.

Se puede entonces elegir N tal que $|B - b_n| = |b_n - B| < \frac{1}{2}|B|$ para todo $n > N$, pues $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ por hipótesis.

Luego por (1), $|B| > \frac{1}{2}|B| + |b_n|$ o bien $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$ para todo $n > N$.

12. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

Se tiene, por el Problema 10,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| = |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| &\leqq |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \\ &\leqq P|b_n - B| + (|B| + 1)|a_n - A| \end{aligned} \tag{1}$$

Pero como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, dado un $\epsilon > 0$, es posible hallar N_1 y N_2 tales que

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2P} \text{ para todo } n > N_1 \qquad |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2(|B| + 1)} \text{ para todo } n > N_2$$

Por tanto, según (1), $|a_n b_n - AB| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ para todo $n > N$, siendo N el mayor de los N_1 y N_2, lo que demuestra el resultado.

13. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, demostrar (*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$, (*b*) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

(*a*) Hay que demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - b_n|}{|B|\,|b_n|} < \epsilon \quad \text{para todo } n > N \tag{1}$$

Por hipótesis, dado un $\epsilon > 0$, existe un N_1 tal que $|b_n - B| < \frac{1}{2}B^2\epsilon$ para todo $n > N_1$. Asimismo, como $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$ existe un N_2 tal que $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$ para todo $n > N_2$ (véase Problema 11).

Luego si N es el mayor de los N_1 y N_2 se puede escribir (*1*) como

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|B|\,|b_n|} < \frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B|\cdot\frac{1}{2}|B|} = \epsilon \quad \text{para todo } n > N$$

lo que concluye la demostración.

(*b*) Por la parte (*a*) y el Problema 12 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

Lo cual también se puede demostrar directamente (véase Problema 41).

14. Calcular, mediante los teoremas sobre límites:

(*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 5/n}{5 + 2/n - 6/n^2} = \frac{3+0}{5+0+0} = \frac{3}{5}$

(*b*) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^3+n^2+2n}{(n+1)(n^2+1)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+1/n+2/n^2}{(1+1/n)(1+1/n^2)}\right\}$

$$= \frac{1+0+0}{(1+0)\cdot(1+0)} = 1$$

(*c*) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

(*d*) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 4n}{2n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 4/n}{2/n - 1/n^2}$

Como los límites de numerador y denominador son 3 y 0, respectivamente, el límite no existe.

Como $\frac{3n^2 + 4n}{2n-1} > \frac{3n^2}{2n} = \frac{3n}{2}$ se puede hacer mayor que cualquier número positivo M eligiendo $n > N$, se puede escribir, pues, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 4n}{2n - 1} = \infty$.

(*e*) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{3+7/n}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

(*f*) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 - 4n^2}{3n^7 + n^3 - 10} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2 - 4/n^5}{3 + 1/n^4 - 10/n^7} = \frac{0}{3} = 0$

(*g*) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\cdot 10^n}{5 + 3\cdot 10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n} + 2}{5\cdot 10^{-n} + 3} = \frac{2}{3}$ (Compárese con el Prob. 5.)

SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

15. Demostrar que la sucesión de término n-ésimo $u_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ (*a*) es monótona creciente, (*b*) es mayorada, (*c*) es minorada, (*d*) es acotada, (*e*) tiene un límite.

(*a*) $\{u_n\}$ es monótona creciente si $u_{n+1} \geq u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ahora bien,

$$\frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} \geqq \frac{2n-7}{3n+2} \quad \text{si, y solo si,} \quad \frac{2n-5}{3n+5} \geqq \frac{2n-7}{3n+2}$$

o $(2n-5)(3n+2) \geqq (2n-7)(3n+5)$, $6n^2-11n-10 \geqq 6n^2-11n-35$, o sea, $-10 \geqq -35$, que es cierto. Así que invirtiendo los pasos con las desigualdades se ve que $\{u_n\}$ es monótona creciente, y como $-10 > -35$, la sucesión es estrictamente creciente.

(*b*) Escribiendo algunos términos de la sucesión, *parece* que un mayorante de la misma es 2 (por ejemplo). Para *demostrar* esto hay que hacer ver que $u_n \leqq 2$. Si $(2n-7)/(3n+2) \leqq 2$, entonces $2n-7 \leqq 6n+4$, o sea, $-4n < 11$, lo cual *es* cierto. Invirtiendo los pasos se demuestra, pues, que 2 es un mayorante.

(*c*) Como esta sucesión es monótona creciente, el primer término -1 es un minorante, esto es, $u_n \geqq -1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Cualquier número menor que -1 es también un minorante.

(*d*) Como la sucesión es mayorada y minorada, es acotada. Así, por ejemplo, se puede escribir $|u_n| \leqq 2$ para todo n.

(*e*) Como toda sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada tiene un límite, la sucesión dada tiene un límite. En efecto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-7}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-7/n}{3+2/n} = \dfrac{2}{3}$.

16. La fórmula recurrente $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$, $u_1 = 1$ define una sucesión $\{u_n\}$.

(*a*) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe. (*b*) Hallar este límite.

(*a*) Los términos de la sucesión son $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{3u_1} = 3^{1/2}$, $u_3 = \sqrt{3u_2} = 3^{1/2+1/4}$, $\ldots$.

El término n-ésimo está dado por $u_n = 3^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{n-1}}$ como se puede demostrar por inducción matemática (Capítulo 1).

Es obvio que $u_{n+1} \geqq u_n$, luego la sucesión es monótona creciente.

Por el Problema 14, Capítulo 1, $u_n \leqq 3^1 = 3$, esto es, u_n es mayorada. Luego u_n es acotada, ya que cero es un minorante.

Existe, pues, un límite ya que la sucesión es acotada y monótona creciente.

(*b*) Sea x ese límite. Como $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3u_n}$, se tiene $x = \sqrt{3x}$ y $x = 3$. (La otra posibilidad, $x = 0$, se excluye porque $u_n \geqq 1$.)

Otro método: $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{1-1/2^n} = 3^{\lim_{n\to\infty}(1-1/2^n)} = 3^1 = 3$

17. Verificar la tabla siguiente:

Sucesión	Acotada	Monótona creciente	Monótona decreciente	Existe el límite
$2, 1{,}9, 1{,}8, 1{,}7, \ldots, 2-(n-1)/10 \ldots$	No	No	Sí	No
$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$	Sí	No	No	No
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, (-1)^{n-1}/(n+1), \ldots$	Sí	No	No	Sí (0)
$0{,}6, 0{,}66, 0{,}666, \ldots, \frac{2}{3}(1-1/10^n), \ldots$	Sí	Sí	No	Sí $(\frac{2}{3})$
$-1, +2, -3, +4, -5, \ldots, (-1)^n n, \ldots$	No	No	No	No

18. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Por el teorema del binomio, si n es entero positivo (véase Problema 95, Capítulo 1),

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}x^n$$

Haciendo $x = 1/n$,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Puesto que cada término a partir del tercero en la última expresión es función creciente de n, se sigue que la sucesión u_n es monótona creciente.

Es claro también que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

por el Problema 14, Capítulo 1.

Así, pues, u_n es acotada y monótona creciente y, por tanto, tiene un límite que se denota por e, constante cuyo valor es $e = 2{,}71828\ldots$.

19. Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, para cualquier manera de tender $x \to \infty$ (es decir, no necesariamente por enteros positivos como en el Problema 18).

Si n = mayor entero $\leqq x$, es $n \leqq x \leqq n+1$ y $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Como $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) = e$

y $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = e$

se sigue que $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

EXTREMO SUPERIOR, EXTREMO INFERIOR; LIMITE SUPERIOR, LIMITE INFERIOR

20. Hallar (*a*) extremo superior, (*b*) extremo inferior, (*c*) lim sup ($\overline{\lim}$) y (*d*) lim inf ($\underline{\lim}$) para la sucesión $2, -2, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

(*a*) extremo superior $= 2$, pues todos los términos son menores o iguales a 2, en tanto que hay al menos un término (el primero) mayor que $2-\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

(*b*) extremo inferior $= -2$, pues todos los términos son mayores o iguales que -2, en tanto que al menos un término (el segundo) es menor que $-2+\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

(*c*) lim sup o $\overline{\lim} = 1$, pues hay infinitos términos de la sucesión mayores que $1-\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ (todos los 1 de la sucesión) mientras que solamente un número finito de términos son mayores que $1+\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ (el primero).

(*d*) lim inf o $\underline{\lim} = -1$, pues hay infinitos términos de la sucesión menores que $-1+\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ (todos los -1 de la sucesión) mientras que solo un número finito de términos son menores que $-1-\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ (el segundo término).

21. Hallar (*a*) el extremo superior, (*b*) el extremo inferior, (*c*) el lim sup ($\overline{\lim}$) y (*d*) el lim inf ($\underline{\lim}$) de las sucesiones del Problema 17.

Los resultados se ven en la tabla siguiente:

Sucesión	Extremo superior	Extremo inferior	lim sup o $\overline{\lim}$	lim inf o $\underline{\lim}$
$2, 1{,}9, 1{,}8, 1{,}7, \ldots, 2-(n-1)/10 \ldots$	2	sin	$-\infty$	$-\infty$
$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$	1	-1	1	-1
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, (-1)^{n-1}/(n+1), \ldots$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
$0{,}6, 0{,}66, 0{,}666, \ldots, \frac{2}{3}(1-1/10^n), \ldots$	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-1, +2, -3, +4, -5, \ldots, (-1)^n n, \ldots$	sin	sin	$+\infty$	$-\infty$

ENCAJES DE INTERVALOS

22. Demostrar que un conjunto de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, determina un número real.

Por definición de encaje de intervalos, $a_{n+1} \geqq a_n$, $b_{n+1} \leqq b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Luego $a_1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_1$ y las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas y monótonas creciente y decreciente, respectivamente, y, por tanto, convergen hacia a y b.

Para demostrar que $a = b$ obsérvese que

$$b - a \;=\; (b - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - a) \tag{1}$$
$$|b - a| \;\leqq\; |b - b_n| + |b_n - a_n| + |a_n - a| \tag{2}$$

Como dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un N tal que para todo $n > N$

$$|b - b_n| < \epsilon/3, \qquad |b_n - a_n| < \epsilon/3, \qquad |a_n - a| < \epsilon/3 \tag{3}$$

de modo que por (2), $|b - a| < \epsilon$. Como ϵ es cualquier número positivo tiene que ser $b - a = 0$, o sea, $a = b$.

23. Demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass (página 5).

Supóngase que el conjunto acotado dado está contenido en el intervalo finito $[a, b]$. Divídase este intervalo en dos intervalos iguales. Entonces, al menos uno de éstos, llámesele $[a_1, b_1]$ contiene infinitos puntos del conjunto. Dividiendo $[a_1, b_1]$ en dos intervalos iguales se obtiene otro intervalo, llámesele $[a_2, b_2]$, que contiene infinitos puntos del conjunto. Continuando este proceso, se obtiene un conjunto de intervalos encajados $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, y tales que

$$b_1 - a_1 = (b - a)/2, \quad b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b - a)/2^2, \quad \ldots, \quad b_n - a_n = (b - a)/2^n$$

de lo que se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

A este encaje de intervalos, por el Problema 22, le corresponde un número real único que representa un punto límite y esto demuestra el teorema.

CRITERIO DE CONVERGENCIA DE CAUCHY

24. Demostrar el criterio de convergencia de Cauchy enunciado en la página 43.

Necesidad. Supóngase que la sucesión $\{u_n\}$ converge hacia l. Entonces, dado un $\epsilon > 0$, se puede hallar un N tal que

$$|u_p - l| < \epsilon/2 \text{ para todo } p > N \quad \text{y} \quad |u_q - l| < \epsilon/2 \text{ para todo } q > N$$

Luego, para $p > N$ y $q > N$ se tiene

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leqq |u_p - l| + |l - u_q| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Suficiencia. Supóngase que $|u_p - u_q| < \epsilon$ para cualesquiera $p, q > N$ y todo $\epsilon > 0$. Entonces, todos los números $u_N, u_{N+1}, \ldots$ están en un intervalo finito, es decir, el conjunto es infinito y acotado. Luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe al menos un punto límite a del conjunto.

Si a es el único punto límite queda demostrado el criterio y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Supóngase que hay dos puntos límites distintos, a y b, y que $a < b$ (Fig. 3-1). Por definición, de punto límite se tiene

$$|u_p - a| < (b - a)/3 \quad \text{para infinitos valores } p \tag{1}$$
$$|u_q - b| < (b - a)/3 \quad \text{para infinitos valores } q \tag{2}$$

Fig. 3-1

Entonces, como $b - a = (b - u_q) + (u_q - u_p) + (u_p - a)$, se tiene

$$|b - a| = b - a \leqq |b - u_q| + |u_p - u_q| + |u_p - a| \tag{3}$$

Utilizando (1) y (2) en (3), se ve que $|u_p - u_q| > (b - a)/3$ para infinitos valores de p y q, lo que contradice la hipótesis de que $|u_p - u_q| < \epsilon$ para $p, q > N$ y para todo $\epsilon > 0$. Luego hay solamente un punto límite y el teorema queda demostrado.

SERIES

25. Demostrar que la serie (llamada *serie geométrica*)

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

(*a*) converge hacia $a/(1-r)$ si $|r| < 1$, (*b*) diverge si $|r| \geqq 1$.

$$\begin{aligned} &\text{Sea} & S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ &\text{Entonces,} & rS_n &= \phantom{a +{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ &\text{Restando,} & (1-r)S_n &= a \phantom{+ ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}} - ar^n \end{aligned}$$

o sea, que $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(*a*) Si $|r| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ por el Problema 7.

(*b*) Si $|r| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe (véase Problema 44).

26. Demostrar que si una serie converge, su término n-ésimo tiende a cero necesariamente.

Como $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ se tiene $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Si la serie converge hacia S, entonces

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

27. Demostrar que la serie $1-1+1-1+1-1+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ diverge.

Método 1:

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$ no existe efectivamente. Entonces, por el Problema 26, la serie no puede converger, o sea, que es divergente.

Método 2:

La sucesión de sumas parciales es $1, 1-1, 1-1+1, 1-1+1-1, \ldots$ es decir, $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Como esta sucesión carece de límite, la serie es divergente.

PROBLEMAS VARIOS

28. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = l$.

Sea $u_n = v_n + l$. Hay que demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} = 0$ si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Se tiene

$$\frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_P}{n} + \frac{v_{P+1} + v_{P+2} + \cdots + v_n}{n}$$

así que

$$\left|\frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}\right| \leqq \frac{|v_1 + v_2 + \cdots + v_P|}{n} + \frac{|v_{P+1}| + |v_{P+2}| + \cdots + |v_n|}{n} \qquad (1)$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, se puede elegir P de modo que $|v_n| < \epsilon/2$ para $n > P$. Luego

$$\frac{|v_{P+1}| + |v_{P+2}| + \cdots + |v_n|}{n} < \frac{\epsilon/2 + \epsilon/2 + \cdots + \epsilon/2}{n} = \frac{(n-P)\epsilon/2}{n} < \frac{\epsilon}{2} \qquad (2)$$

Ya elegido P se puede elegir N, de modo que para $n > N > P$,

$$\frac{|v_1 + v_2 + \cdots + v_P|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

Entonces, llevando (2) y (3) a (1) resulta

$$\left|\frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{para } n > N$$

lo que demuestra el resultado.

29. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{1/n} = 1$.

Sea $(1+n+n^2)^{1/n} = 1+u_n$ con $u_n \geqq 0$. Por el teorema del binomio.

$$1+n+n^2 = (1+u_n)^n = 1 + nu_n + \frac{n(n-1)}{2!}u_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u_n^3 + \cdots + u_n^n$$

Luego $1+n+n^2 > 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u_n^3$ o bien $0 < u_n^3 < \frac{6(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)}$.

De modo que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^3 = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Así, pues, $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n+n^2)^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+u_n) = 1$.

30. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ para toda constante a.

El resultado se deduce inmediatamente si se puede demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$ (Problema 39). Suponiendo $a \neq 0$.

Sea $u_n = \frac{|a|^n}{n!}$. Entonces, $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{|a|}{n}$. Si n es suficientemente grande, por ejemplo, $n > 2|a|$, y si se llama $N = [2|a|+1]$, o sea, el mayor entero $\leqq 2|a|+1$, entonces

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \frac{1}{2}, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{1}{2}$$

Multiplicando estas desigualdades, $\frac{u_n}{u_N} < (\frac{1}{2})^{n-N}$ o $u_n < (\frac{1}{2})^{n-N}u_N$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n-N} = 0$ (por el Problema 7), se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

31. La expresión $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}$ que se indica brevemente por $a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$, siendo $a_1, a_2, \ldots$ números naturales se llama *fracción continua*. Su valor se define como el límite de la sucesión a_1, $a_1 + \frac{1}{a_2}$, $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$, ... cuando este límite existe, y se dice que la fracción continua *converge* hacia ese límite. Los términos sucesivos de la sucesión se llaman *cocientes incompletos* de la fracción continua. Si las constantes $a_1, a_2, \ldots$ se repiten a partir de un orden determinado, se dice que la fracción continua es *periódica*. Dada la fracción continua periódica

$$2 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

(*a*) Hallar los primeros diez cocientes incompletos y pensar en un posible límite. (*b*) Suponiendo que el límite existe, hallar su valor.

(*a*) Primer cociente incompleto $= 2$

Segundo cociente incompleto $= 2 + 1/2 = 5/2 = 2{,}5$

Tercer cociente incompleto $= 2 + \frac{1}{2+1/2} = 2 + \frac{1}{5/2} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

Cuarto cociente incompleto $= 2 + \frac{1}{12/5} = \frac{29}{12} = 2{,}4166\ldots$

Qinto cociente incompleto $= 2 + \frac{1}{29/12} = \frac{70}{29} = 2{,}4137\ldots$

Análogamente se encuentra para los cocientes incompletos sexto a décimo, respectivamente, los valores

$$\frac{169}{70} = 2{,}4140\ldots, \quad \frac{408}{169} = 2{,}4142\ldots, \quad \frac{985}{408} = 2{,}4142\ldots, \quad \frac{2378}{985} = 2{,}4142\ldots, \quad \frac{5741}{2378} = 2{,}4142\ldots$$

De este resultado parece razonable concluir que el límite buscado es 2,4142 con cuatro decimales exactos.

Es interesante observar que si P_n/Q_n y P_{n+1}/Q_{n+1} son los cocientes incompletos n-ésimo y $(n+1)$-ésimo respectivamente, el cociente incompleto $(n+2)$ es

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{2P_{n+1}+P_n}{2Q_{n+1}+Q_n}.$$

Para el resultado general, en caso de una fracción continua cualquiera, véase Problema 75(*a*).

(*b*) Sea x el límite. Entonces ha de ser $x = 2 + 1/x$, o sea, $x^2 - 2x - 1 = 0$ y $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Como el límite no puede ser negativo, es $x = 1 + \sqrt{2}$, lo que concuerda con el valor sugerido en (*a*), pues $\sqrt{2} = 1{,}4142$ aproximadamente.

Obsérvese que esta fracción continua se puede definir por la fórmula recurrente.

$$u_{n+1} = 2 + 1/u_n, \quad u_1 = 2$$

y si existe $\lim_{n\to\infty} u_n = x$, resulta $x = 2 + 1/x$ como antes.

Problemas propuestos

SUCESIONES

32. Escribir los primeros cuatro términos de las sucesiones:

(*a*) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$, (*b*) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right\}$, (*c*) $\left\{\frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\right\}$, (*d*) $\left\{\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right\}$, (*e*) $\left\{\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\right\}$.

Sol. (*a*) $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{4}}{5}$ (*c*) $\frac{1}{1^5}, \frac{2x}{3^5}, \frac{4x^2}{5^5}, \frac{8x^3}{7^5}$ (*e*) $\frac{\cos x}{x^2+1^2}, \frac{\cos 2x}{x^2+2^2}, \frac{\cos 3x}{x^2+3^2}, \frac{\cos 4x}{x^2+4^2}$

(*b*) $\frac{1}{1!}, -\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, -\frac{1}{4!}$ (*d*) $\frac{-x}{1}, \frac{x^3}{1\cdot3}, \frac{-x^5}{1\cdot3\cdot5}, \frac{x^7}{1\cdot3\cdot5\cdot7}$

33. Hallar un n-ésimo posible término para las sucesiones cuyos primeros 5 términos se indican y hallar el 6.°:

(*a*) $\frac{-1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{-5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{-9}{17}, \ldots$ (*b*) $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ (*c*) $\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{4}{5}, \ldots$

Sol. (*a*) $\frac{(-1)^n(2n-1)}{(3n+2)}$ (*b*) $\frac{1-(-1)^n}{2}$ (*c*) $\frac{(n+3)}{(n+5)}\cdot\frac{1-(-1)^n}{2}$

34. La *sucesión de Fibonacci* es la $\{u_n\}$ con $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ y $u_1 = 1$, $u_2 = 1$. (*a*) Hallar los primeros 6 términos. (*b*) Mostrar que el n-ésimo término está dado por $u_n = (a^n - b^n)/\sqrt{5}$ con $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.
Sol. (*a*) 1, 1, 2, 3, 5, 8

LIMITES DE SUCESIONES

35. Mediante la definición de límite, demostrar que:

(*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n}{3n+2} = \frac{-2}{3}$, (*b*) $\lim_{n\to\infty} 2^{-1/\sqrt{n}} = 1$, (*c*) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+1}{n^2} = \infty$, (*d*) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$.

36. Hallar el menor número natural N tal que $|(3n + 2)/(n - 1) - 3| < \epsilon$ para todo $n > N$ si (*a*) $\epsilon = 0{,}01$, (*b*) $\epsilon = 0{,}001$, (*c*) $\epsilon = 0{,}0001$. *Sol.* (*a*) 502, (*b*) 5002, (*c*) 50.002

37. Mediante la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} (2n - 1)/(3n + 4)$ no puede ser $\frac{1}{2}$.

38. Demostrar que no existe $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n n$.

39. Demostrar que si $\lim\limits_{n \to \infty} |u_n| = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. ¿Es cierta la recíproca?

40. Si $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$, demostrar (*a*) $\lim\limits_{n \to \infty} cu_n = cl$, donde c es una constante, (*b*) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n^2 = l^2$, (*c*) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n^p = l_p$ con p natural, (*d*) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{u^n} = \sqrt{l}$, $l \geqq 0$.

41. Dar una demostración directa de que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n/b_n = A/B$ si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = B \neq 0$.

42. Demostrar que (*a*) $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{1/n} = 1$, (*b*) $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{2}{3})^{1/n} = 1$, (*c*) $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{3}{4})^n = 0$.

43. Si $r > 1$, demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = \infty$, explicando con precisión el significado de este enunciado.

44. Si $|r| > 1$, demostrar que no existe $\lim\limits_{n \to \infty} r^n$.

45. Calcular los límites siguientes mediante los teoremas apropiados.

(*a*) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4 - 2n - 3n^2}{2n^2 + n}$ (*c*) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{3n^2 - 5n + 4}}{2n - 7}$ (*e*) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

(*b*) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[3]{\dfrac{(3 - \sqrt{n})(\sqrt{n} + 2)}{8n - 4}}$ (*d*) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$ (*f*) $\lim\limits_{n \to \infty} (2^n + 3^n)^{1/n}$

Sol. (*a*) $-3/2$, (*b*) $-1/2$, (*c*) $\sqrt{3}/2$, (*d*) -15, (*e*) $1/2$, (*f*) 3

SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

46. Demostrar que la sucesión de término n-ésimo $u_n = \sqrt{n}/(n + 1)$ (*a*) es monótona decreciente, (*b*) es minorada, (*c*) es mayorada, (*d*) tiene un límite.

47. Si $u_n = \dfrac{1}{1 + n} + \dfrac{1}{2 + n} + \dfrac{1}{3 + n} + \cdots + \dfrac{1}{n + n}$, demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ existe y está entre 0 y 1.

48. Si $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, $u_1 = 1$, demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

49. Si $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + p/u_n)$ con $p > 0$ y $u_1 > 0$, demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \sqrt{p}$.
Mostrar cómo se puede aplicar esto para determinar $\sqrt{2}$.

50. Si u_n es monótona creciente (o monótona decreciente) demostrar que S_n/n con $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, también es monótona creciente (o monótona decreciente).

EXTREMO SUPERIOR, EXTREMO INFERIOR; LIMITE SUPERIOR, LIMITE INFERIOR

51. Averiguar el extremo superior, el extremo inferior, el lim sup ($\overline{\lim}$), el lim inf ($\underline{\lim}$) de las sucesiones:

(*a*) $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, (-1)^n/(2n - 1), \ldots$ (*c*) $1, -3, 5, -7, \ldots, (-1)^{n-1}(2n - 1), \ldots$

(*b*) $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots, (-1)^{n+1}(n + 1)/(n + 2), \ldots$ (*d*) $1, 4, 1, 16, 1, 36, \ldots, n^{1 + (-1)^n}, \ldots$

Sol. (*a*) $\frac{1}{3}, -1, 0, 0$ (*b*) $1, -1, 1, -1$ (*c*) sin, sin, $+\infty, -\infty$ (*d*) sin, $1, +\infty, 1$

52. Demostrar que una sucesión acotada $\{u_n\}$ es convergente si, y solo si, $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n$.

SERIES

53. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ *Sol.* 2

54. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/5^n$. *Sol.* $\frac{1}{6}$

55. Demostrar que $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$. [Sug.: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$]

56. Demostrar que al multiplicar cada término de una serie por una constante no nula no se altera su convergencia o divergencia.

57. Demostrar que la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ldots$ diverge. [Sugerencia: Sea $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. Demuéstrese luego que $|S_{2n}-S_n| > \frac{1}{2}$, en contradicción con el criterio de convergencia de Cauchy.]

PROBLEMAS VARIOS

58. Si $a_n \leqq u_n \leqq b_n$ para todo $n > N$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

59. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y θ es independiente de n, demostrar que $\lim_{n\to\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) = 0$. ¿Es cierto esto si θ depende de n?

60. Sea $u_n = \frac{1}{2}\{1+(-1)^n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \frac{1}{2}$.

61. Demostrar que (*a*) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, (*b*) $\lim_{n\to\infty}(a+n)^{p/n} = 1$ con a y p constantes.

62. Si $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}/u_n| = |a| < 1$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

63. Si $|a| < 1$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$, con p constante y mayor que 0.

64. Demostrar que $\lim \frac{2^n n!}{n^n} = 0$.

65. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} 1/n = 1$.

66. Si $\{u_n\}$ es la sucesión de Fibonacci (Problema 34), demostrar que $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

67. Demostrar que la sucesión $u_n = (1+1/n)^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es monótona decreciente con límite e. [Sugerencia: Mostrar que $u_n/u_{n-1} \leqq 1$.]

68. Si $a_n \geqq b_n$ para todo $n > N$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, demostrar que $A \geqq B$.

69. Si $|u_n| \leqq |v_n|$ y $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

70. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = 0$.

71. Demostrar que $[a_n, b_n]$, siendo $a_n = (1+1/n)^n$ y $b_n = (1+1/n)^{n+1}$, es un encaje de intervalos que define el número e.

72. Demostrar que toda sucesión monótona acotada (creciente o decreciente) tiene un límite.

73. Verificar los valores de las siguientes fracciones continuas:

(*a*) $3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}+\frac{1}{2+}\cdots = \frac{1}{2}(3+\sqrt{15})$

(*b*) $a+\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\cdots = \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$

(*c*) $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots = \frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a}{b}}$

(*d*) $\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots = 1$

74. Expresar (*a*) 174/251, (*b*) $\sqrt{3}$, (*c*) $\sqrt{6}$, y (*d*) 3,14159 como fracción continua.

Sol. (*a*) $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$ (*c*) $2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots$

(*b*) $1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots$ (*d*) $3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{25+}\frac{1}{7+}\frac{1}{4}$

[Sugerencia: En (*b*) súmese y réstese el mayor entero menor que $\sqrt{3}$ (o sea, 1) para obtener

$$\sqrt{3} = 1+(\sqrt{3}-1) = 1+\frac{1}{1/(\sqrt{3}-1)} = 1+\frac{1}{(\sqrt{3}+1)/2}$$

Luego súmese y réstese el mayor entero contenido en $(\sqrt{3}+1)/2$ (o sea, 1) para obtener

$$(\sqrt{3}+1)/2 = 1+(\sqrt{3}-1)/2 = 1+\frac{1}{2/(\sqrt{3}-1)} = 1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

Luego súmese y réstese el mayor entero contenido en $\sqrt{3}+1$ (o sea, 2) para obtener

$$\sqrt{3}+1 = 2+(\sqrt{3}-1) = 2+\frac{1}{1/(\sqrt{3}-1)} = 2+\frac{1}{(\sqrt{3}+1)/2}$$

después de lo cual se presenta la repetición.]

75. Dada la fracción continua $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots$, $a_n>0$, cuyo n-ésimo cociente incompleto es P_n/Q_n, demostrar e ilustrar con ejemplos los siguientes enunciados:

(*a*) $P_n = a_nP_{n-1}+P_{n-2}$, $Q_n = a_nQ_{n-1}+Q_{n-2}$
(*b*) $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$
(*c*) Los cocientes completos sucesivos son alternativamente menores y mayores que la fracción continua.
(*d*) Los cocientes incompletos de orden impar son menores que la fracción, pero son crecientes; los cocientes incompletos de orden par son mayores que la fracción, pero son decrecientes.
(*e*) La fracción continua siempre converge.

76. (*a*) Demostrar que si P_n/Q_n y P_{n+1}/Q_{n+1} son dos cocientes incompletos sucesivos de la fracción continua del Problema 75, entonces $\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right| \leqq \frac{1}{a_{n+1}Q_n^2} \leqq \frac{1}{Q_n^2}$. (*b*) Hallar el primer cociente incompleto de $\sqrt{3}$ con dos cifras decimales exactas. *Sol.* (*b*) 26/15.

77. Sea $\{u_n\}$ una sucesión tal que $u_{n+2} = au_{n+1}+bu_n$ con a y b constantes, lo que se llama ecuación de diferencias de segundo orden para u_n. (*a*) Suponiendo que una solución tiene la forma $u_n = r^n$ con r constante, demostrar que r debe satisfacer la ecuación $r^2-ar-b=0$. (*b*) Utilizar (*a*) para mostrar que una solución de la ecuación de diferencias (una solución general) es $u_n = Ar_1^n+Br_2^n$ con A y B constantes arbitrarias y donde r_1 y r_2 son las dos soluciones de $r^2-ar-b=0$, supuestas diferentes. (*c*) En caso de que $r_1=r_2$ en (*b*) mostrar que una solución general es $u_n=(A+Bn)r_1^n$.

78. Resolver las siguientes ecuaciones de diferencias sujetas a las condiciones dadas: (*a*) $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, $u_1=1$, $u_2=1$ (comparar con el Prob. 34); (*b*) $u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n$, $u_1=3$, $u_2=5$; (*c*) $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$, $u_1=2$, $u_2=8$.
Sol. (*a*) Como en el Prob. 34, (*b*) $u_n=2(3)^{n-1}+(-1)^{n-1}$ (*c*) $u_n=n\cdot 2^n$

79. (*a*) Demostrar que el n-ésimo cociente incompleto de la fracción continua $1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$ es

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}\right\}$$

[Sugerencia: Aplicar Prob. 34.]

(*b*) Tomando límites para $n\to\infty$ en (*a*) hallar el valor de la fracción continua.

80. Hacer los Problemas 73(*a*)-(*d*) averiguando primero el n-ésimo cociente incompleto.

Capítulo 4

Derivadas

DEFINICION DE DERIVADA

Sea $f(x)$ definida en un punto x_0 de (a, b). Se define la derivada de $f(x)$ en $x = x_0$ como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

si existe dicho límite.

También se puede definir la derivada de otras maneras equivalentes, como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

Se dice que una función es *diferenciable* en un punto $x = x_0$ si tiene derivada en ese punto, esto es, si existe $f'(x_0)$. Si $f(x)$ es diferenciable en $x = x_0$ debe ser continua en ese punto. Pero la recíproca no es necesariamente cierta (Problemas 3 y 4).

DERIVADAS A LA DERECHA Y A LA IZQUIERDA

Se define la *derivada a la derecha* de $f(x)$ en $x = x_0$ como

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3}$$

si este límite existe. Nótese que en este caso $h(= \Delta x)$ solo toma valores positivos al tender a cero.

Análogamente, la *derivada a la izquierda* de $f(x)$ en $x = x_0$ es

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4}$$

si este límite existe. En este caso h toma solo valores negativos al tender a cero.

Una función $f(x)$ tiene derivada en $x = x_0$ si, y solo si, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

DIFERENCIABILIDAD EN UN INTERVALO

Si una función tiene derivada en todo punto de un intervalo, se dice *diferenciable en el intervalo*. En especial, si $f(x)$ se define en el intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$, o sea, $[a, b]$, entonces $f(x)$ es diferenciable en el intervalo si, y solo si, $f'(x_0)$ existe para todo x_0 tal que $a < x_0 < b$ y si $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ existen.

Si una función tiene derivada continua se dice que es *continuamente diferenciable*.

FUNCIONES CASIDIFERENCIALES

Se dice que una función es *casidiferenciable*, *diferenciable a trozos* o bien *lisa a trozos*, si en un intervalo $a \leqq x \leqq b$ es $f'(x)$ casicontinua. En la página 26 se da un ejemplo de una función casidiferenciable por su grafo.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Sea el grafo de $y = f(x)$ representado por la curva $APQB$ de la Fig. 4-1. El cociente de diferencias

$$\frac{QR}{PR} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\,\theta \tag{5}$$

es la *pendiente* de la *recta secante* que pasa por los puntos P y Q de la curva. Al tender $\Delta x \to 0$, esta secante tiende a volverse la recta tangente PS a la curva en el punto P. Luego

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{SR}{PR} = \operatorname{tg}\,\alpha \tag{6}$$

es la pendiente de la tangente a la curva en el punto P.

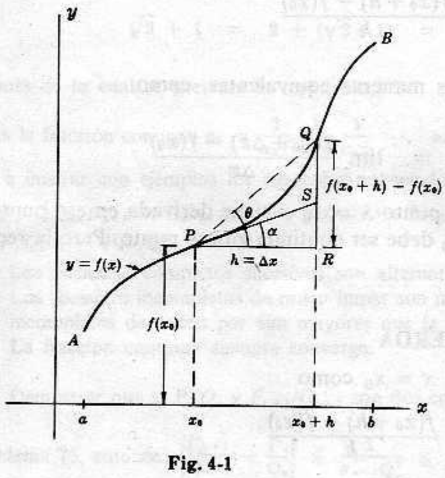


Fig. 4-1

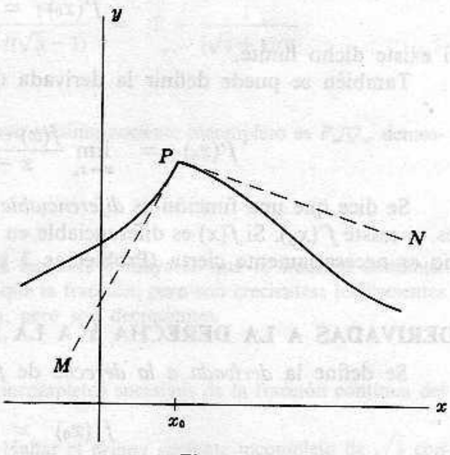


Fig. 4-2

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de $x = x_0$ con pendiente $f'(x_0)$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{7}$$

En la Fig. 4-2 se ve que una función puede ser continua en un punto y, sin embargo, no ser diferenciable en él. En este caso, hay dos rectas tangentes en P representadas por PM y PN. Las pendientes de estas tangentes son $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$, respectivamente, que aquí son distintas.

DIFERENCIALES

Sea $\Delta x = dx$ un incremento dado a x. Entonces,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{8}$$

se llama *incremento* de $y = f(x)$. Si $f(x)$ es continua y tiene primera derivada continua en un intervalo,

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x = f'(x)\,dx + \epsilon\,dx \tag{9}$$

con $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. La expresión

$$dy = f'(x)\,dx \tag{10}$$

se llama *diferencial de y o de f(x)* o *parte principal* de Δy. Nótese que $\Delta y \neq dy$ en general. Pero si $\Delta x = dx$ es pequeño, entonces dy es aproximadamente Δy (Problema 11). dx llamado *diferencial* de x, y dy no tienen que ser pequeños necesariamente.

En vista de las definiciones (*8*) y (*10*) se suele escribir

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{11}$$

Téngase presente que dx y dy *no* son los límites de Δx y Δy al tender $\Delta x \to 0$, pues estos límites son cero en tanto que dx y dy no son necesariamente cero. dy se determina a partir de dx por (*10*), o sea, que dy es una variable dependiente de dx para un x dado.

Geométricamente, dy se representa en la Fig. 4-1 para el valor particular $x = x_0$, por el segmento SR, en tanto que Δy se representa por QR.

REGLAS DE DERIVACION

Si f, g y h son funciones diferenciables,

1. $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \dfrac{d}{dx}f(x) + \dfrac{d}{dx}g(x) = f'(x) + g'(x)$

2. $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \dfrac{d}{dx}f(x) - \dfrac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}\{C f(x)\} = C\dfrac{d}{dx}f(x) = C f'(x)$ siendo C una constante

4. $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = f(x)\dfrac{d}{dx}g(x) + g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) - f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ si $g(x) \neq 0$

6. Si $y = f(u)$ con $u = g(x)$, es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = f'\{g(x)\}\,g'(x) \tag{12}$$

Asimismo, si $y = f(u)$ con $u = g(v)$ y $v = h(x)$, es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \tag{13}$$

Los resultados (*12*) y (*13*) suelen llamarse *reglas de derivación en cadena* de las funciones compuestas.

7. Si $y = f(x)$, es $x = f^{-1}(y)$; y dy/dx y dx/dy son tales que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \tag{14}$$

8. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{15}$$

Se pueden formular reglas parecidas para los diferenciales. Por ejemplo,

$$d\{f(x)+g(x)\} = d\,f(x) + d\,g(x) = f'(x)\,dx + g'(x)\,dx = \{f'(x)+g'(x)\}dx$$
$$d\{f(x)\,g(x)\} = f(x)\,dg(x) + g(x)\,df(x) = \{f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)\}dx$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

En lo que sigue se supone que u es una función diferenciable de x; si $u = x$, $du/dx = 1$. Las funciones recíprocas se definen de acuerdo con los valores principales dados en el Capítulo 2.

1. $\dfrac{d}{dx}(C) = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} u = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \operatorname{tg} u\dfrac{du}{dx}$
8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u\dfrac{du}{dx}$
9. $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{\log_a e}{u}\dfrac{du}{dx} \quad a>0,\ a\neq 1$
10. $\dfrac{d}{dx}\log_e u = \dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
11. $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
13. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
14. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg}^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
17. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} u = \pm\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} \quad \begin{cases} + \text{ si } u>1 \\ - \text{ si } u<-1 \end{cases}$
18. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} u = \mp\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} \quad \begin{cases} - \text{ si } u>1 \\ + \text{ si } u<-1 \end{cases}$
19. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\dfrac{du}{dx}$
20. $\dfrac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\dfrac{du}{dx}$
21. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh} u = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$
22. $\dfrac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{cosech}^2 u\dfrac{du}{dx}$
23. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\dfrac{du}{dx}$
24. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u\dfrac{du}{dx}$
25. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$
26. $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
27. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh}^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}, \quad |u|<1$
28. $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}, \quad |u|>1$
29. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
30. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosech}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

DERIVADAS SUPERIORES

Si $f(x)$ es diferenciable en un intervalo, su derivada $f'(x)$, y' o dy/dx con $y = f(x)$, puede ser también diferenciable en el intervalo y su derivada se denota por $f''(x)$, y'' o bien $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

De igual modo, si existe la n-ésima derivada de $f(x)$, se la denota $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ o bien $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, llamándose n *orden* de la derivada. Así, pues, las derivadas de primero, segundo, tercer, . . . orden son $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ...

El cálculo de las derivadas superiores no es más que la aplicación reiterada de las reglas de derivación dadas antes.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

1. Teorema de Rolle. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$ y si $f(a) = f(b) = 0$, existe un punto ξ de $]a, b[$ tal que $f'(\xi) = 0$.

2. Teorema del valor medio. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$ existe un punto ξ de $]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \qquad a < \xi < b \tag{16}$$

El teorema de Rolle es un caso especial de éste para $f(a) = f(b) = 0$.

El teorema (*16*) se puede escribir de varias maneras distintas: por ejemplo, si x y x_0 pertenecen a $]a, b[$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x \tag{17}$$

También se puede escribir (*16*) con $b = a + h$, en cuyo caso $\xi = a + \theta h$, con $0 < \theta < 1$.

3. Teorema del valor medio generalizado (Cauchy). Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en $]a, b[$, existe un punto ξ de $]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad a < \xi < b \tag{18}$$

suponiendo $g(a) \neq g(b)$ y $f'(x)$, $g'(x)$ no nulas ambas. Nótese que para el caso especial $g(x) = x$ resulta (*16*).

4. Teorema de Taylor. Si $f^{(n)}(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, existe un punto ξ de $]a, b[$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + R_n \tag{19}$$

donde R_n, llamado *resto*, puede escribirse:

Resto de Lagrange: $$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad a < \xi < b \tag{20}$$

Resto de Cauchy: $$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n(b-a)}{n!} \qquad a < \xi < b \tag{21}$$

Véanse Problemas 26, 81-84. En ambas formas los valores de ξ son en general diferentes.

El resultado (*19*) se puede escribir de varias otras maneras. Por ejemplo, si x y x_0 pertenecen a $]a, b[$, con la forma de Lagrange del resto R_n se tiene para ξ entre x_0 y x,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{22}$$

que es el polinomio de *Taylor con resto para* $f(x)$ y sirve para aproximar la función $f(x)$ mediante un polinomio, siendo R_n el término que da el *error de la aproximación*.

Si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ en (*19*) se obtiene una serie que se llama *serie de Taylor* de $f(x)$ en torno a $x = x_0$. Si $x_0 = 0$ la serie se llama de *Maclaurin*. Tales series, llamadas de *potencias*, convergen en general para todos los valores de x de un cierto intervalo, llamado *intervalo de convergencia*, y divergen para todo otro valor de x exterior a este intervalo (véase Capítulo 11 para mayores detalles).

Cuando se hable del teorema de Taylor, se supone que el resto tiene la forma de Lagrange si no se dice otra cosa.

DESARROLLOS DE TAYLOR

He aquí algunos desarrollos importantes. El resto R_n puede obtenerse en cada caso mediante *(20)* o *(21)*.

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

2. $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n$$

5. $$\operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + R_n$$

En 1-3, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ para todo x. En 4, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ para $-1 < x \leqq 1$. En 5, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ para $-1 \leqq x \leqq 1$. En el Capítulo 11 se estudia con más detalle estos desarrollos.

REGLAS DE L'HÔPITAL

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ y ambos A y B son nulos o ambos son infinitos, se dice que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma *indeterminada* del tipo 0/0 o bien ∞/∞, respectivamente, si bien tal terminología es inadecuada, pues en general no hay ninguna indeterminación. Los siguientes teoremas, llamados *reglas de L'Hôpital*, permiten calcular tales límites.

1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables en el intervalo $]a, b[$, excepto en un punto x_0 de este intervalo posiblemente, y si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{23}$$

siempre que pueda hallarse el segundo límite. En caso de que $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfagan las mismas condiciones que $f(x)$ y $g(x)$ el proceso se puede reiterar.

2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, vale también *(23)*.

Esto se puede generalizar a los casos en que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ y a los en que $x_0 = a$ o $x_0 = b$ cuando solo hay límites unilaterales tales como para $x \to a+$ o $x \to b-$.

También se pueden calcular límites de las formas *indeterminadas* $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞ e $\infty - \infty$ sustituyéndolos por límites equivalentes a los que sean aplicables las reglas anteriores (Problemas 33-36).

A veces el cálculo de tales límites se facilita por aplicación del teorema de Taylor, como en los Problemas 32 y 36.

APLICACIONES

1. **Máximos y mínimos.** Supóngase que en $x = x_0$, $f(x)$ satisface las condiciones

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2p-1)}(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2p)}(x_0) \neq 0 \tag{24}$$

para p natural (por lo general $p = 1$). Entonces,

(*a*) $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = x_0$ si $f^{(2p)}(x_0) < 0$
(*b*) $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$ si $f^{(2p)}(x_0) > 0$

Véase Problema 39. En la práctica, para hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$ para obtener los *puntos críticos* x_0 y luego se aplica (*24*) Gráficamente resulta la condición necesaria $f'(x_0) = 0$, pues en un máximo o mínimo relativo la tangente a $y = f(x)$ debe ser paralela al eje x.

2. **Razón de variación.** Se puede interpretar $dy/dx = f'(x)$ como la razón de variación de $y = f(x)$ con respecto a x. Si $f'(x_0) > 0$, entonces y es creciente en $x = x_0$; si $f'(x_0) < 0$, entonces y es decreciente en $x = x_0$.

3. **Velocidad y aceleración.** Si s es el *desplazamiento* instantáneo de una partícula a partir de un punto O sobre una recta en el tiempo t, entonces ds/dt es su *velocidad* instantánea y d^2s/dt^2 es su *aceleración* instantánea en el tiempo t.

Problemas resueltos

DERIVADAS

1. Sea $f(x) = \dfrac{3+x}{3-x}$, $x \neq 3$. Calcular $f'(2)$ con la definición.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{5+h}{1-h} - 5\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{6h}{1-h} = \lim_{h\to 0}\frac{6}{1-h} = 6$$

Nota: Aplicando reglas del cálculo elemental se tiene

$$f'(x) = \frac{(3-x)\dfrac{d}{dx}(3+x) - (3+x)\dfrac{d}{dx}(3-x)}{(3-x)^2} = \frac{(3-x)(1)-(3+x)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

en todo punto x en que exista la derivada. Haciendo $x = 2$ se encuentra $f'(2) = 6$. Si bien reglas semejantes son útiles a menudo, hay que aplicarlas con cuidado (véase Problema 5).

2. Sea $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Calcular $f'(5)$ con la definición.

$$f'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3} = \lim_{h\to 0}\frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} = \frac{1}{3}$$

Por las reglas del cálculo, es $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(2x-1)^{1/2} = \frac{1}{2}(2x-1)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}(2x-1) = (2x-1)^{-1/2}$. Luego $f'(5) = 9^{-1/2} = \frac{1}{3}$.

3. Si $f(x)$ tiene derivada en $x = x_0$, demostrar que $f(x)$ es continua en $x = x_0$.

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h, \qquad h \neq 0$$

Entonces. $$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

pues $f'(x)$ existe por hipótesis. Así que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \quad \text{sea} \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

lo que muestra que $f(x)$ es continua en $x = x_0$.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(*a*) ¿Es continua $f(x)$ en $x = 0$? (*b*) ¿Tiene derivada en $x = 0$?

(*a*) Por el Problema 22(*b*) del Capítulo 2, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(*b*) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h \operatorname{sen} 1/h - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{h}$

que no existe.

Este ejemplo muestra que una función, aun siendo continua en un punto, no tiene necesariamente derivada en ese punto, es decir, que la recíproca del teorema del Problema 3 no es necesariamente cierta.

Es posible construir funciones continuas en todo punto de un intervalo que no tiene derivada en ningún punto del mismo.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(*a*) ¿Es $f(x)$ diferenciable en $x_0 = 0$? (*b*) ¿Es $f'(x)$ continua en $x = 0$?

(*a*) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} 1/h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

según el Problema 13, Capítulo 2. $f(x)$ tiene, pues, derivada (es diferenciable) en $x = 0$ y su valor es 0.

(*b*) Por las reglas de derivación elementales, si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = x^2 \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) + \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)(2x) = -\cos \frac{1}{x} + 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(-\cos \dfrac{1}{x} + 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)$ no existe (pues $\lim\limits_{x \to 0} \cos 1/x$ no existe), $f'(x)$ no puede ser continua en $x = 0$ pese a que existe $f'(0)$.

Esto muestra que no se puede calcular $f'(0)$ en este caso simplemente calculando $f'(x)$ y haciendo luego $x = 0$, como es frecuente en los cursos elementales. Solamente cuando la derivada es *continua* en un punto da este procedimiento la respuesta correcta. Da la casualidad que esto sucede para la mayoría de las funciones que se presentan en el cálculo elemental.

6. Dar una definición con «ϵ, δ» de la derivada de $f(x)$ en $x = x_0$.

$f(x)$ tiene derivada $f'(x_0)$ en $x = x_0$ si, dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |h| < \delta$$

DERIVADAS A LA DERECHA Y A LA IZQUIERDA

7. Sea $f(x) = |x|$. (*a*) Calcular la derivada a la derecha de $f(x)$ en $x = 0$. (*b*) Calcular la derivada a la izquierda de $f(x)$ en $x = 0$. (*c*) ¿Tiene $f(x)$ derivada en $x = 0$? (*d*) Ilustrar las conclusiones de (*a*), (*b*) y (*c*) con un grafo.

(*a*) $$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

pues $|h| = h$ para $h > 0$.

(*b*) $$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

pues $|h| = -h$ para $h < 0$.

(c) No. La derivada en 0 no existe si son distintas las derivadas a la izquierda y a la derecha.

(d) El grafo se ve en la Figura adjunta 4-3. Nótese que las pendientes de las rectas $y = x$ y $y = -x$ son 1 y -1, respectivamente, y representan las derivadas a la derecha y a la izquierda en $x = 0$. Pero la derivada en $x = 0$ no existe.

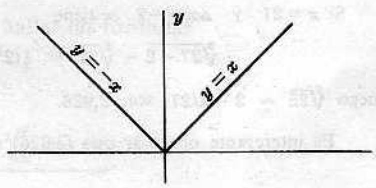


Fig. 4-3

$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$

8. Demostrar que $f(x) = x^2$ es diferenciable en $0 \leqq x \leqq 1$.

Sea x_0 un punto del intervalo: $0 < x_0 < 1$. Entonces,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

$x \to x_0$

$2x_0$

En el extremo $x = 0$,

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0+} h = 0$$

En el extremo $x = 1$,

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} (2+h) = 2$$

$f(x)$ es, pues, diferenciable en $0 \leqq x \leqq 1$. Se puede escribir $f'(x) = 2x$ para todo x de este intervalo. Es costumbre escribir $f'_+(0) = f'(0)$ y $f'_-(1) = f'(1)$ en este caso.

9. Hallar la ecuación de la tangente a $y = x^2$ en el punto en que (a) $x = 1/3$, (b) $x = 1$.

(a) Por el Problema 8, $f'(x_0) = 2x_0$, de modo que $f'(1/3) = 2/3$, con lo que la ecuación de la tangente es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{o} \quad y - \tfrac{1}{9} = \tfrac{2}{3}(x - \tfrac{1}{3}), \ \text{o sea,} \ y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9}$$

(b) Como en la parte (a), $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ o $y - 1 = 2(x - 1)$, es decir, $y = 2x - 1$.

DIFERENCIALES

10. Si $y = f(x) = x^3 - 6x$, hallar (a) Δy, (b) dy, (c) $\Delta y - dy$.

(a)
$$\begin{aligned} \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) &= \{(x+\Delta x)^3 - 6(x+\Delta x)\} - \{x^3 - 6x\} \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 6x - 6\Delta x - x^3 + 6x \\ &= (3x^2 - 6)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \end{aligned}$$

(b) dy = parte principal de $\Delta y = (3x^2 - 6)\Delta x = (3x^2 - 6)dx$, pues, por definición, $\Delta x = dx$.

Obsérvese que $f'(x) = 3x^2 - 6$ y $dy = (3x^2 - 6)dx$, o sea, $dy/dx = 3x^2 - 6$. Téngase siempre presente que dx y dy no son necesariamente pequeños.

(c) Por (a) y (b), $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \epsilon\Delta x$, donde $\epsilon = 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Nótese que $\epsilon \to 0$ al tender $\Delta x \to 0$, esto es, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \to 0$ con $\Delta x \to 0$. Luego $\Delta y - dy$ es un infinitesimal de orden superior al de Δx (véase Problema 92).

En caso de ser Δx pequeño, dy y Δy son aproximadamente iguales.

11. Calcular $\sqrt[3]{25}$ aproximadamente mediante diferenciales.

Si Δx es pequeño $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x$ aproximadamente.

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Entonces, $\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x} \approx \frac{1}{3}x^{-2/3}\,\Delta x$ (donde $\approx$ significa *aproximadamente igual a*).

Si $x = 27$ y $\Delta x = -2$, se tiene

$$\sqrt[3]{27-2} - \sqrt[3]{27} \approx \tfrac{1}{3}(27)^{-2/3}(-2), \quad \text{esto es} \quad \sqrt[3]{25} - 3 \approx -2/27$$

Luego $\sqrt[3]{25} \approx 3 - 2/27$ sea, 2,926.

Es interesante observar que $(2{,}926)^3 = 25{,}05$, o sea, que la aproximación es bastante buena.

REGLAS DE DERIVACION. DERIVACION DE FUNCIONES ESPECIALES

12. Demostrar la fórmula $\dfrac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = f(x)\dfrac{d}{dx}g(x) + g(x)\dfrac{d}{dx}f(x)$, suponiendo que f y g son diferenciables.

Por definición,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,\{g(x+\Delta x) - g(x)\} + g(x)\,\{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\left\{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right\} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x)\left\{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right\}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Otro método:

Sea $u = f(x)$, $v = g(x)$. Entonces, $\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x)$ y $\Delta v = g(x+\Delta x) - g(x)$, o sea, $f(x+\Delta x) = u + \Delta u$, $g(x+\Delta x) = v + \Delta v$. Así, pues

$$\frac{d}{dx}uv = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

pues $\Delta v \to 0$ con $\Delta x \to 0$ ya que v se supone diferenciable y, por tanto, continua.

13. Si $y = f(u)$, con $u = g(x)$, demostrar que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ suponiendo que f y g son diferenciables.

Si a x se da un incremento $\Delta x \neq 0$, u y y se incrementan en consecuencia en Δu y Δy, respectivamente, siendo

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u), \qquad \Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \tag{1}$$

Obsérvese que para $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta u \to 0$.

Si $\Delta u \neq 0$, escribiendo $\epsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} - \dfrac{dy}{du}$ se tiene que $\epsilon \to 0$ con $\Delta u \to 0$ y

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \epsilon\,\Delta u \tag{2}$$

Si $\Delta u = 0$ para valores de Δx, la (*1*) muestra que $\Delta y = 0$ para estos valores de Δx. Entonces se define $\epsilon = 0$.

Se deduce que en ambos casos, $\Delta u \neq 0$ o bien $\Delta u = 0$, se verifica (*2*). Dividiendo (*2*) por $\Delta x \neq 0$ y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{dy}{du}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{du}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\epsilon\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{3}$$

14. Dadas $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ y $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$, hallar las fórmulas
(a) $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$, (b) $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a)
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

(b) Si $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, es $x = \operatorname{sen} y$. Derivando con respecto a x,
$$1 = \cos y \frac{dy}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se ha supuesto aquí que el valor principal $-\pi/2 \leq \operatorname{sen}^{-1} x \leq \pi/2$, se elige de modo que $\cos y$ sea positivo y así poder escribir $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$ en vez de $\cos y = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$.

15. Obtener la fórmula $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, siendo u una función diferenciable de x.

Considérese $y = f(u) = \log_a u$. Por definición,
$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\log_a(u+\Delta u) - \log_a u}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{\Delta u} \log_a\left(\frac{u+\Delta u}{u}\right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{u} \log_a\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

Como el logaritmo es función continua, esto se puede escribir
$$\frac{1}{u}\log_a\left\{\lim_{\Delta u \to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right\} = \frac{1}{u}\log_a e$$
por el Problema 19, Capítulo 3, con $x = u/\Delta u$.

Entonces, por el Problema 13, $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}$.

16. Calcular dy/dx si (a) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$, (b) $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$.

(a) Derivando con respecto a x con y función de x (se dice entonces que y es *función implícita* de x, pues no se puede despejar x en función de y), se tiene
$$\frac{d}{dx}(xy^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(5) \quad \text{o bien} \quad (x)(3y^2y') + (y^3)(1) - 6x = (x)(y') + (y)(1) + 0$$
donde $y' = dy/dx$. Despejando, $y' = (6x - y^3 + y)/(3xy^2 - x)$.

(b) $\frac{d}{dx}(e^{xy}) + \frac{d}{dx}(y \ln x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x)$, $\quad e^{xy}(xy' + y) + \frac{y}{x} + (\ln x)y' = -2 \operatorname{sen} 2x$.

Despejando,
$$y' = -\frac{2x \operatorname{sen} 2x + xye^{xy} + y}{x^2e^{xy} + x \ln x}$$

17. Si $y = \cosh(x^2 - 3x + 1)$, hallar (a) dy/dx, (b) d^2y/dx^2.

(a) Sea $y = \cosh u$, con $u = x^2 - 3x + 1$. Luego $dy/du = \operatorname{senh} u$, $du/dx = 2x - 3$, y
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (\operatorname{senh} u)(2x-3) = (2x-3)\operatorname{senh}(x^2-3x+1)$$

(b)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{senh} u \frac{du}{dx}\right) = \operatorname{senh} u \frac{d^2u}{dx^2} + \cosh u \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$
$$= (\operatorname{senh} u)(2) + (\cosh u)(2x-3)^2 = 2\operatorname{senh}(x^2-3x+1) + (2x-3)^2\cosh(x^2-3x+1)$$

18. Si $x^2y + y^3 = 2$, hallar (*a*) y', (*b*) y'' en el punto 1, 1).

(*a*) Derivando con respecto a x, $x^2y' + 2xy + 3y^2y' = 0$ y

$$y' = \frac{-2xy}{x^2+3y^2} = -\frac{1}{2} \text{ en } (1,1)$$

(*b*) $$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2xy}{x^2+3y^2}\right) = -\frac{(x^2+3y^2)(2xy'+2y) - (2xy)(2x+6yy')}{(x^2+3y^2)^2}$$

Sustituyendo $x=1$, $y=1$ y $y' = -\frac{1}{2}$, se tiene $y'' = -\frac{3}{8}$.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

19. Demostrar el teorema de Rolle.

Caso 1.

$f(x) \equiv 0$ en $[a, b]$. Luego $f'(x) = 0$ para todo x de $]a, b[$.

Caso 2:

$f(x) \not\equiv 0$ en $[a, b]$. Como $f(x)$ es continua, hay puntos en que $f(x)$ alcanza su máximo y su mínimo, que se llamarán M y m, respectivamente (Problema 34, Capítulo 2).

Como $f(x) \not\equiv 0$, al menos uno de los M, m no es cero. Si, por ejemplo, $M \neq 0$ y es $f(\xi) = M$ (Fig. 4-4), entonces $f(\xi + h) \leqq f(\xi)$.

Si $h > 0$, luego $\dfrac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leqq 0$ y

$$(1) \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leqq 0$$

Si $h < 0$, luego $\dfrac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \geqq 0$ y

$$(2) \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \geqq 0$$

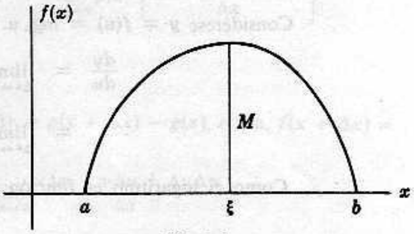


Fig. 4-4

Pero, por hipótesis, $f(x)$ tiene derivada en todo punto de $]a, b[$. Luego la derivada a la derecha (*1*) debe ser igual a la derivada a la izquierda (*2*), lo cual solo puede suceder si son ambas cero, en cuyo caso $f'(\xi) = 0$ como se afirmaba en el teorema.

Un razonamiento parecido vale para $M = 0$ y $m \neq 0$.

20. (*a*) Demostrar el teorema del valor medio. (*b*) Dar una interpretación geométrica de este teorema.

(*a*) Defínase $F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Entonces, $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$.

Además, si $f(x)$ satisface las condiciones de continuidad y diferenciabilidad del teorema de Rolle, $F(x)$ las satisface también.

Aplicando entonces el teorema de Rolle a la función $F(x)$,

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0, \quad a < \xi < b \qquad \text{o} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad a < \xi < b$$

(*b*) Sea ACB en la Fig. 4-5 el grafo de $f(x)$. Geométricamente, hay un punto ξ entre a y b en el que la tangente a la curva en C es paralela a la cuerda AB.

Pendiente de la tangente $= f'(\xi)$.

Pendiente de la cuerda $AB = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Luego ξ es tal que $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Es interesante observar que la función $F(x)$ en (*a*) representa la diferencia de las ordenadas de la curva ACB y de la cuerda AB en cada punto x de $]a, b[$.

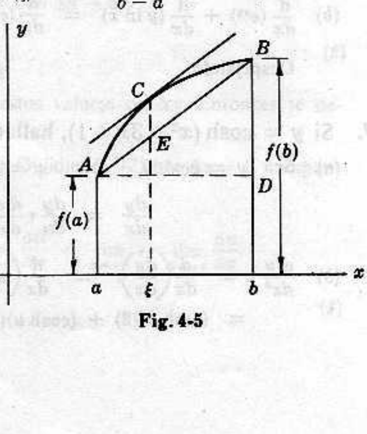


Fig. 4-5

21. Comprobar el teorema del valor medio para $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$, $a = 2$, $b = 5$.

$f(2) = 4$, $f(5) = 25$, $f'(\xi) = 4\xi - 7$. El teorema del valor medio dice que $4\xi - 7 = (25 - 4)/(5 - 2)$, o sea, $\xi = 3{,}5$ y como $2 < \xi < 5$, queda comprobado el teorema.

22. Si $f'(x) = 0$ en todo punto del intervalo $]a, b[$, demostrar que $f(x)$ es constante en el intervalo.

Sean $x_1 < x_2$ dos puntos de $]a, b[$. Por el teorema del valor medio, con $x_1 < \xi < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0$$

Así que $f(x_1) = f(x_2) =$ constante. De lo que se deduce que si dos funciones tienen la misma derivada en todo punto de $]a, b[$ las funciones difieren en una constante.

23. Si $f'(x) > 0$ en todo punto del intervalo $]a, b[$, demostrar que $f(x)$ es estrictamente creciente.

Sean $x_1 < x_2$ dos puntos de $]a, b[$. Por el teorema del valor medio, con $x_1 < \xi < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0$$

Luego $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$ y $f(x)$ es estrictamente creciente.

24. (*a*) Demostrar que $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$ si $a < b$.

(*b*) Mostrar que $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{25} < \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{4}{3} < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{6}$.

(*a*) Sea $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$. Como $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ y $f'(\xi) = 1/(1 + \xi^2)$, se tiene por el teorema del valor medio

$$\frac{\operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} a}{b - a} = \frac{1}{1+\xi^2} \qquad a < \xi < b$$

Puesto que $\xi > a$, $1/(1 + \xi^2) < 1/(1 + a^2)$. Como $\xi < b$, $1/(1 + \xi^2) > 1/(1 + b^2)$. Entonces,

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} a}{b - a} < \frac{1}{1+a^2}$$

y multiplicando por $b - a$ se tiene el resultado.

(*b*) Sean $b = 4/3$ y $a = 1$ en el resultado de la parte (*a*). Entonces, como $\operatorname{tg}^{-1} 1 = \pi/4$, se tiene

$$\frac{3}{25} < \operatorname{tg}^{-1}\frac{4}{3} - \operatorname{tg}^{-1} 1 < \frac{1}{6} \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{tg}^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

25. Demostrar el teorema generalizado del valor medio de Cauchy.

Considérese $G(x) = f(x) - f(a) - \alpha\{g(x) - g(a)\}$, con α constante. Entonces, $G(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, si $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones de continuidad y diferenciabilidad del teorema de Rolle y si $G(a) = G(b) = 0$. Las dos últimas condiciones se cumplen si $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Aplicando el teorema de Rolle, $G'(\xi) = 0$ para $a < \xi < b$, se tiene

$$f'(\xi) - \alpha g'(\xi) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \qquad a < \xi < b$$

como se afirmaba.

TEOREMA DE TAYLOR

26. Demostrar el teorema de Taylor con resto de Lagrange para el caso $n = 1$.

Hay que demostrar que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2 \qquad a < \xi < b \tag{1}$$

Sea la función

$$H(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - (b-x)^2 A \tag{2}$$

donde A es una constante indeterminada. $H(x)$ resulta justificada si se remplaza a por x en (*1*) y se pasan todos los términos al segundo miembro.

Por (*2*), $H(b) = 0$. Para tener $H(a) = 0$ hay que tomar

$$A = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} \tag{3}$$

Suponiendo que $f(x)$ y $f'(x)$ satisfacen las condiciones de continuidad y diferenciabilidad del teorema de Rolle, entonces $H(x)$ también satisface dichas condiciones; luego hay un valor ξ entre a y b tal que $H'(\xi) = 0$.

Por (*2*), $H'(x) = -f''(x)(b-x) + 2(b-x)A$ y $H'(\xi) = -f''(\xi)(b-\xi) + 2(b-\xi)A = 0$ para $A = f''(\xi)/2!$ (Porque $\xi \neq b$.) Sustituyendo este valor de A en (*3*) y despejando $f(b)$ se tiene el resultado (*1*).

Por parecido razonamiento se llega a generalizaciones para $n > 1$.

27. (*a*) Demostrar que

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (\cos a)(x-a) - \frac{(\operatorname{sen} a)(x-a)^2}{2!} - \frac{(\cos \xi)(x-a)^3}{3!}$$

con ξ entre a y x.

(*b*) Utilizar la parte (*a*) para calcular sen 51° y estimar el error cometido.

(*a*) Con $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, así que $f(a) = \operatorname{sen} a$, $f'(a) = \cos a$, $f''(a) = -\operatorname{sen} a$, $f'''(\xi) = -\cos \xi$.

Sustituyendo entonces en la fórmula de Taylor con $n = 2$, es decir,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(\xi)(x-a)^3}{3!}$$

con ξ entre a y x se tiene el resultado.

(*b*) Sean $x = 51° = 51\pi/180$ radianes y $a = 45° = 45\pi/180$ radianes, con lo que $x - a = \pi/30$ radianes.

De donde por la parte (*a*), por ser $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$,

$$\operatorname{sen} 51° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right) - \frac{(\sqrt{2}/2)(\pi/30)^2}{2!} - \frac{(\cos\xi)(\pi/30)^3}{3!}$$

$$\text{El valor absoluto del error es } = \left|\frac{-(\cos\xi)(\pi/30)^3}{3!}\right| < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3 < 0{,}0002$$

Con lo que la suma de los tres primeros términos, 0,777, tiene 3 decimales exactos.

Si se quiere mayor exactitud hay que tomar más términos de la fórmula de Taylor.

28. (*a*) Demostrar que $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$.

(*b*) Demostrar que e es irracional.

(*a*) Sea $f(x) = e^x$. Las derivadas de $f(x)$ son entonces todas iguales a e^x. Si $a = 0$, es $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ y $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$, con lo que el teorema de Taylor queda

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^\xi}{(n+1)!} \tag{1}$$

con ξ entre 0 y x.

Sea $R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$. Si $x > 0$, $|R_n| < \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$ (véase Prob. 30, Cap. 3).

Si $x < 0$, $|R_n| < \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, por tanto, si $x = 0$, $|R_n| = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$.

De modo que para todo x, o sea, para $-\infty < x < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$ y se puede escribir

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots \tag{2}$$

es decir, la serie converge para todo x.

(*b*) Según (*1*), haciendo $x = 1$ y suponiendo e racional e igual a la fracción irreducible p/q, siendo p y q enteros positivos, se tiene

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \qquad 0<\xi<1 \tag{3}$$

Eligiendo $n > q$ y multiplicando ambos miembros de (*1*) por $n!$

$$n!\,e = n!\frac{p}{q} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + 1 + \frac{e^{\xi}}{n+1} \tag{4}$$

Pero $e^{\xi}/(n+1)$ es un número entre 0 y 1, en tanto que todos los otros términos de (*4*) son enteros positivos. Suponiendo, pues, que e es racional, se llega a la contradicción de que hay un entero igual a un número que no es entero, y, por tanto, e es irracional.

REGLA DE L'HÔPITAL

29. Demostrar la regla de L'Hôpital para el caso de las «formas indeterminadas» (*a*) $0/0$, (*b*) ∞/∞.

(*a*) Se supondrá que $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables en $a < x < b$ y que $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$ con $a < x_0 < b$.

Por el teorema generalizado del valor medio de Cauchy (Problema (25),

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad x_0 < \xi < x$$

De donde

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

pues con $x \to x_0+$, $\xi \to x_0+$.

Con una modificación del procedimiento anterior puede establecerse el resultado para $x \to x_0-$, $x \to x_0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

(*b*) Se supone que $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables en $a < x < b$, y que $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+} g(x) = \infty$ con $a < x_0 < b$.

Si x_1 es tal que $a < x_0 < x < x_1 < b$, por el teorema generalizado del valor medio de Cauchy,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad x < \xi < x_1$$

De donde

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - f(x_1)/f(x)}{1 - g(x_1)/g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

por lo que se ve

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} \tag{1}$$

Suponiendo ahora que $\lim\limits_{x\to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ y escribiendo (*1*) en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right)\left(\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}\right) + L\left(\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}\right) \tag{2}$$

225169

Se puede tomar x_1 tan cercano a x_0 que $|f'(\xi)/g'(\xi) - L| < \epsilon$. Manteniendo x_1 fijo, se ve que

$$\lim_{x\to x_0+}\left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right) = 1 \qquad \text{pues} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

Tomando entonces el límite para $x \to x_0+$ en ambos miembros de (2) se ve que, como se afirmaba,

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to x_0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Con modificaciones apropiadas este procedimiento establece también el resultado si $x \to x_0-$, $x \to x_0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

30. Calcular (*a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$, (*b*) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$, (*c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}$,

todos los cuales tienen la «forma indeterminada» 0/0

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1} = 2$

(*b*) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi\operatorname{sen}\pi x}{2x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

Nota: Aquí se aplica dos veces la regla de L'Hôpital, ya que la primera aplicación da todavía la «forma indeterminada» 0/0 y las condiciones para la regla de L'Hôpital se siguen cumpliendo.

(*c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{(-3\operatorname{sen}3x)/(\cos 3x)}{(-2\operatorname{sen}2x)/(\cos 2x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{3\operatorname{sen}3x\cos 2x}{2\operatorname{sen}2x\cos 3x}$

$$= \left(\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0+}\frac{3\cos 2x}{2\cos 3x}\right) = \left(\lim_{x\to 0+}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Obsérvese que en el cuarto paso se ha aprovechado un teorema sobre límites para simplificar los cálculos que siguen.

31. Calcular (*a*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}$, (*b*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$, (*c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\operatorname{tg}2x}{\ln\operatorname{tg}3x}$,

todos los cuales tienen la «forma indeterminada» ∞/∞ o se pueden arreglar de modo que la tengan.

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x-1}{10x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

(*b*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

(*c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\operatorname{tg}2x}{\ln\operatorname{tg}3x} = \lim_{x\to 0+}\frac{(2\sec^2 2x)/(\operatorname{tg}2x)}{(3\sec^2 3x)/(\operatorname{tg}3x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\sec^2 2x\operatorname{tg}3x}{3\sec^2 3x\operatorname{tg}2x}$

$$= \left(\lim_{x\to 0+}\frac{2\sec^2 2x}{3\sec^2 3x}\right)\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}2x}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\lim_{x\to 0+}\frac{3\sec^2 3x}{2\sec^2 2x}\right) = 1$$

32. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{tg}^{-1}x}{x^2\ln(1+x)}$.

Si bien la regla de L'Hôpital es aplicable en este caso, su empleo se va volviendo más y más complicado. Pero por el teorema de Taylor, el límite se obtiene rápida y fácilmente. Se hace uso de los resultados (página 62)

$$\operatorname{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{Px^5}{5!}, \qquad \operatorname{tg}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + Qx^5, \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + Rx^3$$

El límite buscado es entonces

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(x - x^3/3! + Px^5) - (x - x^3/3 + Qx^5)}{x^3 - x^4/2 + Rx^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + (P-Q)x^2}{1 - x/2 + Rx^2} = \frac{1}{6}$$

33. Calcular $\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x$.

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

Este límite tiene la «forma indeterminada» $0 \cdot \infty$. En el segundo paso se altera la forma para que tome la de ∞/∞ y se pueda aplicar la regla de L'Hôpital.

34. Averiguar $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ y $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$, el límite toma la «forma indeterminada» 1^∞. Sea $F(x) = (\cos x)^{1/x^2}$. Entonces, $\ln F(x) = (\ln \cos x)/x^2$, al que se puede aplicar la regla de L'Hôpital. Se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\operatorname{sen} x)/(\cos x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{-2x \operatorname{sen} x + 2\cos x} = -\frac{1}{2}$$

Así que $\lim_{x\to 0} \ln F(x) = -\frac{1}{2}$. Pero como el logaritmo es función continua, $\lim_{x\to 0} \ln F(x) = \ln (\lim_{x\to 0} F(x))$. Luego

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} F(x)\right) = -\tfrac{1}{2} \text{ osea que } \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$$

35. Si $F(x) = (e^{3x} - 5x)^{1/x}$, hallar (*a*) $\lim_{x\to\infty} F(x)$ y (*b*) $\lim_{x\to 0} F(x)$.

Las formas indeterminadas en (*a*) y (*b*) son, respectivamente, ∞^0 y 1^∞.

Sea $G(x) = \ln F(x) = \dfrac{\ln (e^{3x} - 5x)}{x}$. Entonces, $\lim_{x\to\infty} G(x)$ y $\lim_{x\to 0} G(x)$ toman las formas indeterminadas ∞/∞ y $0/0$, respectivamente, y se aplica la regla de L'Hôpital. Se tiene entonces

(*a*) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (e^{3x} - 5x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x} - 5}{e^{3x} - 5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x} - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3$$

Así que como en el Problema 34. $\lim_{x\to\infty} (e^{3x} - 5x)^{1/x} = e^3$.

(*b*) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (e^{3x} - 5x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} - 5}{e^{3x} - 5x} = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} (e^{3x} - 5x)^{1/x} = e^{-2}$$

36. Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Este límite toma la forma $\infty - \infty$. Escribiendo el límite como $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$, se ve que es aplicable la regla de L'Hôpital, pero ello resulta muy laborioso. Hay dos métodos posibles.

Método 1: El límite se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}$$

pues $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \left(\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = 1$. Por aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\operatorname{sen} x\cos x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} 2x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen} 2x}{24x} = \lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24} = \frac{1}{3}$$

Método 2: Por el teorema de Taylor,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(x-x^3/6+Px^5)^2}{x^2(x-x^3/6+Px^5)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4/3 + \text{ términos en } x^6 \text{ y superiores}}{x^4 + \text{ términos en } x^6 \text{ y superiores}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/3 + \text{ términos en } x^2 \text{ y superiores}}{1 + \text{ términos en } x^2 \text{ y superiores}} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMAS VARIOS

37. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son diferenciables dos veces, hallar (*a*) dy/dx, (*b*) d^2y/dx^2.

(*a*) Denotando con tildes las derivadas con respecto a t se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{si } g'(t) \neq 0$$

(*b*) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{g'(t)}$$

$$= \frac{1}{g'(t)}\left\{\frac{g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2}\right\} = \frac{g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3} \quad \text{si } g'(t)\neq 0$$

38. Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Demostrar que (*a*) $f'(0)=0$, (*b*) $f''(0)=0$.

(*a*) $$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{e^{-1/h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{e^{-1/h^2}}{h}$$

Si $h = 1/u$, por la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{u\to\infty} ue^{-u^2} = \lim_{u\to\infty} u/e^{u^2} = \lim_{u\to\infty} 1/2ue^{u^2} = 0$$

Análogamente, cambiando $h\to 0+$ por $h\to 0-$ y $u\to\infty$ por $u\to-\infty$, se halla $f'_-(0)=0$. Así, pues, $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, y así $f'(0)=0$.

(*b*) $$f''_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{e^{-1/h^2}\cdot 2h^{-3}-0}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{2e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{u\to\infty}\frac{2u^4}{e^{u^2}} = 0$$

por aplicaciones sucesivas de dicha regla.

Análogamente, $f''_-(0)=0$ y entonces $f''(0)=0$.

En general, $f^{(n)}(0)=0$ para $n=1,2,3,\ldots$ (Problema 89).

39. Sea $f(x)$ tal que $f^{(IV)}(x)$ existe en $a\leqq x\leqq b$ y supóngase que $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$ con $a<x_0<b$. Demostrar que $f(x)$ tiene máximo o mínimo relativo en x_0 según que $f^{(IV)}(x_0)<0$ o $f^{(IV)}(x_0)>0$ respectivamente.

Por el teorema de Taylor, si ξ está entre x_0 y x,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \frac{f^{(IV)}(\xi)(x-x_0)^4}{4!}$$
$$= f(x_0) + \frac{f^{(IV)}(\xi)(x-x_0)^4}{4!}$$

Si $f^{(IV)}(x_0) > 0$, entonces para todo x en un entorno δ de x_0 se tiene $f(x) \geqq f(x_0)$, de modo que $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$. Análogamente, si $f^{(IV)}(x_0) < 0$, entonces para todo x en un entorno δ de x_0 se tiene $f(x) \leqq f(x_0)$, de modo que $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = x_0$.

40. ¿Cuál es la longitud de la escalera más grande que se puede pasar por la esquina de un corredor (dimensiones en la figura adjunta) llevándola paralelamente al piso?

En la Fig. 4-6 la longitud de la escalera AB es

$$L = a \sec\theta + b \operatorname{cosec}\theta$$

L es máximo cuando

$$dL/d\theta = a \sec\theta \operatorname{tg}\theta - b \operatorname{cosec}\theta \cot\theta = 0$$

o sea, si $\quad a \operatorname{sen}^3\theta = b\cos^3\theta \quad$ o $\quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt[3]{b/a}$

Luego $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}}$

con lo que $\quad L = a\sec\theta + b\operatorname{cosec}\theta = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

Geométricamente, es evidente que ésta es la máxima longitud, pero se puede demostrar analíticamente que $d^2L/d\theta^2$ para $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt[3]{b/a}$ es negativa (Problema 88).

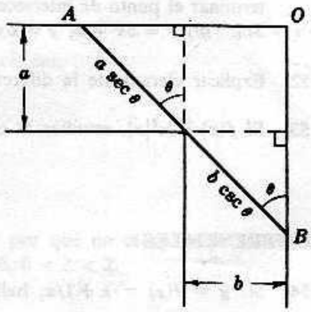


Fig. 4-6

Problemas propuestos

DERIVADAS

41. Mediante la definición, calcular las derivadas de las funciones siguientes en el punto que se indica:

(*a*) $(3x-4)/(2x+3)$, $x = 1$; (*b*) $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$, $x = 2$; (*c*) $\sqrt{x}$, $x = 4$; (*d*) $\sqrt[3]{6x-4}$, $x = 2$.

Sol. (*a*) 17/25, (*b*) 2, (*c*) $\frac{1}{4}$, (*d*) $\frac{1}{2}$

42. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Demostrar (*a*) que $f(x)$ es continua en $x = 0$, (*b*) que $f(x)$ tiene derivada en $x = 0$, (*c*) que $f'(x)$ es continua en $x = 0$.

43. Sea $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Averiguar si $f(x)$ (*a*) es continua en $x = 0$, (*b*) tiene derivada en $x = 0$.
Sol. (*a*) Sí; (*b*) Sí, 0

44. Dar otra demostración del teorema del Problema 3, página 63, mediante «definiciones ϵ, δ».

45. Si $f(x) = e^x$, mostrar que $f'(x_0) = e^{x_0}$ depende del resultado $\lim_{h\to 0} (e^h - 1)/h = 1$.

46. Mediante los resultados $\lim_{h\to 0} (\operatorname{sen} h)/h = 1$, $\lim_{h\to 0} (1 - \cos h)/h = 0$, demostrar que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x_0) = \cos x_0$.

DERIVADAS A LA DERECHA Y A LA IZQUIERDA

47. Sea $f(x) = x|x|$. (*a*) Calcular la derivada a la derecha de $f(x)$ en $x = 0$. (*b*) Calcular la derivada de $f(x)$ a la izquierda en $x = 0$. (*c*) ¿Tiene $f(x)$ derivada en $x = 0$? (*d*) Ilustrar la conclusión en (*a*), (*b*) y (*c*) con un grafo.
Sol. (*a*) 0; (*b*) 0; (*c*) Sí, 0

48. Estudiar la (*a*) continuidad y (*b*) diferenciabilidad de $f(x) = x^p$ sen $1/x$, $f(0) = 0$, siendo p un número positivo. ¿Qué ocurre si p es un número real cualquiera?

49. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & 0 \leqq x \leqq 2 \\ x^2-3, & 2 < x \leqq 4 \end{cases}$. Estudiar la (*a*) continuidad y (*b*) diferenciabilidad de $f(x)$ en $0 \leq x \leq 4$.

50. Demostrar que la derivada de $f(x)$ en $x = x_0$ existe si, y solo si, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

51. (*a*) Demostrar que $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6$ es diferenciable en $a \leqq x \leqq b$ con a y b constantes. (*b*) Hallar ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - x^2 + 5x - 6$ en $x = 0$ y $x = 1$. Ilustrar con un grafo. (*c*) Determinar el punto de intersección de las tangentes en (*b*). (*d*) Hallar $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, ...
Sol. (*b*) $y = 5x - 6$, $y = 6x - 7$; (*c*) $(1, -1)$; (*d*) $3x^2 - 2x + 5$, $6x - 2$, 6, 0, 0, 0, ...

52. Explicar claramente la diferencia entre (*a*) $f'_+(x_0)$ y $f'(x_0+)$, (*b*) $f'_-(x_0)$ y $f'(x_0-)$.

53. Si $f(x) = x^2|x|$, estudiar la existencia de derivadas sucesivas de $f(x)$ en $x = 0$.

DIFERENCIALES

54. Si $y = f(x) = x + 1/x$, hallar (*a*) Δy, (*b*) dy, (*c*) $\Delta y - dy$, (*d*) $(\Delta y - dy)/\Delta x$, (*e*) dy/dx.
Sol. (*a*) $\Delta x - \dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, (*b*) $\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\Delta x$, (*c*) $\dfrac{(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)}$, (*d*) $\dfrac{\Delta x}{x^2(x+\Delta x)}$, (*e*) $1 - \dfrac{1}{x^2}$. *Nota*: $\Delta x = dx$.

55. Si $f(x) = x^2 + 3x$, hallar (*a*) Δy, (*b*) dy, (*c*) $\Delta y/\Delta x$, (*d*) dy/dx y (*e*) $(\Delta y - dy)/\Delta x$, si $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}01$.
Sol. (*a*) 0,0501, (*b*) 0,05, (*c*) 5,01, (*d*) 5, (*e*) 0,01

56. Mediante diferenciales, calcular valores aproximados de (*a*) sen 31°, (*b*) ln (1,12), (*c*) $\sqrt[5]{36}$.
Sol. (*a*) 0,515, (*b*) 0,12, (*c*) 2,0125

57. Si $y =$ sen x, calcular (*a*) Δy, (*b*) dy. (*c*) Demostrar que $(\Delta y - dy)/\Delta x \to 0$ con $\Delta x \to 0$.

REGLAS DE DERIVACION Y FUNCIONES ESPECIALES

58. Demostrar (*a*) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \dfrac{d}{dx}f(x) + \dfrac{d}{dx}g(x)$, (*b*) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = \dfrac{d}{dx}f(x) - \dfrac{d}{dx}g(x)$,
(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$.

59. Calcular (*a*) $\dfrac{d}{dx}\{x^3 \ln(x^2 - 2x + 5)\}$ en $x = 1$, (*b*) $\dfrac{d}{dx}\{\text{sen}^2(3x + \pi/6)\}$ en $x = 0$.
Sol. (*a*) 3 ln 4, (*b*) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

60. Deducir las fórmulas: (*a*) $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \dfrac{du}{dx}$, $a > 0$, $a \neq 1$; (*b*) $\dfrac{d}{dx}\text{cosec}\,u = -\text{cosec}\,u \cot u \dfrac{du}{dx}$;
(*c*) $\dfrac{d}{dx}$ tgh u = sech$^2 u \dfrac{du}{dx}$ siendo u función diferenciable de x.

61. Calcular (*a*) $\dfrac{d}{dx}$ tg$^{-1} x$, (*b*) $\dfrac{d}{dx}$cosec$^{-1} x$, (*c*) $\dfrac{d}{dx}$ senh$^{-1} x$, (*d*) $\dfrac{d}{dx}$ coth$^{-1} x$, atendiendo el uso de valores principales.

62. Si $y = x^x$, calcular dy/dx. [Sugerencia: Tomar logaritmos antes de derivar.] *Sol.* $x^x(1 + \ln x)$.

63. Si $y = \{\ln(3x+2)\}^{\operatorname{sen}^{-1}(2x+0.5)}$, hallar dy/dx en $x = 0$. *Sol.* $\left(\dfrac{\pi}{4\ln 2} + \dfrac{2\ln\ln 2}{\sqrt{3}}\right)(\ln 2)^{\pi/6}$

64. Si $y = f(u)$, con $u = g(v)$ y $v = h(x)$, demostrar que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$ suponiendo que f, g y h son diferenciables.

65. Calcular (*a*) dy/dx y (*b*) d^2y/dx^2 si $xy - \ln y = 1$.
Sol. (*a*) $y^2/(1 - xy)$, (*b*) $(3y^3 - 2xy^4)/(1 - xy)^3$ siempre que $xy \neq 1$

66. Si $y = \operatorname{tg} x$, demostrar que $y''' = 2(1 + y^2)(1 + 3y^2)$.

67. Si $x = \sec t$ y $y = \operatorname{tg} t$, calcular (*a*) dy/dx, (*b*) d^2y/dx^2, (*c*) d^3y/dx^3, en $t = \pi/4$.
Sol. (*a*) $\sqrt{2}$, (*b*) -1, (*c*) $3\sqrt{2}$

68. Demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{d^2x}{dy^2}\Big/\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3$, precisando las condiciones de validez.

69. Establecer las fórmulas (*a*) 7, (*b*) 18 y (*c*) 27 de la página 60.

TEOREMAS DE VALOR MEDIO

70. Sea $f(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}$, $0 \leq x \leq 2$. (*a*) Contruir el grafo. (*b*) Explicar por qué no es aplicable el teorema de Rolle a esta función, o sea, que no existe un ξ para el que $f'(\xi) = 0$, $0 < \xi < 2$.

71. Verificar el teorema de Rolle para $f(x) = x^2(1 - x)^2$, $0 \leq x \leq 1$.

72. Demostrar que entre dos raíces reales de $e^x \operatorname{sen} x = 1$ hay al menos una raíz de $e^x \cos x = -1$. [Sugerencia: Aplicar el teorema de Rolle a la función $e^{-x} - \operatorname{sen} x$.]

73. (*a*) Si $0 < a < b$, demostrar que $(1 - a/b) < \ln b/a < (b/a - 1)$
(*b*) Utilizar el resultado de (*a*) para mostrar que $\frac{1}{6} < \ln 1{,}2 < \frac{1}{5}$.

74. Demostrar que $(\pi/6 + \sqrt{3}/15) < \operatorname{sen}^{-1} 0{,}6 < (\pi/6 + 1/8)$ mediante el teorema del valor medio.

75. Demostrar el enunciado del último párrafo del Problema 20(*b*).

76. (*a*) Si $f'(x) \leqq 0$ en todo punto de $]a, b[$ demostrar que $f(x)$ es monótona decreciente en $]a, b[$.
(*b*) ¿En qué condiciones es $f(x)$ estrictamente decreciente en $]a, b[$?

77. (*a*) Demostrar que $(\operatorname{sen} x)/x$ es estrictamente decreciente en $]0, \pi/2[$. (*b*) Demostrar que $0 \leqq \operatorname{sen} x \leqq 2x/\pi$ para $0 \leqq x \leqq \pi/2$.

78. (*a*) Demostrar que $\dfrac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{\cos a - \cos b} = \cot \xi$, con ξ entre a y b.
(*b*) Haciendo $a = 0$ y $b = x$ en (*a*), mostrar que $\xi = x/2$. ¿Es válido el resultado si $x < 0$?

TEOREMA DE TAYLOR

79. (*a*) Demostrar que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5(1+\xi)^5}$, $0 < \xi < x$. (*b*) Utilizar (*a*) para calcular $\ln(1{,}1)$ y estimar la exactitud alcanzada. *Sol.* (*b*) 0,09531 con un error menor que $2 \cdot 10^{-6}$

80. Calcular (*a*) $\cos 64°$, (*b*) $\operatorname{tg}^{-1} 0{,}2$, (*c*) $\cosh 1$, (*d*) $e^{-0{,}3}$ con 3 decimales.
Sol. (*a*) 0,438, (*b*) 0,197, (*c*) 1,543, (*d*) 0,741

81. Demostrar el teorema de Taylor con resto de Lagrange para (*a*) $n = 2$, (*b*) $n = 3$, (*c*) n = cualquier natural.

82. Deducir el resultado *(21)*, página 61, para la forma de Cauchy del resto.
[Sugerencia: Aplicar el teorema de Rolle a

$$H(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)(b-x)^2}{2!} - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^n}{n!} - (b-x)A$$

Siendo A tal que $H(a) = 0$.]

83. Demostrar que las formas de Lagrange y de Cauchy para el resto en el teorema de Taylor se pueden escribir en la forma

$$\frac{h^{n+1} f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!} \quad \text{y} \quad \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}$$

respectivamente, siendo $h = b - a$ y $0 < \theta < 1$.

84. Escribiendo $(b-x)^p A$ en vez del último término $(b-x)A$ en la sugerencia del Problema 82, obtener el teorema de Taylor con (*a*) resto de Lagrange, (*b*) resto de Cauchy, dando valores apropiados a p.

REGLA DE L'HÔPITAL

85. Calcular los limites siguientes:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (*e*) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln x$ (*i*) $\lim\limits_{x\to 0} (1/x - \csc x)$ (*m*) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)$

(*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x}$ (*f*) $\lim\limits_{x\to 0} (3^x - 2^x)/x$ (*j*) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ (*n*) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 1+} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \pi x/2$ (*g*) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - 3/x)^{2x}$ (*k*) $\lim\limits_{x\to 0} (1/x^2 - \cot^2 x)$ (*o*) $\lim\limits_{x\to\infty} (x + e^x + e^{2x})^{1/x}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-2x}$ (*h*) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 2x)^{1/3x}$ (*l*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x - \operatorname{sen}^{-1} x}{x(1 - \cos x)}$ (*p*) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

Sol. (*a*) $\frac{1}{6}$, (*b*) -1, (*c*) $-4/\pi$, (*d*) 0, (*e*) 0, (*f*) $\ln 3/2$, (*g*) e^{-6}, (*h*) 1, (*i*) 0, (*j*) 1, (*k*) $\frac{2}{3}$, (*l*) $\frac{1}{3}$, (*m*) 6, (*n*) $e^{-1/6}$, (*o*) e^2, (*p*) e

PROBLEMAS VARIOS

86. Demostrar que $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}^{-1} x} < 1$ si $0 < x < 1$.

87. Si $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, (*a*) demostrar que $\Delta\{\Delta f(x)\} = \Delta^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$, (*b*) deducir una expresión para $\Delta^n f(x)$ con n natural, (*c*) mostrar que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} = f^{(n)}(x)$ si este límite existe.

88. Completar la demostración analítica mencionada al final del Problema 40.

89. (*a*) Si $f(x)$ es la función del Problema 38, demostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. (*b*) Escribir la serie de Taylor con resto para esta función y demostrar que $f(x) = R_n$. (*c*) Explicar por qué R_n no tiende a cero con $n \to \infty$ y estudiar las consecuencias de este hecho.

90. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x) = x^x$, $x > 0$.
Sol. $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = e^{-1}$.

91. Una partícula se traslada con velocidades constantes v_1 y v_2 en los medios I y II, respectivamente (Fig. 4-7). Demostrar que para ir de P a Q en un tiempo mínimo debe seguir la trayectoria PAQ siendo A tal que

$$(\operatorname{sen} \theta_1)/(\operatorname{sen} \theta_2) = v_1/v_2$$

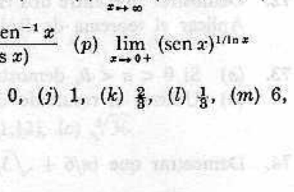


Fig. 4-7

92. Se dice que una variable α es *infinitesimal* si su límite es cero. Dados dos infinitesimales α y β, se dice que α es infinitesimal de *orden superior* (o del *mismo orden*) si $\lim \alpha/\beta = 0$ (o $\lim \alpha/\beta = l \neq 0$). Demostrar que para $x \to 0$, (*a*) $\operatorname{sen}^2 2x$ y $(1 - \cos 3x)$ son infinitesimales del mismo orden, (*b*) $(x^3 - \operatorname{sen}^3 x)$ es infinitesimal de orden superior al del $\{x - \ln(1 + x) - 1 + \cos x\}$.

93. ¿Por qué no se puede aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\operatorname{sen} x} = 0$? (véase Problema 91, Capítulo 2).

94. ¿Se puede emplear la regla de L'Hôpital para calcular el límite de la sucesión $u_n = n^3 e^{-n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$? Explicar.

95. Si a es una raíz aproximada de $f(x) = 0$, mostrar que, en general, se tiene mejor aproximación con $a - f(a)/f'(a)$ (*método de Newton*).
[Sugerencia: Supóngase que la raíz es $a + h$, de modo que $f(a + h) = 0$. Aplicar luego el hecho de que para h pequeño, $f(a + h) = f(a) + hf'(a)$ aproximadamente.]

96. Por aplicaciones sucesivas del Problema 95 obtener la raíz positiva de (*a*) $x^3 - 2x^2 - 2x - 7 = 0$. (*b*) $5 \operatorname{sen} x = 4x$ con 3 cifras decimales. *Sol.* (*a*) 3,268, (*b*) 1,131

97. Si D es el operador d/dx tal que $Dy \equiv dy/dx$ y $D^k y \equiv d^k y/dx^k$, demostrar la *fórmula de Leibnitz*

$$D^n(uv) = (D^n u)v + {}_nC_1(D^{n-1}u)(Dv) + {}_nC_2(D^{n-2}u)(D^2v) + \cdots + {}_nC_r(D^{n-r}u)(D^rv) + \cdots + uD^nv$$

siendo ${}_nC_r = \binom{n}{r}$ los coeficientes binómicos (Problema 95, Capítulo 1).

98. Demostrar que $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 \operatorname{sen} x) = \{x^2 - n(n-1)\} \operatorname{sen}(x + n\pi/2) - 2nx \cos(x + n\pi/2)$.

99. Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, pero $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, estudiar la marcha de $f(x)$ en el entorno de $x = x_0$. El punto x_0 se llama en este caso *punto de inflexión*.

100. Sea $f(x)$ dos veces diferenciable en $]a, b[$ y supóngase que $f'(a) = f'(b) = 0$. Demostrar que existe al menos un punto ξ en $]a, b[$ tal que $|f''(\xi)| \geq \dfrac{4}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a)\}$. Dar una interpretación física en que intervengan la velocidad y aceleración de una partícula.

Capítulo 5

Integrales

DEFINICION DE LA INTEGRAL DEFINIDA

El concepto de integral definida nace a menudo de la consideración del área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las ordenadas levantadas en $x = a$ y $x = b$ (Fig. 5-1). Pero la definición se puede dar sin apelar a la geometría.

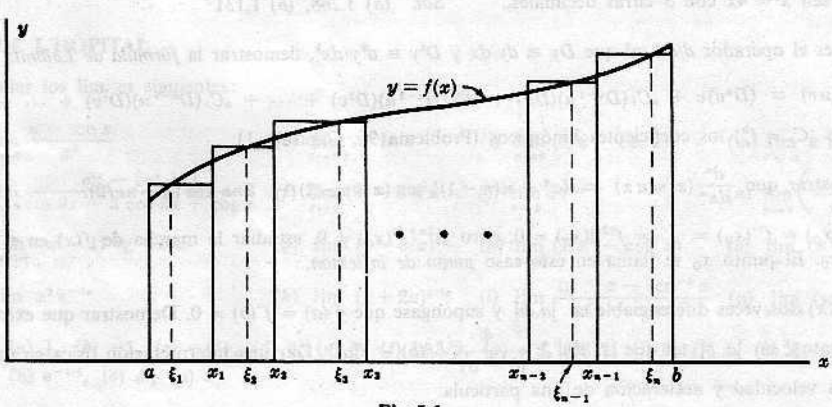


Fig. 5-1

Subdividido el intervalo $a \leqq x \leqq b$ en n subintervalos mediante los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ elegido arbitrariamente, escójanse en cada uno de los nuevos intervalos $]a, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $\ldots$, $]x_{n-1}, b[$ puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ arbitrariamente. Fórmese la suma

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_{n-1}) \tag{1}$$

Escribiendo $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, esto se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{2}$$

Geométricamente, esta suma representa el área total de los rectángulos de la figura anterior.

Se hace crecer ahora el número de subdivisiones n de tal modo que cada $\Delta x_k \to 0$. Si resulta entonces que la suma *(1)* o *(2)* tiende a un límite que no depende del modo de hacer la subdivisión, este límite se denota por

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

que se llama *integral definida de* $f(x)$ *entre* a *y* b. En este símbolo, $f(x)\,dx$ se suele llamar *integrando* y $[a, b]$ es el *intervalo de integración*. A veces se dice que a y b son los límites de integración, a límite inferior y b límite superior.

El límite (3) existe siempre que $f(x)$ sea continua (o bien casi continua) en $a \leqq x \leqq b$ (Problema 35). Si el límite existe se dice que $f(x)$ es integrable en sentido de Riemann o simplemente *integrable* en $[a, b]$.

Geométricamente, el valor de esta integral definida representa el área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las ordenadas en $x = a$ y $x = b$ solamente si $f(x) \geqq 0$. Si $f(x)$ es positiva y negativa dentro del intervalo, la integral definida representa la suma algebraica de las áreas por encima y por debajo del eje x, tomando como positivas las que quedan por encima del eje x y como negativas las otras.

MEDIDA NULA

Un conjunto de puntos del eje x se dice tener medida nula si la suma de las longitudes de los intervalos que incluyen todos los puntos se puede hacer arbitrariamente pequeña (menor que cualquier número positivo ϵ). Se puede demostrar (Problema 6) que todo conjunto enumerable de puntos del eje real tiene medida nula. En particular, el conjunto de los números racionales, que es enumerable (Problemas 17 y 59, Capítulo 1), tiene medida nula.

Un importante teorema en la teoría de la integración de Riemann es el siguiente:

Teorema. Si $f(x)$ es acotada en $[a, b]$, entonces una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$ es que el conjunto de discontinuidades de $f(x)$ tenga medida nula.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$,

1. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\int_a^b A\,f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$ donde A es una constante cualquiera

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

   partiendo de que $f(x)$ es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

6. Si en $a \leqq x \leqq b$, $m \leqq f(x) \leqq M$ donde m y M son constantes, es

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

7. Si en $a \leqq x \leqq b$, $f(x) \leqq g(x)$ es

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

8. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$ si $a < b$

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

1. **Primer teorema del valor medio.** Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ hay un punto ξ en $]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \tag{4}$$

2. Teorema generalizado del valor medio. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $g(x)$ no cambia de signo en el intervalo, entonces hay un punto ξ en $]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad = \quad f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \tag{5}$$

lo cual se reduce a *(4)* si $g(x) = 1$.

3. Segundo teorema del valor medio de Bonnet. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y si $g(x)$ es una función positiva monótona decreciente, hay entonces un punto ξ en $]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad = \quad g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \tag{6}$$

Si $g(x)$ es una función positiva monótona creciente, hay entonces un punto ξ en $]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad = \quad g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \tag{7}$$

4. Segundo teorema generalizado del valor medio. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y si $g(x)$ es monótona creciente o monótona decreciente y no necesariamente positiva siempre, como en 3, hay un punto ξ en $]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad = \quad g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx \;+\; g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \tag{8}$$

Este resultado sigue siendo válido si se remplaza continuidad por integrabilidad.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Si $f(x)$ es una función dada, entonces toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ se dice *integral indefinida* o *antiderivada* de $f(x)$, y mejor aún, *primitiva* de $f(x)$. Es claro que si $F(x)$ es una integral indefinida de $f(x)$, también lo es $F(x) + c$ con c constante cualquiera, pues $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$. Así, pues, todas las integrales definidas de una función difieren en una constante. Se utiliza a menudo el símbolo $\int f(x)\,dx$ para denotar una integral indefinida cualquiera de $f(x)$.

Ejemplo: Si $F'(x) = x^2$, entonces, $F(x) = \int x^2\,dx = x^3/3 + c$ es una integral indefinida o primitiva de x^2.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$ [es decir, $F(x)$ es una integral indefinida o primitiva de $f(x)$], entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \tag{9}$$

Este importante teorema permite calcular integrales definidas sin apelar directamente a la definición, siempre que se conozca una integral indefinida de una función.

Para calcular $\int_1^2 x^2\,dx$, observemos que $F'(x) = x^2$, $F(x) = x^3/3 + c$, entonces tenemos

$$\int_1^2 x^2\,dx \;=\; F(2) - F(1) \;=\; \left(\frac{2^3}{3} + c\right) - \left(\frac{1^3}{3} + c\right) \;=\; \frac{7}{3}$$

Como c desaparece de todos modos, es conveniente escribir más simplemente

$$\int_1^2 x^2\,dx \;=\; \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 \;=\; \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \;=\; \frac{7}{3}$$

INTEGRALES DEFINIDAS CON LIMITES DE INTEGRACION VARIABLES

Una integral indefinida se puede expresar como una integral definida con límite superior variable escribiendo

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + c \tag{10}$$

Resulta entonces que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) \tag{11}$$

Como una integral definida depende solamente de los límites de integración se puede emplear cualquier variable como símbolo de integración. Por ejemplo, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$, etc., razón por la cual suele decirse que la *variable es muda*. Se puede escribir (*11*), por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{12}$$

Esto se puede generalizar al caso en que sean variables los límites de integración inferior y superior. Así se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f\{v(x)\}\frac{dv}{dx} - f\{u(x)\}\frac{du}{dx} \tag{13}$$

Ejemplo: $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\frac{d(x^2)}{dx} - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{d(x)}{dx} = \frac{2\operatorname{sen} x^2 - \operatorname{sen} x}{x}$

CAMBIO DE VARIABLE DE INTEGRACION

Si no se encuentra inmediatamente una determinación de $\int f(x)\,dx$ expresada por funciones elementales, puede ser útil cambiar la variable de x a t por la transformación $x = g(t)$. El teorema fundamental que permite hacer esto se resume en el enunciado

$$\int f(x)\,dx = \int f\{g(t)\}\,g'(t)\,dt \tag{14}$$

donde una vez obtenida la integral indefinida del segundo miembro se remplaza t por su valor en función de x, esto es, por $t = g^{-1}(x)$, supuesta uniforme. Este resultado es análogo al de la regla de derivación en cadena (página 59).

El teorema correspondiente para integrales definidas es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\{g(t)\}\,g'(t)\,dt \tag{15}$$

con $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$, es decir, $\alpha = g^{-1}(a)$, $\beta = g^{-1}(b)$. Este resultado es ciertamente válido si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y si $g(t)$ es continua y tiene derivadas continuas en $\alpha \leqq t \leqq \beta$.

INTEGRALES DE FUNCIONES ESPECIALES

Los resultados siguientes se pueden demostrar derivando ambos lados, con lo cual se tendrá una identidad. En cada caso ha de agregarse una constante arbitraria c (omitida aquí).

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$	4. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert$	5. $\displaystyle\int \operatorname{tg} u\,du = \ln\lvert\sec u\rvert = -\ln\lvert\cos u\rvert$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$	6. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert$

7. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| = \ln|\operatorname{tg}(u/2 + \pi/4)|$

8. $\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| = \ln|\operatorname{tg} u/2|$

9. $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u$

10. $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u$

11. $\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u$

12. $\int \operatorname{cosec} u \cot u\, du = -\operatorname{cosec} u$

13. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} \quad a > 0,\ a \neq 1$

14. $\int e^u\, du = e^u$

15. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u$

16. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u$

17. $\int \operatorname{tgh} u\, du = \ln \cosh u$

18. $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u|$

19. $\int \operatorname{sech} u\, du = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} u)$

20. $\int \operatorname{cosech} u\, du = -\coth^{-1}(\cosh u)$

21. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tgh} u$

22. $\int \operatorname{cosech}^2 u\, du = -\coth u$

23. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du = -\operatorname{sech} u$

24. $\int \operatorname{cosech} u \coth u\, du = -\operatorname{cosech} u$

25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} \quad \text{o} \quad -\cos^{-1}\dfrac{u}{a}$

26. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|$

27. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{u}{a} \quad \text{o} \quad -\dfrac{1}{a}\cot^{-1}\dfrac{u}{a}$

28. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|$

29. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{u}{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}\right|$

30. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\cos^{-1}\dfrac{a}{u} \quad \text{o} \quad \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a}$

31. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|$

32. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a}$

33. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\, du = \dfrac{e^{au}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

34. $\int e^{au} \cos bu\, du = \dfrac{e^{au}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu)}{a^2 + b^2}$

METODOS ESPECIALES DE INTEGRACION

1. **Integración por partes.**

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \quad \text{o} \quad \int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

con $u = f(x)$ y $v = g(x)$. El resultado correspondiente para integrales definidas sobre el intervalo $[a, b]$ es ciertamente válido si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y tienen derivadas continuas en $[a, b]$. Problemas 18-20.

2. **Fracciones parciales.** Toda función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, siendo el grado de $P(x)$ inferior al de $Q(x)$, se puede escribir como suma de funciones racionales de la forma $\dfrac{A}{(ax+b)^r}$, $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}$ donde $r = 1, 2, 3, \ldots$ que siempre se pueden integrar por funciones elementales.

Ejemplo 1: $$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{(2x+5)^3} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{2x+5}$$

Ejemplo 2: $$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4} + \frac{E}{x-1}$$

Las constantes A, B, C, etc., se pueden hallar quitando denominadores e igualando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros de la ecuación o por métodos especiales (véase Problema 21).

3. **Funciones racionales de sen x y cos x** se pueden integrar siempre por funciones elementales haciendo la sustitución tg $x/2 = u$ (véase Problema 22).

4. **Hay métodos especiales** que dependen de la forma particular del integrando y que se emplean a menudo (Problemas 23 y 24).

INTEGRALES IMPROPIAS

Si el intervalo de integración $[a, b]$ no es finito o si $f(x)$ no está definida o no está acotada en uno o más puntos de $[a, b]$, se dice que la integral de $f(x)$ en este intervalo es una *integral impropia*. Empleando operaciones de límite adecuadas se pueden definir las integrales en casos semejantes.

Ejemplo 1: $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} x \Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} M = \pi/2$$

Ejemplo 2: $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} (2-2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

Ejemplo 3: $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+} \ln x\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} (-\ln\epsilon).$$

Como este límite no existe, se dice que la integral diverge (es decir, que no converge).

Para más ejemplos, véanse Problemas 33, 78-80. Mayor estudio de las integrales impropias en el Capítulo 12.

METODOS NUMERICOS DE CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Existen métodos numéricos para calcular integrales definidas cuando no se pueden hallar exactamente. Los siguientes métodos numéricos especiales se basan en subdividir el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales de longitud $\Delta x = b - a/n$. Para simplificar se denota $f(a + k\Delta x) = f(x_k)$ por y_k, con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. El símbolo $\approx$ significa «aproximadamente igual». En general, la aproximación mejora al aumentar n.

1. **Regla de los rectángulos.**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\,\{y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\} \quad \text{o} \quad \Delta x\,\{y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n\} \tag{16}$$

La interpretación geométrica es evidente en la figura de la página 80.

2. **Regla de los trapecios.**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\{y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\} \tag{17}$$

Que se obtiene tomando la media de las aproximaciones en (*16*). Geométricamente, equivale a sustituir la curva $y = f(x)$ por un conjunto de segmentos de recta que se aproximan a ella.

3. **Regla de Simpson.**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\} \tag{18}$$

Se obtiene dividiendo $[a, b]$ en un número par de intervalos iguales, (n es, pues, par) y aproximando $f(x)$ por una función de segundo grado que pasa por cada 3 puntos sucesivos correspondientes a x_0, x_1, x_2; x_1, x_2, x_3; $\ldots$; x_{n-2}, x_{n-1}, x_n. Geométricamente equivale a remplazar la curva $y = f(x)$ por un conjunto de arcos parabólicos que se aproximan a ella.

4. **El teorema de Taylor** puede utilizarse, a veces, como en el Problema 26.

APLICACIONES

El poder calcular la integral como límite de una suma permite resolver muchos problemas físicos o geométricos como determinación de áreas, volúmenes, longitudes de arcos, momentos de inercia, centros de masa, etc.

Problemas resueltos

DEFINICION DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Puesto que $f(x)$ es continua, el límite existe independientemente del modo de subdivisión (Problema 35). Dividiendo $[a, b]$ en n partes iguales de longitud $\Delta x = (b-a)/n$ (Fig. 5-1, pág. 80), sea $\xi_k = a + k(b-a)/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Expresar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ como integral definida.

Sean $a = 0$, $b = 1$ en el Problema 1. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

3. (*a*) Expresar $\int_0^1 x^2\,dx$ como límite de una suma y utilícese el resultado para calcular la integral definida dada. (*b*) Interpretar el resultado geométricamente.

(*a*) Si $f(x) = x^2$, es $f(k/n) = (k/n)^2 = k^2/n^2$. Así que por el Problema 2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \int_0^1 x^2\,dx$$

Lo que se puede escribir, por el Problema 29 del Capítulo 1.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} = \frac{1}{3}$$

que es el límite pedido.

Nota: Aplicando el teorema fundamental del cálculo se observa que $\int_0^1 x^2\,dx = (x^3/3)|_0^1 = 1^3/3 - 0^3/3 = 1/3$.

(*b*) El área encerrada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 1$ es igual a $\frac{1}{3}$.

4. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right\}$.

El límite se puede escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

aplicando el Problema 2 y el teorema fundamental del cálculo.

5. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\operatorname{sen}\frac{t}{n} + \operatorname{sen}\frac{2t}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)t}{n}\right\} = \frac{1-\cos t}{t}$.

Sean $a=0$, $b=t$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el Problema 1. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{kt}{n} = \int_0^t \operatorname{sen} x\, dx = 1-\cos t$$

y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}\frac{kt}{n} = \frac{1-\cos t}{t}$$

aplicando $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{n} = 0$.

MEDIDA NULA

6. Demostrar que un conjunto de puntos enumerable tiene medida nula.

Denotando el conjunto de puntos por $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ y suponiendo los puntos encerrados, respectivamente, por intervalos de longitudes menores que $\epsilon/2, \epsilon/4, \epsilon/8, \epsilon/16, \ldots$, con ϵ positivo, la suma de las longitudes de estos intervalos es menor que $\epsilon/2 + \epsilon/4 + \epsilon/8 + \cdots = \epsilon$ (con $a = \epsilon/2$ y $r = \frac{1}{2}$ en el Problema 25(*a*) del Capítulo 3), lo que prueba que el conjunto tiene medida nula.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

7. (*a*) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $m \leqq f(x) \leqq M$, siendo m y M constantes, demostrar que

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

(*b*) Interpretar el resultado de (*a*) geométricamente.

(*a*) Se tiene

$$m\,\Delta x_k \leqq f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqq M\,\Delta x_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Sumando de $k = 1$ a n y por ser

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \cdots + (b - x_{n-1}) = b - a$$

se sigue que

$$m(b-a) \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqq M(b-a)$$

Pasando al límite para $n \to \infty$ y cada $\Delta x_k \to 0$, se tiene el resultado.

(*b*) Suponiendo $f(x) \geqq 0$ y continua en $[a, b]$ el grafo de la Fig. 5-2 adjunta muestra que geométricamente

Area $ABCD \leqq$ Area bajo $y = f(x) \leqq$ Area $ABEF$

esto es,

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a)$$

Quitando la restricción $f(x) \geqq 0$ se puede dar una interpretación semejante. El resultado es válido también si $f(x)$ es casicontinua en $[a, b]$.

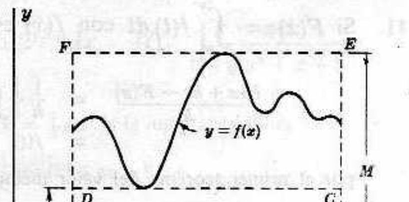


Fig. 5-2

8. Demostrar que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$ si $a < b$.

Por la desigualdad 2, página 3,

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \leqq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)\,\Delta x_k| = \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,\Delta x_k$$

Pasando al límite para $n \to \infty$ y cada $\Delta x_k \to 0$, se tiene el resultado.

9. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{x^2+n^2}\,dx = 0$.

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \leqq \int_0^{2\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} nx}{x^2+n^2}\right| dx \leqq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{n^2} = \frac{2\pi}{n^2}$$

Así que $\lim_{n\to\infty} \left|\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{x^2+n^2}\,dx\right| = 0$, y se tiene el resultado buscado.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

10. (*a*) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, demostrar que existe un punto ξ en $]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

(*b*) Interpretar geométricamente el resultado de (*a*).

(*a*) Como $f(x)$ es continua en $[a, b]$ se pueden hallar constantes m y M tales que $m \leqq f(x) \leqq M$. Entonces, por el Problema 7,

$$m \leqq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqq M$$

Como $f(x)$ es continua, toma todos los valores entre m y M (Capítulo 2, Problemas 34, 93). Y habrá un valor ξ tal que

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \qquad a < \xi < b$$

De donde multiplicando por $b - a$ se tiene el resultado pedido.

(*b*) Si $f(x) \geqq 0$ con grafo como el de la figura del Problema 7(*b*), se puede interpretar $\int_a^b f(x)\,dx$ como el área rayada bajo la curva $y = f(x)$. Geométricamente, esta área debe igualar la de un rectángulo de base $b - a$ y altura $f(\xi)$ para algún ξ entre a y b.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

11. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ con $f(x)$ es continua en $[a, b]$, demostrar que $F'(x) = f(x)$.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$= f(\xi) \qquad \xi \text{ entre } x \text{ y } x+h$$

por el primer teorema del valor medio para integrales (Problema 10).

Entonces, si x es un punto interior a $[a, b]$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

puesto que f es continua.

Si $x = a$ o $x = b$, se utilizan los límites a la derecha o a la izquierda, respectivamente, y el resultado sigue siendo válido también en estos casos.

12. Demostrar el teorema fundamental del cálculo integral.

Por el Problema 11, si $F(x)$ es una función *cualquiera* cuya derivada es $f(x)$, se puede escribir

$$F(x) \quad = \quad \int_a^x f(t)\,dt \; + \; c$$

siendo c una constante (véase última línea del Problema 22, Capítulo 4).

Como $F(a) = c$, se deduce que $F(b) \; = \; \int_a^b f(t)\,dt + F(a) \quad$ o $\quad \int_a^b f(t)\,dt \; = \; F(b) - F(a)$.

13. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, demostrar que $F(x) \; = \; \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$.

Si x es un punto interior del $[a, b]$, entonces, como en el Problema 11,

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) - F(x) \;=\; \lim_{h\to 0} h\,f(\xi) \;=\; 0$$

y $F(x)$ es continua.

Si $x = a$ y $x = b$, se utilizan los límites a la derecha y a la izquierda, respectivamente, para demostrar que $F(x)$ es continua en $x = a$ y $x = b$.

Otro método:

Por el Problema 11 y el Problema 3, Capítulo 4, se sigue que $F'(x)$ existe y que entonces $F(x)$ debe ser continua.

CAMBIO DE VARIABLES Y METODOS ESPECIALES DE INTEGRACION

14. Demostrar el resultado (*14*), página 83, para el cambio de variable de integración.

Sean $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \quad$ y $\quad G(t) = \int_\alpha^t f\{g(t)\}g'(t)\,dt$, $\quad$ como $x = g(t)$.

Luego $dF = f(x)\,dx$, $dG = f\{g(t)\}g'(t)\,dt$.

Como $dx = g'(t)\,dt$, se sigue que $f(x)\,dx = f\{g(t)\}g'(t)\,dt$ de modo que $dF(x) = dG(t)$, de donde $F(x) = G(t) + c$.

Ahora cuando $x = a$, $t = \alpha$ o $F(a) = G(\alpha) + c$. Pero como $F(a) = G(\alpha) = 0$, de modo que $c = 0$. Luego $F(x) = G(t)$. Como $x = b$ con $t = \beta$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_\alpha^\beta f\{g(t)\}\,g'(t)\,dt$$

como se buscaba.

15. Calcular

(*a*) $\displaystyle\int (x+2)\,\text{sen}\,(x^2+4x-6)\,dx$ $\qquad$ (*c*) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$ $\qquad$ (*e*) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\,\text{sen}^{-1}\,x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int \frac{\cot(\ln x)}{x}\,dx$ $\qquad$ (*d*) $\displaystyle\int 2^{-x}\;\text{tgh}\;2^{1-x}\,dx$ $\qquad$ (*f*) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(*a*) **Método 1:**

Sea $x^2 + 4x - 6 = u$. Luego $(2x+4)\,dx = du$, $(x+2)\,dx = \frac{1}{2}\,du$ y la integral es ahora

$$\frac{1}{2}\int \text{sen}\,u\,du \;=\; -\frac{1}{2}\cos u + c \;=\; -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6) + c$$

Método 2:

$$\int (x+2)\,\text{sen}\,(x^2+4x-6)\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int \text{sen}\,(x^2+4x-6)\,d(x^2+4x-6) \;=\; -\tfrac{1}{2}\cos(x^2+4x-6) + c$$

(*b*) Con $\ln x = u$, es $(dx)/x = du$ y la integral se convierte en

$$\int \cot u\,du \;=\; \ln|\text{sen}\,u| + c \;=\; \ln|\text{sen}\,(\ln x)| + c$$

(*c*) **Método 1:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25/4-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

Haciendo $x-\frac{1}{2}=u$, se convierte en $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{25/4-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{5/2}+c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)+c.$

$$\text{Luego } \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^{-1} 0.2 - \operatorname{sen}^{-1} 0.6$$

Método 2:

Sea $x-\frac{1}{2}=u$ como en el Método 1. Para $x=-1$, $u=-\frac{3}{2}$; y para $x=1$, $u=\frac{1}{2}$. De modo que por el Problema 14.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{25/4-(x-\frac{1}{2})^2}} = \int_{-3/2}^{1/2} \frac{du}{\sqrt{25/4-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{5/2}\Big|_{-3/2}^{1/2}$$

$$= \operatorname{sen}^{-1} 0.2 + \operatorname{sen}^{-1} 0.6$$

(*d*) Sea $2^{1-x}=u$. Luego $-2^{1-x}(\ln 2)\,dx = du$ y $2^{-x}dx = -\dfrac{du}{2\ln 2}$, con lo que la integral es

$$-\frac{1}{2\ln 2}\int \operatorname{tgh} u\,du = -\frac{1}{2\ln 2}\ln\cosh 2^{1-x} + c$$

(*e*) Sea $\operatorname{sen}^{-1}x^2 = u$. Luego $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,2x\,dx = \dfrac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ y la integral es entonces

$$\tfrac{1}{2}\int u\,du = \tfrac{1}{4}u^2 + c = \tfrac{1}{4}(\operatorname{sen}^{-1}x^2)^2 + c$$

$$\text{Así, pues, } \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x\operatorname{sen}^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \tfrac{1}{4}(\operatorname{sen}^{-1}x^2)^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{2})^2 = \frac{\pi^2}{144}.$$

(*f*)
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+x+1)^{-1/2}\,d(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \tfrac{1}{2}\ln\left|x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}\right| + c$$

16. Mostrar que $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}} = \frac{1}{6}$.

Escríbase la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{[(x-1)^2+3]^{3/2}}$. Con $x-1=\sqrt{3}\ \operatorname{tg} u$, $dx=\sqrt{3}\sec^2 u\,du$. Para $x=1$, $u=\operatorname{tg}^{-1}0=0$; para $x=2$, $u=\operatorname{tg}^{-1}1/\sqrt{3}=\pi/6$. La integral será entonces

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}\sec^2 u\,du}{[3+3\operatorname{tg}^2 u]^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}\sec^2 u\,du}{[3\sec^2 u]^{3/2}} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}\cos u\,du = \frac{1}{3}\operatorname{sen} u\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{6}.$$

17. Determinar $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.

Sea $\ln x = y$, $(dx)/x = dy$. Si $x=e$, $y=1$; si $x=e^2$, $y=2$. Así la integral se convierte en la

$$\int_1^2 \frac{dy}{y^3} = \frac{y^{-2}}{-2}\Big|_1^2 = \frac{3}{8}$$

18. Hallar $\int x^n \ln x \, dx$ si (a) $n \neq -1$, (b) $n = -1$.

(a) Integrando por partes, sean $u = \ln x$, $dv = x^n\,dx$, con lo que $du = (dx)/x$, $v = x^{n+1}/(n+1)$. Luego

$$\int x^n \ln x\,dx \;=\; \int u\,dv \;=\; uv - \int v\,du \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{dx}{x}$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

(b) $\int x^{-1}\ln x\,dx \;=\; \int \ln x\, d(\ln x) \;=\; \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.$

19. Hallar $\int 3^{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

Sea $\sqrt{2x+1} = y$, $2x+1 = y^2$. Entonces $dx = y\,dy$ y la integral se vuelve $\int 3^y \cdot y\,dy$. Integrando por partes, sean $u = y$, $dv = 3^y\,dy$; luego $du = dy$, $v = 3^y/(\ln 3)$, y se tiene

$$\int 3^y\cdot y\,dy \;=\; \int u\,dv \;=\; uv - \int v\,du \;=\; \frac{y\cdot 3^y}{\ln 3} - \int\frac{3^y}{\ln 3}\,dy \;=\; \frac{y\cdot 3^y}{\ln 3} - \frac{3^y}{(\ln 3)^2} + c$$

20. Hallar $\int_0^1 x\ln(x+3)\,dx$.

Con $u = \ln(x+3)$, $dv = x\,dx$. Luego $du = \dfrac{dx}{x+3}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. De modo que integrando por partes,

$$\int x\ln(x+3)\,dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{x+3} \;=\; \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int\left(x - 3 + \frac{9}{x+3}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln(x+3)\right\} + c$$

Luego
$$\int_0^1 x\ln(x+3)\,dx \;=\; \frac{5}{4} - 4\ln 4 + \frac{9}{2}\ln 3$$

21. Hallar la $\int \dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx$.

Por *fracciones parciales*, sea $\dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{2x+5}$.

Método 1:

Para determinar las constantes A y B, multiplíquense ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$6 - x \;=\; A(2x+5) + B(x-3) \qquad \text{o} \qquad 6 - x \;=\; 5A - 3B + (2A+B)x \tag{1}$$

Como ésta es una identidad, $5A - 3B = 6$, $2A + B = -1$ y $A = 3/11$, $B = -17/11$. Entonces,

$$\int\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx \;=\; \int\frac{3/11}{x-3}\,dx + \int\frac{-17/11}{2x+5}\,dx \;=\; \frac{3}{11}\ln|x-3| - \frac{17}{22}\ln|2x+5| + c$$

Método 2:

Dense a x valores apropiados en la identidad (*1*). Por ejemplo, haciendo $x = 3$ y $x = -5/2$ en (*1*), se tiene inmediatamente $A = 3/11$, $B = -17/11$.

22. Hallar $\int \dfrac{dx}{5 + 3\cos x}$ empleando la sustitución $\operatorname{tg} x/2 = u$.

En la Fig. 5-3 es

$$\operatorname{sen} x/2 = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \cos x/2 = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

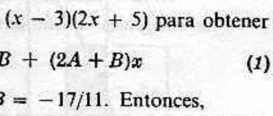


Fig. 5-3

Entonces. $\cos x = \cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

Y $du = \frac{1}{2}\sec^2 x/2\, dx$ o $dx = 2\cos^2 x/2\, du = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$.

Así que la integral se convierte en $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1} u/2 + c = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x/2\right) + c.$

23. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Sea $x = \pi - y$. Entonces

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\operatorname{sen} y}{1+\cos^2 y}\,dy = \pi\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{1+\cos^2 y}\,dy - \int_0^{\pi}\frac{y \operatorname{sen} y}{1+\cos^2 y}\,dy$$

$$= -\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos y)}{1+\cos^2 y} - I = -\pi\operatorname{tg}^{-1}(\cos y)\Big|_0^{\pi} - I = \pi^2/2 - I$$

o sea, $I = \pi^2/2 - I$ o $I = \pi^2/4$.

24. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Haciendo $x = \pi/2 - y$, se tiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y}+\sqrt{\operatorname{sen} y}}\,dy = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

Luego

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{\cos x}}\,dx + \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

de donde $2I = \pi/2$ e $I = \pi/4$.

El mismo método se puede aplicar para demostrar que para todo valor real de m,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^m x}{\operatorname{sen}^m x + \cos^m x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

(Problema 94).

Nota: Este problema y el 23 muestran que algunas integrales definidas se pueden calcular sin hallar antes las integrales indefinidas correspondientes.

METODOS NUMERICOS PARA CALCULAR INTEGRALES DEFINIDAS

25. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aproximadamente, mediante (*a*) la regla de los trapecios, (*b*) la regla de Simpson, dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en $n = 4$ partes iguales.

Sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Con la notación de la página 85, se tiene $\Delta x = (b - a)/n = (1 - 0)/4 = 0{,}25$. Conservando entonces 4 decimales, se tiene: $y_0 = f(0) = 1{,}0000$, $y_1 = f(0{,}25) = 0{,}9412$, $y_2 = f(0{,}50) = 0{,}8000$, $y_3 = f(0{,}75) = 0{,}6400$, $y_4 = f(1) = 0{,}5000$.

(*a*) La regla de los trapecios da, pues,

$$\frac{\Delta x}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\} = \frac{0{,}25}{2}\{1{,}0000 + 2(0{,}9412) + 2(0{,}8000) + 2(0{,}6400) + 0{,}500\} = 0{,}7828.$$

(*b*) La regla de Simpson da

$$\frac{\Delta x}{3}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\} = \frac{0,25}{3}\{1,0000 + 4(0,9412) + 2(0,8000) + 4(0,6400) + 0,5000\} = 0,7854.$$

El valor exacto es $\pi/4 \approx 0,7854$.

26. (*a*) Calcular $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ por el teorema de Taylor y (*b*) estimar el error máximo.

Como en el Problema 28, Capítulo 4, se encuentra que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 e^\xi}{5!} \qquad 0 < \xi < x$$

Cambiando entonces x por x^2,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10} e^\xi}{5!} \qquad 0 < \xi < x^2$$

Integrando de 0 a 1,

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}\right)dx + E \qquad \text{(siendo el error } E = \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}e^\xi\,dx)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} + E = 1,4618 + E$$

De modo que $|E| = \left|\int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}e^\xi\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{x^{10}}{5!}e^\xi\right| dx \leq e\int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}\,dx = \frac{e}{11\cdot 5!} < 0,0021.$

Así, pues, el error máximo es menor que 0,0021, de modo que el valor de la integral es 1,46 con dos decimales exactos. Empleando más términos en el teorema de Taylor, se obtiene mayor exactitud.

APLICACIONES

27. Hallar (*a*) el área y (*b*) el momento de inercia con respecto al eje y de la región del plano xy encerrada por $y = 4 - x^2$ y el eje x.

(*a*) Subdivídase la región en rectángulos como en la figura de la página 80. Un rectángulo cualquiera se ve en la Fig. 5-4 adjunta. Entonces,

$$\text{Area buscada} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} (4-\xi_k^2)\,\Delta x_k$$

$$= \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx = \frac{32}{3}$$

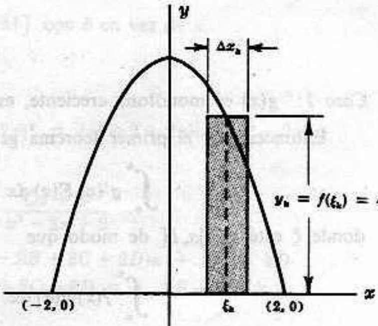


Fig. 5-4

(*b*) Suponiendo densidad uno, el momento de inercia con respecto al eje y del rectángulo anterior es $\xi_k^2 f(\xi_k)\Delta x_k$. Luego

$$\text{Momento de inercia} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2(4-\xi_k^2)\,\Delta x_k$$

$$= \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)\,dx = \frac{128}{15}$$

28. ¿Cuál es la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ a $x = 1$?

$$\text{Longitud del arco} = \int_0^1 \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

29. Hallar el volumen que genera la región del Problema 27 al girar en torno al eje x.

$$\text{Volumen buscado} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \pi y_k^2\,\Delta x_k = \pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx = 512\pi/15.$$

PROBLEMAS VARIOS

30. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ demostrar la *desigualdad de Schwarz para integrales*:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx$$

Se tiene

$$\int_a^b \{f(x) + \lambda\,g(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx + 2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \lambda^2\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx \geqq 0$$

para todo valor real de λ. Luego, por el Problema 13 del Capítulo 1, empleando (*1*) con

$$A^2 = \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx, \qquad B^2 = \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx, \qquad C = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

se tiene $C^2 \leqq A^2B^2$, que es el resultado pedido.

31. Demostrar el segundo teorema del valor medio expresado por (*8*), página 82, suponiendo la existencia y continuidad de $g'(x)$ en $[a, b]$ además de las otras hipótesis.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$ Integrando por partes,

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,F'(x)\,dx$$

$$= g(x)\,F(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b g'(x)\,F(x)\,dx$$

$$= g(b)\,F(b) - \int_a^b g'(x)\,F(x)\,dx$$

Caso 1: $g(x)$ es monótona creciente, es decir, $g'(x) \geqq 0$.

Entonces, por el primer teorema generalizado del valor medio para integrales (página 82), se tiene

$$\int_a^b g'(x)\,F(x)\,dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx = F(\xi)\,[g(b) - g(a)]$$

donde ξ está en $]a, b[$ de modo que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(b)\,F(b) - F(\xi)\,[g(b) - g(a)]$$

$$= g(a)\,F(\xi) + g(b)\,[F(b) - F(\xi)]$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

Caso 2: $g(x)$ es monótona decreciente, o sea, que $g'(x) \leqq 0$.

La demostración es parecida a la del Caso 1.

32. (*a*) Si $f^{(n+1)}(x)$ es continua en $[a, b]$, demostrar que para x en $[a, b]$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

(*b*) Aplicar (*a*) para obtener las formas de Lagrange y de Cauchy del resto del teorema de Taylor (página 61).

(*a*) Por inducción matemática (Capítulo 1), el resultado es válido para $n = 0$, pues

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) + f(t)\big|_a^x = f(a) + f(x) - f(a) \qquad (1)$$

y suponiendo que lo es para $n = k$, integrando por partes y aplicando

$$\frac{(x-t)^k}{k!}\,dt = dv, \quad f^{(k+1)}(t) = u \quad \text{así que} \quad v = -\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad du = f^{(k+2)}(t)\,dt$$

se encuentra que

$$\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt = -\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}\bigg|_a^x + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(a)(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt$$

lo que muestra que el resultado es válido para $n = k + 1$. De modo que es válido para todo entero $n \geqq 0$.

(*b*) Por el primer teorema generalizado del valor medio para integrales (página 82) se tiene,

$$\int_a^x F(t)\,G(t)\,dt = F(\xi)\int_a^x G(t)\,dt \qquad \xi \text{ entre } a \text{ y } x$$

Haciendo $F(t) = f^{(n+1)}(t)$, $G(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$, se obtiene

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

que da la *forma de Lagrange* para el resto [ecuación (*20*), página 61], con b en vez de x.

Con $F(t) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$, $G(t) = 1$, se tiene

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_a^x 1\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)}{n!}$$

que da la *forma de Cauchy* para el resto [ecuación (*21*), página 61], con b en vez de x.

33. Demostrar que $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{8}$.

Se tiene $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$.

Descomponiendo en fracciones parciales, sea

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

De dónde $1 = (A+C)x^3 + (B-2A+2C+D)x^2 + (2A-2B+2C+2D)x + 2B + 2D$

y entonces $A+C = 0,\ B-2A+2C+D = 0,\ 2A-2B+2C+2D = 0,\ 2B+2D = 1$

De donde $A = \frac{1}{8},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{8},\ D = \frac{1}{4}$. Así, pues,

$$\int \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{8}\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{8}\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^{-1}(x+1) - \frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^{-1}(x-1) + C$$

Entonces,

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{x^4+4} \;=\; \lim_{M\to\infty}\left\{\frac{1}{16}\ln\left(\frac{M^2+2M+2}{M^2-2M+2}\right)+\frac{1}{8}\;\operatorname{tg}^{-1}(M+1)\;+\;\frac{1}{8}\;\operatorname{tg}^{-1}(M-1)\right\} \;=\; \frac{\pi}{8}$$

Se denota este límite por $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4}$, que se llama *integral impropia de primera especie*. Más adelante, en el Capítulo 12, se trata de estas integrales. Véase también Problema 78.

34. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4}$.

Como se cumplen las condiciones para la regla de L'Hôpital, resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{\dfrac{d}{dx}(x^4)} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x^3)}{\dfrac{d}{dx}(4x^3)} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos x^3}{12x^2} \;=\; \frac{1}{4}$$

35. Demostrar que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ existe $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Sea $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$, con la notación de la página 80. Como $f(x)$ es continua, se pueden hallar números M_k y m_k, extremos superior e inferior de $f(x)$ en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de modo que $m_k \leqq f(x) \leqq M_k$. Se tiene entonces

$$m(b-a) \;\leqq\; s \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \;\leqq\; \sigma \leqq\; \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \;=\; S \;\leqq\; M(b-a) \tag{1}$$

siendo m y M los extremos inferior y superior de $f(x)$ en $[a, b]$. Las sumas s y S suelen llamarse *suma inferior* y *suma superior*, respectivamente.

Eligiendo ahora otra subdivisión de $[a, b]$ y considerando las sumas inferior y superior correspondientes s' y S' se tendrá

$$s' \leqq S \qquad \text{y} \qquad S' \geqq s \tag{2}$$

para demostrar lo cual basta elegir una tercera subdivisión mediante los puntos de división de las dos primeras subdivisiones, y considerando las correspondientes sumas inferior y superior t y T, respectivamente. Por el Problema 89 se tiene

$$s \leqq t \leqq T \leqq S' \qquad \text{y} \qquad s' \leqq t \leqq T \leqq S \tag{3}$$

lo cual demuestra (*2*).

Por (*2*) es claro también que al aumentar el número de subdivisiones las sumas superiores decrecen monótonamente y las sumas inferiores crecen monótonamente. Como según (*1*) tales sumas son también acotadas, se sigue que tienen valores límites $\bar{s}$ y $\underline{S}$ respectivamente. Por el Problema 90, $\bar{s} \leqq \underline{S}$. Para demostrar que existe la integral es necesario demostrar que $\bar{s} \leqq \underline{S}$.

Como $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, es uniformemente continua. Dado entonces un $\epsilon > 0$ se puede tomar cada Δx_k de modo que $M_k - m_k < \epsilon/(b-a)$. Se deduce entonces que

$$S - s \;=\; \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \;<\; \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \;=\; \epsilon \tag{4}$$

Pero $S - s = (S - \underline{S}) + (\underline{S} - \bar{s}) + (\bar{s} - s)$ y como cada paréntesis es positivo resulta $S - s$ menor que ϵ por (*4*). Siendo $\underline{S} - \bar{s}$ un número definido, debe ser cero, esto es, $\underline{S} = \bar{s}$. De modo que los límites de las sumas superiores y de las sumas inferiores son iguales y queda demostrado la existencia de la integral definida.

Problemas propuestos

DEFINICION DE LA INTEGRAL DEFINIDA

36. (*a*) Expresar $\int_0^1 x^3\,dx$ como límite de una suma. (*b*) Utilizar el resultado para calcular la integral definida dada. (*c*) Interpretar geométricamente. *Sol.* (*b*) $\frac{1}{4}$

37. Valiéndose de la definición, calcular (*a*) $\int_0^2 (3x+1)\,dx$, (*b*) $\int_3^6 (x^2-4x)\,dx$. *Sol.* (*a*) 8, (*b*) 9

38. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right\} = \dfrac{\pi}{4}$.

39. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}\right\}$ si $p>-1$.

40. Aplicando la definición, demostrar que $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$.

41. Hacer directamente el Problema 5, aplicando el Problema 94 del Capítulo 1.

42. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\} = \ln(1+\sqrt{2})$.

43. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2x^2} = \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x}$ si $x\neq 0$.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

44. Demostrar (*a*) la Propiedad 2, (*b*) la Propiedad 3 de la página 81.

45. Si $f(x)$ es integrable en $]a,c[$ y $]c,b[$, demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

46. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ y $f(x)\leq g(x)$, demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

47. Demostrar que $1-\cos x \geq x^2/\pi$ para $0\leq x\leq \pi/2$.

48. Demostrar que $\left|\int_0^1 \dfrac{\cos nx}{x+1}\,dx\right| \leq \ln 2$ para n.

49. Demostrar que $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx\right| \leq \dfrac{\pi}{12e}$.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

50. Demostrar el resultado (*5*), página 82. [Sugerencia: Si $m\leq f(x)\leq M$, es $m\,g(x)\leq f(x)\,g(x)\leq M\,g(x)$. Intégrese luego y aplíquese la Propiedad 7, página 82.]

51. Demostrar que existen valores ξ_1 y ξ_2 en $0\leq x\leq 1$ tales que

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x^2+1}\,dx = \frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)} = \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\pi\xi_2$$

52. Demostrar que hay un valor ξ en $0\leq x\leq\pi$ tal que $\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx = \operatorname{sen}\xi$.

CAMBIO DE VARIABLE Y METODOS ESPECIALES DE INTEGRACION

53. Calcular: (*a*) $\int x^2 e^{\operatorname{sen} x^3}\cos x^3\,dx$, (*b*) $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} t}{1+t^2}\,dt$, (*c*) $\int_1^3 \dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$, (*d*) $\int \dfrac{\operatorname{cosech}^2\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,du$,

(*e*) $\int_{-2}^2 \dfrac{dx}{16-x^2}$. *Sol.* (*a*) $\frac{1}{3}e^{\operatorname{sen} x^3}+c$, (*b*) $\pi^2/32$, (*c*) $\pi/3$, (*d*) $-2\coth\sqrt{u}+c$, (*e*) $\frac{1}{4}\ln 3$.

54. Mostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(3+2x-x^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, (*b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c.$

55. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \tfrac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \tfrac{1}{2}a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|$

(*b*) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \tfrac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1} u/a + c, \quad a > 0.$

56. Hallar $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. *Sol.* $\sqrt{x^2+2x+5} - \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + c.$

57. Demostrar la validez del método de integración por partes.

58. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos 3x\,dx$, (*b*) $\displaystyle\int x^3 e^{-2x}\,dx.$ *Sol.* (*a*) $-2/9$, (*b*) $-\frac{1}{8}e^{-2x}(4x^3+6x^2+6x+3)+c$

59. Mostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{tg}^{-1} x\,dx = \tfrac{1}{12}\pi - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\ln 2$

(*b*) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{5\sqrt{7}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{8}\ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}-3}\right).$

60. (*a*) Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ tienen derivadas *n*-ésimas continuas, demostrar que

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots (-1)^n \int u^{(n)} v\,dx$$

fórmula generalizada de integración por partes. (*b*) ¿Qué simplificaciones se presentan si $u^{(n)} = 0$? Discutir.

(*c*) Aplíquese (*a*) para calcular $\displaystyle\int_0^\pi x^4 \operatorname{sen} x\,dx.$ *Sol.* (*c*) $\pi^4 - 12\pi^2 + 48$

61. Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{\pi-2}{8}.$

[Sugerencia: Por fracciones parciales, suponiendo $\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ y calculando A, B, C, D.]

62. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}, \quad \alpha > 1.$

METODOS NUMERICOS PARA CALCULAR INTEGRALES DEFINIDAS

63. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (*a*) por la regla de trapecios, (*b*) por la regla de Simpson, tomando $n = 4$. Compárese con el valor exacto, $\ln 2 = 0{,}6931$.

64. Por (*a*) la regla de trapecios, (*b*) la regla de Simpson, calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ mediante los valores de $\operatorname{sen}^2 x$ en $x = 0°, 10°, \ldots, 90°$ y comparar con el valor exacto $\pi/4$.

65. Demostrar (*a*) la regla de los rectángulos, (*b*) la de los trapecios, esto es (*16*) y (*17*) de la página 85.

66. Demostrar la regla de Simpson.

67. Calcular por integración numérica con 3 decimales exactos: (*a*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$, (*b*) $\displaystyle\int_0^1 \cosh x^2\,dx.$

Sol. (*a*) 0,322, (*b*) 1,105

APLICACIONES

68. Hallar (*a*) el área, (*b*) el momento de inercia con respecto al eje *y* de la región del plano *xy* encerrada por $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqq x \leqq \pi$ y el eje x, suponiendo densidad uno. *Sol.* (*a*) 2, (*b*) $\pi^2 - 4$

69. Hallar el momento de inercia con respecto al eje *x* de la región encerrada por $y = x^2$ y $y = x$, si la densidad es proporcional a la distancia al eje x. *Sol.* $\frac{1}{3}M$, con M = masa de la región.

70. Mostrar que la longitud del arco de *catenaria* $y = \cosh x$ de $x = 0$ a $x = \ln 2$ es $\frac{3}{4}$.

71. Mostrar que la longitud de un arco de la *cicloide* $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ es $8a$.

72. Demostrar que el área encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.

73. Hallar el volumen de la región obtenida por revolución de la curva $y = \text{sen}\,x$, $0 \leqq x \leqq \pi$, en torno al eje x.
Sol. $\pi^2/2$

74. Demostrar que el centro de masa de la región encerrada por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leqq x \leqq a$ y el eje x es $(0, 4a/3\pi)$.

75. (*a*) Si $\rho = f(\phi)$ es la ecuación de una curva en polares, mostrar que el área encerrada por esta curva y las rectas $\phi = \phi_1$ y $\phi = \phi_2$ es $\frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2 d\phi$. (*b*) Hallar el área encerrada por un bucle de la *lemniscata* $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$.

Sol. (*b*) a^2

76. (*a*) Demostrar que la longitud del arco de la curva del Problema 75(*a*) es $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\phi)^2}\,d\phi$. (*b*) Hallar la longitud de arco de la *cardioide* $\rho = a(1 - \cos\phi)$. *Sol.* (*b*) $8a$

PROBLEMAS VARIOS

77. Demostrar el teorema del valor medio para las derivadas a partir del primer teorema del valor medio para integrales. [Sugerencia: Hágase $f(x) = F'(x)$ en (*4*), página 81.]

78. Demostrar que (*a*) $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{4-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$, (*b*) $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 6$, (*c*) $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

y dar una interpretación geométrica de los resultados.

[Estos límites, que se suelen denotar $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$, $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ y $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ respectivamente, se llaman *integrales impropias de segunda especie* (Problema 33), pues los integrandos no son acotados en el intervalo de integración. Mayor estudio de integrales impropias en Capítulo 12.]

79. Demostrar que (*a*) $\lim_{M\to\infty} \int_0^M x^4 e^{-x}\,dx = 4! = 24$, (*b*) $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{\pi}{2}$.

80. Calcular (*a*) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$, (*b*) $\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\,2x}{(\text{sen}\,x)^{4/3}}\,dx$, (*c*) $\int_0^\infty \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+1}}$.

Sol. (*a*) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ (*b*) 3 (*c*) no existe

81. Calcular $\lim_{x\to\pi/2} \frac{ex^2/\pi - e\pi/4 + \int_x^{\pi/2} e^{\text{sen}\,t}\,dt}{1 + \cos 2x}$. *Sol.* $e/2\pi$

82. Demostrar (*a*) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} (t^2+t+1)\,dt = 3x^8 + x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 2x$, (*b*) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \cos t^2\,dt = 2x\cos x^4 - \cos x^2$.

83. Demostrar el resultado (*13*) de la página 83.

84. Demostrar que (*a*) $\int_0^\pi \sqrt{1 + \text{sen}\,x}\,dx = 4$, (*b*) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\text{sen}\,x + \cos x} = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

85. Explicar la falacia: $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^1 \frac{dy}{1+y^2} = -I$, usando la transformación $x = 1/y$. Así, pues, $I = 0$. Pero $I = \text{tg}^{-1}(1) - \text{tg}^{-1}(-1) = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2$. De modo que $\pi/2 = 0$.

86. Demostrar que $\int_0^{1/2} \frac{\cos \pi x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leqq \frac{1}{4}\,\text{tg}^{-1}\frac{1}{2}$.

87. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{2n-1}}{n^{3/2}}\right\}$. *Sol.* $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

88. Demostrar que $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es irracional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es racional} \end{cases}$ no es integrable en sentido de Riemann en $[0, 1]$.
[Sugerencia: En (*2*), página 80, sean ξ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ primero puntos racionales y luego puntos irracionales de subdivisión y estudiar las sumas inferiores y superiores del Problema 35.]

89. Demostrar el resultado (*3*) del Problema 35. [Sugerencia: Primero considérese el efecto de un punto más de subdivisión solamente.]

90. En el Problema 35, demostrar que $\bar{s} \leq \underline{S}$. [Sugerencia: Suponer lo contrario y llegar a una contradicción.]

91. Si $f(x)$ es casicontinua en $[a, b]$, demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. [Sugerencia: Cubrir cada punto de discontinuidad con un intervalo y obsérvese que la suma de las longitudes de tales intervalos se puede hacer arbitrariamente pequeña. Considérese luego la diferencia entre las sumas superiores e inferiores.]

92. Si $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ 6x - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$, hallar $\int_0^2 f(x)\,dx$. Interpretar gráficamente el resultado. *Sol.* 9

93. Calcular $\int_0^3 \{x - [x] + \tfrac{1}{2}\}\,dx$ siendo $[x]$ el mayor entero contenido en x. Interpretar gráficamente el resultado.
Sol. 3

94. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^m x}{\operatorname{sen}^m x + \cos^m x}\,dx = \frac{\pi}{4}$ para todo valor real de m.

(*b*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^4 x} = \pi.$

95. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ existe

96. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x}\,dx = 0{,}4872$ aproximadamente.

97. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}.$

Capítulo 6

Derivadas parciales

FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

Se dice que una variable z es *función* de dos variables x y y si para cada par (x, y) existen uno o más valores de z. Esta definición se corresponde con la definición general de función como correspondencia entre dos conjuntos (página 20). Ahora los dos conjuntos son (1) un conjunto de pares (x, y) [que se pueden representar geométricamente por un conjunto bidimensional del plano xy] y (2) un conjunto de números reales representado por la variable z.

Se emplean las notaciones $f(x, y)$, $F(x, y)$, etc., para el valor de la función en (x, y) y se escribe $z = f(x, y)$ $z = F(x, y)$, etc. A veces se utiliza también la notación $z = z(x, y)$, entendiendo en este caso que z se usa con dos significados diferentes, como función y como variable.

Ejemplo: Si $f(x, y) = x^2 + 2y^3$, entonces $f(3, -1) = (3)^2 + 2(-1)^3 = 7$.

El concepto se generaliza fácilmente. Así $w = F(x, y, z)$ denota el valor de una función en (x, y, z) [que es un punto del espacio tridimensional], etc.

VARIABLES DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE, DOMINIO DE UNA FUNCION

Si $z = F(x, y)$, z es la *variable dependiente* y x y y son las *variables independientes*. La función se dice *uniforme* si a cada par (x, y), para el cual está definida, solo corresponde un valor de z; si hubiere más de un valor de z para algún par (x, y), la función es *multiforme* y se puede considerar como formada por varias funciones uniformes. Por ello basta con limitarse al estudio de funciones uniformes; si no se dice otra cosa, se trata de tales funciones en lo que sigue.

El conjunto de pares de valores (puntos), (x, y) para los cuales una función está definida, se llama *dominio de definición* o *dominio* de la función simplemente.

Ejemplo: Si $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, el dominio para el cual z es real se compone del conjunto de puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leqq 1$, esto es, del conjunto de puntos de un círculo con su interior en el plano xy, de centro $(0, 0)$ y de radio 1.

SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES TRIDIMENSIONALES

Se tiene una generalización inmediata de la representación habitual para funciones de dos variables en el plano xy, construyendo 3 ejes perpendiculares entre sí (los ejes x, y y z) que se cortan en un punto O (origen). Un punto del espacio tridimensional queda representado entonces por la terna (x, y, z), que son las *coordenadas* del punto. En este caso, $z = f(x, y)$ [o bien $F(x, y, z) = 0$] representa una superficie, en general.

Ejemplo: El conjunto de puntos (x, y, z) tales que $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ comprende la superficie de una semiesfera de radio 1 y centro en $(0, 0, 0)$.

Para funciones de más de dos variables no son ya posibles tales representaciones geométricas, si bien la terminología se sigue empleando. Por ejemplo, (x, y, z, w) es un punto en el espacio de 4 dimensiones; $w = f(x, y, z)$ [o $F(x, y, z, w) = 0$] representa una *hiperesfera* en 4 dimensiones así, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$ es una esfera de radio $a > 0$ y centro en $(0, 0, 0, 0)$.

ENTORNOS

El conjunto de puntos (x, y) tales que $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ con $\delta > 0$, se llama *entorno rectangular* δ de (x_0, y_0); el conjunto $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$ excluye el punto (x_0, y_0) y se llama *entorno rectangular* δ reducido de (x_0, y_0). Observaciones semejantes se aplican a otros entornos, por ejemplo, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ es un entorno circular δ de (x_0, y_0).

Se dice que un punto (x_0, y_0) es *punto límite* o *punto de acumulación* de un conjunto S si todo entorno reducido de (x_0, y_0) contiene puntos o elementos de S. Como en el caso de un conjunto lineal de puntos, todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite (teorema de Bolzano-Weierstrass, páginas 5 y 50). Un conjunto que contiene todos sus puntos límites se llama *conjunto cerrado.*

REGIONES

Un punto P que pertenece a un conjunto S se dice *interior* a S si existe un entorno δ reducido de P cuyos puntos pertenecen todos a S. Un punto P que no pertenece a S se dice *punto exterior* a S si existe un entorno δ reducido de P cuyos puntos no pertenecen todos a S. Un punto P que pertenece a S se llama *punto frontera* de S si todo entorno δ reducido de P contiene puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S.

Si dos puntos cualesquiera de un conjunto S se pueden unir por una poligonal de un número finito de segmentos cuyos puntos pertenecen todos a S, se dice que S es un *conjunto conexo. Región* es un conjunto conexo consistente en puntos interiores o en puntos interiores y puntos frontera. *Región cerrada* es la que contiene todos sus puntos frontera. *Región abierta* es la que solo consta de puntos interiores.

En las Figs. 6-1(*a*), (*b*) y (*c*) se ven ejemplos de regiones. La rectangular de la Fig. 6-1(*a*), incluida la frontera o contorno, representa el conjunto de puntos $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, que es una generalización obvia del intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$ en una dimensión. El conjunto $a < x < b$, $c < y < d$ excluye la frontera.

En las regiones de las Figs. 6-1(*a*) y 6-1(*b*), toda *curva simple cerrada* (curva que no se corta a sí misma en ningún punto) interior a la región se puede recoger hasta reducirla a un punto que también pertenece a la región. Tales regiones se llaman simplemente *conexas*. En la Fig. 6-1(*c*), en cambio, una curva simple cerrada *ABCD* alrededor de uno de los «huecos» de la región no se puede recoger hasta que se vuelva a un punto sin salirse de la región; y estas regiones se llaman *múltiplemente conexas.*

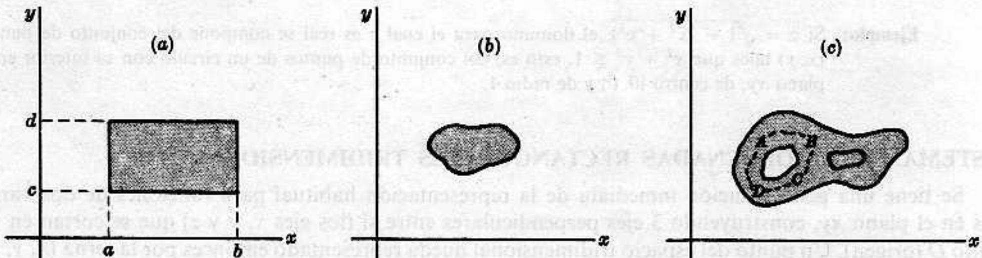


Fig. 6-1

LIMITES

Sea $f(x, y)$ definida en un entorno δ reducido de (x_0, y_0) [es decir, que $f(x, y)$ puede no estar definida en (x_0, y_0)]. Se dice que l es el *límite* de $f(x, y)$ al tender x a x_0 y y a y_0 [o bien al tender (x, y) a (x_0, y_0)], lo que se escribe $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$ [o bien $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l$] si a todo número positivo ϵ

se puede hacer corresponder un número positivo δ [que depende de ϵ y (x_0, y_0) en general] tal que $|f(x, y) - l| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$ y $0 < |y - y_0| < \delta$.

Puede emplearse el entorno circular reducido $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ en vez del entorno rectangular reducido.

Ejemplo: Sea $f(x, y) = \begin{cases} 3xy & \text{si } (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ Como $x \to 1$ y $y \to 2$ [o bien $(x, y) \to (1, 2)$], $f(x, y)$ se acerca más y más a $3(1)(2) = 6$ y *es de suponer* que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = 6$. Para *demostrar* esto hay que hacer ver que se verifica la anterior definición de límite con $l = 6$. Tal demostración puede hacerse por un método semejante al del Problema 4.

Nótese que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) \neq f(1, 2)$ porque $f(1, 2) = 0$. El límite sería 6 en efecto aun cuando $f(x, y)$ no estuviera definida en $(1, 2)$. Así, pues, la existencia del límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ no depende en absoluto de la existencia de valor de $f(x, y)$ en (x_0, y_0).

Obsérvese que para que exista $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ debe tener el mismo valor independientemente de la manera de tender (x, y) a (x_0, y_0). Y así, pues, en caso de que dos maneras distintas de tender hacia (x_0, y_0) den valores distintos, el límite no puede existir (Problema 7). Esto implica, como en el caso de funciones de una variable, que si un límite existe es único.

El concepto de límites unilaterales para funciones de una variable se generaliza fácilmente a funciones de más de una variable.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 1}} \operatorname{tg}^{-1}(y/x) = \pi/2, \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0-\\ y\to 1}} \operatorname{tg}^{-1}(y/x) = -\pi/2$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$ no existe, como se ve claramente por el hecho de que dos maneras de tender a $(0, 1)$ dan resultados distintos.

En general, los teoremas sobre límites, conceptos de infinitud, etc., para funciones de una variable (página 24) se aplican igualmente con modificaciones apropiadas a funciones de dos o más variables.

LIMITES REITERADOS

Los *límites reiterados* $\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)\right\}$ y $\lim\limits_{y\to y_0}\left\{\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)\right\}$, [que también se denotan $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ y $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ respectivamente] no son necesariamente iguales. Si bien tienen que ser iguales para que exista $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$, su igualdad no garantiza la existencia de este último límite.

Ejemplo: Si $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$, luego $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x - y}{x + y}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(1) = 1$ y $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - y}{x + y}\right) = \lim\limits_{y\to 0}(-1) = -1$. Así que los límites reiterados no son iguales y, por tanto, no existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

CONTINUIDAD

Sea $f(x, y)$ definida en un entorno δ de (x_0, y_0) [esto es, $f(x, y)$ debe estar definida también *en* (x_0, y_0)]. Se dice que $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si para todo número positivo ϵ existe un número positivo δ [que depende de ϵ y de (x_0, y_0) en general] tal que $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$ y $|y - y_0| < \delta$. Nótese que para que $f(x, y)$ sea continua en (x_0, y_0) han de satisfacerse tres condiciones.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, o sea, que el límite existe para $(x,y) \to (x_0, y_0)$

2. $f(x_0, y_0)$ debe existir, es decir, $f(x,y)$ está definida en (x_0, y_0)

3. $l = f(x_0, y_0)$

Lo que se puede escribir en la forma $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x,\ \lim\limits_{y\to y_0} y)$.

Ejemplo: Si $f(x,y) = \begin{cases} 3xy & (x,y) \neq (1,2) \\ 0 & (x,y) = (1,2) \end{cases}$, es $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 6 \neq f(1,2)$. Luego $f(x,y)$ no es continua en $(1,2)$. Si se define la función de manera que $f(x,y) = 6$ para $(x,y) = (1,2)$, entonces la función es continua en $(1,2)$.

Si una función no es continua en un punto (x_0, y_0) se dice que es *discontinua* en (x_0, y_0), que se llama entonces *punto de discontinuidad.* Si, como en el ejemplo anterior, es posible definir la función en el punto de discontinuidad de manera que tenga allí un valor que haga la nueva función continua, se dice que la *discontinuidad es evitable* en la primera función. Una función se dice *continua en una región* $\mathcal{R}$ del plano xy si es continua en todo punto de $\mathcal{R}$.

Muchos de los teoremas sobre continuidad para funciones de una variable se pueden generalizar con modificaciones adecuadas a funciones de dos o más variables.

CONTINUIDAD UNIFORME

En la definición de continuidad de $f(x,y)$ en (x_0, y_0), δ depende de ϵ y también de (x_0, y_0) en general. Si en una región $\mathcal{R}$ se puede encontrar un δ que solo depende de ϵ y no del punto particular (x_0, y_0) en $\mathcal{R}$ [es decir, que el mismo δ sirve para *todo* punto de $\mathcal{R}$], entonces $f(x,y)$ se dice *uniformemente continua* en $\mathcal{R}$. Como para funciones de una variable, se puede demostrar que una función continua en una región cerrada y acotada es uniformemente continua en la región.

DERIVADAS PARCIALES

Las derivadas ordinarias de una función de varias variables con respecto a cada una de las variables independientes, manteniendo todas las demás variables independientes constantes, se llaman derivadas parciales de la función con respecto a cada variable. Las derivadas parciales de $f(x,y)$ con respecto a x y y se denotan por $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left[\text{o } f_x,\ f_x(x,y),\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_y\right]$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left[\text{o } f_y,\ f_y(x,y),\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_x\right]$ respectivamente; las últimas notaciones se utilizan cuando se quiere indicar las variables que se dejan constantes.

Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{1}$$

si este límite existe. Las derivadas en el punto (x_0, y_0) se indican con frecuencia por $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)$ y $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0, y_0)$ respectivamente.

Ejemplo: Si $f(x,y) = 2x^3 + 3xy^2$, es $f_x = \partial f/\partial x = 6x^2 + 3y^2$ y $f_y = \partial f/\partial y = 6xy$. Así, $f_x(1,2) = 6(1)^2 + 3(2)^2 = 18$, $f_y(1,2) = 6(1)(2) = 12$.

Si una función f tiene derivadas parciales continuas $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ en una región, entonces f debe ser continua en la región. Pero la sola existencia de estas derivadas parciales no es garantía de la continuidad de f (véase Problema 9).

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales en cada punto (x, y) de una región, entonces $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son a su vez funciones de x y y que pueden tener también derivadas parciales; estas segundas derivadas se denotan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f_{yx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=f_{xy} \qquad (2)$$

Si f_{xy} y f_{yx} son continuas, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ y el orden de derivación puede ser cualquiera; no siendo así, las derivadas pueden no ser iguales (Problemas 13 y 43).

Ejemplo: Si $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2$ (véase el ejemplo precedente), entonces $f_{xx} = 12x$, $f_{yy} = 6x$, $f_{xy} = 6y = f_{yx}$. En tal caso $f_{xx}(1, 2) = 12$, $f_{yy}(1, 2) = 6$, $f_{xy}(1, 2) = f_{yx}(1, 2) = 12$.

De igual manera se definen derivadas de orden superior. Por ejemplo, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{yxx}$ es la derivada de f una vez respecto de y y dos veces respecto de x.

DIFERENCIALES

Sean $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$ incrementos dados a x y y, respectivamente. Entonces,

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta f \qquad (3)$$

se llama *incremento* de $z = f(x, y)$. Si $f(x, y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas en una región, entonces,

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy = \Delta f \qquad (4)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero con Δx y Δy (Problema 14). La expresión

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \text{o} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (5)$$

se llama *diferencial total* o simplemente *diferencial* de z o f, o bien *parte principal* de Δz o Δf. Nótese que $\Delta z \neq dz$ en general. Pero si $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$ son «pequeños», dz es una buena aproximación de Δz (véase Problema 15). dx y dy se llaman *diferenciales* de x y y, respectivamente, y no son necesariamente pequeños.

Si f es tal que Δf (o Δz) se puede expresar en la forma (*4*), donde ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero con Δx y Δy, se dice que f es *diferenciable* en (x, y). La mera existencia de f_x y f_y no asegura por sí misma la diferenciabilidad; en cambio, la continuidad de f_x y f_y sí (si bien esta condición es ligeramente más restrictiva de lo necesario). Si f_x y f_y son continuas en una región $\mathcal{R}$, se dice que f es *continuamente diferenciable* en $\mathcal{R}$.

TEOREMAS SOBRE DIFERENCIALES

En lo que sigue se supone que todas las funciones tienen primeras derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$, es decir, que las funciones son continuamente diferenciables en $\mathcal{R}$.

1. Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \qquad (6)$$

sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables independientes o dependientes de otras variables (Problema 20). Esta es una generalización del resultado (*5*). En (*6*) suele utilizarse z en vez de f.

2. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, una constante, entonces $df = 0$. Nótese que en este caso $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no pueden ser todas variables independientes.

3. La expresión $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ o, más brevemente, $P\,dx + Q\,dy$ es la diferencial de $f(x, y)$ si, y solo si, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Se dice entonces que $P\,dx + Q\,dy$ es una diferencial exacta.

4. La expresión $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ o brevemente $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ es la diferencial de $f(x, y, z)$ si, y solo si, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$. Se dice entonces que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ es una *diferencial exacta*.

Las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 se hacen mejor por los métodos de capítulos posteriores (véase Capítulo 10, Problemas 13 y 30).

DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS

Sea $z = f(x, y)$ con $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, de modo que z es función de r y s. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{7}$$

En general si $u = F(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_1 = f_1(r_1, \ldots, r_p), \ \ldots, \ x_n = f_n(r_1, \ldots, r_p)$, entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial r_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, p \tag{8}$$

Si en particular $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dependen de una sola variable s, se tiene

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds} \tag{9}$$

Estos resultados, *reglas de cadena*, como se les dice, son útiles para transformar derivadas de un conjunto de variables a otro.

Derivadas de orden superior se obtiene por aplicación reiterada de las reglas de cadena.

TEOREMA DE EULER SOBRE FUNCIONES HOMOGENEAS

Una función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *homogénea de grado p* si para todos los valores del parámetro λ y una cierta constante p se tiene la identidad

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{10}$$

Ejemplo: $F(x, y) = x^4 + 2xy^3 - 5y^4$ es homogénea de grado 4, ya que

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 + 2(\lambda x)(\lambda y)^3 - 5(\lambda y)^4 = \lambda^4(x^4 + 2xy^3 - 5y^4) = \lambda^4 F(x, y)$$

El teorema de Euler sobre funciones homogéneas dice que si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado p entonces (véase Problema 25)

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = pF \tag{11}$$

FUNCIONES IMPLICITAS

En general, una ecuación como la $F(x, y, z) = 0$ define una de las variables, por ejemplo z, como función de las otras dos variables x y y. Se dice entonces que z es *función implícita* de x y y para distinguirla de la *función explícita* f, con $z = f(x, y)$ de tal modo que $F[x, y, f(x, y)] \equiv 0$.

La diferenciación de las funciones implícitas no ofrece dificultad siempre que se tenga en cuenta con claridad cuáles son variables dependientes y cuáles independientes.

JACOBIANOS

Si $F(u, v)$ y $G(u, v)$ son diferenciables en una región se llama *determinante jacobiano* o simplemente *jacobiano* de F y G respecto de u y v el determinante funcional de segundo orden definido por

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \tag{7}$$

Análogamente, el determinante de tercer orden

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}$$

se llama jacobiano de F, G y H con respecto a u, v y w. Se generaliza el concepto sin dificultad.

DERIVADAS PARCIALES CON JACOBIANOS

Los jacobianos son a menudo útiles para obtener derivadas parciales de funciones implícitas. Así, por ejemplo, dadas las ecuaciones simultáneas

$$F(x,y,u,v) = 0, \quad G(x,y,u,v) = 0$$

se puede, en general, considerar u y v como funciones de x y y. En tal caso se tiene (Problema 31)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

Estos conceptos se generalizan fácilmente. Así, si se consideran las ecuaciones simultáneas

$$F(u,v,w,x,y) = 0, \quad G(u,v,w,x,y) = 0, \quad H(u,v,w,x,y) = 0$$

se puede, por ejemplo, considerar u, v y w como funciones de x y y en cuyo caso,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

con resultados parecidos para las otras derivadas parciales (véase Problema 33).

TEOREMAS SOBRE JACOBIANOS

En lo que sigue se supone que todas las funciones son continuamente diferenciables.

1. Una condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones $F(u, v, x, y, z) = 0$, $G(u, v, x, y, z) = 0$ definan funciones y y v (por ejemplo), es que $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$ no sea idénticamente nulo en una región $\mathcal{R}$.

   Resultados parecidos se verifican para m ecuaciones en n variables, con $m < n$.

2. Si x y y son funciones de u y v, siendo u y v funciones de r y s, entonces (Problema 45)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} \tag{9}$$

   que es un ejemplo de una *regla de cadena* para jacobianos. También se puede generalizar (Problemas 114 y 116, por ejemplo).

3. Si $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, una condición necesaria y suficiente para que exista una relación funcional de la forma $\phi(u, v) = 0$ entre u y v es que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ sea idénticamente nulo. Resultados parecidos se tiene para n funciones de n variables.

En el Capítulo 7 se estudian más en detalle los jacobianos con interpretaciones vectoriales.

TRANSFORMACIONES

El conjunto de ecuaciones

$$\begin{cases} x = F(u,v) \\ y = G(u,v) \end{cases} \tag{10}$$

define en general una *transformación* o *representación* (y mejor aplicación) que establece una correspondencia entre los puntos de los planos xy y uv. Si a cada punto del plano uv corresponde un, y solo un, punto del plano xy, y recíprocamente, se dice que hay una aplicación o transformación biunívoca. Esto se verifica si F y G son continuamente diferenciable con jacobiano distinto de cero en una región. En ese caso (que será lo supuesto si no se dice otra cosa), se dice que las ecuaciones (*10*) definen una transformación o aplicación *continuamente diferenciable*.

Por la transformación (*10*), una región $\mathcal{R}$ cerrada del plano xy se aplica, en general, en una región cerrada $\mathcal{R}'$ del plano uv. Entonces, si ΔA_{xy} y ΔA_{uv} denotan, respectivamente, las áreas de estas regiones, se puede demostrar que

$$\lim \frac{\Delta A_{xy}}{\Delta A_{uv}} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \tag{11}$$

donde lim denota el límite cuando ΔA_{xy} (o ΔA_{uv}) tiende a cero. El jacobiano del segundo miembro de (*11*) es el llamado *jacobiano de la transformación* (*10*).

Si se resuelve (*10*) para tener u y v en función de x y y se obtiene la transformación $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ que es la *transformación recíproca* correspondiente a la (*10*). Los jacobianos $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ y $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ de estas transformaciones son inversos uno del otro (Problema 45). Luego si uno de los jacobianos es distinto de cero en una región, también lo es el otro.

Los conceptos anteriores se pueden generalizar a transformaciones en tres o más dimensiones. Se tratará de estos temas con más detenimiento en el Capítulo 7, empleando la sencilla notación e interpretación vectorial.

COORDENADAS CURVILINEAS

Si (x, y) son las coordenadas cartesianas de un punto del plano xy, se puede considerar también que (u, v) son también coordenadas del mismo punto, pues conocidas (u, v) se pueden determinar (x, y) por *(10)*. Las coordenadas (u, v) se llaman *coordenadas curvilíneas* del punto.

Ejemplo: Las coordenadas polares (ρ, ϕ) de un punto corresponden al caso $u = \rho$, $v = \phi$. En este caso las ecuaciones de transformación *(10)* son $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho$ sen ϕ.

Para coordenadas curvilíneas en espacios con más dimensiones, véase Capítulo 7.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

1. **Primer teorema del valor medio.** Si $f(x, y)$ es continua en una región cerrada y si las primeras derivadas parciales existen en la región abierta (o sea, excluidos los puntos del contorno), se tiene

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \quad = \quad h f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \qquad 0 < \theta < 1 \quad (12)$$

que se escribe a veces con $h = \Delta x = x - x_0$ y $k = \Delta y = y - y_0$.

2. **Teorema de Taylor.** Si todas las n-ésimas derivadas parciales de $f(x, y)$ son continuas en una región cerrada y si las $(n + 1)$-ésimas derivadas parciales existen en la región abierta, se tiene

$$f(x_0+h, y_0+k) \quad = \quad f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n \qquad (13)$$

donde R_n, resto después de n términos, es

$$R_n \quad = \quad \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (14)$$

habiéndose utilizado la notación operacional

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0) \quad \equiv \quad h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) \quad \equiv \quad \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_0, y_0)$$
$$\equiv \quad h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0) \qquad (15)$$

etcétera, desarrollando $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n$ de manera formal por el teorema del binomio.

La *(13)* se escribe a veces con $h = \Delta x = x - x_0$ y $k = \Delta y = y - y_0$. Obsérvese que *(12)* es un caso especial de *(13)* con $n = 0$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ para todo (x, y) de una región se puede utilizar este resultado para obtener un desarrollo de $f(x, y)$ en serie de potencias de $x - x_0$ y $y - y_0$ convergente en dicha región, que se llama *región de convergencia*. Esta serie es la *serie de Taylor* en 2 variables, fácilmente generalizable a 3 o más variables.

Problemas resueltos

FUNCIONES Y GRAFOS

1. Si $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$, hallar (*a*) $f(-2,3)$; (*b*) $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)$; (*c*) $\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$, $k \neq 0$.

(*a*) $f(-2,3) = (-2)^3 - 2(-2)(3) + 3(3)^2 = -8 + 12 + 27 = 31$

(*b*) $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 - 2\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2}{y}\right) + 3\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{4}{xy} + \dfrac{12}{y^2}$

(*c*)
$$\begin{aligned}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} &= \frac{1}{k}\{[x^3 - 2x(y+k) + 3(y+k)^2] - [x^3 - 2xy + 3y^2]\}\\ &= \frac{1}{k}(x^3 - 2xy - 2kx + 3y^2 + 6ky + 3k^2 - x^3 + 2xy - 3y^2)\\ &= \frac{1}{k}(-2kx + 6ky + 3k^2) = -2x + 6y + 3k.\end{aligned}$$

2. Dar el dominio de definición de las siguientes funciones con valores reales e indicar gráficamente este dominio.

(*a*) $f(x,y) = \ln\{(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\}$

La función es definida y real para todo punto (x, y) tal que

$$(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) > 0, \quad \text{o sea, que} \quad 4 < x^2 + y^2 < 16$$

que es el dominio de definición pedido. Este conjunto consiste en todos los puntos *interiores* al círculo de radio 4 con centro en el origen y *exteriores* al círculo de radio 2 del mismo centro, como se ve en la figura. La región correspondiente, que aparece sombreada en la Fig. 6-2, es una *región abierta.*

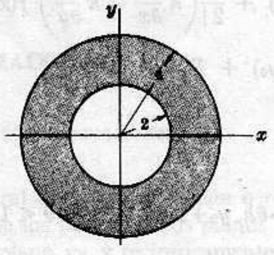


Fig. 6-2

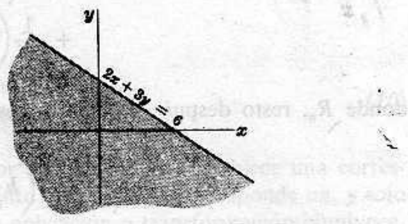


Fig. 6-3

(*b*) $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

La función está definida y es real para todo punto (x, y) tal que $2x + 3y \leq 6$, que es el dominio de definición pedido.

La región correspondiente (no acotada) del plano xy se ve sombreada en la Figura 6-3.

3. Dibujar y nombrar la superficie del espacio de 3 dimensiones cuya ecuación es:

(*a*) $2x + 4y + 3z = 12$.

Traza sobre el plano xy ($z = 0$), la recta $x + 2y = 6$, $z = 0$.

Traza sobre el plano yz ($x = 0$), la recta $4y + 3z = 12$, $x = 0$.

Traza sobre el plano xz ($y = 0$), la recta $2x + 3z = 12$, $y = 0$.

Se las representa por AB, BC y AC en la Figura 6-4.

La superficie es un plano que corta los ejes x, y y z en los puntos $A(6, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$. Las longitudes $\overline{OA} = 6$, $\overline{OB} = 3$, $\overline{OC} = 4$ son las *intersecciones* x, y y z respectivamente.

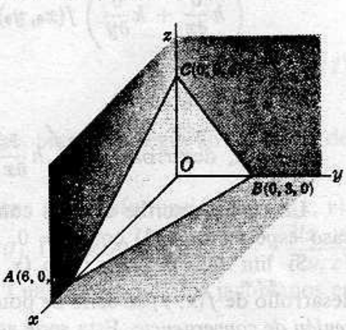


Fig. 6-4

(*b*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Traza sobre el plano xy $(z = 0)$, la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0.$

Traza sobre el plano yz $(x = 0)$, la hipérbola $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0.$

Traza sobre el plano xz $(y = 0)$, la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0.$

Traza sobre un plano $z = p$ paralelo al plano xy, la elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1 + p^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 + p^2/c^2)} = 1$$

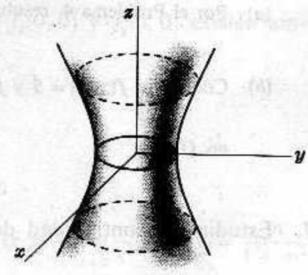


Fig. 6-5

Al aumentar $|p|$ a partir de cero, la sección transversal elíptica aumenta de tamaño.

La superficie es un *hiperboloide de una hoja* (Fig. 6-5).

LIMITES Y CONTINUIDAD

4. Demostrar que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + 2y) = 5.$

Método 1, por la definición de límite.

Hay que mostrar que dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|x^2 + 2y - 5| < \epsilon$ para $0 < |x - 1| < \delta$, $0 < |y - 2| < \delta$.

Si $0 < |x - 1| < \delta$ y $0 < |y - 2| < \delta$, entonces $1 - \delta < x < 1 + \delta$ y $2 - \delta < y < 2 + \delta$, excluyendo $x = 1$, $y = 2$.

Así, pues, $1 - 2\delta + \delta^2 < x^2 < 1 + 2\delta + \delta^2$ y $4 - 2\delta < 2y < 4 + 2\delta$. Sumando,

$$5 - 4\delta + \delta^2 < x^2 + 2y < 5 + 4\delta + \delta^2, \qquad \text{o sea,} \qquad -4\delta + \delta^2 < x^2 + 2y - 5 < 4\delta + \delta^2$$

Con $\delta \leqq 1$, se tiene que $-5\delta < x^2 + 2y - 5 < 5\delta$, esto es, $|x^2 + 2y - 5| < 5\delta$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$, $0 < |y - 2| < \delta$. Haciendo $5\delta = \epsilon$, o sea, $\delta = \epsilon/5$ (o $\delta = 1$, según cuál sea menor), se tiene que $|x^2 + 2y - 5| < \epsilon$ cuando $0 < |x - 1| < \delta$, $0 < |y - 2| < \delta$, es decir, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + 2y) = 5$.

Método 2, por los teoremas sobre límites.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + 2y) = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} x^2 + \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} 2y = 1 + 4 = 5$$

5. Demostrar que $f(x, y) = x^2 + 2y$ es continua en $(1, 2)$.

Por el Problema 4, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = 5$. Además, $f(1, 2) = 1^2 + 2(2) = 5$.

Luego $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = f(1, 2)$ y la función es continua en $(1, 2)$.

De otra manera se puede hacer ver como en el primer método del Problema 4, que dado un $\epsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - f(1, 2)| < \epsilon$ si $|x - 1| < \delta$, $|y - 2| < \delta$.

6. Averiguar si $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x,y) \neq (1,2) \\ 0, & (x,y) = (1,2) \end{cases}$

(*a*) tiene límite cuando $x \to 1$ y $y \to 2$, (*b*) es continua en $(1, 2)$.

(*a*) Por el Problema 4, resulta que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = 5$, pues el *límite* no tiene nada que ver con el *valor* de (1, 2).

(*b*) Como $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = 5$ y $f(1, 2) = 0$, es, pues, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) \neq f(1, 2)$, por lo que la función es *discontinua* en (1, 2).

7. Estudiar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$.

Sean $x \to 0$ y $y \to 0$ de tal modo que $y = mx$ (recta del plano xy). Entonces, a lo largo de esta recta,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Como el límite de la función depende de la manera de tender a (0, 0) (esto es, de la pendiente m de la recta), la función no puede ser continua en (0, 0).

Otro método:

Como $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$ y $\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\} = -1$ no son iguales, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ no existe. Luego $f(x, y)$ no puede ser continua en (0, 0).

DERIVADAS PARCIALES

8. Si $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$, hallar (*a*) $\partial f/\partial x$ y (*b*) $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0) directamente a partir de la definición.

$$(a)\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[2(x_0+h)^2-(x_0+h)y_0+y_0^2] - [2x_0^2-x_0y_0+y_0^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4hx_0+2h^2-hy_0}{h} = \lim_{h\to 0}(4x_0+2h-y_0) = 4x_0-y_0$$

$$(b)\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{[2x_0^2-x_0(y_0+k)+(y_0+k)^2] - [2x_0^2-x_0y_0+y_0^2]}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{kx_0+2ky_0+k^2}{k} = \lim_{k\to 0}(-x_0+2y_0+k) = -x_0+2y_0$$

Como existen los límites para todo punto (x_0, y_0), se puede escribir $f_x(x, y) = f_x = 4x - y$, $f_y(x, y) = f_y = -x + 2y$, que son a su vez funciones de x y y.

Nótese que *formalmente* $f_x(x_0, y_0)$ se obtiene de $f(x, y)$ derivando con respecto a x, manteniendo y constante y haciendo luego $x = x_0$, $y = y_0$. Análogamente se obtiene $f_y(x_0, y_0)$ derivando f con respecto a y, manteniendo x constante. Este procedimiento, si bien expeditivo en la práctica, no da siempre resultados correctos (véase Problema 9), y solo es legítimo si las derivadas parciales son continuas.

9. Sea $f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$. Demostrar que (*a*) $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ existen ambas, pero que (*b*) $f(x,y)$ es discontinua en $(0,0)$.

(*a*) $f_x(0,0) \;=\; \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \;=\; \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} \;=\; 0$

$f_y(0,0) \;=\; \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \;=\; \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} \;=\; 0$

(*b*) Sea $x \to 0$ y $y \to 0$ por la recta $y = mx$ del plano xy. Entonces, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ con lo que el límite depende de la manera de tender las variables al punto $(0,0)$ y, por tanto, no existe. Luego $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

Obsérvese que al contrario de lo que ocurre con funciones de una variable, la existencia de las primeras derivadas parciales en un punto no implica la continuidad en dicho punto.

Obsérvese asimismo que si $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f_x = \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ y $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ no se pueden calcular con solo hacer $x = 0$ y $y = 0$. Véase nota al final del Problema 5(*b*), Capítulo 4.

10. Si $\phi(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$, hallar (*a*) ϕ_x, (*b*) ϕ_y, (*c*) ϕ_{xx}, (*d*) ϕ_{yy}, (*e*) ϕ_{xy}, (*f*) ϕ_{yx}.

(*a*) $\phi_x \;=\; \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3y + e^{xy^2}) \;=\; 3x^2y + e^{xy^2}\cdot y^2 \;=\; 3x^2y + y^2e^{xy^2}$

(*b*) $\phi_y \;=\; \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3y + e^{xy^2}) \;=\; x^3 + e^{xy^2}\cdot 2xy \;=\; x^3 + 2xy\,e^{xy^2}$

(*c*) $\phi_{xx} \;=\; \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right) \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y + y^2e^{xy^2}) \;=\; 6xy + y^2(e^{xy^2}\cdot y^2) \;=\; 6xy + y^4e^{xy^2}$

(*d*) $\phi_{yy} \;=\; \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial y}\;(x^3 + 2xy\,e^{xy^2}) \;=\; 0 + 2xy\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2}) + e^{xy^2}\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)$

$\qquad = \; 2xy\cdot e^{xy^2}\cdot 2xy + e^{xy^2}\cdot 2x \;=\; 4x^2y^2e^{xy^2} + 2x\,e^{xy^2}$

(*e*) $\phi_{xy} \;=\; \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right) \;=\; \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2y + y^2e^{xy^2}) \;=\; 3x^2 + y^2\cdot e^{xy^2}\cdot 2xy + e^{xy^2}\cdot 2y$

$\qquad = \; 3x^2 + 2xy^3e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$

(*f*) $\phi_{yx} \;=\; \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right) \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy\,e^{xy^2}) \;=\; 3x^2 + 2xy\cdot e^{xy^2}\cdot y^2 + e^{xy^2}\cdot 2y$

$\qquad = \; 3x^2 + 2xy^3e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$

Obsérvese que $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ en este caso, lo cual se debe a que existen y son continuas las segundas derivadas parciales en todo (x,y) de una región $\mathcal{R}$. Si esto no es así se puede tener $\phi_{xy} \neq \phi_{yx}$ (véase Problema 43, por ejemplo).

11. Mostrar que $U(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisface la ecuación diferencial de Laplace en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2U}{\partial z^2} \;=\; 0.$$

Se supone que $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Entonces

$$\frac{\partial U}{\partial x} \;=\; -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x \;=\; -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}] \;=\; (-x)[-\tfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x] + (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot(-1)$$

$$=\; \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \;=\; \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Así mismo. $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$

Sumando. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$

12. Si $z = x^2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$, hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ en $(1, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{2^2} = 1 \quad \text{en } (1,1).$$

El resultado se puede escribir $z_{xy}(1, 1) = 1$.

Nota: En este cálculo se utiliza el ser z_{xy} continua en $(1, 1)$ (véase observación al final del Problema 9).

13. Si $f(x, y)$ está definida en una región $\mathcal{R}$ y si f_{xy} y f_{yx} existen y son continuas en un punto de $\mathcal{R}$, demostrar que $f_{xy} = f_{yx}$ en ese punto.

Sea (x_0, y_0) el punto de $\mathcal{R}$. Considérese

$$G = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)$$

Defínase (1) $\phi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y)$ $\qquad (2)$ $\psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y)$

Luego $\qquad (3)$ $G = \phi(x_0, y_0+k) - \phi(x_0, y_0)$ $\qquad (4)$ $G = \psi(x_0+h, y_0) - \psi(x_0, y_0)$

Aplicando el teorema del valor medio para funciones de una variable (véase página 61) a (3) y (4) se tiene

$$(5)\quad G = k\phi_y(x_0, y_0+\theta_1 k) = k\{f_y(x_0+h, y_0+\theta_1 k) - f_y(x_0, y_0+\theta_1 k)\} \qquad 0<\theta_1<1$$
$$(6)\quad G = h\psi_x(x_0+\theta_2 h, y_0) = h\{f_x(x_0+\theta_2 h, y_0+k) - f_x(x_0+\theta_2 h, y_0)\} \qquad 0<\theta_2<1$$

Aplicando otra vez el mismo teorema a (5) y (6) se tiene

$$(7)\quad G = hk\, f_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_1 k) \qquad 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_3<1$$
$$(8)\quad G = hk\, f_{xy}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_4 k) \qquad 0<\theta_2<1,\ 0<\theta_4<1$$

De (7) y (8) resulta

$$(9)\quad f_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_1 k) = f_{xy}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_4 k)$$

Haciendo $h \to 0$ y $k \to 0$ en (9) se tiene, puesto que f_{xy} y f_{yx} se han supuesto continuas en (x_0, y_0),

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

como se afirmaba. Para un ejemplo en que esto no se verifica, véase Problema 43.

DIFERENCIALES

14. Sea $f(x, y)$ con primeras derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ del plano xy. Demostrar que

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero con Δx y Δy.

Aplicando el teorema del valor medio para funciones de una variable (página 61) se tiene

$$(1)\quad \Delta f = \{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\} + \{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\}$$
$$= \Delta x\, f_x(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) + \Delta y\, f_y(x, y+\theta_2 \Delta y) \qquad 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1$$

Como por hipótesis f_x y f_y son continuas, resulta que

$$f_x(x + \theta_1\Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \epsilon_1, \quad f_y(x, y + \theta_2\Delta y) = f_y(x, y) + \epsilon_2$$

donde $\epsilon_1 \to 0$, $\epsilon_2 \to 0$ con $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

Así, pues, $\Delta f = f_x\Delta x + f_y\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$ como se requiere.

Definiendo $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, se tiene $\Delta f = f_x\,dx + f_y\,dy + \epsilon_1\,dx + \epsilon_2\,dy$.

$df = f_x\,dx + f_y\,dy$ se llama *diferencial* de f (o z) o *parte principal* de Δf (o Δz).

15. Si $z = f(x, y) = x^2y - 3y$, hallar (*a*) Δz, (*b*) dz. (*c*) Calcular Δz y dz si $x = 4$, $y = 3$, $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$. (*d*) ¿Cómo se podría calcular $f(5{,}12,\ 6{,}85)$ sin hacerlo directamente?

Solución :

(*a*)
$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= \{(x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - 3(y+\Delta y)\} - \{x^2y - 3y\}\\ &= \underbrace{2xy\,\Delta x + (x^2-3)\,\Delta y}_{(A)} + \underbrace{(\Delta x)^2 y + 2x\,\Delta x\,\Delta y + (\Delta x)^2\,\Delta y}_{(B)}\end{aligned}$$

La suma (A) es la *parte principal* de Δz y es la diferencial de z, o sea, dz. Así, pues,

(*b*)
$$dz = 2xy\,\Delta x + (x^2 - 3)\,\Delta y = 2xy\,dx + (x^2 - 3)\,dy$$

Otro método: $\quad dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = 2xy\,dx + (x^2 - 3)\,dy$

(*c*)
$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(4 - 0{,}01\ 3 + 0{,}02) - f(4, 3)\\ &= \{(3{,}99)^2(3{,}02) - 3(3{,}02)\} - \{(4)^2(3) - 3(3)\} = 0{,}018702\end{aligned}$$

$$dz = 2xy\,dx + (x^2 - 3)\,dy = 2(4)(3)(-0{,}01) + (4^2 - 3)(0{,}02) = 0{,}02$$

Nótese que en este caso Δz y dz son aproximadamente iguales, lo que se debe a que $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$ son suficientemente pequeños.

(*d*) Hay que hallar $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ si $x + \Delta x = 5{,}12$ y $y + \Delta y = 6{,}85$. Esto puede hacerse tomando $x = 5$, $\Delta x = 0{,}12$, $y = 7$, $\Delta y = -0{,}15$. Como Δx y Δy son pequeños, se tiene que $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$ es aproximadamente igual a $f(x, y) + dz$, es decir, a $z + dz$.

Ahora bien, $\quad z = f(x, y) = f(5, 7) = (5)^2(7) - 3(7) = 154$

$$dz = 2xy\,dx + (x^2 - 3)\,dy = 2(5)(7)(0{,}12) + (5^2 - 3)(-0{,}15) = 5{,}1.$$

Así que el valor pedido es $154 + 5{,}1 = 159{,}1$ aproximadamente. El valor que se obtiene calculando directamente es $159{,}01864$.

16. (*a*) Sea $U = x^2e^{y/x}$. Hallar dU. (*b*) Mostrar que $(3x^2y - 2y^2)\,dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)\,dy$ se puede escribir como diferencial exacta de una función $\phi(x, y)$ y hallar ésta.

(*a*) **Método 1:**

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2xe^{y/x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Luego $\quad dU = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy = (2xe^{y/x} - ye^{y/x})\,dx + xe^{y/x}\,dy$

Método 2:

$$\begin{aligned}dU &= x^2\,d(e^{y/x}) + e^{y/x}\,d(x^2) = x^2e^{y/x}\,d(y/x) + 2xe^{y/x}\,dx\\ &= x^2e^{y/x}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) + 2xe^{y/x}\,dx = (2xe^{y/x} - ye^{y/x})\,dx + xe^{y/x}\,dy\end{aligned}$$

(*b*) **Método 1:**

Suponiendo que $(3x^2y - 2y^2)\,dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)\,dy = d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy.$

$\int x^3\,dy$

Luego $\quad (1)\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2y - 2y^2, \qquad (2)\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x^3 - 4xy + 6y^2$

x^3y

$= -4x +$

$= -4x\frac{1}{2}y^2 + 6\frac{1}{3}y^3$

$= -2xy^2 + 2y^3$

En (1), integrando con respecto a x y manteniendo y constante, se tiene

$$\phi = x^3y - 2xy^2 + F(y)$$

donde $F(y)$ es la «constante» de integración. Sustituyendo en (2) se tiene

$$x^3 - 4xy + F'(y) = x^3 - 4xy + 6y^2, \quad \text{de donde} \quad F'(y) = 6y^2, \text{ es decir, } F(y) = 2y^3 + c$$

Luego la función pedida es $\phi = x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + c$, siendo c una constante arbitraria.

Obsérvese que por el Teorema 3, página 106, la existencia de una función semejante es indudable, pues si $P = 3x^2y - 2y^2$ y $Q = x^3 - 4xy + 6y^2$, entonces $\partial P/\partial y = 3x^2 - 4y = \partial Q/\partial x$ idénticamente. Si $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, no existiría esta función y la expresión dada no sería una diferencial exacta.

Método 2:

$$\begin{aligned}(3x^2y - 2y^2)\,dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)\,dy &= (3x^2y\,dx + x^3\,dy) - (2y^2\,dx + 4xy\,dy) + 6y^2\,dy \\ &= d(x^3y) - d(2xy^2) + d(2y^3) = d(x^3y - 2xy^2 + 2y^3) \\ &= d(x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + c)\end{aligned}$$

Así que la función buscada es $x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + c$.

Este *método de agrupación* depende de la habilidad que se tenga para reconocer combinaciones que sean diferenciales exactas y es menos directo que el Método 1. Naturalmente, antes de intentar aplicar ningún método hay que averiguar si la expresión dada es diferencial exacta mediante el Teorema 3, página 106. Véase último párrafo del Método 1.

DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS

17. Sean $z = f(x, y)$ y $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ con f, ϕ, ψ diferenciables por hipótesis. Demostrar que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Por los resultados del Problema 14, se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}\right\} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

pues para $\Delta t \to 0$ se tiene $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\epsilon_1 \to 0$, $\epsilon_2 \to 0$, $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \to \dfrac{dy}{dt}$.

18. Si $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\,\mathrm{sen}\,t$, calcular dz/dt en $t = \pi/2$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (y^2e^{xy^2})(-t\,\mathrm{sen}\,t + \cos t) + (2xye^{xy^2})(t\cos t + \mathrm{sen}\,t).$$

En $t = \pi/2$, $x = 0$, $y = \pi/2$. Luego $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=\pi/2} = (\pi^2/4)(-\pi/2) + (0)(1) = -\pi^3/8$.

Otro método: Sustitúyase x y y para obtener $z = e^{t^3\,\mathrm{sen}^2 t\cos t}$ y derívese luego.

19. Si $z = f(x, y)$ con $x = \phi(u, v)$ y $y = \psi(u, v)$, probemos que

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$, (b) $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

(a) Por el Problema 14, supuestas diferenciables f, ϕ, ψ, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta u} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta u} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta u}\right\} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

(b) El resultado se demuestra como en (a) remplazando Δu por Δv y haciendo $\Delta v \to 0$.

20. Demostrar que $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, aunque x y y sean variables dependientes.

Supóngase que x y y dependen de tres variables u, v, w, por ejemplo. Entonces,

$$(1)\quad dx = x_u\,du + x_v\,dv + x_w\,dw \qquad (2)\quad dy = y_u\,du + y_v\,dv + y_w\,dw$$

Así que
$$z_x\,dx + z_y\,dy = (z_x x_u + z_y y_u)\,du + (z_x x_v + z_y y_v)\,dv + (z_x x_w + z_y y_w)\,dw$$
$$= z_u\,du + z_v\,dv + z_w\,dw = dz$$

por obvias generalizaciones del Problema 19.

21. Si $T = x^3 - xy + y^3$, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi$, hallar (a) $\partial T/\partial\rho$, (b) $\partial T/\partial\phi$.

$$\frac{\partial T}{\partial\rho} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho} = (3x^2-y)(\cos\phi) + (3y^2-x)(\text{sen}\,\phi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\phi} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi} = (3x^2-y)(-\rho\,\text{sen}\,\phi) + (3y^2-x)(\rho\cos\phi)$$

Lo que también puede hacerse por sustitución directa de x y y en T.

22. Si $U = z\,\text{sen}\,y/x$ con $x = 3r^2+2s$, $y = 4r-2s^3$, $z = 2r^2-3s^2$, hallar (a) $\partial U/\partial r$, (b) $\partial U/\partial s$.

(a)
$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$= \left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}(6r) + \left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(4) + \left(\text{sen}\,\frac{y}{x}\right)(4r)$$
$$= -\frac{6ryz}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x} + 4r\,\text{sen}\,\frac{y}{x}$$

(b)
$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= \left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}(2) + \left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(-6s^2) + \left(\text{sen}\,\frac{y}{x}\right)(-6s)$$
$$= -\frac{2yz}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{6s^2z}{x}\cos\frac{y}{x} - 6s\,\text{sen}\,\frac{y}{x}$$

23. Si $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi$, mostrar que $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2 + \dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\right)^2$.

Empleando la notación por subíndices para derivadas parciales,

$$V_\rho = V_x x_\rho + V_y y_\rho = V_x\cos\phi + V_y\,\text{sen}\,\phi \tag{1}$$
$$V_\phi = V_x x_\phi + V_y y_\phi = V_x(-\rho\,\text{sen}\,\phi) + V_y(\rho\cos\phi) \tag{2}$$

Dividiendo ambos miembros de (2) por ρ se tiene

$$\frac{1}{\rho}V_\phi = -V_x\,\text{sen}\,\phi + V_y\cos\phi \tag{3}$$

Entonces, por (1) y (3) se tiene

$$V_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}V_\phi^2 = (V_x\cos\phi + V_y\,\text{sen}\,\phi)^2 + (-V_x\,\text{sen}\,\phi + V_y\cos\phi)^2 = V_x^2 + V_y^2$$

24. Mostrar que $z = f(x^2y)$ con f diferenciable satisface a $x(\partial z/\partial x) = 2y(\partial z/\partial y)$.

Sea $x^2y = u$. Luego $z = f(u)$. Así que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot 2xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\cdot x^2$$

Entonces $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\cdot 2x^2y$, $2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot 2x^2y$ y es $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Otro método:

Se tiene $\quad dz \;=\; f'(x^2y)\,d(x^2y) \;=\; f'(x^2y)(2xy\,dx + x^2\,dy).$

También $\quad dz \;=\; \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$

Entonces, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} \;=\; 2xy\,f'(x^2y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} \;=\; x^2\,f'(x^2y).$

Eliminando $f'(x^2y)$ se tiene $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} \;=\; 2y\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

25. Si para todo valor del parámetro λ y cierta constante p, $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x, y)$ idénticamente, supuesta F diferenciable, demostrar que $x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) = pF$.

Sea $\lambda x = u$, $\lambda y = v$. Entonces,

$$F(u,v) \;=\; \lambda^p F(x,y) \tag{1}$$

La derivada con respecto a λ del primer miembro de (1) es

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \;=\; \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \lambda} \;=\; \frac{\partial F}{\partial u}x + \frac{\partial F}{\partial v}y$$

La derivada con respecto a λ del segundo miembro de (1) es $p\lambda^{p-1}F$. Luego

$$x\frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial F}{\partial v} \;=\; p\,\lambda^{p-1}F \tag{2}$$

Haciendo $\lambda = 1$ en (2) de modo que $u = x$, $v = y$, se tiene $x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) = pF$.

26. Si $F(x, y) = x^4y^2 \operatorname{sen}^{-1} y/x$, mostrar que $x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) = 6F$.

Como $(F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4(\lambda y)^2 \operatorname{sen}^{-1} \lambda y/\lambda x = \lambda^6 x^4y^2 \operatorname{sen}^{-1} y/x = \lambda^6 F(x, y)$, se tiene el resultado a partir del Problema 25 con $p = 6$. Desde luego se puede mostrar también por derivación, directamente.

27. Demostrar que $Y = f(x + at) + g(x - at)$ satisface la ecuación $\partial^2 Y/\partial t^2 = a^2(\partial^2 Y/\partial x^2)$, donde f y g se suponen diferenciables dos veces por lo menos y a es una constante.

Sea $u = x + at$, $v = x - at$ de modo que $Y = f(u) + g(v)$. Luego si $f'(u) \equiv df/du$, $g'(v) \equiv dg/dv$,

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \;=\; \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \;=\; a\,f'(u) - ag'(v), \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} \;=\; \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \;=\; f'(u) + g'(v)$$

Derivando otra vez y utilizando la notación $f''(u) \equiv d^2f/du^2$, $g''(v) \equiv d^2g/dv^2$, se tiene

$$(1)\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \;=\; \frac{\partial Y_t}{\partial t} \;=\; \frac{\partial Y_t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \;=\; \frac{\partial}{\partial u}\{a\,f'(u) - a\,g'(v)\}\,(a) + \frac{\partial}{\partial v}\{a\,f'(u) - a\,g'(v)\}\,(-a)$$
$$=\; a^2 f''(u) + a^2 g''(v)$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial Y_x}{\partial x} \;=\; \frac{\partial Y_x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \;=\; \frac{\partial}{\partial u}\{f'(u) + g'(v)\} + \frac{\partial}{\partial v}\{f'(u) + g'(v)\}$$
$$=\; f''(u) + g''(v)$$

De donde por (1) y (2), $\partial^2 Y/\partial t^2 \;=\; a^2(\partial^2 Y/\partial x^2)$.

28. Si $x = 2r - s$ y $y = r + 2s$, averiguar $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$ en función de las derivadas con respecto a r y s.

Despejando r y s de $x = 2r - s$, $y = r + 2s$: $r = (2x + y)/5$, $s = (2y - x)/5$.
Luego $\partial r/\partial x = 2/5$, $\partial s/\partial x = -1/5$, $\partial r/\partial y = 1/5$, $\partial s/\partial y = 2/5$. Por tanto,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial y}\\ &= \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial s}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\\ &= \frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial s} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)\end{aligned}$$

suponiendo que U tiene segundas derivadas parciales continuas.

FUNCIONES IMPLICITAS Y JACOBIANOS

29. Si $U = x^3 y$, hallar dU/dt si *(1)* $x^5 + y = t$, *(2)* $x^2 + y^3 = t^2$.

Las ecuaciones *(1)* y *(2)* definen x y y como funciones (implícitas) de t. Derivando entonces con respecto a t se tiene

$$(3)\quad 5x^4(dx/dt) + dy/dt = 1 \qquad (4)\quad 2x(dx/dt) + 3y^2(dy/dt) = 2t$$

De *(3)* y *(4)* se obtiene para dx/dt y dy/dt,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 3y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}} = \frac{3y^2 - 2t}{15x^4y^2 - 2x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}} = \frac{10x^4t - 2x}{15x^4y^2 - 2x}$$

Luego $$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (3x^2y)\left(\frac{3y^2 - 2t}{15x^4y^2 - 2x}\right) + (x^3)\left(\frac{10x^4t - 2x}{15x^4y^2 - 2x}\right).$$

30. Si $F(x, y, z) = 0$ define z como función implícita de x y y en una región $\mathcal{R}$ del plano xy, demostrar que *(a)* $\partial z/\partial x = -F_x/F_z$ y *(b)* $\partial z/\partial y = -F_y/F_z$ con $F_z \neq 0$.

Puesto que z es función de x y y, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Luego $$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Como x y y son independientes se tiene

$$(1)\quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (2)\quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

de donde resultan los valores buscados. Si se quiere pueden escribirse directamente las igualdades *(1)* y *(2)*.

31. Si $F(x, y, u, v) = 0$ y $G(x, y, u, v) = 0$, hallar *(a)* $\partial u/\partial x$, *(b)* $\partial u/\partial y$, *(c)* $\partial v/\partial x$, *(d)* $\partial v/\partial y$.

Las dos ecuaciones definen en general las variables dependientes u y v como funciones (implícitas variables independientes x y y. Con la notación por subíndices se tiene

$$\begin{aligned}(1)\quad dF &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_u\,du + F_v\,dv = 0\\ (2)\quad dG &= G_x\,dx + G_y\,d_y + G_u\,du + G_v\,dv = 0\end{aligned}$$

Asimismo, puesto que u y v son funciones de x y y,

$$(3)\quad du = u_x\,dx + u_y\,dy \qquad (4)\quad dv = v_x\,dx + v_y\,dy.$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1) y (2),

$$(5)\quad dF = (F_x + F_u u_x + F_v v_x)\,dx + (F_y + F_u u_y + F_v v_y)\,dy = 0$$
$$(6)\quad dG = (G_x + G_u u_x + G_v v_x)\,dx + (G_y + G_u u_y + G_v v_y)\,dy = 0$$

Como x y y son independientes, los coeficientes de dx y dy en (5) y (6) son nulos. Luego se tiene

$$(7)\quad \begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} F_u u_y + F_v v_y = -F_y \\ G_u u_y + G_v v_y = -G_y \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas (7) y (8),

$$(a)\quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad (b)\quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$(c)\quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad (d)\quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

El determinante funcional $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$, denotado bien por $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ o por $J\left(\dfrac{F,G}{u,v}\right)$ es el *jacobiano* de F y G con respecto a u y v se supone $\neq 0$.

Podrían darse reglas mnemotécnicas para escribir inmediatamente las derivadas parciales buscadas por los jacobianos (véase también Problema 33).

32. Si $u^2 - v = 3x + y$ y $u - 2v^2 = x - 2y$, hallar (a) $\partial u/\partial x$, (b) $\partial v/\partial x$, (c) $\partial u/\partial y$, (d) $\partial v/\partial y$.

Método 1: Derívense las ecuaciones dadas con respecto a x, considerando u y v como funciones de x y y. Entonces,

$$(1)\quad 2u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3 \qquad (2)\quad \frac{\partial u}{\partial x} - 4v\frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

Despejando, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1-12v}{1-8uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2u-3}{1-8uv}$.

Derivando respecto a y se tiene

$$(3)\quad 2u\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \qquad (4)\quad \frac{\partial u}{\partial y} - 4v\frac{\partial v}{\partial y} = -2$$

Despejando, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2-4v}{1-8uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-4u-1}{1-8uv}$.

Se tiene, desde luego, supuesto que $1 - 8uv \neq 0$.

Método 2: Las ecuaciones dadas son $F = u^2 - v - 3x - y = 0$, $G = u - 2v^2 - x + 2y = 0$. Luego por el Problema 31

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1-12v}{1-8uv}$$

siempre que $1 - 8uv = 0$. Análogamente se obtienen las otras derivadas parciales.

33. Si $F(u,v,w,x,y) = 0$, $G(u,v,w,x,y) = 0$, $H(u,v,w,x,y) = 0$, hallar

(a) $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x$, (b) $\left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_w$, (c) $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_y$.

De 3 ecuaciones en 5 variables se puede (al menos teóricamente) determinar 3 variables en función de las otras 2. Así que 3 de las variables son dependientes y 2 son independientes. Si se quiere averiguar $\partial v/\partial y$, se sabría que v es una variable dependiente y y una independiente, pero no se sabría cuál es la otra variable independiente. No obstante, la notación $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ sirve para indicar que se ha de obtener $\partial v/\partial y$ manteniendo x constante, o sea, que x es la otra variable independiente.

(*a*) Derivando la ecuación dada con respecto a y, manteniendo x constante, se tiene

$$(1)\quad F_u u_y + F_v v_y + F_w w_y + F_y = 0 \qquad (2)\quad G_u u_y + G_v v_y + G_w w_y + G_y = 0$$
$$(3)\quad H_u u_y + H_v v_y + H_w w_y + H_y = 0$$

Resolviendo el sistema, se tiene para v_y

$$v_y = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y & F_w \\ G_u & G_y & G_w \\ H_u & H_y & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

Las ecuaciones (*1*), (*2*) y (*3*) se pueden también obtener por diferenciales como en el Problema 31.

El método de los jacobianos orienta muy bien para escribir los resultados de inmediato, como se ve en este problema y en el 31. Así, obsérvese que al calcular $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ el resultado es el opuesto del cociente de dos jacobianos, el numerador, que contiene la variable independiente y, el denominador que contiene la variable dependiente v en la misma posición relativa. Mediante este esquema, se tiene entonces

$$(b)\quad \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_w = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(v,y,u)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,u)}} \qquad (c)\quad \left.\frac{\partial w}{\partial u}\right|_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(w,x,v)}}$$

34. Si $z^3 - xz - y = 0$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}$.

Diferenciando con respecto a x, manteniendo y constante y recordando que z es la variable dependiente que depende de las independientes x y y, se tiene

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial x} - z = 0 \qquad \text{y} \qquad (1)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2-x}$$

Diferenciando con respecto a y, manteniendo x constante,

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad (2)\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3z^2-x}$$

Diferenciando (*2*) con respecto x y utilizando la (*1*),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-1}{(3z^2-x)^2}\left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = \frac{1-6z[z/(3z^2-x)]}{(3z^2-x)^2} = -\frac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}$$

El resultado se puede obtener también diferenciando (*1*) con respecto a y y empleando la (*2*).

35. Sean $u = f(x,y)$ y $v = g(x,y)$ donde f y g son continuamente diferenciables en cierta región $\mathcal{R}$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que exista una relación funcional entre u y v de la forma $\phi(u,v) = 0$ es la anulación del jacobiano, esto es, que $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$ idénticamente.

La condición es necesaria. Hay que demostrar que si existe la relación funcional $\phi(u, v) = 0$, entonces el jacobiano es idénticamente nulo, $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$. Para ello nótese que

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi_u\,du + \phi_v\,dv = \phi_u(u_x\,dx + u_y\,dy) + \phi_v(v_x\,dx + v_y\,dy) \\ &= (\phi_u u_x + \phi_v v_x)\,dx + (\phi_u u_y + \phi_v v_y)\,dy = 0 \end{aligned}$$

Luego $\quad (1)\ \ \phi_u u_x + \phi_v v_x = 0 \qquad (2)\ \ \phi_u u_y + \phi_v v_y = 0$

Pero ϕ_u y ϕ_v no pueden ser idénticamente nulos, pues entonces no habría relación funcional, en contra de la hipótesis. Luego de (1) y (2) resulta que $\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ idénticamente.

La condición es suficiente. Hay que demostrar que si el jacobiano $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ idénticamente, existe entonces una relación funcional entre u y v, es decir, $\phi(u, v) = 0$.

Se supone primero que $u_x = 0$ y $u_y = 0$. En este caso, el jacobiano es idénticamente nulo y u es una constante c_1, de modo que se tiene la relación funcional trivial $u = c_1$.

Supóngase ahora que no son ambas $u_x = 0$ y $u_y = 0$; sea, por ejemplo, $u_x \neq 0$. Entonces, de acuerdo con el Teorema 1, página 108, se puede despejar x en la ecuación $u = f(x, y)$ para obtener $x = F(u, y)$, de donde se deduce que

$$(1)\quad u = f\{F(u, y), y\} \qquad (2)\quad v = g\{F(u, y), y\}$$

De donde, respectivamente,

$$(3)\qquad du = u_x\,dx + u_y\,dy = u_x(F_u\,du + F_y\,dy) + u_y\,dy = u_x F_u\,du + (u_x F_y + u_y)\,dy$$

$$(4)\qquad dv = v_x\,dx + v_y\,dy = v_x(F_u\,du + F_y\,dy) + v_y\,dy = v_x F_u\,du + (v_x F_y + v_y)\,dy$$

De (3), $u_x F_u = 1$ y $u_x F_y + u_y = 0$ o (5) $F_y = -u_y/u_x$. Con lo que (4) se convierte en

$$(6)\qquad dv = v_x F_u\,du + \{v_x(-u_y/u_x) + v_y\}\,dy = v_x F_u\,du + \left(\frac{u_x v_y - u_y v_x}{u_x}\right)dy.$$

Pero, por hipótesis, $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = 0$ idénticamente, aunque (6) se convierte en $dv = v_x F_u\,du$. Esto significa esencialmente que con respecto a (2), $\partial v/\partial y = 0$, lo que quiere decir que v no es dependiente de y, sino que depende solamente de u, es decir, que v es función de u, que es lo mismo que decir que existe la relación funcional $\phi(u, v) = 0$.

36. (a) Si $u = \dfrac{x + y}{1 - xy}$ y $v = \operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1} y$, hallar $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

(b) ¿Hay relación funcional entre u y v? Si la hay, hallarla.

(a) $$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1 + y^2}{(1 - xy)^2} & \dfrac{1 + x^2}{(1 - xy)^2} \\ \dfrac{1}{1 + x^2} & \dfrac{1}{1 + y^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } xy \neq 1.$$

(b) Pero por el Problema 35, como el jacobiano es idénticamente nulo en una región, debe haber una relación funcional entre u y v. Se ve que ésta es $\operatorname{tg} v = u$, esto es, $\phi(u, v) = u - \operatorname{tg} v = 0$. Esto se puede mostrar directamente resolviendo para despejar x, por ejemplo, en una de las ecuaciones y luego sustituyendo en la otra. Así, de $v = \operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1} y$ se deduce $\operatorname{tg}^{-1} x = v - \operatorname{tg}^{-1} y$ y, por tanto,

$$x = \operatorname{tg}(v - \operatorname{tg}^{-1} y) = \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} y)}{1 + \operatorname{tg} v \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} y)} = \frac{\operatorname{tg} v - y}{1 + y \operatorname{tg} v}$$

Que sustituido en $u = (x + y)/(1 - xy)$ y simplificando da $u = \operatorname{tg} v$.

37. (*a*) Si $x = u - v + w$, $y = u^2 - v^2 - w^2$ y $z = u^3 + v$, calcular el jacobiano $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ y (*b*) explicar el significado de la no anulación de este jacobiano.

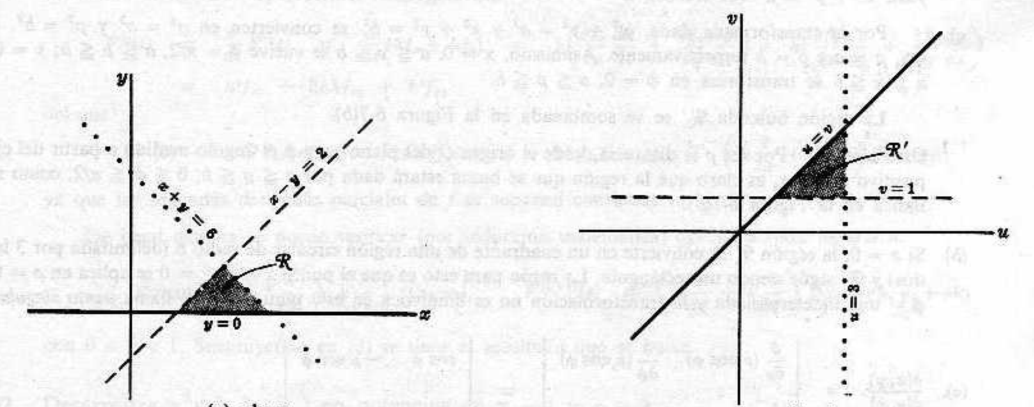
(*a*) $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2u & -2v & -2w \\ 3u^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6wu^2 + 2u + 6u^2v + 2w$$

(*b*) Las ecuaciones dadas se pueden resolver simultáneamente para obtener u, v, w en función de x, y, z en una región $\mathcal{R}$ si el jacobiano no es nulo en $\mathcal{R}$.

TRANSFORMACIONES, COORDENADAS CURVILINEAS

38. Una región $\mathcal{R}$ del plano xy está limitada por $x + y = 6$, $x - y = 2$ y $y = 0$. (*a*) Determinar la región $\mathcal{R}'$ del plano uv en que se aplica $\mathcal{R}$ por la transformación $x = u + v$, $y = u - v$. (*b*) Calcular $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. (*c*) Comparar el resultado de (*b*) con la relación entre las áreas de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

(*a*) La región $\mathcal{R}$ sombreada en la Fig. 6-6(*a*) es un triángulo formado por las rectas $x + y = 6$, $x - y = 2$ y $y = 0$ que aparecen en líneas de puntos, de trazos y de trazo grueso respectivamente.



(*a*) plano *xy* (*b*) plano *uv*

Fig. 6-6

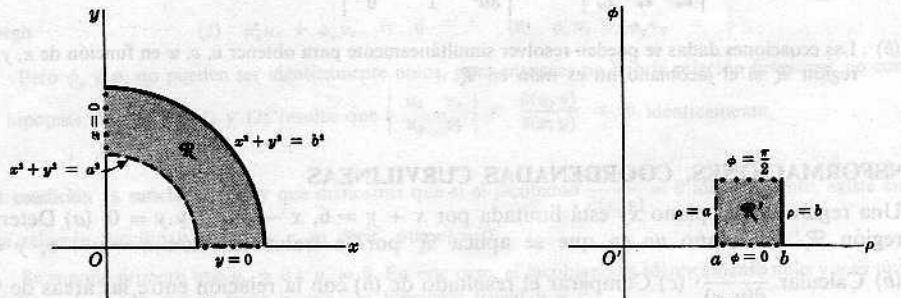
Por la transformación dada, la recta $x + y = 6$ se transforma en $(u + v) + (u - v) = 6$, esto es, $2u = 6$ o $u = 3$, que es una recta (la de puntos) en el plano uv de la Figura 6-6(*b*).

Análogamente, $x - y = 2$ se convierte en $(u + v) - (u - v) = 2$, o sea, $v = 1$, que es una recta (la de trazos) del plano uv. De la misma manera, $y = 0$ se vuelve $u - v = 0$, o sea, $u = v$, que es la recta de trazo grueso en el plano uv. Así que la región buscada está limitada por $u = 3$, $v = 1$ y $u = v$ y se dibuja sombreada en la Figura 6-6(*b*).

(*b*) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u+v) \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial u}(u-v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

(*c*) El área de la región triangular $\mathcal{R}$ es 4, en tanto que la de la región triangular $\mathcal{R}'$ es 2. Luego la relación entre ambas es $4/2 = 2$, que concuerda con el valor del jacobiano en (*b*). Como el jacobiano es constante en este caso, las áreas de cualesquiera regiones $\mathcal{R}$ del plano xy son el doble de las áreas de las regiones correspondientes transformadas $\mathcal{R}'$ del plano uv.

39. Una región $\mathcal{R}$ del plano xy está delimitada por $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $x = 0$ y $y = 0$, con $0 < a < b$. (*a*) Determinar la región $\mathcal{R}'$ en la cual se transforma $\mathcal{R}$ por la transformación $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi$, con $\rho > 0$, $0 \leqq \phi < 2\pi$. (*b*) Estudiar lo que ocurre si $a = 0$. (*c*) Calcular $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}$. (*d*) Calcular $\dfrac{\partial(\rho, \phi)}{\partial(x, y)}$.



(*a*) (*b*)

Fig. 6-7

(*a*) La región $\mathcal{R}$ [sombreada en la Fig. 6-7(*a*)] está delimitada por $x = 0$ (de puntos), $y = 0$ (de puntos y rayas), $x^2 + y^2 = a^2$ (de trazos), $x^2 + y^2 = b^2$ (de trazo grueso).

Por la transformada dada, $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ se convierten en $\rho^2 = a^2$ y $\rho^2 = b^2$, o sea, $\rho = a$ y $\rho = b$ respectivamente. Asimismo, $x = 0$, $a \leqq y \leqq b$ se vuelve $\phi = \pi/2$, $a \leqq \rho \leqq b$; $y = 0$, $a \leqq x \leqq b$ se transforma en $\phi = 0$, $a \leqq \rho \leqq b$.

La región buscada $\mathcal{R}'$ se ve sombreada en la Figura 6-7(*b*).

Otro método: Por ser ρ la distancia desde el origen O del plano xy y ϕ el ángulo medido a partir del eje positivo de las x, es claro que la región que se busca estará dada por $a \leqq \rho \leqq b$, $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$, como se indica en la Figura 6-7(*b*).

(*b*) Si $a = 0$, la región $\mathcal{R}$ se convierte en un cuadrante de una región circular de radio b (delimitada por 3 lados) y $\mathcal{R}'$ sigue siendo un rectángulo. La razón para esto es que el punto $x = 0$, $y = 0$ se aplica en $\rho = 0$, $\phi =$ una indeterminada y la transformación no es biunívoca en este punto, que se llama *punto singular*.

(*c*)
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\phi) & \dfrac{\partial}{\partial\phi}(\rho\cos\phi) \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\operatorname{sen}\phi) & \dfrac{\partial}{\partial\phi}(\rho\operatorname{sen}\phi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix}$$
$$= \rho(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) = \rho$$

(*d*) Por el Problema 45(*b*) se tiene, haciendo $u = \rho$, $v = \phi$,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}\,\frac{\partial(\rho, \phi)}{\partial(x, y)} = 1 \qquad \text{así que, con } (c), \qquad \frac{\partial(\rho, \phi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\rho}$$

que también se puede obtener por derivación directa.

Nótese que por los jacobianos de esta transformación es claro el por qué $\rho = 0$ (esto es, $x = 0$, $y = 0$) es punto singular.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO, TEOREMA DE TAYLOR

40. Demostrar el primer teorema del valor medio para funciones de dos variables.

Sea $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$. Por el teorema del valor medio para funciones de una variable,

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \qquad 0 < \theta < 1 \tag{1}$$

Si $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$, entonces $F(t) = f(x, y)$, de este modo por el Problema 17,

$$F'(t) = f_x(dx/dt) + f_y(dy/dt) = hf_x + kf_y \quad \text{y} \quad F'(\theta) = h\,f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\,f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

donde $0 < \theta < 1$. Así (*1*) se convierte en

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = h\,f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\,f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \tag{2}$$

donde $0 < \theta < 1$ como se buscaba.

Obsérvese que (*2*), que es análoga a (*1*) del Problema 14 donde $h = \Delta x$, tiene la ventaja de ser más simétrica (y también más útil), ya que solo entra un solo número θ.

41. Demostrar el teorema de Taylor para funciones de dos variables.

Sea $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ como en el Problema 40. Por el teorema de Taylor para funciones de una variable,

$$F(t) = F(0) + F'(0)\,t + \frac{F''(0)\,t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1} \quad 0<\theta<t \tag{1}$$

y si $t=1$,

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad 0<\theta<1 \tag{2}$$

del Problema 40.

$$F'(0) = h\,f_x(x_0, y_0) + k\,f_y(x_0, y_0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$$

utilizando la notación operacional. Análogamente

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}F'(t) = \frac{d}{dt}(hf_x + kf_y) = h\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) + k\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \\ &= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \end{aligned}$$

del que

$$F''(0) = h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk\,f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$$

ya que las segundas derivadas parciales de f se suponen continuas.

De igual manera se puede verificar (por inducción matemática) que para todo natural n,

$$F^{(n)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0), \qquad F^{(n+1)}(\theta) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

con $0 < \theta < 1$. Sustituyendo en (*2*) se tiene el resultado que se busca.

42. Desarrollar $x^2y + 3y - 2$ en potencias de $x - 1$ y $x + 2$.

Aplicando el teorema de Taylor con $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, donde $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Luego

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2,\; f_x = 2xy,\; f_y = x^2 + 3,\; f_{xx} = 2y,\; f_{xy} = 2x,\; f_{yy} = 0,\; f_{xxx} = 0,\; f_{xxy} = 2,\; f_{xyy} = 0,\; f_{yyy} = 0$$

Todas las derivadas superiores son nulas. Así, pues,

$$f(1,-2) = -10,\; f_x(1,-2) = -4,\; f_y(1,-2) = 4,\; f_{xx}(1,-2) = -4,\; f_{xy}(1,-2) = 2,\; f_{yy}(1,-2) = 0$$
$$f_{xxx}(1,-2) = 0,\; f_{xxy}(1,-2) = 2,\; f_{xyy}(1,-2) = 0,\; f_{yyy}(1,-2) = 0$$

Por el teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,-2) + h\,f_x(1,-2) + k\,f_y(1,-2) + \frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(1,-2) + 2hk\,f_{xy}(1,-2) + k^2 f_{yy}(1,-2)\} \\ &\quad + \frac{1}{3!}\{h^3 f_{xxx}(1,-2) + 3h^2k\,f_{xxy}(1,-2) + 3hk^2 f_{xyy}(1,-2) + k^3 f_{yyy}(1,-2)\} + R_3 \end{aligned}$$

donde R_3 es el resto, que en este caso es nulo.

Sustituyendo los valores de las derivadas obtenidas en lo que precede, se tiene

$$x^2y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2)$$

como se puede verificar directamente en este caso por procesos algebraicos.

PROBLEMAS VARIOS

43. Sea $f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calcular (*a*) $f_x(0,0)$, (*b*) $f_y(0,0)$, (*c*) $f_{xx}(0,0)$, (*d*) $f_{yy}(0,0)$, (*e*) $f_{xy}(0,0)$, (*f*) $f_{yx}(0,0)$.

(*a*) $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

(*b*) $f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0$

Si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right\} = xy\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right\} = xy\left(\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) + x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Entonces

(*c*) $f_{xx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

(*d*) $f_{yy}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0$

(*e*) $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{-k}{k} = -1$

(*f*) $f_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

Obsérvese que $f_{xy} \neq f_{yx}$ en (0,0). Véase Problema 13.

44. Mostrar que en la transformación $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi$ la ecuación $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ se convierte en $\dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \phi} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0.$

Tenemos

$$(1)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad (2)\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Derivando $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi$ respecto a x, teniendo en cuenta que ρ y ϕ son funciones de x y y

$$1 = -\rho\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \cos\phi\,\frac{\partial\rho}{\partial x}, \qquad 0 = \rho\cos\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

Resolviendo este sistema,

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\phi, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho} \tag{3}$$

Análogamente, derivando respecto a y,

$$0 = -\rho\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \cos\phi\,\frac{\partial\rho}{\partial y}, \qquad 1 = \rho\cos\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial\rho}{\partial y}$$

Resolviendo el sistema,

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \operatorname{sen}\phi, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\cos\phi}{\rho} \tag{4}$$

Entonces por (*1*) y (*2*)

$$(5)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \cos\phi\,\frac{\partial V}{\partial\rho} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi} \qquad (6)\quad \frac{\partial V}{\partial y} = \operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}$$

De donde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\phi\,\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\,\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= \left(\cos\phi\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \phi}\right)(\cos\phi)$$

$$+ \left(-\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial V}{\partial \rho} + \cos\phi\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \phi} - \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right)\left(-\frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\right)$$

que se reduce a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \cos^2\phi\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \phi} + \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad (7)$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\phi\,\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \frac{2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{2\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \phi} + \frac{\cos^2\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad (8)$$

Sumando (7) y (8) se halla, pues, que $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0.$

45. (*a*) Si $x = f(u,v)$ y $y = g(u,v)$, con $u = \phi(r,s)$ y $v = \psi(r,s)$, demostrar que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$.

(*b*) Demostrar que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ ya que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, e interpretar geométricamente.

(*a*)
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u u_r + x_v v_r & x_u u_s + x_v v_s \\ y_u u_r + y_v v_r & y_u u_s + y_v v_s \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$$

aplicando un teorema sobre multiplicación de determinantes (véase Problema 115). Se ha supuesto aquí naturalmente la existencia de las derivadas parciales que entran en los cálculos.

(*b*) Hacer $r = x$, $s = y$ en el resultado de (*a*). Entonces. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1.$

Las ecuaciones $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ definen una transformación entre puntos (x, y) del plano xy y puntos (u, v) del plano uv. La transformación recíproca viene dada por $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$. El resultado obtenido es que los jacobianos de estas transformaciones son inversos uno del otro.

46. Mostrar que $F(xy, z - 2x) = 0$ satisface bajo condiciones adecuadas la ecuación $x(\partial z/\partial x) - y(\partial z/\partial y) = 2x$. ¿Cuáles son estas condiciones?

Sea $u = xy$, $v = z - 2x$. Luego $F(u,v) = 0$ y

$$(1) \qquad dF = F_u\,du + F_v\,dv = F_u(x\,dy + y\,dx) + F_v(dz - 2\,dx) = 0$$

Tomando z como variable dependiente y x y y como variables independientes, se tiene $dz = z_x\,dx + z_y\,dy$. Sustituyendo entonces en (*1*) se tiene

$$(yF_u + F_v z_x - 2)\,dx + (xF_u + F_v z_y)\,dy = 0$$

Luego por ser x y y independientes,

$$(2) \quad yF_u + F_v z_x - 2 = 0 \qquad (3) \quad xF_u + F_v z_y = 0$$

Despejando F_u en (3) y sustituyendo en (2) se obtiene el resultado pedido $xz_x - yz_y = 2x$ después de dividir por F_v (que se supone distinta de cero).

El resultado será ciertamente válido si se supone que $F(u, v)$ es continuamente diferenciable y que $F_v \neq 0$.

Problemas propuestos

FUNCIONES Y GRAFOS

47. Si $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{1-xy}$, hallar (*a*) $f(1,-3)$, (*b*) $\dfrac{f(2+h,3) - f(2,3)}{h}$, (*c*) $f(x+y, xy)$.

Sol. (*a*) $-\frac{1}{4}$, (*b*) $\dfrac{11}{5(3h+5)}$, (*c*) $\dfrac{2x+2y+xy}{1-x^2y-xy^2}$

48. Si $g(x,y,z) = x^2 - yz + 3xy$, hallar (*a*) $g(1,-2,2)$, (*b*) $g(x+1, y-1, z^2)$, (*c*) $g(xy, xz, x+y)$.
Sol. (*a*) -1, (*b*) $x^2 - x - 2 - yz^2 + z^2 + 3xy + 3y$, (*c*) $x^2y^2 - x^2z - xyz + 3x^2yz$

49. Dar el dominio de definición en que las funciones siguientes están definidas y son reales e indicar gráficamente este dominio.

(*a*) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$, (*b*) $f(x,y) = \ln(x+y)$, (*c*) $f(x,y) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2x-y}{x+y}\right)$.

Sol. (*a*) $x^2+y^2 \neq 1$, (*b*) $x+y > 0$, (*c*) $\left|\dfrac{2x-y}{x+y}\right| \leqq 1$

50. (*a*) ¿Cuál es el dominio de definición para el cual $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x+y+z-1}{x^2+y^2+z^2-1}}$ está definida y es real? (*b*) Indicar este dominio gráficamente.
Sol. (*a*) $x+y+z \leqq 1$, $x^2+y^2+z^2 < 1$ y $x+y+z \geqq 1$, $x^2+y^2+z^2 > 1$.

51. Dibujar y nombrar la superficie del espacio tridimensional representada por cada una de las ecuaciones siguientes:

(*a*) $3x + 2z = 12$, (*d*) $x^2 + z^2 = y^2$, (*g*) $x^2 + y^2 = 2y$,
(*b*) $4z = x^2 + y^2$, (*e*) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, (*h*) $z = x + y$,
(*c*) $z = x^2 - 4y^2$, (*f*) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 36$, (*i*) $y^2 = 4z$,
(*j*) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$.

Sol. (*a*) plano, (*b*) paraboloide de revolución, (*c*) paraboloide hiperbólico, (*d*) cono circular recto, (*e*) esfera, (*f*) hiperboloide de dos hojas, (*g*) cilindro circular recto, (*h*) plano, (*i*) cilindro parabólico, (*j*) esfera, centro en $(2, -3, -1)$ y radio 4.

52. Construir un grafo de la región limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$, con a constante.

53. Describir gráficamente el conjunto de puntos (x, y, z) tales que:
(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$; (*b*) $x^2 + y^2 < z < x + y$.

54. Las *curvas de nivel* de una función $z = f(x, y)$ son curvas del plano xy definidas por $f(x, y) = c$, siendo c una constante. Sirven para representar gráficamente la función. Análogamente, las *superficies de nivel* de $w = f(x, y, z)$ son las superficies definidas en un sistema de coordenadas rectangulares por $f(x, y, z) = c$, siendo c una constante. Describir y representar las curvas de nivel y las superficies de nivel para cada una de las funciones que siguen: (*a*) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$, (*b*) $f(x, y) = 4xy$, (*c*) $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} y/(x + 1)$, (*d*) $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$, (*e*) $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$, (*f*) $\operatorname{sen}(x + z)/(1 - y)$.

LIMITES Y CONTINUIDAD

55. Demostrar que *(a)* $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -1}} (3x - 2y) = 14$ y *(b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (xy - 3x + 4) = 0$ utilizando la definición.

56. Si $\lim f(x, y) = A$ y $\lim g(x, y) = B$, donde lim denota *límite cuando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, demostrar que: *(a)* $\lim \{f(x, y) + g(x, y)\} = A + B$, *(b)* $\lim \{f(x, y)\, g(x, y)\} = AB$.

57. ¿En qué condiciones es el límite del cociente de dos funciones igual al cociente de sus límites? Demostrarlo.

58. Calcular los límites siguientes, caso de existir:

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{3 - x + y}{4 + x - 2y}$ *(c)* $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to \pi}} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$ *(e)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} e^{-1/x^2(y-1)^2}$ *(g)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 1-}} \dfrac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}}$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x - 2y}{2x - 3y}$ *(d)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ *(f)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}$ *(h)* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}(xy - 2)}{\operatorname{tg}^{-1}(3xy - 6)}$

Sol. *(a)* 4, *(b)* no existe, *(c)* $8\sqrt{2}$, *(d)* 0, *(e)* 0, *(f)* no existe, *(g)* 0, *(h)* 1/3

59. Dar una definición de límite para funciones de *(a)* 3, *(b)* n variables.

60. ¿Existe $\lim \dfrac{4x + y - 3z}{2x - 5y + 2z}$ cuando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$? Justificar la respuesta.

61. Investigar la continuidad de cada una de las funciones siguientes en los puntos indicados:

(a) $x^2 + y^2$; (x_0, y_0). *(b)* $\dfrac{x}{3x + 5y}$; $(0, 0)$. *(c)* $(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 si $(x, y) = (0, 0)$; $(0, 0)$.

Sol. *(a)* continua, *(b)* discontinua, *(c)* continua

62. Valiéndose de la definición, demostrar que $f(x, y) = xy + 6x$ es continua en *(a)* $(1, 2)$, *(b)* (x_0, y_0).

63. Demostrar que la función del Problema 62 es uniformemente continua en la región cuadrada definida por $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

DERIVADAS PARCIALES

64. Si $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$, hallar *(a)* $\partial f/\partial x$ y *(b)* $\partial f/\partial y$ en $(2, -1)$ por la definición y comprobar la respuesta por las reglas de diferenciación. *Sol.* *(a)* -2, *(b)* -4.

65. Si $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - xy)/(x + y) & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, hallar *(a)* $f_x(0, 0)$, *(b)* $f_y(0, 0)$.
Sol. *(a)* 1, *(b)* 0

66. Investigar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y)$ para las funciones del problema precedente y explicar por qué este límite (si existe) es o no igual a $f_x(0, 0)$.

67. Si $f(x, y) = (x - y) \operatorname{sen}(3x + 2y)$, Calcular *(a)* f_x, *(b)* f_y, *(c)* f_{xx}, *(d)* f_{yy}, *(e)* f_{xy}, *(f)* f_{yx} en $0, \pi/3)$.
Sol. *(a)* $\frac{1}{2}(\pi + \sqrt{3})$, *(b)* $\frac{1}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$, *(c)* $\frac{3}{2}(\pi\sqrt{3} - 2)$, *(d)* $\frac{2}{3}(\pi\sqrt{3} + 3)$, *(e)* $\frac{1}{2}(2\pi\sqrt{3} + 1)$, *(f)* $\frac{1}{2}(2\pi\sqrt{3} + 1)$

68. *(a)* Demostrar por derivación directa que $z = xy \operatorname{tg}(y/x)$ satisface la ecuación $x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 2z$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. *(b)* Discutir la parte *(a)* para otros puntos (x, y) suponiendo $z = 0$ en $(0, 0)$.

69. Verificar que $f_{xy} = f_{yx}$ para las funciones *(a)* $(2x - y)/(x + y)$, *(b)* $x \operatorname{tg} xy$ y *(c)* $\cosh(y + \cos x)$, indicando los posibles puntos excepcionales y estudiando tales puntos.

70. Mostrar que $z = \ln\{(x - a)^2 + (y - b)^2\}$ satisface $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$ excepto en (a, b).

71. Mostrar que $z = x\cos(y/x) + \operatorname{tg}(y/x)$ satisface $x^2z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2z_{yy} = 0$ excepto en el punto para el que $x = 0$.

72. Mostrar que si $w = \left(\dfrac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$,

$$(a)\ x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (b)\ x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + 2xz\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + 2yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Indicar los posibles puntos excepcionales.

DIFERENCIALES

73. Si $z = x^3 - xy + 3y^2$, calcular (*a*) Δz y (*b*) dz con $x = 5$, $y = 4$, $\Delta x = -0{,}2$, $\Delta y = 0{,}1$. Explicar por qué Δz y dz son aproximadamente iguales. (*c*) Hallar Δz y dz si $x = 5$, $y = 4$, $\Delta x = -2$, $\Delta y = 1$.
Sol. (*a*) $-11{,}658$, (*b*) $-12{,}3$, (*c*) $\Delta z = -66$, $dz = -123$

74. Calcular aproximadamente mediante diferenciales $\sqrt[5]{(3{,}8)^2 + 2(2{,}1)^3}$.
Sol. 2,01

75. hallar dF y dG si (*a*) $F(x,y) = x^3y - 4xy^2 + 8y^3$, (*b*) $G(x,y,z) = 8xy^2z^3 - 3x^2yz$, (*c*) $F(x,y) = xy^2\ln(y/x)$.
Sol. (*a*) $(3x^2y - 4y^2)\,dx + (x^3 - 8xy + 24y^2)\,dy$
(*b*) $(8y^2z^3 - 6xyz)\,dx + (16xyz^3 - 3x^2z)\,dy + (24xy^2z^2 - 3x^2y)\,dz$
(*c*) $\{y^2\ln(y/x) - y^2\}\,dx + \{2xy\ln(y/x) + xy\}\,dy$

76. Demostrar que (*a*) $d(UV) = U\,dV + V\,dU$, (*b*) $d(U/V) = (V\,dU - U\,dV)/V^2$, (*c*) $d(\ln U) = (dU)/U$, (*d*) $d(\operatorname{tg}^{-1} V) = (dV)/(1+V^2)$, siendo U y V funciones diferenciables de dos o más variables.

77. Averiguar si las expresiones siguientes son o no diferenciales exactas de funciones y, dado el caso, hallar la función.
(*a*) $(2xy^2 + 3y\cos 3x)\,dx + (2x^2y + \operatorname{sen} 3x)\,dy$
(*b*) $(6xy - y^2)\,dx + (2xe^y - x^2)\,dy$
(*c*) $(z^3 - 3y)\,dx + (12y^2 - 3x)\,dy + 3xz^2\,dz$
Sol. (*a*) $x^2y^2 + y\operatorname{sen} 3x + c$, (*b*) no exacta, (*c*) $xz^3 + 4y^3 - 3xy + c$

DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS

78. (*a*) Si $U(x,y,z) = 2x^2 - yz + xz^2$, $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = t^2 - t + 1$, $z = 3e^{-t}$, hallar dU/dt en $t = 0$.
(*b*) Si $H(x,y) = \operatorname{sen}(3x - y)$, $x^3 + 2y = 2t^3$, $x - y^2 = t^2 + 3t$, hallar dH/dt.
Sol. (*a*) 24, (*b*) $\left(\dfrac{36t^2y + 12t + 9x^2 - 6t^2 + 6x^2t + 18}{6x^2y + 2}\right)\cos(3x - y)$

79. Si $F(x,y) = (2x+y)/(y-2x)$, $x = 2u - 3v$, $y = u + 2v$, hallar (*a*) $\partial F/\partial u$, (*b*) $\partial F/\partial v$, (*c*) $\partial^2F/\partial u^2$, (*d*) $\partial^2F/\partial v^2$, (*e*) $\partial^2F/\partial u\,\partial v$, con $u = 2$, $v = 1$. *Sol.* (*a*) 7, (*b*) -14, (*c*) 14, (*d*) 112, (*e*) -49

80. Si $U = x^2F(y/x)$ mostrar que en ciertas restricciones adecuadas sobre F, $x(\partial U/\partial x) + y(\partial U/\partial y) = 2U$.

81. Si $x = u\cos\alpha - v\operatorname{sen}\alpha$ y $y = u\operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha$, donde α es una constante, mostrar que

$$(\partial V/\partial x)^2 + (\partial V/\partial y)^2 = (\partial V/\partial u)^2 + (\partial V/\partial v)^2$$

82. Mostrar que si $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi$, las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{se convierten en} \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

83. Valiéndose del Problema 82 mostrar que por la transformación $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi$, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{se convierte} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

FUNCIONES IMPLICITAS Y JACOBIANOS

84. Si $F(x, y) = 0$, demostrar que $dy/dx = -F_x/F_y$.

85. Hallar (*a*) dy/dx y (*b*) d^2y/dx^2 si $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
Sol. (*a*) $(y - x^2)/(y^2 - x)$, (*b*) $-2xy/(y^2 - x)^3$

86. Si $xu^2 + v = y^3$, $2yu - xv^3 = 4x$, hallar (*a*) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (*b*) $\dfrac{\partial v}{\partial y}$. *Sol.* (*a*) $\dfrac{v^3 - 3xu^2v^2 + 4}{6x^2uv^2 + 2y}$, (*b*) $\dfrac{2xu^2 + 3y^3}{3x^2uv^2 + y}$

87. *Si $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ son diferenciables, demostrar que* $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} = 1$. *Explicar claramente qué variables se consideran independientes en cada derivada parcial.*

88. Si $f(x, y, r, s) = 0$, $g(x, y, r, s) = 0$, demostrar que $\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0$, explicando qué variables son independientes. ¿Qué notación debería usarse para indicar cuáles variables se consideran independientes?

89. Si $F(x, y) = 0$, mostrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$.

90. Calcular $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$ si $F(u, v) = 3u^2 - uv$, $G(u, v) = 2uv^2 + v^3$. *Sol.* $24u^2v + 16uv^2 - 3v^3$

91. Si $F = x + 3y^2 - z^3$, $G = 2x^2yz$, y $H = 2z^2 - xy$, calcular $\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}$ en $(1, -1, 0)$. *Sol.* 10

92. Si $u = \operatorname{sen}^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} y$ y $v = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$, averiguar si hay relación funcional entre u y v y, si es el caso, hallarla.

93. Si $F = xy + yz + zx$, $G = x^2 + y^2 + z^2$, y $H = x + y + z$, averiguar si hay relación funcional resumiendo F, G, y H, y, si es el caso, hallarla. *Sol.* $H^2 - G - 2F = 0$

94. (*a*) Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, y $z = h(u, v, w)$, demostrar que $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, w)} = 1$ siempre que $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$. (*b*) Dar una interpretación del resultado de (*a*) por transformaciones.

95. Si $f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$, mostrar que

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}$$

y dar las condiciones bajo las cuales es válido el resultado.

96. Si $x + y^2 = u$, $y + z^2 = v$, $z + x^2 = w$, hallar (*a*) $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, (*b*) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, (*c*) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ suponiendo que las ecuaciones definen x, y y z como funciones dos veces diferenciables de u, v y w.

Sol. (*a*) $\dfrac{1}{1 + 8xyz}$, (*b*) $\dfrac{16x^2y - 8yz - 32x^2z^2}{(1 + 8xyz)^3}$, (*c*) $\dfrac{16y^2z - 8xz - 32x^2y^2}{(1 + 8xyz)^3}$

97. Enunciar y demostrar un teorema parecido al del Problema 35 para el caso en que $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, $w = h(x, y, z)$.

TRANSFORMACIONES, COORDENADAS CURVILINEAS

98. Dada la transformación $x = 2u + v$, $y = u - 3v$. (*a*) Dibujar la región $\mathcal{R}'$ del plano uv en la cual se transforma la región $\mathcal{R}$ del plano xy limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. (*b*) Calcular $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. (*c*) Comparar el resultado de (*b*) con la relación entre las áreas de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ *Sol.* (*b*) -7

99. (*a*) Demostrar que por una *transformación lineal* $x = a_1u + a_2v$, $y = b_1u + b_2v$ $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$, las rectas y los círculos del plano xy se transforman, respectivamente, en rectas y círculos del plano uv. (*b*) Calcular el jacobiano J de la transformación y discutir el significado de $J = 0$.

100. Dadas $x = \cos u \cosh v$, $y = \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v$: (*a*) Mostrar que en general las curvas coordenadas $u = a$ y $v = b$ del plano uv se transforman en hipérbolas y círculos del plano xy, respectivamente. (*b*) Calcular $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$. (*c*) Calcular $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$.

Sol. (*b*) $\operatorname{sen}^2 u \cosh^2 v + \cos^2 u \operatorname{senh}^2 v$, (*c*) $(\operatorname{sen}^2 u \cosh^2 v + \cos^2 u \operatorname{senh}^2 v)^{-1}$

101. Dada la transformación $x = 2u + 3v - w$, $y = u - 2v + w$, $z = 2u - 2v + w$. (*a*) Dibujar la región $\mathcal{R}'$ del espacio uvw en que se transforma la región $\mathcal{R}$ del espacio xyz limitada por $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 6$. (*b*) Calcular $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. (*c*) Comparar el resultado de (*b*) con la relación entre los volúmenes de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

Sol. (*b*) 1

102. Dada la transformación de coordenadas esféricas $x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$, $y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = r\cos\theta$ con $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \phi < 2\pi$. Describir las superficies coordenadas (*a*) $r = a$, (*b*) $\theta = b$ y (*c*) $\phi = c$, siendo a, b, c constantes. *Sol.* (*a*) esferas, (*b*) conos, (*c*) planos.

103. (*a*) Comprobar que para la transformación de coordenadas esféricas del Problema 102, $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2 \operatorname{sen}\theta$. (*b*) Discutir el caso $J = 0$.

TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

104. Demostrar que $\ln \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{x+y-2}{x+y+\theta(x+y-2)}$, $0 < \theta < 1$, con $x > 0$, $y > 0$.

105. Desarrollar $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ en potencias de $x - 1$ y $y - \frac{1}{2}\pi$, hasta incluir términos de segundo grado.

Sol. $1 - \frac{1}{8}\pi^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}\pi(x-1)(y-\frac{1}{2}\pi) - \frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}\pi)^2$

106. Desarrollar $f(x,y) = y^2/x^3$ en potencias de $x - 1$ y $y + 1$, hasta incluir términos de segundo grado y escribir el resto.

Sol. $1 - 3(x-1) - 2(y+1) + 6(x-1)^2 + 6(x-1)(y+1) + (y+1)^2$

$$- \frac{10[1-\theta(y+1)]^2 + 12[1-\theta(y+1)][1+\theta(x-1)] + 3[1+\theta(x-1)]^2}{[1+\theta(x-1)]^6} \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1.$$

107. Demostrar el primer teorema del valor medio para funciones de 3 variables.

108. Generalizar y demostrar el teorema de Taylor para funciones de 3 variables.

PROBLEMAS VARIOS

109. Si $F(P,V,T) = 0$, demostrar que (*a*) $\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\dfrac{\partial T}{\partial V}\right|_P = -\left.\dfrac{\partial P}{\partial V}\right|_T$, (*b*) $\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\dfrac{\partial T}{\partial V}\right|_P \left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -1$.

Estos resultados son útiles en *termodinámica*, donde P, V, T corresponden a presión, volumen y temperatura de un sistema físico.

110. Mostrar que $F(x/y, z/y) = 0$ satisface $x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = z$.

111. Mostrar que $F(x + y - z, x^2 + y^2) = 0$ satisface $x(\partial z/\partial y) - y(\partial z/\partial x) = x - y$.

112. Si $x = f(u,v)$ y $y = g(u,v)$, demostrar que $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ con $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

113. Si $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$ y $F(x,y,z) = 0$, demostrar que

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz = 0$$

114. Si $x = \phi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$ y $u = f(r,s)$, $v = g(r,s)$, $w = h(r,s)$, demostrar que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)}\frac{\partial(v,w)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)}\frac{\partial(w,u)}{\partial(r,s)}$$

115. (*a*) Demostrar que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}$, con lo que se demuestra la regla para obtener el producto de dos determinantes de segundo orden de que se habló en el Problema 45. (*b*) Generalizar el resultado de (*a*) a determinantes de orden 3, 4, . . .

116. Si x, y y z son funciones de u, v y w, siendo u, v y w funciones de r, s y t, demostrar que

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}$$

117. Si D_x y D_y son los operadores $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$, respectivamente, mostrar que si existe la serie de Taylor para $f(x+h, y+k)$, se puede escribir en la forma

$$f(x+h, y+k) = e^{hD_x + kD_y} f(x,y)$$

118. Dadas las ecuaciones $F_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$ con $j = 1, 2, \ldots, n$. Demostrar que dentro de condiciones adecuadas para F_j,

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s} = -\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_r, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, x_s, \ldots, y_n)} \qquad \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

119. (*a*) Si $F(x, y)$ es homogénea de grado 2, demostrar que $x^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2F.$

(*b*) Ilustrar mediante el caso particular $F(x, y) = x^2 \ln (y/x)$.

Nótese que el resultado se puede escribir en forma de operador, mediante $D_x \equiv \partial/\partial x$ y $D_y \equiv \partial/\partial y$ como $(x\,D_x + y\,D_y)^2 F = 2F$. [Sugerencia: Derívense ambos miembros de (*1*), Problema 25, dos veces con respecto a λ.]

120. Generalizar el resultado del Problema 119 como sigue. Si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado p, entonces para todo número natural r, si $D_{xj} \equiv \partial/\partial x_j$,

$$(x_1 D_{x_1} + x_2 D_{x_2} + \cdots + x_n D_{x_n})^r F = p(p-1)\cdots(p-r+1)F$$

121. (*a*) Sean x y y determinadas a partir de u y v por $x + iy = (u + iv)^3$. Demostrar que por esta transformación la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{se transforma en} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0$$

(*b*) ¿Es cierto el resultado de (*a*) si $x + iy = F(u + iv)$? Demostrar.

Capítulo 7

Vectores

VECTORES Y ESCALARES

Hay cantidades en física que se caracterizan tanto por su magnitud como por su dirección, tales como el desplazamiento, la velocidad, la fuerza y la aceleración. Para describir tales cantidades se introduce el concepto de *vector*, que es un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ desde un punto P llamado *origen* hasta un punto Q llamado *extremo*. Se denotan los vectores con letras negritas o letras con una flecha encima. Así, $\overrightarrow{PQ}$ se denota por **A** o $\vec{A}$, como en la Fig. 7-1. La *magnitud* o *longitud* del vector se denota entonces por $|\overrightarrow{PQ}|$, PQ, $|\mathbf{A}|$ o $|\vec{A}|$.

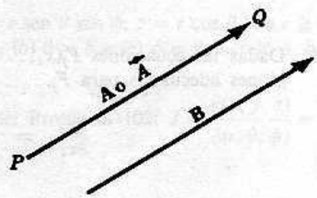


Fig. 7-1

Hay otras cantidades físicas que se caracterizan solamente por la magnitud, tales como la masa, longitud y temperatura. Tales cantidades se suelen llamar *escalares* para distinguirlas de las vectoriales, pero ha de tenerse en cuenta que aparte de las unidades (metros, grados, etc.), no son más que números reales. Se las puede, pues, denotar por letras corrientes como siempre.

ALGEBRA VECTORIAL

Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación ordinarias se pueden generalizar al álgebra vectorial mediante definiciones adecuadas. Las siguientes definiciones son fundamentales.

1. Dos vectores **A** y **B** son *iguales* si tienen igual magnitud y dirección. Así, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ en la Figura 7-1.

2. El vector que tiene dirección opuesta a la del vector **A**, pero de igual magnitud que **A**, se denota por $-\mathbf{A}$ [Figura 7-2].

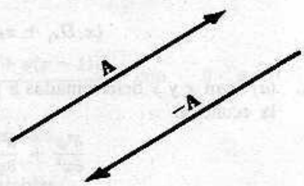
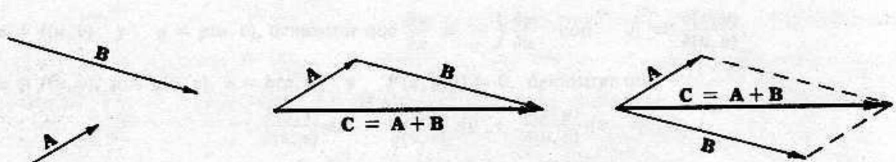


Fig. 7-2

3. La *suma* o *resultante* de los vectores **A** y **B** de la Fig. 7-3(*a*) es un vector **C** construido haciendo coincidir el origen de **B** con el extremo de **A** y uniendo luego el origen de **A** con el extremo de **B** [véase Fig. 7-3(*b*). La suma **C** se escribe $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Esta definición es equivalente a la regla del paralelogramo para la adición vectorial, como se ve en la Figura 7-3(*c*).



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 7-3

Son inmediatas las generalizaciones a sumas de más de dos vectores. Por ejemplo, Figura 7-4, donde se ve cómo se obtiene la suma o resultante **E** de los vectores **A**, **B**, **C** y **D**.

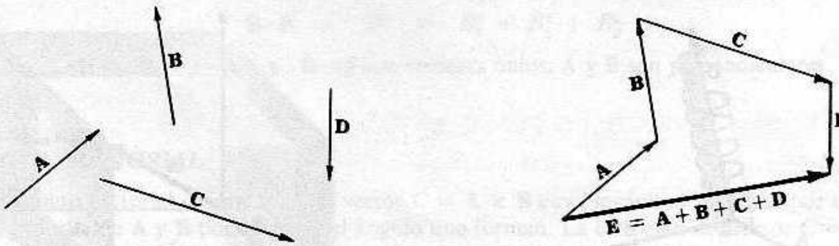


Fig. 7-4

4. La *diferencia* de los vectores **A** y **B** representada por **A** − **B** es el vector **C**, que sumado al **B** da el **A**. En forma equivalente se puede definir **A** − **B** como **A** + (−**B**). Si **A** = **B**, entonces **A** − **B** se define como el *vector nulo* o *cero* y se representa por el símbolo **0**. Este vector tiene magnitud cero, pero su dirección no está definida.

5. La multiplicación de un vector **A** por un escalar m da un vector $m\mathbf{A}$ cuya magnitud es $|m|$ veces la del **A** y cuya dirección es la misma o la opuesta de **A**, según que m sea positivo o negativo. Si $m = 0$, $m\mathbf{A} = \mathbf{0}$, el vector nulo.

LEYES DEL ALGEBRA VECTORIAL

Si **A**, **B** y **C** son vectores y m y n escalares, entonces

1.	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Ley conmutativa de la adición
2.	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Ley asociativa de la adición
3.	$m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A})$	Ley asociativa de la multiplicación
4.	$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$	Ley distributiva
5.	$m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$	Ley distributiva

Obsérvese que en estas leyes solo se define la multiplicación de un vector por uno o más escalares. En las páginas 136 y 137 se definen productos de vectores entre sí.

VECTORES UNITARIOS

Son vectores que tienen longitud unidad. Si **A** es un vector cualquiera de longitud $A > 0$, entonces $\mathbf{A}/A$ es un vector unitario, que se denota por **a**, y que tiene la misma dirección que **A**. Entonces $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$.

VECTORES UNITARIOS ORTOGONALES

Los vectores unitarios ortogonales **i**, **j** y **k** son vectores unitarios que tienen la dirección de los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas rectangulares respectivamente [véase Fig. 7-5]. Se emplean sistemas de coordenadas rectangulares dextrorsos, o a derechas, si no se advierte otra cosa. Tales sistemas se llaman así porque un sacacorchos de rosca a derecha al girar 90° de Ox a Oy avanzaría en la dirección positiva z. En general, tres vectores **A**, **B** y **C** del

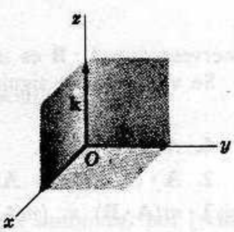


Fig. 7-5

mismo origen y no coplanarios, forman un *sistema dextrorso* o *a derechas* si un sacacorchos de rosca a derecha al girar de **A** hacia **B** un ángulo menor que 180° avanza en la dirección **C** [Figura 7-6].

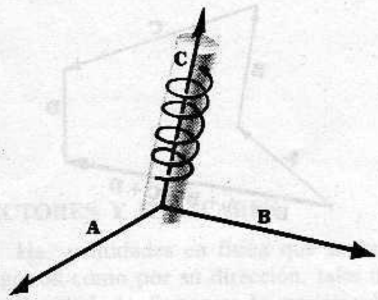


Fig. 7-6

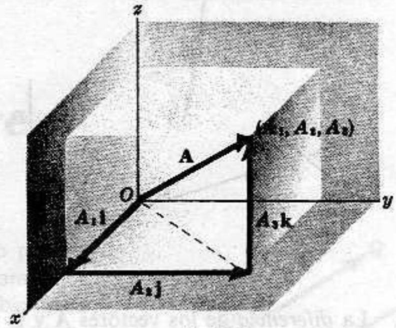


Fig. 7-7

COMPONENTES DE UN VECTOR

Todo vector **A** en 3 dimensiones se puede representar con su origen en el origen O del sistema de coordenadas [Fig. 7-7]. Sean (A_1, A_2, A_3) las coordenadas rectangulares del extremo del vector **A** de origen O. Los vectores $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ y $A_3\mathbf{k}$ se llaman *vectores componentes rectangulares* o simplemente vectores componentes de **A** en las direcciones x, y y z respectivamente. A_1, A_2 y A_3 se dicen *componentes rectangulares* o simplemente *componentes* de **A** en las direcciones x, y y z respectivamente.

La suma o resultante de $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ y $A_3\mathbf{k}$ es el vector **A**, con lo que se puede escribir

$$\mathbf{A} \;=\; A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \qquad (1)$$

La magnitud de **A** es

$$A \;=\; |\mathbf{A}| \;=\; \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \qquad (2)$$

En particular, el *vector local* o *radio vector* **r** de O al punto (x, y, z) se escribe

$$\mathbf{r} \;=\; x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (3)$$

y tiene magnitud $\quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de dos vectores **A** y **B**, que se denota $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, se define como el producto de las magnitudes de **A** y **B** por el coseno del ángulo que forman, es decir,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi \qquad (4)$$

Obsérvese que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ es un escalar y no un vector.

Se verifican las siguientes leyes:

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ — Ley conmutativa del producto escalar
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ — Ley distributiva
3. $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$, con m escalar.
4. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$

5. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

6. Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no son vectores nulos, **A** y **B** son perpendiculares.

PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de **A** y **B** es un vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ cuya magnitud se define por el producto de las magnitudes de **A** y **B** por el seno del ángulo que forman. La dirección del vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano de **A** y **B** y tal que **A**, **B** y **C** forman un sistema dextrorso:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{5}$$

siendo **u** un vector unitario que indica la dirección del $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ o si **A** es paralelo a **B**, $\operatorname{sen}\theta = 0$ y se define entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$.

Se verifican las leyes siguientes:

1. $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ (El producto vectorial no es conmutativo)

2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ Ley distributiva

3. $m(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})m$, m escalar

4. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

5. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| =$ área del paralelogramo de lados **A** y **B**.

7. Si $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no son vectores nulos, **A** y **B** son paralelos.

PRODUCTOS TRIPLES

Combinando la multiplicación escalar y vectorial de tres vectores **A**, **B** y **C** se pueden tener productos de la forma $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ y $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. Se verifican las leyes siguientes:

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ en general

2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) =$ volumen del paralelepípedo de aristas **A**, **B** y **C** o bien el opuesto de este volumen, según que **A**, **B** y **C** formen o no un sistema dextrorso. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

3. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ (El producto vectorial no es asociativo)

4. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$
$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$

El producto $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ se suele llamar *triple producto escalar* y se puede simbolizar por $[\mathbf{ABC}]$. El producto $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ es el llamado *triple producto vectorial*.

En $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ se omiten a veces los paréntesis y se escribe $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$. Pero en $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ los paréntesis son necesarios (véase Problema 29). Obsérvese que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$, lo cual se expresa diciendo que en un triple producto escalar se pueden intercambiar punto y cruz sin alterar el resultado (véase Problema 26).

ANALISIS VECTORIAL DESDE UN PUNTO DE VISTA AXIOMATICO

De lo anteriormente visto resulta que un vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ está determinado cuando se conocen sus 3 componentes (x, y, z) respecto de un sistema de coordenadas. Al adoptar un tratamiento axiomático es, pues, natural proceder como sigue:

Definición. Vector tridimensional es una *terna ordenada* de números reales (A_1, A_2, A_3).

Partiendo de esto se puede definir la igualdad, la adición y la sustracción vectoriales, etc. Así, con $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ y $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ se definen

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si, y solo si, $A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ A_3 = B_3$
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1,\ A_2 + B_2,\ A_3 + B_3)$
3. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_1 - B_1,\ A_2 - B_2,\ A_3 - B_3)$
4. $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$
5. $m\mathbf{A} = m(A_1, A_2, A_3) = (mA_1, mA_2, mA_3)$
6. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$
7. Longitud o magnitud de $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

De éstas se pueden obtener otras propiedades vectoriales, tales como $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, etc. Definiendo los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1) \tag{7}$$

se puede mostrar entonces que

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \tag{8}$$

De igual manera se puede definir $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_2B_3 - A_3B_2,\ A_3B_1 - A_1B_3,\ A_1B_2 - A_2B_1)$.

Una vez desarrollado este tratamiento axiomático, los resultados se pueden interpretar geométrica o físicamente. Por ejemplo, se puede mostrar que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$, $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB \operatorname{sen}\theta$, etc.

En lo anterior se han considerado vectores en tres dimensiones, pero es fácil generalizar la idea de vector a mayor número de dimensiones. Por ejemplo, un *vector cuatridimensional* se define como una *cuaterna ordenada* (A_1, A_2, A_3, A_4).

$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = A \times B$

FUNCIONES VECTORIALES

Si a cada valor de un escalar u se asocia un vector $\mathbf{A}$, se dice que $\mathbf{A}$ es una *función* de u denotada por $\mathbf{A}(u)$. En tres dimensiones se puede escribir $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$.

Se generaliza fácilmente el concepto de función. Así, si a cada punto (x, y, z) corresponde un vector $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ es una función de (x, y, z), que se indica $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\mathbf{i} + A_2(x, y, z)\mathbf{j} + A_3(x, y, z)\mathbf{k}$.

Suele decirse que una función vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ define un *campo vectorial* ya que asocia un vector a cada punto de una región. Análogamente, $\phi(x, y, z)$ define un campo escalar, pues asocia un escalar a cada punto de una región.

LIMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS DE FUNCIONES VECTORIALES

Los límites, la continuidad y derivación de funciones vectoriales siguen reglas similares a las de las funciones escalares ya vistas, como se ve por los enunciados siguientes:

1. Se dice que la función vectorial $\mathbf{A}(u)$ es *continua* en u_0 si dado un número positivo ϵ, existe un número positivo δ tal que $|\mathbf{A}(u) - \mathbf{A}(u_0)| < \epsilon$ siempre que $|u - u_0| < \delta$. Esto equivale a decir que $\lim_{u \to u_0} \mathbf{A}(u) = \mathbf{A}(u_0)$.

2. La derivada de $\mathbf{A}(u)$ se define como

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u + \Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u}$$

si este límite existe. Si $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$; entonces,

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{du}\mathbf{k}$$

De manera parecida se pueden definir derivadas superiores tales como $d^2\mathbf{A}/du^2$, etc.

3. Si $\mathbf{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k}$, entonces,

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz$$

es la *diferencial* de $\mathbf{A}$.

4. Las derivadas de productos siguen reglas semejantes a éstas para funciones escalares. Pero cuando entran productos vectoriales hay que cuidar del orden. Algunos ejemplos son:

$$(a) \quad \frac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\mathbf{A},$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\cdot\mathbf{B},$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\times\mathbf{B}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA VECTORIAL

Si $\mathbf{r}$ es el vector que va del origen O de un sistema de coordenadas al punto (x, y, z), al dar las componentes de la función vectorial $\mathbf{r}(u)$ quedan definidas x, y y z como funciones de u. Al variar u, el extremo de $\mathbf{r}$ describe una *curva en el espacio* (Fig. 7-8) de ecuaciones paramétricas $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$. Si el parámetro u es el arco s medido desde un cierto punto fijo de la curva, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T} \qquad (9)$$

es un vector unitario en la dirección de la tangente a la curva y se llama *vector tangente unitario*. Si u es el tiempo t,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \qquad (10)$$

es la *velocidad* con que el extremo de $\mathbf{r}$ describe la curva.

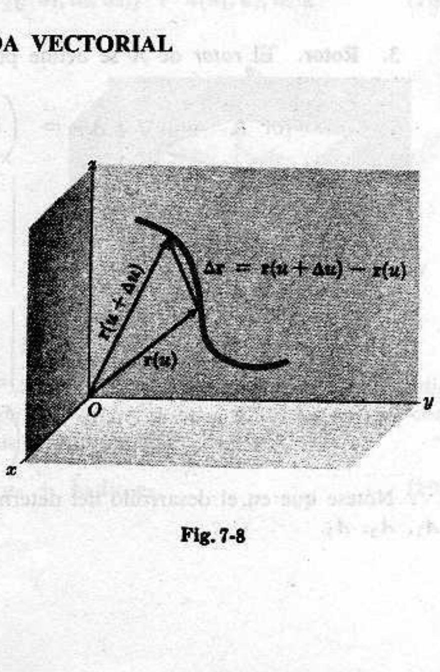


Fig. 7-8

Se tiene

$$\mathbf{v} \;=\; \frac{d\mathbf{r}}{dt} \;=\; \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \;=\; \frac{ds}{dt}\,\mathbf{T} \;=\; v\mathbf{T} \tag{11}$$

de donde la magnitud de $\mathbf{v}$ es $v = ds/dt$. Asimismo,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a} \tag{12}$$

es la *aceleración* con que el extremo de $\mathbf{r}$ describe la curva. Estos conceptos tienen aplicaciones importantes en *mecánica* y en *geometría diferencial*.

GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTOR

Sea el vector operador ∇ (*nabla*) definido por

$$\nabla \;\equiv\; \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{13}$$

Entonces, si $\phi(x, y, z)$ y $\mathbf{A}(x, y, z)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en una región (condición que en muchos casos es más restrictiva de lo necesario) se puede definir:

1. Gradiente Se define el *gradiente* de ϕ por

$$\operatorname{grad}\phi \;=\; \nabla\phi \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi \;=\; \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{14}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Una interpretación interesante es que si $\phi(x, y, z) = c$ es la ecuación de una superficie, $\nabla\phi$ es una normal a esta superficie (Problema 36).

2. Divergencia. La *divergencia* de $\mathbf{A}$ se define por

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \;=\; \nabla\cdot\mathbf{A} \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \tag{15}$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

3. Rotor. El *rotor* de $\mathbf{A}$ se define por

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} \;=\; \nabla\times\mathbf{A} \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \tag{16}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Nótese que en el desarrollo del determinante, los operadores $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ deben preceder a A_1, A_2, A_3.

FORMULAS EN QUE ENTRA ∇

Si se supone que existen las derivadas parciales de **A**, **B**, U y V, entonces

1. $\nabla(U+V) \;=\; \nabla U + \nabla V$ o $\operatorname{grad}(U+V) \;=\; \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} V$
2. $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \;=\; \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$ o $\operatorname{div}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \;=\; \operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{div}\mathbf{B}$
3. $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \;=\; \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$ o $\operatorname{rot}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \;=\; \operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{rot}\mathbf{B}$
4. $\nabla\cdot(U\mathbf{A}) \;=\; (\nabla U)\cdot\mathbf{A} + U(\nabla\cdot\mathbf{A})$
5. $\nabla\times(U\mathbf{A}) \;=\; (\nabla U)\times\mathbf{A} + U(\nabla\times\mathbf{A})$
6. $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \;=\; \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$
7. $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \;=\; (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$
8. $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \;=\; (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$
9. $\nabla\cdot(\nabla U) \;\equiv\; \nabla^2 U \;\equiv\; \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ se llama *laplaciano de U*

   y $\nabla^2 \;\equiv\; \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ se llama *operador laplaciano*.
10. $\nabla\times(\nabla U) \;=\; 0$. El rotor del gradiente de U es nulo.
11. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \;=\; 0$. La divergencia del rotor de **A** es nula.
12. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) \;=\; \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

INTERPRETACION VECTORIAL DE LOS JACOBIANOS. COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES

Las ecuaciones de transformación

$$x = f(u_1, u_2, u_3), \quad y = g(u_1, u_2, u_3), \quad z = h(u_1, u_2, u_3) \tag{17}$$

[donde se supone que f, g, h son continuas, tienen derivadas parciales continuas y tienen cada una recíproca uniforme] establece una correspondencia biunívoca entre puntos de dos sistemas cartesianos xyz y $u_1u_2u_3$. En notación vectorial la transformación (*17*) se puede escribir

$$\mathbf{r} \;=\; x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \;=\; f(u_1,u_2,u_3)\mathbf{i} + g(u_1,u_2,u_3)\mathbf{j} + h(u_1,u_2,u_3)\mathbf{k} \tag{18}$$

Un punto P en la Fig. 7-9 puede definirse no solo por *coordenadas cartesianas* (x, y, z), sino también por coordenadas (u_1, u_2, u_3). Se dice que (u_1, u_2, u_3) son las *coordenadas curvilíneas* del punto.

Si u_2 y u_3 son constantes, entonces al variar u_1, **r** describe una curva que será la *curva coordenada* u_1. Análogamente se definen las curvas coordenadas u_2 y u_3 por P.

Por (*18*) se tiene

$$d\mathbf{r} \;=\; \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 \tag{19}$$

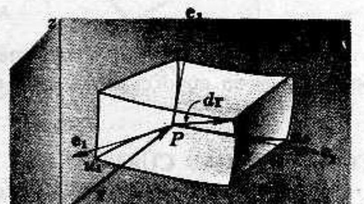


Fig. 7-9

El vector $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$ es tangente a la curva coordenada u_1 en P. Si $\mathbf{e}_1$ es un vector unitario en P en esa dirección se puede escribir $\partial\mathbf{r}/\partial u_1 = h_1\mathbf{e}_1$, con $h_1 = |\partial\mathbf{r}/\partial u_1|$ y $\partial\mathbf{r}/\partial u_2 = h_2\mathbf{e}_2$ y $\partial\mathbf{r}/\partial u_3 = h_3\mathbf{e}_3$ con $h_2 = |\partial\mathbf{r}/\partial u_2|$ y $h_3 = |\partial\mathbf{r}/\partial u_3|$ respectivamente. Así, (*19*) se puede escribir

$$d\mathbf{r} \;=\; h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1 + h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2 + h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3 \tag{20}$$

h_1, h_2, h_3 son los llamados *factores de escala*.

Si $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son perpendiculares entre sí en todo punto P, las coordenadas curvilíneas se dicen *ortogonales*. En tal caso el elemento de arco ds viene dado por

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2 \tag{21}$$

y corresponde al cuadrado de la longitud de la diagonal del paralelepípedo anterior.

Asimismo, en el caso de coordenadas ortogonales el volumen del paralelepípedo es

$$dV = |(h_1\, du_1\, \mathbf{e}_1) \cdot (h_2\, du_2\, \mathbf{e}_2) \times (h_3\, du_3\, \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3 \tag{22}$$

que se puede escribir

$$dV = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1\, du_2\, du_3 = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1\, du_2\, du_3 \tag{23}$$

siendo $\partial(x, y, z)/\partial(u_1, u_2, u_3)$ el *jacobiano* de la transformación.

Es claro que si el jacobiano se anula no existe el paralelepípedo y se explica geométricamente el significado de la anulación del jacobiano como se vio en el Capítulo 6.

GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTOR Y LAPLACIANO EN COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES

Si Φ es una función escalar y $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ es una función vectorial de las coordenadas curvilíneas ortogonales u_1, u_2, u_3 se tienen los resultados siguientes:

1. $$\nabla\Phi = \text{grad}\, \Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

2. $$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div}\, \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

3. $$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot}\, \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

4. $$\nabla^2\Phi = \text{Laplaciano}\, \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

Estas se reducen a las expresiones corrientes en coordenadas cartesianas si se cambian (u_1, u_2, u_3) por (x, y, z) en cuyo caso $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ se vuelven $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ y $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

COORDENADAS CURVILINEAS ESPECIALES

1. **Coordenadas cilíndricas** (ρ, ϕ, z). Figura 7-10.

Ecuaciones de transformación:

$$x = \rho \cos \phi, \ y = \rho \operatorname{sen} \phi, \ z = z$$

con $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Factores de escala: $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$

Elemento de arco: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2 + dz^2$

Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho$

Elemento de volumen: $dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$

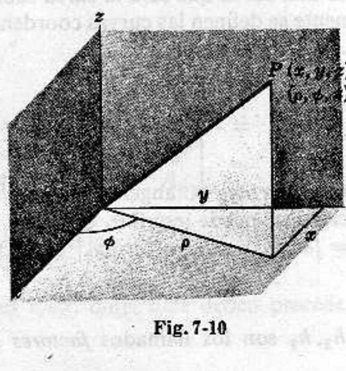


Fig. 7-10

Laplaciano:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Nótese que se pueden obtener resultados correspondientes para coordenadas polares en el plano con solo omitir la dependencia de z. En tal caso, por ejemplo, $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\phi^2$, y el elemento de volumen se vuelve elemento de área, $dA = \rho\,d\rho\,d\phi$.

2. Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). Figura 7-11.

Ecuaciones de transformación:

$$x = r \operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\ z = r\cos\theta$$

con $r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$.

Factores de escala: $h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\operatorname{sen}\theta$

Elemento de arco:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2$$

Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2\operatorname{sen}\theta$

Elemento de volumen: $dV = r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

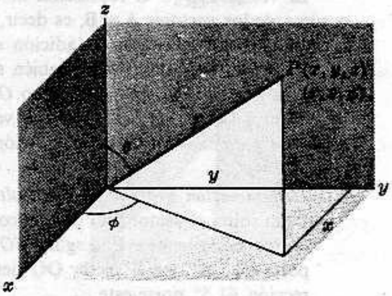


Fig. 7-11

Laplaciano: $$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}.$$

Son posibles otros tipos de sistemas de coordenadas.

Problemas resueltos

ALGEBRA VECTORIAL

1. Mostrar que la adición de vectores es conmutativa, esto es, que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Véase Figura 7-12.

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} \quad \text{o} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

y

$$\mathbf{OR} + \mathbf{RQ} = \mathbf{OQ} \quad \text{o} \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}.$$

Entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

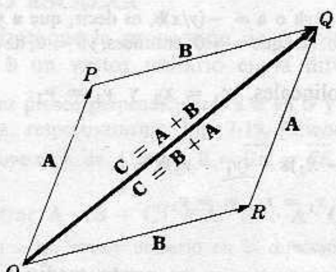


Fig. 7-12

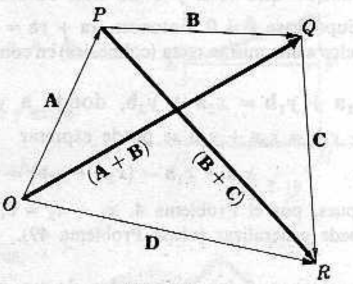


Fig. 7-13

2. Demostrar que la adición de vectores es asociativa, esto es, que $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$. Véase Figura 7-13.

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \quad \text{y} \quad \mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})$$

Puesto que

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \text{ o sea. } \mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{OQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \text{ o sea. } (\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}$$

se tiene $\mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

Por generalización de los resultados de los Problemas 1 y 2, se ve que el orden de adición de cualquier número de vectores es indiferente.

3. Un automóvil recorre 3 km en dirección norte, luego 5 km hacia el nordeste como se ve en la Figura 7-14. Representar gráficamente estos desplazamientos y determinar el desplazamiento resultante (*a*) gráficamente, (*b*) analíticamente.

El vector **OP** o **A** representa el desplazamiento de 3 km hacia el norte.

El vector **PQ** o **B** representa el desplazamiento de 5 km hacia el nordeste.

El vector **OQ** o **C** representa el desplazamiento resultante o suma de los vectores **A** y **B**, es decir, que **C** = **A** + **B**. Esta es la *regla del triángulo* para la adición de vectores.

El vector resultante **OQ** también se puede obtener construyendo la diagonal del paralelogramo *OPQR* que tiene por lados los vectores **OP** = **A** y **OR** (igual al vector **PQ** o **B**). Esta es la *regla del paralelogramo* para la adición de vectores.

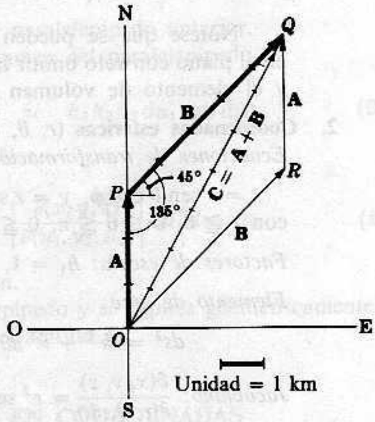


Fig. 7-14

(*a*) *Determinación gráfica de la resultante.* Llévese la unidad 1 km sobre el vector **OQ** para encontrar la magnitud 7,4 km (aproximadamente). El ángulo $EOQ = 61{,}5°$ con un transportador. Así que el vector **OQ** tiene magnitud 7,4 km y dirección 61,5° norte-este.

(*b*) *Determinación analítica de la resultante.* En el triángulo *OPQ*, denotando por *A*, *B*, *C* las magnitudes de **A**, **B**, **C**, se tiene por el teorema del coseno

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135° = 34 + 15\sqrt{2} = 55{,}21$$

y $C = 7{,}43$ (aproximadamente).

Por el teorema del seno $\dfrac{A}{\operatorname{sen} \angle OQP} = \dfrac{C}{\operatorname{sen} \angle OPQ}$. Luego

$$\operatorname{sen} \angle OQP = \frac{A \operatorname{sen} \angle OPQ}{C} = \frac{3(0{,}707)}{7{,}43} = 0{,}2855 \quad \text{y} \quad \angle OQP = 16°35'$$

El vector **OQ** tiene magnitud 7,43 km y dirección $(45° + 16°35') = 61°35'$ norte-este.

4. Demostrar que si **a** y **b** no son colineales, $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica $x = y = 0$.

Supóngase $x \neq 0$. Entonces, $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ o $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$, es decir, que **a** y **b** deben ser paralelos a una misma recta (colineales) en contra de lo supuesto. Así que $x = 0$; entonces, $y\mathbf{b} = \mathbf{0}$, de donde $y = 0$.

5. Si $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$, donde **a** y **b** no son colineales, $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ se puede expresar

$$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} - (x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad (x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Así, pues, por el Problema 4, $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$ o $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.
Se puede generalizar (véase Problema 49).

6. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Sea *ABCD* el paralelogramo dado con diagonales que se cortan en *P*, Figura 7-15.

Como $\mathbf{BD} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Luego $\mathbf{BP} = x(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Como $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{AP} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Pero $\mathbf{AB} = \mathbf{AP} + \mathbf{PB} = \mathbf{AP} - \mathbf{BP}$,
esto es, $\mathbf{a} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (x + y)\mathbf{a} + (y - x)\mathbf{b}$.

Como **a** y **b** no son colineales se tiene por el Problema 5 que $x + y = 1$ y $y - x = 0$, esto es, que $x = y = \frac{1}{2}$ y *P* es el punto medio de ambas diagonales.

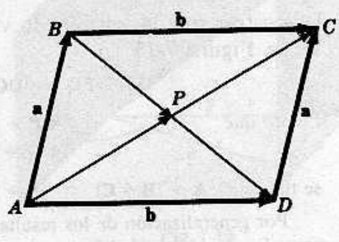


Fig. 7-15

7. Demostrar que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Figura 7-16, $\mathbf{AC} + \mathbf{CB} = \mathbf{AB}$ o $\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{c}$.
Sea $\mathbf{DE} = \mathbf{d}$ la recta que une los puntos medios de los lados AC y CB. Entonces,

$$\mathbf{d} = \mathbf{DC} + \mathbf{CE} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{c}$$

Así que $\mathbf{d}$ es paralela a $\mathbf{c}$ y tiene la mitad de su longitud.

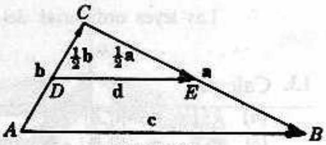


Fig. 7-16

8. Demostrar que la magnitud A del vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ es $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$. Figura 7-17.

Por el teorema de Pitágoras,

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

siendo $\overline{OP}$ la magnitud del vector $\mathbf{OP}$, etc.
Análogamente, $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$.
Entonces, $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$ o
$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, es decir, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

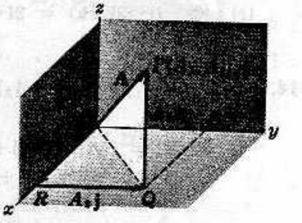


Fig. 7-17

9. Determinar el vector de origen $P(x_1, y_1, z_1)$ y extremo $Q(x_2, y_2, z_2)$ y hallar su magnitud. Figura 7-18.

El vector local de P es $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$.
El vector local de Q es $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ o

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

$$\text{Magnitud de } \mathbf{PQ} = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Que es la distancia entre P y Q.

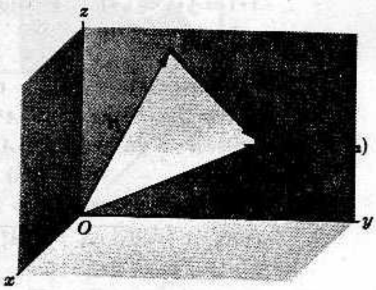


Fig. 7-18

PRODUCTO ESCALAR

10. Demostrar que la proyección de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$ es igual a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, siendo $\mathbf{b}$ un vector unitario en la dirección de $\mathbf{B}$.

Pasar planos perpendiculares a $\mathbf{B}$ en G y H por el origen y extremo de $\mathbf{A}$, respectivamente, Fig. 7-19. Entonces,

$$\text{Proyección de } \mathbf{A} \text{ sobre } \mathbf{B} = \overline{GH} = \overline{EF} = A \cos\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$$

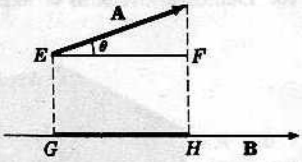


Fig. 7-19

11. Demostrar $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.

Sea $\mathbf{a}$ un vector unitario en la dirección de $\mathbf{A}$; entonces,

Proyección de $(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ sobre $\mathbf{A}$ = proyección de $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{A}$ + proyección de $\mathbf{C}$ sobre $\mathbf{A}$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}$$

Multiplicando por A,

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C} \cdot A\mathbf{a}$$

y

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$$

Entonces por la ley conmutativa del producto escalar,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

y se verifica la ley distributiva.

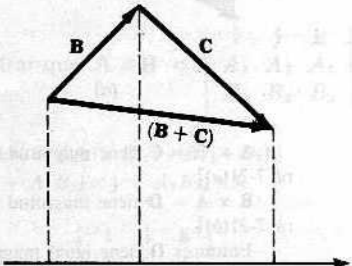


Fig. 7-20

12. Demostrar que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$.

Por el Problema 11, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$.

Las leyes ordinarias del álgebra valen para productos escalares.

13. Calcular

(a) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}|\cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$

(b) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{k}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

(c) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}|\,|\mathbf{j}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

(d) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 - 3 + 0 = -3$

(e) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 6\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 6+0-0-0 = 6$

14. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$, demostrar que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\
&= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\
&= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\
&\quad + A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\
&= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3
\end{aligned}$$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$ y todos los otros productos escalares.

15. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$, mostrar que $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A)(A)\cos 0^\circ = A^2$. Luego $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$.

También, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})$

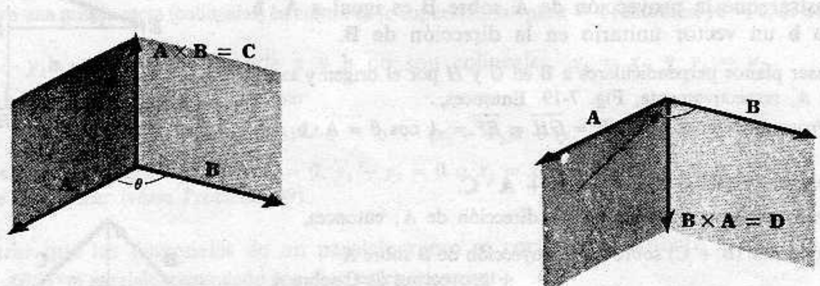
$= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2+A_2^2+A_3^2$

por el Problema 14, haciendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Luego $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$ es la magnitud de $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ se suele escribir $\mathbf{A}^2$.

PRODUCTO VECTORIAL

16. Demostrar $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$.



(a) (b)

Fig. 7-21

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{C}$ tiene magnitud AB sen θ y dirección tal que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ forman un sistema dextrorso [Figura 7-21(a)].

$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = \mathbf{D}$ tiene magnitud BA sen θ y dirección tal que $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ forman un sistema dextrorso [Figura 7-21(b)].

Entonces $\mathbf{D}$ tiene igual magnitud que $\mathbf{C}$, pero es opuesto en dirección, o sea, que $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ o $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

La ley conmutativa no se verifica en el producto vectorial.

17. Demostrar que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ para el caso en que $\mathbf{A}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y también a $\mathbf{C}$.

Como $\mathbf{A}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector perpendicular al plano de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y de magnitud AB sen 90° $= AB$ o magnitud de $A\mathbf{B}$. Esto equivale a multiplicar el vector $\mathbf{B}$ por A y girar 90° el vector resultante hasta la posición que se ve en la Figura 7-22.

Análogamente, $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ es el vector que se obtiene multiplicando $\mathbf{C}$ por A y girando el vector que resulta 90° hasta la posición que se muestra.

De la misma manera, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ es el vector que se obtiene multiplicando $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ por A y girando el vector que resulta 90° hasta la posición que se muestra.

Como $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ es la diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, se tiene $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

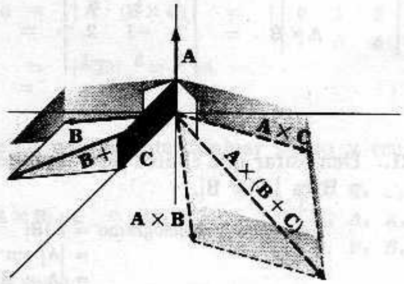


Fig. 7-22

18. Demostrar que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ en el caso general en que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ no son coplanares. Figura 7-23.

Descompóngase $\mathbf{B}$ en dos vectores componentes, uno perpendicular a $\mathbf{A}$ y otro paralelo a $\mathbf{A}$ y denóteseles por $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{B}_\parallel$ respectivamente. Entonces es $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$.

Si θ es el ángulo que forman $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, entonces $B_\perp = B$ sen θ. Luego la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ es AB sen θ, la misma que la de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. También la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ es la misma que la de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Luego $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Asimismo, descomponiendo $\mathbf{C}$ en dos vectores $\mathbf{C}_\parallel$ y $\mathbf{C}_\perp$, paralelo y perpendicular respectivamente a $\mathbf{A}$, es $\mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

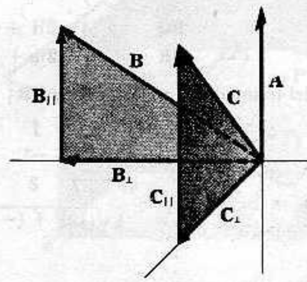


Fig. 7-23

También, como $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{C}_\perp + \mathbf{C}_\parallel = (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) + (\mathbf{B}_\parallel + \mathbf{C}_\parallel)$ se deduce que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Ahora bien, $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{C}_\perp$ son vectores perpendiculares a $\mathbf{A}$ y entonces, por el Problema 17,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp + \mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \end{aligned}$$

y se verifica la ley distributiva. Multiplicando por -1, usando el Problema 16, se tiene $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$. Obsérvese que es importante el orden de los factores en los productos vectoriales. Las leyes usuales del álgebra solo son válidas si se mantiene el orden adecuado.

19. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, demostrar que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\ &= A_1\mathbf{i} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\ &= A_1B_1\mathbf{i}\times\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\times\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\times\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\times\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\times\mathbf{k} \\ &\quad + A_3B_1\mathbf{k}\times\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\times\mathbf{k} \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

20. Si $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, hallar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

21. Demostrar que el área de un paralelogramo de lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

$$\text{Area del paralelogramo} = h\,|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \operatorname{sen}\theta\, |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|.$$

Nótese que el área del triángulo con lados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} = \frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

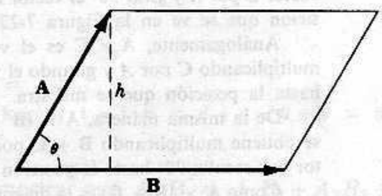


Fig. 7-24

22. Hallar el área del triángulo de vértices $P(2, 3, 5)$, $Q(4, 2, -1)$, $R(3, 6, 4)$.

$$\mathbf{PQ} = (4-2)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (-1-5)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$
$$\mathbf{PR} = (3-2)\mathbf{i} + (6-3)\mathbf{j} + (4-5)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\text{Area del triángulo} = \tfrac{1}{2}\,|\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}| = \tfrac{1}{2}\,|(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})|$$
$$= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\,|19\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}|$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(19)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{426}$$

PRODUCTOS TRIPLES

23. Mostrar que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo de aristas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.

Sea $\mathbf{n}$ un vector normal unitario al paralelogramo I, que tiene la dirección de $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, y sea h la altura del extremo de $\mathbf{A}$ sobre el paralelogramo I.

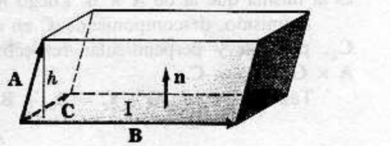


Fig. 7-25

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = (\text{altura } h)(\text{área del paralelogramo } I)$$
$$= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|)$$
$$= \mathbf{A} \cdot \{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|\,\mathbf{n}\} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ no forman un sistema dextrorso, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} < 0$ y el volumen es $= |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$.

24. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ mostrar que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$
$$= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}]$$
$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

25. Hallar el volumen de un paralelepípedo de aristas $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Según los Problemas 23 y 24, volumen del paralelepípedo $= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})| = \left|\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}\right| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{matrix}$

$= |-20| = 20.$

26. Demostrar que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$, o sea, que se pueden intercambiar punto y cruz.

Por el Problema 24: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

Siendo iguales los dos determinantes, se tiene el resultado pedido.

27. Sean $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$ los vectores locales de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Hallar una ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3. Figura 7-26.

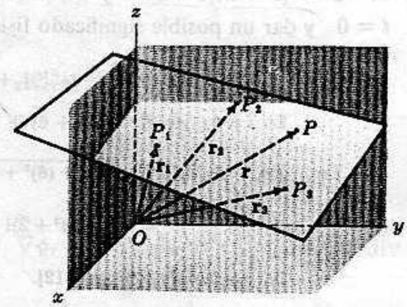


Fig. 7-26

Se supone que P_1, P_2 y P_3 no están en línea recta, es decir, que determinan un plano.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector local de un punto $P(x, y, z)$ del plano. Considérense los vectores $\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P_1P_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{P_1P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ que están en el plano. Entonces,

$$\mathbf{P_1P}\cdot\mathbf{P_1P_2}\times\mathbf{P_1P_3} = 0$$

o $$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1) = 0$$

lo que en coordenadas cartesianas es

$$[(x-x_1)\mathbf{i} + (y-y_1)\mathbf{j} + (z-z_1)\mathbf{k}]\cdot[(x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}]$$
$$\times\ [(x_3-x_1)\mathbf{i} + (y_3-y_1)\mathbf{j} + (z_3-z_1)\mathbf{k}] = 0$$

o, según el Problema 24, $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

28. Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(3, 1, -2)$, $P_2(-1, 2, 4)$, $P_3(2, -1, 1)$.

Los vectores locales de P_1, P_2, P_3 y de un punto $P(x, y, z)$ cualquiera del plano son, respectivamente,

$$\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Entonces $\mathbf{PP}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P_2P_1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P_2P_1} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, están todos en el plano buscado y la ecuación pedida es, pues, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1) = 0$, es decir,

$$\{(x-3)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z+2)\mathbf{k}\}\cdot\{-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}\times\{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} = 0$$
$$\{(x-3)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z+2)\mathbf{k}\}\cdot\{15\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}\} = 0$$
$$15(x-3) + 6(y-1) + 9(z+2) = 0 \quad \text{o} \quad 5x + 2y + 3z = 11$$

Otro método: Por el Problema 27, la ecuación que se pide es

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+2 \\ -1-3 & 2-1 & 4+2 \\ 2-3 & -1-1 & 1+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad 5x + 2y + 3z = 11$$

29. Si $\mathbf{A} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, hallar (*a*) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$, (*b*) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

(*a*) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k}$. Luego $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 23\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

(*b*) $\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+8\mathbf{k}$. Luego $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Se sigue que, en general, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} \neq \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

DERIVADAS

30. Si $\mathbf{r} = (t^3+2t)\mathbf{i} - 3e^{-2t}\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, (*b*) $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$, (*c*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, (*d*) $\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|$ en $t=0$ y dar un posible significado físico.

(*a*) $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3+2t)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(-3e^{-2t})\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(2\operatorname{sen} 5t)\mathbf{k} = (3t^2+2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + 10\cos 5t\,\mathbf{k}$$

En $t=0$, $d\mathbf{r}/dt = 2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+10\mathbf{k}$

(*b*) De (*a*), $|d\mathbf{r}/dt| = \sqrt{(2)^2+(6)^2+(10)^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$ en $t=0$.

(*c*) $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\{(3t^2+2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + 10\cos 5t\,\mathbf{k}\} = 6t\mathbf{i} - 12e^{-2t}\mathbf{j} - 50\sin 5t\,\mathbf{k}$$

En $t=0$, $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -12\mathbf{j}$.

(*d*) De (*c*), $|d^2\mathbf{r}/dt^2| = 12$ en $t=0$.

Si t representa el tiempo, éstas son, respectivamente, la velocidad, magnitud de la velocidad, aceleración y magnitud de la aceleración en $t=0$ de una partícula que se mueve a lo largo de la curva alabeada $x = t^3+2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2\operatorname{sen} 5t$.

31. Demostrar que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones diferenciables de u.

Método 1: $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

Método 2: Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$. Entonces,
$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$
$$= \left(A_1\frac{dB_1}{du} + A_2\frac{dB_2}{du} + A_3\frac{dB_3}{du}\right) + \left(\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3\right)$$
$$= \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

32. Si $\phi(x,y,z) = x^2yz$ y $\mathbf{A} = 3x^2y\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, hallar $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\mathbf{A})$ en el punto $(1,-2,-1)$.

$$\phi\mathbf{A} = (x^2yz)(3x^2y\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}) = 3x^4y^2z\mathbf{i} + x^2y^2z^3\mathbf{j} - x^3yz^2\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^4y^2z\mathbf{i} + x^2y^2z^3\mathbf{j} - x^3yz^2\mathbf{k}) = 3x^4y^2\mathbf{i} + 3x^2y^2z^2\mathbf{j} - 2x^3yz\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4y^2\mathbf{i} + 3x^2y^2z^2\mathbf{j} - 2x^3yz\mathbf{k}) = 6x^4y\mathbf{i} + 6x^2yz^2\mathbf{j} - 2x^3z\mathbf{k}$$

Si $x=1,\ y=-2,\ z=-1,$ esto se convierte en $-12\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

33. Si $\mathbf{A} = x^2 \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + z^2 \cos y\,\mathbf{j} - xy^2\mathbf{k}$, hallar $d\mathbf{A}$.

Método 1:

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = 2x\operatorname{sen} y\mathbf{i} - y^2\mathbf{k}, \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} = x^2\cos y\,\mathbf{i} - z^2\operatorname{sen} y\,\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k}, \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = 2z\cos y\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}dz \\ &= (2x\operatorname{sen} y\,\mathbf{i} - y^2\mathbf{k})\,dx + (x^2\cos y\,\mathbf{i} - z^2\operatorname{sen} y\,\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k})\,dy + (2z\cos y\,\mathbf{j})\,dz \\ &= (2x\operatorname{sen} y\,dx + x^2\cos y\,dy)\mathbf{i} + (2z\cos y\,dz - z^2\operatorname{sen} y\,dy)\mathbf{j} - (y^2\,dx + 2xy\,dy)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Método 2:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d(x^2\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + d(z^2\cos y)\mathbf{j} - d(xy^2)\mathbf{k} \\ &= (2x\operatorname{sen} y\,dx + x^2\cos y\,dy)\mathbf{i} + (2z\cos y\,dz - z^2\operatorname{sen} y\,dy)\mathbf{j} - (y^2\,dx + 2xy\,dy)\mathbf{k} \end{aligned}$$

GRADIENTE, DIVERGENTE Y ROTOR

34. Si $\phi = x^2yz^3$ y $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\nabla\phi$, (*b*) $\nabla\cdot\mathbf{A}$, (*c*) $\nabla\times\mathbf{A}$, (*d*) div $(\phi\mathbf{A})$, (*e*) rot $(\phi\mathbf{A})$.

(*a*)
$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\mathbf{k} \\ &= 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k} \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\mathbf{k} \\ &= 2x^2\mathbf{i} + (x - 4xy)\mathbf{j} \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} \text{div}\,(\phi\mathbf{A}) &= \nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \nabla\cdot(x^3yz^4\mathbf{i} - x^2y^3z^3\mathbf{j} + 2x^4y^2z^3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3) \\ &= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2 \end{aligned}$$

(*e*)
$$\begin{aligned} \text{rot}\,(\phi\mathbf{A}) &= \nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \nabla\times(x^3yz^4\mathbf{i} - x^2y^3z^3\mathbf{j} + 2x^4y^2z^3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix} \\ &= (4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\mathbf{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\mathbf{k} \end{aligned}$$

35. Demostrar $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) &= \nabla\cdot(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\\
&\quad + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\\
&= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}$$

36. Demostrar que $\nabla\phi$ es un vector perpendicular a la superficie $\phi(x, y, z) = c$, donde c es una constante.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector local de un punto $P(x, y, z)$ sobre la superficie. Luego $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ está en el plano tangente a la superficie P. Pero

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = 0$$

o sea, que $\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = 0$, de modo que $\nabla\phi$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$, y, por tanto, a la superficie.

37. Hallar un vector normal unitario a la superficie $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ en el punto $P(3, -1, 2)$.

Por el Problema 36, un vector normal a la superficie es

$$\nabla(2x^2 + 4yz - 5z^2) = 4x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + (4y - 10z)\mathbf{k} = 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k} \quad \text{en } (3, -1, 2)$$

Luego un vector unitario normal a la superficie en P es $\dfrac{12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (-24)^2}} = \dfrac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

Otro vector unitario normal a la superficie en P es $-\dfrac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

38. Si $\phi = 2x^2y - xz^3$, hallar (*a*) $\nabla\phi$ y (*b*) $\nabla^2\phi$.

(*a*) $\nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (4xy - z^3)\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} - 3xz^2\mathbf{k}$

(*b*) $\nabla^2\phi$ = laplaciano de $\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \dfrac{\partial}{\partial x}(4xy - z^3) + \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(-3xz^2)$
$= 4y - 6xz$

Otro método:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2y - xz^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2y - xz^3) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(2x^2y - xz^3)\\
&= 4y - 6xz
\end{aligned}$$

39. Demostrar que div rot $\mathbf{A} = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{div rot }\mathbf{A} &= \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}\\
&= \nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\,\partial y}\\
&= 0
\end{aligned}$$

suponiendo que $\mathbf{A}$ tiene segundas derivadas parciales continuas, con lo que el orden de derivación es indiferente.

JACOBIANOS Y COORDENADAS CURVILINEAS

40. Hallar ds^2 en (*a*) coordenadas cilíndricas y (*b*) coordenadas esféricas y averiguar los factores de escala.

(*a*) **Método 1:**

$$x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi, \qquad z = z$$

$$dx = -\rho \operatorname{sen} \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho, \qquad dy = \rho \cos \phi \, d\phi + \operatorname{sen} \phi \, d\rho, \qquad dz = dz$$

Luego
$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (-\rho \operatorname{sen} \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho)^2 \\ &\quad + (\rho \cos \phi \, d\phi + \operatorname{sen} \phi \, d\rho)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2 (d\rho)^2 + h_2^2 (d\phi)^2 + h_3^2 (dz)^2 \end{aligned}$$

y $h_1 = h_\rho = 1, h_2 = h_\phi = \rho, h_3 = h_z = 1$ son los factores de escala.

Método 2: El vector local es $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \, \mathbf{i} + \rho \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Luego

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz \\ &= (\cos \phi \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{j}) \, d\rho + (-\rho \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{i} + \rho \cos \phi \, \mathbf{j}) \, d\phi + \mathbf{k} \, dz \\ &= (\cos \phi \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \phi \, d\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \phi \, d\rho + \rho \cos \phi \, d\phi)\mathbf{j} + \mathbf{k} \, dz \end{aligned}$$

Así que
$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= (\cos \phi \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \phi \, d\phi)^2 + (\operatorname{sen} \phi \, d\rho + \rho \cos \phi \, d\phi)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 \end{aligned}$$

(*b*)
$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \qquad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \qquad z = r \cos \theta$$

Luego
$$\begin{aligned} dx &= -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, d\phi + r \cos \theta \cos \phi \, d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, dr \\ dy &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, d\phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi \, d\theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, dr \\ dz &= -r \operatorname{sen} \theta \, d\theta + \cos \theta \, dr \end{aligned}$$

y
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, (d\phi)^2$$

Los factores de escala son $h_1 = h_r = 1, h_2 = h_\theta = r, h_3 = h_\phi = r \operatorname{sen} \theta$.

41. Hallar el elemento de volumen dV en coordenadas (*a*) cilíndricas y (*b*) esféricas y trazar un dibujo del mismo.

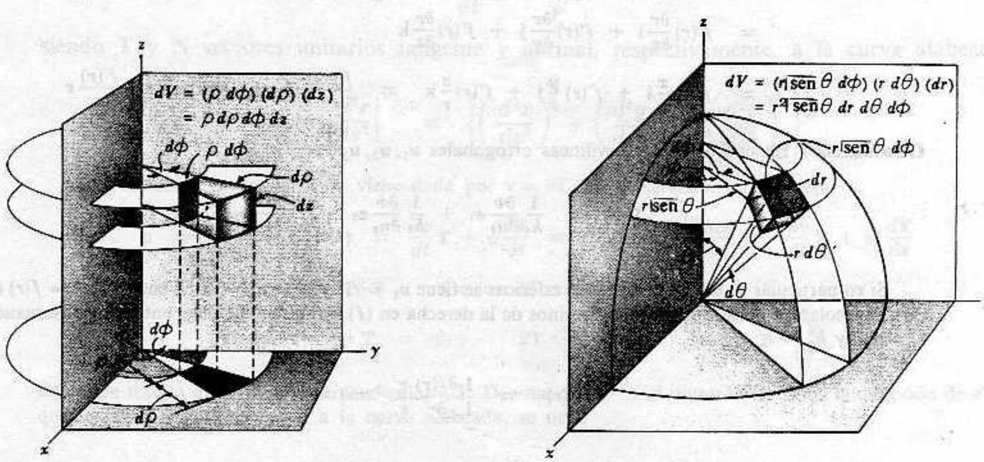
El elemento de volumen en coordenadas curvilíneas ortogonales u_1, u_2, u_3 es

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 \, du_2 \, du_3$$

(*a*) En coordenadas cilíndricas, $u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z, h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$ [Problema 40(*a*)]. Entonces,

$$dV = (1)(\rho)(1) \, d\rho \, d\phi \, dz = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

Lo cual se puede observar directamente en la Figura 7-27(*a*).



(*a*) Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas **Fig. 7-27** (*b*) Elemento de volumen en coordenadas esféricas (*b*) En coordenadas esféricas, $u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \operatorname{sen} \theta$ [Problema 40(*b*)]. Entonces,

$$dV = (1)(r)(r \operatorname{sen} \theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Esto se puede observar directamente en la Figura 7-27(*b*).

42. Expresar en coordenadas cilíndricas: (*a*) grad Φ, (*b*) div $\mathbf{A}$, (*c*) $\nabla^2\Phi$.

Sea $u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z, h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$ [véase Problema 40(*a*)] en los resultados 1, 2 y 4 de la página 142. Entonces,

(*a*) $$\text{grad}\, \Phi \quad = \quad \nabla\Phi \quad = \quad \frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_3 \quad = \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_3$$

donde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son los vectores unitarios en las direcciones crecientes de ρ, ϕ, z respectivamente.

(*b*) $$\text{div}\, \mathbf{A} \quad = \quad \nabla\cdot\mathbf{A} \quad = \quad \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big((\rho)(1)A_1\Big) + \frac{\partial}{\partial\phi}\Big((1)(1)A_2\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big((1)(\rho)A_3\Big)\right]$$

$$= \quad \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right]$$

con $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$.

(*c*) $$\nabla^2\Phi \quad = \quad \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(1)}{(\rho)}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1)(\rho)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

PROBLEMAS VARIOS

43. Demostrar que grad $f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $f'(r) = df/dr$ se suponen existentes.

$$\text{grad}\, f(r) \quad = \quad \nabla f(r) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}f(r)\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}f(r)\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}f(r)\,\mathbf{k}$$

$$= \quad f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= \quad f'(r)\frac{x}{r}\mathbf{i} + f'(r)\frac{y}{r}\mathbf{j} + f'(r)\frac{z}{r}\mathbf{k} \quad = \quad \frac{f'(r)}{r}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad = \quad \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$$

Otro método: En coordenadas curvilíneas ortogonales u_1, u_2, u_3 es

$$\nabla\Phi \quad = \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

Si en particular se usan coordenadas esféricas se tiene $u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi$. Si entonces $\Phi = f(r)$ es función de r solamente, los dos últimos términos de la derecha en (*1*) son nulos. Se tiene entonces, observando que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}/r$ y $h_1 = 1$,

$$\nabla f(r) \quad = \quad \frac{1}{1}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad = \quad \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r} \tag{2}$$

44. (*a*) Hallar el laplaciano de $\phi = f(r)$. (*b*) Demostrar que $\phi = 1/r$ es una solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$.

(*a*) Por el Problema 43,

$$\nabla\phi = \nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$$

Por el Problema 35, suponiendo que $f(r)$ tiene segundas derivadas parciales continuas, se tiene

$$\text{laplaciano de } \phi = \nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla\cdot\left\{\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}\right\}$$

$$= \nabla\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}\cdot\mathbf{r} + \frac{f'(r)}{r}(\nabla\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \frac{f'(r)}{r}(3)$$

$$= \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}r^2 + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$$

Otro método: En coordenadas esféricas, se tiene

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}$$

Si $U = f(r)$, los dos últimos términos de la derecha son nulos, y

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f'(r)\right) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$$

(*b*) Por el resultado de la parte (*a*) se tiene

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0$$

que muestra que $1/r$ es una solución de la ecuación de Laplace.

45. Una partícula se mueve por la curva alabeada $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, siendo t el tiempo medido a partir de cierto tiempo inicial. Si $v = |d\mathbf{r}/dt| = ds/dt$ es la magnitud de la velocidad de la partícula (s es el arco a lo largo de la curva medido desde la posición inicial), demostrar que la aceleración **a** de la partícula es

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

siendo **T** y **N** vectores unitarios tangente y normal, respectivamente, a la curva alabeada y

$$\rho = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$$

La velocidad de la partícula viene dada por $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$. La aceleración es entonces

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\frac{d\mathbf{T}}{ds} \qquad (1)$$

Siendo **T** unitario, se tiene $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$. Derivando con respecto a s,

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{T} = 0, \qquad 2\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

de donde resulta que $d\mathbf{T}/ds$ es perpendicular a **T**. Denotando por **N** el vector unitario en la dirección de $d\mathbf{T}/ds$, que se llama *normal principal* a la curva alabeada, se tiene

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \qquad (2)$$

donde κ es la magnitud de $d\mathbf{T}/ds$. Como $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ [véase ecuación (9), página 139], se tiene $d\mathbf{T}/ds = d^2\mathbf{r}/ds^2$. Luego

$$\kappa = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/2}$$

Con $\rho = 1/\kappa$, (2) se vuelve $d\mathbf{T}/ds = \mathbf{N}/\rho$, y así, por (1), se tiene

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

Las componentes dv/dt y v^2/ρ en las direcciones de $\mathbf{T}$ y de $\mathbf{N}$ se llaman componentes *tangencial* y *normal* de la aceleración, y esta última se suele llamar *aceleración centrípeta*. ρ y κ son, respectivamente, el *radio de curvatura* y la *curvatura* de la curva alabeada.

Problemas propuestos

ALGEBRA VECTORIAL

46. Dados dos vectores **A** y **B** ilustrar geométricamente la igualdad $4\mathbf{A} + 3(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

47. Un hombre recorre 25 km al nordeste, 15 km al este y 10 km al sur. Por una escala apropiada determinar gráficamente (*a*) a qué distancia y (*b*) en qué dirección está a partir de su posición inicial. ¿Es posible averiguar la respuesta analíticamente? *Sol.* 33,600 km, 13,2° norte respecto del este

48. Si **A** y **B** son dos vectores no nulos de direcciones distintas, demostrar que $m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$ es un vector del plano determinado por **A** y **B**.

49. Si **A**, **B** y **C** son vectores no coplanarios (vectores que no están en el mismo plano) y $x_1\mathbf{A} + y_1\mathbf{B} + z_1\mathbf{C} = x_2\mathbf{A} + y_2\mathbf{B} + z_2\mathbf{C}$, demostrar que necesariamente $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

50 Sea *ABCD* un cuadrilátero y *P*, *Q*, *R* y *S* los puntos medios de lados sucesivos. Demostrar (*a*) que *PQRS* es un paralelogramo y (*b*) que el perímetro de *PQRS* es igual a la suma de las longitudes de las diagonales de *ABCD*.

51. Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto a un tercio de cada mediana.

52. Hallar un vector unitario en la dirección de la resultante de $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. *Sol.* $(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k})/\sqrt{89}$

PRODUCTO ESCALAR

53. Calcular $|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})|$ si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. *Sol.* 24

54. Demostrar el teorema del coseno. [Sugerencia: Llámense **A**, **B**, **C** los lados del triángulo con $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Utilícese entonces $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.]

55. Hallar a tal que $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $3\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ son perpendiculares. *Sol.* $a = -4/3$

56. Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, hallar la proyección de $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ en la dirección de **B**. *Sol.* 17/3

57. Los vértices de un triángulo son $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(1, -2, 3)$. Hallar (*a*) la longitud de la mediana de B al lado AC y (*b*) el ángulo agudo que hace esta mediana con el lado BC.
Sol. (*a*) $\frac{1}{2}\sqrt{26}$, (*b*) $\cos^{-1}\sqrt{91}/14$

58. Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

59. Demostrar que el vector $(A\mathbf{B} + B\mathbf{A})/(A + B)$ representa la bisectriz del ángulo de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

PRODUCTO VECTORIAL

60. Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, hallar $|(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})|$. *Sol.* $25\sqrt{3}$

61. Hallar un vector unitario perpendicular al plano de los vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
Sol. $\pm(2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{5}$

62. Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, ¿es $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ necesariamente?

63. Hallar el área del triángulo de vértices $(2, -3, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(-1, 2, 3)$. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

64. Hallar la mínima distancia de $(3, 2, 1)$ al plano determinado por $(1, 1, 0)$, $(3, -1, 1)$, $(-1, 0, 2)$.
Sol. 2

PRODUCTOS TRIPLES

65. Si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, (*b*) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (*c*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, (*d*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. *Sol.* (*a*) 20, (*b*) 20, (*c*) $8\mathbf{i} - 19\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*d*) $25\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

66. Demostrar que (*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
(*b*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

67. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(2, -1, -2)$, $(-1, 2, -3)$, $(4, 1, 0)$.
Sol. $2x + y - 3z = 9$

68. Hallar el volumen del tetraedro de vértices $(2, 1, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(0, 1, -1)$, $(1, -2, 1)$. *Sol.* $\frac{4}{3}$

69. Demostrar que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$.

DERIVADAS

70. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r} = e^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$. Hallar la magnitud (*a*) de la velocidad y (*b*) de la aceleración en el tiempo t. *Sol.* (*a*) $\sqrt{3}\,e^{-t}$, (*b*) $\sqrt{5}\,e^{-t}$

71. Demostrar que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$ donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones diferenciables de u.

72. Hallar un vector tangente unitario a la curva alabeada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto donde $t = 1$.
Sol. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})/\sqrt{14}$

73. Si $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\omega t$, siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores constantes no colineales y ω una constante escalar, demostrar que

$$(a)\ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (b)\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

74. Si $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^3z\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ y (*b*) $d[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]$ en el punto $(1, -1, 2)$. *Sol.* (*a*) $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, (*b*) $8\,dx$

75. Si $\mathbf{R} = x^2y\mathbf{i} - 2y^2z\mathbf{j} + xy^2z^2\mathbf{k}$, hallar $\left|\dfrac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2} \times \dfrac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2}\right|$ en el punto $(2, 1, -2)$. *Sol.* $16\sqrt{5}$

GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTOR

76. Si U, V, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ tienen derivadas parciales continuas, demostrar que:
(*a*) $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$, (*b*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$, (*c*) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$.

77. Si $\phi = xy + yz + zx$ y $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}$, hallar (*a*) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, (*b*) $\phi\nabla\cdot\mathbf{A}$ y (*c*) $(\nabla\phi)\times\mathbf{A}$ en el punto $(3, -1, 2)$. *Sol.* (*a*) 25, (*b*) 2, (*c*) $56\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 47\mathbf{k}$

78. Mostrar que $\nabla\times(r^2\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

79. Demostrar (*a*) $\nabla\times(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\times\mathbf{A} + U(\nabla\times\mathbf{A})$, (*b*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$.

80. Demostrar que rot grad $U = \mathbf{0}$, enunciando condiciones apropiadas de U.

81. Hallar un vector normal unitario a la superficie $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 = 10$ en el punto $(2, 1, -1)$.
Sol. $\pm(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/\sqrt{61}$

82. Si $\mathbf{A} = 3xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x + 2z)\mathbf{k}$, hallar rot rot $\mathbf{A}$. *Sol.* $-6x\mathbf{i} + (6z - 1)\mathbf{k}$

83. (*a*) Demostrar que $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$. (*b*) Verificar el resultado de (*a*) si $\mathbf{A}$ es dado como en el Problema 82.

JACOBIANOS Y COORDENADAS CURVILINEAS

84. Demostrar que $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right| = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$.

85. Expresar (*a*) grad Φ, (*b*) div $\mathbf{A}$, (*c*) $\nabla^2\Phi$ en coordenadas esféricas

Sol. (*a*) $$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_3$$

(*b*) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_1) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\,A_2) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} \quad\text{con}\quad \mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$$

(*c*) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

86. La transformación de coordenadas rectangulares a *cilíndricas parabólicas* se define por las ecuaciones $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$, $z = z$. (*a*) Demostrar que el sistema es ortogonal. (*b*) Hallar ds^2 y los factores de escala. (*c*) Hallar el jacobiano de la transformación y el elemento de volumen.

Sol. (*b*) $ds^2 = (u^2+v^2)\,du^2 + (u^2+v^2)\,dv^2 + dz^2$, $h_1 = h_2 = \sqrt{u^2+v^2}$, $h_3 = 1$
(*c*) u^2+v^2, $(u^2+v^2)\,du\,dv\,dz$

87. Escribir (*a*) $\nabla^2\Phi$ y (*b*) div $\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas parabólicas.

Sol. (*a*) $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

(*b*) $$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}\,A_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}\,A_2)\right\} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

88. Demostrar que para coordenadas curvilíneas ortogonales,

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

[Sugerencia: Con $\nabla\Phi = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ aplíquese que $d\Phi = \nabla\Phi\cdot d\mathbf{r}$ tiene que ser lo mismo en ambos sistemas de coordenadas.]

89. Dar una interpretación vectorial del teorema del Problema 35, Capítulo 6.

PROBLEMAS VARIOS

90. Si $\mathbf{A}$ es una función diferenciable de u y $|\mathbf{A}(u)| = 1$, demostrar que $d\mathbf{A}/du$ es perpendicular a $\mathbf{A}$.

91. Demostrar las fórmulas 6, 7 y 8 de la página 141.

92. Si ρ y ϕ son coordenadas polares y A, B, n son constantes, demostrar que $U = \rho^n(A \cos n\phi + B \operatorname{sen} n\phi)$ verifica la ecuación de Laplace.

93. Si $V = \dfrac{2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \phi}{r^2}$, hallar $\nabla^2 V$. *Sol.* $\dfrac{6 \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, (4 - 5 \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^4}$

94. Hallar la función más general de (*a*) la coordenada cilíndrica ρ, (*b*) la coordenada esférica r, (*c*) la coordenada esférica θ, que satisface la ecuación de Laplace.
Sol. (*a*) $A + B \ln \rho$, (*b*) $A + B/r$, (*c*) $A + B \ln (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)$ con A y B constantes cualesquiera.

95. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, respectivamente, el *vector tangente* unitario y el *vector unitario* normal principal a una curva del espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ suponiendo $\mathbf{r}(u)$ diferenciable. Defínase un vector $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ que se llamará vector binormal unitario a la curva del espacio. Demostrar que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$$

Estas son las llamadas fórmulas de *Frenet-Serret* y son de importancia fundamental en *geometría diferencial*. En estas fórmulas, κ se llama curvatura, τ es la *torsión*; y los inversos de éstas, $\rho = 1/\kappa$ y $\sigma = 1/\tau$ se llaman *radio de curvatura y radio de torsión*, respectivamente.

96. (*a*) Demostrar que el radio de curvatura en cualquier punto de la curva plana $y = f(x)$, $z = 0$ con $f(x)$ diferenciable, es dado por

$$\rho = \left|\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$$

(*b*) Hallar el radio de curvatura en el punto $(\pi/2, 1, 0)$ de la curva $y = \operatorname{sen} x$, $z = 0$.
Sol. (*b*) $2\sqrt{2}$

97. Demostrar que la aceleración de una partícula a lo largo de una curva alabeada viene dada, respectivamente, en (*a*) coordenadas cilíndricas, (*b*) coordenadas esféricas, por

$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$
$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)\mathbf{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \operatorname{sen} \theta)e_\phi$$

denotando los puntos derivadas con respecto al tiempo y donde $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ son vectores unitarios en las direcciones de las $\rho, \phi, z, r, \theta, \phi$ crecientes, respectivamente.

98. Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ dos vectores que se supone tener derivadas parciales continuas (de segundo orden por lo menos) con respecto a la posición y el tiempo. Supóngase además que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1}$$

Demostrar que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen la ecuación

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2}$$

[Los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ se llaman *vectores campo eléctrico* y *campo magnético* en la *teoría electromagnética*. Las ecuaciones (*1*) son un caso especial de las ecuaciones de Maxwell. La ecuación (*2*) llevó a Maxwell a la conclusión de que la luz era un fenómeno electromagnético. La constante c es la velocidad de la luz.]

99. Usar las relaciones del Problema 98 para demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\tfrac{1}{2}(E^2 + H^2)\} + c\,\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0$$

100. Sean A_1, A_2, A_3 las componentes del vector $\mathbf{A}$ en un sistema de coordenadas rectangulares xyz con vectores unitarios $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ (los usuales, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) y A'_1, A'_2, A'_3 las componentes de $\mathbf{A}$ en un sistema de coordenadas rectangulares $x'y'z'$ del mismo origen que el xyz, pero girado con respecto a éste y con vectores unitarios $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$. Demostrar que deben verificarse las relaciones siguientes (llamadas relaciones de *invariancia*):

$$A_n = l_{1n}A'_1 + l_{2n}A'_2 + l_{3n}A'_3 \qquad n = 1, 2, 3$$

donde $\mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}_n = l_{mn}$.

101. Si **A** es el vector del Problema 100, demostrar que la divergencia de **A**, esto es, $\nabla \cdot \mathbf{A}$, es un invariante (llamado a menudo *invariante escalar*), o sea, demostrar que

$$\frac{\partial A_1'}{\partial x'} + \frac{\partial A_2'}{\partial y'} + \frac{\partial A_3'}{\partial z'} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Los resultados de este y del anterior problema expresan el supuesto obvio de que las cantidades físicas no deben depender de los sistemas de coordenadas en que se observen. La generalización de estas ideas lleva a la importante disciplina que se llama *análisis tensorial*, básica para la *teoría de la relatividad*.

102. Demostrar que (*a*) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, (*b*) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, (*c*) $\nabla \times \mathbf{A}$ son invariantes por la transformación del Problema 100.

103. Si u_1, u_2, u_3 son coordenadas curvilíneas ortogonales, demostrar que

$$(a)\quad \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 \qquad (b)\quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right)(\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3) = 1$$

y dar el significado de éstas con los jacobianos.

104. Demostrar con tratamiento axiomático la relación (*8*), página 138.

105. Un conjunto de n vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ se dice linealmente dependiente si existe un conjunto de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos nulos tales que $c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \cdots + c_n\mathbf{A}_n = \mathbf{0}$ idénticamente; si no, el conjunto se dice *linealmente independiente*. (*a*) Demostrar que los vectores $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{A}_3 = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ son linealmente dependientes. (*b*) Demostrar que cualesquiera cuatro vectores tridimensionales son linealmente dependientes. (*c*) Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que los vectores $\mathbf{A}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{A}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$, $\mathbf{A}_3 = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ sean linealmente independientes es que $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \neq 0$. Dar una interpretación geométrica de esto.

106. Un número complejo se puede definir como un par ordenado (a, b) de números reales a y b sujetos a ciertas reglas de operación para la adición y la multiplicación. (*a*) ¿Cuáles son esas reglas? (*b*) ¿Cómo se pueden utilizar las reglas en (*a*) para definir la sustracción y la división? (*c*) Explicar por qué los números complejos se pueden considerar como vectores bidimensionales. (*d*) Describir semejanzas y diferencias entre varias operaciones entre números complejos y entre vectores.

Capítulo 8

Aplicaciones de las derivadas parciales

APLICACIONES A LA GEOMETRIA

1. Plano tangente a una superficie.

Sea $F(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie S como la de la Fig. 8-1. Se supondrá que F es continuamente diferenciable al menos que se indique otra cosa. Sea hallar la ecuación de un plano tangente a S en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Un vector normal a S en ese punto es $\mathbf{N}_0 = \nabla F|_P$, donde el subíndice P indica que el gradiente se ha de calcular en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$.

Si $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ son los vectores que van de O a $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x, y, z)$ respectivamente del plano, la ecuación del plano es

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{N}_0 = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla F|_P = 0 \quad (1)$$

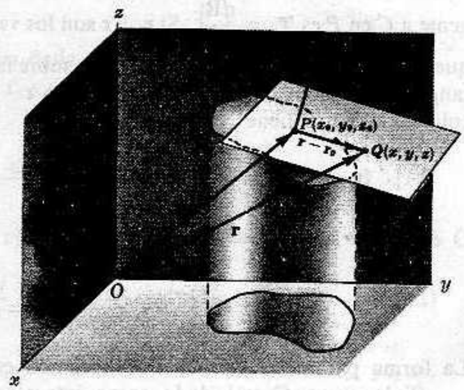


Fig. 8-1

puesto que $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{N}_0$.

En forma cartesiana,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P (x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P (y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P (z-z_0) = 0 \quad (2)$$

Si la ecuación de la superficie está dada en coordenadas curvilíneas ortogonales en la forma $F(u_1, u_2, u_3) = 0$, la ecuación del plano tangente se puede obtener mediante el resultado de la página 142 para el gradiente en estas coordenadas. Véase Problema 4.

2. Normal a una superficie

Supóngase que se pide la ecuación de una recta normal a la superficie S en $P(x_0, y_0, z_0)$. Si $\mathbf{r}$ es el vector de O en la Fig. 8-1 a cualquier punto (x, y, z) de la normal $\mathbf{N}_0$, se ve que $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ es colineal con $\mathbf{N}_0$ y así, pues, la ecuación pedida es para los vectores

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{N}_0 = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\nabla F|_P = 0 \quad (3)$$

En forma cartesiana es

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_P} = \frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_P} = \frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_P} \quad (4)$$

Haciendo estas razones iguales a un parámetro (bien sea t o u) y despejando x, y y z se tienen las *ecuaciones paramétricas* de la recta normal.

Las ecuaciones de la normal se pueden escribir también cuando la ecuación de la superficie está expresada en coordenadas curvilíneas ortogonales.

3. Recta tangente a una curva.

Sean $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$ las ecuaciones paramétricas de una curva C en la Fig. 8-2, suponiéndose, siempre que no se diga otra cosa, que f, g y h son continuamente diferenciables. Se trata de hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en que $u = u_0$.

Si $\mathbf{R} = f(u)\mathbf{i} + g(u)\mathbf{j} + h(u)\mathbf{k}$, un vector tangente a C en P es $\mathbf{T}_0 = \left.\dfrac{d\mathbf{R}}{du}\right|_P$. Si $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ son los vectores que van de O a $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x, y, z)$ sobre la recta tangente, respectivamente, entonces como $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es colineal a $\mathbf{T}_0$ se tiene

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{T}_0 \;=\; (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \times \left.\frac{d\mathbf{R}}{du}\right|_P \;=\; 0 \qquad (5)$$

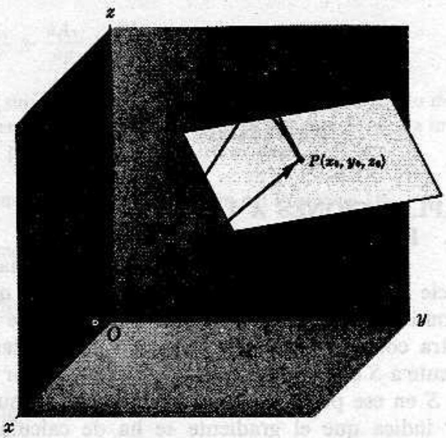


Fig. 8-2

O en forma cartesiana

$$\frac{x - x_0}{f'(u_0)} \;=\; \frac{y - y_0}{g'(u_0)} \;=\; \frac{z - z_0}{h'(u_0)} \qquad (6)$$

La forma paramétrica se obtiene haciendo estas razones iguales a u.

Si la curva C está dada como intersección de dos superficies de ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$, las correspondientes ecuaciones de la recta tangente son

$$\frac{x - x_0}{\left|\begin{matrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{matrix}\right|_P} \;=\; \frac{y - y_0}{\left|\begin{matrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{matrix}\right|_P} \;=\; \frac{z - z_0}{\left|\begin{matrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{matrix}\right|_P} \qquad (7)$$

Obsérvese que los determinantes en (7) son jacobianos. Un resultado parecido se obtiene si las superficies están dadas en coordenadas curvilíneas ortogonales.

4. Plano normal a una curva.

Si se quiere hallar la ecuación del plano normal a la curva C en $P(x_0, y_0, z_0)$ de la Fig. 8-2 (o sea, el plano perpendicular a la recta tangente a C en este punto) y $\mathbf{r}$ es el vector de O a un punto (x, y, z) de este plano, se sigue que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es perpendicular a $\mathbf{T}_0$. Así que la ecuación pedida es

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{T}_0 \;=\; (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \left.\frac{d\mathbf{R}}{du}\right|_P \;=\; 0 \qquad (8)$$

En forma cartesiana es

$$f'(u_0)\,(x - x_0) \;+\; g'(u_0)\,(y - y_0) \;+\; h'(u_0)\,(z - z_0) \;=\; 0 \qquad (9)$$

si la curva tiene ecuaciones paramétricas $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$, y

$$\left|\begin{matrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{matrix}\right|_P (x - x_0) \;+\; \left|\begin{matrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{matrix}\right|_P (y - y_0) \;+\; \left|\begin{matrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{matrix}\right|_P (z - z_0) \;=\; 0 \qquad (10)$$

si la curva está definida por $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$.

5. Envolventes.

Si $\phi(x, y, \alpha) = 0$ es una familia de curvas de un parámetro en el plano xy, puede existir una curva E tangente en cada punto a alguna curva de la familia y tal que cada curva de la familia sea tangente a E. Si E existe, su ecuación se puede encontrar resolviendo el sistema

$$\phi(x, y, \alpha) = 0, \qquad \phi_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \tag{11}$$

y E se llama *envolvente* de la familia.

El resultado se puede generalizar a la envolvente de una familia de superficies de un parámetro $\phi(x, y, z, \alpha)$, que se puede hallar con

$$\phi(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \phi_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{12}$$

Y se puede generalizar también a familias con dos (o más) parámetros.

DERIVADAS DIRECCIONALES

Sea $F(x, y, z)$ definida en un punto (x, y, z) de una curva dada C del espacio. Sea $F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ el valor de la función en un punto vecino sobre C y denótese por Δs el arco de curva entre esos puntos. Entonces,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x,y,z)}{\Delta s} \tag{13}$$

si existe, se llama *derivada direccional* de F en el punto (x, y, z) a lo largo de la curva C y viene dada por

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{14}$$

En forma vectorial esto se puede escribir

$$\frac{dF}{ds} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = \nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{T} \tag{15}$$

de donde se deduce que la derivada direccional es la componente de ∇F en la dirección de la tangente a C.

El valor máximo de la derivada direccional es, pues, $|\nabla F|$.

Estos máximos ocurren en direcciones normales a las superficies $F(x, y, z) = c$ (donde c es una constante) que se llaman *superficies equipotenciales* o *superficies de nivel*.

DERIVACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL

Sea
$$\phi(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2} f(x, \alpha)\, dx \qquad a \leqq \alpha \leqq b \tag{16}$$

donde u_1 y u_2 pueden depender del parámetro α. Entonces,

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(u_2, \alpha)\frac{du_2}{d\alpha} - f(u_1, \alpha)\frac{du_1}{d\alpha} \tag{17}$$

para $a \leqq \alpha \leqq b$, si $f(x, \alpha)$ y $\partial f/\partial \alpha$ son continuas en x y α en una cierta región del plano $x\alpha$ que incluye $u_1 \leqq x \leqq u_2$, $a \leqq \alpha \leqq b$ y si u_1 y u_2 son continuas y tienen derivadas continuas para $a \leqq \alpha \leqq b$.

Si u_1 y u_2 son constantes, los dos últimos términos de *(17)* se anulan.

La igualdad *(17)* o *regla de Leibnitz* se utiliza a menudo para calcular integrales definidas (Problemas 15, 29).

INTEGRACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL

Si $\phi(\alpha)$ está definida por *(16)* y $f(x, \alpha)$ es continua en x y α en una región que incluye $u_1 \leqq x \leqq u_2$, $a \leqq x \leqq b$, entonces si u_1 y u_2 son constantes,

$$\int_a^b \phi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \left\{\int_{u_1}^{u_2} f(x, \alpha)\, dx\right\} d\alpha = \int_{u_1}^{u_2} \left\{\int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha\right\} dx \tag{18}$$

igualdad que expresa el *cambio de orden de integración* o la *integración bajo el signo integral*.

MAXIMOS Y MINIMOS

Un punto (x_0, y_0) se llama *máximo relativo* o *mínimo relativo* de $f(x, y)$, respectivamente, según que $f(x_0 + h, y_0 + k) \leqq f(x_0, y_0)$ o $f(x_0 + h, y_0 + k) \geqq f(x_0, y_0)$ para h y k tales que $0 < |h| < \delta$, $0 < |k| < \delta$, donde δ es un número suficientemente pequeño.

Una condición necesaria para que $f(x, y)$ tenga un máximo o un mínimo relativo es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

Si (x_0, y_0) es un punto (llamado *crítico*) que satisface las ecuaciones (*19*) y si Δ está definido por

$$\Delta = \left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\}\Bigg|_{(x_0, y_0)} \tag{20}$$

entonces

1. (x_0, y_0) es máximo relativo si $\Delta > 0$ y $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} < 0 \quad \left(\text{o} \quad \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} < 0\right)$
2. (x_0, y_0) es mínimo relativo si $\Delta > 0$ y $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} > 0 \quad \left(\text{o} \quad \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} > 0\right)$
3. (x_0, y_0) no es máximo ni mínimo relativo si $\Delta < 0$. Si $\Delta < 0$, (x_0, y_0) se suele llamar *punto de silla*.
4. Si $\Delta = 0$ nada puede saberse (en tal caso es necesario un estudio más detenido).

METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA MAXIMOS Y MINIMOS

Un método para obtener los valores máximos o mínimos relativos de una función $F(x, y, z)$ sujeta a una *condición restrictiva* $\phi(x, y, z) = 0$ es la formación de la función auxiliar

$$G(x, y, z) \equiv F(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z) \tag{21}$$

sujeta a las condiciones

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \tag{22}$$

que son condiciones necesarias para máximo o mínimo relativo. El parámetro λ, que es independiente de x, y, z se llama un *multiplicador de Lagrange*.

El método se puede generalizar. Si se quiere hallar el máximo o el mínimo relativo de una función $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sujeta a las *condiciones restrictivas* $\phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \phi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \phi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$, se forma la función auxiliar

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots + \lambda_k\phi_k \tag{23}$$

sujeta a las condiciones (necesarias)

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0 \tag{24}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, que son independientes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los *multiplicadores de Lagrange*.

APLICACIONES A LOS ERRORES

La teoría de los diferenciales se puede aplicar para obtener los errores en una función de x, y, z, etc., cuando se conocen los errores en x, y, z, etc. Véase Problema 28.

Problemas resueltos

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

1. Encontrar las ecuaciones (*a*) del plano tangente y (*b*) de la recta normal a la superficie $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ en el punto $(1, 2, -1)$.

(*a*) La ecuación de la superficie es $F = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$. Una normal a la superficie en $(1, 2, -1)$ es

$$\mathbf{N}_0 = \nabla F|_{(1,2,-1)} = (2xyz - 2z^2)\mathbf{i} + (x^2z + 6y)\mathbf{j} + (x^2y - 4xz + 8)\mathbf{k}|_{(1,2,-1)}$$
$$= -6\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

En la Figura 8-1, página 161:

El vector de O a un punto (x, y, z) del plano tangente es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

El vector de O al punto $(1, 2, -1)$ del plano tangente es $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}$ está en el plano tangente y es entonces perpendicular a $\mathbf{N}_0$.

Luego la ecuación buscada es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{N}_0 = 0 \quad \text{o sea} \quad \{(x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}\}\cdot\{-6\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 14\mathbf{k}\} = 0$$
$$-6(x-1) + 11(y-2) + 14(z+1) = 0 \quad \text{o} \quad 6x - 11y - 14z + 2 = 0$$

(*b*) Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de O a un punto (x, y, z) de la normal $\mathbf{N}_0$. El vector de O al punto $(1, 2, -1)$ de la normal es $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}$ es colineal con $\mathbf{N}_0$. Luego

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\times\mathbf{N}_0 = \mathbf{0} \quad \text{o sea} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-1 & y-2 & z+1 \\ -6 & 11 & 14 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

que es equivalente a las ecuaciones

$$11(x-1) = -6(y-2), \quad 14(y-2) = 11(z+1), \quad 14(x-1) = -6(z+1)$$

Estas se pueden escribir

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{14}$$

que suele llamarse *forma continua* de la ecuación de la recta. Haciendo estas razones iguales al parámetro t se tiene

$$x = 1 - 6t, \quad y = 2 + 11t, \quad z = 14t - 1$$

que son las *ecuaciones paramétricas* de la recta.

2. ¿En qué punto corta la normal del Problema 1(*b*) el plano $x + 3y - 2z = 10$?

Sustituyendo por las ecuaciones paramétricas del Problema 1(*b*) se tiene

$$1 - 6t + 3(2 + 11t) - 2(14t - 1) = 10 \quad \text{o} \quad t = -1$$

Entonces, $x = 1 - 6t = 7$, $y = 2 + 11t = -9$, $z = 14t - 1 = -15$ y el punto buscado es $(7, -9, -15)$.

3. Mostrar que la superficie $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ es perpendicular a cualquiera de las superficies de la familia $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ en el punto de intersección $(1, -1, 2)$.

Escribiendo las ecuaciones de las dos superficies en la forma

$$F = x^2 - 2yz + y^3 - 4 = 0 \quad \text{y} \quad G = x^2 + 1 - (2 - 4a)y^2 - az^2 = 0$$

Entonces,

$$\nabla F = 2x\mathbf{i} + (3y^2 - 2z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}, \quad \nabla G = 2x\mathbf{i} - 2(2 - 4a)y\mathbf{j} - 2az\mathbf{k}$$

De modo que las normales a las dos superficies en $(1, -1, 2)$ están dadas por

$$\mathbf{N}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{N}_2 = 2\mathbf{i} + 2(2-4a)\mathbf{j} - 4a\mathbf{k}$$

Como $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = (2)(2) - 2(2-4a) - (2)(4a) \equiv 0$, se sigue que $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ son perpendiculares para cualquier a, con lo que se tiene el resultado pedido.

4. La ecuación de una superficie es en coordenadas esféricas $F(r, \theta, \phi) = 0$, supuesta F continuamente diferenciable. (*a*) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (r_0, θ_0, ϕ_0). (*b*) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $r = 4\cos\theta$ en el punto $(2\sqrt{2}, \pi/4, 3\pi/4)$. (*c*) Hallar un conjunto de ecuaciones de la recta normal a la superficie de (*b*) en el punto que se indica.

(*a*) El gradiente de Φ en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

donde
$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}$$

(véanse páginas 141, 142).

En coordenadas esféricas $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\operatorname{sen}\theta$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} + r\cos\theta\,\mathbf{k}$.

Entonces,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j} \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial F}{\partial\phi}\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

Como en la página 161, la ecuación pedida es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\nabla F|_P = 0$.

Sustituyendo ahora (*1*) en (*2*) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla F|_P = {} & \left\{\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_P \operatorname{sen}\theta_0\cos\phi_0 + \frac{1}{r_0}\left.\frac{\partial F}{\partial\theta}\right|_P \cos\theta_0\cos\phi_0 - \frac{\operatorname{sen}\phi_0}{r_0\operatorname{sen}\theta_0}\left.\frac{\partial F}{\partial\phi}\right|_P\right\}\mathbf{i} \\ & + \left\{\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_P \operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\phi_0 + \frac{1}{r_0}\left.\frac{\partial F}{\partial\theta}\right|_P \cos\theta_0\operatorname{sen}\phi_0 + \frac{\cos\phi_0}{r_0\operatorname{sen}\theta_0}\left.\frac{\partial F}{\partial\phi}\right|_P\right\}\mathbf{j} \\ & + \left\{\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_P \cos\theta_0 - \frac{1}{r_0}\left.\frac{\partial F}{\partial\theta}\right|_P \operatorname{sen}\theta_0\right\}\mathbf{k} \end{aligned}$$

Denotando las expresiones entre llaves por A, B, C, respectivamente, con lo que $\nabla F|_P = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, se ve que la ecuación buscada es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, que se puede escribir en coordenadas esféricas mediante las transformaciones para x, y y z en estas coordenadas.

(*b*) Se tiene $F = r - 4\cos\theta = 0$. Luego $\partial F/\partial r = 1$, $\partial F/\partial\theta = 4\operatorname{sen}\theta$, $\partial F/\partial\phi = 0$.

Como $r_0 = 2\sqrt{2}$, $\theta_0 = \pi/4$, $\phi_0 = 3\pi/4$, se tiene por la parte (*a*) $\nabla F|_P = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Por las ecuaciones de transformación el punto dado tiene coordenadas cartesianas $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, y entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x + \sqrt{2})\mathbf{i} + (y - \sqrt{2})\mathbf{j} + (z - 2)\mathbf{k}$.

La ecuación buscada del plano es, pues, $-(x + \sqrt{2}) + (y - \sqrt{2}) = 0$ o $y - x = 2\sqrt{2}$. En coordenadas esféricas se convierte en $r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - r\operatorname{sen}\theta\cos\phi = 2\sqrt{2}$.

En coordenadas cartesianas la ecuación $r = 4\cos\theta$ se convierte en $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ y el plano tangente se puede determinar a partir de aquí como en el Problema 1. En otros casos, en cambio, puede que no sea tan fácil obtener la ecuación cartesiana y entonces es más sencillo utilizar el método de la parte (*a*).

(c) Las ecuaciones de la normal se pueden dar en la forma

$$\frac{x+\sqrt{2}}{-1} = \frac{y-\sqrt{2}}{1} = \frac{z-2}{0}$$

donde el miembro de la derecha significa que la recta está en el plano $z = 2$. Así que la recta buscada viene dada por

$$\frac{x+\sqrt{2}}{-1} = \frac{y-\sqrt{2}}{1}, \quad z=0 \qquad \text{o} \qquad x+y=0,\ z=0$$

RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA

5. Hallar las ecuaciones (a) de la tangente y (b) del plano normal a la curva $x = t - \cos t$, $y = 3 + \operatorname{sen} 2t$, $z = 1 + \cos 3t$ en el punto en que $t = \frac{1}{2}\pi$.

(a) El vector del origen O (Fig. 8-2, página 162) a un punto de la curva C es $\mathbf{R} = (t - \cos t)\mathbf{i} + (3 + \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} + (1 + \cos 3t)\mathbf{k}$. Entonces un vector tangente a C en el punto en que $t = \frac{1}{2}\pi$ es

$$\mathbf{T}_0 = \left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{t=\frac{1}{2}\pi} = (1+\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + 2\cos 2t\,\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{k}\big|_{t=\frac{1}{2}\pi} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

El vector de O al punto en que $t = \frac{1}{2}\pi$ es $\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

El vector de O a un punto (x, y, z) de la recta tangente es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - \frac{1}{2}\pi)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$ es colineal con $\mathbf{T}_0$, de modo que la ecuación buscada es

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{o sea,} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-\frac{1}{2}\pi & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

y las ecuaciones pedidas son $\dfrac{x-\frac{1}{2}\pi}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ o en forma paramétrica $x = 2t + \frac{1}{2}\pi$, $y = 3 - 2t$, $z = 3t + 1$.

(b) Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de O a un punto (x, y, z) del plano normal. El vector de O al punto en que $t = \frac{1}{2}\pi$ es $\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - \frac{1}{2}\pi)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$ está en el plano normal y, por tanto, es perpendicular a $\mathbf{T}_0$. Luego la ecuación pedida es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{T}_0 = 0$ o $2(x - \frac{1}{2}\pi) - 2(y - 3) + 3(z - 1) = 0$.

6. Hallar las ecuaciones (a) de la tangente y (b) del plano normal a la curva $3x^2y + y^2z = -2$, $2xz - x^2y = 3$ en el punto $(1, -1, 1)$.

(a) Las ecuaciones de las superficies que se cortan en la curva son

$$F = 3x^2y + y^2z + 2 = 0, \qquad G = 2xz - x^2y - 3 = 0$$

Las normales a cada superficie en el punto $P(1, -1, 1)$ son, respectivamente,

$$\mathbf{N}_1 = \nabla F|_P = 6xy\mathbf{i} + (3x^2+2yz)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k} = -6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{N}_2 = \nabla G|_P = (2z-2xy)\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Así que un vector tangente a la curva en P es

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2 = (-6\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(4\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Luego, como en el Problema 5(a), la tangente está dada por

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{T}_0 = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \{(x-1)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}\}\times\{3\mathbf{i}+16\mathbf{j}+2\mathbf{k}\} = \mathbf{0}$$

es decir, $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{16} = \dfrac{z-1}{2}$ o $x = 1 + 3t$, $y = 16t - 1$, $z = 2t + 1$

(b) Como en el Problema 5(b) el plano normal está dado por

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{T}_0 = 0 \quad \text{o} \quad \{(x-1)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}\}\cdot\{3\mathbf{i}+16\mathbf{j}+2\mathbf{k}\} = 0$$

es decir, $3(x-1) + 16(y+1) + 2(z-1) = 0$ o $3x + 16y + 2z = -11$

Los resultados en (a) y en (b) se pueden obtener también mediante las ecuaciones (7) y (10), respectivamente, en la página 162.

7. Demostrar la ecuación *(10)*, página 162.

Supóngase la curva definida por la intersección de dos superficies de ecuaciones $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$, siendo F y G continuamente diferenciables.

Las normales a las superficies en el punto P están dadas por $\mathbf{N}_1 = \nabla F|_P$ y $\mathbf{N}_2 = \nabla G|_P$, respectivamente, y entonces el vector tangente a la curva en P es $\mathbf{T}_0 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \nabla F|_P \times \nabla G|_P$, con lo que la ecuación del plano normal será $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{T}_0 = 0$. Como

$$\mathbf{T}_0 = \nabla F|_P \times \nabla G|_P = \{(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \times (G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k})\}|_P$$

$$= \left|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix}\right|_P = \left|\begin{matrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{matrix}\right|_P \mathbf{i} + \left|\begin{matrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{matrix}\right|_P \mathbf{j} + \left|\begin{matrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{matrix}\right|_P \mathbf{k}$$

la ecuación buscada es, pues,

$$(r - r_0) \cdot \nabla F|_P = 0 \quad \text{o} \quad \left|\begin{matrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{matrix}\right|_P (x - x_0) + \left|\begin{matrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{matrix}\right|_P (y - y_0) + \left|\begin{matrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{matrix}\right|_P (z - z_0) = 0$$

ENVOLVENTES

8. Demostrar que la envolvente de la familia $\phi(x, y, \alpha) = 0$, si existe, puede obtenerse resolviendo el sistema $\phi = 0$ y $\phi_\alpha = 0$.

Suponiendo la envolvente en forma paramétrica $x = f(\alpha)$, $y = g(\alpha)$ es entonces $\phi(f(\alpha), g(\alpha), \alpha) = 0$ idénticamente, y entonces diferenciando con respecto a α [suponiendo que ϕ, f y g tienen derivadas continuas] se tiene

$$\phi_x f'(\alpha) + \phi_y g'(\alpha) + \phi_\alpha = 0 \tag{1}$$

La pendiente de un elemento de la familia $\phi(x, y, \alpha) = 0$ en (x, y) viene dada por $\phi_x\, dx + \phi_y\, dy = 0$, o sea, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\phi_x}{\phi_y}$. La pendiente de la envolvente en (x, y) es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\alpha}{dx/d\alpha} = \dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$. Luego en todo punto en que la envolvente y una curva de la familia son tangentes, se ha de tener

$$-\frac{\phi_x}{\phi_y} = \frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{o} \quad \phi_x f'(\alpha) + \phi_y g'(\alpha) = 0 \tag{2}$$

Comparando *(2)* con *(1)* se ve que $\phi_\alpha = 0$ y resulta lo afirmado.

9. *(a)* Hallar la envolvente de la familia $x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 1$.

(b) Ilustrar geométricamente los resultados.

(a) Por el Problema 8, la envolvente, caso de existir, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones $\phi(x, y, \alpha) = x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - 1 = 0$ y $\phi_\alpha(x, y, \alpha) = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha = 0$. A partir de estas ecuaciones se obtiene $x = \operatorname{sen} \alpha$, $y = \cos \alpha$ o bien $x^2 + y^2 = 1$.

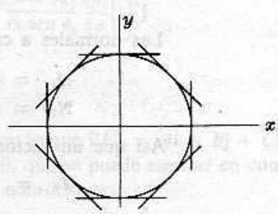


Fig. 8-3

(b) La familia dada es una familia de rectas, algunos de cuyos elementos se ven en la Fig. 8-3. La envolvente es el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

10. Hallar la envolvente de la familia de superficies $z = 2\alpha x - \alpha^2 y$.

Por una generalización del Problema 8, la envolvente buscada, si existe, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$(1) \quad \phi = 2\alpha x - \alpha^2 y - z = 0 \quad \text{y} \quad (2) \quad \phi_\alpha = 2x - 2\alpha y = 0$$

Según *(2)*, $\alpha = x/y$, y, sustituyendo en *(1)*, se tiene $x^2 = yz$, que es la envolvente buscada.

11. Hallar la envolvente de la familia de superficies de dos parámetros $z = \alpha x + \beta y - \alpha\beta$.

La envolvente de la familia $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, si existe, se obtiene por eliminación de α y β entre las ecuaciones $F = 0$, $F_\alpha = 0$, $F_\beta = 0$ (Problema 43). Como

$$F = z - \alpha x - \beta y + \alpha\beta = 0, \quad F_\alpha = -x + \beta = 0, \quad F_\beta = -y + \alpha = 0$$

Entonces, $\beta = x$, $\alpha = y$ y se tiene $z = xy$.

DERIVADAS DIRECCIONALES

12. Hallar la derivada direccional de $F = x^2yz^3$ a lo largo de la curva $x = e^{-u}$, $y = 2\,\text{sen}\,u + 1$, $z = u - \cos u$ en el punto P en que $u = 0$.

El punto P que corresponde a $u = 0$ es $(1, 1, -1)$. Luego

$$\nabla F = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ en } P$$

Un vector tangente a la curva es

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{du} &= \frac{d}{du}\{e^{-u}\mathbf{i} + (2\,\text{sen}\,u + 1)\mathbf{j} + (u - \cos u)\mathbf{k}\}\\ &= -e^{-u}\mathbf{i} + 2\cos u\,\mathbf{j} + (1 + \text{sen}\,u)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ en } P\end{aligned}$$

y el vector tangente unitario en esta dirección es $\mathbf{T}_0 = \dfrac{-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}$.

Luego

$$\text{Derivada direccional} = \nabla F \cdot \mathbf{T}_0 = (-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Como es positiva, F aumenta en esta dirección.

13. Demostrar que la máxima variación de F, es decir, la máxima derivada direccional, se verifica en la dirección del vector ∇F y tiene su magnitud.

$\dfrac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ a la proyección de ∇F en la dirección $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$. Esta proyección es máxima si ∇F y $d\mathbf{r}/ds$ tienen la misma dirección. Entonces el valor máximo de dF/ds ocurre en la dirección de ∇F y la magnitud es $|\nabla F|$.

14. (*a*) Hallar la derivada direccional de $U = 2x^3y - 3y^2z$ en $P(1, 2, -1)$ en una dirección hacia $Q(3, -1, 5)$. (*b*) ¿En qué dirección a partir de P es máxima la derivada direccional? (*c*) ¿Cuál es la magnitud de la derivada direccional máxima?

(*a*) $\nabla U = 6x^2y\mathbf{i} + (2x^3 - 6yz)\mathbf{j} - 3y^2\mathbf{k} = 12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ en P.

El vector de P a Q es $= (3-1)\mathbf{i} + (-1-2)\mathbf{j} + [5-(-1)]\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

El vector unitario de P a Q es $= \mathbf{T} = \dfrac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} = \dfrac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{7}$.

Luego

$$\text{Derivada direccional en } P = (12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 12\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{7}\right) = -\frac{90}{7}$$

o sea, que U decrece en esta dirección.

(*b*) Por el Problema 13, la derivada direccional es máxima en la dirección $12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$.

(*c*) Por el Problema 13, el valor de la derivada direccional máxima es $|12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 12\mathbf{k}| = \sqrt{144 + 196 + 144} = 22$.

DERIVACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL

15. Demostrar la regla de Leibnitz para derivar bajo el signo integral

Sea $\phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$. Luego

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi(\alpha+\Delta\alpha) - \phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \\ &= \int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_1(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \\ &\quad - \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \\ &= \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx + \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio,

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx = \Delta\alpha \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)\,dx \tag{1}$$

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx = f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)[u_1(\alpha+\Delta\alpha) - u_1(\alpha)] \tag{2}$$

$$\int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx = f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)[u_2(\alpha+\Delta\alpha) - u_2(\alpha)] \tag{3}$$

donde ξ está entre α y $\alpha+\Delta\alpha$, ξ_1 entre $u_1(\alpha)$ y $u_1(\alpha+\Delta\alpha)$ y ξ_2 está entre $u_2(\alpha)$ y $u_2(\alpha+\Delta\alpha)$.

Entonces.

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\alpha} = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)\,dx + f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_2}{\Delta\alpha} - f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_1}{\Delta\alpha}$$

Pasando al límite para $\Delta\alpha \to 0$, y en la suposición de que las funciones tienen derivadas continuas, se tiene

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)\,dx + f[u_2(\alpha),\alpha]\frac{du_2}{d\alpha} - f[u_1(\alpha),\alpha]\frac{du_1}{d\alpha}$$

16. Si $\phi(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx$, hallar $\phi'(\alpha)$ con $\alpha \neq 0$.

Por la regla de Leibnitz.

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) &= \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\right)dx + \frac{\operatorname{sen}(\alpha\cdot\alpha^2)}{\alpha^2}\frac{d}{d\alpha}(\alpha^2) - \frac{\operatorname{sen}(\alpha\cdot\alpha)}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(\alpha) \\ &= \int_\alpha^{\alpha^2} \cos\alpha x\,dx + \frac{2\operatorname{sen}\alpha^3}{\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\alpha^2}{\alpha} \\ &= \left.\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\right|_\alpha^{\alpha^2} + \frac{2\operatorname{sen}\alpha^3}{\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\alpha^2}{\alpha} = \frac{3\operatorname{sen}\alpha^3 - 2\operatorname{sen}\alpha^2}{\alpha}.\end{aligned}$$

17. Si $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha > 1$ hallar $\int_0^\pi \frac{dx}{(2-\cos x)^2}$. (Véase Problema 62, Capítulo 5.)

Por la regla de Leibnitz. si $\phi(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \pi(\alpha^2-1)^{-1/2}$, entonces.

$$\phi'(\alpha) = -\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2} = -\tfrac{1}{2}\pi(\alpha^2-1)^{-3/2}\,2\alpha = -\frac{\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$$

Luego $\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2} = \frac{\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$ del cual $\int_0^\pi \frac{dx}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

INTEGRACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL

18. Demostrar *(18)* página 163, para integración bajo el signo integral.

Considerar *(1)* $\psi(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2}\left\{\int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx$

Por la regla de Leibnitz

$$\psi'(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx = \int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)\,dx = \phi(\alpha)$$

Entonces, por integración, *(2)* $\psi(\alpha) = \int_a^{\alpha}\phi(\alpha)\,d\alpha + c$

Como $\psi(a) = 0$ por *(1)*, se tiene $c = 0$ en *(2)*. Así, pues, a partir de *(1)* y *(2)* con $c = 0$ se encuentra que

$$\int_{u_1}^{u_2}\left\{\int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,dx\right\}dx = \int_a^{\alpha}\left\{\int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha$$

Y haciendo $\alpha = b$ resulta la igualdad.

19. Demostrar que $\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx = \pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$ si $a, b > 1$.

Por el Problema 62, Capítulo 5, $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha > 1$.

Integrando el primer miembro respecto de α entre a y b,

$$\int_0^{\pi}\left\{\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha-\cos x}\right\}dx = \int_0^{\pi}\ln(\alpha-\cos x)\Big|_a^b\,dx = \int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx$$

Integrando el segundo miembro respecto de α entre a y b,

$$\int_0^{\pi}\frac{\pi\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})\Big|_a^b = \pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

de donde se sigue el resultado.

MAXIMOS Y MINIMOS

20. Demostrar que una condición necesaria para que $f(x, y)$ tenga un extremo relativo (máximo o mínimo en (x_0, y_0) es que $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Si $f(x_0, y_0)$ ha de ser un valor extremo de $f(x, y)$, debe ser un valor extremo tanto de $f(x, y_0)$ como de $f(x_0, y)$. Pero una condición necesaria para que éstas tengan valores extremos en $x = x_0$ y $y = y_0$, respectivamente, es que $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$ (por lo visto para funciones en una variable).

21. Sea $f(x, y)$ continua con derivadas parciales continuas de segundo orden al menos en cierta región $\mathcal{R}$ que incluya el punto (x_0, y_0). Demostrar que una condición suficiente para que $f(x_0, y_0)$ sea un máximo relativo es que $\Delta = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Por el teorema de Taylor (página 109), con $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, se tiene

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \tfrac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) \qquad (1)$$

en que las segundas derivadas del segundo miembro se han calculado en $x_0 + \theta h$, $y_0 + \theta k$ con $0 < \theta < 1$. Completando el cuadrado de la derecha en *(1)* se encuentra que

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \tfrac{1}{2}f_{xx}\left\{\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \left(\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2}\right)k^2\right\} \qquad (2)$$

Pero, por hipótesis, existe un entorno de (x_0, y_0) tal que $f_{xx} < 0$ y la expresión entre llaves debe ser positiva, pues $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ por hipótesis. Así, pues, se deduce que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \leqq f(x_0, y_0)$$

para h y k suficientemente pequeñas, lo que significa que $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo.

Análogamente se pueden demostrar condiciones suficientes para mínimo relativo.

22. Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

$f_x = 3x^2 - 3 = 0$ para $x = \pm 1$, $f_y = 3y^2 - 12 = 0$ para $y = \pm 2$. Los puntos críticos son, pues, $P(1, 2)$, $Q(-1, 2)$, $R(1, -2)$, $S(-1, -2)$.

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = 0$. Luego $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy$.

En $P(1, 2)$, $\Delta > 0$ y f_{xx} (o f_{yy}) > 0; luego P es un mínimo relativo.

En $Q(-1, 2)$, $\Delta < 0$ y Q no es máximo ni mínimo.

En $R(1, -2)$, $\Delta < 0$ y R no es máximo ni mínimo.

En $S(-1, -2)$, $\Delta > 0$ y f_{xx} (o f_{yy}) < 0, con lo que S es un máximo relativo.

Así, pues, el mínimo relativo de $f(x, y)$ en P es 2, y el máximo relativo en S es 38. Los puntos Q y R son *puntos de silla.*

23. Una caja rectangular sin tapa ha de tener un volumen de 32 unidades cúbicas. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la superficie total sea mínima?

Si x, y y z son las aristas (Fig. 8-4), se tiene

(*1*) Volumen de la caja $= V = xyz = 32$

(*2*) Superficie de la caja $= S = xy + 2yz + 2xz$

o, por ser $z = 32/xy$ por (*1*),

Fig. 8-4

$$S = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} = 0 \quad \text{con} \quad (3)\ x^2y = 64, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} = 0 \quad \text{con} \quad (4)\ xy^2 = 64$$

Dividiendo las ecuaciones (*3*) y (*4*) entre sí se tiene $y = x$, de modo que $x^3 = 64$ o $x = y = 4$ y $z = 2$.

Para $x = y = 4$, $\Delta = S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2 = \left(\frac{128}{x^3}\right)\left(\frac{128}{y^3}\right) - 1 > 0$ y $S_{xx} = \frac{128}{x^3} > 0$. Así que la mínima superficie se obtiene con las dimensiones $4 \times 4 \times 2$.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA MAXIMOS Y MINIMOS

24. Considérese $F(x, y, z)$ sujeta a la condición restrictiva $G(x, y, z) = 0$. Demostrar que una condición necesaria para que $F(x, y, z)$ tenga un extremo es que $F_xG_y - F_yG_x = 0$.

Como $G(x, y, z) = 0$, se puede considerar z como función de x y y, o sea, $z = f(x, y)$. Una condición necesaria para que $F[x, y, f(x, y)]$ tenga un valor extremo es que las derivadas parciales con respecto a x y y sean nulas, lo cual da

$$(1)\quad F_x + F_z z_x = 0 \qquad (2)\quad F_y + F_z z_y = 0$$

Como $G(x, y, z) = 0$, se tiene también

$$(3)\quad G_x + G_z z_x = 0 \qquad (4)\quad G_y + G_z z_y = 0$$

De (*1*) y (*3*) se tiene (*5*) $F_xG_z - F_zG_x = 0$, y de (*2*) y (*4*) se tiene (*6*) $F_yG_z - F_zG_y = 0$. Entonces, por (*5*) y (*6*) resulta $F_xG_y - F_yG_x = 0$.

Los anteriores resultados son válidos solo si $F_z \neq 0$, $G_z \neq 0$.

25. En el problema anterior, mostrar que la condición enunciada equivale a las condiciones $\phi_x = 0$, $\phi_y = 0$, donde $\phi = F + \lambda G$, siendo λ una constante.

Si $\phi_x = 0$, $F_x + \lambda G_x = 0$. Si $\phi_y = 0$, $F_y + \lambda G_y = 0$. Eliminando λ entre estas ecuaciones, se tiene $F_x G_y - F_y G_x = 0$.

El multiplicador λ es el *multiplicador de Lagrange*. Si se quiere puede considerarse también $\phi = \lambda F + G$ con $\phi_x = 0$, $\phi_y = 0$.

26. Averiguar la mínima distancia del origen a la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$, $z = 0$.

Se ha de hallar el valor mínimo de $x^2 + y^2$ (el cuadrado de la distancia del origen a un punto cualquiera del plano xy) sujetos a la condición $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

Según el método de los multiplicadores de Lagrange, sea $\phi = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 + \lambda(x^2 + y^2)$. Entonces,

$$\phi_x = 2x + 8y + 2\lambda x = 0 \quad \text{o} \quad (1) \quad (\lambda+1)x + 4y = 0$$
$$\phi_y = 8x + 14y + 2\lambda y = 0 \quad \text{o} \quad (2) \quad 4x + (\lambda+7)y = 0$$

Por (*1*) y (*2*), siendo $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 4 \\ 4 & \lambda+7 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir,} \quad \lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0 \quad \text{o} \quad \lambda = 1, -9$$

Caso 1: $\lambda = 1$. Por (*1*) o (*2*), $x = -2y$ y sustituyendo en $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ da $-5y^2 = 225$, que carece de solución real.

Caso 2: $\lambda = -9$. Por (*1*) o (*2*), $y = 2x$, que sustituida en $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ da $45x^2 = 225$. Luego $x^2 = 5$, $y^2 = 4x^2 = 20$ y así $x^2 + y^2 = 25$. De modo que la distancia mínima buscada es $\sqrt{25} = 5$.

27. (*a*) Hallar los valores máximo y mínimo de $x^2 + y^2 + z^2$ sujetos a las condiciones $x^2/4 + y^2/5 + z^2/25 = 1$ y $z = x + y$. (*b*) Dar una interpretación geométrica del anterior resultado en (*a*).

(*a*) Hay que hallar los extremos de $F = x^2 + y^2 + z^2$ sujetos a las condiciones $\phi_1 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{25} - 1 = 0$ y $\phi_2 = x + y - z = 0$. En este caso se utilizan dos multiplicadores de Lagrange λ_1, λ_2 y se considera la función

$$G = F + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2\left(x + y - z\right)$$

Tomando las derivadas parciales de G con respecto a x, y, z, e igualándolas a cero, se tiene

$$G_x = 2x + \frac{\lambda_1 x}{2} + \lambda_2 = 0, \quad G_y = 2y + \frac{2\lambda_1 y}{5} + \lambda_2 = 0, \quad G_z = 2z + \frac{2\lambda_1 z}{25} - \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$

Despejando de estas ecuaciones x, y, z se tiene

$$x = \frac{-2\lambda_2}{\lambda_1 + 4}, \quad y = \frac{-5\lambda_2}{2\lambda_1 + 10}, \quad z = \frac{25\lambda_2}{2\lambda_1 + 50} \qquad (2)$$

De la segunda condición, $x + y - z = 0$, se obtiene por división por λ_2 supuesto diferente de cero (lo cual está justificado porque de otro modo se tendría $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, que no satisfaría la primera condición),

$$\frac{2}{\lambda_1 + 4} + \frac{5}{2\lambda_1 + 10} + \frac{25}{2\lambda_1 + 50} = 0$$

Multiplicando ambos miembros por $2(\lambda_1 + 4)(\lambda_1 + 5)(\lambda_1 + 25)$ y simplificando da

$$17\lambda_1^2 + 245\lambda_1 + 750 = 0 \quad \text{o} \quad (\lambda_1 + 10)(17\lambda_1 + 75) = 0$$

de donde $\lambda_1 = -10$ o $-75/17$.

Caso 1: $\lambda_1 = -10$.

De (2), $x = \frac{1}{3}\lambda_2$, $y = \frac{1}{2}\lambda_2$, $z = \frac{5}{6}\lambda_2$. Sustituyendo en la primera condición $x^2/4 + y^2/5 + z^2/25 = 1$ da $\lambda_2^2 = 180/19$ o $\lambda_2 = \pm 6\sqrt{5/19}$, lo que da los dos puntos críticos

$$(2\sqrt{5/19},\ 3\sqrt{5/19},\ 5\sqrt{5/19}), \qquad (-2\sqrt{5/19},\ -3\sqrt{5/19},\ -5\sqrt{5/19})$$

El valor de $x^2 + y^2 + z^2$ que corresponde a estos puntos críticos es $(20 + 45 + 125)/19 = 10$.

Caso 2: $\lambda_1 = -75/17$.

De (2), $x = \frac{34}{7}\lambda_2$, $y = -\frac{17}{4}\lambda_2$, $z = \frac{17}{28}\lambda_2$. Sustituyendo en la primera condición $x^2/4 + y^2/5 + z^2/25 = 1$, da $\lambda_2 = \pm 140/(17\sqrt{646})$, que da los puntos críticos

$$(40/\sqrt{646},\ -35/\sqrt{646},\ 5/\sqrt{646}), \qquad (-40/\sqrt{646},\ 35/\sqrt{646},\ -5/\sqrt{646})$$

El valor de $x^2 + y^2 + z^2$ que corresponde a éstos es $(1600 + 1225 + 25)/646 = 75/17$.

Así que el valor máximo buscado es 10 y el valor mínimo es 75/17.

(*b*) Como $x^2 + y^2 + z^2$ representa el cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen $(0, 0, 0)$, el problema equivale a determinar las distancias máxima y mínima del origen a la curva de intersección del elipsoide $x^2/4 + y^2/5 + z^2/25 = 1$ con el plano $z = x + y$. Como esta curva es una elipse, se tiene la interpretación de que $\sqrt{10}$ y $\sqrt{75/17}$ son las longitudes de los semiejes mayor y menor de esta elipse.

El que los valores máximo y mínimo sean dados por $-\lambda_1$ en ambos Casos 1 y 2 no es mera coincidencia. En efecto, al multiplicar las ecuaciones (*1*) por x, y y z sucesivamente, y sumar, se obtiene

$$2x^2 + \frac{\lambda_1 x^2}{2} + \lambda_2 x + 2y^2 + \frac{2\lambda_1 y^2}{5} + \lambda_2 y + 2z^2 + \frac{2\lambda_1 z^2}{25} - \lambda_2 z = 0$$

es decir,

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25}\right) + \lambda_2(x + y - z) = 0$$

Y entonces, aplicando las condiciones, se tiene $x^2 + y^2 + z^2 = -\lambda_1$.

Para una generalización de este problema, véase Problema 76.

APLICACIONES A ERRORES

28. El periodo T de un péndulo simple de longitud l está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Hallar (*a*) el error absoluto y (*b*) el error relativo al calcular T con $l = 2$ pies y $g = 32$ pies/s^2 si los valores verdaderos eran $l = 1{,}95$ pies y $g = 32{,}2$ pies/s^2.

(*a*) $T = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}$. Entonces

$$dT = (2\pi g^{-1/2})(\tfrac{1}{2}l^{-1/2}\,dl) + (2\pi l^{1/2})(-\tfrac{1}{2}g^{-3/2}\,dg) = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}\,dl - \pi\sqrt{\frac{l}{g^3}}\,dg \qquad (1)$$

Error en $g = \Delta g = dg = +0{,}2$; error en $l = \Delta l = dl = -0{,}05$

El error en T es ΔT, que en este caso es aproximadamente igual a dT. Así, pues, por (*1*),

$$\text{Error en } T = dT = \frac{\pi}{\sqrt{(2)(32)}}(-0{,}05) - \pi\sqrt{\frac{2}{(32)^3}}(+0{,}2) = -\frac{\pi}{128} = -0{,}025 \text{ s (aprox.)}$$

El valor de T para $l = 2$, $g = 32$ es $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{\pi}{2} = 1{,}571$ s (aproximadamente)

Con lo que el valor corregido de T es $1{,}571 - 0{,}025 = 1{,}546$ o $1{,}55$ s.

(*b*) Error relativo en $T = \dfrac{dT}{T} = \dfrac{-\pi/128}{\pi/2} = -\dfrac{0{,}025}{1{,}571} = -1{,}56\%$.

Otro método: Como $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$,

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}05}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{+0{,}2}{32}\right) = -1{,}56\% \qquad (2)$$

como antes. Obsérvese que (*2*) se puede escribir

Error relativo en $T = \frac{1}{2}$ Error relativo en $l - \frac{1}{2}$ Error relativo en g

PROBLEMAS VARIOS

29. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx.$

Para calcular esta integral se apela al procedimiento siguiente. Defínase

$$\phi(\alpha) \quad = \quad \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,dx \qquad \alpha > 0$$

Entonces, por la regla de Leibnitz,

$$\phi'(\alpha) \quad = \quad \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\right)dx \quad = \quad \int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\ln x}\,dx \quad = \quad \int_0^1 x^\alpha\,dx \quad = \quad \frac{1}{\alpha+1}$$

Integrando con respecto a α, $\phi(\alpha) = \ln(\alpha + 1) + c$. Pero como $\phi(0) = 0$, $c = 0$ y, entonces, $\phi(\alpha) = \ln(\alpha + 1)$.

Así que el valor de la integral es $\phi(1) = \ln 2$.

Se puede justificar aquí la aplicación de la regla de Leibnitz porque si se define $F(x, \alpha) = (x^\alpha - 1)/\ln x$, $0 < x < 1$, $F(0, \alpha) = 0$, $F(1, \alpha) = \alpha$, entonces $F(x, \alpha)$ es continua en x y en α para $0 \leqq x \leqq 1$ y todo valor finito $\alpha > 0$.

30. Hallar constantes a y b para las cuales

$$F(a, b) \quad = \quad \int_0^\pi \{\operatorname{sen} x - (ax^2 + bx)\}^2\,dx$$

es un mínimo.

Las condiciones necesarias para un mínimo son $\partial F/\partial a = 0$, $\partial F/\partial b = 0$. Haciendo estas derivaciones, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial a} \quad = \quad \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}\{\operatorname{sen} x - (ax^2 + bx)\}^2\,dx \quad = \quad -2\int_0^\pi x^2\{\operatorname{sen} x - (ax^2 + bx)\}\,dx \quad = \quad 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} \quad = \quad \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial b}\{\operatorname{sen} x - (ax^2 + bx)\}^2\,dx \quad = \quad -2\int_0^\pi x\{\operatorname{sen} x - (ax^2 + bx)\}\,dx \quad = \quad 0$$

De donde

$$\begin{cases} a\displaystyle\int_0^\pi x^4\,dx + b\int_0^\pi x^3\,dx = \int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\,dx \\ a\displaystyle\int_0^\pi x^3\,dx + b\int_0^\pi x^2\,dx = \int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^5 a}{5} + \dfrac{\pi^4 b}{4} = \pi^2 - 4 \\ \dfrac{\pi^4 a}{4} + \dfrac{\pi^3 b}{3} = \pi \end{cases}$$

Despejando a y b se encuentra que

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5} \approx -0{,}40065, \qquad b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2} \approx 1{,}24798$$

Se puede demostrar que para estos valores, $F(a, b)$ es efectivamente un mínimo aplicando las condiciones suficientes de la página 164.

Se dice que el polinomio $ax^2 + bx$ es una *aproximación por mínimos cuadrados* de sen x en el intervalo $]0, \pi[$. Las ideas que aquí se tocan son de gran importancia en muchas ramas de las matemáticas y sus aplicaciones.

Problemas propuestos

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

31. Hallar las ecuaciones de (*a*) el plano tangente y (*b*) la recta normal a la superficie $x^2 + y^2 = 4z$ en $(2, -4, 5)$. *Sol.* (*a*) $x - 2y - z = 5$, (*b*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-5}{-1}$.

32. Si $z = f(x, y)$, demostrar que las ecuaciones del plano tangente y de la normal en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ son, respectivamente,

$$(a)\quad z - z_0 = f_x|_P(x - x_0) + f_y|_P(y - y_0) \qquad \text{y} \qquad (b)\quad \frac{x - x_0}{f_x|_P} = \frac{y - y_0}{f_y|_P} = \frac{z - z_0}{-1}$$

33. Demostrar que el ángulo agudo γ entre el eje z y la normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en un punto cualquiera está dado por $\sec \gamma = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}/|F_z|$.

34. La ecuación de una superficie está dada en coordenadas cilíndricas por $F(\rho, \phi, z) = 0$, con F continuamente diferenciable. Demostrar que las ecuaciones (*a*) del plano tangente y (*b*) de la normal en el punto $P(\rho_0, \phi_0, z_0)$ están dadas, respectivamente, por

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

donde $x_0 = \rho_0 \cos \phi_0$, $y_0 = \rho_0 \operatorname{sen} \phi_0$ y

$$A = F_\rho|_P \cos \phi_0 - \frac{1}{\rho} F_\phi|_P \operatorname{sen} \phi_0, \qquad B = F_\rho|_P \operatorname{sen} \phi_0 + \frac{1}{\rho} F_\phi|_P \cos \phi_0, \qquad C = F_z|_P$$

35. Mediante el Problema 34, hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\pi z = \rho\phi$ en el punto en que $\rho = 2$, $\phi = \pi/2$, $z = 1$. Para comprobar la respuesta hágase el problema en coordenadas rectangulares.
Sol. $2x - \pi y + 2\pi z = 0$

RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA

36. Hallar las ecuaciones de (*a*) la recta tangente y (*b*) el plano normal a la curva alabeada $x = 6 \operatorname{sen} t$, $y = 4 \cos 3t$, $z = 2 \operatorname{sen} 5t$ en el punto en que $t = \pi/4$.

Sol. (*a*) $\dfrac{x - 3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{y + 2\sqrt{2}}{-6} = \dfrac{z + \sqrt{2}}{-5}$ (*b*) $3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2}$.

37. Las superficies $x + y + z = 3$ y $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ se cortan en una curva alabeada. Hallar las ecuaciones de (*a*) la recta tangente, (*b*) del plano normal a esta curva alabeada en el punto $(1, 1, 1)$.

Sol. (*a*) $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$, (*b*) $3x - y - 2z = 0$

ENVOLVENTES

38. Hallar la envolvente de las siguientes familias de curvas del plano xy. Construir un grafo en cada caso

$$(a)\ y = \alpha x - \alpha^2, \quad (b)\ \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{1 - \alpha} = 1.$$

Sol. (*a*) $x^2 = 4y$; (*b*) $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$

39. Hallar la envolvente de una familia de rectas que tienen la propiedad de que la longitud del segmento que determinan las intersecciones con los ejes x y y es una constante a. *Sol.* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

40. Hallar la envolvente de la familia de círculos que tienen sus centros en la parábola $y = x^2$ y pasan por su vértice. [Sugerencia: Sea (α, α^2) un punto de la parábola.] *Sol.* $x^2 = -y^3/(2y + 1)$

41. Hallar la envolvente de las normales (llamada *evoluta*) a la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y construir un grafo.
Sol. $8(y - 1)^3 = 27x^2$

42. Hallar la envolvente de las familias de superficies:

$$(a)\ \alpha(x-y)-\alpha^2 z = 1, \qquad (b)\ (x-\alpha)^2+y^2 = 2\alpha z$$

Sol. (a) $4z = (x-y)^2$, (b) $y^2 = z^2+2xz$

43. Demostrar que la envolvente de la familia de superficies de dos parámetros $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$, si existe, se obtiene eliminando α y β en las ecuaciones $F = 0$, $F_\alpha = 0$, $F_\beta = 0$.

44. Hallar la envolvente de las familias de dos parámetros (a) $z = \alpha x + \beta y - \alpha^2 - \beta^2$ y (b) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = a$, donde $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ y a es una constante.
Sol. (a) $4z = x^2 + y^2$, (b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

DERIVADAS DIRECCIONALES

45. (a) Hallar la derivada direccional de $U = 2xy - z^2$ en $(2, -1, 1)$ en una dirección hacia $(3, 1, -1)$. (b) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional? (c) ¿Cuál es el valor de ese máximo?
Sol. (a) $10/3$, (b) $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, (c) $2\sqrt{6}$

46. La temperatura en un punto (x, y) del plano xy está dada por $T = 100xy/(x^2 + y^2)$. (a) Hallar la derivada direccional en el punto $(2, 1)$ en una dirección que forma ángulo de 60° con el eje positivo de las x. (b) ¿En qué dirección a partir de $(2, 1)$ será máxima la derivada? (c) ¿Cuál es el valor de este máximo?
Sol. (a) $12\sqrt{3} - 6$; (b) en una dirección que forma un ángulo de $\pi - \operatorname{tg}^{-1} 2$ con el eje positivo de las x, o en la dirección $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; (c) $12\sqrt{5}$

47. Demostrar que si $F(\rho, \phi, z)$ es continuamente diferenciable, la derivada direccional máxima de F en un punto cualquiera está dada por $\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$.

DERIVACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL

48. Si $\phi(\alpha) = \int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha} \cos \alpha x^2\, dx$, hallar $\frac{d\phi}{d\alpha}$. *Sol.* $-\int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha} x^2 \operatorname{sen} \alpha x^2\, dx - \frac{1}{\alpha^2} \cos \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cos \alpha^2$

49. (a) Si $F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{\alpha} dx$, hallar $\frac{dF}{d\alpha}$ por la regla de Leibnitz. (b) Comprobar el resultado en (a) por integración directa *Sol.* (a) $2\alpha \operatorname{tg}^{-1} \alpha - \frac{1}{2} \ln (\alpha^2 + 1)$

50. Dado $\int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$, $p > -1$. Demostrar que $\int_0^1 x^p (\ln x)^m\, dx = \frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{m+1}}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

51. Demostrar que $\int_0^\pi \ln (1 + \alpha \cos x)\, dx = \pi \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$, $|\alpha| < 1$.

52. Demostrar que $\int_0^\pi \ln (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx = \begin{cases} \pi \ln \alpha^2, & |\alpha| < 1 \\ 0, & |\alpha| > 1 \end{cases}$. Discutir el caso $|\alpha| = 1$.

53. Mostrar que $\int_0^\pi \frac{dx}{(5 - 3 \cos x)^3} = \frac{59\pi}{2048}$.

INTEGRACION BAJO EL SIGNO INTEGRAL

54. Comprobar que $\int_0^1 \left\{\int_1^2 (\alpha^2 - x^2)\, dx\right\} d\alpha = \int_1^2 \left\{\int_0^1 (\alpha^2 - x^2)\, d\alpha\right\} dx$.

55. Partiendo del resultado $\int_0^{2\pi} (\alpha - \operatorname{sen} x)\, dx = 2\pi\alpha$, demostrar que para cualesquiera constantes a y b,

$$\int_0^{2\pi} \{(b - \operatorname{sen} x)^2 - (a - \operatorname{sen} x)^2\}\, dx = 2\pi(b^2 - a^2)$$

56. Mediante el resultado $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$, $\alpha > 1$ demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{5 + 3\operatorname{sen} x}{5 + 4\operatorname{sen} x}\right) dx = 2\pi \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

57. (*a*) Mediante el resultado $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \alpha\cos x} = \frac{\cos^{-1}\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$, $0 \leqq \alpha < 1$ mostrar que para $0 \leqq a < 1$, $0 \leqq b < 1$

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \ln\left(\frac{1 + b\cos x}{1 + a\cos x}\right) dx = \tfrac{1}{2}\{(\cos^{-1} a)^2 - (\cos^{-1} b)^2\}$$

(*b*) Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x \ln(1 + \tfrac{1}{2}\cos x)\, dx = \frac{5\pi^2}{72}$.

MAXIMOS Y MINIMOS. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

58. Hallar los máximos y mínimos de $F(x, y, z) = xy^2z^3$ sujetos a las condiciones $x + y + z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. *Sol.* valor máximo $= 108$ en $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

59. ¿Cuál es el volumen del máximo paralelepípedo rectángulo que se puede inscribir en el elipsoide $x^2/9 + y^2/16 + z^2/36 = 1$? *Sol.* $64\sqrt{3}$

60. (*a*) Hallar los valores máximo y mínimo de $x^2 + y^2$ con la condición $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$. (*b*) Dar una interpretación geométrica de los resultados anteriores. *Sol.* máximo $= 70$, mínimo $= 20$

61. Resolver el Problema 23 mediante multiplicadores de Lagrange.

62. Demostrar que en un triángulo ABC hay un punto P tal que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ es mínimo y que P es la intersección de las medianas.

63. (*a*) Demostrar que el máximo y el mínimo de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el cuadrado unidad $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ son 3 y 0 respectivamente. (*b*) ¿Puede obtenerse el resultado de (*a*) igualando a cero las derivadas parciales de $f(x, y)$ con respecto a x y y? Explicar.

64. (*a*) Hallar los extremos de z sobre la superficie $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$.
Sol. máximo $= 5$, mínimo $= -5$

65. Demostrar el método de los multiplicadores de Lagrange en el caso de que se quieran hallar los extremos de $F(x, y, z)$ condicionados por $G(x, y, z) = 0$, $H(x, y, z) = 0$.

66. Demostrar que la mínima distancia del origen a la curva de intersección de las superficies $xyz = a$ y $y = bx$, con $a > 0$, $b > 0$, es $3\sqrt{a(b^2 + 1)/2b}$.

67. Hallar el volumen del elipsoide $11x^2 + 9y^2 + 15z^2 - 4xy + 10yz - 20xz = 80$. *Sol.* $64\pi\sqrt{2}/3$

APLICACIONES Y ERRORES

68. El diámetro de un cilindro circular recto es $6{,}0 \pm 0{,}03$ cm y su altura es de $4{,}0 \pm 0{,}02$ cm según las medidas tomadas. ¿Cuál es el máximo (*a*) error absoluto y (*b*) error relativo al calcular el volumen?
Sol. (*a*) 1,70 cm^3, (*b*) 1,5 %

69. Los lados de un triángulo según medidas son 12,0 y 15,0 pies y el ángulo que forman es de 60°. Si las longitudes se pueden medir con una precisión del 1 % y el ángulo con una precisión del 2 %, hallar los errores máximos absoluto y relativo al calcular (*a*) el área y (*b*) el lado opuesto del triángulo.
Sol. (*a*) 2,501 pies^2, 3,21 %; (*b*) 0,287 pies, 2,08 %

PROBLEMAS VARIOS

70. Si ρ y ϕ son coordenadas cilíndricas, a y b constantes positivas y n un número natural, demostrar que las superficies $\rho^n \operatorname{sen} n\phi = a$ y $\rho^n \cos n\phi = b$ son ortogonales (perpendiculares entre sí) a lo largo de sus curvas de intersección.

71. Hallar las ecuaciones de (*a*) el plano tangente y (*b*) la recta normal a la superficie $8r\theta\phi = \pi^2$ en el punto en que $r = 1$, $\theta = \pi/4$, $\phi = \pi/2$, (r, θ, ϕ) en coordenadas esféricas.

Sol. (*a*) $4x - (\pi^2 + 4\pi)y + (4\pi - \pi^2)z = -\pi^2\sqrt{2}$, (*b*) $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y - \sqrt{2}/2}{\pi^2 + 4\pi} = \dfrac{z - \sqrt{2}/2}{\pi^2 - 4\pi}$

72. (*a*) Demostrar que la mínima distancia del punto (a, b, c) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$\left|\frac{Aa + Bb + Cc + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

(*b*) Hallar la mínima distancia de $(1, 2, -3)$ al plano $2x - 3y + 6z = 20$. *Sol.* (*b*) 6

73. El potencial V debido a una carga distribuida es en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ),

$$V = \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

siendo p una constante. Demostrar que la máxima derivada direccional es en todo punto

$$\frac{p\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta}}{r^3}$$

74. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x}\,dx = \ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$ si $m > 0$, $n > 0$. ¿Puede generalizarse este resultado al caso $m > -1$, $n > -1$?

75. (*a*) Si $b^2 - 4ac < 0$ y $a > 0$, $c > 0$, demostrar que el área de la elipse $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ es $2\pi/\sqrt{4ac - b^2}$. [Sugerencia: Hallar los máximos de $x^2 + y^2$ condicionados por $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$.]

76. Demostrar que las distancias máxima y mínima del origen a la curva de intersección definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ y $Ax + By + Cz = 0$ se pueden obtener despejando d de la ecuación

$$\frac{A^2a^2}{a^2 - d^2} + \frac{B^2b^2}{b^2 - d^2} + \frac{C^2c^2}{c^2 - d^2} = 0$$

77. Demostrar que la última ecuación del problema precedente tiene siempre dos soluciones reales d_1^2 y d_2^2 para cualesquiera constantes reales no nulas a, b, c y cualesquiera constantes reales A, B, C (no todas nulas). Discutir el significado geométrico.

78. (*a*) Demostrar que $\displaystyle I_M = \int_0^M \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{M}{\alpha} + \frac{M}{2\alpha^2(\alpha^2 + M^2)}$

(*b*) Averiguar $\lim\limits_{M\to\infty} I_M$. Esto se puede denotar por $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}$.

(*c*) Es $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\frac{d}{d\alpha}\int_0^M \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{d}{d\alpha}\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}$?

79. Hallar el punto del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está más próximo al punto $(3, -6, 4)$.
Sol. $(1, -2, 5)$

80. Estudiar los máximos y mínimos de $f(x, y) = (x^2 - 2x + 4y^2 - 8y)^2$.
Sol. mínimo = 25

81. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\alpha\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2 + 1)} - \frac{\ln\alpha}{\alpha^2 + 1}$.

(*b*) Con (*a*) demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{(2\cos x + \operatorname{sen} x)^2} = \frac{3\pi + 5 - 8\ln 2}{50}$.

82. (*a*) Hallar condiciones suficientes para máximos o mínimos relativos de $w = f(x, y, z)$.
(*b*) Estudiar $w = x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 8xz - 10yz$ para máximo y mínimo.
[Sugerencia: Para (*a*) aplicar el hecho de que la *forma cuadrática* $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\alpha\beta + 2E\alpha\gamma + 2F\beta\gamma > 0$ (o sea, que es *definida positiva*) si

$$A > 0, \qquad \begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix} > 0\ ]$$

Capítulo 9

Integrales múltiples

INTEGRALES DOBLES

Sea $F(x, y)$ definida en una región cerrada $\mathcal{R}$ del plano xy (Fig. 9-1). Subdivídase $\mathcal{R}$ en n subregiones $\Delta\mathcal{R}_k$ de área ΔA_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea (ξ_k, η_k) un punto cualquiera de $\Delta\mathcal{R}_k$. Formando la suma

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k)\,\Delta A_k \qquad (1)$$

Considérese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k)\,\Delta A_k \qquad (2)$$

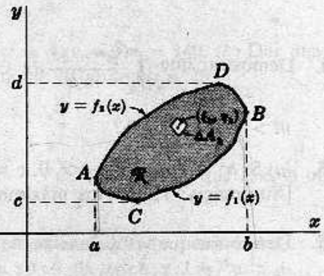


Fig. 9-1

tomando el límite de modo que el número n de subdivisiones aumente indefinidamente y que la máxima dimensión lineal de cada $\Delta\mathcal{R}_k$ tienda a cero. Si este límite existe se le denota por

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x, y)\,dA \qquad (3)$$

y se llama *integral doble de* $F(x, y)$ sobre la región $\mathcal{R}$.

Puede demostrarse que el límite existe si $F(x, y)$ es continua (o casicontinua) en $\mathcal{R}$.

INTEGRALES REITERADAS

Si $\mathcal{R}$ es tal que toda paralela al eje y encuentra el contorno de $\mathcal{R}$ en dos puntos a lo más (lo que se verifica en la Fig. 9-1), se pueden escribir entonces las ecuaciones de las curvas ACB y ADB, que limitan $\mathcal{R}$ como $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$, respectivamente, siendo $f_1(x)$ y $f_2(x)$ uniformes y continuas en $a \leqq x \leqq b$. En este caso se puede calcular la doble integral (3) tomando como regiones $\Delta\mathcal{R}_k$ los rectángulos que se forman trazando una red de paralelas a los ejes x y y, siendo ΔA_k las áreas correspondientes. Entonces (3) se puede escribir

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x, y)\,dx\,dy \;=\; \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\,dy\,dx \qquad (4)$$

$$= \int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\,dy \right\} dx$$

donde la integral entre llaves se ha de calcular primero (manteniendo x constante) para integrar finalmente con respecto a x entre a y b. La fórmula (4) indica cómo se puede calcular una integral doble expresándola por dos integrales simples *reiteradas*.

Si $\mathcal{R}$ es tal que toda paralela al eje x encuentra su contorno en dos puntos a lo más (como en la Fig. 9-1), entonces se pueden escribir las ecuaciones de las curvas CAD y CBD como $x = g_1(y)$ y $x = g_2(y)$, respectivamente, y se encuentra de manera parecida

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\,dy \qquad (5)$$

$$= \int_{y=c}^{d}\left\{\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\right\}dy$$

Si existe la integral doble, *(4)* y *(5)* dan el mismo valor. (Véase, no obstante, el Problema 17.) Al escribir una integral doble, puede utilizarse cualquiera de las formas *(4)* o *(5)*, según cuál sea la más apropiada. La una *intercambia el orden de integración* de la otra.

En caso de que $\mathcal{R}$ no es del tipo que se ve en la figura anterior, se la puede subdividir en general en regiones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, . . . que sean de ese tipo. Entonces la integral doble sobre $\mathcal{R}$ se encuentra tomando la suma de las integrales dobles sobre $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, ...

INTEGRALES TRIPLES

Los resultados anteriores se generalizan fácilmente a regiones cerradas en tres dimensiones. Por ejemplo, considérese una función $F(x, y, z)$ definida en una región cerrada tridimensional $\mathcal{R}$. Subdividiendo la región en n subregiones de volumen ΔV_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sea (ξ_k, η_k, ζ_k) un punto cualquiera en cada subregión. Si se forma entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta V_k \qquad (6)$$

donde el número n de subdivisiones tiende a infinito, de modo que la máxima dimensión lineal de cada subregión tienda a cero, este límite, si existe, se denota por

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dV \qquad (7)$$

y se llama *integral triple* de $F(x, y, z)$ sobre $\mathcal{R}$. El límite existe si $F(x, y, z)$ en continua (o casicontinua) en $\mathcal{R}$.

Si se construye una red con planos paralelos a los planos xy, yz, xz, la región $\mathcal{R}$ queda subdividida en subregiones que son ahora paralelepípedos rectángulos. En tal caso se puede expresar la integral triple sobre $\mathcal{R}$ dada por *(7)* como *integral reiterada* de la forma

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\left\{\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right\}dy\right]dx \qquad (8)$$

(debiéndose calcular primero la integral interior) o como suma de integrales semejantes. La integración puede hacerse también en cualquier otro orden para obtener un resultado equivalente.

Son posibles también generalizaciones a un mayor número de dimensiones.

TRANSFORMACIONES DE INTEGRALES MULTIPLES

Al calcular una integral múltiple sobre una región $\mathcal{R}$, es con frecuencia más cómodo emplear coordenadas distintas a las cartesianas rectangulares, como, por ejemplo, las coordenadas curvilíneas consideradas en los Capítulos 6 y 7.

Si (u, v) son coordenadas curvilíneas de puntos de un plano habrá unas ecuaciones de transformación $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ que transforman los puntos (x, y) del plano xy en los puntos (u, v) del plano uv. Entonces la región $\mathcal{R}$ del plano xy se transforma en la región $\mathcal{R}'$ del plano uv. Se tiene así:

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}'} G(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \tag{9}$$

donde $G(u,v) \equiv F\{f(u,v),\, g(u,v)\}$ y

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{10}$$

es el *jacobiano* de x y y con respecto a u y v (Capítulo 6).

Análogamente, si u, v, w son coordenadas curvilíneas en tres dimensiones habrá unas ecuaciones de transformación $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ y se puede escribir

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_{\mathcal{R}'} G(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \tag{11}$$

donde $G(u,v,w) \equiv F\{f(u,v,w),\, g(u,v,w),\, h(u,v,w)\}$ y

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{12}$$

es el jacobiano de x, y y z con respecto a u, v y w.

Las fórmulas (*9*) y (*11*) corresponden al cambio de variables en integrales dobles y triples. Se generaliza fácilmente a mayor número de dimensiones.

Problemas resueltos

INTEGRALES DOBLES

1. (*a*) Dibujar la región $\mathcal{R}$ del plano xy limitada por $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.

(*b*) Dar una interpretación física a $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$.

(*c*) Calcular la integral doble en (*b*).

(*a*) La región $\mathcal{R}$ es la sombreada en la Figura 9-2.

(*b*) Como $x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia de un punto (x, y) al $(0, 0)$, se puede considerar la integral doble como el *momento de inercia* respecto al origen de la región $\mathcal{R}$ (suponiendo que la densidad sea uno).

Se puede considerar también la integral doble como la *masa* de la región $\mathcal{R}$ suponiendo que la densidad varíe con $x^2 + y^2$.

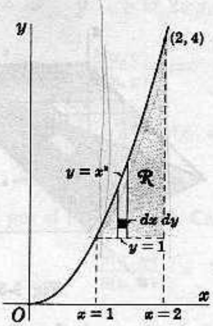


Fig. 9-2

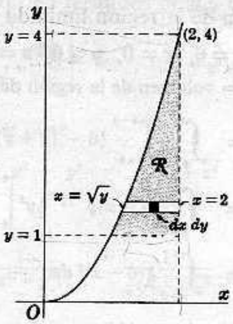


Fig. 9-3

(c) **Método 1:** La integral doble se puede expresar por la integral reiterada

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{x^2}(x^2+y^2)\,dy\,dx \;=\; \int_{x=1}^{2}\left\{\int_{y=1}^{x^2}(x^2+y^2)\,dy\right\}dx \;=\; \int_{x=1}^{2} x^2y+\frac{y^3}{3}\bigg|_{y=1}^{x^2}dx$$

$$= \int_{x=1}^{2}\left(x^4+\frac{x^6}{3}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx \;=\; \frac{1006}{105}$$

La integración con respecto a y (manteniendo x constante) de $y = 1$ a $y = x^2$ corresponde a una suma en columna vertical (véase Fig. 9-2). La integración que sigue con respecto a x de $x = 1$ a $x = 2$, corresponde a la adición de todas esas columnas verticales entre $x = 1$ y $x = 2$.

Método 2: La integral doble se puede también expresar por la integral reiterada

$$\int_{y=1}^{4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy \;=\; \int_{y=1}^{4}\left\{\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)\,dx\right\}dy \;=\; \int_{y=1}^{4}\frac{x^3}{3}+xy^2\bigg|_{x=\sqrt{y}}^{2}dy$$

$$= \int_{y=1}^{4}\left(\frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}\right)dy \;=\; \frac{1006}{105}$$

En este caso la columna vertical de la región $\mathcal{R}$ en la Fig. 9-2 se cambia por una faja horizontal como en la Fig. 9-3. Entonces la integración con respecto a x (manteniendo y constante) de $x = \sqrt{y}$ a $x = 2$ corresponde a la suma en estas fajas horizontales. La integración que viene en seguida con respecto a y desde $y = 1$ hasta $y = 4$ corresponde a la adición de tales fajas horizontales entre $y = 1$ y $y = 4$.

2. Hallar el volumen de la región común a los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

Volumen buscado
= 8 veces el volumen de la región en la Figura 9-

$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} z\,dy\,dx$$

$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx$$

$$= 8\int_{x=0}^{a}(a^2-x^2)\,dx \;=\; \frac{16a^3}{3}$$

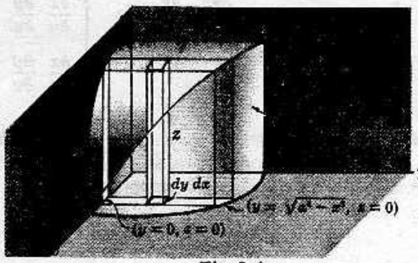


Fig. 9-4

Ayuda para establecer esta integral observar que $z\,dy\,dx$ corresponde al volumen de una columna como la que se ve destacada en la figura. Manteniendo x constante e integrando con respecto a y desde $y = 0$ a $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ equivale a sumar los volúmenes de todas esas columnas para reunirlos en una rebanada paralela al plano yz, con lo que se tiene así el volumen de esa rebanada. Por último, integrando con respecto a x de $x = 0$ a $x = a$ se hace la adición de los volúmenes de todas las rebanadas semejantes de la región, con lo que se tiene así el volumen buscado.

3. Hallar el volumen de la región limitada por

$$z = x + y, \ z = 6, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0$$

Volumen buscado = volumen de la región de la Figura 9-5

$$= \int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{6-x} \{6 - (x+y)\}\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} (6-x)y - \tfrac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{6-x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} \tfrac{1}{2}(6-x)^2\, dx \ = \ 36$$

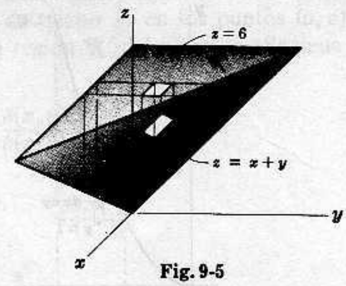


Fig. 9-5

En este caso, el volumen de una columna típica como la que se destaca en la figura corresponde a $\{6 - (x + y)\}\, dy\, dx$. Los límites de integración se obtienen entonces integrando sobre la región $\mathcal{R}$ de la figura. Con x constante e integrando con respecto a y de $y = 0$ a $y = 6 - x$ (que se obtienen de $z = 6$ y $z = x + y$) se suman todas las columnas de una rebanada paralela al plano yz. Por último, integrando con respecto a x de $x = 0$ a $x = 6$ se hace la adición de los volúmenes de las rebanadas y así resulta el volumen buscado.

TRANSFORMACION DE INTEGRALES DOBLES

4. Justificar la ecuación (*9*), página 182, para el cambio de variables en una integral doble.

En coordenadas cartesianas, la integral doble de $F(x, y)$ sobre la región $\mathcal{R}$ (sombreada en la Fig. 9-6) es $\iint_{\mathcal{R}} F(x, y)\, dx\, dy$. Se puede calcular también esta integral doble considerando una red formada por una familia de curvas coordenadas curvilíneas u y v construidas sobre la región $\mathcal{R}$ como se ve en la figura.

Sea P un punto de coordenadas (x, y) o (u, v), siendo $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$. Entonces el vector $\mathbf{r}$ de O a P es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j}$. Los vectores tangentes a las curvas coordenadas $u = c_1$ y $v = c_2$, con c_1 y c_2 constantes, son $\partial\mathbf{r}/\partial v$ y $\partial\mathbf{r}/\partial u$ respectivamente. Luego el área de la región $\Delta\mathcal{R}$ en la Fig. 9-6 viene dada aproximadamente por $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \Delta u\, \Delta v$.

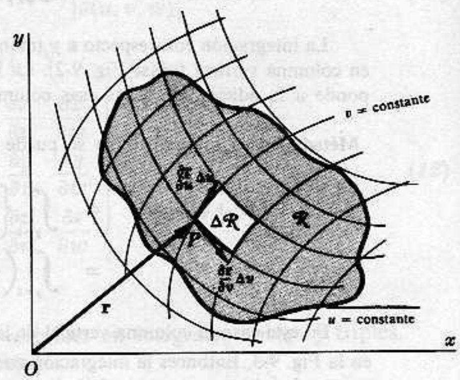


Fig. 9-6

Pero

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k}$$

así que

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \Delta u\, \Delta v = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\, \Delta v$$

La integral doble es el límite de la suma

$$\Sigma\, F\{f(u, v),\, g(u, v)\} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\, \Delta v$$

tomada sobre toda la región $\mathcal{R}$. Este límite resulta ser

$$\iint_{\mathcal{R}'} F\{f(u, v),\, g(u, v)\} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$

siendo $\mathcal{R}'$ la región del plano uv en la cual se transforma la región $\mathcal{R}$ por la transformación $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$.

Otro método para justificar el cambio de variables anterior es el que utiliza las integrales curvilíneas y el teorema de Green en el plano (véase Capítulo 10, Problema 32).

5. Si $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$, hallar $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ en términos de u y v.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2)$$

De la identidad $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2$ se tiene

$$(x^2+y^2)^2 = u^2 + v^2 \qquad \text{y} \qquad x^2+y^2 = \sqrt{u^2+v^2}$$

Entonces, por el Problema 45, Capitulo 6,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}$$

Otro método: Despéjense x y y en función de u y v en las ecuaciones dadas y averigüese directamente el jacobiano.

6. Hallar el momento polar de inercia de la región del plano xy limitada por $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = 4$ suponiendo la densidad unitaria.

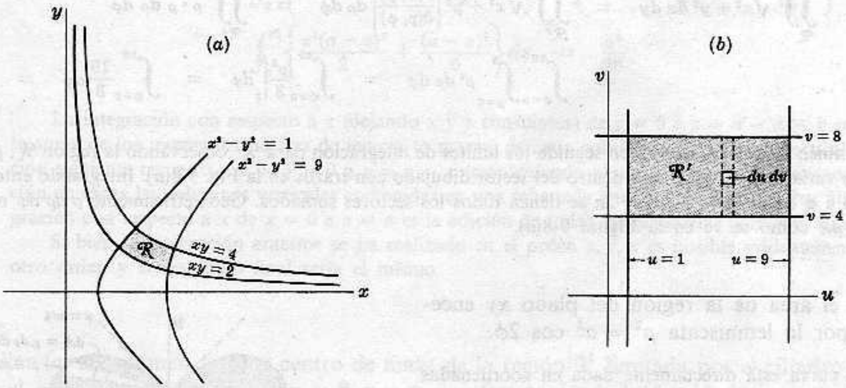


Fig. 9-7

Por la transformación $x^2 - y^2 = u$, $2xy = v$, la región $\mathcal{R}$ del plano xy [sombreada en la Fig. 9-7(*a*)] se transforma en la región $\mathcal{R}'$ del plano uv [sombreada en la Fig. 9-7(*b*)]. Luego,

$$\text{Momento polar de inercia} = \iint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}'} (x^2+y^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{\mathcal{R}'} \sqrt{u^2+v^2}\,\frac{du\,dv}{4\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}\int_{v=4}^{8} du\,dv = 8$$

utilizando los resultados del Problema 5.

Nótese que los límites de integración para la región $\mathcal{R}'$ se pueden construir directamente a partir de la región $\mathcal{R}$ del plano xy sin construir efectivamente la región $\mathcal{R}'$. En ese caso se emplea una red como en el Problema 4. Las coordenadas (u, v) son coordenadas curvilíneas, que en este caso son las llamadas *coordenadas hiperbólicas*.

7. Calcular $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, siendo $\mathcal{R}$ la región del plano xy limitada por $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

La presencia de $x^2 + y^2$ sugiere el empleo de coordenadas polares (ρ, ϕ), con $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi$ (Problema 38, Capítulo 6). Por esta transformación la región $\mathcal{R}$ [Fig. 9-8(*a*)] se transforma en la región $\mathcal{R}'$ [Fig. 9-8(*b*)].

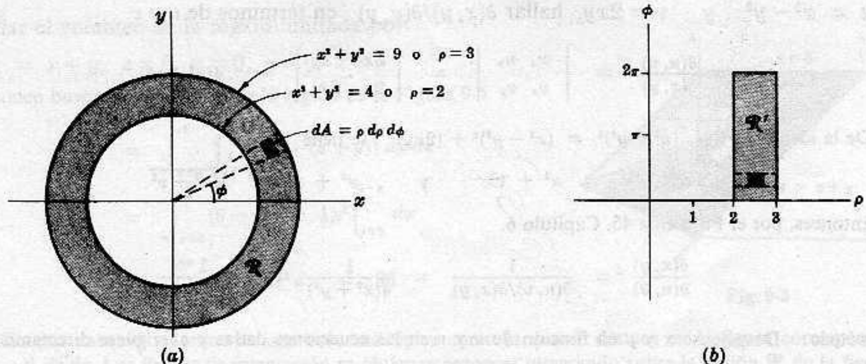


Fig. 9-8

Puesto que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)} = \rho$, se sigue que

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}'} \sqrt{x^2+y^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)}\right| d\rho\,d\phi \;=\; \iint_{\mathcal{R}'} \rho\cdot\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=2}^{3} \rho^2\,d\rho\,d\phi \;=\; \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\bigg|_2^3 d\phi \;=\; \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{19}{3}\,d\phi \;=\; \frac{38\pi}{3}$$

También se pueden escribir en seguida los límites de integración para $\mathcal{R}'$ observando la región $\mathcal{R}$, pues para ϕ fijo, ρ varía de $\rho = 2$ a $\rho = 3$ dentro del sector dibujado con trazos en la Fig. 9-8(*a*). Integrando entonces con respecto a ϕ desde $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$ se tienen todos los sectores sumados. Geométricamente $\rho\,d\rho\,d\phi$ representa el área dA como se ve en la Figura 9-8(*a*).

8. Hallar el área de la región del plano xy encerrada por la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$.

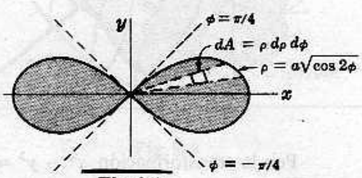


Fig. 9-9

La curva está directamente dada en coordenadas polares (ρ, ϕ). Dando diferentes valores a ϕ y hallando los correspondientes valores de ρ se obtiene el grafo de la Fig. 9-9. El área buscada (haciendo uso de la simetría) es

$$4\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{a\sqrt{\cos 2\phi}} \rho\,d\rho\,d\phi \;=\; 4\int_{\phi=0}^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_{\rho=0}^{a\sqrt{\cos 2\phi}} d\phi$$

$$= 2\int_{\phi=0}^{\pi/4} a^2\cos 2\phi\,d\phi \;=\; a^2 \operatorname{sen} 2\phi\bigg|_{\phi=0}^{\pi/4} \;=\; a^2$$

INTEGRALES TRIPLES

9. (*a*) Dibujar la región tridimensional $\mathcal{R}$ limitada por $x + y + z = a$ $(a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

(*b*) Dar una interpretación física de

$$\iiint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

(*c*) Calcular la integral triple en (*b*).

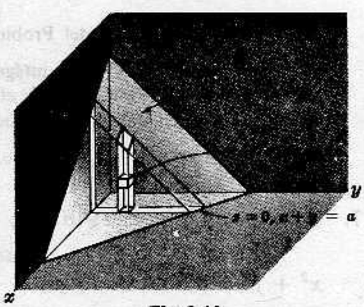


Fig. 9-10

(*a*) La región $\mathcal{R}$ es la de la Fig. 9-10.

(*b*) Como $x^2 + y^2 + z^2$ es el cuadrado de la distancia de un punto cualquiera (x, y, z) al $(0, 0, 0)$, se puede considerar la integral triple como el *momento de inercia* con respecto al origen de la región $\mathcal{R}$ (suponiendo la densidad unitaria).

También puede considerarse la integral triple como la *masa* de la región si la densidad varía como $x^2 + y^2 + z^2$.

(*c*) La integral triple se puede expresar por la integral reiterada

$$\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y} (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x} x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3}\bigg|_{z=0}^{a-x-y} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\left\{x^2(a-x) - x^2y + (a-x)y^2 - y^3 + \frac{(a-x-y)^3}{3}\right\}dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{a} x^2(a-x)y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{(a-x)y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{(a-x-y)^4}{12}\bigg|_{y=0}^{a-x} dx$$

$$= \int_0^a\left\{x^2(a-x)^2 - \frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{3} - \frac{(a-x)^4}{4} + \frac{(a-x)^4}{12}\right\}dx$$

$$= \int_0^a\left\{\frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{6}\right\}dx \quad = \quad \frac{a^5}{20}$$

La integración con respecto a z (dejando x y y constantes) de $z = 0$ a $z = a - x - y$ corresponde a la suma de los momentos polares de inercia (o masas) de cada cubo de una columna vertical. La integración siguiente respecto a y de $y = 0$ a $y = a - x$ (manteniendo ahora x constante) corresponde a la adición de todas las columnas verticales contenidas en una rebanada paralela al plano yz. Por último, la integración con respecto a x de $x = 0$ a $x = a$ es la adición de todas las rebanadas paralelas al plano yz.

Si bien la integración anterior se ha realizado en el orden z, y, x es posible evidentemente cualquier otro orden y el resultado final sería el mismo.

10. Hallar (*a*) el volumen y (*b*) el centro de masa de la región $\mathcal{R}$ limitada por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 0$ suponiendo la densidad constante e igual a σ.

La región $\mathcal{R}$ se ve en la Fig. 9-11.

(*a*) Volumen buscado $= \iiint\limits_{\mathcal{R}} dx\,dy\,dz$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} (4-x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (4-x^2)y\bigg|_{y=0}^{6} dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (24-6x^2)\,dx \quad = \quad 32$$

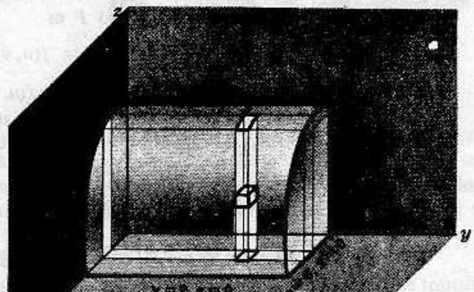


Fig. 9-11

(*b*) Masa total $= \displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{1-x^2} \sigma\,dz\,dy\,dx \;=\; 32\sigma$ por la parte (*a*), puesto que σ es constante. Luego

$$\bar{x} = \frac{\text{Momento total respecto al plano } yz}{\text{Masa total}} = \frac{\displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma x\,dz\,dy\,dx}{\text{Masa total}} = \frac{24\sigma}{32\sigma} = \frac{3}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{\text{Momento total respecto al plano } xz}{\text{Masa total}} = \frac{\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma y\, dz\, dy\, dx}{\text{Masa total}} = \frac{96\sigma}{32\sigma} = 3$$

$$\bar{z} = \frac{\text{Momento total respecto al plano } xy}{\text{Masa total}} = \frac{\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma z\, dz\, dy\, dx}{\text{Masa total}} = \frac{256\sigma/5}{32\sigma} = \frac{8}{5}$$

Las coordenadas del centro de masa son, pues, $(3/4, 3, 8/5)$.

Obsérvese que el valor de $\bar{y}$ podría haberse previsto por la simetría.

TRANSFORMACION DE INTEGRALES TRIPLES

11. Justificar la ecuación (*11*), página 182, para el cambio de variables en una integral triple.

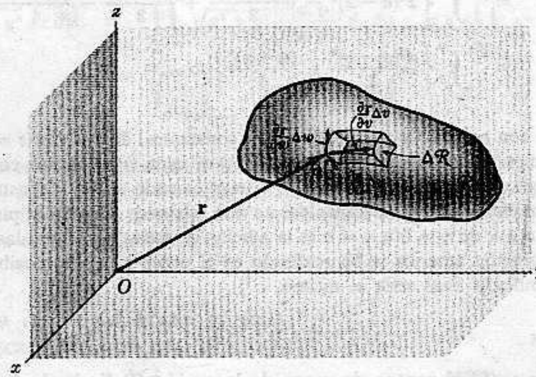


Fig. 9-12

Por analogía con el Problema 4, se construye una red de superficies coordenadas curvilíneas que subdivide la región $\mathcal{R}$ en subregiones, de las cuales una típica es la $\Delta\mathcal{R}$ en la Figura 9-12.

El vector $\mathbf{r}$ del origen O al punto P es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = f(u,v,w)\mathbf{i} + g(u,v,w)\mathbf{j} + h(u,v,w)\mathbf{k}$$

si las ecuaciones de transformación son $x = f(u,v,w)$, $y = g(u,v,w)$ y $z = h(u,v,w)$.

Vectores tangentes a las curvas coordenadas intersección de cada dos superficies coordenadas se obtienen con $\partial\mathbf{r}/\partial u$, $\partial\mathbf{r}/\partial v$, $\partial\mathbf{r}/\partial w$. Luego el volumen de la región $\Delta\mathcal{R}$ de la Fig. 9-12 viene dado aproximadamente por

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w$$

La integral triple de $F(x,y,z)$ sobre la región es el límite de la suma

$$\Sigma\, F\{f(u,v,w),\ g(u,v,w),\ h(u,v,w)\} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w$$

Este límite resulta ser

$$\iiint_{\mathcal{R}'} F\{f(u,v,w),\ g(u,v,w),\ h(u,v,w)\} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$$

donde $\mathcal{R}'$ es la región del espacio uvw en que se transforma la región $\mathcal{R}$ mediante la transformación dada.

Otro método para justificar el cambio de variables anterior en las integrales triples, apela al teorema de Stokes (véase Problema 84, Capítulo 10).

12. Expresar $\iiint\limits_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ en coordenadas (*a*) cilíndricas y (*b*) esféricas.

(*a*) Las ecuaciones de transformación en cilíndricas son $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi$, $z = z$.
Como en el Problema 39, Capítulo 6, $\partial(x,y,z)/\partial(\rho,\phi,z) = \rho$. Entonces, por el Problema 11, la integral triple se convierte en la

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}'} G(\rho,\phi,z)\,\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

donde $\mathcal{R}'$ es la región del espacio ρ, ϕ, z correspondiente a la $\mathcal{R}$ y donde $G(\rho,\phi,z) \equiv F(\rho\cos\phi, \rho\,\text{sen}\,\phi, z)$.

(*b*) Las ecuaciones de transformación en coordenadas esféricas son $x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$, $y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$, $z = r\cos\theta$.
Por el Problema 103, Capítulo 6, $\partial(x,y,z)/\partial(r,\theta,\phi) = r^2\,\text{sen}\,\theta$. Luego, por el Problema 11, la integral triple se vuelve

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}'} H(r,\theta,\phi)\,r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

donde $\mathcal{R}'$ es la región del espacio r, θ, ϕ correspondiente a la $\mathcal{R}$ y donde $H(r,\theta,\phi) \equiv F(r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi, r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, r\cos\theta)$.

13. Hallar el volumen de la región encima del plano xy limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

El volumen se halla de la manera más sencilla en coordenadas cilíndricas, en las que las ecuaciones del paraboloide y del cilindro son, respectivamente, $z = \rho^2$ y $\rho = a$. De modo que

Volumen pedido

$= 4$ veces volumen indicado en la Fig. 9-13.

$$= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\int_{z=0}^{\rho^2} \rho\,dz\,d\rho\,d\phi$$

$$= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a} \rho^3\,d\rho\,d\phi$$

$$= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4}\bigg|_{\rho=0}^{a} d\phi = \frac{\pi}{2}a^4$$

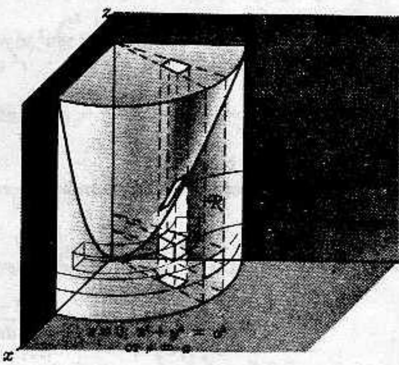


Fig. 9-13

La integración con respecto a z (manteniendo ρ y ϕ constantes) de $z = 0$ a $z = \rho^2$ corresponde a la sumación de los prismas dV en una columna vertical que va del plano xy hasta el paraboloide. La integración que viene en seguida con respecto ρ (manteniendo ϕ constante) de $\rho = 0$ a $\rho = a$ corresponde a la adición de los volúmenes de todas las columnas de la cuña señalada en la figura. Por último, la integración con respecto a ϕ corresponde a la adición de los volúmenes de todas esas cuñas.

La integración también se puede realizar en otro orden para llegar al mismo resultado.

También se puede establecer la integral determinando la región $\mathcal{R}'$ en el espacio ρ, ϕ, z en que se transforma $\mathcal{R}$ por la transformación a coordenadas cilíndricas.

14. (*a*) Hallar el momento de inercia con respecto al eje z de la región del Problema 13, suponiendo que la densidad es la constante σ. (*b*) Hallar el radio de giro.

(*a*) El momento de inercia respecto del eje z es

$$I_z = 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\int_{z=0}^{\rho^2} \rho^2\cdot\sigma\rho\,dz\,d\rho\,d\phi$$

$$= 4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a} \rho^5\,d\rho\,d\phi = 4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{\rho^6}{6}\bigg|_{\rho=0}^{a} d\phi = \frac{\pi a^6\sigma}{3}$$

Este resultado se puede expresar por la masa M de la región, pues por el Problema 13,

$$M = \text{volumen} \times \text{densidad} = \frac{\pi}{2}a^4\sigma \quad \text{así que} \quad I_z = \frac{\pi a^6 \sigma}{3} = \frac{\pi a^6}{3}\cdot\frac{2M}{\pi a^4} = \frac{2}{3}Ma^2$$

Obsérvese que al plantear la integral para I_z se puede considerar $\sigma\rho\, dz\, d\rho\, d\phi$ como la masa del elemento de volumen, $\rho^2 \cdot \sigma\rho\, dz\, d\rho\, d\phi$ como el momento de inercia de esta masa con respecto al eje z y $\iiint_{\mathcal{R}} \rho^2 \cdot \sigma\rho\, dz\, d\rho\, d\phi$ como el momento de inercia total con respecto al eje z. Los límites de integración se determinan como en el Problema 13.

(*b*) El radio de giro es el valor K tal que $MK^2 = \frac{2}{3}Ma^2$, es decir, $K^2 = \frac{2}{3}a^3$ o $K = a\sqrt{2/3}$.

El significado físico de K es el siguiente: si toda la masa M estuviera concentrada en una delgada capa cilíndrica de radio K, el momento de inercia de esta capa con respecto al eje del cilindro sería I_z.

15. (*a*) Hallar el volumen de la región encerrada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = (x^2 + y^2)\cos^2 \alpha$, siendo α una constante tal que $0 \leqq \alpha \leqq \pi$. (*b*) A partir del resultado de (*a*) hallar el volumen de una esfera de radio a.

En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es $r = a$ y la del cono es $\theta = \alpha$, lo cual se puede ver directamente o bien aplicando las ecuaciones de transformación $x = r \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, $z = r\cos\theta$. Por ejemplo, $z^2 \operatorname{sen}^2\alpha = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha$ se convierte, con estas ecuaciones, en

$$r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\alpha = (r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi)\cos^2\alpha$$

es decir,

$$r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\alpha = r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\alpha$$

de donde $\operatorname{tg}\theta = \pm\operatorname{tg}\alpha$ y así $\theta = \alpha$ o $\theta = \pi - \alpha$. Basta con considerar una de éstas, como $\theta = \alpha$, por ejemplo.

(*a*) Volumen buscado
= 4 veces el volumen indicado en la Fig. 9-14.

$$= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{a} r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\bigg|_{r=0}^{a} d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_{\phi=0}^{\pi/2} -\cos\theta\bigg|_{\theta=0}^{\alpha} d\phi$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\alpha)$$

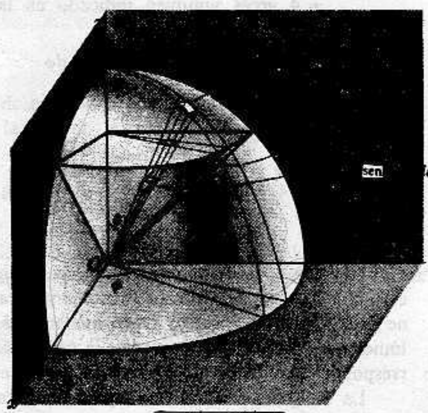


Fig. 9-14

La integración con respecto a r (con θ y ϕ constantes) de $r = 0$ a $r = a$ corresponde a la sumación de los volúmenes (de los elementos dV indicados) en una columna que va de $r = 0$ a $r = a$. La integración que sigue con respecto a θ (con ϕ constante) de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/4$ corresponde a la sumación de los volúmenes de todas las columnas en la región de forma de cuña. Por último, la integración con respecto a ϕ corresponde a la adición de los volúmenes de todas las cuñas.

(*b*) Haciendo $\alpha = \pi$, el volumen de la esfera obtenido así es

$$\frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\pi) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

16. (*a*) Hallar el centro de masa de la región del Problema 15.
(*b*) Con el resultado de (*a*) hallar el centro de masa de una semiesfera.

(*a*) El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, debido a la simetría, está dado por $\bar{x} = \bar{y} = 0$ y

$$\bar{z} = \frac{\text{Momento total respecto al plano } xy}{\text{Masa total}} = \frac{\iiint z\,\sigma\,dV}{\iiint \sigma\,dV}$$

Como $z = r\cos\theta$ y σ es constante, el numerador es

$$4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{a} r\cos\theta\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \;=\; 4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{a}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \sigma a^4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \sigma a^4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\bigg|_{\theta=0}^{\alpha}d\phi \;=\; \frac{\pi\sigma a^4\operatorname{sen}^2\alpha}{4}$$

El denominador, que se obtiene multiplicando por σ el resultado del Problema 15(*a*), es $\frac{2}{3}\pi\sigma a^3(1-\cos\alpha)$. Luego

$$\bar{z} \;=\; \frac{\frac{1}{4}\pi\sigma a^4\operatorname{sen}^2\alpha}{\frac{2}{3}\pi\sigma a^3(1-\cos\alpha)} \;=\; \frac{3}{8}a(1+\cos\alpha).$$

(*b*) Con $\alpha = \pi/2$, $\bar{z} = \frac{3}{8}a$.

PROBLEMAS VARIOS

17. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right\}dx = \frac{1}{2}$, (*b*) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right\}dy = -\frac{1}{2}$.

(*a*)
$$\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right\}dx \;=\; \int_0^1\left\{\int_0^1\frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3}\,dy\right\}dx$$

$$= \int_0^1\left\{\int_0^1\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy\right\}dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{-x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right)\bigg|_{y=0}^{1}dx$$

$$= \int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2} \;=\; \frac{-1}{x+1}\bigg|_0^1 \;=\; \frac{1}{2}$$

(*b*) Se deduce inmediatamente permutando x y y en (*a*) con lo que se obtiene $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx\right\}dy = \frac{1}{2}$ y luego multiplicando ambos miembros por -1.

Este ejemplo muestra que el cambio de orden de integración puede no dar siempre resultados iguales. Una condición suficiente para que se pueda cambiar el orden es que la integral doble sobre la región correspondiente exista. En tal caso $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$, donde $\mathcal{R}$ es la región $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ no existe debido a la discontinuidad del integrando en el origen. La integral es en realidad una integral doble impropia (véase Capítulo 12).

18. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\}dt \;=\; \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du.$

Sea $\displaystyle I(x) = \int_0^x\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\}dt,\quad J(x) = \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du.$ Entonces,

$$I'(x) = \int_0^x F(u)\,du,\qquad J'(x) = \int_0^x F(u)\,du$$

Por la regla de Leibnitz, página 163. Así, pues, $I'(x) = J'(x)$ y entonces $I(x) - J(x) = c$, una constante. Como $I(0) = J(0) = 0$, $c = 0$ y, por tanto, $I(x) = J(x)$.

El resultado se suele escribir en la forma

$$\int_0^x \int_0^x F(x)\,dx^2 \quad = \quad \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du$$

Se puede generalizar (Problema 54) para obtener

$$\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x)\,dx^n \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-u)^{n-1}\,F(u)\,du$$

Problemas propuestos

INTEGRALES DOBLES

19. (*a*) Trazar la región $\mathcal{R}$ del plano xy limitada por $y^2 = 2x$ y $y = x$. (*b*) Hallar el área de $\mathcal{R}$. (*c*) Hallar el momento polar de inercia de $\mathcal{R}$ suponiendo densidad σ constante.
Sol. (*b*) $\frac{2}{3}$; (*c*) $48\sigma/35 = 72M/35$, siendo M la masa de $\mathcal{R}$.

20. Hallar el centro de masa de la región del problema precedente. *Sol.* $\bar{x} = \frac{4}{5}$, $\bar{y} = 1$

21. Dada $\int_{y=0}^{3}\int_{x=1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)\,dx\,dy$. (*a*) Dibujar la región y dar una posible interpretación física de la integral doble. (*b*) Cambiar el orden de integración. (*c*) Calcular la integral doble.

Sol. (*b*) $\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{4-x^2} (x+y)\,dy\,dx$, (*c*) 241/60

22. Mostrar que $\displaystyle\int_{x=1}^{2}\int_{y=\sqrt{x}}^{x} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx \;+\; \int_{x=2}^{4}\int_{y=\sqrt{x}}^{2} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2y}\,dy\,dx \;=\; \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$.

23. Hallar el volumen del tetraedro limitado por $x/a + y/b + z/c = 1$ y los planos coordenados.
Sol. $abc/6$

24. Hallar el volumen de la región limitada por $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = -a$, $x = a$, $y = -a$, $y = a$.
Sol. $8a^4/3$

25. Hallar (*a*) el momento de inercia respecto del eje z y (*b*) el centro de masa de la región del Problema 24 suponiendo la densidad σ constante.
Sol. (*a*) $\frac{112}{45}a^6\sigma = \frac{14}{15}Ma^2$, donde M = masa; (*b*) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{7}{15}a^2$

TRANSFORMACION DE INTEGRALES DOBLES

26. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, donde $\mathcal{R}$ es la región $x^2 + y^2 \leqq a^2$. *Sol.* $\frac{2}{3}\pi a^3$

27. Si $\mathcal{R}$ es la región del Problema 26, calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$. *Sol.* $\pi(1-e^{-a^2})$

28. Aplicando la transformación $x + y = u$, $y = uv$, mostrar que

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} e^{y/(x+y)}\,dy\,dx \quad = \quad \frac{e-1}{2}$$

29. Hallar el área de la región limitada por $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3 = 15$. [Sugerencia: Sean $xy = u$, $xy^3 = v$.]
Sol. $2 \ln 3$

30. Mostrar que el volumen generado por revolución de la región del primer cuadrante limitada por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = 8x$, $x^2 = y$, $x^2 = 8y$ en torno al eje x es $279\pi/2$. [Sugerencia: Sean $y^2 = ux$, $x^2 = vy$.]

31. Hallar el área de la región del primer cuadrante limitada por $y = x^3$, $y = 4x^3$, $x = y^3$, $x = 4y^3$. *Sol.* $\frac{1}{8}$

32. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Mostrar que $\iint_{\mathcal{R}} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\, dy = \operatorname{sen} 1$
[Sugerencia: Sean $x - y = u$, $x + y = v$.]

INTEGRALES TRIPLES

33. (*a*) Calcular $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xyz\, dz\, dy\, dx$. (*b*) Dar una interpretación geométrica de la integral anterior.
Sol. (*a*) $\frac{3}{8}$

34. Hallar (*a*) el volumen y (*b*) el centro de masa de la región del primer octante limitada por $x/a + y/b + z/c = 1$, donde a, b, c son positivos. *Sol.* (*a*) $abc/6$; (*b*) $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = b/4$, $\bar{z} = c/4$

35. Hallar (*a*) el momento de inercia y (*b*) el radio de giro con respecto al eje z de la región del Problema 34.
Sol. (*a*) $M(a^2 + b^2)/10$, (*b*) $\sqrt{(a^2 + b^2)/10}$

36. Hallar la masa de la región correspondiente a $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, si la densidad es igual a xyz. *Sol.* $4/3$

37. Hallar el volumen de la región limitada por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x$. *Sol.* $\pi/2$

TRANSFORMACION DE INTEGRALES TRIPLES

38. Hallar el volumen de la región limitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy. *Sol.* 8π

39. Hallar el centro de masa de la región del Problema 38 suponiendo constante la densidad σ.
Sol. $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{4}{3}$

40. (*a*) Calcular $\iiint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, siendo $\mathcal{R}$ la región limitada por el plano $z = 3$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (*b*) Dar una interpretación física de la integral en (*a*). [Sugerencia: Hágase la integración en coordenadas cilíndricas en el orden ρ, z, ϕ.] *Sol.* $27\pi(2\sqrt{2} - 1)/2$

41. Mostrar que el volumen de la región limitada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es $\pi/6$.

42. Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de radio a y altura b con respecto a su eje si la densidad es proporcional a su distancia al eje. *Sol.* $\frac{3}{5}Ma^2$

43. (*a*) Calcular $\iiint_{\mathcal{R}} \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, siendo $\mathcal{R}$ la región limitada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $a > b > 0$. (*b*) Dar una interpretación física de la integral anterior.
Sol. (*a*) $4\pi \ln (a/b)$

44. (*a*) Hallar el volumen de la región limitada por la esfera $r = 2a \cos \theta$ y el cono $\phi = \alpha$, donde $0 < \alpha < \pi/2$. (*b*) Discutir el caso $\alpha = \pi/2$. *Sol.* $\frac{4}{3}\pi a^3(1 - \cos^4 \alpha)$

45. Hallar el centro de masa de una cúpula hemisférica de radio exterior a y radio interior b si la densidad es (*a*) constante, (*b*) proporcional al cuadrado de la distancia a la base. Discutir el caso $a = b$.
Sol. Tomando el eje z como eje de simetría: (*a*) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{3}{8}(a^4 - b^4)/(a^3 - b^3)$; (*b*) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{5}{8}(a^6 - b^6)/(a^5 - b^5)$

PROBLEMAS VARIOS

46. Hallar la masa de un cilindro circular recto de radio a y altura b si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia a un punto de la circunferencia de la base.
Sol. $\frac{1}{6}\pi a^2 bk(9a^2 + 2b^2)$, donde k = constante de proporcionalidad.

47. Hallar (*a*) el volumen y (*b*) el centro de masa de la región limitada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y abajo por el plano $z = b$ con $a > b > 0$, suponiendo la densidad constante.
Sol. (*a*) $\frac{1}{3}\pi(2a^3 - 3a^2b + b^3)$; (*b*) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{3}{4}(a+b)^2/(2a+b)$

48. Una esfera de radio a tiene un hueco cilíndrico de radio b cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera. Mostrar que el volumen de la esfera que resta es $\frac{4}{3}\pi[a^3 - (a^2 - b^2)^{3/2}]$.

49. Una curva simple cerrada de un plano se hace girar en torno a un eje del plano que no la corta. Demostrar que el volumen generado es igual al área encerrada por la curva multiplicada por la distancia que recorre el centro de masa del área (*teorema de Pappus*).

50. Aplicar el Problema 49 para hallar el volumen generado por revolución del círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2, b > a > 0$ en torno al eje x. *Sol.* $2\pi^2 a^2 b$

51. Hallar el volumen de la región limitada por los cilindros hiperbólicos $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$, $yz = 25$, $yz = 49$. [Sugerencia: Sean $xy = u$, $xz = v$, $yz = w$.] *Sol.* 64

52. Calcular $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 - (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)}\; dx\, dy\, dz$, siendo $\mathcal{R}$ la región interior al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. [Sugerencia: Sean $x = au$, $y = bv$, $z = cw$. Utilícense luego coordenadas esféricas.]
Sol. $\frac{1}{4}\pi^2 abc$

53. Si $\mathcal{R}$ es la región $x^2 + xy + y^2 \leqq 1$, demostrar que $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{-(x^2+xy+y^2)}\, dx\, dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(e - 1)$.
[Sugerencia: Sean $x = u \cos\alpha - v \operatorname{sen}\alpha$, $y = u \operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha$ y elíjase α de modo que se elimine el término en xy en el integrando. Tómese luego $u = a\rho\cos\phi$, $v = b\rho \operatorname{sen}\phi$ con a y b convenientemente elegidos.]

54. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x)\, dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-u)^{n-1} F(u)\, du$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ (ver Prob. 18).

Capítulo 10

Integrales curvilíneas, integrales de superficie y teoremas integrales

INTEGRALES CURVILINEAS

Sea C una curva del plano xy que une los puntos $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$ (Fig. 10-1). Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones uniformes definidas en todo punto de C. Subdivídase C en n partes eligiendo $(n - 1)$ puntos de la misma dados por (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}). Denótese $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, siendo $(a_1, b_1) \equiv (x_0, y_0)$, $(a_2, b_2) \equiv (x_n, y_n)$ y tómense puntos (ξ_k, η_k) de C situados entre los (x_{k-1}, y_{k-1}) y (x_k, y_k). Fórmese la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \{P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k\} \qquad (1)$$

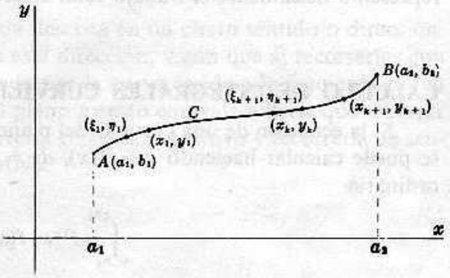


Fig. 10-1

Si existe el límite de esta suma para $n \to \infty$ de modo que todos los Δx_k, Δy_k tiendan a cero, tal límite se llama *integral curvilínea* a lo largo de C y se denota

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad \text{o} \qquad \int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy \qquad (2)$$

El límite existe si P y Q son continuas (o casicontinuas) en todo punto de C. El valor de la integral depende en general de P, Q, la curva C y de los límites (a_1, b_1) y (a_2, b_2).

De manera completamente análoga se puede definir una integral curvilínea a lo largo de una curva C en el espacio tridimensional como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{A_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k + A_2(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta y_k + A_3(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta z_k\} \qquad (3)$$
$$= \int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

siendo A_1, A_2 y A_3 funciones de x, y y z.

Se pueden definir otros tipos de integrales curvilíneas que dependan de curvas particulares. Por ejemplo, si Δs_k denota el arco de curva C de la figura anterior entre los puntos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}), entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k = \int_C U(x,y)\,ds \qquad (4)$$

se llama integral curvilínea de $U(x, y)$ a lo largo de la curva C. Son posibles generalizaciones a tres o más dimensiones.

NOTACION VECTORIAL DE LAS INTEGRALES CURVILINEAS

A menudo es conveniente expresar una integral curvilínea en forma vectorial bien para tener una ilustración física o geométrica, bien por brevedad en la notación. Por ejemplo, se puede expresar la integral curvilínea (*3*) en la forma

$$\int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \;=\; \int_C (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) \qquad (5)$$

$$= \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

con $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. La integral curvilínea (*2*) es un caso especial de ésta para $z = 0$.

Si a cada punto (x, y, z) se asocia una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un objeto (o sea, si se define un *campo de fuerzas*), entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (6)$$

representa físicamente el trabajo total efectuado al mover el objeto a lo largo de la curva C.

CALCULO DE INTEGRALES CURVILINEAS

Si la ecuación de una curva C del plano $z = 0$ viene dada como $y = f(x)$, la integral curvilínea (*2*) se puede calcular haciendo $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$ en el integrando para obtener la integral definida ordinaria

$$\int_{a_1}^{a_2} P\{x, f(x)\}\,dx + Q\{x, f(x)\}\,f'(x)\,dx \qquad (7)$$

que se calcula como siempre.

Análogamente, si C está dada como $x = g(y)$, entonces $dx = g'(y)\,dy$ y la integral curvilínea se convierte en la

$$\int_{b_1}^{b_2} P\{g(y), y\}\,g'(y)\,dy + Q\{g(y), y\}\,dy \qquad (8)$$

Si C está dada en forma paramétrica $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, la integral curvilínea es entonces igual a la

$$\int_{t_1}^{t_2} P\{\phi(t), \psi(t)\}\,\phi'(t)\,dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\}\,\psi'(t)\,dt \qquad (9)$$

donde t_1 y t_2 denotan los valores de t que corresponden a los puntos A y B, respectivamente.

En los cálculos se pueden utilizar combinaciones de los métodos anteriores.

Métodos parecidos se usan para calcular integrales curvilíneas a lo largo de curvas alabeadas.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES CURVILINEAS

Las integrales curvilíneas tienen propiedades análogas a las de las integrales ordinarias. Por ejemplo:

1. $$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; \int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy$$

2. $$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy \;=\; -\int_{(a_2,b_2)}^{(a_1,b_1)} P\,dx + Q\,dy$$

De modo que al invertir el camino de integración se cambia el signo de la integral curvilínea.

3. $\displaystyle\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(a_1,b_1)}^{(a_3,b_3)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(a_3,b_3)}^{(a_2,b_2)} P\,dx + Q\,dy$

siendo (a_3, b_3) otro punto de C.

Propiedades parecidas se verifican para las integrales curvilíneas en el espacio.

CURVAS SIMPLES CERRADAS. REGIONES SIMPLE Y MULTIPLEMENTE CONEXAS

Curva simple cerrada es una curva cerrada que no se corta a sí misma en ningún punto. Matemáticamente, una curva del plano está definida por las ecuaciones paramétricas $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, siendo ϕ y ψ funciones uniformes y continuas en un intervalo $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Si $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ y $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ la curva se dice *cerrada*. Si $\phi(u) = \phi(v)$ y $\psi(u) = \psi(v)$ solo si $u = v$ (menos en el caso especial en que $u = t_1$ y $v = t_2$), la curva es cerrada y no se corta a sí misma, de modo que es una curva simple cerrada. Se supondrá también, si no se dice otra cosa, que ϕ y ψ son casidiferenciables en $t_1 \leqq t \leqq t_2$.

Si una región plana tiene la propiedad de que toda curva cerrada de la región se puede reducir a un punto sin salir de la región, se dice que la región es *simplemente conexa*, si no, que es *múltiplemente conexa* (véase página 102, Capítulo 6).

Al variar el parámetro t de t_1 a t_2, la curva plana queda descrita en un cierto sentido o dirección. Para curvas del plano xy se escoge como *positiva* o *negativa* esta dirección, según que al recorrerlas con la cabeza indicando la dirección z positiva la región encerrada por la curva quede a la izquierda o a la derecha respectivamente. Para una curva simple cerrada del plano xy esto equivale a decir que recorrer la curva en el sentido contrario a las agujas del reloj es recorrerla en sentido positivo y recorrerla en sentido de las agujas del reloj es recorrerla en sentido negativo.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

Sean P, Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, uniformes y continuas en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ cuyo contorno es una curva simple cerrada C. Entonces,

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (10)$$

utilizando el símbolo $\oint_C$ para señalar que C es cerrada y que se describe en sentido positivo.

El teorema es también cierto para regiones limitadas por dos o más curvas cerradas (o sea, regiones múltiplemente conexas). Véase Problema 10.

CONDICIONES PARA QUE UNA INTEGRAL CURVILINEA SEA INDEPENDIENTE DEL CAMINO

Teorema 1.

Una condición necesaria y suficiente para que $\int_C P\,dx + Q\,dy$ sea independiente del camino C que une dos puntos dados cualesquiera en una región $\mathcal{R}$ es que en $\mathcal{R}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (11)$$

donde se supone que estas derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$.

La condición (*11*) es también la condición para que $P\,dx + Q\,dy$ sea diferencial exacta, es decir, para que exista una función $\phi(x, y)$ tal que $P\,dx + Q\,dy = d\phi$. En ese caso, si los puntos extremos de la curva C son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el valor de la integral curvilínea está dado por

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \qquad (12)$$

En particular, si (*11*) se verifica y C es cerrada se tiene $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ y

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad (13)$$

Para demostraciones y teoremas relacionados, véanse Problemas 11-13.

Los resultados del Teorema 1 se pueden generalizar a integrales curvilíneas en el espacio. Así se tiene el

Teorema 2.

Una condición necesaria y suficiente para que $\int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$ sea independiente del camino C que une dos puntos cualesquiera en una región $\mathcal{R}$ es que en $\mathcal{R}$

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y} \qquad (14)$$

suponiendo que estas derivadas parciales sean continuas en $\mathcal{R}$.

Estos teoremas se pueden expresar de manera concisa con vectores. Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, la integral curvilínea se puede escribir $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ y la condición (*14*) es equivalente a la condición $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{A}$ representa un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ que actúan sobre un objeto, el enunciado del teorema equivale a decir que el trabajo hecho al mover el objeto de un punto a otro es independiente del camino que une los dos puntos si, y solo si, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Un campo de fuerzas de este tipo se llama *conservativo*.

La condición (*14*) [o la condición equivalente $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$] es también la condición para que $A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$ [o $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$] sea diferencial exacta, es decir, de que exista una función $\phi(x, y, z)$ tal que $A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = d\phi$. En este caso, si los extremos de la Curva C son (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), el valor de la integral curvilínea está dado por

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \qquad (15)$$

Si C es cerrada y $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, se tiene

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (16)$$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Sea S una superficie bilátera cuya proyección sobre el plano xy es $\mathcal{R}$ como en la Fig. 10-2 adjunta. Supóngase que una ecuación de S sea $z = f(x, y)$, donde f es uniforme y continua para todo x y y de $\mathcal{R}$. Dividiendo $\mathcal{R}$ en n subregiones de área ΔA_p, $p = 1, 2, \ldots, n$ y levantando una columna sobre cada una de estas subregiones hasta que corten a S donde determinan un área ΔS_p, y si $\phi(x, y, z)$ es uniforme y continua en todo punto de S.

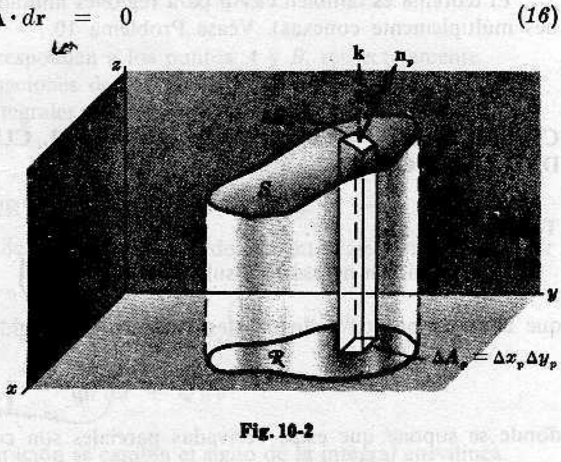


Fig. 10-2

Fórmese la suma

$$\sum_{p=1}^{n} \phi(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)\,\Delta S_p \tag{17}$$

siendo (ξ_p, η_p, ζ_p) un punto de ΔS_p. Si existe el límite de esta suma para $n \to \infty$ de modo que cada $\Delta S_p \to 0$, se dice que ese límite es la *integral de superficie* de $\phi(x, y, z)$ sobre S y se la designa por

$$\iint_S \phi(x, y, z)\,dS \tag{18}$$

Como $\Delta S_p = |\sec \gamma_p|\,\Delta A_p$ aproximadamente, siendo γ_p el ángulo que forma la normal a S con el eje positivo z, el límite de la suma *(17)* se puede escribir

$$\iint_{\mathcal{R}} \phi(x, y, z)\,|\sec \gamma|\,dA \tag{19}$$

donde $|\sec \gamma|$ está dada por

$$|\sec \gamma| \;=\; \frac{1}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|} \;=\; \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \tag{20}$$

Suponiendo entonces que $z = f(x, y)$ tiene derivadas continuas o casicontinuas en $\mathcal{R}$, *(19)* puede escribirse en forma cartesiana como

$$\iint_{\mathcal{R}} \phi(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{21}$$

Si la ecuación de S está dada en la forma $F(x, y, z) = 0$, *(21)* se puede escribir también

$$\iint_{\mathcal{R}} \phi(x, y, z)\,\frac{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}}{|F_z|}\,dx\,dy \tag{22}$$

Las expresiones *(21)* o *(22)* se pueden utilizar para el cálculo de *(18)*.

En lo que precede se ha supuesto que S es tal que toda paralela al eje z corta S en solo un punto. En caso de que S no sea de este tipo se puede, por lo general, subdividir S en superficies $S_1, S_2, \ldots$, que son de ese tipo. Entonces la integral de superficie sobre S se define como la suma de las integrales de superficie sobre $S_1, S_2, \ldots$.

Los resultados enunciados valen cuando S se proyecta sobre una región $\mathcal{R}$ del plano xy. En algunos casos es mejor proyectar S sobre el plano yz o el xz. Para tales casos *(18)* se puede calcular modificando en forma apropiada *(21)* y *(22)*.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea S una superficie cerrada que encierra una región de volumen V. Tómese como *dirección positiva* la de la normal exterior a la superficie y sean α, β, γ los ángulos que esta normal hace con los ejes positivos x, y y z, respectivamente. Si A_1, A_2 y A_3 son continuas y tienen derivadas parciales continuas en la región, entonces

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV \;=\; \iint_S (A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma)\,dS \tag{23}$$

que también se puede escribir

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV \;=\; \iint_S A_1\,dy\,dz + A_2\,dz\,dx + A_3\,dx\,dy \tag{24}$$

En forma vectorial, con $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, se pueden escribir estas ecuaciones simplemente como

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{25}$$

Este teorema, llamado *teorema de la divergencia* o *teorema de Green en el espacio*, dice que la integral de superficie de la componente normal de un vector **A** extendida a una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de **A** extendida al volumen que encierra la superficie.

TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie abierta bilátera cuyo contorno sea una curva cerrada C que no se corta a sí misma (curva simple cerrada). Considérese una recta normal a S como positiva si está en un lado de la superficie S y negativa si está al otro lado de S. La elección del lado positivo es arbitraria, pero debe hacerse de antemano. Tómese como sentido positivo sobre C el que deja la superficie a la izquierda de un observador que va recorriendo el contorno de S con su cabeza dirigida en el sentido de la normal positiva. Entonces, si A_1, A_2, A_3 son uniformes, continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región del espacio a la cual sea interior S, se tiene

$$\int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = \iint_S\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS \tag{26}$$

lo que en forma vectorial con $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, se expresa sencillamente por

$$\boxed{\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS} \tag{27}$$

Este teorema, llamado de *Stokes*, dice, pues, que la integral curvilínea de la componente tangencial de un vector **A** alrededor de una curva simple cerrada C es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotor de **A** extendida a toda superficie S que tenga a C por contorno. Obsérvese que si $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ en *(27)*, se obtiene el resultado *(16)*.

Problemas resueltos

INTEGRALES CURVILINEAS

1. Calcular $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 + x)\,dy$ a lo largo *(a)* de una recta de (0, 1) a (1, 2), *(b)* de las rectas de (0, 1) a (1, 1) y luego de (1, 1) a (1, 2), *(c)* de la parábola $x = t$, $y = t^2 + 1$.

(a) La ecuación de la recta que pasa por (0, 1) y (1, 2) en el plano xy es $y = x + 1$. Entonces, $dy = dx$ y l integral curvilínea es igual a

$$\int_{x=0}^{1} \{x^2 - (x+1)\}\,dx + \{(x+1)^2 + x\}\,dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)\,dx = 5/3$$

(*b*) A lo largo de la recta de $(0, 1)$ a $(1, 1)$, $y = 1$, $dy = 0$ y la integral curvilínea es igual a

$$\int_{x=0}^{1} (x^2 - 1)\,dx + (1 + x)(0) = \int_{0}^{1} (x^2 - 1)\,dx = -2/3$$

A lo largo de la recta de $(1, 1)$ a $(1, 2)$, $x = 1$, $dx = 0$ y la integral curvilínea es igual a

$$\int_{y=1}^{2} (1 - y)(0) + (y^2 + 1)\,dy = \int_{1}^{2} (y^2 + 1)\,dy = 10/3$$

Luego el valor buscado es $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

(*c*) Como $t = 0$ en $(0, 1)$ y $t = 1$ en $(1, 2)$, la integral curvilínea es igual a

$$\int_{t=0}^{1} \{t^2 - (t^2 + 1)\}\,dt + \{(t^2 + 1)^2 + t\}\,2t\,dt = \int_{0}^{1} (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)\,dt = 2$$

2. Si $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, calcular $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ a lo largo de los siguientes caminos C:

(*a*) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$

(*b*) Los segmentos de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$, de $(0, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$ y de $(0, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$.

(*c*) El segmento de recta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \{(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}\} \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) \\ &= \int_C (3x^2 - 6yz)\,dx + (2y + 3xz)\,dy + (1 - 4xyz^2)\,dz\end{aligned}$$

(*a*) Si $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ corresponden a $t = 0$ y $t = 1$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^{1} \{3t^2 - 6(t^2)(t^3)\}\,dt + \{2t^2 + 3(t)(t^3)\}\,d(t^2) + \{1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2\}\,d(t^3) \\ &= \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^5)\,dt + (4t^3 + 6t^5)\,dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2\end{aligned}$$

Otro método:

A lo largo de C, $\mathbf{A} = (3t^2 - 6t^5)\mathbf{i} + (2t^2 + 3t^4)\mathbf{j} + (1 - 4t^9)\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$. Entonces,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2 - 6t^5)\,dt + (4t^3 + 6t^5)\,dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2$$

(*b*) A lo largo del segmento de recta de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$, $x = 0$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ mientras que z varía de 0 a 1. Así que la integral en esta parte del camino es

$$\int_{z=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(0)(z)\}0 + \{2(0) + 3(0)(z)\}0 + \{1 - 4(0)(0)(z^2)\}\,dz = \int_{z=0}^{1} dz = 1$$

A lo largo del segmento de recta de $(0, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$, $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$, mientras que y varía de 0 a 1. Luego la integral en esta parte del camino es

$$\int_{y=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(y)(1)\}0 + \{2y + 3(0)(1)\}\,dy + \{1 - 4(0)(y)(1)^2\}0 = \int_{y=0}^{1} 2y\,dy = 1$$

A lo largo del segmento de recta de $(0, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$, $y = 1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$, mientras que x varía de 0 a 1. Luego la integral en esta parte del camino es

$$\int_{x=0}^{1} \{3x^2 - 6(1)(1)\}\,dx + \{2(1) + 3x(1)\}0 + \{1 - 4x(1)(1)^2\}0 = \int_{x=0}^{1} (3x^2 - 6)\,dx = -5$$

Sumando $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 1 - 5 = -3$.

(*c*) La recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ está dada en forma paramétrica por $x = t$, $y = t$, $z = t$. Luego

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \;=\; \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^2)\,dt \;+\; (2t + 3t^2)\,dt \;+\; (1 - 4t^4)\,dt \;=\; 6/5$$

3. Hallar el trabajo hecho al mover una partícula una vez en torno a la elipse C del plano xy si el centro de la elipse es el origen y los semiejes mayor y menor son 4 y 3, respectivamente, como se ve en la Fig. 10-3, y si el campo de fuerzas está dado por

$$\mathbf{F} \;=\; (3x - 4y + 2z)\mathbf{i} \;+\; (4x + 2y - 3z^2)\mathbf{j} \;+\; (2xz - 4y^2 + z^3)\mathbf{k}$$

En el plano $z = 0$, $\mathbf{F} = (3x - 4y)\mathbf{i} + (4x + 2y)\mathbf{j} - 4y^2\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ con lo que el trabajo es

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \;=\; \int_C \{(3x - 4y)\mathbf{i} + (4x + 2y)\mathbf{j} - 4y^2\mathbf{k}\}\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j})$$

$$=\; \oint_C (3x - 4y)\,dx \;+\; (4x + 2y)\,dy$$

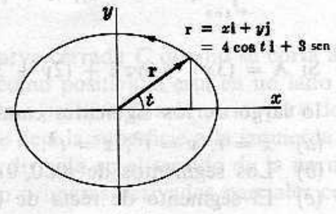


Fig. 10-3

Tómense como ecuaciones paramétricas de la elipse $x = 4\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$ variando t de 0 a 2π (Fig. 10-3). Entonces la integral curvilínea es igual a

$$\int_{t=0}^{2\pi} \{3(4\cos t) - 4(3\operatorname{sen} t)\}\{-4\operatorname{sen} t\}\,dt \;+\; \{4(4\cos t) + 2(3\operatorname{sen} t)\}\{3\cos t\}\,dt$$

$$=\; \int_{t=0}^{2\pi} (48 - 30\operatorname{sen} t\cos t)\,dt \;=\; (48t - 15\operatorname{sen}^2 t)\Big|_0^{2\pi} \;=\; 96\pi$$

Se ha elegido la dirección contraria a la de las agujas del reloj para recorrer C, según se indica en la Fig. 10-3. Se tomará esta dirección como positiva diciendo que C está recorrida en *sentido positivo*. Si C se recorriera en sentido de las agujas del reloj (negativo), el valor de la integral sería -96π.

4. Calcular $\int_C y\,ds$ a lo largo de la curva C dada por $y = 2\sqrt{x}$ de $x = 3$ a $x = 24$.

Como $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + 1/x}\,dx$, se tiene

$$\int_C y\,ds \;=\; \int_3^{24} 2\sqrt{x}\sqrt{1 + 1/x}\,dx \;=\; 2\int_3^{24} \sqrt{x + 1}\,dx \;=\; \frac{4}{3}(x + 1)^{3/2}\Big|_3^{24} \;=\; 156$$

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

5. Demostrar el teorema de Green en el plano si C es una curva cerrada que solo es cortada en dos puntos a lo más por una recta paralela a un eje de coordenadas.

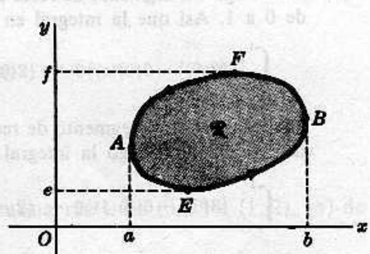


Fig. 10-4

Sean $y = Y_1(x)$ y $y = Y_2(x)$ las ecuaciones de las curvas AEB y AFB (Fig. 10-4 adjunta), respectivamente. Si $\mathcal{R}$ es la región encerrada por C se tiene

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \;=\; \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right]dx$$

$$=\; \int_{x=a}^{b} P(x, y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx \;=\; \int_a^b [P(x, Y_2) - P(x, Y_1)]\,dx$$

$$=\; -\int_a^b P(x, Y_1)\,dx \;-\; \int_b^a P(x, Y_2)\,dx \;=\; -\oint_C P\,dx$$

Luego $$(1) \qquad \oint_C P\,dx \;=\; -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Análogamente, sean $x = X_1(y)$ y $x = X_2(y)$ las respectivas ecuaciones de las curvas EAF y EBF.

Entonces,
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \;=\; \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right]dy \;=\; \int_e^f [Q(X_2, y) - Q(X_1, y)]\,dy$$
$$= \int_f^e Q(X_1, y)\,dy \;+\; \int_e^f Q(X_2, y)\,dy \;=\; \oint_C Q\,dy$$

Entonces, $$(2) \qquad \oint_C Q\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Sumando (*1*) y (*2*) $$\oint_C P\,dx + Q\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

6. Comprobar el teorema de Green en el plano para
$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx \;+\; (x + y^2)\,dy$$
siendo C la curva cerrada que limita la región entre $y = x^2$ y $y^2 = x$.

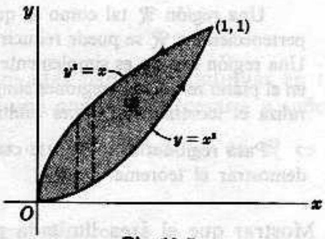


Fig. 10-5

Las curvas planas $y = x^2$ y $y^2 = x$ se cortan en (0, 0) y (1, 1). La dirección positiva se indica en la Figura 10-5.

A lo largo de $y = x^2$, la integral curvilínea es
$$\int_{x=0}^{1} \{(2x)(x^2) - x^2\}\,dx \;+\; \{x + (x^2)^2\}\,d(x^2) \;=\; \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx \;=\; 7/6$$

A lo largo de $y^2 = x$ la integral curvilínea es
$$\int_{y=1}^{0} \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\}\,d(y^2) \;+\; \{y^2 + y^2\}\,dy \;=\; \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\,dy \;=\; -17/15$$

Luego la integral curvilínea buscada es $= 7/6 - 17/15 = 1/30$.

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right\}dx\,dy$$
$$= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x)\,dx\,dy \;=\; \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\,dx$$
$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)\,dx \;=\; 1/30$$

Y queda comprobado el teorema de Green.

7. Generalizar la demostración del teorema de Green en el plano que se dio en el Problema 5 a las curvas C que pueden ser cortadas por paralelas a los ejes en más de dos puntos.

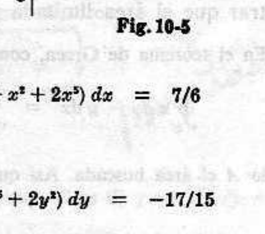


Fig. 10-6

Considérese una curva cerrada C tal que pueda ser cortada en más de dos puntos por paralelas a los ejes, como se ve en la Fig. 10-6 adjunta. Trazando la recta ST la región queda dividida en dos regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, que son del tipo considerado en el Problema 5 y a las cuales se aplica el teorema de Green, esto es,

$$(1) \int_{STUS} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad (2) \int_{SVTS} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Sumando los primeros miembros de (1) y (2) se tiene, omitiendo el integrando $P\,dx + Q\,dy$ en cada caso,

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

puesto que $\int_{ST} = -\int_{TS}$

Sumando los segundos miembros de (1) y (2), omitiendo el integrando, $\iint_{\mathcal{R}_1} + \iint_{\mathcal{R}_2} = \iint_{\mathcal{R}}$ siendo $\mathcal{R}$ la región formada por las $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

Luego $\int_{TUSVT} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ y el teorema está demostrado.

Una región $\mathcal{R}$ tal como la que aquí se considera o la del Problema 5, para las que toda curva cerrada perteneciente a $\mathcal{R}$ se puede reducir continuamente a un punto sin dejar $\mathcal{R}$, se llama *región simplemente conexa.* Una región que no es simplemente conexa se llama *múltiplemente conexa.* Se ha visto que el teorema de Green en el plano se aplica a regiones simplemente conexas encerradas por curvas cerradas. En el Problema 10 se generaliza el teorema a regiones múltiplemente conexas.

Para regiones simplemente conexas más complicadas pueden ser necesarias más rectas como la ST para demostrar el teorema.

8. Mostrar que el área limitada por una curva simple cerrada está dada por $\frac{1}{2} \oint_C x\,dy - y\,dx$.

En el teorema de Green, con $P = -y$, $Q = x$,

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dx\,dy = 2 \iint_{\mathcal{R}} dx\,dy = 2A$$

siendo A el área buscada. Así que $A = \frac{1}{2} \oint_C x\,dy - y\,dx$.

9. Hallar el área de la elipse $x = a \cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \tfrac{1}{2} \oint_C x\,dy - y\,dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\cos\theta)(b\cos\theta)\,d\theta - (b\operatorname{sen}\theta)(-a\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

10. Demostrar que el teorema de Green en el plano se aplica también a regiones múltiplemente conexas como la $\mathcal{R}$ de la Figura 10-7.

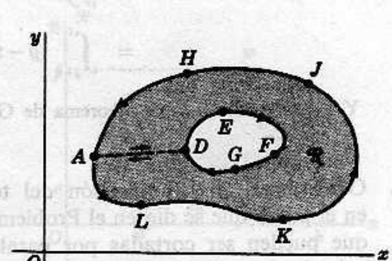


Fig. 10-7

La región sombreada $\mathcal{R}$, que se ve en la figura, es múltiplemente conexa, pues no toda curva cerrada interior a $\mathcal{R}$ se puede reducir a un punto sin dejar $\mathcal{R}$, como se puede observar considerando una curva que rodee el contorno $DEFGD$. El contorno de $\mathcal{R}$, que consiste en el contorno exterior $AHJKLA$ y el interior $DEFGD$ se ha de recorrer en dirección positiva, de modo que siempre quede la región a la izquierda. Se ve que las direcciones positivas son las indicadas en la figura adjunta.

Para demostrar el teorema, trácese una recta, tal como la AD, que se dirá *un corte*, que una los contornos exterior e interior. La región de contorno $ADEFGDALKJHA$ es simplemente conexa y se aplica entonces el teorema de Green. Luego

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} P\,dx + Q\,dy \quad = \quad \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Pero la integral del primer miembro, aparte el integrando, es

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

puesto que $\int_{AD} = -\int_{DA}$. Luego si C_1 es la curva $ALKJHA$, C_2 es la curva $DEFGD$ y C es el contorno de $\mathcal{R}$ formado por C_1 y C_2 (recorridas en sentido positivo), entonces $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C$ y, por tanto,

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \quad = \quad \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

INDEPENDENCIA DEL CAMINO DE INTEGRACION

11. Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en todo punto de una región simplemente conexa $\mathcal{R}$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ en torno a cualquier camino cerrado C en $\mathcal{R}$ es que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ idénticamente en $\mathcal{R}$.

Condición suficiente. Supóngase $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Luego por el teorema de Green,

$$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy \quad = \quad \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \quad = \quad 0}$$

para todo C

siendo $\mathcal{R}$ la región que limita C.

Condición necesaria.

Supóngase $\oint P\,dx + Q\,dy = 0$ en torno a cualquier camino cerrado C en $\mathcal{R}$ y que $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ en algún punto de $\mathcal{R}$; sea, por ejemplo, $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$ en (x_0, y_0).

Por hipótesis, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son continuas en $\mathcal{R}$, de modo que debe haber una región τ a la cual sea interior (x_0, y_0) para la cual $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$. Si Γ es el contorno de τ, entonces por el teorema de Green

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy \quad = \quad \iint_\tau \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \quad > \quad 0$$

contra la hipótesis de que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ para toda curva cerrada de $\mathcal{R}$. Así, pues, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ no puede ser positiva.

De manera análoga se puede demostrar que $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ no puede ser negativa y que, por tanto, tiene que ser idénticamente nula, o sea, que se tiene idénticamente $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en $\mathcal{R}$.

12. Sean P y Q definidas como en el Problema 11. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ sea independiente del camino que une los puntos A y B en $\mathcal{R}$ es que en $\mathcal{R}$ se tenga idénticamente $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

Condición suficiente. Si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, entonces, por el Problema 11,

$$\int_{ADBEA} P\,dx + Q\,dy \quad = \quad 0$$

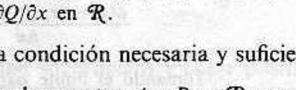


Fig. 10-8

(véase Fig. 10-8). De donde, abreviando las integrales por supresión del integrando $P\,dx + Q\,dy$, se tiene

$$\int_{ADB} + \int_{BEA} = 0, \qquad \int_{ADB} = -\int_{BEA} = \int_{AEB} \qquad \text{y así} \quad \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

es decir, la integral es independiente del camino.

Condición necesaria.

Si la integral es independiente del camino, entonces para cualesquiera caminos C_1 y C_2 de $\mathcal{R}$ se tiene

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}, \quad \int_{ADB} = \int_{AEB} \quad \text{y} \quad \int_{ADBEA} = 0$$

De donde se deduce que la integral curvilínea en torno a cualquier camino cerrado de $\mathcal{R}$ es nula y, por tanto, por el Problema 11, que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

13. Sean P y Q como en el Problema 11.

(*a*) Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $P\,dx + Q\,dy$ sea diferencial exacta de una función $\phi(x, y)$ es que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

(*b*) Mostrar que en tal caso $\int_A^B P\,dx + Q\,dy = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$ donde A y B son dos puntos cualesquiera.

(*a*) **Condición necesaria.**

Si $P\,dx + Q\,dy = d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy$, diferencial exacta, entonces (*1*) $\partial\phi/\partial x = P$, (*2*) $\partial\phi/\partial y = Q$. Derivando entonces (*1*) y (*2*) con respecto a y y x, respectivamente, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ por la supuesta continuidad de las derivadas parciales.

Condición suficiente.

Según el Problema 12, si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, $\int P\,dx + Q\,dy$ es independiente del camino que une los dos puntos. En particular, sean (a, b) y (x, y) los dos puntos y defínase

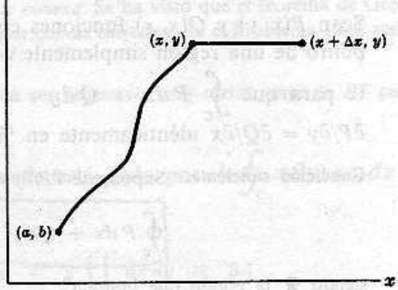


Fig. 10-9

$$\phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

Entonces,

$$\phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy$$

Como la última integral es independiente del camino que une (x, y) y $(x + \Delta x, y)$, se puede elegir como camino el segmento de recta entre estos puntos (véase Fig. 10-9) de modo que $dy = 0$. Entonces, por el teorema del valor medio para integrales,

$$\frac{\phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx = P(x + \theta\Delta x, y) \qquad 0 < \theta < 1$$

Tomando el límite para $\Delta x \to 0$, se tiene $\partial\phi/\partial x = P$.

Análogamente puede demostrarse que $\partial\phi/\partial y = Q$.

Se deduce, pues, que $P\,dx + Q\,dy = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy = d\phi$.

(*b*) Sea $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. De la parte (*a*),

$$\phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

Entonces, omitiendo el integrando $P\,dx + Q\,dy$, se tiene

$$\int_A^B = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = \int_{(a,b)}^{(x_2,y_2)} - \int_{(a,b)}^{(x_1,y_1)} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) = \phi(B) - \phi(A)$$

14. (*a*) Demostrar que $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$ es independiente del camino de (1, 2) a (3, 4). (*b*) Calcular la integral.

(*a*) $P = 6xy^2 - y^3$, $Q = 6x^2y - 3xy^2$. Entonces, $\partial P/\partial y = 12xy - 3y^2 = \partial Q/\partial x$ y por el Problema 12 la integral curvilínea es independiente del camino.

(*b*) **Método 1:**

Como la integral curvilínea es independiente del camino, elíjase cualquier camino de (1, 2) a (3, 4), como el que forman los segmentos de (1, 2) a (3, 2) [a lo largo del cual $y = 2$, $dy = 0$] y de (3, 2) a (3, 4) [a lo largo del cual $x = 3$, $dx = 0$]. Entonces la integral resulta igual a

$$\int_{x=1}^{3} (24x - 8)\,dx + \int_{y=2}^{4} (54y - 9y^2)\,dy = 80 + 156 = 236$$

Método 2: Como $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, se debe tener (*1*) $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$, (*2*) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2$.

Por (*1*), $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + f(y)$. De (*2*), $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + g(x)$. Para que estas expresiones de ϕ sean iguales tiene que ser $f(y) = g(x) = c$ una constante. Luego $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + c$. Luego por el Problema 13,

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = \int_{(1,2)}^{(3,4)} d(3x^2y^2 - xy^3 + c)$$

$$= 3x^2y^2 - xy^3 + c\Big|_{(1,2)}^{(3,4)} = 236$$

Obsérvese que al hacer este cálculo se puede omitir la constante arbitraria c. Véase también el Problema 16, página 115.

También se hubiera podido observar que

$$\begin{aligned}(6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy &= (6xy^2\,dx + 6x^2y\,dy) - (y^3\,dx + 3xy^2\,dy) \\ &= d(3x^2y^2) - d(xy^3) = d(3x^2y^2 - xy^3)\end{aligned}$$

de donde es claro que $\phi = 3x^2y^2 - xy^3 + c$.

15. Calcular $\oint (x^2y\cos x + 2xy\,\mathrm{sen}\,x - y^2e^x)\,dx + (x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x)\,dy$ en torno a la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$P = x^2y\cos x + 2xy\,\mathrm{sen}\,x - y^2e^x$, $Q = x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x$.

Entonces, $\partial P/\partial y = x^2\cos x + 2x\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x = \partial Q/\partial x$, de modo que, por el Problema 11, la integral en torno a cualquier camino cerrado como el $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ es cero.

INTEGRALES DE SUPERFICIE

16. Si γ es el ángulo que forman la normal en un punto (x, y, z) de una superficie S y el eje positivo z, demostrar que

$$|\sec\gamma| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}$$

según que la ecuación de S sea $z = f(x, y)$ o $F(x, y, z) = 0$.

Si la ecuación de S es $F(x, y, z) = 0$, una normal a S en (x, y, z) es $\nabla F = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. Luego

$$\nabla F \cdot \mathbf{k} = |\nabla F|\,|\mathbf{k}|\cos\gamma \qquad \text{o} \qquad F_z = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\cos\gamma$$

de donde $\quad |\sec\gamma| = \dfrac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} \quad$ como se buscaba.

En este caso la ecuación es $z = f(x, y)$, se puede escribir $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, de donde $F_x = -z_x$, $F_y = -z_y$, $F_z = 1$ y se halla $|\sec\gamma| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$.

17. Calcular $\iint_S U(x,y,z)\,dS$ siendo S la superficie del paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano xy y $U(x, y, z)$ igual a *(a)* 1, *(b)* $x^2 + y^2$, *(c)* $3z$. Dar una interpretación física para cada caso.

La integral pedida es igual a

$$\iint_{\mathcal{R}} U(x,y,z)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy \qquad (1)$$

donde $\mathcal{R}$ es la proyección de S sobre el plano xy dada por $x^2 + y^2 = 2,\ z = 0$.

Como $z_x = 2x,\ z_y = -2y$ se puede escribir *(1)*

$$\iint_{\mathcal{R}} U(x,y,z)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy \qquad (2)$$

(a) Si $U(x, y, z) = 1$, *(2)* queda

$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$$

Para calcular esta integral pásese a coordenadas polares (ρ, ϕ). Así la integral se convierte en la

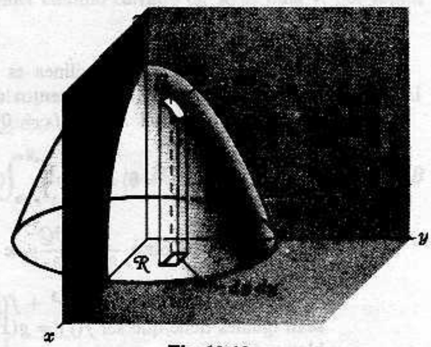


Fig. 10-10

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\phi \;=\; \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{12}(1 + 4\rho^2)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\sqrt{2}}\,d\phi \;=\; \frac{13\pi}{3}$$

Físicamente podría representar el área de la superficie S o la masa de S supuesta uno la densidad.

(b) Si $U(x,y,z) = x^2 + y^2$, *(2)* queda $\iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$ o en coordenadas polares.

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2}\,d\rho\,d\phi \;=\; \frac{149\pi}{30}$$

en donde la integración con respecto a ρ se realiza con la sustitución $\sqrt{1 + 4\rho^2} = u$.

Físicamente esto podría ser el momento de inercia de S con respecto al eje z suponiendo que la densidad es uno, o bien la masa de S suponiendo la densidad $= x^2 + y^2$.

(c) Si $U(x,y,z) = 3z$, *(2)* queda

$$\iint_{\mathcal{R}} 3z\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}} 3\{2 - (x^2 + y^2)\}\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$$

o en coordenadas polares.

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} 3\rho(2 - \rho^2)\sqrt{1 + 4\rho^2}\,d\rho\,d\phi \;=\; \frac{111\pi}{10}$$

Físicamente podría esto representar la masa S suponiendo una densidad $= 3z$, o bien podría ser el triple del momento de S respecto al plano xy.

18. Hallar el área de la superficie de una semiesfera de radio a que queda dentro del cilindro que tiene este radio por diámetro.

Las ecuaciones de la semiesfera y del cilindro (Fig. 10-11) son, respectivamente, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (o $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$) y $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$ (o $x^2 + y^2 = ax$).

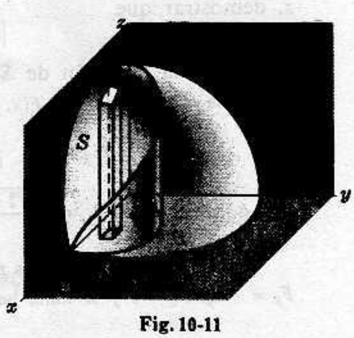


Fig. 10-11

Puesto que

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

se tiene

$$\text{Area buscada} = 2\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = 2\iint_{\mathcal{R}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

Hay dos métodos para este cálculo.

Método 1: Utilizando coordenadas polares.

Como $x^2 + y^2 = ax$ en coordenadas polares es $\rho = a \cos \phi$, la integral se convierte en la

$$2\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a\cos\phi} \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\, d\rho\, d\phi = 2a\int_{\phi=0}^{\pi/2} -\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{a\cos\phi} d\phi$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}(1 - \operatorname{sen}\phi)\, d\phi = (\pi - 2)a^2$$

Método 2: La integral es igual a

$$2\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dy\, dx = 2a\int_{x=0}^{a} \operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{\sqrt{ax-x^2}}\Big|_{y=0}^{\sqrt{ax-x^2}} dx$$

$$= 2a\int_0^a \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx$$

Haciendo $x = a\ \operatorname{tg}^2\theta$, esta integral se convierte en

$$4a^2\int_0^{\pi/4}\theta\ \operatorname{tg}\theta\sec^2\theta\, d\theta = 4a^2\left\{\tfrac{1}{2}\theta\ \operatorname{tg}^2\theta\Big|_0^{\pi/4} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^2\theta\, d\theta\right\}$$

$$= 2a^2\left\{\theta\ \operatorname{tg}^2\theta\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta - 1)\, d\theta\right\}$$

$$= 2a^2\left\{\pi/4 - (\operatorname{tg}\theta - \theta)\Big|_0^{\pi/4}\right\} = (\pi - 2)a^2$$

Obsérvese que las integrales anteriores son *impropias* en realidad y debieran tratarse por procedimientos de límite adecuados (Problema 78, Capítulo 5, y también Capítulo 12).

19. Hallar el centro de masa de la superficie del Problema 17.

Por simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$ y $\quad \bar{z} = \dfrac{\iint_S z\, dS}{\iint_S dS} = \dfrac{\iint_{\mathcal{R}} z\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy}{\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy}$

Numerador y denominador se pueden obtener de los resultados de los Problemas 17(c) y 17(a), respectivamente, y se tiene entonces $\bar{z} = \dfrac{37\pi/10}{13\pi/3} = \dfrac{111}{130}$.

20. Calcular $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{A} = xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$, S es la parte del plano $2x + 2y + z = 6$ que queda en el primer octante, y $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario a S.

Una normal a S es $\nabla(2x + 2y + z - 6) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

y así $\mathbf{n} = \dfrac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}$. Entonces,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = \{xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}\}\cdot\left(\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}\right)$$

$$= \frac{2xy - 2x^2 + (x+z)}{3}$$

$$= \frac{2xy - 2x^2 + (x + 6 - 2x - 2y)}{3}$$

$$= \frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}$$

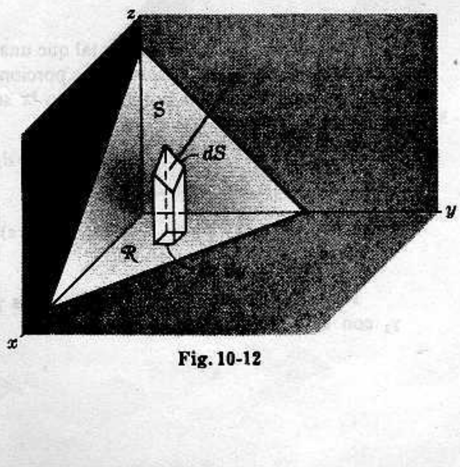


Fig. 10-12

La integral de superficie buscada es, pues,

$$\iint_S \left(\frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}\right) dS = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}\right)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3}\right)\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x} (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{3} (xy^2 - 2x^2y - xy - y^2 + 6y)\Big|_0^{3-x} dx = 27/4$$

21. Al tratar de integrales de superficie solo se han considerado superficies con dos caras. Dar un ejemplo de una superficie que no tiene dos caras.

Tómese una banda de papel tal como la *ABCD* de la Fig. 10-13 adjunta. Tuérzase la banda de modo que los puntos *A* y *B* coincidan con los *D* y *C*, respectivamente, como se ve en la figura inferior. Si **n** es la normal positiva en un punto *P* de la superficie, se ve que al mover **n** sobre la superficie llega otra vez a *P* con sentido opuesto al que tenía antes allí. Si se quisiera colorear una cara de la superficie solamente, se llegaría a tenerla toda coloreada. Esta superficie, llamada *banda de Moebius*, es un ejemplo de superficie unilátera que, por tanto, suele llamarse superficie *no orientable*. En cambio una superficie bilátera es *orientable*.

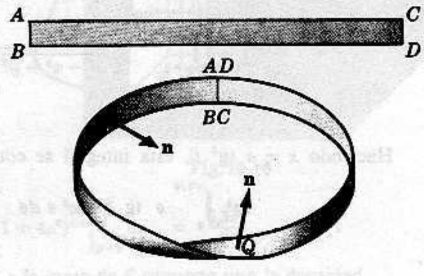


Fig. 10-13

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

22. Demostrar el teorema de la divergencia.

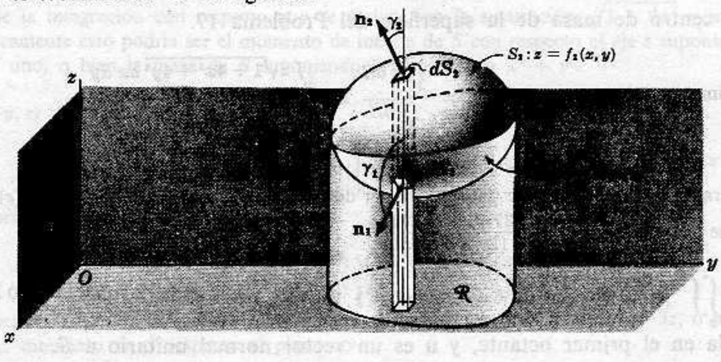


Fig. 10-14

Sea S una superficie cerrada tal que una paralela a un eje de coordenadas corta a S en dos puntos a lo más. Supóngase que las ecuaciones de las porciones inferior y superior S_1 y S_2 son $z = f_1(x, y)$ y $z = f_2(x, y)$ respectivamente. Denótese la proyección de la superficie sobre el plano xy por $\mathcal{R}$. Sea entonces

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dz\, dy\, dx = \iint_{\mathcal{R}} \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dz\right] dy\, dx$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} A_3(x, y, z)\Big|_{z=f_1}^{f_2} dy\, dx = \iint_{\mathcal{R}} [A_3(x, y, f_2) - A_3(x, y, f_1)]\, dy\, dx$$

Para la parte superior S_2, $dy\, dx = \cos\gamma_2\, dS_2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\, dS_2$, pues la normal $\mathbf{n}_2$ a S_2 forma ángulo agudo γ_2 con $\mathbf{k}$.

Para la parte inferior, S_1, $dy\,dx = -\cos\gamma_1\,dS_1 = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$, pues la normal $\mathbf{n}_1$ a S_1 forma ángulo obtuso γ_1 con $\mathbf{k}$.

Entonces,
$$\iint_{\mathcal{R}} A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx \;=\; \iint_{S_2} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2$$
$$\iint_{\mathcal{R}} A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx \;=\; -\iint_{S_1} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$$

y
$$\iint_{\mathcal{R}} A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx - \iint_{\mathcal{R}} A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx \;=\; \iint_{S_2} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2 + \iint_{S_1} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$$
$$= \iint_{S} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

así que
$$(1)\qquad \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV \;=\; \iint_S A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Análogamente, por proyección de S sobre los otros planos de coordenadas,
$$(2)\qquad \iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x}\,dV \;=\; \iint_S A_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS$$
$$(3)\qquad \iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y}\,dV \;=\; \iint_S A_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Sumando (*1*), (*2*) y (*3*),
$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dV \;=\; \iint_S (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

o
$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV \;=\; \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

El teorema se puede generalizar a superficies que sean cortadas en más de dos puntos por paralelas a los ejes coordenados. Para demostrar esta generalización, subdivídase la región encerrada por S en subregiones cuyas superficies cumplan la condición del teorema. El procedimiento es análogo al utilizado para el teorema de Green en el plano.

23. Comprobar el teorema de la divergencia para $\mathbf{A} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$ extendida a la región limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

Primero se calcula $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ siendo S la superficie del cubo de la Figura 10-15.

Cara DEFG: $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $x = 1$. Entonces,
$$\iint_{DEFG} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_0^1\int_0^1 \{(2-z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - z^2\mathbf{k}\}\cdot\mathbf{i}\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (2-z)\,dy\,dz \;=\; 3/2$$

Cara ABCO: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, $x = 0$. Entonces,
$$\iint_{ABCO} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_0^1\int_0^1 (-z\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{i})\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1\int_0^1 z\,dy\,dz \;=\; 1/2$$

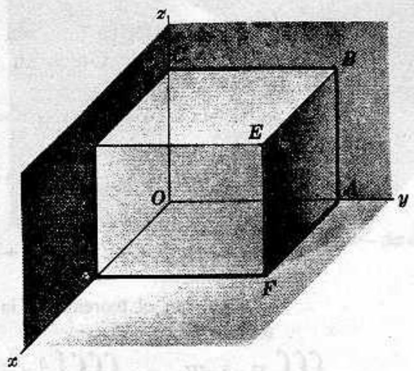


Fig. 10-15

Cara ABEF: $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $y = 1$. Entonces

$$\iint_{ABEF} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_0^1\int_0^1 \{(2x-z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}\}\cdot\mathbf{j}\,dx\,dz \;=\; \int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dz \;=\; 1/3$$

Cara OGDC: $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, $y = 0$. Luego

$$\iint_{OGDC} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_0^1\int_0^1 \{(2x-z)\mathbf{i} - xz^2\mathbf{k}\}\cdot(-\mathbf{j})\,dx\,dz \;=\; 0$$

Cara BCDE: $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $z = 1$. Luego

$$\iint_{BCDE} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_0^1\int_0^1 \{(2x-1)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - x\mathbf{k}\}\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy \;=\; \int_0^1\int_0^1 -\,x\,dx\,dy \;=\; -1/2$$

Cara AFGO: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $z = 0$. Luego

$$\iint_{AFGO} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_0^1\int_0^1 \{2x\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}\}\cdot(-\mathbf{k})\,dx\,dy \;=\; 0$$

Sumando $\displaystyle\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + 0 - \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{11}{6}$. Puesto que

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV \;=\; \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2 + x^2 - 2xz)\,dx\,dy\,dz \;=\; \frac{11}{6}$$

El teorema de divergencia se verifica en este caso.

24. Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS$, siendo S una superficie cerrada.

Por el teorema de divergencia,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\,dV \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)dV \;=\; 3\iiint_V dV \;=\; 3V
\end{aligned}$$

donde V es el volumen rodeado por S.

25. Calcular $\displaystyle\iint_S xz^2\,dy\,dz + (x^2y - z^3)\,dz\,dx + (2xy + y^2z)\,dx\,dy$ donde S es toda la superficie de la región semiesférica limitada por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y $z = 0$ (*a*) por el teorema de la divergencia (teorema de Green en el espacio), (*b*) directamente.

(*a*) Como $dy\,dz = dS\cos\alpha$, $dz\,dx = dS\cos\beta$, $dx\,dy = dS\cos\gamma$, la integral puede ser

$$\iint_S \{xz^2\cos\alpha + (x^2y - z^3)\cos\beta + (2xy + y^2z)\cos\gamma\}\,dS \;=\; \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

donde $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + (x^2y - z^3)\mathbf{j} + (2xy + y^2z)\mathbf{k}$ y $\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$, es el vector normal unitario saliente.

Luego, por el teorema de la divergencia, la integral es

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV \;=\; \iiint_V \left\{\frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2xy + y^2z)\right\}dV \;=\; \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

donde V es la región limitada por la semiesfera y el plano xy.

En coordenadas esféricas, como en el Problema 15, Capítulo 9, esta integral es igual a

$$4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi \;=\; \frac{2\pi a^5}{5}$$

(*b*) Si S_1 es la superficie convexa de la región semiesférica y S_2 es la base ($z = 0$), entonces

$$\iint_{S_1} xz^2\,dy\,dz \;=\; \int_{y=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}\,dz\,dy \;-\; \int_{y=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} -\,z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}\,dz\,dy$$

$$\iint_{S_1}(x^2y - z^3)\,dz\,dx \;=\; \int_{x=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\{x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2} - z^3\}\,dz\,dx$$

$$-\int_{x=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\{-x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2} - z^3\}\,dz\,dx$$

$$\iint_{S_1}(2xy + y^2z)\,dx\,dy \;=\; \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\{2xy + y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}\,dy\,dx$$

$$\iint_{S_2} xz^2\,dy\,dz \;=\; 0, \qquad \iint_{S_2}(x^2y - z^3)\,dz\,dx \;=\; 0,$$

$$\iint_{S_2}(2xy + y^2z)\,dx\,dy \;=\; \iint_{S_2}\{2xy + y^2(0)\}\,dx\,dy \;=\; \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2xy\,dy\,dx \;=\; 0$$

Que por suma da

$$4\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}\,dz\,dy + 4\int_{x=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,dz\,dx$$

$$+\;4\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

Como por simetría todas estas integrales son iguales, el resultado, utilizando coordenadas polares, es

$$12\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx \;=\; 12\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\,\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\phi \;=\; \frac{2\pi a^5}{5}$$

TEOREMA DE STOKES

26. Demostrar el teorema de Stokes.

Sea S una superficie tal que su proyección sobre los planos xy, yz y xz son regiones limitadas por curvas simples cerradas, como se indica en la Fig. 10-16. Supóngase que S sea $z = f(x, y)$ o $x = g(y, z)$ o $y = h(x, z)$, siendo f, g, h uniformes, continuas y diferenciables. Hay que demostrar que

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

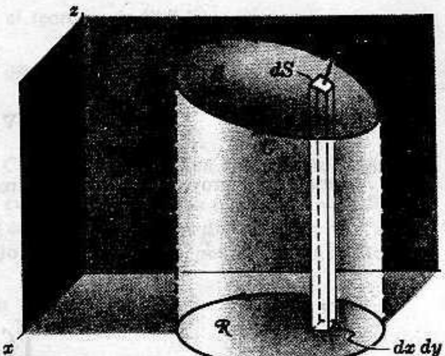


Fig. 10-16

donde C es el contorno de S.

Considerar primero $\displaystyle\iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS$.

Como $\quad \nabla \times (A_1\mathbf{i}) \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \;=\; \dfrac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k},$

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS$$

Si $z = f(x, y)$ es la ecuación de S, el vector local de un punto de S es $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$ así que $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}$. Pero $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ es un vector tangente a S y, por tanto, perpendicular al $\mathbf{n}$ de modo que

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \;=\; \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \;=\; 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} \;=\; -\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$$

Sustituyendo en (*1*)

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS \;=\; \left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS$$

o

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS \qquad (2)$$

Ahora sobre S, $A_1(x,y,z) = A_1[x,y,f(x,y)] = F(x,y)$; luego $\dfrac{\partial A_1}{\partial y} + \dfrac{\partial A_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ y (*2*) se convierte

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; -\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS \;=\; -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

Entonces,

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \iint_{\mathcal{R}} -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

siendo $\mathcal{R}$ la proyección sobre el plano xy. Por el teorema de Green en el plano la última integral es igual a $\oint_\Gamma F\,dx$ donde Γ es el contorno de $\mathcal{R}$. Como en cada punto (x, y) de Γ el valor de F es el mismo que el de A_1 en cada punto (x, y, z) de C y como dx es el mismo para ambas curvas, tiene que ser

$$\oint_\Gamma F\,dx \;=\; \oint_C A_1\,dx$$

o

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \oint_C A_1\,dx$$

Asimismo, por proyección sobre los otros planos de coordenadas,

$$\iint_S [\nabla \times (A_2\mathbf{j})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \oint_C A_2\,dy, \qquad \iint_S [\nabla \times (A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \oint_C A_3\,dz$$

Y por adición

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

El teorema es válido también para superficies S que pueden no cumplir las restricciones impuestas antes. Pues suponiendo que S se pueda subdividir en superficies $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de contornos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ que cumplen las restricciones, el teorema de Stokes se aplica a cada una de tales superficies. Sumando las integrales de superficie, se obtiene la integral de superficie total sobre S. Sumando las correspondientes integrales curvilíneas en torno a $C_1, C_2, \ldots, C_k$, la integral que resulta es la integral curvilínea en torno a C.

27. Comprobar el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$, siendo S la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 2$ y C su contorno.

El contorno C de S es un circulo de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ y de ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 2$, con $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Luego

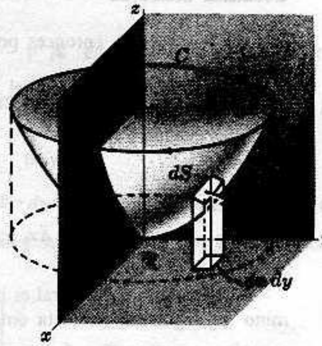


Fig. 10-17

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C 3y\,dx - xz\,dy + yz^2\,dz$$

$$= \int_{2\pi}^{0} 3(2\operatorname{sen} t)(-2\operatorname{sen} t)\,dt - (2\cos t)(2)(2\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (12\operatorname{sen}^2 t + 8\cos^2 t)\,dt = 20\pi$$

También,
$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2+x)\mathbf{i} - (z+3)\mathbf{k}$$

y
$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(x^2+y^2-2z)}{|\nabla(x^2+y^2-2z)|} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Entonces
$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\mathcal{R}} (\nabla\times A)\cdot\mathbf{n}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = \iint_{\mathcal{R}} (xz^2+x^2+z+3)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \left\{ x\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{x^2+y^2}{2} + 3 \right\} dx\,dy$$

o bien en coordenadas polares.

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2} \{(\rho\cos\phi)(\rho^4/2) + \rho^2\cos^2\phi + \rho^2/2 + 3\}\,\rho\,d\rho\,d\phi = 20\pi$$

28. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ en toda curva cerrada C es que se tenga idénticamente $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Condición suficiente. Supóngase $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Entonces, por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

Condición necesaria.

Supóngase $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ en torno a todo camino cerrado C y que $\nabla\times\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ en algún punto P. Suponiendo entonces que $\nabla\times\mathbf{A}$ es continuo, habrá una región a la cual sea P interior, en que $\nabla\times\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Sea S una superficie contenida en esta región y cuya normal $\mathbf{n}$ tiene en cada punto la misma dirección que $\nabla\times\mathbf{A}$, es decir, $\nabla\times\mathbf{A} = \alpha\mathbf{n}$, siendo α una constante positiva. Sea C el contorno de S. Entonces, por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \alpha\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,dS > 0$$

lo que contradice la hipótesis de que $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ y demuestra que $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Se sigue, pues, que $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$ es también una condición necesaria y suficiente para que una integral curvilínea $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ sea independiente del camino que une los puntos P_1 y P_2.

29. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ es tal que $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

Condición suficiente. Si $\mathbf{A} = \nabla\phi$, entonces $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$ por el Problema 80, Capítulo 7, página 158.

Condición necesaria.

Si $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, entonces por el Problema 28, $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en torno a cualquier camino cerrado y así $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino que una dos puntos (a, b, c) y (x, y, z). Defínase

$$\phi(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

Entonces

$$\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

Como la última integral es independiente del camino de (x, y, z) a $(x + \Delta x, y, z)$ se puede tomar como camino un segmento de recta entre estos puntos de modo que dy y dz sean nulos. Luego

$$\frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_1\,dx = A_1(x + \theta\Delta x, y, z) \qquad 0 < \theta < 1$$

aplicando el teorema del valor medio integral.

Tomando límites de ambos miembros para $\Delta x \to 0$, se tiene $\partial\phi/\partial x = A_1$.

Análogamente se puede demostrar que $\partial\phi/\partial y = A_2$, $\partial\phi/\partial z = A_3$.

Luego $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$.

30. (*a*) Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = d\phi$, sea diferencial exacta, es que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$.
(*b*) Demostrar que en tal caso

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

Condición necesaria. Si $A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}dz$, entonces,

$$(1)\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = A_1 \qquad (2)\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = A_2 \qquad (3)\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = A_3$$

Derivando entonces se tiene, si las derivadas parciales son continuas,

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y}, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x}$$

que es justamente la condición $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Otro método: Si $A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = d\phi$,

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$$

de donde $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$.

Condición suficiente. Si $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, por el Problema 29, $\mathbf{A} = \nabla\phi$ y

$$A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$$

(*b*) De la parte (*a*), $\phi(x, y, z) = \displaystyle\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$.

Y sin escribir el integrando $A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$ se tiene

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \;=\; \int_{(a,b,c)}^{(x_2,y_2,z_2)} - \int_{(a,b,c)}^{(x_1,y_1,z_1)} \;=\; \phi(x_2,y_2,z_2) - \phi(x_1,y_1,z_1)$$

31. (*a*) Demostrar que $\mathbf{F} = (2xz^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x - 2yz)\mathbf{j} + (3x^2z^2 - y^2)\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas conservativo. (*b*) Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ siendo C cualquier camino de $(1, -1, 1)$ a $(2, 1, -1)$. (*c*) Dar una interpretación física de los resultados.

(*a*) Un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es conservativo si la integral curvilínea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino C que une dos puntos cualesquiera del mismo. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{F}$ sea conservativo es que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Como aquí $\quad \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3+6y & 6x-2yz & 3x^2z^2-y^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}$ es conservativo

(*b*) **Método 1:**

Según el Problema 30, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (2xz^3 + 6y)\,dx + (6x - 2yz)\,dy + (3x^2z^2 - y^2)\,dz$ es una diferencial exacta $d\phi$, siendo ϕ tal que

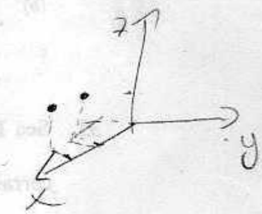
$$(1)\;\; \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xz^3 + 6y \qquad (2)\;\; \frac{\partial\phi}{\partial y} = 6x - 2yz \qquad (3)\;\; \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2$$

De donde se obtiene, respectivamente,

$$\phi = x^2z^3 + 6xy + f_1(y,z) \qquad \phi = 6xy - y^2z + f_2(x,z) \qquad \phi = x^2z^3 - y^2z + f_3(x,y)$$

que son compatibles si $f_1(y,z) = -y^2z + c$, $f_2(x,z) = x^2z^3 + c$, $f_3(x,y) = 6xy + c$, en cuyo caso $\phi = x^2z^3 + 6xy - y^2z + c$. Así que, por el Problema 30,

$$\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = x^2z^3 + 6xy - y^2z + c\Big|_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} = 15$$



O también se puede observar que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= (2xz^3\,dx + 3x^2z^2\,dz) + (6y\,dx + 6x\,dy) - (2yz\,dy + y^2\,dz) \\ &= d(x^2z^3) + d(6xy) - d(y^2z) = d(x^2z^3 + 6xy - y^2z + c) \end{aligned}$$

de donde resulta ϕ. $z = 1 \quad dz = 0$

Método 2:

Como la integral es independiente del camino, se puede elegir cualquier camino para calcularla; tomando el formado por los segmentos de $(1, -1, 1)$ a $(2, -1, 1)$, de éste al $(2, 1, 1)$ y luego de éste al $(2, 1, -1)$, resulta

$$\int_{x=1}^{2} (2x - 6)\,dx + \int_{y=-1}^{1} (12 - 2y)\,dy + \int_{z=1}^{-1} (12z^2 - 1)\,dz = 15$$

donde la primera integral se obtiene de la curvilínea haciendo $y = -1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$; la segunda haciendo $x = 2$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$, y la tercera integral tomando $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0$ y $dy = 0$.

(*c*) Físicamente $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ representa el trabajo hecho al mover un objeto de $(1, -1, 1)$ a $(2, 1, -1)$ a lo largo de C. En un campo de fuerzas conservativo el trabajo hecho es independiente del camino C que une estos puntos.

PROBLEMAS VARIOS

32. (*a*) Si $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, define una transformación que aplica una región $\mathcal{R}$ del plano xy en una región $\mathcal{R}'$ del plano uv, demostrar que

$$\iint_{\mathcal{R}} dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

(*b*) Interpretar geométricamente el resultado anterior.

(*a*) Si C (que se supone curva simple cerrada) es el contorno de $\mathcal{R}$, entonces, según el Problema 8,

$$\iint_{\mathcal{R}} dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \tag{1}$$

Por la transformación dada la integral del segundo miembro de (*1*) se convierte en

$$\frac{1}{2}\oint_{C'} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) - y\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) = \frac{1}{2}\int_{C'}\left(x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u}\right)du + \left(x\frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv \tag{2}$$

siendo C' la aplicación de C en el plano uv (supuesta de tal modo que C' sea también una curva simple cerrada).

Por el teorema de Green, si $\mathcal{R}'$ es la región del plano uv de contorno C', el segundo miembro de (*2*) es igual a

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{R}'}\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(x\frac{\partial y}{\partial v} - y\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(x\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right| du\,dv = \iint_{\mathcal{R}'}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{\mathcal{R}'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

donde se han puesto signos de valor absoluto para asegurar que el resultado es no negativo como lo es $\iint_{\mathcal{R}} dx\,dy$.

En general, se puede demostrar (véase Problema 83) que

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}'} F\{f(u,v), g(u,v)\}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \tag{3}$$

(*b*) $\iint_{\mathcal{R}} dx\,dy$ y $\iint_{\mathcal{R}'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$ representa el área de la región $\mathcal{R}$, la primera expresada en coordenadas cartesianas, la segunda en coordenadas curvilíneas.

33. Sea $\mathbf{F} = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$. (*a*) Calcular $\nabla\times\mathbf{F}$. (*b*) Calcular $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ en torno a un camino cerrado cualquiera y explicar los resultados

(*a*) $$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$ en cualquier región que excluya (0, 0).

(*b*) $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$. Sea $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi$, siendo (ρ,ϕ) coordenadas polares.

Luego

$$dx = -\rho\,\text{sen}\,\phi\,d\phi + d\rho\cos\phi, \qquad dy = \rho\cos\phi\,d\phi + d\rho\,\text{sen}\,\phi$$

y así $$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = d\phi = d\left(\text{arc tg}\,\frac{y}{x}\right)$$

Para una curva cerrada $ABCDA$ [véase Fig. 10-18(*a*)] que rodee el origen, $\phi = 0$ en A y $\phi = 2\pi$ después de una vuelta completa volviendo a A. En este caso la integral curvilínea es igual a $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$.

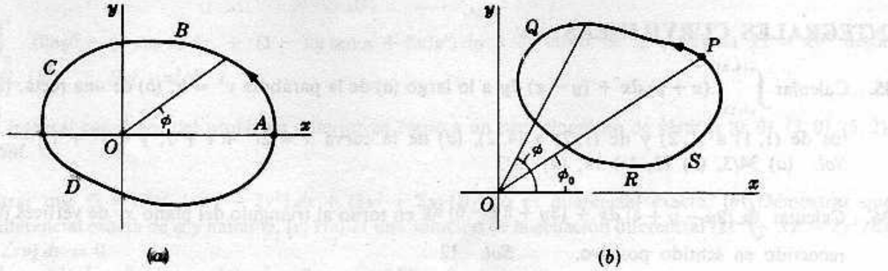


Fig. 10-18

Para una curva cerrada $PQRSP$ [véase Fig. 10-18(*b*)] que no rodee el origen, $\phi = \phi_0$ en P y $\phi = \phi_0$ tras una vuelta completa volviendo a P. En este caso la integral curvilínea es igual a $\int_{\phi_0}^{\phi_0} d\phi = 0$.

Como $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ es equivalente a $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ y los resultados parecerían estar en contradicción con los del Problema 11. Pero no hay contradicción puesto que $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ y $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ no tienen derivadas continuas en toda una región que contenga a (0, 0), lo que sí se había supuesto en el Problema 11.

34. Si div **A** denota la divergencia de un campo vectorial **A** en un punto P, mostrar que

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

siendo ΔV el volumen encerrado por la superficie ΔS y donde el límite se obtiene reduciendo ΔV al punto P.

Por el teorema de la divergencia, $\displaystyle\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$

Por el teorema del valor medio integral, el primer miembro se puede escribir

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} \iiint_{\Delta V} dV = \overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}\ \Delta V$$

siendo $\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$ un valor intermedio entre el máximo y el mínimo de div **A** en ΔV. Entonces,

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} = \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

Tomando el límite para $\Delta V \to 0$ de modo que P esté siempre dentro de ΔV, $\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$ tiende a div **A** en P; luego

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

resultado que se podría tomar como punto de partida para definir la divergencia de **A** y deducir del mismo todas las propiedades incluso el teorema de la divergencia. También se puede utilizar esto para generalizar el concepto de divergencia a sistemas de coordenadas distintos de las cartesianas (véase página 142).

Físicamente $\left(\displaystyle\iiint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS\right)/\Delta V$ representa el flujo del vector **A** que surge por unidad de volumen a través de una superficie ΔS. Si div **A** es positiva en el entorno de un punto P ello significa que el flujo saliente de P es positivo y así este punto se llamará *surgente* o *manantial*. Si div **A** es negativa en el entorno de P el flujo es en realidad entrante y P se dirá un punto *sumente* o *sumidero*. Si en una región no hay ni manantiales ni sumideros, div $\mathbf{A} = 0$ y se dice que **A** es un campo vectorial *solenoidal*.

Problemas propuestos

INTEGRALES CURVILINEAS

35. Calcular $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y)\,dx + (y - x)\,dy$ a lo largo (*a*) de la parábola $y^2 = x$, (*b*) de una recta, (*c*) de los segmentos de (1, 1) a (1, 2) y de (1, 2) a (4, 2), (*d*) de la curva $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.
Sol. (*a*) 34/3, (*b*) 11, (*c*) 14, (*d*) 32/3

36. Calcular $\oint (2x - y + 4)\,dx + (5y + 3x - 6)\,dy$ en torno al triángulo del plano xy de vértices (0, 0), (3, 0), (3, 2) recorrido en sentido positivo. *Sol.* 12

37. Calcular la integral curvilínea del problema anterior en torno a un círculo de radio 4 de centro (0, 0).
Sol. 64π

38. (*a*) Si $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C del plano xy dada por $y = x^2 - x$ desde el punto (1, 0) al (2, 2). (*b*) Interpretación física del resultado obtenido. *Sol.* (*a*) 124/15

39. Calcular $\int_C (2x + y)\,ds$, siendo C la curva del plano xy dada por $x^2 + y^2 = 25$ y s el arco como parámetro del punto (3, 4) al (4, 3) por el camino más corto. *Sol.* 15

40. Si $\mathbf{F} = (3x - 2y)\mathbf{i} + (y + 2z)\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de (0, 0, 0) a (1, 1, 1), donde C es un camino que consiste en (*a*) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, (*b*) el segmento de recta entre estos puntos, (*c*) los segmentos de recta de (0, 0, 0) a (0, 1, 0), de (0, 1, 0) a (0, 1, 1) y de (0, 1, 1) a (1, 1, 1), (*d*) la curva $x = z^2$, $z = y^2$.
Sol. (*a*) 23/15, (*b*) 5/3, (*c*) 0, (*d*) 13/30

41. Si $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario a una curva C (plana o alabeada) y $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas dado, demostrar que en condiciones apropiadas $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ siendo s el arco como parámetro. Interpretar física y geométricamente este resultado.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO. INDEPENDENCIA DEL CAMINO

42. Comprobar el teorema de Green en el plano para $\oint_C (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$ siendo C un cuadrado de vértices (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2). *Sol.* Valor común = 8

43. Calcular las integrales curvilíneas (*a*) del Problema 36 y (*b*) del Problema 37, por el teorema de Green.

44. (*a*) Sea C una curva simple cerrada que limita una región de área A. Demostrar que si $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ son constantes,

$$\oint_C (a_1 x + a_2 y + a_3)\,dx + (b_1 x + b_2 y + b_3)\,dy = (b_1 - a_2)A$$

(*b*) ¿En qué condiciones será nula la integral curvilínea en torno a cualquier camino C? *Sol.* (*b*) $a_2 = b_1$

45. Hallar el área encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
[Sugerencia: Las ecuaciones paramétricas son $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.] *Sol.* $3\pi a^2/8$

46. Si $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$, demostrar que $\frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int \rho^2\,d\phi$ e interpretar.

47. Comprobar el teorema de Green en el plano para $\oint_C (x^3 - x^2 y)\,dx + xy^2\,dy$, siendo C el contorno de la región común a los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 16$. *Sol.* Valor común = 120π

48. (*a*) Demostrar que $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\,dx + (x^2 - 4xy^3)\,dy$ es independiente del camino de (1, 0) a (2, 1).
(*b*) Calcular esta integral. *Sol.* (*b*) 5

49. Calcular $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)\,dx + (1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2y^2)\,dy$ a lo largo de la parábola $2x = \pi y^2$ desde $(0, 0)$ a $(\pi/2, 1)$. *Sol.* $\pi^2/4$

50. Calcular la integral curvilínea del problema anterior en torno a un paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(5, 2)$, $(2, 2)$. *Sol.* 0

51. (*a*) Demostrar que $G = (2x^2 + xy - 2y^2)\,dx + (3x^2 + 2xy)\,dy$ no es diferencial exacta. (*b*) Demostrar que $e^{y/x}G/x$ es diferencial exacta de ϕ y hallar ϕ. (*c*) Hallar una solución de la ecuación diferencial $(2x^2 + xy - 2y^2)\,dx + (3x^2 + 2xy)\,dy = 0$.
Sol. (*b*) $\phi = e^{y/x}(x^2 + 2xy) + c$, (*c*) $x^2 + 2xy + ce^{-y/x} = 0$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

52. (*a*) Calcular $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, siendo S la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ entre $z = 0$ y $z = 3$. (*b*) Interpretación física de este resultado. *Sol.* (*a*) 9π

53. Determinar el área del plano $2x + y + 2z = 16$ limitada por (*a*) $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$, (*b*) $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 64$. *Sol.* (*a*) 9, (*b*) 24π

54. Hallar el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que queda fuera del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Sol. $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$

55. Hallar el área de la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.
Sol. 6π

56. Hallar el área de la superficie común a los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$. *Sol.* $16a^2$

57. (*a*) Hallar el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dentro del cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \alpha < \pi/2$. (*b*) Utilizar este resultado para averiguar el área de una superficie semiesférica. (*c*) Explicar por qué haciendo $\alpha = \pi$ en el resultado de (*a*) se tiene la superficie total de la esfera.
Sol. (*a*) $2\pi a^2(1 - \cos \alpha)$, (*b*) $2\pi a^2$ (considérese el límite para $\alpha \to \pi/2$)

58. Determinar el momento de inercia de la superficie de una esfera de radio a con respecto a un punto de la superficie. Supóngase constante la densidad σ. *Sol.* $2Ma^2$ con masa $M = 4\pi a^2\sigma$

59. (*a*) Hallar el centro de masa de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ contenida en el cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \alpha < \pi/2$. (*b*) A partir de este resultado obtener el centro de masa de la superficie de un hemisferio.
Sol. (*a*) $\frac{1}{2}a(1 + \cos \alpha)$, (*b*) $a/2$

EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

60. Verificar el teorema de la divergencia para $\mathbf{A} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ en la región limitada por $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. *Sol.* Valor común = 27

61. Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ y S es la superficie de la región limitada por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ y el plano xy. *Sol.* 16

62. Calcular $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{A} = (2x + 3z)\mathbf{i} - (xz + y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$ y S es la superficie de la esfera de centro $(3, -1, 2)$ y radio 3. *Sol.* 108π

63. Averiguar el valor de $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, donde S es la superficie de la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$, (*a*) utilizando el teorema de la divergencia, (*b*) directamente.
Sol. 81π

64. Calcular $\iint_S 4xz\,dy\,dz - y^2\,dz\,dx + yz\,dx\,dy$, siendo S la superficie del cubo formado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, (*a*) directamente, (*b*) por el teorema de Green en el espacio (teorema de la divergencia). *Sol.* 3/2

65. Demostrar que $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ para cualquier superficie cerrada S.

66. Demostrar que $\iint_S \mathbf{n}\, dS = 0$, siendo $\mathbf{n}$ la normal exterior a una superficie cerrada cualquiera S.

67. Si $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior a una superficie cerrada cualquiera S que limita la región V, demostrar que

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{n}\, dV = S$$

TEOREMA DE STOKES

68. Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, siendo S la parte superior de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y C su contorno. *Sol.* Valor común $= 9\pi$

69. Comprobar el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, siendo S la superficie de la región del primer octante limitada por $2x + z = 6$ y $y = 2$ que no queda (*a*) en el plano xy, (*b*) en el plano $y = 2$, (*c*) en el plano $2x + z = 6$ y C el contorno correspondiente.
Sol. El valor común es (*a*) -6, (*b*) -9, (*c*) -18

70. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, siendo $\mathbf{A} = (x - z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ encima del plano xy. *Sol.* 12π

71. Si V es una región limitada por una superficie cerrada S y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, demostrar que $\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.

72. (*a*) Demostrar que $\mathbf{F} = (2xy + 3)\mathbf{i} + (x^2 - 4z)\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas conservativo. (*b*) Hallar ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. (*c*) Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo C cualquier camino de $(3, -1, 2)$ a $(2, 1, -1)$.
Sol. (*b*) $\phi = x^2y - 4yz + 3x$ + constante, (*c*) 6

73. Sea C cualquier camino que une un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Mostrar que si $\mathbf{F} = 5r^3\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = b^5 - a^5$.

74. En el Problema 73 calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ si $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, donde $f(r)$ se supone continua.
Sol. $\int_a^b r\, f(r)\, dr$

75. Averiguar si existe una función ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$ con:
(*a*) $\mathbf{F} = (xz - y)\mathbf{i} + (x^2y + z^3)\mathbf{j} + (3xz^2 - xy)\mathbf{k}$.
(*b*) $\mathbf{F} = 2xe^{-y}\mathbf{i} + (\cos z - x^2e^{-y})\mathbf{j} - y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$. Si es así, hállese.
Sol. (*a*) ϕ no existe. (*b*) $\phi = x^2e^{-y} + y \cos z$ + constante

76. Resolver la ecuación diferencial $(z^3 - 4xy)\,dx + (6y - 2x^2)\,dy + (3xz^2 + 1)\,dz = 0$.
Sol. $xz^3 - 2x^2y + 3y^2 + z$ = constante

PROBLEMAS VARIOS

77. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\oint_C \frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dx$ sea nula en torno a todo camino simple cerrado C en una región $\mathcal{R}$ (siendo U continua y también sus derivadas parciales de orden dos al menos es que $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$.

78. Comprobar el teorema de Green para una región múltiplemente conexa con dos «huecos» (Problema 10).

79. Si $P\,dx + Q\,dy$ no es diferencial exacta, pero $\mu(P\,dx + Q\,dy)$ es diferencial exacta, siendo μ cierta función de x y y, se dice que μ es un *factor integrante*. (*a*) Demostrar que si F y G son funciones de x solamente, entonces $(Fy + G)\,dx + dy$ tiene un factor integrante μ, que es una función de x solamente, y hallar μ. ¿Qué debe suponerse para F y G? (*b*) Mediante (*a*) hallar soluciones de la ecuación diferencial $xy' = 2x + 3y$.
Sol. (*a*) $\mu = e^{\int F(x)\,dx}$ (*b*) $y = cx^3 - x$, donde c es una constante cualquiera

80. Hallar el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$.
Sol. $2\pi a$

81. Si $f(r)$ es una función continuamente diferenciable de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demostrar que

$$\iint_S f(r)\,\mathbf{n}\,dS \;=\; \iiint_V \frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{r}\,dV$$

82. Demostrar que $\displaystyle\iint_S \nabla \times (\phi\mathbf{n})\,dS \;=\; \mathbf{0}$ donde ϕ es una función escalar de punto cualquiera continuamente diferenciable, y $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario exterior a una superficie cerrada S.

83. Demostrar la ecuación (*3*), Problema 32, utilizando el teorema de Green en el plano.
[Sugerencia: Sea la región cerrada $\mathcal{R}$ del plano xy de contorno C y supóngase que por la transformación $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ se transforman en $\mathcal{R}'$ y C' del plano uv respectivamente. Demostrar primero que $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_C Q(x,y)\,dy$ siendo $\partial Q/\partial y = F(x,y)$. Luego demostrar que, salvo el signo, esta última integral es igual a $\displaystyle\int_{C'} Q\Big[f(u,v),\ g(u,v)\Big]\Big[\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\Big]$. Por último, aplicar el teorema de Green para transformar ésta en $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}'} F[f(u,v),\ g(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$

84. Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ define una transformación que aplica una región $\mathcal{R}$ del espacio xyz en una región $\mathcal{R}'$ del espacio uvw, demostrar con el teorema de Stokes que

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_{\mathcal{R}'} G(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

donde $G(u, v, w) \equiv F[f(u, v, w),\ g(u, v, w),\ h(u, v, w)]$. Establecer condiciones suficientes para la validez de este resultado. Véase Problema 83.

85. (*a*) Demostrar que, en general, la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ representa geométricamente una superficie. (*b*) Estudiar la significación geométrica de $u = c_1$, $v = c_2$, siendo c_1 y c_2 constantes. (*c*) Demostrar que el elemento de arco sobre esta superficie es

$$ds^2 \;=\; E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

donde $E = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$, $F = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$, $G = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$.

86. (*a*) Refiriéndose al Problema 85, demostrar que el elemento de superficie está dado por $dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.
(*b*) Deducir de (*a*) que el área de una superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ es $\displaystyle\iint_S \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.

[Sugerencia: Aplicar $\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| \;=\; \sqrt{\left(\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)}$ y luego la identidad

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) \;=\; (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

87. (*a*) Demostrar que $\mathbf{r} = a\,\text{sen}\,u\cos v\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + a\cos u$, $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$ representa una esfera de radio a. (*b*) Mediante el Problema 86, mostrar que el área de la superficie de esta esfera es $4\pi a^2$.

88. Con el resultado del Problema 34 obtener div $\mathbf{A}$ en (*a*) coordenadas cilíndricas y (*b*) coordenadas esféricas. Véase página 142.

Capítulo 11

Series

CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES

Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{1}$$

y considérese la sucesión de *sumas parciales* de la serie $S_1, S_2, S_3, \ldots$ con

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{2}$$

Si esta sucesión es convergente, esto es, si existe un número S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, la serie (*1*) se dice *convergente* y S se llama *suma* de dicha serie. Si no existe $\lim_{n\to\infty} S_n$, la serie es *divergente*. (Comparar con el Capítulo 3, página 43). Suele abreviarse la serie (*1*) escribiendo Σu_n y el símbolo u_n es el término n-ésimo de la serie.

Ejemplo 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$. Aquí S_n = suma de los primeros n términos $= 1 - \frac{1}{2^n}$ (Problema 25, Capítulo 3). Entonces, como $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, la serie es convergente y tiene suma $S = 1$.

Ejemplo 2: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Aquí $S_n = 0$ ó 1, según que n sea par o impar. Luego $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe y la serie es divergente.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS SERIES

1. Si Σu_n converge, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (véase Prob. 26, Cap. 3). Pero la recíproca no es necesariamente cierta, o sea, que si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, Σu_n puede ser o no convergente. Se deduce que si el término n-ésimo de una serie *no* tiende a cero, la serie es divergente.
2. La multiplicación de cada término de una serie por una constante distinta de cero no afecta la convergencia o divergencia.
3. La supresión (o adición) de un número *finito* de términos en una serie no afecta su convergencia o divergencia.

SERIES ESPECIALES

1. **Serie geométrica.** $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$, siendo a y r constantes, converge hacia $S = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqq 1$. La suma de los n primeros términos es $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ (Problema 25, Capítulo 3).

2. La serie p. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$ siendo p una constante, converge para $p > 1$ y diverge para $p \leqq 1$. La serie con $p = 1$ es la llamada *serie armónica*.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES DE CONSTANTES

1. Criterio de comparación para series de términos no negativos.

(*a*) *Convergencia.* Sea $v_n \geqq 0$ para todo $n > N$ y supóngase que Σv_n converge. Entonces, si $0 \leqq u_n \leqq v_n$ para todo $n > N$, Σu_n también converge. Nótese que $n > N$ significa *de un cierto término en adelante.* A menudo es $N = 1$.

Ejemplo: Como $\frac{1}{2^n+1} \leqq \frac{1}{2^n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ converge $\sum \frac{1}{2^n+1}$ también converge.

(*b*) *Divergencia.* Sea $v_n \geqq 0$ para todo $n > N$ y supóngase que Σv_n es divergente. Entonces, si $u_n \geqq v_n$ para todo $n > N$, Σu_n también es divergente.

Ejemplo: Como $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ también diverge.

2. Criterio del cociente para series de términos no negativos.

(*a*) Si $u_n \geqq 0$ y $v_n \geqq 0$ y si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ o ∞, entonces Σu_n y Σv_n, o ambos convergen o ambos divergen.

(*b*) Si $A = 0$ en (*a*) y Σv_n converge, Σu_n converge.

(*c*) Si $A = \infty$ en (*a*) y Σv_n diverge, Σu_n diverge.

Este criterio se relaciona con el de comparación y es un sustituto muy útil del mismo con frecuencia. En particular, tomando $v_n = 1/n^p$ se tiene, por lo que se sabe de la serie p, que

Teorema 1. *Sea* $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = A$. Entonces,

(*i*) Σu_n converge si $p > 1$ y A es finito

(*ii*) Σu_n diverge si $p \leqq 1$ y $A \neq 0$ (A puede ser infinito).

Ejemplos: 1. $\sum \frac{n}{4n^3-2}$ converge puesto que $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}$.

2. $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ diverge puesto que $\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \cdot \frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = \infty$.

3. Criterio integral para series de términos no negativos.

Si $f(x)$ es positiva, continua y monótona decreciente para $x \geqq N$ y tal que $f(n) = u_n$, $n = N, N+1, N+2, \ldots$, Σu_n es convergente o divergente según que $\int_N^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_N^M f(x)\,dx$ sea convergente o divergente. En particular se puede tener $N = 1$ como suele hacerse.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge puesto que $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$ existe.

4. Criterio para series alternas. *Serie alterna* es aquella cuyos términos son alternativamente positivos y negativos.

Una serie alterna converge si se cumplen las dos condiciones siguientes (véase Problema 15).

$$(a) \quad |u_{n+1}| \leqq |u_n| \quad \text{para } n \geqq 1$$
$$(b) \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad \left(\text{o } \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0\right)$$

Ejemplo: Para la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ se tiene $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $|u_n| = \frac{1}{n}$, $|u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$. Luego para $n \geqq 1$, $|u_{n+1}| \leqq |u_n|$. También $\lim |u_n| = 0$. De donde la serie converge.

Teorema 2.

El error numérico que se comete al omitir en una serie alterna convergente que cumple las condiciones (*a*) y (*b*) los términos que siguen a un dado es menor que el valor absoluto del término siguiente a éste.

Ejemplo: Si se corta la serie en el cuarto término en la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$, el error cometido es menor que $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

5. **Convergencia absoluta y convergencia condicional.** La serie Σu_n se dice *absolutamente convergente* si $\Sigma|u_n|$ es convergente. Si Σu_n converge, pero $\Sigma|u_n|$ diverge, la Σu_n se dice *condicionalmente convergente*.

Teorema 3.

Si $\Sigma|u_n|$ converge, Σu_n converge. Es decir, que una serie absolutamente convergente es convergente (véase Problema 17).

Ejemplo 1: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \cdots$ es absolutamente convergente y, por tanto, es convergente, ya que la serie de valores absolutos $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ converge.

Ejemplo 2: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge, pero $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ diverge. Así, pues, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ es condicionalmente convergente.

Cualquiera de los criterios utilizados para series de términos no negativos se puede utilizar para estudiar la convergencia absoluta.

6. **Criterio del cociente.** Sea $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$. Entonces la serie Σu_n

(*a*) converge (absolutamente) si $L < 1$

(*b*) diverge si $L > 1$.

Si $L = 1$ el criterio falla.

7. **Criterio de la raíz *n*-ésima.** Sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$. Entonces la serie Σu_n

(*a*) converge (absolutamente) si $L < 1$

(*b*) diverge si $L > 1$.

Si $L = 1$ el criterio falla.

8. **Criterio de Raabe.** Sea $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = L$. Entonces la serie Σu_n

(*a*) converge (absolutamente) si $L > 1$

(*b*) diverge o converge condicionalmente si $L < 1$.

Si $L = 1$ el criterio falla.

Este criterio se suele utilizar cuando falla el criterio del cociente.

9. Criterio de Gauss. Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^2}$, con $|c_n| < P$ para todo $n > N$, entonces la serie Σu_n

(*a*) converge (absolutamente) si $L > 1$

(*b*) diverge o converge condicionalmente si $L \leqq 1$.

Este criterio se suele usar cuando falla el de Raabe.

TEOREMAS SOBRE SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Teorema 4.

Los términos de una serie absolutamente convergente se pueden reagrupar en cualquier orden, y todas las series así resultantes son convergentes hacia la misma suma. Pero si los términos de una serie condicionalmente convergente se reagrupan en forma conveniente, la serie que resulta puede ser divergente o convergente hacia *cualquier* suma que se desee (véase Problema 76).

Teorema 5.

La suma, diferencia y producto de dos series absolutamente convergentes es absolutamente convergente. Las operaciones se pueden realizar tal como para sumas finitas.

SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES CONVERGENCIA UNIFORME

Sea $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ una sucesión de funciones definidas en $[a, b]$. La sucesión se dice converger hacia $F(x)$ o que tiene el límite $F(x)$ en $[a, b]$, si para todo $\epsilon > 0$ y cada x de $[a, b]$ se puede encontrar un $N > 0$ tal que $|u_n(x) - F(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$. En tal caso se escribe $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = F(x)$. El número N puede o no depender de x al tiempo que de ϵ. Si depende solamente de ϵ y no de x, la sucesión se dice *uniformemente convergente* hacia $F(x)$ en $[a, b]$ o uniformemente convergente en $[a, b]$.

La serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad = \quad u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \tag{3}$$

se dice convergente en $[a, b]$ si la sucesión de sumas parciales $\{S_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, con $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$, es convergente en $[a, b]$. Se escribe entonces $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ y se dice que $S(x)$ es la *suma* de la serie.

Se sigue que $\Sigma u_n(x)$ converge hacia $S(x)$ en $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$ y cada x de $[a, b]$ se puede hallar un $N > 0$ tal que $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$. Si N depende *solamente* de ϵ y no de x, la serie se llama *uniformemente convergente* en $[a, b]$.

Como $S(x) - S_n(x) = R_n(x)$ es el resto después de n términos, se puede decir también que $\Sigma u_n(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$ se puede hallar un N que depende de ϵ, pero no de x tal que $|R_n(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$ y todo x de $[a, b]$.

Pueden modificarse estas definiciones para incluir otros intervalos distintos del $a \leqq x \leqq b$ tales como $a < x < b$, etc.

El dominio de convergencia (absoluta o uniforme) de una serie es el conjunto de valores de x para los cuales la serie de funciones converge (absoluta o uniformemente).

CRITERIOS ESPECIALES PARA CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES

1. **Criterio M de Weierstrass.** Si existe una sucesión de constantes positivas $M_1, M_2, M_3, \ldots$ tales que en un cierto intervalo

$$(a) \quad |u_n(x)| \leqq M_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$(b) \quad \Sigma M_n \text{ converge}$$

entonces $\Sigma u_n(x)$ es uniforme y absolutamente convergente en el intervalo.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ es uniforme y absolutamente convergente en $[0, 2\pi]$ puesto que $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Este criterio da una condición suficiente pero no necesaria de convergencia uniforme, es decir, que una serie puede ser uniformemente convergente aunque no sea aplicable el criterio.

Se podría creer, en vista de este criterio, que una serie uniformemente convergente debe ser absolutamente convergente y recíprocamente. Pero las dos propiedades son independientes, o sea, que una serie puede ser convergente uniformemente sin serlo absoluta y recíprocamente. Véanse Problemas 30, 123.

2. **Criterio de Dirichlet.** Supóngase que
   (*a*) la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente, siendo sus términos constantes positivas que tienen cero por límite,
   (*b*) existe una constante P tal que para $a \leqq x \leqq b$

$$|u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)| < P \text{ para todo } n > N.$$

Entonces la serie

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

es uniformemente convergente en $a \leqq x \leqq b$.

TEOREMAS SOBRE SERIES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Si una serie de funciones es uniformemente convergente tiene muchas de las propiedades de las sumas finitas de funciones, como se indica en los teoremas que siguen.

Teorema 6.

Si $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son continuas en $[a, b]$ y si $\Sigma u_n(x)$ converge uniformemente hacia la suma $S(x)$ en $[a, b]$, entonces $S(x)$ es continua en $[a, b]$.

Es decir, que una serie uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua, resultado que suele utilizarse para demostrar que una serie dada no es uniformemente convergente haciendo ver que la función suma $S(x)$ es discontinua en algún punto (véase Problema 30).

En particular, si x_0 está en $[a, b]$, el teorema dice que

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

habiendo de usarse el límite a la derecha o a la izquierda si el punto x_0 es un extremo de $[a, b]$.

Teorema 7.

Si $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son continuas en $[a, b]$ y si $\Sigma u_n(x)$ converge uniformemente hacia la suma $S(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \tag{4}$$

o

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \tag{5}$$

Dicho brevemente, una serie uniformemente convergente de funciones continuas se puede integrar término a término.

Teorema 8.

Si $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son continuas y tienen derivadas continuas en $[a, b]$ y si $\Sigma u_n(x)$ converge hacia $S(x)$ en tanto que $\Sigma u_n'(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$, entonces, en $[a, b]$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{6}$$

o

$$\frac{d}{dx}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \tag{7}$$

Esto da las condiciones bajo las cuales una serie se puede derivar término a término.

Teoremas parecidos a los anteriores se pueden enunciar para sucesiones. Por ejemplo, si $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es uniformemente convergente en $[a, b]$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} u_n(x)\,dx \tag{8}$$

que es el análogo del Teorema 7.

SERIES DE POTENCIAS. Una serie de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son constantes, se llama *serie de potencias* de x. Es a menudo conveniente abreviar tal serie (9) en la forma $\Sigma a_n x^n$.

En general, una serie de potencias converge para $|x| < R$ y diverge para $|x| > R$, siendo la constante R el llamado *radio de convergencia* de la serie. Para $|x| = R$, la serie puede ser o no convergente.

El intervalo $|x| < R$ o $-R < x < R$, que puede incluir los extremos, se llama intervalo de convergencia de la serie. Si bien el criterio del cociente suele indicar este intervalo, puede muy bien fallar y entonces hay que valerse de otros criterios (véase Problema 22).

Los dos casos especiales $R = 0$ y $R = \infty$ también pueden darse. En el primer caso la serie converge solo para $x = 0$, y en el segundo caso converge para todo x, lo que se puede escribir $-\infty < x < \infty$ (véase Problema 25). Cuando se habla de una serie de potencias convergente se supone, si no se indica otra cosa, que $R > 0$.

Parecidas observaciones valen para una serie de potencias de la forma (9), donde x se cambia por $(x - a)$.

TEOREMAS SOBRE SERIES DE POTENCIAS

Teorema 9.

Una serie de potencias converge uniformemente y también absolutamente en todo intervalo que sea *interior* al intervalo de convergencia.

Teorema 10.

Una serie de potencias se puede derivar o integrar término a término en un intervalo que sea interior al intervalo de convergencia. Asimismo, la suma de una serie de potencias convergente es continua en todo intervalo interior a su intervalo de convergencia.

Esto se deduce inmediatamente del Teorema 9 y de los teoremas sobre series uniformemente convergentes de las páginas 228 y 229. Los resultados se pueden generalizar para incluir los extremos del intervalo de convergencia mediante los teoremas siguientes.

Teorema 11. *Teorema de Abel.*

Si una serie de potencias converge incluso en un extremo de su intervalo de convergencia, el intervalo de convergencia uniforme se extiende también hasta incluir este extremo. Véase Problema 42.

Teorema 12. *Teorema del límite de Abel.*

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente en $x = x_0$, que puede ser un punto interior o un extremo del intervalo de convergencia, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0} a_n x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{10}$$

Si x_0 es un extremo hay que escribir $x \to x_0+$ o bien $x \to x_0-$ en *(10)*, según que x_0 sea extremo izquierdo o derecho.

Esto es consecuencia inmediata del Teorema 11 y del Teorema 6 sobre la continuidad de sumas de series uniformemente convergentes.

OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

En los teoremas que siguen se supone que todas las series de potencias son convergentes en un cierto intervalo.

Teorema 13.

Dos series de potencias se pueden sumar o restar término a término para cada valor de x común a sus intervalos de convergencia.

Teorema 14.

Dos series de potencias, por ejemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, se pueden multiplicar para obtener $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 \tag{11}$$

resultado que es válido para todo x del intervalo común de convergencia.

Teorema 15.

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se divide por la serie de potencias $\Sigma b_n x^n$, siendo $b_0 \neq 0$, el cociente se puede escribir como serie de potencias convergente para valores de x suficientemente pequeños.

Teorema 16.

Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sustituyendo $x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ se pueden obtener los coeficientes b_n en función de los a_n, proceso que se suele llamar *inversión de la serie.*

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

Supóngase que $f(x)$ y sus derivadas $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$ y que $f^{(n+1)}(x)$ existe en el intervalo abierto $a < x < b$. Entonces, como ya se vio en capítulos precedentes (véanse páginas 61 y 95),

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \tag{12}$$

donde R_n, el resto, está dada en una de las formas

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(forma de Lagrange)} \tag{13}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a) \quad \text{(forma de Cauchy)} \tag{14}$$

donde ξ, que está entre a y x, es en general diferente en las dos formas.

Al cambiar n, ξ cambia también en general. Si para todo x y ξ en $[a, b]$ se tiene $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, *(12)* se puede escribir entonces

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{15}$$

que es la llamada *serie o desarrollo de Taylor* de la función $f(x)$. En caso de que $a = 0$, se la suele llamar *serie o desarrollo de Maclaurin* de la función $f(x)$. Para problemas sobre estos desarrollos, véase también Capítulo 6.

Se podría creer que si existen todas las derivadas de $f(x)$ en $x = a$, el desarrollo *(15)* sería siempre válido. Pero esto no es necesariamente así, pues si bien puede obtenerse *formalmente* la serie del segundo miembro de *(15)*, la serie resultante puede no converger hacia $f(x)$. Para un ejemplo de esto véase el Problema 104.

Las condiciones precisas bajo las cuales converge la serie hacia $f(x)$ se obtienen del mejor modo por procedimientos de la teoría de funciones de variable compleja. Véase Capítulo 17.

ALGUNAS SERIES DE POTENCIAS IMPORTANTES

En la práctica se utilizan frecuentemente las series siguientes, que convergen hacia la función indicada en los intervalos dados.

1. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

4. $\ln|1+x| = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots \qquad -1 < x \leqq 1$

5. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad -1 < x < 1$

6. $\operatorname{tg}^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$

7. $(1+x)^p = 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

Esta es la *serie binómica.*

(*a*) Si p es un número natural o cero, la serie termina y es un polinomio.
(*b*) Si $p > 0$, pero no entero, la serie converge (absolutamente) para $-1 \leqq x \leqq 1$.
(*c*) Si $-1 < p < 0$, la serie converge para $-1 < x \leqq 1$.
(*d*) Si $p \leqq -1$, la serie converge para $-1 < x < 1$.

Para todo p la serie converge ciertamente si $-1 < x < 1$.

TEMAS ESPECIALES

1. **Funciones definidas por series** son con frecuencia útiles en las aplicaciones y suelen presentarse como soluciones de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la función definida por

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p p!}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{p+2n}}{n!\,(n+p)!} \tag{16}$$

es una solución de la *ecuación diferencial de Bessel* $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ y se llama por eso *función de Bessel de orden p*. Véanse Problemas 46, 106-109.

De la misma manera, la *función hipergeométrica*

$$F(a, b; c; x) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + \cdots \tag{17}$$

es una solución de la *ecuación diferencial de Gauss* $x(1-x)y'' + \{c - (a+b+1)x\}y' - aby = 0$.

Estas funciones tienen muchas importantes propiedades.

2. **Series de términos complejos,** y en especial series de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde $z = x + iy$ y a_n puede ser complejo, pueden tratarse de manera análoga a como se hace con las series reales.

Estas series de potencias convergen para $|z| < R$, o sea, en el interior de un *círculo de convergencia* $x^2 + y^2 = R^2$, siendo R el radio de convergencia (si la serie converge solamente para $z = 0$, se dice que el radio de convergencia R es cero; si converge para todo z, se dice que el radio de convergencia es infinito). En el contorno de este círculo, esto es, para $|z| = R$, la serie puede ser o no convergente dependiendo del valor particular z.

Nótese que para $y = 0$ el círculo de convergencia se reduce al intervalo de convergencia de las series de potencias reales. Una mejor comprensión del comportamiento de las series de potencias se obtiene utilizando la teoría de funciones de variable compleja (véase Capítulo 17).

3. **Series de funciones de dos (o más) variables,** tales como la $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ se pueden tratar de manera parecida a la de las series en una variable. En particular, se puede estudiar el caso de las series de potencias en x y y de la forma

$$a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \cdots \tag{18}$$

utilizando dobles subíndices para las constantes. Como para una variable, se pueden desarrollar funciones apropiadas de x y y en series de potencias semejantes utilizando los resultados del Capítulo 6, página 109, y demostrando que el residuo $R_n \to 0$ para $n \to \infty$. En general, tales series de potencias convergen dentro de una región rectangular $|x| < A$, $|y| < B$ y posiblemente en el contorno.

4. Series dobles. Considérese el cuadro de números (o funciones)

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Sea $S_{mn} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} u_{pq}$ la suma de los elementos de las primeras m filas y primeras n columnas de este cuadro. Si existe un número S tal que $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = S$ se dice que la serie doble $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} u_{pq}$ *converge* hacia la *suma* S; si no, que *diverge*.

Las definiciones y teoremas para series dobles son muy parecidos a los de las series ya consideradas.

5. Productos infinitos. Sea $P_n = (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots(1+u_n)$ denotado por $\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ donde se supone que $u_k \neq -1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Si existe un número $P \neq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, se dice que el *producto infinito* $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots \equiv \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, o brevemente $\Pi(1+u_k)$ converge hacia P; si no es así, que diverge.

Si $\Pi(1+|u_k|)$ converge se dice que el producto infinito $\Pi(1+u_k)$ es *absolutamente convergente*. Se puede demostrar que un producto infinito absolutamente convergente converge siempre y que los factores se pueden entonces reagrupar sin afectar el resultado.

Los teoremas acerca de los productos infinitos pueden a menudo (tomando logaritmos) hacerse depender de los teoremas sobre series. Así, por ejemplo, se tiene el

Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que $\Pi(1+u_k)$ converja absolutamente es que Σu_k converja absolutamente.

6. Sumabilidad. Sean $S_1, S_2, S_3, \ldots$ las sumas parciales de una serie divergente Σu_n. Si la sucesión $S_1, \dfrac{S_1+S_2}{2}, \dfrac{S_1+S_2+S_3}{3}, \ldots$ (que se forma tomando las medias aritméticas de los primeros n términos de $S_1, S_2, S_3, \ldots$) converge hacia S se dice que la serie Σu_n es *sumable en sentido de Cesàro*, o *C*-1 *sumable* hacia S (véase Problema 51).

Si Σu_n converge hacia S, el método de Cesàro da también el resultado S. Por esto se dice que el método de Cesàro es un método *regular* de sumabilidad.

Si el límite de Cesàro no existe puede aplicarse la misma técnica a la sucesión $S_1, \dfrac{S_1+S_2}{2}, \dfrac{S_1+S_2+S_3}{3}, \ldots$. Si el límite *C*-1 de esta sucesión existe y es igual a S se dice que Σu_k converge hacia S en el sentido de *C*-2. El proceso se puede continuar indefinidamente.

Series asintóticas. Considérense las series

$$S(x) \;=\; a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \tag{19}$$

y supóngase que

$$S_n(x) \;=\; a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{20}$$

son las sumas parciales de esta serie.

Si $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ con $f(x)$ dada es tal que para todo n

$$\lim_{|x|\to\infty} x^n R_n(x) = 0$$

se dice que $S(x)$ es un *desarrollo asintótico* de $f(x)$ y se denota esto escribiendo $f(x) \sim S(x)$.

De hecho la serie *(19)* es divergente, pero tomando la suma de términos sucesivos de la serie hasta el punto preciso en que los términos comienzan a crecer puede obtenerse una aproximación útil de $f(x)$.

Hay varias operaciones permisibles con series asintóticas. Se pueden multiplicar entre sí, por ejemplo, o bien integrarlas término a término obteniéndose así otra serie asintótica.

Problemas resueltos

CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES DE CONSTANTES

1. (*a*) Demostrar que $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge y (*b*) hallar su suma.

$u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$. Entonces

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$, la serie converge y su suma es $\frac{1}{2}$.

La serie suele llamarse *telescópica* ya que los términos de S_n, distintos del primero y el último, se cancelan por pares.

2. (*a*) Demostrar que $\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ converge y (*b*) hallar su suma.

$$S_n = \tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + (\tfrac{2}{3})^n$$

$$\tfrac{2}{3}S_n = (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + (\tfrac{2}{3})^n + (\tfrac{2}{3})^{n+1}$$

Sustraer: $\frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^{n+1}$ o $S_n = 2\{1 - (\frac{2}{3})^n\}$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\{1 - (\frac{2}{3})^n\} = 2$, la serie converge y su suma es 2.

Otro método: Sea $a = \frac{2}{3}$, $r = \frac{2}{3}$ en el Problema 25 del Capítulo 3; la suma es entonces $a/(1-r) = \frac{2}{3}/(1-\frac{2}{3}) = 2$.

3. Demostrar que la serie $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ diverge.

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Luego por el Problema 26, Capítulo 3, la serie es divergente.

4. Mostrar que la serie de término n-ésimo $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ es divergente, aunque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ se deduce del Problema 14(c), Capítulo 3.

Ahora $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$.

Luego S_n aumenta indefinidamente y la serie diverge.

Este problema muestra que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ es condición *necesaria*, pero no *suficiente*, para la convergencia de Σu_n. Véase también Problema 6.

CRITERIO DE COMPARACION Y CRITERIO DEL COCIENTE

5. Si $0 \leqq u_n \leqq v_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y si Σv_n converge, demostrar que Σu_n también converge (es decir, demostrar el criterio de comparación para la convergencia).

Sea $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Como Σv_n converge, el $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ existe y es igual a T, por ejemplo. Y como $v_n \geqq 0$, $T_n \leqq T$.

Luego $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqq T$ o $0 \leqq S_n \leqq T$.

Así, pues, S_n es una sucesión monótona creciente y acotada y, por tanto, tiene límite (Capítulo 3), o sea, que Σu_n converge.

6. Mediante el criterio de comparación demostrar que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Se tiene

$$1 \geqq \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \geqq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} \geqq \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \cdots + \tfrac{1}{15} \geqq \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16} \text{ (8 términos)} = \tfrac{1}{2}$$

etcétera. De modo que cualquiera que sea el número de términos,

$$1 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}) + \cdots \geqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots$$

Como el segundo miembro se puede hacer mayor que cualquier número positivo tomando suficientes términos, la serie dada diverge.

Por métodos parecidos al aquí utilizado se puede demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, siendo p una constante, diverge si $p \leqq 1$ y converge si $p > 1$. Esto también se puede demostrar de otras maneras [véase Problema 13(a)].

7. Examinar la convergencia o divergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$.

Como $\ln n < n$ y $\dfrac{1}{2n^3-1} \leqq \dfrac{1}{n^3}$, se tiene $\dfrac{\ln n}{2n^3-1} \leqq \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$.

Entonces la serie dada converge, ya que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

8. Sean u_n y v_n positivos ambos. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ = constante $A \neq 0$, demostrar que Σu_n converge o diverge según que lo haga o no Σv_n.

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ se puede elegir un entero N tal que $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - A\right| < \epsilon$ para todo $n > N$. Luego para $n = N+1, N+2, \ldots$

$$-\epsilon < \frac{u_n}{v_n} - A < \epsilon \quad \text{o} \quad (A - \epsilon)v_n < u_n < (A + \epsilon)v_n \tag{1}$$

Sumando de $N+1$ a ∞ (más precisamente, de $N+1$ a M, y haciendo luego $M \to \infty$),

$$(A - \epsilon) \sum_{N+1}^{\infty} v_n \leqq \sum_{N+1}^{\infty} u_n \leqq (A + \epsilon) \sum_{N+1}^{\infty} v_n \tag{2}$$

No se pierde generalidad suponiendo $A - \epsilon > 0$. Entonces, por el segundo miembro de la desigualdad (2), Σu_n converge si lo hace Σv_n. Por el primer miembro de la desigualdad (2), Σu_n diverge si lo hace Σv_n. Para los casos $A = 0$ o $A = \infty$, véase Problema 62.

9 Estudiar la convergencia de: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 + 3}$.

(a) Para n elevado, $\frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ es aproximadamente $\frac{4n^2}{n^3} = \frac{4}{n}$. Tomando $u_n = \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ y $v_n = \frac{4}{n}$, se tiene $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Como $\Sigma v_n = 4\Sigma\, 1/n$ diverge, Σu_n también diverge según el Problema 8.

Obsérvese que al considerar el comportamiento de u_n para n grande se trata de obtener una serie v_n apropiada para comparación. También se hubiera podido tomar $v_n = 1/n$.

Otro método: $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}\right) = 4$. Luego, por el Teorema 1, página 225, la serie es divergente.

(b) Para n grande, $u_n = \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ es aproximadamente $v_n = \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ y $\sum v_n = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$ converge (p serie con $p = 2$), la serie dada converge.

Otro método: $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}\right) = \frac{1}{2}$. Entonces por el Teorema 1, página 225, la serie converge.

(c) $\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{\ln n}{n^2 + 3}\right) \leqq \lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ (por la regla de L'Hôpital u otro método).

Luego por el Teorema 1 con $p = 3/2$ la serie converge.

Obsérvese que el método del Problema 6(a) da $\frac{\ln n}{n^2 + 3} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, pero nada se puede concluir puesto que $\Sigma\, 1/n$ diverge.

10. Estudiar la convergencia de (a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2} = 0$ por la regla de L'Hôpital u otro método). Luego por el Teorema 1 con $p = 2$ la serie converge.

(b) Para n grande, sen $(1/n)$ es aproximadamente $1/n$. Esto lleva a considerar

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}\right\}^3 = 1$$

de donde se deduce, por el Teorema 1 con $p = 3$, que la serie dada converge.

CRITERIO INTEGRAL

11. Demostrar el criterio integral (véase página 225).

Se demuestra aquí tomando $N = 1$. Se hacen fácilmente modificaciones si $N > 1$.

Por la monotonía de $f(x)$ se tiene

$$u_{n+1} = f(n+1) \leqq f(x) \leqq f(n) = u_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Integrando de $x = n$ a $x = n + 1$, por la Propiedad 7, página 81,

$$u_{n+1} \leqq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqq u_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sumando de $n = 1$ a $M - 1$,

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M \leqq \int_1^M f(x)\,dx \leqq u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1} \qquad (1)$$

Si $f(x)$ es estrictamente decreciente se pueden omitir los signos de igualdad en (1).

Si $\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx$ existe y es igual a S, se ve por la desigualdad de la izquierda en (1) que $u_2 + u_3 + \cdots + u_M$ es monótona creciente y acotada superiormente o mayorada por S, de modo que Σu_n converge.

Si $\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx$ no es acotado, se ve por la desigualdad de la derecha en (1) que Σu_n diverge.

Queda completa la demostración.

12. Ilustrar geométricamente la demostración en el Problema 11.

Geométricamente $u_2 + u_3 + \cdots + u_M$ es el área total de los rectángulos sombreados en la Figura 11-1, mientras que $u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1}$ es el área total de los rectángulos sombreados y no sombreados.

El área bajo la curva $y = f(x)$ de $x = 1$ a $x = M$ tiene un valor intermedio entre las dos áreas anteriores, lo que ilustra el resultado (1) del Problema 11.

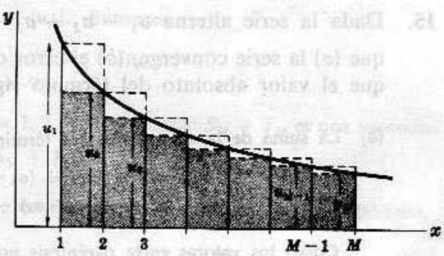


Fig. 11-1

13. Estudiar la convergencia de: (a) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$, $p =$ constante (b) $\sum_1^\infty \frac{n}{n^2+1}$; (c) $\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln n}$; (d) $\sum_1^\infty n e^{-n^2}$.

(a) Considerar $\int_1^M \frac{dx}{x^p} = \int_1^M x^{-p}\,dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^M = \frac{M^{1-p}-1}{1-p}$ con $p \neq 1$.

Si $p < 1$, $\lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-p}-1}{1-p} = \infty$, con lo que la integral y, por tanto, la serie divergen.

Si $p > 1$, $\lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$, de modo que la integral y, por tanto, la serie convergen.

Si $p = 1$, $\int_1^M \frac{dx}{x^p} = \int_1^M \frac{dx}{x} = \ln M$ y $\lim_{M\to\infty} \ln M = \infty$, y la integral y, por consiguiente, la serie divergen.

Así, pues, la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p \leqq 1$.

(b) $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{x\,dx}{x^2+1} = \lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} \{\tfrac{1}{2}\ln(M^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln 2\} = \infty$ y la serie diverge.

(c) $\lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^M = \lim_{M\to\infty} \{\ln(\ln M) - \ln(\ln 2)\} = \infty$ y la serie diverge.

(d) $\lim_{M\to\infty} \int_1^M x e^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} \{\tfrac{1}{2}e^{-1} - \tfrac{1}{2}e^{-M^2}\} = \tfrac{1}{2}e^{-1}$ y la serie converge.

Obsérvese que si la serie converge el valor de la integral correspondiente no es el mismo (en general) del que tiene la suma de la serie. Pero la suma aproximada de una serie se puede obtener a menudo con bastante aproximación mediante integrales. Véase Problema 70.

14. Demostrar que $\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Del Problema 11 se sigue que

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n^2+1} < \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2+1} < \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M-1} \frac{1}{n^2+1}$$

es decir, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, de donde $\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ como se buscaba.

Como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4}$, se obtiene, sumando $\frac{1}{2}$ a cada lado, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Con lo que queda demostrado el resultado pedido.

SERIES ALTERNAS

15. Dada la serie alterna $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ con $0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Demostrar que (*a*) la serie converge, (*b*) el error cometido al cortarla en un término cualquiera no es mayor que el valor absoluto del término siguiente.

(*a*) La suma de la serie hasta $2M$ términos es

$$\begin{aligned} S_{2M} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2M-1} - a_{2M}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2M-2} - a_{2M-1}) - a_{2M} \end{aligned}$$

Como los valores entre paréntesis no son negativos se tiene

$$S_{2M} \geqq 0, \quad S_2 \leqq S_4 \leqq S_6 \leqq S_8 \leqq \cdots \leqq S_{2M} \leqq a_1$$

Por tanto, $\{S_{2M}\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada y tiene entonces límite S.

También, $S_{2M+1} = S_{2M} + a_{2M+1}$. Como $\lim_{M\to\infty} S_{2M} = S$ y $\lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = 0$ (por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), se sigue que $\lim_{M\to\infty} S_{2M+1} = \lim_{M\to\infty} S_{2M} + \lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = S + 0 = S$.

De modo que las sumas parciales de la serie tienden al límite S y la serie converge.

(*b*) El error cometido al cortar la suma en $2M$ términos es

$$(a_{2M+1} - a_{2M+2}) + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \cdots = a_{2M+1} - (a_{2M+2} - a_{2M+3}) - \cdots$$

y es, pues, no negativo y menor o igual que a_{2M+1}, primer término omitido.

Asimismo, el error cometido tomando $2M + 1$ términos es

$$-a_{2M+2} + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \cdots = -(a_{2M+2} - a_{2M+3}) - (a_{2M+4} - a_{2M+5}) - \cdots$$

que es no positivo y mayor que $-a_{2M+2}$.

16. (*a*) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ converge. (*b*) Hallar el máximo error que se comete aproximando la suma por los primeros 8 términos y por los primeros 9 términos de la serie. (*c*) ¿Cuántos términos de la serie se necesitan para obtener un error que no exceda de 0,001 en valor absoluto?

(*a*) La serie es $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$. Si $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, luego $a_n = |u_n| = \frac{1}{2n-1}$, $a_{n+1} = |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+1}$. Como $\frac{1}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n-1}$ y puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, se sigue por el Problema 15(*a*) que la serie converge.

(*b*) Utilícense los resultados del Problema 15(*b*). Los primeros 8 términos dan entonces $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ y el error cometido es positivo sin exceder $\frac{1}{17}$.

Asimismo, los primeros 9 términos $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17}$ y el error es negativo y mayor o igual que $-\frac{1}{19}$, es decir, que el error no excede de $\frac{1}{19}$ en valor absoluto.

(*c*) El valor absoluto del error cometido suspendiendo la suma en M términos es menor que $1/(2M+1)$. Para obtener la aproximación deseada ha de tenerse $1/(2M+1) \leqq 0{,}001$, de donde $M \geqq 499{,}5$. De modo que se necesitan por lo menos 500 términos.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL

17. Demostrar que una serie absolutamente convergente es convergente.

Dado que $\Sigma\,|u_n|$ converge, hay que demostrar que Σu_n converge.

Sea $S_M = u_1 + u_2 + \cdots + u_M$ y $T_M = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_M|$. Entonces,

$$\begin{aligned} S_M + T_M &= (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \cdots + (u_M + |u_M|) \\ &\leqq 2|u_1| + 2|u_2| + \cdots + 2|u_M| \end{aligned}$$

Como $\Sigma\,|u_n|$ converge y puesto que $u_n + |u_n| \geqq 0$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, se sigue $S_M + T_M$ es una sucesión monótona creciente acotada y que existe, por tanto, $\lim\limits_{M\to\infty} (S_M + T_M)$.

Y, asimismo, puesto que existe $\lim\limits_{M\to\infty} T_M$ (ya que la serie es absolutamente convergente por hipótesis),

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} (S_M + T_M - T_M) = \lim_{M\to\infty} (S_M + T_M) - \lim_{M\to\infty} T_M$$

tiene que existir también y queda demostrado lo dicho.

18. Estudiar la convergencia de la serie $\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{1}}{1^{3/2}} - \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2}}{2^{3/2}} + \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{3}}{3^{3/2}} - \cdots$.

Como cada término es en valor absoluto menor o igual que el término correspondiente de la serie $\dfrac{1}{1^{3/2}} + \dfrac{1}{2^{3/2}} + \dfrac{1}{3^{3/2}} + \ldots$, que converge, se sigue que la serie dada es absolutamente convergente y que, por tanto, es convergente por lo visto en el Problema 17.

19. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n}{n^2+1},\quad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}.$$

(*a*) La serie de valores absolutos es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ que es divergente según el Problema 13(*b*). Luego la serie dada no es absolutamente convergente.

Pero, si $a_n = |u_n| = \dfrac{n}{n^2+1}$ y $a_{n+1} = |u_{n+1}| = \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1}$, luego $a_{n+1} \leqq a_n$ para todo $n \geqq 1$, y también $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$. Luego por el Problema 15 la serie converge.

Como la serie converge, pero no es absolutamente convergente, es entonces *condicionalmente convergente.*

(*b*) La serie de valores absolutos es $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Por el criterio integral esta serie converge o diverge según que $\lim\limits_{M\to\infty} \displaystyle\int_2^M \frac{dx}{x\ln^2 x}$ exista o no.

Si $u = \ln x$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$

Luego $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln M}\right) = \frac{1}{\ln 2}$ y la integral existe. Luego la serie converge.

Entonces, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}$ converge absolutamente y así converge.

Otro método:

Como $\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leqq \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = 0$, se sigue, por el Problema 15(*a*), que la serie alterna dada converge. Para examinar su convergencia absoluta hay que proceder como antes.

(*c*) Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, con $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$ la serie dada no puede ser convergente. Para mostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ basta con mostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \neq 0$, lo cual se puede hacer por la regla de L'Hôpital u otro método apropiado [véase Problema 21(*b*)].

CRITERIO DEL COCIENTE

20. Demostrar el criterio de convergencia del cociente.

Considérese primero la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ en que cada término es no negativo. Hay que demostrar que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$, entonces Σu_n converge necesariamente.

Por hipótesis, puede elegirse un entero N tal que para todo $n \geqq N$, $(u_{n+1}/u_n) < r$ con $L < r < 1$. Luego

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< r\,u_N \\ u_{N+2} &< r\,u_{N+1} < r^2 u_N \\ u_{N+3} &< r\,u_{N+2} < r^3 u_N \end{aligned}$$

etcétera. Por suma,

$$u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots < u_N(r + r^2 + r^3 + \cdots)$$

y entonces la serie dada converge según el criterio de comparación puesto que $0 < r < 1$.

Si la serie tiene términos de signos diferentes se considera $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$. Entonces, según la demostración anterior y el Problema 17, se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$, luego Σu_n converge (absolutamente).

Análogamente se puede demostrar que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$ la serie Σu_n diverge, pero si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L = 1$ el criterio del cociente falla [véase Problema 21(*c*)].

21. Estudiar la convergencia de (*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$, (*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$, (*c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$.

(*a*) Aquí es $u_n = n^4 e^{-n^2}$. Luego

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \lim_{n\to\infty} e^{-2n-1} = 1\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Como $0 < 1$, la serie converge.

(*b*) Aquí $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(-1)^{n-1}2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$$

Como $2 > 1$, la serie diverge. Comparar con el Problema 19(*c*).

(*c*) Aquí $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(-1)^{n-1}n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)n} = 1$$

y el criterio del cociente falla. Utilizando otros criterios [véase Problema 19(*a*)], la serie resulta ser convergente.

OTROS CRITERIOS

22. Estudiar la convergencia de $1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \cdots$ con (*a*) $r = 2/3$, (*b*) $r = -2/3$, (*c*) $r = 4/3$.

Aquí no es aplicable el criterio del cociente, pues $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2|r|$ o $\frac{1}{2}|r|$ según que n sea impar o par.

Pero utilizando el criterio de la raíz n-ésima se tiene

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|r^n|} = \sqrt[n]{2}\,|r| & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{|r^n|} = |r| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = |r|$ (ya que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$).

Así si $|r| < 1$ la serie converge, y si $|r| > 1$ la serie diverge.

Luego la serie converge en los casos (*a*) y (*b*) y diverge en el caso (*c*).

23. Estudiar la convergencia de $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^2 + \left(\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right)^2 + \cdots$

El criterio del cociente falla, pues $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$. Pero por el criterio de Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1 - \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right\} = \frac{4}{3} > 1$$

y la serie converge.

24. Estudiar la convergencia de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2 + \cdots$.

Falla el criterio del cociente puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = 1$. También falla el de Raabe, pues

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right\} = 1$$

Pero haciendo la división,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5-4/n}{4n^2+8n+4} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2} \quad \text{donde } |c_n| < P$$

de modo que la serie diverge según el criterio de Gauss.

SERIES DE FUNCIONES

25. ¿Para qué valores de x convergen las series siguientes?

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-a)^n,\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}.$$

(*a*) $u_n = \dfrac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$. Suponiendo $x \neq 0$ (si $x = 0$ la serie converge) se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x| = \frac{|x|}{3}$$

Luego la serie converge si $\dfrac{|x|}{3} < 1$ y diverge si $\dfrac{|x|}{3} > 1$. Si $\dfrac{|x|}{3} = 1$, es decir, si $x = \pm 3$, el criterio falla.

Si $x = 3$ la serie se convierte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge.

Si $x = -3$ la serie se convierte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ que converge.

Y el *intervalo de convergencia* es $-3 \leqq x < 3$. La serie diverge fuera de este intervalo.

Nótese que la serie converge absolutamente para $-3 < x < 3$. Para $x = -3$ la serie converge condicionalmente.

(*b*) Procédase como en la parte (*a*) con $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}x^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}x^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n)} = 0$$

Luego la serie converge (absolutamente) para todo x, es decir, el intervalo de convergencia (absoluta) es $-\infty < x < \infty$.

(*c*) $u_n = n!\,(x-a)^n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x-a)^{n+1}}{n!\,(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x-a|.$

Este límite es infinito si $x \neq a$. Entonces la serie converge solo para $x = a$.

(*d*) $u_n = \dfrac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3n-1)(x-1)}{2n(3n+2)}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2}$$

Así que la serie converge para $|x-1| < 2$ y diverge para $|x-1| > 2$.

El criterio falla para $|x-1| = 2$, es decir, $x - 1 = \pm 2$ o $x = 3$ y $x = -1$.

Para $x = 3$ la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$, que diverge puesto que el término n-ésimo no tiende a cero.

Para $x = -1$ la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n-1}$, que también diverge porque el término n-ésimo no tiende a cero.

Así, pues, la serie converge solamente para $|x-1| < 2$, es decir, $-2 < x-1 < 2$ o $-1 < x < 3$.

26. ¿Para qué valores de x convergen las series (*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$?

(*a*) $u_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$. Luego $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \left|\frac{x+2}{x-1}\right|$ si $x \neq 1, -2$.

Luego la serie converge si $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$, diverge si $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 1$, y el criterio falla si $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = 1$, es decir, $x = -\frac{1}{2}$.

Si $x = 1$ la serie diverge.
Si $x = -2$ la serie converge.

Si $x = -\frac{1}{2}$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ la cual converge.

Así, pues, la serie converge para $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$, $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -2$, es decir, para $x \leqq -\frac{1}{2}$.

(*b*) El criterio del cociente falla, pues $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, con $u_n = \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$. Pero observando que

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

se ve que si $x \neq 0, -1, -2, \ldots, -n$,

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$$

y $\lim_{n\to\infty} S_n = 1/x$, siempre que $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$

Luego la serie converge para todo x excepto $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$, y su suma es $1/x$.

CONVERGENCIA UNIFORME

27. Hallar el dominio de convergencia de $(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots$.

Método 1:

Suma de los primeros n términos $= S_n(x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots + x^{n-1}(1-x)$

$$= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \cdots + x^{n-1} - x^n$$

$$= 1 - x^n$$

Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 - x^n) = 1$.

Si $|x| > 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ no existe

Si $x = 1$, $S_n(x) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$.

Si $x = -1$, $S_n(x) = 1 - (-1)^n$ y $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ no existe.

Luego la serie converge para $|x| < 1$ y $x = 1$, o sea, para $-1 < x \leqq 1$.

Método 2, por el criterio del cociente.

La serie converge si $x = 1$. Si $x \neq 1$ y $u_n = x^{n-1}(1-x)$, entonces $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x|$.

Luego la serie converge si $|x| < 1$, diverge si $|x| > 1$. El criterio falla si $|x| = 1$. Si $x = 1$ la serie converge; si $x = -1$ la serie diverge. Así que la serie converge para $-1 < x \leqq 1$.

28. Estudiar la convergencia uniforme de las series del Problema 27 en el intervalo (*a*) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, (*b*) $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, (*c*) $-0{,}99 \leqq x \leqq 0{,}99$, (*d*) $-1 < x < 1$, (*e*) $0 \leqq x < 2$.

(*a*) Por el Problema 27, $S_n(x) = 1 - x^n$, $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$ si $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; luego la serie *converge* en este intervalo. Se tiene

$$\text{Resto después de } n \text{ términos} = R_n(x) = S(x) - S_n(x) = 1 - (1 - x^n) = x^n$$

La serie es *uniformemente convergente* en el intervalo si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un N que depende de ϵ, pero no de x, tal que $|R_n(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$. Ahora bien,

$$|R_n(x)| = |x^n| = |x|^n < \epsilon \quad \text{cuando} \quad n \ln |x| < \ln \epsilon \quad \text{o} \quad n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|}$$

pues al dividir por $\ln |x|$ (que es negativo puesto que $|x| < \frac{1}{2}$) cambia el sentido de la desigualdad.

Pero si $|x| < \frac{1}{2}$, $\ln |x| < \ln (\frac{1}{2})$ y $n > \dfrac{\ln \epsilon}{\ln |x|} > \dfrac{\ln \epsilon}{\ln (\frac{1}{2})} = N$. Así, pues, como N es independiente de x, la serie es uniformemente convergente en el intervalo.

(*b*) En este caso $|x| \leqq \frac{1}{2}$, $\ln |x| \leqq \ln (\frac{1}{2})$ y $n > \dfrac{\ln \epsilon}{\ln |x|} \geqq \dfrac{\ln \epsilon}{\ln (\frac{1}{2})} = N$, así que la serie es también uniformemente convergente en $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$.

(*c*) Un razonamiento parecido al anterior, con 0,99 en vez de $\frac{1}{2}$ muestra que la serie es uniformemente convergente en el intervalo $-0{,}99 \leqq x \leqq 0{,}99$.

(*d*) Los razonamientos anteriores fallan en este caso, pues $\dfrac{\ln \epsilon}{\ln |x|}$ puede hacerse mayor que cualquier número positivo sin más que elegir $|x|$ suficientemente próximo a 1. Así, pues, no existe y se deduce que la serie no es uniformemente convergente en $-1 < x < 1$.

(*e*) Como la serie no es convergente en todo punto de este intervalo no puede converger uniformemente en él.

29. Discutir la continuidad de la función suma $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ del Problema 27 para el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$.

Si $0 \leqq x < 1$, $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 - x^n) = 1$.

Si $x = 1$, $S_n(x) = 0$ y $S(x) = 0$.

Así que $S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ y $S(x)$ es discontinua en $x = 1$, pero continua en todos los demás puntos de $0 \leqq x < 1$.

En el Problema 34 se demuestra que si una serie es uniformemente convergente en un intervalo la función suma $S(x)$ debe ser continua en el intervalo. Se deduce que si la función suma no es continua en un intervalo la serie no puede ser uniformemente convergente, lo cual sirve a menudo para demostrar la no uniformidad de la convergencia de una serie (o sucesión).

30. Estudiar la convergencia uniforme de $x^2 + \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots$.

Supóngase $x \neq 0$. La serie es entonces geométrica de razón $1/(1 + x^2)$ y su suma es (véase Problema 25, Capítulo 3).

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - 1/(1+x^2)} = 1 + x^2$$

Si $x = 0$ la suma de los primeros n términos es $S_n(0) = 0$; luego $S(0) = \lim_{n\to\infty} S_n(0) = 0$.

Como $\lim_{x\to 0} S(x) = 1 \neq S(0)$, $S(x)$ es discontinua en $x = 0$. Luego por el Problema 34, la serie no puede ser *uniformemente convergente* en ningún intervalo que incluya el punto $x = 0$, si bien es (absolutamente) *convergente* en cualquier intervalo. No obstante, es uniformemente convergente en cualquier intervalo del que se excluya el $x = 0$.

Esto también se puede mostrar directamente (véase Problema 89).

CRITERIO *M* DE WEIERSTRASS

31. **Demostrar el criterio M de Weierstrass si $|u_n(x)| \leqq M_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, siendo M_n constantes positivas tales que ΣM_n converge, entonces $\Sigma u_n(x)$ es uniformemente (y absolutamente) convergente.**

El resto de la serie $\Sigma u_n(x)$ después de n términos es $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$. Ahora

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \leqq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \leqq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots$$

Pero $M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots$ puede hacerse menor que ϵ eligiendo $n > N$, puesto que ΣM_n converge. Como N es independiente de x, evidentemente se tiene $|R_n(x)| < \epsilon$ para $n > N$ y la serie es uniformemente convergente. La convergencia absoluta se deduce inmediatamente del criterio de comparación.

32. **Estudiar la convergencia uniforme de:**

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}.$$

(*a*) $\left|\dfrac{\cos nx}{n^4}\right| \leqq \dfrac{1}{n^4} = M_n$. Como ΣM_n converge (p serie con $p = 4 > 1$), la serie es uniformemente (y absolutamente) convergente para todo x por el criterio M.

(*b*) Por el criterio del cociente, la serie converge en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, o sea, para $|x| \leqq 1$.

Para todo x de este intervalo, $\left|\dfrac{x^n}{n^{3/2}}\right| = \dfrac{|x|^n}{n^{3/2}} \leqq \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Eligiendo para $M_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, se ve que ΣM_n converge. Luego la serie dada converge uniformemente para $-1 \leqq x \leqq 1$ por el criterio M.

(*c*) $\left|\dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| \leqq \dfrac{1}{n}$. Pero ΣM_n con $M_n = \dfrac{1}{n}$ no converge. El criterio M no se puede aplicar en este caso y no se puede concluir entonces nada sobre la convergencia uniforme mediante este criterio (véase, no obstante, Problema 121).

(*d*) $\left|\dfrac{1}{n^2+x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{n^2}$, y $\Sigma\dfrac{1}{n^2}$ converge. Entonces por el criterio M la serie dada converge uniformemente para todo x.

33. **Si una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ converge para $x = x_0$, demostrar que converge (*a*) absolutamente en el intervalo $|x| < |x_0|$, (*b*) uniformemente en el intervalo $|x| \leqq |x_1|$ con $|x_1| < |x_0|$.**

(*a*) Como $\Sigma a_n x_0^n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ y entonces se puede hacer $|a_n x_0^n| < 1$ eligiendo n lo suficientemente grande, esto es, $|a_n| < \dfrac{1}{|x_0|^n}$ para $n > N$. Entonces,

$$\sum_{N+1}^{\infty}|a_n x^n| = \sum_{N+1}^{\infty}|a_n|\,|x|^n < \sum_{N+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{|x_0|^n} \tag{1}$$

Como la última serie en (*1*) converge para $|x| < |x_0|$, se deduce en virtud del criterio de comparación que la primera serie es convergente, o sea, que la serie dada es absolutamente convergente.

(*b*) Sea $M_n = \dfrac{|x_1|^n}{|x_0|^n}$. Entonces, ΣM_n converge, puesto que $|x_1| < |x_0|$. Como en la parte (*a*), $|a_n x^n| < M_n$ para $|x| \leqq |x_1|$, de modo que por el criterio *M* de Weierstrass, $\Sigma a_n x^n$ es uniformemente convergente.

Se deduce, pues, que una serie de potencias es uniformemente convergente en todo intervalo *interior* a su intervalo de convergencia.

TEOREMAS SOBRE CONVERGENCIA UNIFORME

34. Demostrar el Teorema 6, página 228.

Hay que mostrar que $S(x)$ es continua en $[a, b]$.

Ahora bien $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, así que $S(x+h) = S_n(x+h) + R_n(x+h)$ y, por tanto,

$$S(x+h) - S(x) \;=\; S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x) \tag{1}$$

donde h se ha escogido de modo que x y $x + h$ queden en $[a, b]$ (si $x = b$, por ejemplo, esto exigiría $h < 0$).

Como $S_n(x)$ es una suma de un número finito de funciones continuas, es también continua. Luego dado $\epsilon > 0$ se puede hallar δ tal que

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| < \epsilon/3 \quad \text{siempre que} \quad |h| < \delta \tag{2}$$

Como la serie por hipótesis es uniformemente convergente puede elegirse N de modo que

$$|R_n(x)| < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad |R_n(x+h)| < \epsilon/3 \quad \text{para } n > N \tag{3}$$

Entonces por (*1*), (*2*) y (*3*),

$$|S(x+h) - S(x)| \;\leqq\; |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| \;<\; \epsilon$$

para $|h| < \delta$, y queda demostrada la continuidad.

35. Demostrar el Teorema 7, página 229.

Si una función es continua en $[a, b]$ su integral existe. Luego, como $S(x)$, $S_n(x)$ y $R_n(x)$ son continuas,

$$\int_a^b S(x) \;=\; \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

Para demostrar el teorema hay que mostrar que

$$\left|\int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| \;=\; \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|$$

puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando n suficientemente grande. Pero esto se deduce inmediatamente, pues por la convergencia uniforme de la serie puede hacerse $|R_n(x)| < \epsilon/(b-a)$ para $n > N$ independiente de x en $[a, b]$ y entonces

$$\left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right| \;\leqq\; \int_a^b |R_n(x)|\,dx \;<\; \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx \;=\; \epsilon$$

Lo que equivale a

$$\int_a^b S(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b \{\lim_{n\to\infty} S_n(x)\}\,dx$$

36. Demostrar el Teorema 8, página 229.

Sea $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Como, por hipótesis, esta serie converge uniformemente en $[a, b]$ se la puede integrar término a término (según el Problema 35) y obtener

$$\int_a^x g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n(x) - u_n(a)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a)$$

pues, por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge hacia $S(x)$ en $[a, b]$.

Derivando ambos miembros de $\int_a^x g(x)\,dx = S(x) - S(a)$ se ve entonces que $g(x) = S'(x)$, lo cual demuestra el teorema.

37. Sea $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $0 \leq x \leq 1$.

(*a*) Averiguar si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx$.

(*b*) Explicar el resultado anterior.

(*a*) $\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-nx^2}\big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n})$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \tfrac{1}{2}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0, \quad \text{sea que } x = 0 \text{ or } 0 < x \leq 1. \quad \text{Entonces,}$$

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0$$

Se sigue que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx$, es decir, que no se puede tomar el límite bajo el signo integral.

(*b*) La razón para esto es que si bien la sucesión $S_n(x)$ converge hacia 0, no lo hace *uniformemente*. Para ver esto, obsérvese que la función nxe^{-nx^2} tiene un máximo en $x = 1/\sqrt{2n}$ (por las reglas corrientes del cálculo elemental), que vale $\sqrt{\tfrac{1}{2}n}\,e^{-1/2}$. Luego al tender $n \to \infty$, $S_n(x)$ no puede hacerse arbitrariamente pequeño *para todo x* y así no puede converger *uniformemente* hacia 0.

38. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$. Demostrar que $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

Se tiene $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$. Luego por el criterio *M* de Weierstrass, la serie es uniformemente convergente para todo x, en particular para $0 \leq x \leq \pi$, y puede integrarse término a término. Así que

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^4} = 2\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

SERIES DE POTENCIAS

39. Demostrar que tanto la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como la serie correspondiente de derivadas $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Sea $R > 0$ el radio de convergencia de $\Sigma a_n x^n$. Sea $0 < |x_0| < R$. Entonces, como en el Problema 33, se puede tomar N de modo que $|a_n| < \dfrac{1}{|x_0|^n}$ para $n > N$.

Así que los términos de la serie $\Sigma\, |na_n x^{n-1}| = \Sigma\, n\, |a_n|\, |x|^{n-1}$ para $n > N$ pueden hacerse menores que los términos correspondientes de la serie $\Sigma\, n \dfrac{|x|^{n-1}}{|x_0|^n}$ que convergen por el criterio del cociente para $|x| < |x_0| < R$.

Luego $\Sigma n a_n x^{n-1}$ converge absolutamente para todo punto x_0 (por cercano que esté $|x_0|$ de R).

Pero si $|x| > R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n x^{n-1} \neq 0$, con lo que $\Sigma n a_n x^{n-1}$ no converge.

De modo que R es el radio de convergencia de $\Sigma n a_n x^{n-1}$.

Nótese que la serie de derivadas puede o no converger para valores de x tales que $|x| = R$.

40. Ilustrar el Problema 39 mediante la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n^2\cdot 3^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)^2}|x| = \frac{|x|}{3}$$

de modo que la serie converge para $|x| < 3$. En $x = \pm 3$ la serie también converge, de modo que el intervalo de convergencia es $-3 \leqq x \leqq 3$.

La serie de derivadas es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$$

Por el Problema 25(*a*) ésta tiene por intervalo de convergencia el $-3 \leqq x < 3$.

Las dos series tienen el mismo radio de convergencia $R = 3$, si bien no tienen el mismo intervalo de convergencia.

Nótese que el resultado del Problema 39 también se puede demostrar por el criterio del cociente *si* es aplicable. La demostración allí dada, en cambio, es válida aun cuando el criterio no es aplicable, como en la serie del Problema 22.

41. Demostrar que en todo intervalo *interior* a su intervalo de convergencia una serie de potencias

(*a*) representa una función continua $f(x)$,
(*b*) puede integrarse término a término para obtener la integral de $f(x)$,
(*c*) se puede derivar término a término para tener la derivada de $f(x)$.

Sea la serie de potencias $\Sigma a_n x^n$, aunque lo mismo vale para $\Sigma a_n (x-a)^n$.

(*a*) Se deduce de los Problemas 33 y 34 y de ser función continua cada término $a_n x^n$ de la serie.

(*b*) Esto resulta por los Problemas 33 y 35 y porque cada término $a_n x^n$ de la serie, siendo función continua, es integrable.

(*c*) Por el Problema 39 la serie de derivadas de una serie de potencias converge dentro del intervalo de convergencia de la serie de potencias original y, por tanto, es uniformemente convergente dentro de ese intervalo. De modo que el resultado pedido se deduce de los Problemas 33 y 36.

Si una serie de potencias converge en uno (o ambos) extremos del intervalo de convergencia es posible demostrar (*a*) y (*b*) para incluir el extremo (o extremos). Véase Problema 42.

42. Demostrar el teorema de Abel de que si una serie de potencias converge en un extremo de su intervalo de convergencia, el intervalo de convergencia uniforme incluye este extremo.

Para simplificar la demostración se supone que la serie de potencias es $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ con extremo de su intervalo de convergencia en $x = 1$, de modo que la serie converge seguramente para $0 \leqq x \leqq 1$. Hay que demostrar entonces que la serie converge uniformemente en este intervalo.

Sea

$$R_n(x) = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots, \qquad R_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Para demostrar el resultado pedido hay que hacer ver que dado un $\epsilon > 0$ cualquiera puede hallarse un N tal que $|R_n(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$, siendo N independiente del x particular del $0 \leqq x \leqq 1$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= (R_n - R_{n+1})x^n + (R_{n+1} - R_{n+2})x^{n+1} + (R_{n+2} - R_{n+3})x^{n+2} + \cdots \\ &= R_n x^n + R_{n+1}(x^{n+1} - x^n) + R_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+1}) + \cdots \\ &= x^n\{R_n - (1-x)(R_{n+1} + R_{n+2}x + R_{n+3}x^2 + \cdots)\} \end{aligned}$$

Luego para $0 \leqq x < 1$,

$$|R_n(x)| \leqq |R_n| + (1-x)(|R_{n+1}| + |R_{n+2}|x + |R_{n+3}|x^2 + \cdots) \tag{1}$$

Como Σa_k converge por hipótesis, se sigue que dado $\epsilon > 0$ puede elegirse N de tal modo que $|R_k| < \epsilon/2$ para todo $k \geqq n$. Entonces para $n > N$ se tiene por *(1)*,

$$|R_n(x)| \leqq \frac{\epsilon}{2} + (1-x)\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}x + \frac{\epsilon}{2}x^2 + \cdots\right) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{2}$$

como $(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$ (si $0 \leqq x < 1$)

También, para $x = 1$, $|R_n(x)| = |R_n| < \epsilon$ para $n > N$.

Así, $|R_n(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$, siendo N independiente del valor de x en $0 \leqq x \leqq 1$, con lo que se tiene el resultado buscado.

Se generaliza fácilmente a otras series de potencias.

43. Demostrar el teorema del límite de Abel (página 230).

Como en el Problema 42, supóngase que la serie de potencias es $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, converge para $0 \leqq x \leqq 1$. Hay que mostrar, pues, que $\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Esto se deduce de inmediato del Problema 42, que muestra que $\Sigma a_k x^k$ es uniformemente convergente para $0 \leqq x \leqq 1$, y del Problema 34, que muestra que $\Sigma a_k x^k$ es continua en $x = 1$.

Se extiende esto fácilmente a otras series de potencias.

44. *(a)* Demostrar que $\operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ siendo la serie uniformemente convergente en $-1 \leqq x \leqq 1$.

(b) Demostrar que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

(a) Por el Problema 25 del Capítulo 3, con $r = -x^2$ y $a = 1$, se tiene

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad -1 < x < 1 \tag{1}$$

Integrando de 0 a x, con $-1 < x < 1$, se tiene

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{2}$$

utilizando los Problemas 33 y 35.

Como la serie del segundo miembro de *(2)* converge para $x = \pm 1$, se sigue por el Problema 42 que la serie es uniformemente convergente en $-1 \leqq x \leqq 1$ y que representa $\operatorname{tg}^{-1} x$ en dicho intervalo.

(b) Por el Problema 43 y la parte *(a)* se tiene

$$\lim_{x \to 1-} \operatorname{tg}^{-1} x = \lim_{x \to 1-}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right) \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

45. Calcular $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$ con 3 decimales exactos.

Se tiene $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots, \quad -\infty < u < \infty.$

Luego si $u = -x^2$, $\quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$

Luego $\quad \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \cdots.$

Como la serie converge para todo x y, por tanto, en particular converge uniformemente para $0 \leq x \leq 1$, se puede integrar término a término para obtener

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx &= x - \frac{x^3}{3\cdot 2!} + \frac{x^5}{5\cdot 3!} - \frac{x^7}{7\cdot 4!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \cdots\Bigg|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3\cdot 2!} + \frac{1}{5\cdot 3!} - \frac{1}{7\cdot 4!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \cdots \\ &= 1 - 0{,}16666 + 0{,}03333 - 0{,}00595 + 0{,}00092 - \cdots \quad = \quad 0{,}862\end{aligned}$$

Nótese que el error que se comete tomando solo los cuatro primeros términos de la serie alterna es menor que el quinto término, o sea, que es menor que 0,001 (véase Problema 15).

PROBLEMAS VARIOS

46. Demostrar que $y = J_p(x)$ definida por (*16*), página 232, satisface la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

La serie de $J_p(x)$ converge para todo x [Problema 106(*a*)]. Como una serie de potencias se puede derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia, se tiene para todo x,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{p+2n}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (p+2n)\, x^{p+2n-1}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (p+2n)(p+2n-1)\, x^{p+2n-2}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!}$$

Entonces,

$$(x^2-p^2)y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{p+2n+2}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p^2 x^{p+2n}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (p+2n)\, x^{p+2n}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!}$$

$$x^2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (p+2n)(p+2n-1)\, x^{p+2n}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!}$$

Sumando

$$\begin{aligned}x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{p+2n+2}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [-p^2 + (p+2n) + (p+2n)(p+2n-1)]\, x^{p+2n}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{p+2n+2}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [4n(n+p)]\, x^{p+2n}}{2^{p+2n}\, n!\,(n+p)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{p+2n}}{2^{p+2n-2}\,(n-1)!\,(n-1+p)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4x^{p+2n}}{2^{p+2n}\,(n-1)!\,(n+p-1)!} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4x^{p+2n}}{2^{p+2n}\,(n-1)!\,(n+p-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4x^{p+2n}}{2^{p+2n}\,(n-1)!\,(n+p-1)!} \\ &= 0\end{aligned}$$

47. Examinar la convergencia de la serie de potencias compleja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n^3 \cdot 3^{n-1}}$.

Como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^n}{(n+1)^3\cdot 3^n}\cdot\frac{n^3\cdot 3^{n-1}}{z^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3(n+1)^3}|z| = \frac{|z|}{3}$, la serie converge para $\frac{|z|}{3} < 1$, es decir, $|z| < 3$, y diverge para $|z| > 3$.

Para $|z| = 3$, la serie de valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n^3\cdot 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ de modo que la serie es absolutamente convergente y, por tanto, convergente para $|z| = 3$.

Así, pues, la serie converge dentro del círculo $|z| = 3$ y en su borde.

48. Suponiendo que la serie de potencias de e^x es válida para números complejos, demostrar que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Haciendo $z = ix$ in $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, se tiene

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$
$$= \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Análogamente, $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$. El resultado se llama *identidad de Euler*.

49. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ existe

Haciendo $f(x) = 1/x$ en (1), Problema 11, se halla

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{M} \leqq \ln M \leqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{M-1}$$

de donde remplazando M por n

$$\frac{1}{n} \leqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \leqq 1$$

Así que la sucesión $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ es acotada por 0 y 1.

Considérese $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Por integración, la desigualdad $\frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{n}$ con respecto a x de n a $n+1$ se tiene

$$\frac{1}{n+1} \leqq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} \quad \text{o} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqq 0$$

o sea, que $S_{n+1} - S_n \leqq 0$, de modo que S_n es monótona decreciente.

Como S_n es monótona decreciente y acotada tiene un límite. Este límite, que se denota por γ, es igual a 0,577215 . . . y se llama *constante de Euler*. No se sabe todavía si γ es racional o no.

50. Demostrar que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$, con $u_k > 0$, converge si $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge.

Por la ecuación (1) del Problema 28, Capítulo 4, $1 + x \leqq e^x$ para $x > 0$, de modo que

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k) = (1 + u_1)(1 + u_2)\cdots(1 + u_n) \leqq e^{u_1}\cdot e^{u_2}\cdots e^{u_n} = e^{u_1+u_2+\cdots+u_n}$$

Como $u_1 + u_2 + \cdots$ converge, se sigue que P_n es una sucesión monótona creciente acotada y que tiene, por tanto, un límite, con lo que se demuestra el resultado pedido.

51. Demostrar que la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ es $C-1$ sumable hacia $1/2$.

La sucesión de sumas parciales es $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

Entonces, $S_1 = 1$, $\dfrac{S_1+S_2}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{S_1+S_2+S_3}{3} = \dfrac{1+0+1}{3} = \dfrac{2}{3}$, $\ldots$.

Continuando así se obtiene la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots$, en la que el término n-ésimo

$T_n = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ n/(2n-1) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ Así $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}$ y se tiene el resultado.

52. (*a*) Demostrar que si $x > 0$ y $p > 0$,

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^p}\,du$$
$$= e^{-x}\left\{\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \cdots (-1)^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{x^{p+n}}\right\}$$
$$(-1)^{n+1} p(p+1)\cdots(p+n)\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}\,du$$

(*b*) Mediante (*a*) demostrar que

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^p}\,du \sim e^{-x}\left\{\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \cdots\right\} = S(x)$$

o sea, que la serie de la derecha es un desarrollo asintótico de la función del primer miembro.

(*a*) Integrando por partes, se tiene

$$I_p = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^p}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_x^b e^{-u}u^{-p}\,du$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left\{(-e^{-u})(u^{-p})\Big|_x^b - \int_x^b (-e^{-u})(-pu^{-p-1})\,du\right\}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{e^{-b}}{b^p} - p\int_x^b \frac{e^{-u}}{u^{p+1}}\,du\right\}$$
$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+1}}\,du = \frac{e^{-x}}{x^p} - pI_{p+1}$$

Análogamente $I_{p+1} = \dfrac{e^{-x}}{x^{p+1}} - (p+1)I_{p+2}$ de modo que

$$I_p = \frac{e^{-x}}{x^p} - p\left\{\frac{e^{-x}}{x^{p+1}} - (p+1)I_{p+2}\right\} = \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1)I_{p+2}$$

Y siguiendo así se llega al resultado pedido.

(*b*) Sea $S_n(x) = e^{-x}\left\{\dfrac{1}{x^p} - \dfrac{p}{x^{p+1}} + \dfrac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \cdots (-1)^n \dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{x^{p+n}}\right\}$.

Entonces, $R_n(x) = f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1}p(p+1)\cdots(p+n)\displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}\,du$. Ahora bien,

$$|R_n(x)| = p(p+1)\ldots(p+n)\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}\,du \leqq p(p+1)\ldots(p+n)\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{x^{p+n+1}}\,du$$
$$\leqq \frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{x^{p+n+1}}$$

puesto que $\displaystyle\int_x^\infty e^{-u}\,du \leqq \int_0^\infty e^{-u}\,du = 1$. Luego

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^n R_n(x)| \leqq \lim_{|x|\to\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{|x|^p} = 0$$

y se sigue que $\lim_{|x|\to\infty} x^n R_n(x) = 0$. Luego queda demostrado lo dicho.

Nótese que como $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{p(p+1)\cdots(p+n)/x^{p+n+1}}{p(p+1)\cdots(p+n-1)/x^{p+n}}\right| = \frac{p+n}{|x|}$, se tiene para todo x fijo, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty$ y la serie diverge para todo x según el criterio del cociente.

Problemas propuestos

CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES DE CONSTANTES

53. (*a*) Demostrar que la serie $\frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ converge y (*b*) hallar su suma. *Sol.* (*b*) 1/12

54. Demostrar que la convergencia o divergencia de una serie no se afecta (*a*) multiplicando cada término por la misma constante no nula, (*b*) quitando (o añadiendo) un número finito de términos.

55. Si Σu_n y Σv_n convergen hacia A y B, respectivamente, demostrar que $\Sigma(u_n + v_n)$ converge hacia $A + B$.

56. Demostrar que la serie $\frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^3 + \cdots = \Sigma(\frac{3}{2})^n$ diverge.

57. Descubrir la falacia: Sea $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Entonces $S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1$ y $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$. Luego $1 = 0$.

CRITERIO DE COMPARACION Y CRITERIO DEL COCIENTE

58. Estudiar la convergencia de:

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$, (*d*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 5^n}$, (*e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}$, (*f*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+2)n^{4/3}}$.

Sol. (*a*) conv., (*b*) div., (*c*) div., (*d*) conv., (*e*) div., (*f*) conv.

59. Investigar la convergencia de (*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{3/2}}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+10n^3}}$. *Sol.* (*a*) conv., (*b*) div.

60. Demostrar el criterio de comparación para divergencia (véase página 225).

61. Demostrar mediante el criterio de comparación que

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leqq 1$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n}$ diverge, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge.

62. Demostrar los resultados (*b*) y (*c*) del criterio del cociente, página 225.

63. Examinar la convergencia de:

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\ \operatorname{tg}^{-1}(1/n^3)$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen} n}{n(1+e^{-n})}$, (*d*) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}^2(1/n)$.

Sol. (*a*) conv., (*b*) div., (*c*) div., (*d*) div.

64. Si Σu_n converge, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

65. (*a*) Examinar la convergencia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$. (*b*) La respuesta a (*a*) ¿contradice lo enunciado sobre la serie p de la página 225 de que $\Sigma\, 1/n^p$ converge para $p > 1$? *Sol.* (*a*) div.

CRITERIO INTEGRAL

66. Examinar la convergencia de: (*a*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^3-1}$, (*b*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^3}$, (*c*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$, (*d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, (*e*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$, (*f*) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \dfrac{2^{\ln(\ln n)}}{n \ln n}$. *Sol.* (*a*) div., (*b*) conv., (*c*) conv., (*d*) conv., (*e*) div., (*f*) div.

67. Demostrar que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, donde p es una constante, (*a*) converge si $p > 1$ y (*b*) diverge si $p \leqq 1$.

68. Demostrar que $\dfrac{9}{8} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{5}{4}$.

69. Estudiar la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\operatorname{tg}^{-1} n}}{n^2+1}$.
Sol. conv.

70. (*a*) Demostrar que $\frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{3} \leqq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \leqq \frac{2}{3}n^{3/2} + n^{1/2} - \frac{2}{3}$.
(*b*) Utilícese (*a*) para estimar el valor de $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{100}$, dando el error máximo.
(*c*) Mostrar cómo se puede mejorar la exactitud en (*b*) estimando, por ejemplo, $\sqrt{10} + \sqrt{11} + \cdots + \sqrt{100}$ y sumándolo al valor de $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{9}$ calculado con un grado de exactitud deseado.
Sol. (*b*) 671,5 ± 4,5

SERIES ALTERNAS

71. Examinar la convergencia de: (*a*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$, (*b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+2n+2}$, (*c*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{3n-1}$, (*d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{1}{n}$, (*e*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$. *Sol.* (*a*) conv., (*b*) conv., (*c*) div., (*d*) conv., (*e*) div.

72. (*a*) ¿Cuál es el máximo error absoluto que se comete aproximando la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$ por la suma de los primeros 5 términos? *Sol.* 1/192

(*b*) ¿Cuál es el mínimo número de términos que han de tomarse para que se tengan 3 decimales exactos?
Sol. 8 términos

73. (*a*) Demostrar que $S = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{1^3} - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} - \cdots\right)$.

(*b*) ¿Cuántos términos de la serie del segundo miembro habrá que tomar para calcular S con 6 decimales exactos?
Sol. (*b*) al menos 100 términos

CONVERGENCIAS ABSOLUTA Y CONDICIONAL

74. Examinar la convergencia absoluta o condicional de:

(*a*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$ (*c*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$ (*e*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(*b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ (*d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^3}{(n^2+1)^{4/3}}$ (*f*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n-1}$

Sol. (*a*) abs. conv., (*b*) cond. conv., (*c*) cond. conv., (*d*) div., (*e*) abs. conv., (*f*) abs. conv.

75. Demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\pi a}{x^2+n^2}$ converge absolutamente para cualesquiera reales x y a.

76. Si $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge a S, demostrar que la serie reagrupada $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}S$. Explicar.
[Sugerencia: Tómese $\frac{1}{2}$ en la primera serie y escríbasela en la forma $0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \cdots$; sumándola luego término a término con la primera serie. Obsérvese que $S = \ln 2$, como se demuestra en el Problema 96.]

77. Demostrar que los términos de una serie absolutamente convergente se pueden reagrupar siempre sin alterar la suma.

CRITERIO DEL COCIENTE

78. Estudiar la convergencia de:
$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$, $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$, $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$, $(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}$, $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$.

Sol. (*a*) conv. (abs.), (*b*) conv., (*c*) div., (*d*) conv. (abs.), (*e*) div.

79. Mostrar que el criterio del cociente no se puede utilizar para establecer la convergencia condicional de una serie.

80. Demostrar que (*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge y (*b*) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

OTROS CRITERIOS

81. Establecer la validez del criterio de la raíz n-ésima de la página 226.

82. Aplicar el criterio de la raíz n-ésima en los Problemas 78(*a*), (*c*), (*d*) y (*e*).

83. Demostrar que $\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 + (\frac{1}{3})^5 + (\frac{2}{3})^6 + \cdots$ converge.

84. Estudiar la convergencia de (*a*) $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9} + \cdots$, (*b*) $\frac{2}{9} + \frac{2\cdot 5}{9\cdot 12} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{9\cdot 12\cdot 15} + \cdots$.
Sol. (*a*) div., (*b*) conv.

85. Si a, b y d son números positivos y $b > a$, demostrar que

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots$$

converge si $b - a > d$, y diverge si $b - a \leqq d$.

SERIES DE FUNCIONES

86. Hallar el dominio de convergencia de las series:
$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$, $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$, $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$, $(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$, $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$

Sol. (*a*) $-1 \leqq x \leqq 1$, (*b*) $-1 < x \leqq 3$, (*c*) todo $x \neq 0$, (*d*) $x > 0$, (*e*) $x \leqq 0$.

87. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} x^n$ converge para $-1 \leqq x < 1$.

CONVERGENCIA UNIFORME

88. Empleando la definición, investigar la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]}$$

[Sugerencia: Descomponer el término n-ésimo en fracciones parciales y mostrar que la n-ésima suma parcial es $S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$.]

Sol. No es uniformemente convergente en ningún intervalo que incluya el $x = 0$; uniformemente convergente en cualquier otro intervalo.

89. Hacer directamente el Problema 30 obteniendo primero $S_n(x)$.

90. Investigar por cualquier método la convergencia y convergencia uniforme de las series:

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 nx}{2^n-1}$, (*c*) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$, $x \geqq 0$.

Sol. (*a*) conv. para $|x| < 3$; unif. conv. para $|x| \leqq r < 3$. (*b*) unif. conv. para todo x. (*c*) conv. para $x \geqq 0$; no unif. conv. para $x \geqq 0$, pero unif. conv. para $x \geqq r > 0$.

91. Si $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$, demostrar que

(*a*) $F(x)$ es continua para todo x, (*b*) $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$, (*c*) $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ es continua en todo punto.

92. Demostrar que $\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)dx = 0$.

93. Demostrar que $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{senh} n\pi}$ tiene derivadas de todo orden para todo real x.

94. Estudiar si la sucesión $u_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es uniformemente convergente.

95. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{(1+x/n)^n} = 1 - e^{-1}$.

SERIES DE POTENCIAS

96. (*a*) Demostrar que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$.

(*b*) Demostrar que $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$.

[Sugerencia: Aplicar que $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$ e integrar.]

97. Demostrar que $\operatorname{sen}^{-1} x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$, $-1 \leqq x \leqq 1$.

98. Calcular (*a*) $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$, (*b*) $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x}\,dx$ con 3 decimales justificando los pasos.

Sol. (*a*) 0,461, (*b*) 0,486

99. Calcular (*a*) sen 40°, (*b*) cos 65°, (*c*) tg 12° con 3 decimales exactos.

Sol. (*a*) 0,643, (*b*) 0,423, (*c*) 0,213

100. Comprobar los desarrollos 4, 5 y 6 de la página 231.

101. Multiplicando la serie por sen x y cos x, comprobar que 2 sen x cos x = sen $2x$.

102. Mostrar que $e^{\cos x} = e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{6!}+\cdots\right)$, $-\infty < x < \infty$.

103. Obtener los desarrollos

(*a*) $\operatorname{tgh} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad -1 < x < 1$

(*b*) $\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$

104. Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\end{cases}$. Demostrar que existe la serie formal de Taylor en torno a $x = 0$ que corresponde a $f(x)$, pero que no converge hacia la función dada para ningún $x \neq 0$.

[Sugerencia: Véase Problema 38, Capítulo 4.]

105. Demostrar que

$$(a)\quad \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots \quad \text{para } -1<x<1$$

$$(b)\quad \{\ln(1+x)\}^2 = x^2 - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{2x^3}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{2x^4}{4} - \cdots \text{ para } -1<x\leq 1$$

PROBLEMAS VARIOS

106. Demostrar que la serie $J_p(x)$ converge (a) para todo x, (b) absoluta y uniformemente en cualquier intervalo finito.

107. Demostrar que $(a)\ \dfrac{d}{dx}\{J_0(x)\} = -J_1(x)$, $(b)\ \dfrac{d}{dx}\{x^p J_p(x)\} = x^p J_{p-1}(x)$,

$(c)\ J_{p+1}(x) = \dfrac{2p}{x}J_p(x) - J_{p-1}(x)$.

108. Suponiendo que el resultado del Problema 107(c) es válido para $p = 0, -1, -2, \ldots$, demostrar que $(a)\ J_{-1}(x) = -J_1(x)$, $(b)\ J_{-2}(x) = J_2(x)$, $(c)\ J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

109. Demostrar que $e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x)\,t^p$.

[Sugerencia: Escribir el primer miembro como $e^{xt/2}e^{-x/2t}$, desarrollar y aplicar el Problema 108.]

110. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{n(n+2)^2}$ es absoluta y uniformemente convergente en todo punto del círculo $|z| = 1$ y de su interior.

111. (a) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ para todo x en el intervalo común de convergencia $|x| < R$ con $R > 0$, demostrar que $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ (b) Aplicar (a) para mostrar que si el desarrollo de Taylor de una función existe, el desarrollo es único.

112. Supóngase que $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = L$. Demostrar que Σu_n converge o diverge según que $L < 1$ o $L > 1$. Si $L = 1$ el criterio falla.

113. Demostrar que el radio de convergencia de la serie $\Sigma a_n x^n$ se puede determinar mediante los límites siguientes, cuando existen, y dar ejemplos $(a)\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $(b)\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, $(c)\ \displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

114. Usar el Problema 113 para hallar el radio de convergencia de la serie del Problema 22.

115. (a) Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que la serie Σu_n sea convergente es que, dado un $\epsilon > 0$, exista un $N > 0$ que depende de ϵ tal que $|S_p - S_q| < \epsilon$ siempre que $p > N$ y $q > N$, con $S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$.

(b) Utilizar (a) para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\,3^n}$ converge.

(c) ¿Cómo se podría aplicar (a) para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge?

[Sugerencia: Aplicar el criterio de convergencia de Cauchy, página 43.]

116. Demostrar que la serie hipergeométrica (página 232) (a) es absolutamente convergente para $|x| < 1$, (b) divergente para $|x| > 1$, (c) absolutamente convergente para $|x| = 1$ si $a + b - c < 0$, (d) satisface la ecuación diferencial $x(1-x)y'' + \{c - (a+b+1)x\}y' - aby = 0$.

117. Si $F(a, b; c; x)$ es la función hipergeométrica definida por la serie de la página 232, demostrar que (a) $F(-p, 1; 1; -x) = (1+x)^p$, $(b)\ xF(1, 1; 2; -x) = \ln(1+x)$, $(c)\ F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2) = (\text{sen}^{-1} x)/x$.

118. Hallar la suma de la serie $S(x) = x + \dfrac{x^3}{1\cdot 3} + \dfrac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$.

[Sugerencia: Mostrar que $S'(x) = 1 + x\,S(x)$ y resolver ésta.] *Sol.* $e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{-x^2/2}\,dx$

119. Demostrar que

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots = \sqrt{e}\left(1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{1}{2^3\cdot 3!\cdot 7}+\frac{1}{2^4\cdot 4!\cdot 9}-\cdots\right)$$

120. Establecer el criterio de Dirichlet de la página 228.

121. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ es uniformemente convergente en todo intervalo que no incluya $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ [Sugerencia: Aplicar el criterio de Dirichlet, página 228, y el Problema 94, Capítulo 1.]

122. Demostrar los resultados de la página 232 sobre la serie binómica.
[Sugerencia: Estudiar las formas de Lagrange y de Cauchy para el resto en el teorema de Taylor.]

123. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ uniformemente para todo x, pero no absolutamente.

124. Demostrar que $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$

125. Si $x = ye^y$, demostrar que $y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}}{n!}x^n$ para $-1/e < x \leqq 1/e$.

126. Demostrar que la ecuación $e^{-\lambda} = \lambda - 1$ tiene solo una raíz real dada por

$$\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}e^{-n}}{n!}$$

127. Sea $\frac{x}{e^x-1} = 1 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_3 x^3}{3!} + \cdots$. (*a*) Mostrar que los números B_n, llamados *números de Bernoulli*, satisfacen la fórmula de recurrencia $(B+1)^n - B^n = 0$, donde B^k se remplaza formalmente por B_k después de desarrollar. (*b*) Mediante (*a*), o de alguna otra manera, determinar $B_1, \ldots, B_6$.
Sol. (*b*) $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$

128. (*a*) Demostrar que $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{2}\left(\coth\frac{x}{2} - 1\right)$. (*b*) Usar el Problema 127 y la parte (*a*) para mostrar que $B_{2k+1} = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$

129. Deducir los desarrollos en serie:

(*a*) $\coth x = \frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\cdots+\frac{B_{2n}(2x)^{2n}}{(2n)!\,x}+\cdots$

(*b*) $\cot x = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\cdots(-1)^n\frac{B_{2n}(2x)^{2n}}{(2n)!\,x}+\cdots$

(*c*) $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{2(2^{2n}-1)B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots$

(*d*) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\cdots(-1)^{n-1}\frac{2(2^{2n-1}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots$

[Sugerencia: Para (*a*) utilizar el Problema 128; para (*b*) cámbiese x por ix en (*a*); para (*c*) empléese $\operatorname{tg} x = \cot x - 2\cot 2x$; para (*d*) úsese $\operatorname{cosec} x = \cot x + \operatorname{tg} x/2$.]

130. Demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ converge.

131. Aplicar la definición para demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.

132. Demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$, donde $0 < u_n < 1$, converge si, y solo si, Σu_n converge.

133. (*a*) Demostrar que $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge para $\frac{1}{2}$. (*b*) Calcular el producto infinito en (*a*) con 2 decimales exactos y comparar con el valor exacto.

134. Demostrar que la serie $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \cdots$ es $C - 1$ sumable hacia cero.

135. Demostrar que el método de sumabilidad de Cesàro es regular. [Sugerencia: Véase Problema 28, Capítulo 3.]

136. Demostrar que la serie $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$ converge hacia $1/(1-x)^2$ para $|x| < 1$.

137. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se dice *sumable en sentido de Abel* hacia S si existe $S = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demostrar que

(*a*) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ es sumable en el sentido de Abel hacia 1 4 y

(*b*) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2}$ es sumable en el sentido de Abel hacia 1 8.

138. Demostrar que la serie doble $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(m^2+n^2)^p}$, con p constante, converge o diverge según que $p > 1$ o $p \leqq 1$, respectivamente.

139. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,du = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \ldots \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-u}}{u^{n+1}}\,du$.

(*b*) Mediante (*a*) demuéstrese que $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,du \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots$

140. Demostrar que

$$\int_x^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \sim \frac{\cos x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right) + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\right)$$

$$\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \sim \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right)$$

141. Si $f(x)$ tiene un desarrollo asintótico dado por $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{-n}$, demostrar que $\int_x^{\infty} f(x)\,dx$ tiene el desarrollo asintótico $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n x^{1-n}}{n-1}$.

Capítulo 12

Integrales impropias

DEFINICION DE INTEGRAL IMPROPIA

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice *impropia* si

(1) $a = -\infty$ o $b = \infty$ o ambos, es decir, si uno de los límites de integración o los dos se hacen infinitos.
(2) $f(x)$ no es acotada en uno o más puntos de $a \leqq x \leqq b$, puntos que se llaman *singularidades* de $f(x)$.

Las integrales de los casos (1) y (2) se llaman *impropias de primera y de segunda especie*, respectivamente. Las que presentan ambas condiciones (1) y (2) se dicen *integrales impropias de tercera especie.*

Ejemplo 1: $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$ integral impropia de primera especie.

Ejemplo 2: $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ integral impropia de segunda especie.

Ejemplo 3: $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ integral impropia de tercera especie.

Ejemplo 4: $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es *integral propia*, pues $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

En este capítulo se dan criterios de convergencia para integrales impropias y se verá que tales criterios y las demostraciones de los teoremas a que dan lugar están en estrecha analogía con los criterios de convergencia y los teoremas correspondientes para series (véase Capítulo 11).

INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

Sea $f(x)$ acotada e integrable en un intervalo finito $a \leqq x \leqq b$. Se define entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

La integral del primer miembro se dice *convergente* o *divergente* según que exista o no el límite del segundo miembro. Obsérvese que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es perfectamente análoga a la serie $\sum_{n=1}^\infty u_n$ con $u_n = f(n)$, en tanto que $\int_a^b f(x)\,dx$ corresponde a las sumas parciales de esa serie. Suele escribirse M en vez de b en *(1)*.

Análogamente se define

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{a\to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

y se dice que la integral del primer miembro es convergente o divergente según que el límite del segundo miembro exista o no.

Ejemplo 1: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$ así que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge hacia 1.

Ejemplo 2: $\int_{-\infty}^u \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^u \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} a)$. como este límite no existe $\int_{-\infty}^u \cos x\,dx$ es divergente

De parecida manera se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \tag{3}$$

siendo x_0 un número real, y se dice que la integral es convergente o divergente según que converjan o no las integrales del segundo miembro, como en las definiciones (*1*) y (*2*).

INTEGRALES IMPROPIAS ESPECIALES DE PRIMERA ESPECIE

1. **Integral geométrica o exponencial** $\int_a^\infty e^{-tx}\,dx$, con t constante convergente para $t > 0$ y divergente para $t \leqq 0$. Nótese la analogía con la serie geométrica de $r = e^{-t}$ de modo que $e^{-tx} = r^x$.

2. **La integral p de primera especie** $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, con p constante y $a > 0$; convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqq 1$. Compárese con la serie p

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

Los criterios que siguen se dan para casos en que un límite de integración es ∞. Hay criterios semejantes cuando un límite de integración es $-\infty$ (con el cambio de variable $x = -y$ el límite de integración queda ∞). Si no se dice otra cosa, se supone que $f(x)$ es continua y, por tanto, integrable en todo intervalo finito $a \leqq x \leqq b$.

1. **Criterio de comparación** para integrales de integrando no negativo.

(*a*) *Convergencia*: Sea $g(x) \geqq 0$ para todo $x \geqq a$, y supóngase que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Entonces si $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ para todo $x \geqq a$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ también converge.

Ejemplo: Como $\frac{1}{e^x + 1} \leqq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ e $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ converge $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1}$ también converge.

(*b*) *Divergencia*: Sea $g(x) \geqq 0$ para todo $x \geqq a$ y supóngase que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge. Entonces si $f(x) \geqq g(x)$ para todo $x \geqq a$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ también diverge.

Ejemplo: Como $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ para $x \geqq 2$ e $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ diverge (integral p con $p = 1$), $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ también diverge.

2. **Criterio del cociente** para integrales de integrando no negativo.

(*a*) Si $f(x) \geqq 0$ y $g(x) \geqq 0$, y si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ o ∞, luego $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen ambas o divergen ambas.

(*b*) Si $A = 0$ en (*a*) e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, luego $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(*c*) Si $A = \infty$ en (*a*) e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge, luego $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Este criterio se relaciona con el de comparación y se usa muy a menudo en vez de éste. En particular, tomando $g(x) = 1/x^p$, se tiene en virtud de conocidas propiedades de la integral p el

Teorema 1. Sea $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A$. Entonces

(i) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si $p > 1$ y A es finito

(ii) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge si $p \leqq 1$ y $A \neq 0$ (puede ser infinito).

Ejemplo 1: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{4x^4+25}$ converge, pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 2: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ diverge, pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$.

Se pueden obtener criterios parecidos con $g(x) = e^{-tx}$.

3. **Criterio de la serie** para integrales con integrandos no negativos. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge o diverge según que Σu_n, con $u_n = f(n)$ converja o diverja.

4. **Convergencias absoluta y condicional.** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se dice *absolutamente convergente* si $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ converge. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, pero $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se dice *condicionalmente convergente*.

Teorema 2. $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ converge, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, es decir, que una integral absolutamente convergente es convergente.

Ejemplo 1: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente, pues $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| dx \leqq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ e $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ converge.

Ejemplo 2· $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge (véase Prob. 11), pero $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ no converge (véase Prob. 12).

Así que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es condicionalmente convergente.

Cualquiera de los criterios utilizados para integrales de integrando no negativo se puede emplear como criterio de convergencia absoluta.

INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

Si $f(x)$ no es acotada solamente en el extremo $x = a$ del intervalo $a \leqq x \leqq b$, se define entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Si el límite del segundo miembro de (*4*) existe se dice que la integral del primer miembro es *convergente*; en caso contrario, que es *divergente*.

Análogamente, si $f(x)$ no es acotada solo en el extremo $x = b$ del intervalo $a \leqq x \leqq b$, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \tag{5}$$

Y en tal caso la integral del primer miembro de (*5*) se dice convergente o divergente según que exista o no el límite del segundo miembro.

Si $f(x)$ no es acotada solamente en un punto interior $x = x_0$ del intervalo $a \leqq x \leqq b$, se define entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0+} \int_a^{x_0-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0+} \int_{x_0+\epsilon_2}^b f(x)\,dx \tag{6}$$

La integral del primer miembro de (*6*) converge o diverge según que existan o no los límites del segundo miembro.

Se pueden generalizar estas definiciones al caso en que $f(x)$ no sea acotada en dos o más puntos del intervalo $a \leqq x \leqq b$.

VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY

Puede suceder que los límites del segundo miembro de (*6*) no existan cuando ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero independientemente. En tal caso es posible que el límite exista si se elige $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ en (*6*), o sea, escribiendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)\,dx \right\} \tag{7}$$

Si entonces existe el límite del segundo miembro de (*7*) se dice que este valor límite es el *valor principal de Cauchy* de la integral del primer miembro. Véase Problema 14.

INTEGRALES IMPROPIAS ESPECIALES DE SEGUNDA ESPECIE

1. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge si $p < 1$ y diverge si $p \geqq 1$.
2. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge si $p < 1$ y diverge si $p \geqq 1$.

Estas se pueden llamar *integrales p de segunda especie*. Nótese que si $p \leqq 0$ las integrales ya no son impropias.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

Los criterios que siguen se dan para el caso en que $f(x)$ no es acotada en un punto $x = a$ solamente del intervalo $a \leqq x \leqq b$. Hay criterios parecidos para cuando $f(x)$ no es acotada en $x = b$ o en $x = x_0$ con $a < x_0 < b$.

1. Criterio de comparación para integrales de integrando no negativo.

(*a*) *Convergencia*: Sea $g(x) \geqq 0$ con $a < x \leqq b$ y supóngase que $\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

Entonces si $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ para $a < x \leqq b$, $\int_a^b f(x)\,dx$ también converge.

Ejemplo: $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ para $x > 1$. Entonces como $\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$ converge (integral p con $a = 1$, $p = \frac{1}{2}$), $\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ también converge.

(*b*) *Divergencia*: Sea $g(x) \geqq 0$ con $a < x \leqq b$ y supóngase que $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge. Entonces si $f(x) \geqq g(x)$ para $a < x \leqq b$, $\int_a^b f(x)\,dx$ también diverge.

Ejemplo: $\dfrac{\ln x}{(x-3)^4} > \dfrac{1}{(x-3)^4}$ para $x > 3$. Entonces como $\int_3^6 \dfrac{dx}{(x-3)^4}$ diverge (integral p con $a = 3$, $p = 4$), $\int_3^6 \dfrac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$ también diverge.

2. Criterio del cociente para integrales de integrando no negativo.

(*a*) Si $f(x) \geqq 0$ y $g(x) \geqq 0$ para $a < x \leqq b$, y si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ o ∞, luego $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen ambas o divergen ambas.

(*b*) Si $A = 0$ en (*a*), e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, luego $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(*c*) Si $A = \infty$ en (*a*), e $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, luego $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Este criterio se relaciona con el de comparación y es un útil sustituto del mismo. En particular, tomando $g(x) = 1/(x-a)^p$ se tiene por las conocidas propiedades de la integral p el

Teorema 3. Sea $\lim\limits_{x\to a+} (x-a)^p f(x) = A$. Entonces,

(i) $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si $p < 1$ y A es finito.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge si $p \geqq 1$ y $A \neq 0$ (A puede ser infinito).

Si $f(x)$ no es acotada solamente en el límite superior se remplazan estas condiciones por las del

Teorema 4. Sea $\lim\limits_{x\to b-} (b-x)^p f(x) = B$. Entonces,

(i) $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si $p < 1$ y B es finito.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge si $p \geqq 1$ y $B \neq 0$ (B puede ser infinito).

Ejemplo 1: $\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converge, pues $\lim\limits_{x\to 1+} (x-1)^{1/2} \cdot \dfrac{1}{(x^4-1)^{1/2}} = \lim\limits_{x\to 1+} \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4-1}} = \dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 2: $\int_0^3 \dfrac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ diverge, pues $\lim\limits_{x\to 3-} (3-x) \cdot \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

3. **Convergencias absoluta y condicional.** $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice *absolutamente convergente* si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. Si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge pero $\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$

se dice *condicionalmente convergente*.

Teorema 5.

Si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. Es decir, que una integral absolutamente convergente es convergente.

Ejemplo: Como $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ e $\int_\pi^{4\pi} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ converge (integral p con $a = \pi$, $p = \frac{1}{3}$), se sigue $\int_\pi^{4\pi} \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx$ converge y así $\int_\pi^{4\pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ converge (absolutamente).

Cualquiera de los criterios que se aplican a integrales de integrando no negativo se puede utilizar como criterio de convergencia absoluta.

INTEGRALES IMPROPIAS DE TERCERA ESPECIE

Las integrales impropias de tercera especie se pueden expresar por las de primera y segunda especies, y entonces el problema de su convergencia se resuelve mediante lo ya visto.

INTEGRALES IMPROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO. CONVERGENCIA UNIFORME

Sea

$$\phi(\alpha) \quad = \quad \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx \tag{8}$$

Esta integral es análoga a una serie de funciones. Para estudiar las condiciones bajo las cuales se puede derivar o integrar $\phi(\alpha)$ con respecto a α es conveniente introducir el concepto de *convergencia uniforme* para integrales en analogía con la de las series.

Se supondrá que la integral (*8*) converge para $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, o sea, brevemente en el intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Definición.

La integral (*8*) se dice *uniformemente convergente* en $[\alpha_1, \alpha_2]$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un número N que depende de ϵ, pero no de α tal que

$$\left|\phi(\alpha) - \int_a^u f(x,\alpha)\,dx\right| < \epsilon \quad \text{para todo } u > N \text{ y todo } \alpha \text{ de } [\alpha_1, \alpha_2]$$

Lo cual se puede enunciar de otra manera observando que $\left|\phi(\alpha) - \int_a^u f(x,\alpha)\,dx\right| = \left|\int_u^\infty f(x,\alpha)\,dx\right|$ que corresponde en una serie infinita al valor absoluto del resto después de N términos.

La definición anterior y las propiedades de la convergencia uniforme que resultan se formulan aquí para integrales impropias de primera especie. Pero los resultados son análogos a los que se pueden formular para integrales impropias de segunda y tercera especies.

CRITERIOS ESPECIALES DE CONVERGENCIA UNIFORME DE INTEGRALES

1. **Criterio *M* de Weierstrass.** Si existe una función $M(x) \geqq 0$ tal que

(*a*) $|f(x,\alpha)| \leqq M(x) \qquad \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2,\ x > a$

(*b*) $\int_a^\infty M(x)\,dx$ converge,

entonces $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ es uniforme y absolutamente convergente en $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$.

Ejemplo: Como $\left|\frac{\cos \alpha x}{x^2+1}\right| \leqq \frac{1}{x^2+1}$ e $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ converge, se sigue que $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2+1}\,dx$ es uniforme y absolutamente convergente para todo valor real α.

Como en el caso de las series, es posible que una integral sea uniformemente convergente sin serlo absolutamente y viceversa.

2. **Criterio de Dirichlet.** Supóngase que

(*a*) $\psi(x)$ es una función positiva monótona decreciente que tiende a cero con $x \to \infty$

(*b*) $\left|\int_a^u f(x,\alpha)\,dx\right| < P$ para todo $u > a$ y $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$.

Entonces la integral $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,\psi(x)\,dx$

es uniformemente convergente para $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$.

TEOREMAS SOBRE INTEGRALES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Teorema 6.

Si $f(x,\alpha)$ es continua para $x \geqq a$ y $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, y si $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ es uniformemente convergente para $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, entonces $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ es continua en $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$. En particular, si α_0 es un punto de $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, se puede escribir

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \phi(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx \tag{9}$$

Si α_0 es uno de los extremos, se aplica el límite a la derecha o el límite a la izquierda.

Teorema 7.

En las condiciones del Teorema 6 se puede integrar $\phi(\alpha)$ con respecto a α de α_1 a α_2 para obtener:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\,d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^\infty \left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx \tag{10}$$

que corresponde a un cambio de orden de integración.

Teorema 8.

Si $f(x,\alpha)$ es continua y tiene una derivada parcial con respecto a α continua para $x \geqq a$ y $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, y si $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$ converge uniformemente en $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, entonces, si a no depende de α,

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx \tag{11}$$

Si a depende de α este resultado se modifica fácilmente (véase regla de Leibnitz, página 163).

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

El cálculo de integrales definidas impropias se puede realizar de varias maneras. Una técnica útil consiste en introducir un parámetro en forma adecuada en la integral y luego derivar o integrar con respecto al parámetro, aplicando las propiedades anteriores de la convergencia uniforme.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Se define la transformada de Laplace de una función $F(x)$ como

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx \quad (12)$$

y es análoga a una serie de potencias como se ve al remplazar e^{-s} por t de modo que $e^{-sx} = t^x$. Muchas propiedades de las series de potencias se aplican también a las transformadas de Laplace. La breve tabla adjunta de transformadas de Laplace es muy útil. a es una constante real.

$F(x)$	$\mathcal{L}\{F(x)\}$	
a	$\frac{a}{s}$	$s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\operatorname{sen} ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$x^n \quad n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$Y'(x)$	$s\mathcal{L}\{Y(x)\} - Y(0)$	
$Y''(x)$	$s^2\mathcal{L}\{Y(x)\} - sY(0) - Y'(0)$	

Una aplicación útil de las transformadas de Laplace es su empleo para la solución de ecuaciones diferenciales (véase Problemas 34-36).

INTEGRALES MULTIPLES IMPROPIAS

Las definiciones y resultados obtenidos para integrales sencillas impropias se pueden generalizar a las múltiples impropias.

Problemas resueltos

INTEGRALES IMPROPIAS

1. Clasificar según la especie las integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}$ (c) $\displaystyle\int_{3}^{10} \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$ (e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$

(a) *Segunda especie* (integrando no acotado en $x = 0$ y $x = -1$).

(b) *Tercera especie* (el límite de integración es infinito y el integrando no es acotado para $\operatorname{tg} x = -1$).

(c) *No* es impropia (el integrando no es acotado en $x = 2$, pero este punto *está fuera* del intervalo de integración $3 \leq x \leq 10$).

(d) *Primera especie* (los límites de integración son infinitos y el integrando es acotado).

(e) *No* es impropia (pues $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ aplicando la regla de L'Hôpital).

2. Mostrar cómo se transforma la integral impropia de segunda especie $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$, en (*a*) integral impropia de primera especie, (*b*) integral propia.

(*a*) Considérese $\int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ con $0 < \epsilon < 1$, por ejemplo. Sea $2 - x = \frac{1}{y}\cdot$ Entonces la integral se convierte en la $\int_1^{1/\epsilon} \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$. Para $\epsilon \to 0+$, se ve que el estudio de la integral dada es equivalente al de la $\int_1^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$ que es de primera especie.

(*b*) Haciendo $2 - x = v^2$ en la integral de (*a*), se convierte en $2\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{dv}{\sqrt{v^2+2}}$. Se reduce, pues, a considerar la $2\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v^2+2}}$ que es integral propia.

Por lo anterior se ve que una integral impropia de primera especie *puede* transformarse en una impropia de segunda especie y recíprocamente (cosa que *siempre* se puede hacer).

Se ve, asimismo, que una integral impropia se puede transformar en propia, pero solo *a veces*.

INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

3. Demostrar el criterio de comparación (página 261) para integrales impropias de primera especie.

Como $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ para $x \geqq a$, se tiene, utilizando la Propiedad 7, página 81,

$$0 \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

Pero, por hipótesis, la última integral existe. Así, pues,

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ existe, y, por tanto } \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

4. Demostrar el criterio del cociente (*a*) de la página 262.

Por hipótesis, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$. Dado, pues, un $\epsilon > 0$ existe N tal que $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \epsilon$ si $x \geqq N$. Así que para $x \geqq N$ se tiene

$$A - \epsilon \leqq \frac{f(x)}{g(x)} \leqq A + \epsilon \quad \text{o} \quad (A-\epsilon)\,g(x) \leqq f(x) \leqq (A+\epsilon)\,g(x)$$

Entonces

$$(A-\epsilon)\int_N^b g(x)\,dx \leqq \int_N^b f(x)\,dx \leqq (A+\epsilon)\int_N^b g(x)\,dx \tag{1}$$

No se pierde generalidad eligiendo $A - \epsilon > 0$.

Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, luego por la desigualdad de la derecha en (*1*),

$$\lim_{b\to\infty} \int_N^b f(x)\,dx \text{ existe y así, pues, } \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge, luego por la desigualdad de la izquierda en (*1*),

$$\lim_{b\to\infty} \int_N^b f(x)\,dx = \infty \text{ y así, pues, } \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ diverge}$$

Para los casos en que $A = 0$ y $A = \infty$ véase Problema 41.

Como se ve en el problema anterior hay en general una notable semejanza entre las demostraciones para series y para integrales impropias.

5. Estudiar la convergencia de: (*a*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{3x^4+5x^2+1}$, (*b*) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx$.

(*a*) **Método 1:** Para x grande, el integrando es aproximadamente $x/3x^4 = 1/3x^3$.

Como $\dfrac{x}{3x^4+5x^2+1} \leqq \dfrac{1}{3x^3}$, y $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ converge (integral p con $p=3$), se sigue por el criterio de comparación que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{3x^4+5x^2+1}$ también converge.

Nótese que el objeto de estudiar el integrando para x elevado es obtener una integral apropiada para comparación.

Método 2: Sea $f(x) = \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$, e $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx$ converge, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ también converge según el criterio del cociente.

Obsérvese que en la función de comparación $g(x)$ se ha descartado el factor $\frac{1}{3}$, pero desde luego se le habría podido incluir.

Método 3: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{x}{3x^4+5x^2+1}\right) = \frac{1}{3}$. Luego por el Teorema 1, página 262, la integral pedida converge.

(*b*) **Método 1:** Para x grande, el integrando es aproximadamente $x^2/\sqrt{x^6} = 1/x$.

Para $x \geqq 2$, $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^6+1}} \geqq \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}$. Como $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx$ también diverge.

Método 2: Sea $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Luego como $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, e $\displaystyle\int_2^\infty g(x)\,dx$ diverge, $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ también diverge.

Método 3: Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\right) = 1$, la integral pedida diverge por el Teorema 1, página 262.

Obsérvese que el Método 1 puede exigir (y así es a menudo) que se obtenga un factor de desigualdad apropiado (en este caso $\frac{1}{2}$ o cualquier constante menor que $\frac{1}{2}$) antes de que se pueda aplicar el criterio de comparación. Pero los Métodos 2 y 3 no exigen esto.

6. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ (por la regla de L'Hôpital o de otro modo). Entonces, por el Teorema 1, con $A=0$, $p=2$, la integral dada converge. Compárese con el Problema 10(*a*), Capítulo 11.

7. Estudiar la convergencia de:

(*a*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a}\,dx$, con a positiva constante (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\ln x}{x+a} = \infty$. De donde por el Teorema 1, página 262, con $A=\infty$, $p=1$, la integral dada diverge.

(*b*) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_\pi^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

La primera integral del segundo miembro es convergente [véase Problema 1(*e*)].

Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = 0$, la segunda integral del segundo miembro también converge según el Teorema 1, página 262, con $A=0$ y $p=3/2$.

Así que la integral dada es convergente.

8. Estudiar la convergencia de: (*a*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x}\,dx$, (*b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx$.

(*a*) Sea $x = -y$. La integral se convierte en $-\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy$.

Método 1: $\dfrac{e^{-y}}{y} \leqq e^{-y}$ para $y \geqq 1$. Entonces como $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-y}\,dy$ converge $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy$ converge; con lo que la integral dada converge.

Método 2: $\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^2\left(\frac{e^{-y}}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$. Luego la integral dada converge, según el Teorema 1, página 262, con $A = 0$ y $p = 2$.

(*b*) Escríbase la integral dada $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx + \int_0^{\infty}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx$. Haciendo $x = -y$ en la primera integral ésta se convierte en la $-\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{y^3-y^2}{y^6+1}\,dy$. Ya que $\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^3\left(\frac{y^3-y^2}{y^6+1}\right) = 1$, la integral converge.

Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{x^3+x^2}{x^6+1}\right) = 1$, la segunda integral converge.

Luego la integral dada converge.

CONVERGENCIAS ABSOLUTA Y CONDICIONAL DE INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

9. Demostrar que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge si $\displaystyle\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ converge o sea, que una integral absolutamente convergente es convergente.

Se tiene $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$, o sea, $0 \leqq f(x) + |f(x)| \leqq 2|f(x)|$. Entonces,

$$0 \leqq \int_a^b [f(x) + |f(x)|]\,dx \leqq 2\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Si $\displaystyle\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ converge, se deduce que $\displaystyle\int_a^{\infty}[f(x)+|f(x)|]\,dx$ converge. De donde, por sustracción, $\displaystyle\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$, que converge, se ve que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge

10. Demostrar que $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge.

Método 1:

$\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{x^2}$ para $x \geqq 1$. Luego, por el criterio de comparación, se ve que $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge y entonces $\displaystyle\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ converge, es decir, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge absolutamente y, por tanto, converge según el Problema 9.

Método 2:

Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{\cos x}{x^{1/2}}\right| = 0$, se sigue por el Teorema 1, página 262, con $A = 0$ y $p = 3/2$, que $\displaystyle\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ converge y, por tanto, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$

11. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge.

Como $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge (pues $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en $0 < x \leq 1$ y $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$) no hay más que demostrar que $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge

Método 1: Integrando por partes

$$\int_1^M \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M + \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} + \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad (1)$$

o bien tomando los límites en ambos miembros de (*1*) para $M \to \infty$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{M \to \infty} \frac{\cos M}{M} = 0$,

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \cos 1 + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad (2)$$

Como la integral del segundo miembro de (*2*) converge según el Problema 10, se deduce entonces lo dicho. La técnica de integración por partes para establecer la convergencia es muy útil a menudo en la práctica.

Método 2:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

Haciendo $x = v + n\pi$, la sumación se convierte en

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + n\pi}\,dv = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v}\,dv - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + \pi}\,dv + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + 2\pi}\,dv - \cdots$$

que es una serie alterna. Como $\frac{1}{v + n\pi} \leq \frac{1}{v + (n+1)\pi}$ y $\operatorname{sen} v \geq 0$ en $[0, \pi]$, se sigue que

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + n\pi}\,dv \leq \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + (n+1)\pi}\,dv$$

Asimismo.
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + n\pi}\,dv \leq \lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \frac{dv}{n\pi} = 0$$

Así que cada término de la serie alterna es en valor absoluto menor o igual que el término precedente, y el término *n*-ésimo tiende, pues, a cero con $n \to \infty$. De donde, por el criterio para las series alternas (página 226), la serie y, por tanto, la integral convergen.

12. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge condicionalmente.

Como por el Problema 11 la integral dada converge, hay que mostrar que no es absolutamente convergente, esto es, que $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ diverge.

Como en el Problema 11, Método 2, se tiene

$$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + n\pi}\,dv$$

Ahora bien, $\frac{1}{v + n\pi} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$ para $0 \leq v \leq \pi$. De donde

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v + n\pi}\,dv \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} v\,dv = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Como $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{2}{(n+1)\pi}$ diverge, la serie del segundo miembro de (*1*) diverge por el criterio de comparación.

Por tanto, $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ diverge y se tiene el resultado pedido.

INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE. VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY

13. (*a*) Demostrar que $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ converge y (*b*) hallar su valor.

El integrando no es acotado en $x = -1$. Se define entonces la integral por

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-1+\epsilon}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left. \frac{(x+1)^{2/3}}{2/3} \right|_{-1+\epsilon}^{7} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(6 - \frac{3}{2}\epsilon^{2/3}\right) = 6$$

lo que muestra que la integral converge hacia 6.

14. Determinar si $\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$ converge (*a*) en el sentido corriente, (*b*) en el sentido del valor principal de Cauchy.

(*a*) Por definición

$$\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\epsilon_1 \to 0+} \int_{-1}^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\epsilon_2 \to 0+} \int_{1+\epsilon_2}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0+} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon_1^2}\right) + \lim_{\epsilon_2 \to 0+} \left(\frac{1}{2\epsilon_2^2} - \frac{1}{32}\right)$$

y como los límites no existen, la integral no converge en el sentido corriente.

(*b*) Como

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\epsilon}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} \right\} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{32} \right\} = \frac{3}{32}$$

la integral existe en el sentido del valor principal de Cauchy. El valor principal es 3/32.

15. Investigar la convergencia de:

(*a*) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{2/3}}$ (*c*) $\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$ (*e*) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}}$, $n > 1$.

(*b*) $\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\, dx$ (*d*) $\int_{-1}^{1} \frac{2^{\operatorname{sen}^{-1} x}}{1-x}\, dx$

(*a*) $\lim_{x \to 2+} (x-2)^{2/3} \cdot \frac{1}{x^2(x^3-8)^{2/3}} = \lim_{x \to 2+} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^2+2x+4}\right)^{2/3} = \frac{1}{8\sqrt[3]{18}}$. Por tanto, la integral converge según el Teorema 3(*i*), página 264.

(*b*) $\lim_{x \to 0+} x^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} = 1$. Así que la integral diverge según el Teorema 3(*ii*) de la página 264.

(*c*) Escríbase la integral en la forma $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} + \int_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$.

Como $\lim_{x \to 1+} (x-1)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \frac{1}{2}$, la primera integral converge.

Como $\lim_{x \to 5-} (5-x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \frac{1}{2}$, la segunda integral converge.

Con lo que la integral dada converge.

(*d*) $\lim_{x \to 1-} (1-x) \cdot \frac{2^{\operatorname{sen}^{-1} x}}{1-x} = 2^{\pi/2}$. Y la integral diverge.

Otro método:

$$\frac{2^{\operatorname{sen}^{-1}x}}{1-x} \geqq \frac{2^{-\pi/2}}{1-x}, \quad \text{e} \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x} \text{ diverge. De modo que la integral dada diverge.}$$

(e) $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi-} (\pi/2 - x)^{1/n} \cdot \dfrac{1}{(\cos x)^{1/n}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi-} \left(\dfrac{\pi/2 - x}{\cos x}\right)^{1/n} = 1.$ Luego la integral converge.

16. Si m y n son reales, demostrar que $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ (*a*) converge si $m > 0$ y $n > 0$, simultáneamente, y (*b*) diverge en cualquier otro caso.

(*a*) Para $m \geqq 1$ y $n \geqq 1$, simultáneamente, la integral converge puesto que el integrando es continuo en $0 \leqq x \leqq 1$. Escribiendo la integral como

$$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \;+\; \int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \tag{1}$$

Si $0 < m < 1$ y $0 < n < 1$, la primera integral converge, pues, $\lim_{x\to 0+} x^{1-m} \cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1} = 1$, aplicando el Teorema 3(*i*), página 264, con $p = 1 - m$ y $a = 0$.

Análogamente, la segunda integral converge puesto que $\lim_{x\to 1-} (1-x)^{1-n} \cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1} = 1$, aplicando el Teorema 4(*i*), página 264, con $p = 1 - n$ y $b = 1$.

Así, pues, la integral dada converge si $m > 0$ y $n > 0$ simultáneamente.

(*b*) Si $m \leqq 0$, $\lim_{x\to 0+} x \cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \infty$. Con lo que la primera integral en (*1*) diverge, sea cual fuere el valor de n, según el Teorema 3(*ii*), página 264, con $p = 1$ y $a = 0$.

Asimismo, la segunda integral diverge si $n \leqq 0$ sea cual fuere el valor de m y se deduce el resultado pedido.

En el Capítulo 13 se trata de algunas propiedades importantes de esta integral, llamada *integral beta* o *función beta*.

17. Demostrar que $\int_0^{\pi} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx$ converge condicionalmente.

Con $x = 1/y$, la integral se convierte en la $\int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy$ y se deduce el resultado pedido por el Problema 12.

INTEGRALES IMPROPIAS DE TERCERA ESPECIE

18. Si n es real, demostrar que $\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$ (*a*) converge si $n > 0$ y (*b*) diverge si $n \leqq 0$.

Escríbase la integral en la forma

$$\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx \;+\; \int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx \tag{1}$$

(*a*) Si $n \geqq 1$, la primera integral en (*1*) converge porque el integrando es continuo en $0 \leqq x \leqq 1$.

Si $0 < n < 1$, la primera integral en (*1*) es impropia de segunda especie en $x = 0$. Como $\lim_{x\to 0+} x^{1-n} \cdot x^{n-1}e^{-x} = 1$, la integral converge según el Teorema 3(*i*), página 264, con $p = 1 - n$ y $a = 0$.

De modo que la primera integral converge para $n > 0$.

Si $n > 0$, la segunda integral en (*1*) es impropia de primera especie. Como $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x^{n-1}e^{-x} = 0$ (por la regla de L'Hôpital u otro método cualquiera), esta integral converge según el Teorema 1(*i*), página 262, con $p = 2$.

Así, pues, la segunda integral también converge para $n > 0$, y, por tanto, la integral dada converge para $n > 0$.

(*b*) Si $n \leqq 0$, la primera integral de (*1*) diverge puesto que $\lim_{x \to 0+} x \cdot x^{n-1} e^{-x} = \infty$ [Teorema 3(*ii*), página 264].

Si $n \leqq 0$, la segunda integral de (*1*) converge, pues $\lim_{x \to \infty} x \cdot x^{n-1} e^{-x} = 0$ [Teorema 1(*i*), página 262].

Como la primera integral en (*1*) diverge en tanto que la segunda converge, su suma también diverge, es decir, la integral dada es divergente si $n \leqq 0$.

En el Capítulo 13 se trata de algunas propiedades interesantes de esta integral, llamada *función gamma*.

CONVERGENCIA UNIFORME DE INTEGRALES IMPROPIAS

19. (*a*) Calcular $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\, dx$ con $\alpha > 0$.

(*b*) Demostrar que la integral en (*a*) converge uniformemente hacia 1 para $\alpha \geqq \alpha_1 > 0$.

(*c*) Explicar por qué la integral no converge uniformemente hacia 1 para $\alpha > 0$.

(*a*) $$\phi(\alpha) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \lim_{b \to \infty} -e^{-\alpha x}\Big|_{x=0}^{b} = \lim_{b \to \infty} 1 - e^{-\alpha b} = 1 \quad \text{si } \alpha > 0.$$

Así que la integral converge hacia 1 para todo $\alpha > 0$.

(*b*) **Método 1,** por la definición

La integral converge uniformemente hacia 1 en $\alpha \geqq \alpha_1 > 0$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un N dependiente de ϵ pero no de α tal que $\left| 1 - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\, dx \right| < \epsilon$ para todo $u > N$.

Como $\left| 1 - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\, dx \right| = |1 - (1 - e^{-\alpha u})| = e^{-\alpha u} \leqq e^{-\alpha_1 u} < \epsilon$ para $u > \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\epsilon} = N$, con lo que se obtiene el resultado.

Método 2; utilizando el criterio M de Weierstrass.

Como $\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \alpha e^{-\alpha x} = 0$ para $\alpha \geqq \alpha_1 > 0$, se puede elegir $|\alpha e^{-\alpha x}| < \frac{1}{x^2}$ para x suficientemente grande, $x \geqq x_0$ por ejemplo. Tomando $M(x) = \frac{1}{x^2}$ y observando que $\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, se deduce que la integral dada es uniformemente convergente hacia 1 para $\alpha \geqq \alpha_1 > 0$.

(*c*) Al tender $\alpha_1 \to 0$, el número N en el primer método de (*b*) aumenta indefinidamente, de modo que la integral no puede ser uniformemente convergente para $\alpha > 0$.

20. Si $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$ es uniformemente convergente para $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, demostrar que $\phi(\alpha)$ es continua en este intervalo.

Sea $\phi(\alpha) = \int_a^u f(x, \alpha)\, dx + R(u, \alpha)$, con $R(u, \alpha) = \int_u^\infty f(x, \alpha)\, dx$.

Entonces, $\phi(\alpha + h) = \int_a^u f(x, \alpha + h)\, dx + R(u, \alpha + h)$ y

$$\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha) = \int_a^u \{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)\}\, dx + R(u, \alpha + h) - R(u, \alpha)$$

Así, pues,

$$|\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha)| \leqq \int_a^u |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)|\, dx + |R(u, \alpha + h)| + |R(u, \alpha)| \qquad (1)$$

Como la integral es uniformemente convergente en $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, para cada $\epsilon > 0$ se puede hallar un N independiente de α tal que para $u > N$,

$$|R(u, \alpha + h)| < \epsilon/3, \quad |R(u, \alpha)| < \epsilon/3 \qquad (2)$$

Como $f(x, \alpha)$ es continua, se puede hallar $\delta > 0$ correspondiente a cada $\epsilon > 0$ tal que

$$\int_a^u |f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)|\, dx < \epsilon/3 \quad \text{con } |h| < \delta \qquad (3)$$

Llevando (2) y (3) a (1), se ve que $|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)|<\epsilon$ para $|h|<\delta$, con lo que $\phi(\alpha)$ es continua.

Nótese que en esta demostración se supone que α y $\alpha+h$ están ambos en el intervalo $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$. De modo que si $\alpha=\alpha_1$, por ejemplo, $h>0$ y se supone la continuidad a la derecha.

Nótese también la analogía de esta demostración con la analogía para las series.

De manera parecida se pueden demostrar otras propiedades de integrales uniformemente convergentes.

21. (*a*) Mostrar que $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx \neq \int_0^\infty\left(\lim\limits_{\alpha\to 0+}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx$. (*b*) Explicar el resultado de (*a*).

(*a*) $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx = \lim\limits_{\alpha\to 0+} 1 = 1$ por el Problema 19(*a*).

$$\int_0^\infty\left(\lim_{\alpha\to 0+}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0. \quad \text{Y se tiene el resultado pedido.}$$

(*b*) Como $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx$ no es uniformemente convergente para $\alpha \geqq 0$ (véase Problema 19), no hay seguridad de que $\phi(\alpha)$ sea continua para $\alpha \geqq 0$. Así que $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\phi(\alpha)$ puede no ser igual a $\phi(0)$.

22. (*a*) Demostrar que $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+r^2}$ para $\alpha>0$ y cualquier valor real de r.

(*b*) Demostrar que la integral en (*a*) converge uniforme y absolutamente para $a \leqq \alpha \leqq b$, siendo $0<a<b$ y r cualquiera.

(*a*) Por la fórmula de integración 34, página 84, se tiene

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-\alpha x}\cos rx\,dx = \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{-\alpha x}(r\operatorname{sen} rx-\alpha\cos rx)}{\alpha^2+r^2}\right|_0^M = \frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}$$

(*b*) Esto se deduce inmediatamente por el criterio *M* de Weierstrass para integrales, notando que $|e^{-\alpha x}\cos rx| \leqq e^{-ax}$ y que $\int_0^\infty e^{-ax}dx$ converge.

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

23. Demostrar que $\int_0^{\pi/2}\ln\operatorname{sen} x\,dx = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

La integral dada converge [Problema 42(*f*)]. Con $x=\pi/2-y$,

$$I = \int_0^{\pi/2}\ln\operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln\cos y\,dy = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx$$

Entonces,

$$2I = \int_0^{\pi/2}(\ln\operatorname{sen} x+\ln\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\operatorname{sen} 2x\,dx - \int_0^{\pi/2}\ln 2\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln\operatorname{sen} 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad (1)$$

Haciendo $2x=v$,

$$\int_0^{\pi/2}\ln\operatorname{sen} 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\operatorname{sen} v\,dv = \tfrac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi/2}\ln\operatorname{sen} v\,dv + \int_{\pi/2}^{\pi}\ln\operatorname{sen} v\,dv\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}(I+I) = I \quad \text{(haciendo } v=\pi-u \text{ en la última integral)}$$

Con lo que (1) se convierte en $2I = I-\frac{\pi}{2}\ln 2$ o $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

24. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\pi x \ln \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

Sea $x = \pi - y$. Entonces, aplicando los resultados del problema anterior,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi x \ln \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^\pi (\pi - u) \ln \operatorname{sen} u \, du = \int_0^\pi (\pi - x) \ln \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \pi \int_0^\pi \ln \operatorname{sen} x \, dx - \int_0^\pi x \ln \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\pi^2 \ln 2 - J \end{aligned}$$

o $J = -\dfrac{\pi^2}{2}\ln 2$.

25. (*a*) Demostrar que $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$ es uniformemente convergente para $\alpha \geqq 1$.

(*b*) Mostrar que $\phi(\alpha) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. (*c*) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

(*d*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n)}\,\frac{\pi}{2}$.

(*a*) Se deduce del criterio de Weierstrass, puesto que $\dfrac{1}{x^2+\alpha} \leqq \dfrac{1}{x^2+1}$ para $\alpha \geqq 1$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ converge.

(*b*) $$\phi(\alpha) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{\sqrt{\alpha}}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}.$$

(*c*) Por (*b*), $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$. Derivando ambos miembros respecto de α, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{x^2+\alpha}\right) dx = -\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = -\frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2}$$

resultado que justifica el Teorema 8, página 266, ya que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$ es uniformemente convergente para $\alpha \geqq 1$ (pues $\dfrac{1}{(x^2+\alpha)^2} \leqq \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ e $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ converge).

Tomando el límite para $\alpha \to 1+$, aplicando el Teorema 6, página 266, se halla que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$.

(*d*) Derivando ambos miembros de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2}\alpha^{-1/2}$ n veces, se encuentra que

$$(-1)(-2)\cdots(-n)\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\alpha^{-(2n+1)/2}$$

lo que se justifica como en la parte (*c*). Con $\alpha \to 1+$, es

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\, n!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\frac{\pi}{2}$$

Mediante la sustitución $x = \operatorname{tg}\theta$, la integral se transforma en la $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\, d\theta$ con lo que se llega al resultado pedido.

26. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x \sec rx}\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$ con $a, b > 0$.

Por el Problema 22 y el Teorema 7, página 266, se tiene

$$\int_{x=0}^{\infty}\left\{\int_{\alpha=a}^{b} e^{-\alpha x}\cos rx\,d\alpha\right\}dx \;=\; \int_{\alpha=a}^{b}\left\{\int_{x=0}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos rx\,dx\right\}d\alpha$$

o sea

$$\int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}\cos rx}{-x}\Bigg|_{\alpha=a}^{b}dx \;=\; \int_{\alpha=a}^{b}\frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}\,d\alpha$$

esto es,

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\sec rx}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$$

27. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+1), \quad \alpha>0.$

Por el Problema 22 y el Teorema 7, página 266, se tiene

$$\int_0^{r}\left\{\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos rx\,dx\right\}dr \;=\; \int_0^{\infty}\left\{\int_0^{r} e^{-\alpha x}\cos rx\,dr\right\}dx$$

o bien

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} rx}{x}\,dx \;=\; \int_0^{r}\frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}\,dr \;=\; \operatorname{tg}^{-1}\frac{r}{\alpha}$$

Integrando otra vez con respecto a r de 0 a r se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\,dx \;=\; \int_0^{r}\operatorname{tg}^{-1}\frac{r}{\alpha}\,dr \;=\; r\operatorname{tg}^{-1}\frac{r}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+r^2)$$

por integración por partes. El resultado pedido se obtiene haciendo $r=1$.

28. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$

Como $\displaystyle e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2} \leqq \frac{1-\cos x}{x^2}$ para $\alpha \geqq 0, x \geqq 0$ e $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge [véase Problema 7(*b*)], se sigue por el criterio de Weierstrass que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ es uniformemente convergente y representa una función continua de α para $\alpha \geqq 0$ (Teorema 6, página 266). Haciendo entonces $\alpha \to 0+$, utilizando el Problema 27, se tiene

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{\alpha\to 0}\left\{\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+1)\right\} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

29. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \;=\; \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$

Integrando por partes,

$$\int_{\epsilon}^{M}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\cos x)\Bigg|_{\epsilon}^{M}+\int_{\epsilon}^{M}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \;=\; \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon}-\frac{1-\cos M}{M}+\int_{\epsilon}^{M}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

Tomando límite para $\epsilon \to 0+$ y $M \to \infty$ resulta que

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \;=\; \int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Como $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \;=\; 2\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x^2}\,dx \;=\; \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\,du$ haciendo $u=x/2$, se tiene también $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$

30. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{sen}^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3}{(2i)^3}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} x$$

Luego

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

PROBLEMAS VARIOS

31. Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

Por el Problema 6, la integral converge. Sea

$$I_M = \int_0^M e^{-x^2}\,dx = \int_0^M e^{-y^2}\,dy \quad \text{y sea} \quad \lim_{M\to\infty} I_M = I,$$

el valor de la integral. Entonces,

$$I_M^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}_M} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

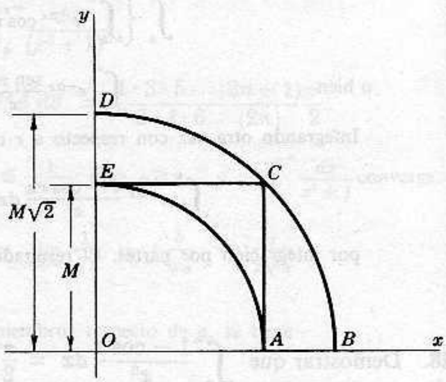


Fig. 12-1

siendo $\mathcal{R}_M$ el cuadrado $OACE$ de lado M (véase Figura 12-1). Como el integrando es positivo, se tiene

$$\iint_{\mathcal{R}_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq I_M^2 \leq \iint_{\mathcal{R}_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \tag{1}$$

siendo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ las regiones del primer cuadrante limitadas por los círculos de radios M y $M\sqrt{2}$ respectivamente.

En coordenadas polares (*1*) da

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\phi \leq I_M^2 \leq \int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{M\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\phi \tag{2}$$

o

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-M^2}) \leq I_M^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2M^2}) \tag{3}$$

Y tomando el límite para $M\to\infty$ en (*3*) se tiene $\lim_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \pi/4$ e $I = \sqrt{\pi}/2$.

32. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx$.

Sea $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx$. Integrando por partes y tomando límites adecuadamente,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^\infty -xe^{-x^2}\operatorname{sen}\alpha x\,dx = \tfrac{1}{2}e^{-x^2}\operatorname{sen}\alpha x\Big|_0^\infty - \tfrac{1}{2}\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx = -\frac{\alpha}{2}I$$

La derivación bajo el signo integral la justifica el Teorema 8, página 266, y el que la $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\operatorname{sen}\alpha x\,dx$ sea uniformemente convergente para todo α (pues, por el criterio de Weierstrass, xe^{-x^2} sen $\alpha x \mid \leqq xe^{-x^2}$ y $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ converge).

Por el Problema 31 y en vista de la convergencia uniforme y la consiguiente continuidad de la integral dada (puesto que $|e^{-x^2}\cos\alpha x| \leqq e^{-x^2}$ e $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge, con lo que se aplica el criterio de Weierstrass) se tiene $I(0) = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Despejando $\dfrac{dI}{d\alpha} = -\dfrac{\alpha}{2}I$ con la condición $I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, se halla $I(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha^2/4}$.

33. (*a*) Demostrar que $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (*b*) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})}\,dx$.

(*a*) Se tiene $\quad I'(\alpha) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2}(1-\alpha/x^2)\,dx$.

La derivación es válida, pues el integrando permanece acotado al tender $x \to 0+$ y para x suficientemente grande

$$e^{-(x-\alpha/x)^2}(1-\alpha/x^2) \quad = \quad e^{-x^2+2\alpha-\alpha^2/x^2}(1-\alpha/x^2) \leqq \quad e^{2\alpha}e^{-x^2}$$

de modo que $I'(\alpha)$ converge uniformemente para $\alpha \geqq 0$ por el criterio de Weierstrass, ya que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge. Ahora bien,

$$I'(\alpha) \quad = \quad 2\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2}\,dx \;-\; 2\alpha\int_0^\infty \frac{e^{-(x-\alpha/x)^2}}{x^2}\,dx \quad = \quad 0$$

como se ve haciendo $\alpha/x = y$ en la segunda integral. Así que $I(\alpha) = c$, una constante. Para determinar c, hágase $\alpha \to 0+$ en la integral buscada y utilícese el Problema 31 para obtener $c = \sqrt{\pi}/2$.

(*b*) Por (*a*), $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2}\,dx \;=\; \int_0^\infty e^{-(x^2-2\alpha+\alpha^2x^{-2})}dx \;=\; e^{2\alpha}\int_0^\infty e^{-(x^2+\alpha^2x^{-2})}dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Luego $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(x^2+\alpha^2x^{-2})}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}$. Haciendo $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2}$.

34. Comprobar que: (*a*) $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$; (*b*) $\mathcal{L}\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$.

(*a*)
$$\mathcal{L}\{e^{ax}\} \;=\; \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}\,dx \;=\; \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-(s-a)x}\,dx$$
$$=\; \lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)M}}{s-a} \;=\; \frac{1}{s-a} \qquad \text{si } s > a$$

(*b*) $\mathcal{L}\{\cos ax\} \;=\; \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}\cos ax\,dx \;=\; \frac{s}{s^2+a^2}$ por el Problema 22 con $\alpha = s$, $r = a$.

Otro método, empleando números complejos.

Según la parte (*a*), $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$. Cámbiese a por ai. Entonces.

$$\mathcal{L}\{e^{aix}\} \;=\; \mathcal{L}\{\cos ax + i\,\text{sen}\,ax\} \;=\; \mathcal{L}\{\cos ax\} \;+\; i\,\mathcal{L}\{\text{sen}\,ax\}$$
$$=\; \frac{1}{s-ai} \;=\; \frac{s+ai}{s^2+a^2} \;=\; \frac{s}{s^2+a^2} + i\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

Igualando partes reales e imaginarias: $\mathcal{L}\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}\{\text{sen}\,ax\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

El método *formal* anterior se puede justificar por métodos del Capítulo 17.

35. Demostrar que (*a*) $\mathcal{L}\{Y'(x)\} = s\mathcal{L}\{Y(x)\} - Y(0)$, (*b*) $\mathcal{L}\{Y''(x)\} = s^2\mathcal{L}\{Y(x)\} - sY(0) - Y'(0)$ bajo condiciones adecuadas para $Y(x)$.

(*a*) Por definición,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y'(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx}Y'(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-sx}Y'(x)\,dx \\ &= \lim_{M\to\infty}\left\{e^{-sx}Y(x)\Big|_0^M + s\int_0^M e^{-sx}Y(x)\,dx\right\} \\ &= s\int_0^\infty e^{-sx}Y(x)\,dx - Y(0) = s\,\mathcal{L}\{Y(x)\} - Y(0)\end{aligned}$$

suponiendo s tal que $\lim_{M\to\infty} e^{-sM}Y(M) = 0$.

(*b*) Sea $U(x) = Y'(x)$. Luego según (*a*), $\mathcal{L}\{U'(x)\} = s\,\mathcal{L}\{U(x)\} - U(0)$. Con lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y''(x)\} &= s\,\mathcal{L}\{Y'(x)\} - Y'(0) = s[s\,\mathcal{L}\{Y(x)\} - Y(0)] - Y'(0) \\ &= s^2\,\mathcal{L}\{Y(x)\} - s\,Y(0) - Y'(0)\end{aligned}$$

36. Resolver la ecuación diferencial $Y''(x) + Y(x) = x$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 2$.

Tómese la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación diferencial dada. Entonces, por el Problema 35,

$$\mathcal{L}\{Y''(x) + Y(x)\} = \mathcal{L}\{x\}, \qquad \mathcal{L}\{Y''(x)\} + \mathcal{L}\{Y(x)\} = 1/s^2$$

y así

$$s^2\,\mathcal{L}\{Y(x)\} - s\,Y(0) - Y'(0) + \mathcal{L}\{Y(x)\} = 1/s^2$$

Despejando $\mathcal{L}\{Y(x)\}$ aplicando las condiciones dadas,

$$\mathcal{L}\{Y(x)\} = \frac{2s^2+1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} \qquad (1)$$

por descomposición en fracciones parciales.

Como $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{x\}$ y $\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\text{sen}\,x\}$, se deduce que $\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{x + \text{sen}\,x\}$.

Luego por (*1*), $\mathcal{L}\{Y(x)\} = \mathcal{L}\{x + \text{sen}\,x\}$, de donde se puede deducir que $Y(x) = x + \text{sen}\,x$, que es una solución como se puede comprobar.

Otro método:

Si $\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s)$, $f(s)$ se llama transformada *inversa* de Laplace de la $F(x)$ y se escribe $f(s) = \mathcal{L}^{-1}\{F(x)\}$. Por el Problema 78, $\mathcal{L}^{-1}\{f(s) + g(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}$. Luego por (*1*),

$$Y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = x + \text{sen}\,x$$

En la Tabla de la página 267 se pueden leer transformadas inversas de Laplace.

Problemas propuestos

INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

37. Estudiar la convergencia:

(*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ (*d*) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+4}$ (*g*) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$

(*b*) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3-1}}$ (*e*) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2+\text{sen}\,x}{x^2+1}\,dx$ (*h*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{x+e^{-x}}$

(*c*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$ (*f*) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x\,dx}{(\ln x)^3}$ (*i*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\,dx$

Sol. (*a*) conv., (*b*) div., (*c*) conv., (*d*) conv., (*e*) conv., (*f*) div., (*g*) conv., (*h*) div., (*i*) conv.

38. Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2ax+b^2} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$ si $b > |a|$.

39. Estudiar la convergencia de (*a*) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x} \ln x\, dx$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \ln(1+e^x)\, dx$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cosh x^2\, dx$.

Sol. (*a*) conv., (*b*) conv., (*c*) div.

40. Estudiar la convergencia indicando, donde sea posible, si es absoluta o condicional: (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3+1}\, dx$; (*b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx$, con a, b constantes positivas; (*c*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$; (*d*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$; (*e*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx$. *Sol.* (*a*) abs. conv., (*b*) abs. conv., (*c*) cond. conv., (*d*) div., (*e*) abs. conv.

41. Demostrar los criterios del cociente (*b*) y (*c*) de la página 262.

INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

42. Estudiar la convergencia de:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$ (*d*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{8-x^3}}\, dx$ (*g*) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{(3-x)^2}\, dx$ (*j*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x}$

(*b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ (*e*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln(1/x)}}$ (*h*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-x}\cos x}{x}\, dx$

(*c*) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1} x}}{x}\, dx$ (*f*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} x\, dx$ (*i*) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx$, $|k| < 1$

Sol. (*a*) conv., (*b*) div., (*c*) div., (*d*) conv., (*e*) conv., (*f*) conv., (*g*) div., (*h*) div., (*i*) conv., (*j*) conv.

43. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{4-x}$ diverge en el sentido usual, pero que converge en el sentido del valor principal de Cauchy. (*b*) Hallar el valor principal de Cauchy de la integral en (*a*) y dar una interpretación geométrica. *Sol.* (*b*) ln 4

44. Estudiar la convergencia indicando si es absoluta o condicional, donde sea posible:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$, (*b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$, (*c*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Sol. (*a*) abs. conv., (*b*) cond. conv., (*c*) div.

45. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{4/\pi} \left(3x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) dx = \frac{32\sqrt{2}}{\pi^3}$.

INTEGRALES IMPROPIAS DE TERCERA ESPECIE

46. Estudiar la convergencia de: (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x\, dx$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{x \ln(x+1)}}$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt[3]{x}\,(3+2\operatorname{sen} x)}$.

Sol. (*a*) conv., (*b*) div., (*c*) conv.

47. Estudiar la convergencia de: (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}$; (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{\operatorname{senh}(ax)}}$, $a > 0$.

Sol. (*a*) conv., (*b*) conv. si $a > 2$, div. si $0 < a \leqq 2$.

48. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh}(ax)}{\operatorname{senh}(\pi x)}\, dx$ converge si $0 \leqq |a| < \pi$ y diverge si $|a| \geqq \pi$.

49. Estudiar la convergencia indicando, cuando sea posible, si es absoluta o condicional:

(*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\operatorname{senh}\sqrt{x}}\, dx$. *Sol.* (*a*) cond. conv., (*b*) abs. conv.

CONVERGENCIA UNIFORME DE INTEGRALES IMPROPIAS

50. (*a*) Demostrar que $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$ es uniformemente convergente para todo α.
(*b*) Demostrar que $\phi(\alpha)$ es continua para todo α. (*c*) Hallar $\lim_{\alpha\to 0} \phi(\alpha)$. *Sol.* (*c*) $\pi/2$

51. Sea $\phi(\alpha) = \int_0^\infty F(x,\alpha)\,dx$, con $F(x,\alpha) = \alpha^2 x e^{-\alpha x^2}$. (*a*) Mostrar que $\phi(\alpha)$ no es continua en $\alpha = 0$, o sea, que $\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\infty F(x,\alpha)\,dx \neq \int_0^\infty \lim_{\alpha\to 0} F(x,\alpha)\,dx$. (*b*) Explicar el resultado en (*a*).

52. Hacer el Problema 51 si $F(x,\alpha) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}$.

53. Si $F(x)$ es acotada y continua para $-\infty < x < \infty$ y

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,F(\lambda)\,d\lambda}{y^2+(\lambda-x)^2}$$

demostrar que $\lim_{y\to 0} V(x,y) = F(x)$.

54. Demostrar (*a*) el Teorema 7 y (*b*) el Teorema 8 de la pagina 266.

55. Demostrar el criterio M de Weierstrass para la convergencia uniforme de integrales.

56. Demostrar que $\int_0^\infty F(x)\,dx$ converge, luego $\int_0^\infty e^{-\alpha x} F(x)\,dx$ converge uniformemente para $\alpha \geqq 0$.

57. Demostrar que (*a*) $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge uniformemente para $\alpha \geqq 0$, (*b*) $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1}\alpha$,
(*c*) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (compárese con los Problemas 27-29).

58. Enunciar la definición de convergencia uniforme de integrales impropias de segunda especie.

59. Enunciar y demostrar un teorema correspondiente al Teorema 8, página 266, si a es función diferenciable de α.

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Verificar los resultados siguientes. Justificar en cada caso todos los pasos.

60. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln(b/a), \quad a,b>0$

61. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x \operatorname{cosec} rx}\,dx = \operatorname{tg}^{-1}(b/r) - \operatorname{tg}^{-1}(a/r), \quad a,b,r>0$

62. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} rx}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-r}), \quad r \geqq 0$

63. $\int_0^\infty \frac{1-\cos rx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|r|$

64. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} rx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-ar}, \quad a,r \geqq 0$

65. (*a*) Demostrar que $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\left(\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha^2+b^2}{\alpha^2+a^2}\right), \quad \alpha \geqq 0.$

(*b*) Valiéndose de (*a*), demostrar que $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

[Los resultados de (*b*) y el Problema 60 son casos especiales de la *integral de Frullani*. $\int_0^\infty \frac{F(ax)-F(bx)}{x}\,dx = \{F(0)-F(\infty)\}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, que es válida con ligeras restricciones sobre F.]

66. Dada $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$, $\alpha > 0$. Demostrar que para $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^\infty x^{2p} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{(2p-1)}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\alpha^{(2p+1)/2}}$$

67. Si $a > 0$, $b > 0$, demostrar que $\int_0^\infty (e^{-a/x^2} - e^{-b/x^2})\,dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$.

68. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg}^{-1}(x/a) - \operatorname{tg}^{-1}(x/b)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ con $a > 0$, $b > 0$.

69. Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^3} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. [Sugerencia: Aplíquese el Problema 38.]

PROBLEMAS VARIOS

70. Demostrar que $\int_0^\infty \left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}^2 dx$ converge.

71. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}$ converge. $\left[\text{Sug.: Considerar } \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x} \text{ y utilícese } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x} \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^3\operatorname{sen}^2 x}.\right]$

72. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}$ diverge.

73. (*a*) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\,dx = \pi\ln(1+\alpha)$, $\alpha \geqq 0$.

(*b*) Con (*a*) mostrar que $\int_0^{\pi/2} \ln\operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

74. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{3}$.

75. Calcular (*a*) $\mathcal{L}\{1/\sqrt{x}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{\cosh ax\}$, (*c*) $\mathcal{L}\{(\operatorname{sen} x)/x\}$.

Sol. (*a*) $\sqrt{\pi/s}$, $s > 0$ (*b*) $\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > |a|$ (*c*) $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$, $s > 0$.

76. (*a*) Si $\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s)$, demostrar que $\mathcal{L}\{e^{ax}F(x)\} = f(s-a)$, (*b*) Calcular $\mathcal{L}\{e^{ax}\operatorname{sen} bx\}$.

Sol. (*b*) $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$

77. (*a*) Si $\mathcal{L}\{F(x)\} = f(s)$, demostrar que $\mathcal{L}\{x^n F(x)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$, dando restricciones adecuadas para $F(x)$.

(*b*) Calcular $\mathcal{L}\{x\cos x\}$. *Sol.* (*b*) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$, $s > 0$

78. Demostrar que $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)+g(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}$, enunciando cualesquiera restricciones necesarias.

79. Resolver, mediante transformadas de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas.

(*a*) $Y''(x) + 3Y'(x) + 2Y(x) = 0$; $Y(0) = 3$, $Y'(0) = 0$

(*b*) $Y''(x) - Y'(x) = x$; $Y(0) = 2$, $Y'(0) = -3$

(*c*) $Y''(x) + 2Y'(x) + 2Y(x) = 4$; $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$

Sol. (*a*) $Y(x) = 6e^{-x} - 3e^{-2x}$, (*b*) $Y(x) = 4 - 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$, (*c*) $Y(x) = 1 - e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$

80. Demostrar que $\mathcal{L}\{F(x)\}$ existe si $F(x)$ es casicontinua en todo intervalo finito $[0, b]$ con $b > 0$ y si $F(x)$ es de *orden exponencial* al tender $x \to \infty$, es decir, si existe una constante α tal que $|e^{-\alpha x}F(x)| < P$ (una constante) para $x > b$.

81. Si $f(s) = \mathcal{L}\{F(x)\}$ y $g(s) = \mathcal{L}\{G(x)\}$, demostrar que $f(s)\,g(s) = \mathcal{L}\{H(x)\}$, siendo

$$H(x) \;=\; \int_0^x F(u)\,G(x-u)\,du$$

se llama *convolución* de F y G, y se escribe $F{*}G$.

[Sug.: Escríbase $f(s)\,g(s) \;=\; \lim\limits_{M\to\infty}\left\{\int_0^M e^{-su}F(u)\,du\right\}\left\{\int_0^M e^{-sv}G(v)\,dv\right\}$

$$=\; \lim_{M\to\infty}\int_0^M\int_0^M e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\,du\,dv \quad \text{y hágase } u+v=t.]$$

82. (*a*) Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$. (*b*) Resolver $Y''(x) + Y(x) = R(x),\;\; Y(0) = Y'(0) = 0.$

(*c*) Resolver la ecuación integral $\quad Y(x) \;=\; x + \displaystyle\int_0^x Y(u)\,\mathrm{sen}\,(x-u)\,du.$ [Sug.: Aplicar el Problema 81.]

Sol. (*a*) $\frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,x - x\cos x)$, (*b*) $Y(x) = \displaystyle\int_0^x R(u)\,\mathrm{sen}\,(x-u)\,du$, (*c*) $Y(x) = x + x^3/6$

83. Sean $f(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ continuas en todo intervalo finito $a \leqq x \leqq b$ y supóngase que $g'(x) \leqq 0$. Supóngase también que $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ es acotada para todo $x \geqq a$ y que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

(*a*) Demostrar que $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx \;=\; -\int_a^\infty g'(x)\,h(x)\,dx.$

(*b*) Demostrar que la integral del segundo miembro y, por tanto, la del primero, es convergente. El resultado es que en las condiciones dadas sobre $f(x)$ y $g(x)$, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ converge y es el llamado *criterio integral de Abel*

[Sugerencia: Para (*a*), considérese $\lim\limits_{b\to\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ tras remplazar $f(x)$ por $h'(x)$ e integrando por partes. Para (*b*), demuéstrese primero que si $|h(x)| < H$ (una constante), entonces $\left|\displaystyle\int_a^b g'(x)\,h(x)\,dx\right| \leqq H\{g(a) - g(b)\}$; y luego hágase tender $b \to \infty$.]

84. Aplicar el Problema 83 para demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx$ y (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{sen}\,x^p\,dx,\;\; p > 1,$ convergen.

85. (*a*) Dado que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{sen}\,x^2\,dx \;=\; \int_0^\infty \cos x^2\,dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ [véase Problema 27 y 68(*a*), Capítulo 13], calcular

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{sen}\,(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(*b*) Explicar por qué el método del Problema 31 no se puede utilizar para calcular la integral múltiple en (*a*).
Sol. $\pi/4$

Capítulo 13

Funciones gamma y beta

FUNCION GAMMA

La función gamma, que se denota $\Gamma(n)$, se define por

$$\Gamma(n) \;=\; \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \qquad (1)$$

que es convergente para $n > 0$ (véase Problema 18, Capítulo 12).

Una fórmula de recurrencia para la función gamma es

$$\Gamma(n+1) \;=\; n\Gamma(n) \qquad (2)$$

donde $\Gamma(1) = 1$ (véase Problema 1). Por (*2*), $\Gamma(n)$ se puede calcular para todo $n > 0$ si se conocen los valores para $1 \leqq n < 2$ (0 en cualquier otro intervalo de longitud unidad) (véase tabla más adelante). En particular, si n es natural,

$$\Gamma(n+1) \;=\; n! \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

razón por la cual $\Gamma(n)$ suele llamarse *función factorial.*

Ejemplos: $\Gamma(2) = 1! = 1$, $\Gamma(6) = 5! = 120$, $\dfrac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)} = \dfrac{4!}{2!} = 12$.

Se puede demostrar (Problema 4) que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) \;=\; \sqrt{\pi} \qquad (4)$$

La relación recurrente (*2*) es una ecuación de diferencias que tiene por solución (*1*). Tomando (*1*) como definición de $\Gamma(n)$ para $n > 0$, se puede generalizar la función gamma para $n < 0$ aplicando (*2*) en la forma

$$\Gamma(n) \;=\; \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad (5)$$

Véase Problema 7, por ejemplo. Este proceso se llama *prolongación analítica.*

TABLA DE VALORES Y GRAFO DE LA FUNCION GAMMA

n	$\Gamma(n)$
1,00	1,0000
1,10	0,9514
1,20	0,9182
1,30	0,8975
1,40	0,8873
1,50	0,8862
1,60	0,8935
1,70	0,9086
1,80	0,9314
1,90	0,9618
2,00	1,0000

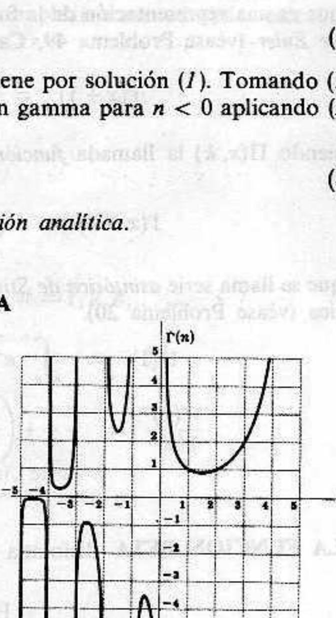


Fig. 13-1

FORMULA ASINTOTICA PARA $\Gamma(n)$

Si n es elevado saltan a la vista las dificultades de cálculo de $\Gamma(n)$. La fórmula siguiente tiene gran utilidad en ese caso

$$\Gamma(n+1) \;=\; \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta/12(n+1)} \qquad 0<\theta<1 \tag{6}$$

pues en los más de los casos prácticos el último factor, que para n grande se aproxima mucho a 1, se puede omitir. Si n es entero, puede escribirse

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{7}$$

donde $\sim$ significa «es aproximadamente igual a para n grande». Esta es la llamada fórmula de *aproximación factorial de Stirling o fórmula asintótica para n!*

ALGUNAS RELACIONES EN QUE ENTRA LA FUNCION GAMMA

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) \;=\; \frac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi} \qquad 0<x<1 \tag{8}$$

En particular si $x=\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

$$2^{2x-1}\,\Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) \;=\; \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) \tag{9}$$

Esta es la llamada *fórmula de duplicación* de la función gamma.

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\cdots\,\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) \;=\; m^{\frac{1}{2}-mx}(2\pi)^{(m-1)/2}\,\Gamma(mx) \tag{10}$$

(9) es un caso especial de (10) con $m=2$.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \;=\; x e^{\gamma x}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{m}\right)e^{-x/m}\right\} \tag{11}$$

que es una representación de la función gamma como producto infinito. La constante γ es la *constante de Euler* (véase Problema 49, Capítulo 11).

$$\Gamma(x+1) \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}\,k^x \;=\; \lim_{k\to\infty}\Pi(x,k) \tag{12}$$

siendo $\Pi(x,k)$ la llamada *función π de Gauss.*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}\left\{1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\ldots\right\} \tag{13}$$

que se llama serie *asintótica de Stirling* para la función gamma. La serie entre llaves es una serie asintótica (véase Problema 20).

$$\Gamma'(1) \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx \;=\; -\gamma \qquad \text{siendo } \gamma \text{ la } \textit{constante de Euler}. \tag{14}$$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \;=\; -\gamma+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots \tag{15}$$

LA FUNCION BETA denotada por $B(m,n)$ se define por

$$B(m,n) \;=\; \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \tag{16}$$

que es convergente para $m>0$, $n>0$. Véase Problema 16, Capítulo 12.

Las funciones beta y gamma se relacionan mediante la igualdad

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{17}$$

Véase Problema 11.

Muchas integrales se pueden calcular valiéndose de las funciones beta o gamma. Son útiles los dos resultados siguientes:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)} \tag{18}$$

válido para $m > 0$ y $n > 0$ [Problemas *(10)* y *(13)*] y

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \qquad 0<p<1 \tag{19}$$

Véase Problema 17.

INTEGRALES DE DIRICHLET

Si V es la región cerrada del primer octante limitada por la superficie $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$ y los planos coordenados, entonces, si todas las constantes son positivas,

$$\iiint_V x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\, dx\, dy\, dz = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)} \tag{20}$$

Las integrales de este tipo se llaman *integrales de Dirichlet* y se emplean a menudo para calcular integrales múltiples (véase el Problema 21).

Problemas resueltos

FUNCION GAMMA

1. Demostrar: *(a)* $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n>0$; *(b)* $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(a) $$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ (x^n)(-e^{-x})\Big|_0^M - \int_0^M (-e^{-x})(nx^{n-1})\, dx \right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ -M^n e^{-M} + n\int_0^M x^{n-1} e^{-x}\, dx \right\} = n\Gamma(n) \quad \text{Si } n>0$$

(b) $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}\, dx = \lim_{M\to\infty} (1 - e^{-M}) = 1.$$

Hágase $n = 1, 2, 3, \ldots$ en $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Entonces,

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!, \quad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$$

En general, $\Gamma(n+1) = n!$ si n es entero positivo.

2. Calcular:

(*a*) $\dfrac{\Gamma(6)}{2\,\Gamma(3)} = \dfrac{5!}{2\cdot 2!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2} = 30$

(*b*) $\dfrac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{3}{4}$

(*c*) $\dfrac{\Gamma(3)\,\Gamma(2{,}5)}{\Gamma(5{,}5)} = \dfrac{2!\,(1{,}5)(0{,}5)\,\Gamma(0{,}5)}{(4{,}5)(3{,}5)(2{,}5)(1{,}5)(0{,}5)\,\Gamma(0{,}5)} = \dfrac{16}{315}$

(*d*) $\dfrac{6\,\Gamma(\frac{8}{3})}{5\,\Gamma(\frac{2}{3})} = \dfrac{6(\frac{5}{3})(\frac{2}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})}{5\,\Gamma(\frac{2}{3})} = \dfrac{4}{3}$

3. Calcular las integrales.

(*a*) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \Gamma(4) = 3! = 6$

(*b*) $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\,dx.$ Con $2x = y$, la integral se convierte en

$$\int_0^\infty \left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y}\,\frac{dy}{2} = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty y^6 e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

4. Demostrar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\,dx.$ Con $x = u^2$ esta integral se vuelve

$$2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$ aplicando el Problema 31, Capítulo 12.

5. Calcular las integrales.

(*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{y}\,e^{-y^3}\,dy.$ Con $y^3 = x$, la integral se vuelve

$$\int_0^\infty \sqrt{x^{1/3}}\,e^{-x}\cdot\tfrac{1}{3}x^{-2/3}\,dx = \tfrac{1}{3}\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\,dx = \tfrac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(*b*) $\displaystyle\int_0^\infty 3^{-4z^2}\,dz = \int_0^\infty (e^{\ln 3})^{(-4z^2)}\,dz = \int_0^\infty e^{-(4\ln 3)z^2}\,dz.$ Sea $(4\ln 3)z^2 = x$ con lo que la integral se vuelve

$$\int_0^\infty e^{-x}\,d\left(\frac{x^{1/2}}{\sqrt{4\ln 3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{4\ln 3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}$$

(*c*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}.$ Sea $-\ln x = u$. Luego $x = e^{-u}$. Si $x=1,\ u=0$; si $x=0,\ u=\infty$. La integral se convierte en

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}\,du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

6. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\,dx$ con m, n, a constantes positivas.

Con $ax^n = y$, la integral se vuelve

$$\int_0^\infty \left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right\}^m e^{-y}\,d\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{1/n}\right\} = \frac{1}{na^{(m+1)/n}}\int_0^\infty y^{(m+1)/n\,-\,1}e^{-y}\,dy = \frac{1}{na^{(m+1)/n}}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

7. Calcular (*a*) $\Gamma(-1/2)$, (*b*) $\Gamma(-5/2)$.

Aplicando la generalización a valores negativos definida por $\Gamma(n) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$.

(*a*) Para $n = -\frac{1}{2}$, $\Gamma(-1/2) = \dfrac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}$.

(*b*) Para $n = -3/2$, $\Gamma(-3/2) = \dfrac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \dfrac{-2\sqrt{\pi}}{-3/2} = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{3}$, aplicando (*a*).

Luego $\Gamma(-5/2) = \dfrac{\Gamma(-3/2)}{-5/2} = -\dfrac{8}{15}\sqrt{\pi}$.

8. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ con n natural y $m > -1$.

Haciendo $x = e^{-y}$, la integral se convierte en la $(-1)^n \displaystyle\int_0^\infty y^n e^{-(m+1)y}\, dy$. Si $(m+1)y = u$, esta última integral se transforma en

$$(-1)^n \int_0^\infty \frac{u^n}{(m+1)^n} e^{-u} \frac{du}{m+1} = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\, du = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

Compárese con el Problema 50, Capítulo 8, página 177.

9. Una partícula es atraída hacia un punto fijo O con una fuerza inversamente proporcional a su distancia instantánea a partir de O. Si la partícula se deja libre desde el reposo, hallar el tiempo en que llega a O.

En el tiempo $t = 0$ supóngase la partícula sobre el eje x en $x = a > 0$ y sea O el origen. Entonces, por la ley de Newton,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x} \tag{1}$$

siendo m la masa de la partícula y $k > 0$ una constante de proporcionalidad.

Sea $\dfrac{dx}{dt} = v$ la velocidad de la partícula. Entonces, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = v \cdot \dfrac{dv}{dx}$ y (*1*) se convierte en

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x} \quad \text{o} \quad \frac{mv^2}{2} = -k \ln x + c \tag{2}$$

después de integrar. Como $v = 0$ en $x = a$, se tiene $c = k \ln a$. Luego

$$\frac{mv^2}{2} = k \ln \frac{a}{x} \quad \text{o} \quad v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln \frac{a}{x}} \tag{3}$$

tomándose el signo negativo porque x decrece al aumentar t. Así se encuentra que el tiempo T que la partícula invierte para ir de $x = a$ a $x = 0$ está dado por

$$T = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\ln a/x}} \tag{4}$$

Haciendo $\ln a/x = u$ o bien $x = ae^{-u}$,

$$T = a\sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u}\, du = a\sqrt{\frac{m}{2k}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = a\sqrt{\frac{\pi m}{2k}}$$

FUNCION BETA

10. Demostrar que (*a*) $B(m,n) = B(n,m)$, (*b*) $B(m,n) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$.

(*a*) Con la transformación $x = 1 - y$ se tiene

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1}\, dy = \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\, dy = B(n,m)$$

(*b*) Con la transformación $x = \operatorname{sen}^2\theta$ se tiene

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\, 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

11. Demostrar que $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $\quad m,n>0$.

Haciendo $z = x^2$, se tiene $\Gamma(m) = \int_0^\infty z^{m-1}e^{-z}\,dz = 2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx$.

Análogamente, $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}\,dy$. Entonces,

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\left(\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}\,dy\right)$$
$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Transformando a polares, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$,

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}\cos^{2m-1}\phi\,\mathrm{sen}^{2n-1}\phi\,d\rho\,d\phi$$
$$= 4\left(\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}\,d\rho\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\cos^{2m-1}\phi\,\mathrm{sen}^{2n-1}\phi\,d\phi\right)$$
$$= 2\,\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\phi\,\mathrm{sen}^{2n-1}\phi\,d\phi = \Gamma(m+n)\,B(n,m)$$
$$= \Gamma(m+n)\,B(m,n)$$

por los resultados del Problema 10. De aquí se obtiene el resultado buscado.

El razonamiento anterior se puede hacer más riguroso utilizando un proceso de límite como en el Problema 31, Capítulo 12.

12. Calcular las siguientes integrales:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx = B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\,\Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!\,3!}{8!} = \frac{1}{280}$

(*b*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}}$. Con $x = 2v$, la integral se vuelve

$$4\sqrt{2}\int_0^1\frac{v^2}{\sqrt{1-v}}\,dv = 4\sqrt{2}\int_0^1 v^2(1-v)^{-1/2}\,dv = 4\sqrt{2}\,B(3,\tfrac{1}{2}) = \frac{4\sqrt{2}\,\Gamma(3)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

(*c*) $\displaystyle\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}\,dy$. Con $y^2 = a^2x$ o bien $y = a\sqrt{x}$, la integral se convierte

$$a^6\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{1/2}\,dx = a^6\,B(5/2,3/2) = \frac{a^6\,\Gamma(5/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)} = \frac{\pi a^6}{16}$$

13. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$ $\quad m,n>0$.

Esto se deduce inmediatamente de los Problemas 10 y 11.

14. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^6\theta\,d\theta$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^4\theta\cos^5\theta\,d\theta$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4\theta\,d\theta$.

(*a*) Sea $2m-1 = 6$, $2n-1 = 0$, o sea, $m = 7/2$, $n = 1/2$, con el Problema 13.

Entonces la integral buscada tiene el valor $\dfrac{\Gamma(7/2)\,\Gamma(1/2)}{2\,\Gamma(4)} = \dfrac{5\pi}{32}$.

(*b*) Haciendo $2m - 1 = 4$, $2n - 1 = 5$, la integral pedida tiene por valor $\dfrac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(3)}{2\,\Gamma(11/2)} = \dfrac{8}{315}$.

(*c*) La integral dada $= 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$.

Y haciendo $2m - 1 = 0$, $2n - 1 = 4$ en el Problema 13, el valor es $\dfrac{2\,\Gamma(1/2)\,\Gamma(5/2)}{2\,\Gamma(3)} = \dfrac{3\pi}{8}$.

15. Demostrar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p\theta\, d\theta =$ (*a*) $\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(p-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots p}\dfrac{\pi}{2}$ si p es un entero positivo par (*b*) $\dfrac{2\cdot4\cdot6\ldots(p-1)}{1\cdot3\cdot5\ldots p}$ si p es un entero positivo impar.

Según el Problema 13, con $2m - 1 = p$, $2n - 1 = 0$, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p\theta\, d\theta = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(p+1)]\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma[\frac{1}{2}(p+2)]}$$

(*a*) Si $p = 2r$ la integral es igual a

$$\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(r+1)} = \frac{(r-\frac{1}{2})(r-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{2r(r-1)\cdots1} = \frac{(2r-1)(2r-3)\cdots1}{2r(2r-2)\cdots2}\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}\frac{\pi}{2}$$

(*b*) Si $p = 2r + 1$, la integral es

$$\frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(r+\frac{3}{2})} = \frac{r(r-1)\cdots1\cdot\sqrt{\pi}}{2(r+\frac{1}{2})(r-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2r}{1\cdot3\cdot5\cdots(2r+1)}$$

En ambos casos $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p\theta\, d\theta$, como se ve haciendo $\theta = \pi/2 - \phi$.

16. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta\, d\theta$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^8\theta\, d\theta$.

(*a*) Por el Problema 15, la integral es igual a $\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{32}$ [compárese con el Problema 14(*a*)].

(*b*) La integral es

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\,(1-\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5\theta\, d\theta = \frac{2}{1\cdot3} - \frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot5} = \frac{2}{15}.$$

También se puede aplicar el método del Problema 14(*b*).

(*c*) La integral dada es igual a $4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8\theta\, d\theta = 4\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{35\pi}{64}$.

17. Dada $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, mostrar que $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$ siendo $0 < p < 1$.

Con $\dfrac{x}{1+x} = y$ o $x = \dfrac{y}{1-y}$, la integral se convierte en

$$\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy = \mathrm{B}(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p)$$ y resulta lo dicho.

18. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$.

Sea $y^4 = x$. Entonces la integral se transforma en $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-3/4}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{4\operatorname{sen}(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ según el Problema 17 con $p = \frac{1}{4}$.

También se puede obtener el resultado con $y^2 = \operatorname{tg}\theta$.

19. Mostrar que $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

Haciendo $x^3 = 8y$, o sea, $x = 2y^{1/3}$, la integral es

$$\int_0^1 2y^{1/3}\cdot\sqrt[3]{8(1-y)}\cdot\tfrac{2}{3}y^{-2/3}\,dy \;=\; \tfrac{8}{3}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3}\,dy \;=\; \tfrac{8}{3}\,\mathrm{B}(\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3})$$

$$= \frac{8}{3}\,\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\,\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)} \;=\; \frac{8}{9}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\,\Gamma(\tfrac{2}{3}) \;=\; \frac{8}{9}\cdot\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi/3} \;=\; \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

FORMULA DE STIRLING

20. Demostrar que para n grande, $n! = \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$ aproximadamente.

Se tiene $$\Gamma(n+1) \;=\; \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \;=\; \int_0^\infty e^{n\ln x - x}\,dx \tag{1}$$

La función $n \ln x - x$ tiene un máximo relativo para $x = n$, como se ve fácilmente. Esto sugiere la sustitución $x = n + y$ con la cual (*1*) se convierte en

$$\Gamma(n+1) \;=\; e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(n+y)-y}\,dy \;=\; e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln n + n\ln(1+y/n)-y}\,dy \tag{2}$$

$$= \; n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(1+y/n)-y}\,dy$$

Hasta el momento, el análisis es riguroso. Los pasos siguientes, en los cuales se procede de manera puramente formal, se pueden hacer rigurosos mediante procesos de límite adecuados, pero las demostraciones se hacen complicadas y se omiten aquí.

En (*2*) utilícese el resultado

$$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{3}$$

con $x = y/n$. Entonces, haciendo $y = \sqrt{n}\,v$ se tiene

$$\Gamma(n+1) \;=\; n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{-y^2/2n + y^3/3n^2 - \cdots}\,dy \;=\; n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{-v^2/2+v^3/3\sqrt{n}-\cdots}\,dv \tag{4}$$

Para n elevado, una aproximación buena es

$$\Gamma(n+1) \;=\; n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2/2}\,dv \;=\; \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n} \tag{5}$$

Es interesante ver que a partir de (*4*) se puede obtener también el resultado (*13*) de la página 286. Véase Problema 74.

INTEGRALES DE DIRICHLET

21. Calcular $\displaystyle I = \iiint_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\,dx\,dy\,dz$

siendo V la región del primer octante limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y los planos coordenados.

Sean $x^2 = u$, $y^2 = v$, $z^2 = w$. Entonces,

$$I \;=\; \iiint_{\mathcal{R}} u^{(\alpha-1)/2}\,v^{(\beta-1)/2}\,w^{(\gamma-1)/2}\,\frac{du}{2\sqrt{u}}\,\frac{dv}{2\sqrt{v}}\,\frac{dw}{2\sqrt{w}}$$

$$=\; \frac{1}{8}\iiint_{\mathcal{R}} u^{(\alpha/2)-1}\,v^{(\beta/2)-1}\,w^{(\gamma/2)-1}\,du\,dv\,dw \tag{1}$$

Fig. 13-2

donde $\mathcal{R}$ es la región del espacio uvw limitada por el plano $u + v + w = 1$ y los planos uv, vw y uw, como se ve en la Fig. 13-2. Así, pues,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1-u}\int_{w=0}^{1-u-v} u^{(\alpha/2)-1}v^{(\beta/2)-1}w^{(\gamma/2)-1}\,du\,dv\,dw \qquad (2)\\ &= \frac{1}{4\gamma}\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1-u} u^{(\alpha/2)-1}v^{(\beta/2)-1}(1-u-v)^{\gamma/2}\,du\,dv\\ &= \frac{1}{4\gamma}\int_{u=0}^{1} u^{(\alpha/2)-1}\left\{\int_{v=0}^{1-u} v^{(\beta/2)-1}(1-u-v)^{\gamma/2}\,dv\right\}du \end{aligned}$$

Con $v = (1-u)t$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{v=0}^{1-u} v^{(\beta/2)-1}(1-u-v)^{\gamma/2}\,dv &= (1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\int_{t=0}^{1} t^{(\beta/2)-1}(1-t)^{\gamma/2}\,dt\\ &= (1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\,\frac{\Gamma(\beta/2)\,\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]} \end{aligned}$$

y así *(2)* se convierte en

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\gamma}\,\frac{\Gamma(\beta/2)\,\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}\int_{u=0}^{1} u^{(\alpha/2)-1}(1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\,du \qquad (3)\\ &= \frac{1}{4\gamma}\,\frac{\Gamma(\beta/2)\,\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}\cdot\frac{\Gamma(\alpha/2)\,\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}{\Gamma[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1]} = \frac{\Gamma(\alpha/2)\,\Gamma(\beta/2)\,\Gamma(\gamma/2)}{8\,\Gamma[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1]} \end{aligned}$$

puesto que $(\gamma/2)\,\Gamma(\gamma/2) = \Gamma(\gamma/2+1)$.

La integral aquí calculada es un caso especial de la integral de Dirichlet *(20)*, página 287. El caso general se puede calcular de manera semejante.

22. Hallar la masa de la región limitada por $x^2+y^2+z^2=a^2$ si la densidad es $\sigma = x^2y^2z^2$.

La masa buscada $= 8\iiint_V x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$, siendo V la región del primer octante limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y los planos coordenados.

En la integral de Dirichlet *(20)*, página 287, sean $b=c=a$, $p=q=r=2$ y $\alpha=\beta=\gamma=3$. Con lo que el resultado pedido es

$$8\cdot\frac{a^3\cdot a^3\cdot a^3}{2\cdot 2\cdot 2}\,\frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+3/2+3/2+3/2)} = \frac{4\pi a^9}{945}$$

PROBLEMAS VARIOS

23. Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{6\sqrt{2\pi}}$.

Sea $x^4 = y$. La integral es entonces

$$\frac{1}{4}\int_0^1 y^{-3/4}(1-y)^{1/2}\,dy = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\,\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4)}$$

Por el Problema 17, con $p=1/4$, $\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4) = \pi\sqrt{2}$ con lo que se tiene el resultado buscado.

24. Demostrar la *fórmula de duplicación* $2^{2p-1}\,\Gamma(p)\,\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$.

Haciendo $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p} x\,dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p} 2x\,dx$.

Entonces, $I = \frac{1}{2}\,B(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(p+1)}$

Haciendo $2x = u$ se halla

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2p} u\, du = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p} u\, du = I$$

Pero $$J = \int_0^{\pi/2} (2 \operatorname{sen} x \cos x)^{2p}\, dx = 2^{2p}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p} x \cos^{2p} x\, dx$$

$$= 2^{2p-1}\,B(p+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}) = \frac{2^{2p-1}\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\}^2}{\Gamma(2p+1)}$$

Entonces, como $I = J$, $$\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2p\,\Gamma(p)} = \frac{2^{2p-1}\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\}^2}{2p\,\Gamma(2p)}$$

y se tiene el resultado.

25. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi}} = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4\sqrt{\pi}}$.

Considérese

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/2}\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2}{2\sqrt{2\pi}}$$

como en el Problema 23.

Pero $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta/2 - \operatorname{sen}^2\theta/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\theta/2}}.$$

Haciendo $\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta/2 = \operatorname{sen}\phi$ en la última integral ésta se convierte en $\displaystyle\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi}}$ con lo que se tiene el resultado.

26. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}$, $0 < p < 1$.

Se tiene $\displaystyle\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} u^{p-1}e^{-xu}\, du.$ Luego

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{p-1}e^{-xu}\cos x\, du\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} \frac{u^p}{1+u^2}\, du \qquad (1)$$

habiéndose invertido el orden de integración y aplicado el Problema 22, Capítulo 12.

Con $u^2 = v$ en la última integral se tiene, por el Problema 17,

$$\int_0^{\infty} \frac{u^p}{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{v^{(p-1)/2}}{1+v}\, dv = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(p+1)\pi/2} = \frac{\pi}{2\cos p\pi/2} \qquad (2)$$

Sustituyendo *(2)* en *(1)* se tiene el resultado buscado.

27. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx$.

Con $x^2 = y$, la integral es $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\,\Gamma(\frac{1}{2})\cos\pi/4}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$ por el Problema 26.

Esta integral y la correspondiente para el seno [véase Problema 68(*a*)] se llaman *integrales de Fresnel.*

Problemas propuestos

FUNCION GAMMA

28. Calcular (*a*) $\dfrac{\Gamma(7)}{2\,\Gamma(4)\,\Gamma(3)}$, (*b*) $\dfrac{\Gamma(3)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(9/2)}$, (*c*) $\Gamma(1/2)\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(5/2)$.

Sol. (*a*) 30, (*b*) 16/105, (*c*) $\frac{3}{8}\pi^{3/2}$

29. Calcular (*a*) $\int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx$, (*b*) $\int_0^\infty x^6 e^{-3x}\,dx$, (*c*) $\int_0^\infty x^2 e^{-2x^2}\,dx$. *Sol.* (*a*) 24, (*b*) $\dfrac{80}{243}$, (*c*) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{16}$

30. Averiguar (*a*) $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$, (*b*) $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$, (*c*) $\int_0^\infty y^3 e^{-2y^5}\,dy$.

Sol. (*a*) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$, (*b*) $\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2}$, (*c*) $\dfrac{\Gamma(4/5)}{5\sqrt[5]{16}}$

31. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$.

32. Demostrar que $\displaystyle\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx$, $n > 0$.

33. Calcular (*a*) $\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$, (*b*) $\int_0^1 (x \ln x)^3\,dx$, (*c*) $\int_0^1 \sqrt[3]{\ln(1/x)}\,dx$.

Sol. (*a*) 24, (*b*) $-3/128$, (*c*) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$

34. Calcular (*a*) $\Gamma(-7/2)$, (*b*) $\Gamma(-1/3)$. *Sol.* (*a*) $(16\sqrt{\pi})/105$, (*b*) $-3\,\Gamma(2/3)$

35. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to -m} |\Gamma(x)| = \infty$ con $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

36. Demostrar que si m es entero positivo, $\displaystyle\Gamma(-m+\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^m\,2^m\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}$

37. Demostrar que $\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx$ es un número negativo (es igual a $-\gamma$, con $\gamma = 0{,}577215\ldots$ la *constante de Euler*, como en el Problema 49, Capítulo 11).

FUNCION BETA

38. Calcular (*a*) $B(3,5)$, (*b*) $B(3/2,2)$, (*c*) $B(1/3,2/3)$. *Sol.* (*a*) 1/105, (*b*) 4/15, (*c*) $2\pi/\sqrt{3}$

39. Averiguar (*a*) $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx$, (*b*) $\int_0^1 \sqrt{(1-x)/x}\,dx$, (*c*) $\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}\,dx$.

Sol. (*a*) 1/60, (*b*) $\pi/2$, (*c*) 3π

40. Calcular (*a*) $\int_0^4 u^{3/2}(4-u)^{5/2}\,du$, (*b*) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$. *Sol.* (*a*) 12π, (*b*) π

41. Demostrar que $\displaystyle\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^4-y^4}} = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4a\sqrt{2\pi}}$.

42. Calcular (*a*) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\cos^4\theta\,d\theta$, (*b*) $\int_0^{2\pi} \cos^6\theta\,d\theta$. *Sol.* (*a*) $3\pi/256$, (*b*) $5\pi/8$

43. Calcular (*a*) $\int_0^\pi \operatorname{sen}^5\theta\,d\theta$, (*b*) $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$. *Sol.* (*a*) 16/15, (*b*) 8/105

44. Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}\theta}\,d\theta = \pi/\sqrt{2}$.

45. Demostrar que (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

46. Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{ae^{3x}+b}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\,a^{2/3}b^{1/3}}$ donde $a, b > 0$.

47. Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{3x}+1)^2}\,dx = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$

[Sug.: Derivar con respecto a b en el Problema 46.]

48. Aplicar el método del Problema 31, Capítulo 12, para justificar el procedimiento utilizado en el Problema 11.

INTEGRALES DE DIRICHLET

49. Hallar la masa de la región del plano xy limitada por $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ si la densidad es $\sigma = \sqrt{xy}$.
Sol. $\pi/24$

50. Hallar la masa de la región limitada por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ si la densidad varía proporcionalmente al cuadrado de la distancia al centro. *Sol.* $\frac{\pi abck}{30}(a^2 + b^2 + c^2)$, k = constante de proporcionalidad

51. Hallar el volumen de la región limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$. *Sol.* $4\pi/35$

52. Hallar el centro de masa de la región del primer octante limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.
Sol. $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 21/128$

53. Mostrar que el volumen de la región limitada por $x^m + y^m + z^m = a^m$, siendo $m > 0$, está dado por $\frac{8\,\{\Gamma(1/m)\}^3}{3m^2\,\Gamma(3/m)}\,a^3$.

54. Mostrar que el centro de masa de la región del primer octante limitada por $x^m + y^m + z^m = a^m$, siendo $m > 0$, está dado por

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{3\,\Gamma(2/m)\,\Gamma(3/m)}{4\,\Gamma(1/m)\,\Gamma(4/m)}\,a$$

PROBLEMAS VARIOS

55. Demostrar que $\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,dx = (b-a)^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1, q+1)$ donde $p > -1$, $q > -1$ y $b > a$.

[Sug.: Hágase $x - a = (b-a)y$.]

56. Calcular (*a*) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$, (*b*) $\int_3^7 \sqrt[4]{(7-x)(x-3)}\,dx$. *Sol.* (*a*) π, (*b*) $\frac{2\,\{\Gamma(1/4)\}^2}{3\sqrt{\pi}}$

57. Mostrar $\frac{\{\Gamma(1/3)\}^2}{\Gamma(1/6)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$.

58. Demostrar que $\mathrm{B}(m, n) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ con $m, n > 0$.
[Sug.: Hágase $y = x/(1+x)$.]

59. Si $0 < p < 1$ demostrar que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\sec\frac{p\pi}{2}$.

60. Demostrar que $\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(x+r)^{m+n}} \cdot = \frac{\mathrm{B}(m, n)}{r^n(1+r)^{m+n}}$ con m, n y r constantes positivas.

[Sug.: Hágase $x = (r+1)y/(r+y)$.]

61. Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta}{(a\operatorname{sen}^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}} = \frac{\mathrm{B}(m, n)}{2a^n b^m}$ con $m, n > 0$.

[Sug.: Hágase $x = \operatorname{sen}^2\theta$ en el Problema 60 y elíjase r adecuadamente.]

62. Demostrar que $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

63. Demostrar que para $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\cdots\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

[Sugerencia: Usese la forma factorizada $x^m - 1 = (x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{m-1})$, divídanse ambos miembros por $x - 1$ y considérese el límite para $x \to 1$.]

64. Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} x\, dx = -\pi/2 \ln 2$ aplicando el Problema 63.

[Sugerencia: Tómense logaritmos del resultado del Problema 63 y escríbase el límite para $m \to \infty$ como integral definida.]

65. Demostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(\frac{3}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{m}}$.

[Sugerencia: Elévese al cuadrado el primer miembro y utilícese el Problema 63 y la ecuación (*8*), página 286.]

66. Demostrar que $\int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

[Sugerencia: Tómense logaritmos del resultado del Problema 65 y hágase $m \to \infty$.]

67. (*a*) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p)\operatorname{sen}(p\pi/2)}$, $0 < p < 1$.

(*b*) Discutir los casos $p = 0$ y $p = 1$.

68. Calcular (*a*) $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx$, (*b*) $\int_0^\infty x \cos x^3\, dx$. *Sol.* (*a*) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$, (*b*) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}\,\Gamma(1/3)}$

69. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\, dx = -\pi^2 \operatorname{cosec} p\pi \cot p\pi$, $0 < p < 1$.

70. Mostrar que $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}\, dx = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{16}$.

71. Sea $J_p(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (x/2)^{p+2n}}{n!\,\Gamma(n+p+1)}$, una generalización de la función Bessel (*16*), página 232, al caso en que p puede no ser entero positivo. Demostrar que $J_p(x)$ satisface la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$.

72. Refiriéndose al Problema 71, demostrar que (*a*) $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\operatorname{sen} x$, (*b*) $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\cos x$, (*c*) los resultados del Problema 107(*b*) y (*c*) de la página 257 son válidos para todo p.

73. Si $a > 0$, $b > 0$ y $4ac > b^2$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bxy+cy^2)}\, dx\, dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

74. Obtener (*13*) de la página 286 del resultado (*4*) del Problema 20.
[Sugerencia: Desarróllese $e^{v^3/(3\sqrt{n})} + \cdots$ en serie de potencias y cámbiese el límite inferior de la integral por $-\infty$.]

75. Obtener el resultado (*15*) de la página 286.

Capítulo 14

Series de Fourier

FUNCIONES PERIODICAS

Se dice que una función $f(x)$ tiene *periodo* T o que es *periódica* de *periodo* T si para todo x, $f(x + T) = f(x)$, siendo T una constante positiva. El mínimo valor de $T > 0$ se llama *periodo mínimo* o simplemente *periodo* de $f(x)$.

Ejemplo 1: La función sen x tiene periodos $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$, puesto que sen $(x + 2\pi)$, sen $(x + 4\pi)$, sen $(x + 6\pi), \ldots$ son todos iguales a sen x. Pero 2π es el *mínimo periodo*, o sea, *el periodo* de sen x.

Ejemplo 2: El periodo de sen nx o de cos nx, siendo n un número natural, es $2\pi/n$.

Ejemplo 3: El periodo de tg x es π.

Ejemplo 4: Una constante tiene cualquier número positivo como periodo.

En las Figuras 14-1(*a*), (*b*) y (*c*) se ven otros ejemplos de funciones periódicas.

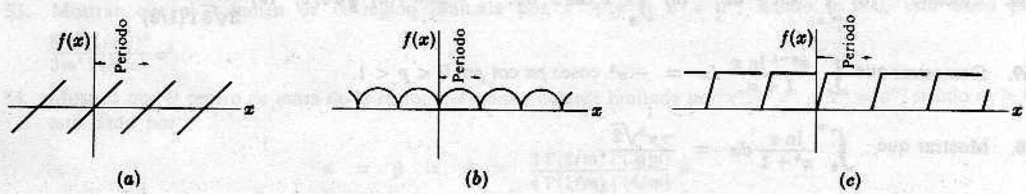


Fig. 14-1

SERIES DE FOURIER

Sea $f(x)$ definida en el intervalo $]-L, L[$ y fuera de este intervalo por $f(x + 2L) = f(x)$, esto es, supóngase que $f(x)$ tiene periodo $2L$. La *serie de Fourier* o *desarrollo de Fourier* de $f(x)$ se define por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

donde los *coeficientes de Fourier* a_n y b_n son

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{aligned}\right. \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Si $f(x)$ tiene periodo $2L$, los coeficientes a_n y b_n se pueden determinar, asimismo, por

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ndo c un número real cualquiera. En el caso especial $c = -L$, (*3*) se convierte en (*2*).

Para determinar a_0 en *(1)* se utiliza *(2)* o *(3)* con $n = 0$. Por ejemplo, de *(2)* se deduce que $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$. Obsérvese que el término constante en *(1)* es igual a $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$, que es el *promedio* de $f(x)$ en el periodo.

Si $L = \pi$, la serie *(1)* y los coeficientes *(2)* y *(3)* son especialmente sencillos. La función en ese caso tiene periodo 2π.

CONDICIONES DE DIRICHLET

Supóngase que

(1) $f(x)$ está definida y es uniforme excepto posiblemente en un número finito de puntos de $]-L, L[$.

(2) $f(x)$ es periódica fuera de $]-L, L[$ con periodo $2L$.

(3) $f(x)$ y $f'(x)$ son casicontinuas en $]-L, L[$.

Entonces la serie *(1)* con coeficientes *(2)* o *(3)* converge hacia

(*a*) $f(x)$ si x es un punto de continuidad

(*b*) hacia $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ si x es punto de discontinuidad.

$f(x+0)$ y $f(x-0)$ son los límites a la derecha y a la izquierda de $f(x)$ en x y representan $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} f(x+\epsilon)$ y $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} f(x-\epsilon)$, respectivamente. Para demostración, véanse Problemas 18-23.

Las condiciones (1), (2) y (3) impuestas a $f(x)$ son *suficientes*, pero no necesarias, y en la práctica se cumplen por lo general. No se conocen todavía condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de las series de Fourier y es interesante que la continuidad de $f(x)$ sola no sea bastante para asegurar la convergencia de una serie de Fourier.

FUNCIONES IMPARES Y PARES

Una función $f(x)$ se dice *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Así, x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, sen x, tg $3x$ son funciones impares.

Una función $f(x)$ se dice *par* si $f(-x) = f(x)$. Así x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ son funciones pares.

Las funciones representadas gráficamente en las Figs. 14-1(*a*) y 14-1(*b*) son impar y par, respectivamente, pero la de la Fig. 14-1(*c*) no es par ni impar.

En la serie de Fourier para una función impar solo pueden aparecer términos en seno; en la serie de Fourier para una función par solo puede haber términos en coseno (y probablemente una constante que se considerará como término en coseno).

SERIES DE FOURIER EN SENOS O EN COSENOS

Cuando se desea tener una serie de senos o de cosenos, la función a que corresponde está por lo general definida en el intervalo $]0, L[$ (mitad del intervalo $]-L, L[$, razón por la cual suele decirse que la serie es de *medio intervalo*) y, siendo además impar o par, queda claramente definida en la otra mitad del intervalo, $]-L, 0[$. En ese caso se tiene

$$\begin{cases} a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}\,dx & \text{para } \textit{una serie de solo senos} \\ b_n = 0, \quad a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx & \text{para } \textit{una serie de solo cosenos} \end{cases} \tag{4}$$

IDENTIDAD DE PARSEVAL Es la

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx \;=\; \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{5}$$

en la que los a_n y b_n son los coeficientes de Fourier para $f(x)$, que se supone satisfacen las condiciones de Dirichlet.

DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES DE FOURIER

Se pueden justificar mediante los teoremas de las páginas 228 y 229 que valen para toda serie en general. Pero hay que hacer notar que esos teoremas dan condiciones suficientes y no son necesarios. El teorema siguiente es especialmente útil para la integración.

Teorema:

La serie de Fourier de $f(x)$ se puede integrar término a término de a a x, y la serie que resulta converge uniformemente hacia $\int_a^x f(x)\,dx$ siempre que $f(x)$ sea casicontinua en $-L \leq x \leq L$ y a y x estén en el intervalo.

NOTACION COMPLEJA PARA SERIES DE FOURIER

Mediante las identidades de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{6}$$

con $i = \sqrt{-1}$ (véase Problema 48, Cap. 11, página 251), la serie de Fourier para $f(x)$ se puede escribir

$$f(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\pi x/L} \tag{7}$$

donde

$$c_n \;=\; \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-in\pi x/L}\,dx \tag{8}$$

La igualdad (7) supone que las condiciones de Dirichlet se cumplen y además que $f(x)$ es continua en x. Si $f(x)$ es discontinua en x, el primer miembro de (7) se ha de cambiar por $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

PROBLEMAS DE CONTORNO

Los problemas de contorno buscan determinar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales que cumplan ciertas condiciones prescritas llamadas *condiciones de contorno*. Algunos de tales problemas se pueden resolver por series de Fourier (Problema 24).

FUNCIONES ORTOGONALES

Dos vectores **A** y **B** se dicen *ortogonales* (perpendiculares) si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, o sea, si $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$, siendo $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Si bien no con la misma evidencia geométrica o física, este concepto se puede generalizar a vectores con más de tres componentes y hasta se puede pensar en una función $A(x)$ como si fuera un vector con una *infinidad de componentes* (esto es, un *vector de infinitas dimensiones*) en que cada componente resulta dando un valor particular a x en un cierto intervalo $]a, b[$. Es natural entonces definir dos funciones $A(x)$ y $B(x)$ como *ortogonales* en $]a, b[$ si

$$\int_a^b A(x)\,B(x)\,dx \;=\; 0 \tag{9}$$

Un vector **A** se llama *vector unitario* o *vector normalizado* si tiene magnitud unidad, esto es si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = 1$. Generalizando este concepto, se dice que la función $A(x)$ es *normal* o está *normalizada* en $]a, b[$ si

$$\int_a^b \{A(x)\}^2\,dx \;=\; 1 \tag{10}$$

Por lo anterior es claro que se puede considerar un conjunto de funciones $\{\phi_k(x)\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, con las propiedades

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx \;=\; 0 \qquad m \neq n \tag{11}$$

$$\int_a^b \{\phi_m(x)\}^2\,dx \;=\; 1 \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

Y entonces cada elemento del conjunto es ortogonal a todos los demás y está asimismo normalizado. Un conjunto semejante de funciones se llamará conjunto *ortonormal*.

Las ecuaciones *(11)* y *(12)* se pueden resumir escribiendo

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx \;=\; \delta_{mn} \tag{13}$$

donde δ_{mn}, la llamada *delta de Kronecker*, se define como 0 si $m \neq n$ y como 1 si $m = n$.

Así como un vector **r** en 3 dimensiones se puede expresar por un conjunto de vectores unitarios ortogonales **i**, **j**, **k** en la forma $\mathbf{r} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, se puede considerar también la posibilidad de expresar una función $f(x)$ por un conjunto de funciones ortonormales, o sea,

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x) \qquad a \leq x \leq b \tag{14}$$

Tales series, que generalizan las de Fourier, son de gran interés y utilidad en la teoría y en las aplicaciones.

Problemas resueltos

SERIES DE FOURIER

1. Hacer el grafo de las funciones

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 10$$

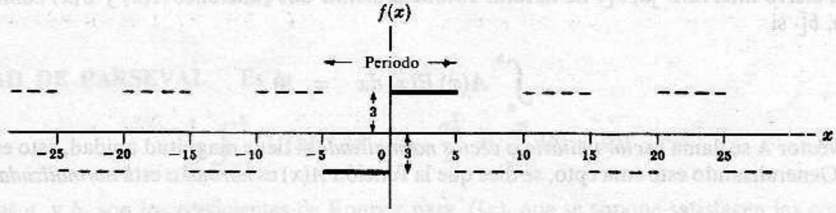


Fig. 14-2

Como el periodo es 10, la parte del grafo en $-5 < x < 5$ (indicada en trazo grueso en la Fig. 14-2) se extiende periódicamente fuera de este intervalo (en trazos). Nótese que $f(x)$ no está definida en $x = 0$, 5, -5, 10, -10, 15, -15, etc. Estos valores son las *discontinuidades* de $f(x)$.

$$(b)\quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 2\pi$$

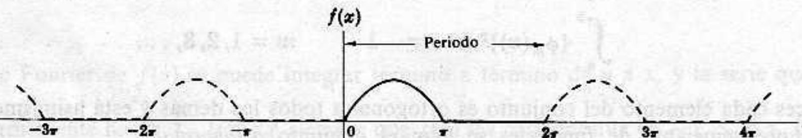


Fig. 14-3

Referirse a la Fig. 14-3. Nótese que $f(x)$ está definida para todo x y que es continua en todo punto.

$$(c)\quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqq x < 2 \\ 1 & 2 \leqq x < 4 \\ 0 & 4 \leqq x < 6 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 6$$

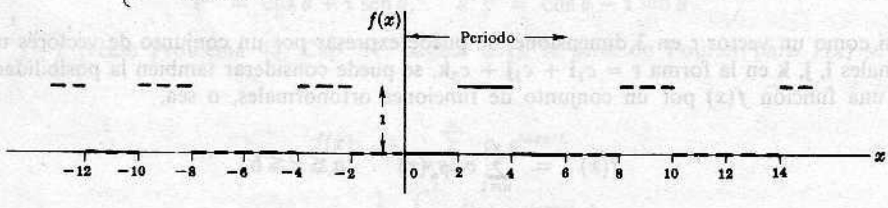


Fig. 14-4

Referirse a la Fig. 14-4. Nótese que $f(x)$ está definida para todo x y que es discontinua en $x = \pm 2$, ± 4, ± 8, ± 10, ± 14, . . .

2. Demostrar $\displaystyle\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0$ si $k = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx = -\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L} = -\frac{L}{k\pi}\cos k\pi + \frac{L}{k\pi}\cos(-k\pi) = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{k\pi}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L} = \frac{L}{k\pi}\operatorname{sen} k\pi - \frac{L}{k\pi}\operatorname{sen}(-k\pi) = 0$$

3. Demostrar (*a*) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ L & m=n \end{cases}$

(*b*) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

donde m y n pueden tomar todos los valores 1, 2, 3, . . .

(*a*) Por trigonometría: $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$, $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$.

Luego si $m \neq n$, por el Problema 2,

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx = 0$$

Análogamente, si $m \neq n$,

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx = 0$$

Si $m = n$ se tiene

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = L$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = L$$

Obsérvese que si $m = n = 0$ estas integrales son iguales a $2L$ y 0, respectivamente.

(*b*) Se tiene $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\}$. Luego, por el Problema 2, si $m \neq n$,

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{L} + \operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx = 0$$

Si $m = n$,

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{L}\,dx = 0$$

Los resultados de las partes (*a*) y (*b*) son válidos aunque los límites de integración $-L, L$ se cambien por $c, c+2L$, respectivamente.

4. Si la serie $\displaystyle A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$ converge uniformemente hacia $f(x)$ en $]-L, L[$, mostrar que para $n = 1, 2, 3, \ldots$

(*a*) $\displaystyle a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$, (*b*) $\displaystyle b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$, (*c*) $\displaystyle A = \frac{a_0}{2}$.

(*a*) Mutiplicando

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

por $\cos\dfrac{m\pi x}{L}$ e integrando de $-L$ a L, valiéndose del Problema 3, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx &= A\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\} \\ &= a_m L \qquad \text{si } m\neq 0\end{aligned} \qquad (2)$$

Así, que $\displaystyle a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$ si $m = 1, 2, 3, \ldots$

(*b*) Multiplicando (*1*) por sen $\dfrac{m\pi x}{L}$ e integrando de $-L$ a L, utilizando el Problema 3, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,dx &= A\int_{-L}^{L}\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\} \\ &= b_m L\end{aligned} \tag{3}$$

Así que $\qquad b_m = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,dx \qquad$ si $m = 1, 2, 3, \ldots$

(*c*) La integración de (*1*) de $-L$ a L, aplicando el Problema 2, da

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2AL \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

Haciendo $m = 0$ en el resultado de la parte (*a*) se encuentra que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \text{y luego} \quad A = \frac{a_0}{2}.$$

Los anteriores resultados también son válidos cambiando los límites de integración $-L, L$ por $c, c + 2L$.

Nótese que en todo lo anterior es legítimo intercambiar la sumación y la integración porque la serie *se ha supuesto* uniformemente convergente hacia $f(x)$ en $]-L, L[$. Aun sin tener la garantía de esta hipótesis, los coeficientes a_m y b_m anteriores se llaman *coeficientes de Fourier* correspondientes a $f(x)$, y la serie con estos valores de a_m y b_m se llama *serie de Fourier* para $f(x)$. Un problema importante en este caso es investigar las condiciones en que esta serie converge realmente hacia $f(x)$. Son condiciones suficientes para esta convergencia las *condiciones de Dirichlet* que luego se demuestran.

5. (*a*) Hallar los coeficientes de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 10$$

(*b*) Escribir la serie de Fourier correspondiente.

(*c*) ¿Cómo habría que definir $f(x)$ en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 5$ para que la serie de Fourier converja hacia $f(x)$ para $-5 \leqq x \leqq 5$?

El grafo de $f(x)$ se ve en la Figura 14-5.

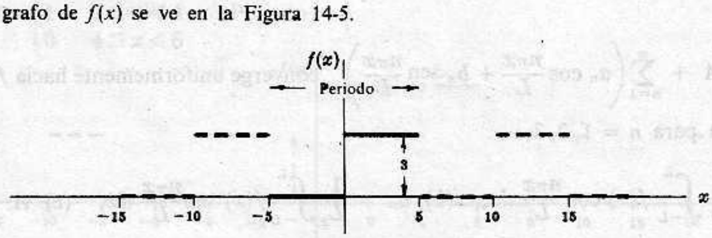


Fig. 14-5

(*a*) Periodo $= 2L = 10$ y $L = 5$. Tómese el intervalo c a $c + 2L$ como de -5 a 5, con lo que $c = -5$. Entonces,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_{0}^{5} = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $\quad a_n = a_0 = \dfrac{3}{5}\displaystyle\int_{0}^{5}\cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5} dx = 3.$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

(*b*) La correspondiente serie de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

(*c*) Como $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet se puede decir que la serie converge hacia $f(x)$ en todo punto de continuidad y a $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ en puntos de discontinuidad. En $x = -5$, 0 y 5, que son puntos de discontinuidad, la serie converge hacia $(3+0)/2 = 3/2$, como se ve en el grafo. Si se define $f(x)$ nuevamente como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} 3/2 & x = -5 \\ 0 & -5 < x < 0 \\ 3/2 & x = 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \\ 3/2 & x = 5 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 10$$

la serie converge entonces hacia $f(x)$ para $-5 \leqq x \leqq 5$.

6. Desarrollar $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ en serie de Fourier si (*a*) el periodo es 2π, (*b*) el periodo no se especifica.

(*a*) El grafo de $f(x)$ con periodo 2π se ve en la Figura 14-6.

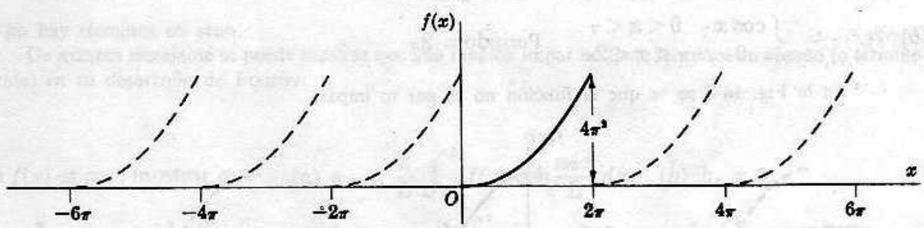


Fig. 14-6

Periodo $= 2L = 2\pi$ y $L = \pi$. Eligiendo $c = 0$ se tiene

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{\text{sen}\,nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\text{sen}\,nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0$$

Si $n = 0$, $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\text{sen}\,nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\text{sen}\,nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

Luego $f(x) = x^2 = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\,\text{sen}\,nx\right)$.

Esto es válido para $0 < x < 2\pi$. En $x = 0$ y $x = 2\pi$ la serie converge hacia $2\pi^2$.

(*b*) Si el periodo no está especificado, la serie de Fourier no está determinada unívocamente en general.

7. Con los resultados del Problema 6 demostrar que $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$.

En $x = 0$ la serie de Fourier del Problema 6 se reduce a $\dfrac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}$.

Según las condiciones de Dirichlet la serie converge en $x = 0$ hacia $\frac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2$.

Luego $\dfrac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2} = 2\pi^2$, y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

FUNCIONES IMPARES Y PARES. SERIES DE FOURIER EN SENOS O EN COSENOS

8. Clasificar las funciones siguientes en cuanto a la paridad:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 3 \\ -2 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Periodo $= 6$

En la Fig. 14-7 se ve que $f(-x) = -f(x)$, de modo que la función es impar.

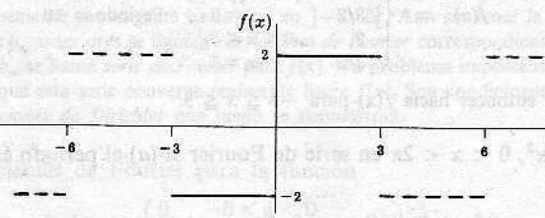


Fig. 14-7

(*b*) $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Periodo $= 2\pi$

En la Fig. 14-8 se ve que la función no es par ni impar.

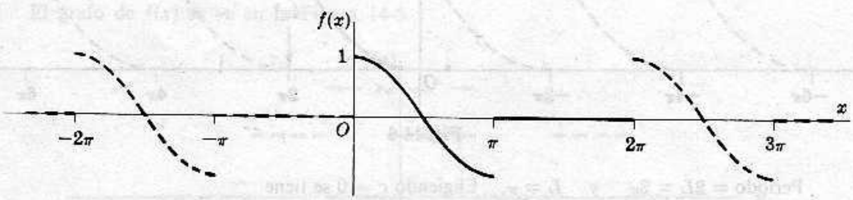


Fig. 14-8

(*c*) $f(x) = x(10 - x)$, $0 < x < 10$, Periodo $= 10$.

En la Fig. 14-9 se ve que la función es par.

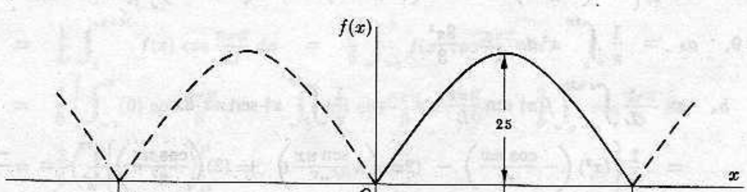


Fig. 14-9

9. Mostrar que una función par no puede tener términos en seno en su desarrollo de Fourier.

Método 1:

No hay términos en seno si $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para ver esto escríbase

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{1}$$

Si se hace la transformación $x = -u$ en la primera integral del segundo miembro de (1) se obtiene

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u)\,\text{sen}\left(-\frac{n\pi u}{L}\right)du = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u)\,\text{sen}\frac{n\pi u}{L}\,du \tag{2}$$

$$= -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\,\text{sen}\frac{n\pi u}{L}\,du = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

donde se ha aplicado que para una función par $f(-u) = f(u)$ y en el último paso que u, la variable muda de integración, se puede cambiar por cualquiera otra, como x. Así, de (1), empleando (2), se tiene

$$b_n = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

Método 2: Supóngase $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$

Entonces. $f(-x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} - b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Si $f(x)$ es par, $f(-x) = f(x)$. De donde

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} - b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y. por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L} = 0$, o sea. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$

y no hay términos en seno.

De manera semejante se puede mostrar que una función impar no tiene términos en coseno (o término constante) en su desarrollo de Fourier.

10. Si $f(x)$ es par, mostrar que (a) $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$, (b) $b_n = 0$.

(a) $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Haciendo $x = -u$,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{L}\right)du = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\,du$$

pues por definición de función por $f(-u) = f(u)$. Luego

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\,du + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

(b) Esto se obtiene por el Método 1 del Problema 9.

11. Desarrollar $f(x) = \text{sen}\,x$, $0 < x < \pi$, en serie de Fourier de cosenos.

Una serie de Fourier que solo tenga cosenos existe solamente para funciones pares. Por tanto, hay que prolongar la definición de $f(x)$ de modo que sea par (porción de trazos de la Fig. 14-10). Con esta prolongación, $f(x)$ se define entonces en un intervalo de longitud 2π. Tomando el periodo como 2π se tiene $2L = 2\pi$, con lo que $L = \pi$.

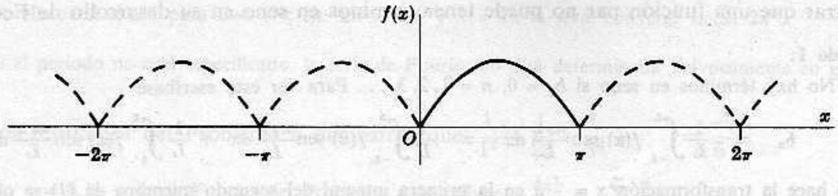


Fig. 14-10

Por el Problema 10, $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\operatorname{sen}(x+nx) + \operatorname{sen}(x-nx)\}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \quad \text{si } n \neq 1.$$

Para $n = 1$, $\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\Big|_0^\pi = 0.$

Para $n = 0$, $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$

Luego

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^\infty \frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right)$$

12. Desarrollar $f(x) = x$, $0 < x < 2$, en serie (*a*) de senos, (*b*) de cosenos.

(*a*) Prolongar la función dada a la función impar de periodo 4 que se ve en la Fig. 14-11. Esta es la llamada *prolongación impar* de $f(x)$. Entonces, $2L = 4$, $L = 2$.

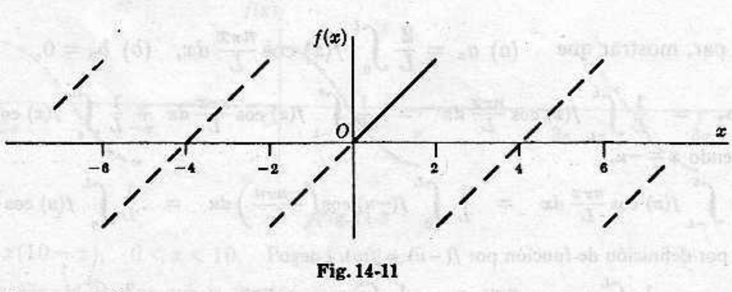


Fig. 14-11

Así que $a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

Luego

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

(*b*) Prolónguese la función $f(x)$ a la función par de periodo 4 que se ve en la Fig. 14-2. Esta es la *prolongación par* de $f(x)$. Se tiene, pues, $2L = 4$, $L = 2$.

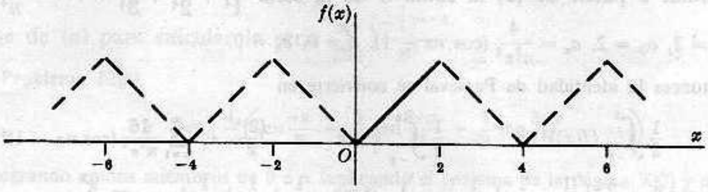


Fig. 14-12

Así que $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \qquad \text{si } n \neq 0$$

Si $n = 0$, $a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$.

Luego
$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

Se observará que la función dada $f(x) = x$, $0 < x < 2$ queda *igualmente* representada por las dos series *diferentes* en (*a*) y en (*b*).

IDENTIDAD DE PARSEVAL

13. Suponiendo que la serie de Fourier de $f(x)$ converge uniformemente hacia $f(x)$ en $]-L, L[$, demostrar la identidad de Parseval

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \Sigma(a_n^2 + b_n^2)$$

suponiendo que la integral existe.

Si $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$, entonces, multiplicando por $f(x)$ e integrando término a término de $-L$ a L (cosa legítima, pues la serie es uniformemente convergente) se obtiene

$$\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$$= \frac{a_0^2}{2}L + L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad (1)$$

habiéndose utilizado los resultados

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = La_n, \qquad \int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = Lb_n, \qquad \int_{-L}^{L}f(x)\,dx = La_0 \qquad (2)$$

obtenidos a partir de los coeficientes de Fourier.

El resultado pedido se deduce dividiendo ambos miembros de (*1*) por L. La identidad de Parseval es válida con menos restricciones que las aquí impuestas.

14. (*a*) Escribir la identidad de Parseval que corresponde a la serie de Fourier del Problema 12(*b*).

(*b*) Determinar a partir de (*a*) la suma S de la serie $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$.

(*a*) Aquí $L = 2$, $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \neq 0$, $b_n = 0$.

Entonces la identidad de Parseval se convierte en

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \{f(x)\}^2\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx \;=\; \frac{(2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2$$

$$\text{o}\quad \frac{8}{3} \;=\; 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right), \quad \text{o sea,}\quad \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \;=\; \frac{\pi^4}{96}.$$

(*b*)
$$S \;=\; \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots \;=\; \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right)$$
$$=\; \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$
$$S \;=\; \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16}, \qquad \text{de donde} \quad S \;=\; \frac{\pi^4}{90}$$

15. Demostrar que para todo entero positivo M,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2 + b_n^2) \;\leqq\; \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx$$

siendo a_n y b_n los coeficientes de Fourier correspondientes a $f(x)$ y suponiendo que $f(x)$ es casi-continua en $]-L, L[$.

Sea
$$S_M(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

Para $M = 1, 2, 3, \dots$ ésta es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de $f(x)$.

Se tiene
$$\int_{-L}^{L}\{f(x) - S_M(x)\}^2\,dx \;\geqq\; 0 \tag{2}$$

puesto que el integrando no es negativo. Desarrollando éste,

$$2\int_{-L}^{L} f(x)\,S_M(x)\,dx \;-\; \int_{-L}^{L} S_M^2(x)\,dx \;\leqq\; \int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx \tag{3}$$

Multiplicando ambos miembros de (*1*) por $2f(x)$ e integrando de $-L$ a L, utilizando las ecuaciones (*2*) del Problema 13,

$$2\int_{-L}^{L} f(x)\,S_M(x)\,dx \;=\; 2L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2 + b_n^2)\right\} \tag{4}$$

Asimismo, elevando (*1*) al cuadrado e integrando de $-L$ a L, empleando el Problema 3, se tiene

$$\int_{-L}^{L} S_M^2(x)\,dx \;=\; L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2 + b_n^2)\right\} \tag{5}$$

Sustituyendo (*4*) y (*5*) en (*3*) y dividiendo por L se tiene el resultado que se buscaba.

Tomando el límite para $M \to \infty$ se tiene la *desigualdad de Bessel*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \;\leqq\; \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx \tag{6}$$

Para el signo de igualdad se tiene la identidad de Parseval (Problema 13).

Se puede considerar $S_M(x)$ como una representación *aproximada* de $f(x)$ y el primer miembro de (*2*), dividido por $2L$, representa el *error mínimo cuadrático* de la aproximación. La identidad de Parseval indica que con $M \to \infty$ el error medio cuadrático tiende a cero, mientras que la desigualdad de Bessel indica la posibilidad de que este error no tienda a cero efectivamente.

Estos resultados se relacionan con la idea de *plenitud* de un conjunto ortonormal. Si, por ejemplo, se omitiera uno o más términos de una serie de Fourier (como $\cos 4\pi x/L$, por ejemplo) jamás se podría hacer tender el error medio cuadrático a cero por muchos términos que se tomasen. Para una analogía con los vectores en 3 dimensiones, véase el Problema 60.

DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES DE FOURIER

16. (*a*) Hallar una serie de Fourier para $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$, integrando la serie del Problema 12(*a*).

(*b*) Valerse de (*a*) para calcular la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

(*a*) Por el Problema 12(*a*),

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right) \qquad (1)$$

Integrando ambos miembros de 0 a x (aplicando el teorema de la página 300) y multiplicando por 2 se tiene

$$x^2 = C - \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right) \qquad (2)$$

donde $C = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$.

(*b*) Para determinar C de otra manera nótese que (*2*) representa la serie de Fourier en cosenos para x^2 en $0 < x < 2$. Luego como $L = 2$ en este caso,

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{4}{3}$$

Entonces por el valor de C en (*a*) se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{12}$$

17. Mostrar que no es válida la derivación término a término de la serie del Problema 12(*a*).

La derivación término a término da $2\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{2\pi x}{2} + \cos\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$.

Como el término n-ésimo de esta serie no tiende a 0, la serie no es convergente para ningún x.

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER

18. Demostrar (*a*) $\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt = \frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}$

(*b*) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\operatorname{sen}(M+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2}.$

(*a*) Se tiene $\cos nt \operatorname{sen}\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t - \operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})t\}$.

Haciendo la suma de $n = 1$ a M,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\{\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt\} &= (\operatorname{sen}\tfrac{3}{2}t - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t) + (\operatorname{sen}\tfrac{5}{2}t - \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}t) \\ &\quad + \cdots + (\operatorname{sen}(M+\tfrac{1}{2})t - \operatorname{sen}(M-\tfrac{1}{2})t) \\ &= \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(M+\tfrac{1}{2})t - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\}\end{aligned}$$

Dividiendo por $\operatorname{sen}\frac{1}{2}t$ y sumando $\frac{1}{2}$ se tiene el resultado dicho.

(*b*) Intégrese el resultado en (*a*) de $-\pi$ a 0 y de 0 a π, respectivamente, con lo que se tienen los resultados pedidos ya que las integrales de todos los términos en coseno son nulas.

19. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$ si $f(x)$ es casicontinua.

Esto se deduce de inmediato del Problema 15, pues si la serie $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ es convergente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esta igualdad suele llamarse *teorema de Riemann*.

20. Demostrar que $\lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})x\,dx = 0$ si $f(x)$ es casicontinua.

Se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}x\}\cos Mx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\cos\tfrac{1}{2}x\}\,\text{sen}\,Mx\,dx$$

Entonces utilizando el resultado del Problema 19, con $f(x)$ remplazada por $f(x)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x$ y $f(x)\cos\frac{1}{2}x$, respectivamente, que son casicontinuas, si lo es $f(x)$ se tiene la demostración.

También se habría podido demostrar esto con límites de integración a y b en vez de los $-\pi$ y π.

21. Suponiendo que $L=\pi$, es decir, que la serie de Fourier de $f(x)$ tiene periodo $2L=2\pi$, demostrar que

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt$$

Aplicando las fórmulas de los coeficientes de Fourier con $L=\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\text{sen}\,nu\,du\right)\text{sen}\,nx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\cos nu\cos nx + \text{sen}\,nu\,\text{sen}\,nx\right)du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-x)\,du \end{aligned}$$

Asimismo, $$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du$$

Luego
$$\begin{aligned} S_M(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-x)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M}\cos n(u-x)\right\}du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})(u-x)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(u-x)}\,du \end{aligned}$$

por el Problema 18. Haciendo $u-x=t$ se tiene

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt$$

Como el integrando tiene periodo 2π se puede sustituir el intervalo $-\pi-x,\ \pi-x$ por cualquier otro intervalo de longitud 2π, como el $-\pi,\ \pi$. Así se obtiene el resultado pedido.

22. Demostrar que

$$S_M(x) - \left(\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\right)\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\right)\text{sen}\,(M+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

Por el Problema 21,

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt \tag{1}$$

Multiplicando las integrales del Problema 18(*b*) por $f(x-0)$ y $f(x+0)$ respectivamente

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)\,\frac{\text{sen}\,(M+\frac{1}{2})t}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t}\,dt \tag{2}$$

Restando (*2*) de (*1*) se obtiene el resultado pedido.

23. Si $f(x)$ y $f'(x)$ son casicontinuas en $]-\pi, \pi[$, demostrar que

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

La función $\dfrac{f(t+x)-f(x+0)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t}$ es casicontinua en $0 < t \leqq \pi$ puesto que $f(x)$ es casicontinua.

Además $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(t+x)-f(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(t+x)-f(x+0)}{t}$

pues, por hipótesis, $f'(x)$ es casicontinua de modo que existe la derivada a la derecha de $f(x)$ en todo x.

Así, pues, $\dfrac{f(t+x)-f(x+0)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t}$ es casicontinua en $0 \leqq t \leqq \pi$.

De igual modo $\dfrac{f(t+x)-f(x-0)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t}$ es casicontinua en $-\pi \leqq t \leqq 0$.

Así que por los Problemas 20 y 22 se tiene

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) - \left\{\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right\} = 0 \qquad \text{o} \qquad \lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

PROBLEMAS DE CONTORNO

24. Hallar una solución $U(x, t)$ del problema de contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad t>0,\ 0<x<2$$
$$U(0,t)=0,\ U(2,t)=0 \qquad t>0$$
$$U(x,0)=x \qquad 0<x<2$$

Un método que se emplea en la práctica es suponer la existencia de una solución de la ecuación en derivadas parciales que tiene la forma particular $U(x, t) = X(x)\,T(t)$, siendo $X(x)$ y $T(t)$ funciones de x y t, respectivamente, que se tratan de determinar. Por esta razón, el método suele llamarse método de *separación de variables*.

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial t}(XT) = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT) \qquad \text{o} \qquad (2)\quad X\frac{dT}{dt} = 3T\frac{d^2X}{dx^2}$$

escribiendo X y T en vez de $X(x)$ y $T(t)$.

La ecuación (2) se puede escribir como

$$\frac{1}{3T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \tag{3}$$

Como un miembro depende solo de t y el otro solo de x, y como x y t son variables independientes, es claro que cada miembro ha de ser constante.

En el Problema 47 se ve que si $c \geqq 0$ no puede existir solución que cumpla las condiciones de contorno dadas. Supóngase, pues, que c es una constante negativa que se escribirá $-\lambda^2$. Entonces por (3) se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dT}{dt} + 3\lambda^2 T = 0, \qquad \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{4}$$

cuyas soluciones son, respectivamente,

$$T = C_1 e^{-3\lambda^2 t}, \qquad X = A_1\cos\lambda x + B_1\,\mathrm{sen}\,\lambda x \tag{5}$$

Una solución la da el producto de X y T que se puede escribir

$$U(x,t) = e^{-3\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x) \tag{6}$$

siendo A y B constantes.

Se trata ahora de determinar A y B de modo que (6) cumpla las condiciones de contorno dadas. Para satisfacer la condición $U(0, t) = 0$ debe tenerse

$$e^{-3\lambda^2 t}(A) = 0 \quad \text{o} \quad A = 0 \tag{7}$$

de modo que (6) se vuelve

$$U(x, t) = Be^{-3\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x \tag{8}$$

Para cumplir la condición $U(2, t) = 0$ se ha de tener

$$Be^{-3\lambda^2 t} \operatorname{sen} 2\lambda = 0 \tag{9}$$

Como $B = 0$ anula idénticamente la solución (8) se evita tal elección y se toma en cambio

$$\operatorname{sen} 2\lambda = 0, \quad \text{o sea.} \quad 2\lambda = m\pi \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{m\pi}{2} \tag{10}$$

con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Sustituyendo en (8) se tiene que una solución que satisface las dos primeras condiciones de contorno es

$$U(x, t) = B_m e^{-3m^2\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} \tag{11}$$

donde se ha remplazado B por B_m, indicando que se pueden usar constantes diferentes para valores distintos de m.

Si se trata ahora de cumplir la última condición de contorno $U(x, 0) = x$, $0 < x < 2$, se ve que es imposible con (11). Pero en vista de que *sumas* de soluciones de la forma (11) también son soluciones (por el llamado *principio de superposición*), se llega a la posible solución

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-3m^2\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} \tag{12}$$

Por la condición $U(x, 0) = x$, $0 < x < 2$, se ve al hacer $t = 0$ que (12) se convierte en

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} \qquad 0 < x < 2 \tag{13}$$

Pero esto equivale al problema de desarrollar la función $f(x) = x$ para $0 < x < 2$ en serie de senos. La solución se da en el Problema 12(*a*), de la que resulta que $B_m = \dfrac{-4}{m\pi} \cos m\pi$, de modo que (12) se convierte en

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{m\pi} \cos m\pi\right) e^{-3m^2\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} \tag{14}$$

que es una *solución formal*. Para comprobar que (14) sí es una solución hay que mostrar que satisface la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno. La prueba consiste en justificar la derivación término a término y en el empleo de procesos de límite de series y se puede realizar por métodos del Capítulo 11.

El problema de contorno aquí considerado tiene una interpretación en la teoría de la transmisión del calor. La ecuación $\dfrac{\partial U}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ es la ecuación de transmisión del calor en una varilla delgada de alambre situada sobre el eje x entre $x = 0$ y $x = L$ si la superficie del alambre está aislada de modo que el calor no pueda entrar ni escapar. $U(x, t)$ es la temperatura en un punto x de la varilla en el tiempo t. La constante $k = K/s\rho$ (donde K es la *conductividad térmica*, s el *calor específico* y ρ es la *densidad* del material conductor) se llama *difusividad*. Las condiciones de contorno $U(0, t) = 0$ y $U(L, t) = 0$ indican que las temperaturas de los extremos de la varilla se mantienen a cero unidades para todo tiempo $t > 0$, en tanto que $U(x, 0)$ indica la temperatura inicial en cualquier punto x de la varilla. En este problema la longitud de la varilla es $L = 2$ unidades y la difusividad es $k = 3$ unidades.

FUNCIONES ORTOGONALES

25. (*a*) Mostrar que el conjunto de funciones

$$1, \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L}, \cos\frac{3\pi x}{L}, \ldots$$

forma un conjunto ortogonal en el intervalo $]-L, L[$.

(*b*) Determinar las constantes de normalización correspondientes al conjunto de (*a*) de manera que el conjunto sea ortonormal en $]-L, L[$.

(*a*) Esto se deduce inmediatamente de los resultados de los Problemas 2 y 3.

(*b*) Por el Problema 3,

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L}\,dx = L, \qquad \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L}\,dx = L$$

Luego $$\int_{-L}^{L}\left(\sqrt{\frac{1}{L}}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx = 1, \qquad \int_{-L}^{L}\left(\sqrt{\frac{1}{L}}\cos\frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx = 1$$

También $$\int_{-L}^{L}(1)^2\,dx = 2L \qquad \text{o} \qquad \int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2 dx = 1$$

De modo que el conjunto ortonormal es

$$\frac{1}{\sqrt{2L}},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{2\pi x}{L},\ \ldots$$

PROBLEMAS VARIOS

26. Hallar una serie de Fourier para $f(x) = \cos\alpha x$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$, donde $\alpha \neq 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Tomando como periodo 2π de manera que $2L = 2\pi$, $L = \pi$, como la función es par, $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\cos(\alpha-n)x + \cos(\alpha+n)x\}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right\} = \frac{2\alpha\operatorname{sen}\alpha\pi\cos n\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

$$a_0 = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha\pi}$$

Luego

$$\cos\alpha x = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\alpha^2-n^2}\cos nx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}\cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}\cos 2x - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}\cos 3x + \cdots\right)$$

27. Demostrar que $$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots.$$

Sea $x = \pi$ en la serie de Fourier obtenida en el Problema 26. Entonces,

$$\cos\alpha\pi = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots\right)$$

o

$$\pi\cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots \tag{1}$$

interesante resultado que representa un desarrollo de la cotangente en fracciones parciales.

Por el criterio M de Weierstrass, la serie del segundo miembro de (*1*) converge uniformemente para $0 \leqq |\alpha| \leqq |x| < 1$ y el primer miembro de (*1*) tiende a cero con $\alpha \to 0$, como se ve aplicando la regla de L'Hôpital. Se pueden, pues, integrar ambos miembros de (*1*) entre 0 y x para obtener

$$\int_0^x \left(\pi \cot \alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right) d\alpha \quad = \quad \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}\, d\alpha \; + \; \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2}\, d\alpha \; + \; \cdots$$

o
$$\ln\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\alpha\pi}\right)\Big|_0^x \quad = \quad \ln\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) + \cdots$$

o sea,
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}\right) &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left\{\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right\} \\ &= \ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right\} \end{aligned}$$

de modo que
$$\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \quad = \quad \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots \tag{2}$$

Cambiando x por x/π se tiene

$$\operatorname{sen} x \quad = \quad x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots \tag{3}$$

que es un *producto infinito para sen x*, válido para todo x, como puede demostrarse; es un resultado de interés, pues expresa sen x en forma factorizada análogamente a como se factoriza un polinomio.

28. Demostrar que $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$.

Sea $x = 1/2$ en la ecuación (*2*) del Problema 27. Entonces,

$$\frac{2}{\pi} \quad = \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots \quad = \quad \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\right)\cdots$$

Tomando los inversos de ambos miembros se obtiene el resultado pedido, que es el llamado *producto de Wallis*.

Problemas propuestos

SERIES DE FOURIER

29. Hacer el grafo de las funciones siguientes y hallar sus series de Fourier correspondientes utilizando las propiedades de las funciones pares e impares cuando sean aplicables.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$ Periodo 4 (*b*) $f(x) = \begin{cases} -x & -4 \leqq x \leqq 0 \\ x & 0 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$ Periodo 8

(*c*) $f(x) = 4x,\ 0 < x < 10,$ Periodo 10 (*d*) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Periodo 6

Sol. (*a*) $\dfrac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-\cos n\pi)}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}$ (*b*) $2 - \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-\cos n\pi)}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{4}$

(*c*) $20 - \dfrac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{5}$ (*d*) $\dfrac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{3} - \dfrac{6\cos n\pi}{n\pi}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{3}\right\}$

30. Para cada parte del Problema 29, decir dónde están las discontinuidades de $f(x)$ y cuál es el valor hacia el cual converge cada serie en estas discontinuidades.

Sol. (*a*) $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots;\ 0$ (*b*) no hay discontinuidades

(*c*) $x = 0, \pm 10, \pm 20, \ldots;\ 20$ (*d*) $x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \ldots;\ 3$

31. Desarrollar $f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$ en serie de Fourier de periodo 8.

Sol. $\dfrac{16}{\pi^2}\left\{\cos\dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi x}{4} + \dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi x}{4} + \cdots\right\}$

32. (*a*) Desarrollar $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$ en serie de senos de Fourier.
(*b*) ¿Cómo debe definirse $f(x)$ en $x = 0$ y $x = \pi$ para que la serie converja hacia $f(x)$ para $0 \leqq x \leqq \pi$?

Sol. (*a*) $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\operatorname{sen}2nx}{4n^2-1}$ (*b*) $f(0) = f(\pi) = 0$

33. (*a*) Desarrollar en serie de Fourier $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$ si el periodo es π, y (*b*) comparar con el resultado del Problema 32, explicando las semejanzas y diferencias que hubiere.
Sol. Es la misma que en el Problema 32.

34. Desarrollar $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$ en una serie de (*a*) senos, (*b*) cosenos.

Sol. (*a*) $\dfrac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{8}$ (*b*) $\dfrac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2\cos n\pi/2 - \cos n\pi - 1}{n^2}\right)\cos\dfrac{n\pi x}{8}$

35. Demostrar que $0 \leqq x \leqq \pi$,

(*a*) $x(\pi - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \left(\dfrac{\cos 2x}{1^2} + \dfrac{\cos 4x}{2^2} + \dfrac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$

(*b*) $x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{1^3} + \dfrac{\operatorname{sen}3x}{3^3} + \dfrac{\operatorname{sen}5x}{5^3} + \cdots\right)$

36. Mediante el problema anterior mostrar que

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$.

37. Mostrar que $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{9^3} + \dfrac{1}{11^3} - \cdots = \dfrac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$.

DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES DE FOURIER

38. (*a*) Mostrar que para $-\pi < x < \pi$,

$$x = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots\right)$$

(*b*) Integrando el resultado de (*a*) se tiene para $-\pi \leqq x \leqq \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

(*c*) Integrando el resultado de (*b*) se tiene para $-\pi \leqq x \leqq \pi$,

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} - \cdots\right)$$

39. (*a*) Mostrar que para $-\pi < x < \pi$,

$$x \cos x = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + 2\left(\frac{2}{1\cdot 3}\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2\cdot 4}\operatorname{sen} 3x + \frac{4}{3\cdot 5}\operatorname{sen} 4x - \cdots\right)$$

(*b*) Utilizar (*a*) para mostrar que para $-\pi \leqq x \leqq \pi$,

$$x \operatorname{sen} x = 1 - \tfrac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \cdots\right)$$

40. Derivando el resultado del Problema 35(*b*) demostrar que para $0 \leqq x \leqq \pi$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

IDENTIDAD DE PARSEVAL

41. Con el Problema 35 y la identidad de Parseval mostrar que

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

42. Mostrar que $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2} + \dfrac{1}{3^2\cdot 5^2} + \dfrac{1}{5^2\cdot 7^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2 - 8}{16}$. [Sug.: Aplicar el Problema 11.]

43. Mostrar que (*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, (*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

44. Mostrar que $\dfrac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \dfrac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2} + \dfrac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2} + \cdots = \dfrac{4\pi^2 - 39}{16}$.

PROBLEMAS DE CONTORNO

45. (*a*) Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ con las condiciones $U(0, t) = 0$, $U(4, t) = 0$, $U(x, 0) = 3 \operatorname{sen} \pi x - 2 \operatorname{sen} 5\pi x$, donde $0 < x < 4$, $t > 0$.

(*b*) Dar una posible interpretación física del problema y su solución.

Sol. (*a*) $U(x, t) = 3e^{-2\pi^2 t} \operatorname{sen} \pi x - 2e^{-50\pi^2 t} \operatorname{sen} 5\pi x$

46. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ con las condiciones $U(0, t) = 0$, $U(6, t) = 0$, $U(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 6 \end{cases}$ e interpretar físicamente.

Sol. $$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\left[\frac{1 - \cos(m\pi/3)}{m\pi}\right] e^{-m^2\pi^2 t/36} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{6}$$

47. Mostrar que si cada miembro de la ecuación (*3*), página 313, es una constante c con $c \geqq 0$, no hay solución que satisfaga el problema de contorno.

48. Una cuerda flexible de longitud π está templada firmemente entre los puntos $x = 0$ y $x = \pi$ del eje x con sus extremos fijos en esos puntos. Puesta en vibración transversal de poca amplitud, el desplazamiento $Y(x, t)$ del eje x en un punto x en el instante t está dado por $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ con $a^2 = T/\rho$, T = tensión, ρ = masa por unidad de longitud.

(a) Hallar una solución de esta ecuación (llamada *ecuación de la onda*) con $a^2 = 4$ que satisfaga las condiciones $Y(0, t) = 0$, $Y(\pi, t) = 0$, $Y(x, 0) = 0{,}1$ sen $x + 0{,}01$ sen $4x$, $Y_t(x, 0) = 0$ para $0 < x < \pi$, $t > 0$.

(b) Interpretar físicamente las condiciones de contorno en (a) y la solución.

Sol. (a) $Y(x, t) = 0{,}1$ sen x cos $2t + 0{,}01$ sen $4x$ cos $8t$

49. (a) Resolver el problema de contorno $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ con las condiciones $Y(0, t) = 0$, $Y(2, t) = 0$, $Y(x, 0) = 0{,}05x(2 - x)$, $Y_t(x, 0) = 0$, donde $0 < x < 2$, $t > 0$. (b) Interpretar físicamente.

Sol. (a) $$Y(x,t) = \frac{1{,}6}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

50. Resolver el problema de contorno $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 1$, $U(\pi, t) = 3$, $U(x, 0) = 2$.

[Sugerencia: Hágase $U(x, t) = V(x, t) + F(x)$ y elíjase $F(x)$ de modo que se simplifiquen la ecuación diferencial y las condiciones de contorno para $V(x, t)$.]

Sol. $$U(x,t) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\cos m\pi}{m\pi}e^{-m^2 t}\operatorname{sen} mx$$

51. Dar una interpretación física al Problema 50.

52. Resolver el Problema 49 con las condiciones de contorno para $Y(x, 0)$ y $Y_t(x, 0)$ intercambiadas, es decir, con $Y(x, 0) = 0$, $Y_t(x, 0) = 0{,}05x(2 - x)$ y dar una interpretación física.

Sol. $$Y(x,t) = \frac{3{,}2}{3\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}\operatorname{sen}\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

53. Comprobar que el Problema de contorno 24 tiene, efectivamente, la solución (*14*), página 314.

PROBLEMAS VARIOS

54. Si $-\pi < x < \pi$ y $\alpha \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$, demostrar que

$$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\alpha\pi} = \frac{\operatorname{sen} x}{1^2-\alpha^2} - \frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2-\alpha^2} + \frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2-\alpha^2} - \cdots$$

55. Si $-\pi < x < \pi$, demostrar que

(a) $$\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{senh}\alpha x}{\operatorname{senh}\alpha\pi} = \frac{\operatorname{sen} x}{\alpha^2+1^2} - \frac{2\operatorname{sen}2x}{\alpha^2+2^2} + \frac{3\operatorname{sen}3x}{\alpha^2+3^2} - \cdots$$

(b) $$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh\alpha x}{\operatorname{senh}\alpha\pi} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha\cos x}{\alpha^2+1^2} + \frac{\alpha\cos 2x}{\alpha^2+2^2} - \cdots$$

56. Demostrar que $$\operatorname{senh} x = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$$

57. Demostrar que $$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{(5\pi)^2}\right)\cdots$$

[Sug.: $\cos x = (\operatorname{sen} 2x)/(2 \operatorname{sen} x)$].

58. Mostrar que (a) $$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdots}{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\cdot14\cdots}$$

(b) $$\pi\sqrt{2} = 4\left(\frac{4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12\cdot16\cdot16\cdots}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdots}\right)$$

59. (*a*) Demostrar que si $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots$$

(*b*) Demostrar que si $0 < \alpha < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots$$

(*c*) Por (*a*), (*b*) y el Problema 17, Capítulo 13, complétese la demostración de que

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha\pi}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

[Sugerencia: Para (*a*) utilizar el Problema 26. Para (*b*) escribir la integral dada como suma de las integrales de 0 a 1 y de 1 a ∞ y hágase $x = 1/y$ en la última integral así obtenida. Luego aplíquese que

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$.]

60. Sea $\mathbf{r}$ un vector tridimensional cualquiera. Mostrar que

$$(a)\ (\mathbf{r}\cdot\mathbf{i})^2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j})^2 \leqq (\mathbf{r})^2, \qquad (b)\ (\mathbf{r}\cdot\mathbf{i})^2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j})^2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})^2 = \mathbf{r}^2$$

y discútanse con respecto a la desigualdad de Bessel y a la identidad de Parseval.

61. Si $\{\phi_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es ortonormal en $]a, b[$, demostrar que $\displaystyle\int_a^b \{f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)\}^2\,dx$ es un mínimo si

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

Discutir este resultado en relación con las series de Fourier.

Capítulo 15

Integrales de Fourier

LA INTEGRAL DE FOURIER

Supónganse las condiciones siguientes para $f(x)$:

1. $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet (página 299) en todo intervalo finito $]-L, L[$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge, es decir, $f(x)$ es absolutamente integrable en $]-\infty, \infty[$.

El *teorema de la integral de Fourier* establece entonces que

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\alpha)\cos \alpha x + B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x\}\, d\alpha \tag{1}$$

siendo

$$\begin{cases} A(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx \\ B(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx \end{cases} \tag{2}$$

(*1*) es válido si x es un punto de continuidad de $f(x)$. Si x es punto de discontinuidad hay que cambiar $f(x)$ por $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ como en el caso de las series de Fourier. Nótese que las condiciones anteriores son suficientes, pero no necesarias.

La semejanza de (*1*) y (*2*) con los resultados correspondientes para las series de Fourier es bien patente. El segundo miembro de (*1*) se suele llamar *desarrollo de* $f(x)$ *en integral de Fourier*.

FORMAS EQUIVALENTES DEL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

El teorema de la integral de Fourier se puede escribir también en las formas

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos \alpha(x-u)\, du\, d\alpha \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du \qquad (4)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha(u-x)}\, du\, d\alpha \end{aligned}$$

donde se ha de entender que si $f(x)$ no es continua en x, el segundo miembro se remplaza por $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Estos resultados se pueden simplificar un tanto si $f(x)$ es función impar o par, y se tiene

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos \alpha x\, d\alpha \int_0^{\infty} f(u)\cos \alpha u\, du \qquad \text{si } f(x) \text{ es par} \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \operatorname{sen} \alpha u\, du \qquad \text{si } f(x) \text{ es impar} \tag{6}$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER

De (*4*) se deduce que si

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du \tag{7}$$

entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha \tag{8}$$

La función $F(\alpha)$ se llama *transformada de Fourier* de $f(x)$ y se suele escribir $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$. La función $f(x)$ es la *transformada inversa de Fourier* de $F(\alpha)$ y se escribe $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$.

Nota: Las constantes que preceden al signo integral en (*7*) y en (*8*) se han tomado aquí iguales a $1/\sqrt{2\pi}$, pero bien pueden ser cualesquiera constantes no nulas siempre que su producto sea $1/2\pi$. La forma anterior es la llamada *forma simétrica*.

Si $f(x)$ es par, la ecuación (*5*) da

$$\left\{\begin{aligned} F_c(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha \end{aligned}\right. \tag{9}$$

y se dice que $F_c(\alpha)$ y $f(x)$ son las *transformadas de Fourier en cosenos* una de otra.

Si $f(x)$ es impar, la ecuación (*6*) da

$$\left\{\begin{aligned} F_s(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \operatorname{sen} \alpha u\, du \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha \end{aligned}\right. \tag{10}$$

y se dice que $F_s(\alpha)$ y $f(x)$ son *transformadas de Fourier en senos* una de otra.

IDENTIDADES DE PARSEVAL PARA LAS INTEGRALES DE FOURIER

Si $F_s(\alpha)$ y $G_s(\alpha)$ son transformadas de Fourier en senos de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, entonces

$$\int_0^{\infty} F_s(\alpha)\, G_s(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{11}$$

Análogamente, si $F_c(\alpha)$ y $G_c(\alpha)$ son transformadas de Fourier en cosenos de $f(x)$ y $g(x)$, entonces

$$\int_0^{\infty} F_c(\alpha)\, G_c(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{12}$$

En el caso especial en que $f(x) = g(x)$, (*11*) y (*12*) se convierten, respectivamente, en

$$\int_0^{\infty} \{F_s(\alpha)\}^2\, d\alpha = \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2\, dx \tag{13}$$

$$\int_0^{\infty} \{F_c(\alpha)\}^2\, d\alpha = \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2\, dx \tag{14}$$

Las relaciones anteriores son las *identidades de Parseval* para integrales. Relaciones parecidas valen para transformadas generales de Fourier. Así, si $F(\alpha)$ y $G(\alpha)$ son transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\overline{G(\alpha)}\,d\alpha \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{15}$$

en donde el trazo significa que se trata de la compleja conjugada obtenida cambiando i por $-i$. Véase Problema 30.

TEOREMA DE CONVOLUCION

Si $F(\alpha)$ y $G(\alpha)$ son transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,G(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(x-u)\,du \tag{16}$$

Si se define el *producto de convolución*, denotado $f * g$, de las funciones f y g como

$$f * g \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(x-u)\,du \tag{17}$$

entonces *(16)* puede escribirse como

$$\mathcal{F}\{f * g\} \;=\; \mathcal{F}\{f\}\,\mathcal{F}\{g\} \tag{18}$$

o sea, que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual al producto de sus transformadas de Fourier. Este es el llamado *teorema de convolucion para transformadas de Fourier.*

Problemas resueltos

INTEGRAL DE FOURIER Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

1. (*a*) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

(*b*) Representar $f(x)$ y su transformada de Fourier para $\alpha = 3$.

(*a*) La transformada de Fourier de $f(x)$ es

$$F(\alpha) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{i\alpha u}\,du \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}(1)\,e^{i\alpha u}\,du \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{i\alpha u}}{i\alpha}\bigg|_{-a}^{a}$$

$$=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\alpha a}-e^{-i\alpha a}}{i\alpha}\right) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha a}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

Para $\alpha = 0$ se obtiene $F(\alpha) = \sqrt{2/\pi}\,a$.

(*b*) Los grafos de $f(x)$ y $F(\alpha)$ para $a = 3$ se ven en las Figs. 15-1 y 15-2, respectivamente.

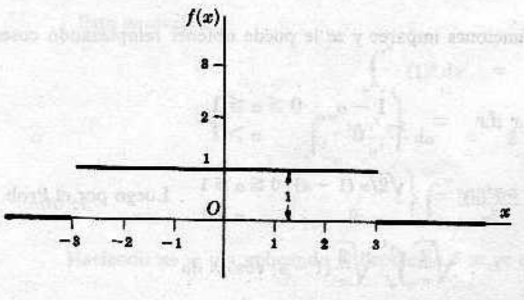


Fig. 15-1

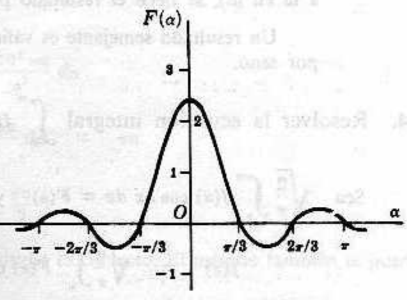


Fig. 15-2

2. (*a*) Valiéndose del resultado del Problema 1 calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha a \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha$

(*b*) Deducir el valor de $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$.

(*a*) Por el teorema de la integral de Fourier, si

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du \qquad \text{luego} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

Entonces, por el Problema 1,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sen} \alpha a}{\alpha}\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 1/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

El primer miembro de (*1*) es igual a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha a \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha a \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha}\, d\alpha \tag{2}$$

El integrando de la segunda integral de (*2*) es impar y, por tanto, la integral es cero. Entonces, por (*1*) y (*2*) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha a \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ \pi/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

(*b*) Si $x = 0$ y $a = 1$ en el resultado de (*a*) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \pi \quad \text{o} \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

pues el integrando es par.

3. Si $f(x)$ es función par mostrar que:

(*a*) $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du$, (*b*) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha$.

Se tiene

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \operatorname{sen} \alpha u\, du \tag{1}$$

(*a*) Si $f(u)$ es par, $f(u) \cos \lambda u$ es par y $f(u) \operatorname{sen} \lambda u$ es impar. Así que la segunda integral del segundo miembro de (*1*) es cero y el resultado se puede escribir

$$F(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du$$

(*b*) Por (*a*), $F(-\alpha) = F(\alpha)$, de modo que $F(\alpha)$ es función par. Entonces, mediante una demostración análoga a la en (*a*), se tiene el resultado pedido.

Un resultado semejante es válido para funciones impares y se le puede obtener remplazando coseno por seno.

4. Resolver la ecuación integral $\int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx = \begin{cases} 1 - \alpha & 0 \leqq \alpha \leqq 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$

Sea $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx = F(\alpha)$ y tómese $F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{2/\pi}\,(1 - \alpha) & 0 \leqq \alpha \leqq 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$. Luego por el Prob. 3,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (1 - \alpha) \cos \alpha x\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{1} (1 - \alpha) \cos \alpha x\, d\alpha = \frac{2(1 - \cos x)}{\pi x^2}$$

5. Utilizar el Problema 4 para mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}$.

Como se obtuvo en el Problema 4,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\cos\alpha x\,dx = \begin{cases} 1-\alpha & 0 \leqq \alpha \leqq 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Tomando el límite para $\alpha \to 0+$ se encuentra que

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Pero esta integral se puede escribir $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{x^2}\,dx$ que se vuelve $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\,du$ haciendo $x = 2u$, con lo que se tiene el resultado pedido.

6. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x \geqq 0.$

Sea $f(x) = e^{-x}$ en el teorema de la integral de Fourier.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha \int_0^\infty f(u)\cos\lambda u\,du$$

Luego

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha \int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha u\,du = e^{-x}$$

Pero por el Problema 22, Capítulo 12, se tiene $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha u\,du = \frac{1}{\alpha^2+1}$. Entonces,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha = e^{-x} \qquad \text{o} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

IDENTIDAD DE PARSEVAL

7. Verificar la identidad de Parseval para las integrales de Fourier en las transformadas de Fourier del Problema 1.

Hay que mostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty \{f(x)\}^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \{F(\alpha)\}^2\,d\alpha$$

donde $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ y $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha a}{\alpha}$.

Esto equivale a

$$\int_{-a}^a (1)^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha a}{\alpha^2}\,d\alpha$$

o

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2\alpha a}{\alpha^2}\,d\alpha = 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2\alpha a}{\alpha^2}\,d\alpha = \pi a$$

esto es,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2\alpha a}{\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi a}{2}$$

Haciendo $\alpha a = u$ y aplicando el Problema 5 se ve que esto último es correcto. El método también se puede aplicar para hallar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\,du$ directamente.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

8. Dar una demostración heurística del teorema de la integral de Fourier utilizando una forma de límite de la serie de Fourier.

Sea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

donde $a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\,du$ y $b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(u)\operatorname{sen}\frac{n\pi u}{L}\,du$.

Entonces, por sustitución (véase Problema 21, Capítulo 14),

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)\,du + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)\,du \tag{2}$$

Si se supone que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,du$ converge, el primer término del segundo miembro de (2) tiende a cero para $L\to\infty$, en tanto que la parte restante parece tender a

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)\,du \tag{3}$$

Este último paso no es riguroso y por eso la demostración es heurística.

Llamando $\Delta\alpha = \pi/L$, (3) se puede escribir

$$f(x) = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\, F(n\,\Delta\alpha) \tag{4}$$

donde se ha escrito

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)\,du \tag{5}$$

Pero el límite (4) es igual a

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)\,du$$

que es la fórmula integral de Fourier

Esta demostración sirve solamente para establecer un resultado posible. Para ser riguroso hay que empezar por la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)\,dx$$

y estudiar la convergencia. Este método se considera en los Problemas 9-12.

9. Demostrar que: (*a*) $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{l}\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}$, (*b*) $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-L}^{0}\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}$.

(*a*) Sea $\alpha v = y$. Luego $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{L}\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha L}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy = \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$

por el Problema 29. Capítulo 12.

(*b*) Sea $\alpha v = -y$. Luego $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-L}^{0}\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha L}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$.

10. El teorema de Riemann dice que si $F(x)$ es casicontinua en $]a, b[$,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b F(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx = 0$$

con un resultado parecido para el coseno (véase Problema 31). Utilizar esto para demostrar que

$$(a)\quad \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^L f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;=\; \frac{\pi}{2}f(x+0)$$

$$(b)\quad \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-L}^0 f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;=\; \frac{\pi}{2}f(x-0)$$

donde $f(x)$ y $f'(x)$ se suponen casicontinuas en $]0, L[$ y $]-L, 0[$, respectivamente.

(*a*) Aplicando el Problema 9(*a*) se ve que una demostración del resultado que se da equivale a demostrar que

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^L \{f(x+v)-f(x+0)\}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;=\; 0$$

Lo que se deduce inmediatamente del teorema de Riemann, pues $F(v) = \dfrac{f(x+v)-f(x+0)}{v}$ es casicontinua en $]0, L[$ ya que existe $\lim\limits_{v\to 0+} F(v)$ y $f(x)$ es casicontinua.

(*b*) La demostración de esto es análoga a la de la parte (*a*) haciendo uso del Problema 9(*b*).

11. Si $f(x)$ satisface la condición adicional de que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ converge, demostrar que

$$(a)\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}f(x+0),\quad (b)\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^0 f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}f(x-0).$$

Se tiene

$$\int_0^\infty f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;=\; \int_0^L f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;+\; \int_L^\infty f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \tag{1}$$

$$\int_0^\infty f(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;=\; \int_0^L f(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;+\; \int_L^\infty f(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \tag{2}$$

Restando,

$$\int_0^\infty \{f(x+v)-f(x+0)\}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \tag{3}$$

$$= \int_0^L \{f(x+v)-f(x+0)\}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;+\; \int_L^\infty f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv \;-\; \int_L^\infty f(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv$$

Denotando las integrales en (*3*) por I, I_1, I_2 e I_3, respectivamente, se tiene $I = I_1 + I_2 + I_3$ con lo que

$$|I| \;\leqq\; |I_1| \;+\; |I_2| \;+\; |I_3| \tag{4}$$

Ahora bien, $\qquad |I_2| \;\leqq\; \displaystyle\int_L^\infty \left|f(x+v)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\right|dv \;\leqq\; \frac{1}{L}\int_L^\infty |f(x+v)|\,dv$

Asimismo, $\qquad |I_3| \;\leqq\; |f(x+0)|\,\left|\displaystyle\int_L^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv\right|$

Como $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ e $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha v}{v}\,dv$ convergen ambas se puede tomar L lo suficientemente grande para que $|I_2| \leqq \epsilon/3$, $|I_3| \leqq \epsilon/3$. Asimismo, se puede elegir α de modo que $|I_1| \leqq \epsilon/3$. Entonces, por (*4*) se tiene $|I| < \epsilon$ para α y L suficientemente grandes, de modo que se tiene el resultado pedido.

Esto se deduce por un razonamiento exactamente igual al de la parte (*a*).

12. Demostrar la fórmula integral de Fourier si $f(x)$ satisface las condiciones enunciadas en la página 321.

Hay que demostrar que $\displaystyle\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{L}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\,d\alpha \;=\; \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

Como $\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,du$ que converge, se sigue por el criterio de Weierstrass que $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du$ converge absoluta y uniformemente para todo α. De modo que se puede invertir el orden de integración para obtener.

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{L} d\alpha \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\,du \int_{\alpha=0}^{L}\cos\alpha(x-u)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\operatorname{sen} L(u-x)}{u-x}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(x+v)\frac{\operatorname{sen} Lv}{v}\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+v)\frac{\operatorname{sen} Lv}{v}\,dv + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+v)\frac{\operatorname{sen} Lv}{v}\,dv$$

en donde se ha hecho $u = x + v$.

Para $L \to \infty$ se ve, por el Problema 11, que la integral dada converge hacia $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ tal como se requiere.

PROBLEMAS VARIOS

13. Resolver $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ sujeta a las condiciones $U(0,t) = 0$, $U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}$, $U(x\ t)$ es acotada para $x > 0$, $t > 0$.

Se procede como en el Problema 24, Capítulo 14. $Be^{-\lambda^2 t}\operatorname{sen}\lambda x$ da una solución que satisface la ecuación en derivadas parciales y la primera condición de contorno. A diferencia del Problema 24, Capítulo 14, las condiciones de contorno no prescriben valores determinados para λ, de modo que hay que suponer que todos los valores de λ son posibles. Por analogía con aquel problema la suma sobre todos los valores posibles de λ, lo que corresponde a una integración en este caso, lleva a la posible solución

$$U(x,t) = \int_0^\infty B(\lambda)\,e^{-\lambda^2 t}\operatorname{sen}\lambda x\,d\lambda \tag{1}$$

donde $B(\lambda)$ está indeterminada. Por la segunda condición,

$$\int_0^\infty B(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x\,d\lambda = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases} = f(x) \tag{2}$$

de donde resulta la fórmula integral de Fourier

$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}\lambda x\,dx = \frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda} \tag{3}$$

de modo que, al menos formalmente, la solución está dada por

$$U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\right) e^{-\lambda^2 t}\operatorname{sen}\lambda x\,dx \tag{4}$$

Véase Problema 26.

14. Mostrar que $e^{-x^2/2}$ es su propia transformada de Fourier.

Como $e^{-x^2/2}$ es par, su transformada de Fourier viene dada por $\sqrt{2/\pi}\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos x\alpha\,dx$.

Haciendo $x = \sqrt{2}\,u$ y utilizando el Problema 32, Capítulo 12, la integral se convierte en

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\cos(\alpha\sqrt{2}\,u)\,du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2/2} = e^{-\alpha^2/2}$$

que demuestra el resultado pedido.

15. Resolver la ecuación integral

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\,r(x-u)\,du$$

siendo $g(x)$ y $r(x)$ funciones dadas.

Suponiendo que existen las transformadas de Fourier de $y(x)$, $g(x)$ y $r(x)$ y llamándolas $Y(\alpha)$, $G(\alpha)$ y $R(x)$, respectivamente, al tomar la transformada de Fourier de ambos miembros de la ecuación integral dada se tiene, por el teorema de convolución,

$$Y(\alpha) = G(\alpha) + \sqrt{2\pi}\,Y(\alpha)\,R(\alpha) \qquad \text{o} \qquad Y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1-\sqrt{2\pi}\,R(\alpha)}$$

Entonces, $$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1-\sqrt{2\pi}\,R(\alpha)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha)}{1-\sqrt{2\pi}\,R(\alpha)}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha$$

suponiendo que exista la integral.

Problemas propuestos

INTEGRAL DE FOURIER Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

16. (*a*) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1/2\epsilon & |x| \leqq \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}$

(*b*) Determinar el límite de esta transformada para $\epsilon \to 0+$ y discutir el resultado

Sol. (*a*) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\epsilon}{\alpha\epsilon}$, (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

17. (*a*) Hallar la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

(*b*) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}\,dx.$

Sol. (*a*) $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha^3}\right)$, (*b*) $\dfrac{3\pi}{16}$

18. Si $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}$ hallar (*a*) la transformada de Fourier en seno, (*b*) la transformada de Fourier en coseno de $f(x)$. Hacer en cada caso el grafo de $f(x)$ y de su transformada.

Sol. (*a*) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)$, (*b*) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

19. (*a*) Hallar la transformada de Fourier en seno de e^{-x}, $x \geqq 0$.

(*b*) Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$, $m > 0$ aplicando el resultado en (*a*).

(*c*) Explicar desde el punto de vista del teorema de la integral de Fourier por qué el resultado en (*b*) no es válido para $m = 0$.

Sol. (*a*) $\sqrt{2/\pi}\,[\alpha/(1+\alpha^2)]$

20. Despejar $Y(x)$ en la ecuación integral

$$\int_0^\infty Y(x)\operatorname{sen} xt\,dx = \begin{cases} 1 & 0 \leqq t < 1 \\ 2 & 1 \leqq t < 2 \\ 0 & t \geqq 2 \end{cases}$$

y comprobar la solución por sustitución directa.

Sol. $Y(x) = (2 + 2\cos x - 4\cos 2x)/\pi x$

IDENTIDAD DE PARSEVAL

21. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$ aplicando la identidad de Parseval.

[Sugerencia: Usar las transformadas de Fourier en seno y coseno de e^{-x}, $x > 0$.] *Sol.* (*a*) $\pi/4$, (*b*) $\pi/4$

22. Utilizar el Problema 18 para mostrar que (*a*) $\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$, (*b*) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

23. Mostrar que $\int_0^\infty \frac{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{x^6}\,dx = \frac{\pi}{15}$.

PROBLEMAS VARIOS

24. (*a*) Resolver $\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 0$, $U(x,0) = e^{-x}$, $x > 0$, $U(x,t)$ es acotada para $x > 0$, $t > 0$.

(*b*) Dar una interpretación física.

Sol. $U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t}\operatorname{sen}\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda$

25. Resolver $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0,t) = 0$, $U(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$, $U(x,t)$ es acotada para $x > 0$, $t > 0$.

Sol. $U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} + \frac{\cos\lambda - 1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x\,d\lambda$

26. (*a*) Mostrar que la solución del Problema 13 se puede escribir

$$U(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(1-x)/2\sqrt{t}}^{(1+x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv$$

(*b*) Demostrar directamente que la función en (*a*) satisface a $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ y a las condiciones del Problema 13.

27. Verificar el teorema de convolución para las funciones $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.

28. Demostrar la ecuación (*4*), página 321, a partir de la ecuación (*3*), página 321.

29. Demostrar (*18*), página 323.

[Sug.: Si $F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{i\alpha u}\,du$ y $G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(v)\,e^{i\alpha v}\,dv$, es

$$F(\alpha)\,G(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(u+v)}\,f(u)\,g(v)\,du\,dv$$

Hágase ahora la transformación $u + v = x$.]

30. (*a*) Si $F(\alpha)$ y $G(\alpha)$ son las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\overline{G(\alpha)}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

donde el trazo indica la compleja conjugada.

(*b*) A partir de (*a*) obtener los resultados (11)-(14), página 322.

31. Demostrar el teorema de Riemann (véase Problema 10).

Capítulo 16

Integrales elípticas

LA INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE PRIMERA ESPECIE se define por

$$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \qquad 0 < k < 1 \tag{1}$$

siendo ϕ la *amplitud* de $F(k, \phi)$ o u, escrito $\phi = \operatorname{am} u$ y k el *módulo*, escrito $k = \operatorname{mod} u$. La integral se llama también *forma de Legendre para la integral elíptica de primera especie.*

Si $\phi = \pi/2$, la integral se dice *integral completa de primera especie* y se la denota por $K(k)$ o simplemente K. Para todos los casos se supondrá que k es una constante dada.

LA INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE SEGUNDA ESPECIE se define por

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \qquad 0 < k < 1 \tag{2}$$

llamada también *forma de Legendre para la integral elíptica de segunda especie.*

Si $\phi = \pi/2$, la integral se dice *integral elíptica completa de segunda especie* y se la denota por $E(k)$ o simplemente E. Esta integral se presenta al calcular la longitud de arco en una elipse, razón por la cual se llama integral elíptica.

LA INTEGRAL ELIPTICA INCOMPLETA DE TERCERA ESPECIE se define por

$$\Pi(k, n, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \theta)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \qquad 0 < k < 1 \tag{3}$$

también llamada *forma de Legendre de la integral elíptica de tercera especie.* Aquí es n una constante que se supone no nula ya que si $n = 0$, (3) se reduce a (1).

Si $\phi = \pi/2$ la integral se llama *integral elíptica completa de tercera especie.*

FORMAS DE JACOBI DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

Si la transformación $v = \operatorname{sen} \theta$ se introduce en las formas de Legendre de las integrales elípticas anteriores se obtienen las siguientes integrales con $x = \operatorname{sen} \phi$.

$$F_1(k, x) = \int_0^{x} \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}} \tag{4}$$

$$E_1(k, x) = \int_0^{x} \sqrt{\frac{1 - k^2 v^2}{1 - v^2}}\, dv \tag{5}$$

$$\Pi_1(k,n,x) \quad = \quad \int_0^x \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \tag{6}$$

llamadas *formas de Jacobi de las integrales elípticas* de primera, segunda y tercera especies, respectivamente. Si $x = 1$ son integrales elípticas completas.

INTEGRALES REDUCIBLES A TIPO ELIPTICO

Si $R(x, y)$ es una función racional algebraica de x y y, o sea, que es el cociente de dos polinomios en x y y,

$$\int R(x,y)\,dx \tag{7}$$

se puede calcular por las funciones elementales usuales (algebraicas, trigonométricas, trigonométricas recíprocas, exponencial y logarítmica) si $y = \sqrt{ax+b}$ o $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, siendo a, b, c constantes dadas.

Si $y = \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$ o $y = \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$ constantes dadas (7) se puede calcular por integrales elípticas de primera, segunda o tercera especie o, en casos especiales, por funciones elementales.

Si $y = \sqrt{P(x)}$, siendo $P(x)$ un polinomio de grado superior al cuarto (7) se puede integrar mediante *funciones hiperelípticas.*

FUNCIONES ELIPTICAS DE JACOBI

El límite superior x en la forma de Jacobi de la integral elíptica de primera especie se relaciona con el límite superior ϕ en la forma de Legendre por $x = \operatorname{sen}\phi$. Como $\phi = \operatorname{am} u$, se sigue que $x = \operatorname{sen}(\operatorname{am} u)$. Lo que lleva a definir las funciones elípticas

$$x \quad = \quad \operatorname{sen}(\operatorname{am} u) \quad \equiv \quad \operatorname{sn} u \tag{8}$$

$$\sqrt{1-x^2} \quad = \quad \cos(\operatorname{am} u) \quad \equiv \quad \operatorname{cn} u \tag{9}$$

$$\sqrt{1-k^2x^2} \quad = \quad \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 u} \quad \equiv \quad \operatorname{dn} u \tag{10}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad = \quad \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \quad \equiv \quad \operatorname{tn} u \tag{11}$$

que tienen muchas propiedades importantes análogas a las de las funciones trigonométricas, tal como se ve en los problemas.

Es también posible definir *funciones elípticas recíprocas*; por ejemplo, si $x = \operatorname{sn} u$, entonces es $u = \operatorname{sn}^{-1} x$. Nótese que u depende de k. Para hacer resaltar esta dependencia se escribe a veces $u = \operatorname{sn}^{-1}(x, k)$ o bien $u = \operatorname{sn}^{-1}(x)$, mod k.

TRANSFORMACION DE LANDEN

Mediante la transformación

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{sen} 2\phi_1}{k+\cos 2\phi_1} \quad \text{o} \quad k\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(2\phi_1 - \phi) \tag{12}$$

llamada *transformación de Landen*, se puede demostrar que

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}} = \frac{2}{1+k}\int_0^{\phi_1}\frac{d\phi_1}{\sqrt{1-k_1^2\operatorname{sen}^2\phi_1}} \tag{13}$$

donde $k_1 = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$ (véase Problema 61). Se puede escribir

$$F(k,\phi) \quad = \quad \frac{2}{1+k}F(k_1,\phi_1) \tag{14}$$

Se ve que $k < k_1 < 1$. Por aplicaciones sucesivas de la transformación de Landen se obtiene una sucesión de módulos k_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tales que $k < k_1 < k_2 < \cdots < 1$ y se puede demostrar que $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$. De lo que se deduce que

$$F(k,\phi) \quad = \quad \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots}{k}} \int_0^{\Phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} \quad = \quad \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots}{k}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right) \qquad (15)$$

siendo

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}, \quad \ldots \quad \text{y} \quad \Phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n \qquad (16)$$

Resultado mediante el cual se puede calcular $F(k, \phi)$. En la práctica es posible lograr bastante exactitud solamente con unas cuantas aplicaciones de la transformación.

Problemas resueltos

INTEGRALES ELIPTICAS

1. Demostrar que si $0 < k < 1$,

$$K(k) \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \quad = \quad \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

Por el teorema del binomio,

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} \quad &= \quad 1 + (-1/2)(-x) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= \quad 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Sea $x = k^2 \operatorname{sen}^2\theta$. Entonces, debido a la convergencia uniforme de la serie, se puede integrar término a término de 0 a $\pi/2$ para obtener

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \quad &= \quad \int_0^{\pi/2}\left\{1 + \frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\operatorname{sen}^4\theta + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\operatorname{sen}^6\theta + \cdots\right\}d\theta \\ &= \quad \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}\end{aligned}$$

utilizando el Problema 15, Capítulo 13.

2. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ con 3 decimales expresando primero la integral como integral elíptica.

Con $x = \pi/2 - y$ y la integral se convierte en $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}}$.

Sea $\cos y = \cos^2 u$. Entonces, $-\operatorname{sen} y\, dy = -2\cos u \operatorname{sen} u\, du$ y

$$dy \quad = \quad \frac{2\cos u \operatorname{sen} u\, du}{\sqrt{1-\cos^4 u}} \quad = \quad \frac{2\cos u\operatorname{sen} u\, du}{\sqrt{1-\cos^2 u}\sqrt{1+\cos^2 u}} \quad = \quad \frac{2\cos u\, du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

De donde
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{\cos y}} \quad &= \quad 2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}} \quad = \quad 2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 u}} \quad = \quad \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 u}} \\ &= \quad \sqrt{2}\,F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\pi/2) \quad \text{o} \quad \sqrt{2}\,K(\sqrt{\tfrac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Con $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ en el resultado del Problema 1 se tiene el valor 2,622 para la integral.

Otro método:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos y}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cos^2 y/2 - \operatorname{sen}^2 y/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2 y/2}}$$

Sea $\sqrt{2}\operatorname{sen} y/2 = \operatorname{sen}\phi$. Luego $\sqrt{2}/2 \cos y/2\, dy = \cos\phi\, d\phi$,

$$dy = \frac{\sqrt{2}\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi}} \quad \text{y la integral se vuelve} \quad \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi}} = \sqrt{2}\,K(\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

3. Calcular $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$ por integrales elípticas.

Sea $\cos x = \cos^2 u$ como en el Problema 2. Entonces,

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos u\left(\frac{2\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\right) du = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\, du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos^2 u) - 1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\, du = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 u}\, du - 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{2-\operatorname{sen}^2 u}\, du - 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 u}}$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 u}\, du - \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 u}}$$

$$= 2\sqrt{2}\,E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) - \sqrt{2}\,K(\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

4. Calcular $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+4\operatorname{sen}^2 x}\, dx$.

La integral es $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+4(1-\cos^2 x)}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{5-4\cos^2 x}\, dx.$

Haciendo $x = \pi/2 - y$, la integral se convierte en la

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{5-4\operatorname{sen}^2 y}\, dy = \sqrt{5}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\tfrac{4}{5}\operatorname{sen}^2 y}\, dy = \sqrt{5}\,E(\sqrt{4/5})$$

5. Expresar $\int_0^{x} \sqrt{1-4\operatorname{sen}^2 u}\, du$ por integrales elípticas incompletas con $0 \leq x \leq \pi/6$.

Sea $\sqrt{4\operatorname{sen}^2 u} = 2\operatorname{sen} u = \operatorname{sen}\phi$.

Entonces, $2\cos u\, du = \cos\phi\, d\phi$, $\displaystyle du = \frac{\cos\phi\, d\phi}{2\cos u} = \frac{\cos\phi\, d\phi}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi}}$ y así,

$$\int_0^{x} \sqrt{1-4\operatorname{sen}^2 u}\, du = \int_0^{\phi} \cos\phi \cdot \frac{\cos\phi}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi}}\, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} \frac{\cos^2\phi\, d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\phi} \frac{-3+4(1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi)}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi}}\, d\phi$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi}} + 2\int_0^{\phi} \sqrt{1-\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi$$

$$= -\tfrac{3}{2}F(\tfrac{1}{2},\phi) + 2\,E(\tfrac{1}{2},\phi)$$

donde $\phi = \operatorname{sen}^{-1}(2\operatorname{sen} x)$.

6. Demostrar que $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}$ es reducible a integrales elípticas.

$2 - \cos x = 2 - (\cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2) = 3 - 2\cos^2 x/2$ y la integral dada se puede escribir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2\cos^2 x/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cos^2 x/2}}$$

Haciendo $x/2 = \pi/2 - u$ en esta última integral se convierte en $\displaystyle -\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 u}}$ que es elíptica.

7. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\{F(\sqrt{2/3}, \pi/2) - F(\sqrt{2/3}, \pi/4)\}$.

Por el Problema 6, $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 u}}$

pues con $x/2 = \pi/2 - u$ se ve que $u = \pi/2$ y $\pi/4$, respectivamente, cuando $x = 0$ y $\pi/2$. Entonces,

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 u}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 u}} - \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 u}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

8. Averiguar la longitud del arco de curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

$$\text{Longitud del arco} = \int_0^{\pi} \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}\, dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}\, dx = 2\sqrt{2}\,E(\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

9. Hallar la longitud del arco de elipse $x = a\operatorname{sen}\phi$, $y = b\cos\phi$, $a > b > 0$.

$$\text{Longitud del arco} = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\phi}\, d\phi$$

donde $e^2 = (a^2-b^2)/a^2 = c^2/a^2$ es el cuadrado de la excentricidad de la elipse.

El resultado se puede escribir $4a\,E(e, \pi/2)$ o $4a\,E(e)$.

10. Expresar $\displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k^2\operatorname{sen}^2\phi}}$ por integrales elípticas.

Sea $k \operatorname{sen}\phi = \operatorname{tg} u$. Así, $k\cos\phi\, d\phi = \sec^2 u\, du$ y

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k^2\operatorname{sen}^2\phi}} = \int_0^{u} \frac{\sec u}{k\cos\phi}\, du = \int_0^{u} \frac{\sec u}{\sqrt{k^2-\operatorname{tg}^2 u}}\, du = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}}$$

$$= \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2-(k^2+1)\operatorname{sen}^2 u}}$$

Procediendo ahora como en el Problema 5, sea $\sqrt{k^2+1}\operatorname{sen} u = k\operatorname{sen} x$. Entonces, $\sqrt{k^2+1}\cos u\, du = k\cos x\, dx$ y

$$\int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{k^2-(k^2+1)\operatorname{sen}^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-[k^2/(k^2+1)]\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}F\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, x\right)$$

Volviendo sobre los pasos se observa que el límite superior x en la última integral se relaciona con el límite superior ϕ en la integral original por $x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{k^2+1}\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{1+k^2\operatorname{sen}^2\phi}}\right)$.

11. Calcular por integrales elípticas:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}$. Haciendo $x = 2$ sen θ, la integral se convierte en

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{9-4\,\text{sen}^2\theta}} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\,\text{sen}^2\theta}} = \frac{1}{3}F(2/3, \pi/2)$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}}$. Haciendo $x = \text{tg}\,\theta$, la integral se convierte en

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}\sqrt{1+2\,\text{tg}^2\theta}} = \int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta}} = \int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}}$$

Con $\theta = \pi/2 - \phi$, esta última integral es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\,\text{sen}^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{F(\sqrt{1/2}, \pi/2) - F(\sqrt{1/2}, \pi/4)\}$$

(c) $\displaystyle\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$. Sea $\sqrt{x-3} = u$ o $x = 3 + u^2$. Así que la integral se convierte en

$$2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{du}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)}}$$

Haciendo $u = \text{tg}\,\theta$, esta integral se vuelve

$$2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}} = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\text{sen}^2\theta}} = \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\,\text{sen}^2\theta}}$$

$$= \sqrt{2}\,\{F(\sqrt{1/2}, \pi/3) - F(\sqrt{1/2}, \pi/4)\}$$

En general, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}$ donde $P_3(x)$ es un polinomio de tercer grado con ceros reales, se puede transformar en integral elíptica por el método expuesto. Procedimientos similares son aplicables si algunos ceros son complejos (véase Problema 12).

12. Calcular $\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$.

Sea $u = \sec\theta$ y la integral se convierte en

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\ \text{tg}\ \theta\, d\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)(\sec^2\theta+3)}} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{4-3\,\text{sen}^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\,\text{sen}^2\theta}} = \frac{1}{2}F(\sqrt{3}/2, \pi/2) = \frac{1}{2}K(\sqrt{3}/2)$$

13. Mostrar cómo se calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$ por integrales elípticas.

Hágase la *transformación lineal fraccionaria* $x = \dfrac{at+b}{ct+d}$ y elíjase a, b, c, d de modo que $x = 1, 2, 3$ corresponda a $t = 0, 1, \infty$, respectivamente.

Esto lleva a $1 = \frac{b}{d}$, $2 = \frac{a+b}{c+d}$, $3 = \frac{a}{c}$, de donde $a = 3d$, $b = d$, $c = d$, con lo que $x = \frac{3t+1}{t+1}$.

Utilizando esta transformación, la integral dada se convierte en la $\int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+3)}}$.

Entonces, si $t = u^2$, se obtiene $2\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$ y el método del Problema 12 se puede aplicar.

En general, $\int \frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}}$, donde $P_4(x)$ es un polinomio de cuarto grado con ceros reales, se puede transformar en integral elíptica por el método que se indica. Hay procedimientos similares si alguno de los ceros o todos son complejos (véase Problema 14; el método allí empleado también es utilizable en este problema).

14. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2+x+7)}}$ por integrales elípticas.

Aquí el polinomio radicando carece de ceros reales, de modo que no se puede aplicar el método del Problema 13. Se procede de la manera siguiente: Sea $x = y + \alpha$, con α constante. La integral se convierte en

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{\{y^2 + (2\alpha-2)y + \alpha^2 - 2\alpha + 10\}\{y^2 + (2\alpha+1)y + \alpha^2 + \alpha + 7\}}}$$

Elíjase α de modo que los términos constantes de cada trinomio sean iguales, es decir, para que $\alpha^2 - 2\alpha + 10 = \alpha^2 + \alpha + 7$ o $\alpha = 1$. Entonces,

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{(y^2+9)(y^2+3y+9)}}$$

Hágase $y = \beta u$, con β constante positiva. Entonces,

$$I = \beta \int \frac{du}{\sqrt{(\beta^2u^2+9)(\beta^2u^2+3\beta u+9)}}$$

Eligiendo β de modo que el coeficiente de u^2 sea igual al término constante en cada trinomio, esto es, $\beta^2 = 9$ o $\beta = 3$, se tiene

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+1)(u^2+u+1)}}$$

Sea $u = \frac{1+t}{1-t}$, $du = \frac{2\,dt}{(1-t)^2}$. Entonces,

$$I = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+3)}}$$

que se reduce a tipo elíptico por la sustitución $t = \operatorname{tg}\theta$ como en el Problema 11(*b*).

15. Expresar $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2-2x+7)}}$ como integral elíptica.

Si se hace $x = y + \alpha$ como en el Problema 14, se llega a la condición $\alpha^2 - 2\alpha + 10 = \alpha^2 - 2\alpha + 7$, que es imposible. Pero en este caso, completando el cuadrado en cada trinomio, se ve que con la transformación $x - 1 = y$ la integral se convierte en

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2+9)(y^2+6)}}$$

que es reducible a forma normal poniendo $y = \sqrt{6}\ \operatorname{tg}\theta$.

16. Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$.

Con $u = \sec\theta$, la integral se transforma en la

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(3+\cos^2\theta)-3}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}} - 3\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2\theta}} - \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta)\sqrt{1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= \tfrac{1}{2}F(\sqrt{3}/2, \pi/2) - \tfrac{3}{8}\Pi(\sqrt{3}/2, -1/4, \pi/2)$$

donde la segunda integral es la integral elíptica completa de tercera especie.

17. Mostrar cómo se calcularía $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$ por integrales elípticas.

Aplicando la misma transformación del Problema 13, la integral es $\displaystyle\int \frac{(t+1)\,dt}{(3t+1)\sqrt{t(t-1)(t+3)}}$.

Con $t = u^2$ se tiene

$$2\int \frac{(u^2+1)\,du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} = 2\int \frac{\frac{1}{3}(3u^2+1)+\frac{2}{3}}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}\, du$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}} + \frac{4}{3}\int \frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$$

Luego procédase como en los Problemas 12 y 16.

Otro método: Con $x - 1 = 1/y$ la integral se vuelve

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(1-2y)(1-3y)}}$$

a la que se puede aplicar el método del Problema 11(c).

FUNCIONES ELIPTICAS

18. Demostrar (a) $\dfrac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$, ($b$) $\dfrac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$.

Por definición, si $\displaystyle u = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}$

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(\operatorname{am} u), \qquad \operatorname{cn} u = \cos\phi = \cos(\operatorname{am} u)$$

Así, pues,

(a) $$\frac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = \frac{d}{du}(\operatorname{sen}\phi) = \cos\phi\frac{d\phi}{du} = \operatorname{cn} u\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

(b) $$\frac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = \frac{d}{du}(\cos\phi) = -\operatorname{sen}\phi\frac{d\phi}{du} = -\operatorname{sn} u\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$$

pues $\dfrac{du}{d\phi} = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}}$ y así $\dfrac{d\phi}{du} = \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{dn} u.$

19. Demostrar $\dfrac{d}{du}(\operatorname{dn} u) = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}(\operatorname{dn} u) &= \frac{d}{du}(\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}) \;=\; \frac{d}{du}(\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}) \\
&= \frac{1}{2}(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)^{-1/2} \frac{d}{du}(-k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\
&= \frac{-k^2}{2 \operatorname{dn} u} \cdot 2(\operatorname{sn} u) \frac{d}{du}(\operatorname{sn} u) \;=\; \frac{-k^2}{2 \operatorname{dn} u} \cdot 2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\
&= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u
\end{aligned}$$

20. Demostrar (*a*) $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$, (*b*) $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$, (*c*) $\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u$, (*d*) $\operatorname{tn}(-u) = -\operatorname{tn} u$.

(*a*) Sea $\quad u = \displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad v = \int_0^{-\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$

Entonces, $\operatorname{sn} u = \operatorname{sen} \phi$, $\operatorname{sn} v = \operatorname{sen}(-\phi) = -\operatorname{sen} \phi = -\operatorname{sn} u$.

Haciendo ahora $\theta = -\psi$ en la segunda integral ésta se convierte en $v = -\displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = -u.$

Así, pues, $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$.

(*b*) Como $\operatorname{cn} u = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}$, $\quad \operatorname{cn}(-u) = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(-u)} = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{cn} u$.

(*c*) Como $\operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}$, $\quad \operatorname{dn}(-u) = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2(-u)} = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u$.

(*d*) $\operatorname{tn}(-u) = \dfrac{\operatorname{sn}(-u)}{\operatorname{cn}(-u)} = -\dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = -\operatorname{tn} u$.

21. Mostrar que si $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$,

(*a*) $\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u$, (*b*) $\operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u$, (*c*) $\operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u$, (*d*) $\operatorname{tn}(u+2K) = \operatorname{tn} u$.

(*a*) Considérese $\displaystyle\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \int_{\pi}^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$

La primera integral del segundo miembro $= 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = 2K.$

Haciendo $\theta = \pi + \psi$, la segunda integral del mismo miembro se vuelve la $\displaystyle\int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = u.$

Luego $\quad \displaystyle\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = u + 2K \quad$ o $\quad \operatorname{am}(u+2K) = \phi + \pi$

y $\quad \operatorname{sn}(u+2K) = \operatorname{sen}(\phi+\pi) = -\operatorname{sen}\phi = -\operatorname{sn} u$

(*b*) $\quad \operatorname{cn}(u+2K) = \cos(\phi+\pi) = -\cos\phi = -\operatorname{cn} u$

(*c*) $\quad \operatorname{dn}(u+2K) = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u+2K)} = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u$

(*d*) $\quad \operatorname{tn}(u+2K) = \dfrac{\operatorname{sn}(u+2K)}{\operatorname{cn}(u+2K)} = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \operatorname{tn} u$

22. Demostrar que $\operatorname{sn} u$ y $\operatorname{cn} u$ tienen periodos $4K$, en tanto que $\operatorname{dn} u$ y $\operatorname{tn} u$ tienen periodos $2K$.

Remplazando u por $u + 2K$ en el Problema 21,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u+4K) &= -\operatorname{sn}(u+2K) = -(-\operatorname{sn} u) = \operatorname{sn} u \\
\operatorname{cn}(u+4K) &= -\operatorname{cn}(u+2K) = -(-\operatorname{cn} u) = \operatorname{cn} u
\end{aligned}$$

con lo que la demostración queda completa.

Por el Problema 21(*c*) se ve que dn u y tn u tienen periodo $2K$.

Se puede demostrar que las funciones elípticas tienen otros periodos, que son complejos. Por ejemplo, sn u tiene los periodos $4K$ y $2iK'$, cn u tiene periodos $4K$ y $2K + 2iK'$, dn u tiene periodos $2K$ y $4iK'$, siendo

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \qquad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

Por esto las funciones elípticas se dicen *funciones doblemente periódicas.*

23. Demostrar que (*a*) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{sn}^{-1}(x,k) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

(*b*) $\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \mathrm{sn}^{-1}(x,k) = F(k, \operatorname{sen}^{-1} x).$

(*a*) Se escribirá $\mathrm{sn}^{-1}\, x$ en vez de $\mathrm{sn}^{-1}\,(x, k)$ sobrentendiéndose la dependencia respecto del módulo k. Por el Problema 18, si $x = \mathrm{sn}\, u$, entonces

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}(\mathrm{sn}\, u) = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

Luego $$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\mathrm{sn}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

(*b*) Integrando el resultado en (*a*) de 0 a x se tiene, puesto que $x = \operatorname{sen} \phi$ con $\phi = \mathrm{am}\, u$,

$$\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \mathrm{sn}^{-1} x = F(k, \phi) = F(k, \operatorname{sen}^{-1} x)$$

Nótese la semejanza con el resultado para funciones trigonométricas (que corresponde a $k = 0$): $\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x.$ Las funciones elípticas son generalizaciones de las trigonométricas.

PROBLEMAS VARIOS

24. Demostrar que $F(\sqrt{1/2}, \pi/2) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$

Por las propiedades de la función gamma,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-1/2}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

Pero, por el Problema 2, esta integral es igual a $\sqrt{2}\,F(\sqrt{1/2}, \pi/2)$, con lo que se tiene el resultado pedido.

25. Determinar el periodo T de un péndulo simple de longitud l.

Un péndulo simple consiste en una masa m suspendida de un hilo rígido OP de masa despreciable y de longitud l (Fig. 16-1). Si el hilo está suspendido de un punto fijo O la ecuación diferencial del movimiento de la masa m es

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta \quad \text{o} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta$$

Haciendo $\dfrac{d\theta}{dt} = p,\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = p\dfrac{dp}{d\theta}$,

la ecuación es $\quad p\dfrac{dp}{d\theta} = -\dfrac{g}{l}\operatorname{sen}\theta.\quad$ Integrando

$\dfrac{p^2}{2} = \dfrac{g}{l}\cos\theta + c.$

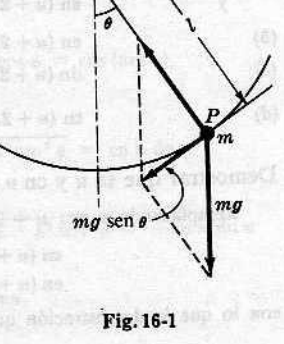


Fig. 16-1

Si el péndulo forma un ángulo $\theta = \theta_0 > 0$ en el instante $t = 0$ y se le suelta, esto es $p = d\theta/dt = 0$ si $\theta = \theta_0$, entonces $c = -(g/l)\cos\theta_0$. Se tiene así

$$d\theta/dt = \pm\sqrt{2g/l}\,\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

Si el péndulo va de $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$ (lo que corresponde a un cuarto de periodo, o $T/4$), $d\theta/dt$ es negativa, por lo que entonces elíjase el signo $-$. Luego

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Así que

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta/2 - (1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta_0/2)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\,\theta_0/2 - \text{sen}^2\,\theta/2}}$$

Haciendo $\text{sen}\,\theta/2 = \text{sen}\,\theta_0/2\ \text{sen}\,u$, esta integral se convierte en

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,u}}, \qquad k = \text{sen}\,\theta_0/2$$

Si $k = 0$, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, que es el periodo aproximado para oscilaciones pequeñas.

26. Demostrar que $\displaystyle \text{sn}\,(u+v) = \frac{\text{sn}\,u\ \text{cn}\,v\ \text{dn}\,v + \text{cn}\,u\ \text{sn}\,v\ \text{dn}\,u}{1 - k^2\,\text{sn}^2 u\ \text{sn}^2 v}$.

Sea $u + v = \alpha$ una constante. Entonces, $dv/du = -1$. Defínase $U = \text{sn}\,u$, $V = \text{sn}\,v$. Se deduce que

$$\frac{dU}{du} = \dot{U} = \text{cn}\,u\ \text{dn}\,u, \qquad \frac{dV}{du} = \dot{V} = \frac{dV}{dv}\frac{dv}{du} = -\text{cn}\,v\ \text{dn}\,v$$

denotando por puntos la derivación con respecto a u. Luego

$$\dot{U}^2 = (1 - U^2)(1 - k^2U^2) \qquad \text{y} \qquad \dot{V}^2 = (1 - V^2)(1 - k^2V^2)$$

Derivando y simplificando, se encuentra que

$$(1)\quad \ddot{U} = 2k^2U^3 - (1 + k^2)U \qquad (2)\quad \ddot{V} = 2k^2V^3 - (1 + k^2)V$$

Multiplicando (*1*) por V, (*2*) por U y restando se tiene

$$\ddot{U}V - U\ddot{V} = 2k^2UV(U^2 - V^2) \tag{3}$$

Se puede comprobar que (véase Problema 58)

$$\dot{U}^2V^2 - U^2\dot{V}^2 = (1 - k^2U^2V^2)(V^2 - U^2) \tag{4}$$

o sea, que

$$\dot{U}V - U\dot{V} = \frac{(1 - k^2U^2V^2)(V^2 - U^2)}{\dot{U}V + U\dot{V}} \tag{5}$$

Dividiendo las ecuaciones (*3*) y (*5*) se tiene

$$\frac{\ddot{U}V - U\ddot{V}}{\dot{U}V - U\dot{V}} = -\frac{2k^2UV(\dot{U}V + U\dot{V})}{1 - k^2U^2V^2} \tag{6}$$

Pero $\ddot{U}V - U\ddot{V} = \dfrac{d}{du}(\dot{U}V - U\dot{V})$ y $-2k^2UV(\dot{U}V + U\dot{V}) = \dfrac{d}{du}(1 - k^2U^2V^2)$, de modo que (*6*) se vuelve

$$\frac{d(\dot{U}V - U\dot{V})}{\dot{U}V - U\dot{V}} = \frac{d(1 - k^2U^2V^2)}{1 - k^2U^2V^2}$$

Una integración da $\dfrac{\dot{U}V - U\dot{V}}{1 - k^2U^2V^2} = c$ una constante. esto es

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = c$$

es una solución de la ecuación diferencial. Es claro, asimismo, que $u + v = \alpha$ es una solución. Las dos soluciones han de estar relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = f(u+v)$$

Haciendo $v = 0$ se ve que $f(u) = \operatorname{sn} u$.

Así $f(u + v) = \operatorname{sn}(u + v)$, con lo que se tiene el resultado pedido.

Problemas propuestos

INTEGRALES ELIPTICAS

27. (*a*) Mediante el teorema del binomio demostrar que si $|x| < 1$,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{4} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^3}{6} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^4}{8} + \cdots$$

(*b*) Si $|k| < 1$, demostrar que

$$E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right\}$$

28. Calcular (*a*) $E(\sqrt{2}/2, \pi/2)$, (*b*) $F(\sqrt{2}/2, \pi/2)$, (*c*) $E(0{,}5)$, (*d*) $K\sqrt{3}/2)$.
Sol. (*a*) 1,3506, (*b*) 1,8541, (*c*) 1,4675, (*d*) 2,1565

29. Mostrar que (*a*) $E(1, \phi) = \operatorname{sen}\phi$, (*b*) $F(1, \phi) = \ln(\sec\phi + \operatorname{tg}\phi) = \ln \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$.

30. Hallar el perímetro de la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. [Sugerencia: Tómense las ecuaciones paramétricas $x = 3 \operatorname{sen}\phi$, $y = 2\cos\phi$.] *Sol.* 15,865

31. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}}$ por integrales elípticas. *Sol.* $\dfrac{1}{\sqrt{2}} K\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

32. Expresar $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1 - 3\operatorname{sen}^2 x}}$ en integrales elípticas.

Sol. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \phi\right)$, donde $\phi = \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}\operatorname{sen} t)$

33. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + 2\operatorname{sen}\theta}} = F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

34. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}}$. *Sol.* $\sqrt{2}\,K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

35. Calcular $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}$. *Sol.* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

36. Mostrar que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

37. Expresar por integrales elípticas:

(*a*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)(25-x^2)}}$ (*c*) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{3-x^2}{1-x^2}}\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)(25-x^2)}}$ (*d*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^4+16)(x^4+25)}}$

Sol. (*a*) $\frac{1}{5}K(\frac{4}{5})$, (*b*) $\frac{1}{5}K(\frac{4}{5})$, (*c*) $\sqrt{3}\,E(\sqrt{\frac{1}{3}})$, (*d*) $\frac{1}{10}K(\frac{3}{5})$

38. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(3-x)(1-x)}}$, (*b*) $\displaystyle\int_6^\infty \frac{dx}{x\sqrt{(x-2)(x-4)(x-6)}}$

Sol. (*a*) $F(\sqrt{2}/2,\ \mathrm{tg}^{-1}\sqrt{2}/2)$, (*b*) $\frac{1}{4}F(\sqrt{2}/2,\pi/2)-\frac{1}{12}\Pi(\sqrt{2}/2,-2/3,\pi/2)$

39. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}} = \frac{1}{2}\left\{F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}}\right)-F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

40. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{4}{3}F\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

[Sug.: $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$.]

41. Calcular (*a*) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)(x^2-4x+8)}}$, (*b*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4x+5)(x^2-4x+10)}}$.

Sol. (*a*) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{5}\right)\right\}$ (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

FUNCIONES ELIPTICAS

42. Mostrar que (*a*) $\mathrm{sn}\,0=0$, (*b*) $\mathrm{cn}\,0=1$, (*c*) $\mathrm{dn}\,0=1$, (*d*) $\mathrm{tn}\,0=0$, (*e*) $\mathrm{am}\,0=0$.

43. Demostrar que (*a*) $\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u = 1$, (*b*) $\mathrm{dn}^2 u + k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 1$.

44. Demostrar que $\mathrm{dn}^2 u - k^2\,\mathrm{cn}^2 u = k'^2$ donde $k' = \sqrt{1-k^2}$.

45. Demostrar que (*a*) $\mathrm{sn}^2 u = \dfrac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{dn}\,2u}$, (*b*) $\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}} = \dfrac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$.

46. Hallar (*a*) $\dfrac{d}{du}(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)$, (*b*) $\dfrac{d}{du}(\mathrm{dn}\,u)^3$.

Sol. (*a*) $(\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u)\,\mathrm{dn}\,u$, (*b*) $-3k^2\,\mathrm{dn}^2 u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u$

47. Hallar (*a*) $\dfrac{d}{du}(\mathrm{tn}\,u)$, (*b*) $\dfrac{d}{du}\,\mathrm{sech}^{-1}(k\,\mathrm{sn}\,u)$. *Sol.* (*a*) $\dfrac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2 u}$, (*b*) $\dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$

48. Comprobar los resultados (*a*) $\displaystyle\int \mathrm{cn}\,u\,du = \frac{1}{k}\cos^{-1}(\mathrm{dn}\,u)+c$, (*b*) $\displaystyle\int \frac{du}{\mathrm{sn}\,u} = \ln\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u+\mathrm{dn}\,u}\right)+c$.

49. Mostrar que $\displaystyle\int_0^u \mathrm{sn}^2 x\,dx = \frac{1}{k^2}\{u - E(k,\mathrm{am}\,u)\}$.

50. Demostrar que (*a*) $\mathrm{sn}\,(u+K) = \dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$, (*b*) $\mathrm{cn}\,(u+K) = -\dfrac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$, (*c*) $\mathrm{dn}\,(u+K) = \dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$ donde $k' = \sqrt{1-k^2}$ es el módulo complementario.

51. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)(1+k'^2v^2)}} = \operatorname{tn}^{-1}(x,k) = F(k, \operatorname{tg}^{-1} x)$ donde $k' = \sqrt{1-k^2}$. Suele escribirse $\operatorname{tn}^{-1}(x,k)$ abreviadamente como $\operatorname{tn}^{-1} x$, sobrentendiéndose el módulo k.

52. Demostrar que $\displaystyle\int_x^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^4+v^2+1}} = \frac{1}{2}\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

PROBLEMAS VARIOS

53. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^{-1} x^2\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$.

54. Se suelta un péndulo de longitud 2 pies en una posición en que forma un ángulo de 60° con la vertical. Determinar su periodo de oscilación suponiendo la aceleración de la gravedad $= g = 32$ pies/seg^2.
Sol. 1,686 segundos

55. Mostrar que en cualquier momento t el ángulo θ del péndulo del Problema 25 está dado por

$$\operatorname{sen}\theta/2 = \operatorname{sen}\theta_0/2\ \operatorname{sn}(\sqrt{g/l}\,t)$$

siendo t el tiempo medido a partir del instante en que el hilo está vertical.

56. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}} = 2\sqrt[4]{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

[Sug.: $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$.]

57. Obtener el desarrollo

$$\operatorname{sn} u = u - (1+k^2)\frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!} - (1+135k^2+135k^4+k^6)\frac{u^7}{7!} + \cdots$$

58. Verificar la ecuación (*4*) del Problema 26.

59. Demostrar que

(*a*) $\displaystyle\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$

(*b*) $\displaystyle\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$

60. Calcular (*a*) $F(\sqrt{2}/2, \pi/3)$, (*b*) $F(0{,}5, \pi/4)$, utilizando la transformación de Landen.
Sol. (*a*) 1,1424, (*b*) 0,8044

61. Verificar el resultado (*13*), página 332, mediante la transformación de Landen.

62. Demostrar que si $k_n = \dfrac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$. Verificar entonces (*15*), página 333.

Capítulo 17

Funciones de variable compleja

FUNCIONES

Si a cada número complejo de un conjunto dominio de una variable z corresponde uno o más valores de una variable w, se dice que w es una *función de la variable compleja* z, $w = f(z)$. En el Capítulo 1 ya se ha tratado de las operaciones fundamentales con números complejos.

Una función es *uniforme* si a cada valor de z corresponde solo uno de w; en otro caso la función es *multiforme*. En general se puede escribir $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, siendo u y v funciones reales de x y y.

Ejemplo 1: $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$, así que $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Estas son las llamadas *parte real* y *parte imaginaria* de $w = z^2$, respectivamente.

Si no se dice otra cosa se supone que $f(z)$ es uniforme. Una función multiforme se puede considerar como un conjunto de funciones uniformes.

LIMITES Y CONTINUIDAD

Las definiciones de límites y continuidad para funciones de una variable compleja son análogas a aquéllas para una variable real. Así $f(z)$ se dice tener el *límite* l al tender z a z_0 si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - l| < \epsilon$ para $0 < |z - z_0| < \delta$.

Análogamente, se dice que $f(z)$ es *continua* en z_0 si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. O sea que $f(z)$ es continua en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

DERIVADAS

Si $f(z)$ es uniforme en cierta región del plano z, la *derivada* de $f(z)$, que se denota $f'(z)$, se define por

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

siempre que el límite exista independientemente de la manera como $\Delta z \to 0$. Si el límite *(1)* existe para $z = z_0$, $f(z)$ se dice *analítica* en z_0. Si el límite existe para todo z de una región $\mathcal{R}$, $f(z)$ se dice *analítica en* $\mathcal{R}$. Para que sea analítica, $f(z)$ ha de ser uniforme y continua. Pero la recíproca no es necesariamente cierta.

Se definen funciones elementales de una variable compleja por generalización natural de las funciones correspondientes de una variable real. Cuando existen desarrollos en serie para funciones reales, $f(x)$, se puede usar como definición la serie de $f(x)$ con x remplazado por z. La convergencia de tales series complejas ya se ha considerado en el Capítulo 11.

Ejemplo 1: Se define $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$, $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \cdots$, $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots$ Entonces se puede demostrar que $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, como también otras numerosas relaciones.

Ejemplo 2: Se define a^b como $e^{b \ln a}$ aun con a y b complejos. Como $e^{2k\pi i} = 1$, se sigue que $e^{i\phi} = e^{i(\phi + 2k\pi)}$ y se define $\ln z = \ln(\rho e^{i\phi}) = \ln \rho + i(\phi + 2k\pi)$. Así, pues, $\ln z$ es una función multiforme. Las distintas funciones uniformes de que se compone esta función multiforme se dicen *ramas* de la misma.

Las reglas para derivar funciones de variable compleja son en un todo análogas a las de las funciones de variables reales. Así $\dfrac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$, $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z$, etc.

ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

Una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que u y v satisfagan las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

(véase Problema 7). Si las derivadas parciales en (2) son continuas en $\mathcal{R}$, las ecuaciones son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en $\mathcal{R}$.

Si las segundas derivadas de u y v con respecto a x y y existen y son continuas, se encuentra derivando (2) que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

De modo que las partes real e imaginaria satisfacen la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace se llaman *armónicas*.

INTEGRALES

Si $f(z)$ está definida, es uniforme y continua en una región $\mathcal{R}$, se define la *integral* de $f(z)$ a lo largo de un camino C en $\mathcal{R}$ desde el punto z_1 al punto z_2, con $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u + iv)(dx + i\,dy) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} u\,dx - v\,dy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} v\,dx + u\,dy$$

definición mediante la cual la integral de una función de variable compleja se puede hacer depender de integrales curvilíneas de funciones reales, ya consideradas en el Capítulo 10. Otra definición basada en el límite de una suma, como para funciones de variable real, también se puede formular y resulta equivalente a la anterior.

Las reglas para integración compleja son similares a las de las integrales reales. Un resultado importante es

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \int_C |f(z)|\,|dz| \leqq M\int_C ds = ML \tag{4}$$

siendo M un mayorante de $|f(z)|$ sobre C, esto es $|f(z)| \leqq M$, y L la longitud del camino C.

TEOREMA DE CAUCHY

Sea C una curva simple cerrada. Si $f(z)$ es analítica en la región encerrada por C y sobre C, se tiene entonces el *teorema de Cauchy*

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{5}$$

donde la segunda integral indica que C es una curva simple cerrada.

Expresado de otra manera, (5) equivale al enunciado de que $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ tiene un valor *independiente del camino* de z_1 a z_2. Tales integrales se pueden calcular por $F(z_2) - F(z_1)$ siendo $F'(z) = f(z)$. Estos resultados son semejantes a los correspondientes para integrales curvilíneas ya tratados en el Capítulo 10.

Ejemplo: Como $f(z) = 2z$ es analítica en todo punto, se tiene para cualquier curva simple cerrada C

$$\oint_C 2z\,dz = 0$$

También, $$\int_{2i}^{1+i} 2z\,dz = z^2\Big|_{2i}^{1+i} = (1+i)^2 - (2i)^2 = 2i + 4$$

FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

Si $f(z)$ es analítica en el interior de la curva simple cerrada C y sobre C misma y si a es un punto interior cualquiera a C, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{6}$$

recorrida C en el sentido positivo (contra las agujas del reloj).

Asimismo, la n-ésima derivada de $f(z)$ en $z = a$ está dada por

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \tag{7}$$

Estas son las llamadas *fórmulas integrales de Cauchy*. Son notables porque muestran que si la función $f(z)$ es conocida *sobre* la curva C, también resulta conocida *dentro* de C y las derivadas en puntos interiores a C se pueden calcular. Así, si una función de variable compleja tiene primera derivada, tiene todas las derivadas de orden superior también, cosa que no es necesariamente cierta para funciones de variable real.

SERIE DE TAYLOR

Sea $f(z)$ analítica en el interior de un círculo y sobre él mismo, siendo el centro $z = a$. Entonces para todo punto z del círculo, la representación de $f(z)$ en *serie de Taylor* es

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots \tag{8}$$

Véase Problema 21.

PUNTOS SINGULARES

Punto singular de una función $f(z)$ es un valor de z en el que $f(z)$ deja de ser analítica. Si $f(z)$ es analítica en todo punto de una región excepto en el punto interior $z = a$, se dice que $z = a$ es una *singularidad aislada* de $f(z)$.

Ejemplo: Si $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2}$, $z = 3$ es una singularidad aislada de $f(z)$.

POLOS

Si $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, $\phi(a) \neq 0$, donde $\phi(z)$ es analítica en todo punto de una región, incluso $z = a$, y si n es un entero positivo, entonces $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = a$, que se llama *polo de orden n*. Si $n = 1$, el polo se dice *polo simple*. Si $n = 2$ es un *polo doble*, etc.

Ejemplo 1: $f(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2(z+1)}$ tiene dos singularidades: un polo de orden 2 o polo doble en $z = 3$, y un polo de orden 1 o polo simple en $z = -1$.

Ejemplo 2: $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2+4} = \dfrac{3z-1}{(z+2i)(z-2i)}$ tiene dos polos simples en $z = \pm 2i$.

Una función puede tener otros tipos de singularidades además de los polos. Por ejemplo, $f(z) = \sqrt{z}$ tiene un *punto múltiple* en $z = 0$ (véase Problema 37). La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene una singularidad en $z = 0$. Pero como $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ es finito, se dice que una singularidad semejante es *evitable*.

SERIE DE LAURENT

Si $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = a$, pero es analítica en todo otro punto del interior de un círculo C de centro a, entonces $(z-a)^n f(z)$ es analítica en todos los otros puntos dentro de C y sobre C y tiene una serie de Taylor en torno a $z = a$ tal que

$$f(z) \quad = \quad \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \tag{9}$$

Esta es la llamada *serie de Laurent* para $f(z)$. La parte $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ se llama *parte analítica*, en tanto que el resto, que consiste en los inversos de las potencias de $z - a$ se llama *parte principal*. Más generalmente, la serie $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$ es una serie de Laurent en que los términos con $k < 0$ constituyen la parte principal. Una función que es analítica en una región limitada por dos círculos concéntricos de centro $z = a$ siempre se puede desarrollar en una serie de Laurent de este tipo (véase Problema 92).

Se pueden definir varios tipos de singularidades de una función $f(z)$ a partir de su serie de Laurent. Por ejemplo, cuando la parte principal de una serie de Laurent tiene un número finito de términos y $a_{-n} \neq 0$, mientras que $a_{-n-1}, a_{-n-2}, \ldots$ son todos nulos, entonces $z = a$ es un polo de orden n. Si la parte principal tiene infinitos términos, $z = a$ se dice una *singularidad esencial* o bien un *polo de orden infinito*.

Ejemplo: La función $e^{1/z} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!\,z^2} + \cdots$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

RESIDUOS

Los coeficientes de (*9*) se obtienen de la manera acostumbrada escribiendo los coeficientes para la serie de Taylor correspondiente a $(z-a)^n f(z)$. En estudios posteriores el coeficiente a_{-1}, llamado *residuo* de $f(z)$ en el polo $z = a$, es de importancia considerable. Se le puede hallar por la fórmula

$$a_{-1} \quad = \quad \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \tag{10}$$

donde n es el orden del polo. Para polos simples el cálculo del residuo es particularmente sencillo, pues se reduce a

$$a_{-1} \quad = \quad \lim_{z\to a} (z-a)\, f(z) \tag{11}$$

TEOREMA DEL RESIDUO

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un polo de orden n en $z = a$ y si C es cualquier curva simple cerrada de $\mathcal{R}$ que contiene a $z = a$, entonces $f(z)$ tiene la forma (*9*). Integrando (*9*), y valiéndose de que

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{si } n = 1 \end{cases} \tag{12}$$

(véase Problema 13), se sigue que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1} \tag{13}$$

esto es, la integral de $f(z)$ en torno a un camino cerrado que encierre el polo simple de $f(z)$ es $2\pi i$ veces el residuo en el polo.

Más generalmente, se tiene el siguiente e importante

Teorema. Si $f(z)$ es analítica dentro y en el contorno C de una región $\mathcal{R}$ excepto en un número finito de polos $a, b, c, \ldots$ dentro de $\mathcal{R}$, con residuos $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$, respectivamente, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots) \tag{14}$$

esto es, la integral de $f(z)$ es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de $f(z)$ en los polos encerrados por C. El teorema de Cauchy y las fórmulas integrales de Cauchy son casos especiales de este resultado que se llamará *teorema del residuo*.

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

El cálculo de varias integrales definidas se puede realizar a menudo utilizando el teorema del residuo junto con una función apropiada $f(z)$ y un camino o *contorno C* apropiado, la elección de éstos puede exigir mucha perspicacia. Los tipos siguientes son los más comunes en la práctica.

1. $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\,dx$, $F(x)$ función par.

   Considérese $\oint_C F(z)\,dz$ a lo largo de un contorno C que consiste en el segmento a lo largo del eje x de $-R$ a $+R$ y en el semicírculo sobre el eje x que tiene este segmento por diámetro. Entonces, con $R \to \infty$ se tiene la integral. Véanse Problemas 29, 30.

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta$, G es una función racional de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

   Haciendo $z = e^{i\theta}$, es $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ y $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$, o sea, $d\theta = dz/iz$.

   La integral dada es equivalente a $\oint_C F(z)\,dz$ siendo C el círculo unidad de centro en el origen. Véanse Problemas 31, 32.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \operatorname{sen} mx \end{Bmatrix} dx$, $F(x)$ función racional.

   Aquí se considera $\oint_C F(z)\,e^{imz}\,dz$ con C el mismo contorno que en el Tipo 1. Véase Problema 34.

4. Integrales variadas en que entran contornos particulares. Véanse Problemas 35, 38.

Problemas resueltos

FUNCIONES, LIMITES, CONTINUIDAD

1. Determinar el conjunto que representan

(a) $|z-2| = 3$, (b) $|z-2| = |z+4|$, (c) $|z-3| + |z+3| = 10$.

(a) **Método 1:** $|z-2| = |x+iy-2| = |x-2+iy| = \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3$ o $(x-2)^2+y^2 = 9$, un círculo con centro en $(2, 0)$ y radio 3.

Método 2: $|z-2|$ es la distancia entre los números complejos $z = x+iy$ y $2+0i$. Si esta distancia es siempre 3, el conjunto es un círculo de radio 3 de centro $2+0i$ o $(2, 0)$.

(b) **Método 1:** $|x+iy-2| = |x+iy+4|$ o $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x+4)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado, se tiene $x = -1$, una recta.

Método 2: El conjunto es tal que las distancias de un punto del mismo a $(2, 0)$ y $(-4, 0)$ son iguales. De modo que el conjunto es la mediatriz del segmento que une $(2, 0)$ a $(-4, 0)$, o $x = -1$.

(c) **Método 1:** El conjunto es dado por $\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 10$ o $\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando, $25+3x = 5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$. Elevando al cuadrado y simplificando otra vez se tiene $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, que es una elipse de semieje mayor 5 y semieje menor 4.

Método 2: El conjunto es tal que la suma de las distancias de un punto del mismo a $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ es 10. El conjunto es, pues, una elipse de focos en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y cuyo eje mayor tiene longitud 10.

2. Determinar la región del plano z representada por

(a) $|z| < 1$.

Interior de un círculo de radio 1. Figura 17-1(a).

(b) $1 < |z+2i| \leqq 2$.

$|z+2i|$ es la distancia de z a $-2i$, de modo que $|z+2i| = 1$ es un círculo de radio 1 de centro en $-2i$, o sea, en $(0, -2)$; y $|z+2i| = 2$ es un círculo de radio 2 con centro en $-2i$. Entonces, $1 < |z+2i| \leqq 2$ representa la región *exterior* a $|z+2i| = 1$, pero *interior* a o *sobre* $|z+2i| = 2$. Véase Figura 17-1(b).

(c) $\pi/3 \leqq \arg z \leqq \pi/2$.

Nótese que $\arg z = \phi$, con $z = \rho e^{i\phi}$. La región es la infinita delimitada por las rectas $\phi = \pi/3$ y $\phi = \pi/2$ incluidas estas rectas, Figura 17-1(c).

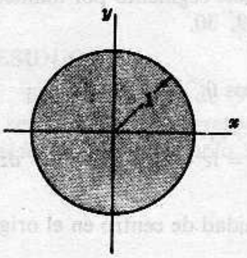


Fig. 17-1 (a)

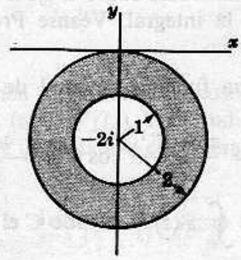


Fig. 17-1 (b)

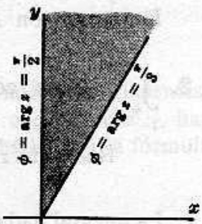


Fig. 17-1 (c)

3. Expresar cada función en la forma $u(x, y) + iv(x, y)$, con u y v reales:

(a) z^3, (b) $1/(1-z)$, (c) e^{3z}, (d) $\ln z$.

(a) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$
$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Luego $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$.

(*b*) $w = \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1-(x+iy)} = \dfrac{1}{1-x-iy}\cdot\dfrac{1-x+iy}{1-x+iy} = \dfrac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$

Entonces, $u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

(*c*) $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \operatorname{sen} 3y)$ y $u = e^{3x}\cos 3y$, $v = e^{3x}\operatorname{sen} 3y$

(*d*) $\ln z = \ln(\rho e^{i\phi}) = \ln\rho + i\phi = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{tg}^{-1} y/x$ y

$$u = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \quad v = \operatorname{tg}^{-1} y/x$$

Obsérvese que ln z es una función multiforme (y aquí *infinitiforme*) ya que ϕ se puede aumentar en cualquier múltiplo de 2π. El *valor principal* del logaritmo se define como el valor para el cual $0 \leqq \phi < 2\pi$ y se llama *rama principal* de ln z.

4. Demostrar (*a*) $\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$
(*b*) $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

Aplicando las relaciones $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$, $e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$ se tiene

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Entonces,
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}\\ &= \frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)\} = (\operatorname{sen} x)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + i(\cos x)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i\cos x \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

Análogamente,
$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\{e^{ix-y}+e^{-ix+y}\} = \tfrac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)\}\\ &(\cos x)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) - i(\operatorname{sen} x)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) = \cos x\cosh y - i\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

DERIVADAS. ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

5. Demostrar que $\dfrac{d}{dz}\bar{z}$, siendo $\bar{z}$ el conjugado de z, no existe en todo punto.

Por definición $\dfrac{d}{dz}f(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ si este límite existe independientemente de la manera como $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tienda a cero. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\bar{z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\Delta y}-\overline{x+iy}}{\Delta x+i\Delta y}\\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{x-iy+\Delta x-i\Delta y-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\end{aligned}$$

Si $\Delta y = 0$, el límite es $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Si $\Delta x = 0$, el límite es $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$.

Estas dos posibles aproximaciones al límite muestran que éste depende de la manera como $\Delta z \to 0$, de modo que la derivada *no existe*, o sea, que $\bar{z}$ *no es analítica* en todo punto.

6. (*a*) Si $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, hallar $\dfrac{dw}{dz}$. (*b*) Determinar dónde no es analítica w.

(*a*) **Método 1:**

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\dfrac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^2}$$ siempre que $z \neq 1$, independientemente de la manera como $\Delta z \to 0$.

Método 2: Son aplicables las reglas usuales de derivación siempre que $z \neq 1$. Así que por la regla de derivación del cociente,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-z)\dfrac{d}{dz}(1+z) - (1+z)\dfrac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)(1) - (1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

(*b*) La función es analítica en todo punto excepto en $z = 1$, en que no existe la derivada; esto es, la función no es analítica en $z = 1$

7. Demostrar que una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región es que las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ se cumplan en esa región.

Como $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, se tiene

$$f(z+\Delta z) = f[x+\Delta x + i(y+\Delta y)] = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

Luego

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i\{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\}}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

Si $\Delta y = 0$, el límite es

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\left\{\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Si $\Delta x = 0$, el límite es

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\,\Delta y} + \left\{\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y}\right\} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Si ha de existir la derivada, estos dos límites deben ser iguales, esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

de modo que ha de tenerse $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Recíprocamente, se puede demostrar que si las primeras derivadas parciales de u y v con respecto a x y y son continuas en una región, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann dan condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica.

8. (*a*) Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, demostrar que las familias de curvas de un parámetro $u(x, y) = C_1$ y $v(x, y) = C_2$ son familias ortogonales. (*b*) Ilustrar mediante $f(z) = z^2$.

(*a*) Considérense dos elementos determinados de estas familias, $u(x, y) = u_0$, $v(x, y) = v_0$ que se cortan en el punto (x_0, y_0).

Como $du = u_x\,dx + u_y\,dy = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y}$.

Asimismo, puesto que $dv = v_x\,dx + v_y\,dy = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v_x}{v_y}$.

Calculadas en (x_0, y_0) éstas representan, respectivamente, las pendientes de las dos curvas en el punto de intersección.

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, se tiene que el producto de las pendientes en el punto (x_0, y_0) es

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -1$$

de modo que dos elementos cualesquiera de las respectivas familias son ortogonales y así las dos familias son ortogonales.

(*b*) Si $f(z) = z^2$, es $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Los grafos de varios elementos de $x^2 - y^2 = C_1$, $2xy = C_2$ se ven en la Figura 17-2.

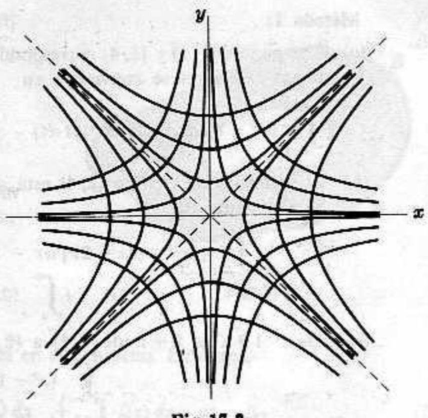


Fig. 17-2

9. En aerodinámica y mecánica de fluidos, las funciones ϕ y ψ en $f(z) = \phi + i\psi$, con $f(z)$ analítica, se llaman *potencial de velocidad* y *función de corriente*, respectivamente. Si $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$, (*a*) hallar ψ y (*b*) hallar $f(z)$.

(*a*) Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$. Luego

$$(1)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x + 4 \qquad (2)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2y - 2$$

Método 1: Integrando (*1*), $\psi = 2xy + 4y + F(x)$.
Integrando (*2*), $\psi = 2xy - 2x + G(y)$.

Estas son idénticas si $F(x) = -2x + c$, $G(y) = 4y + c$ con c constante real cualquiera. Así, pues, $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

Método 2:

Integrando (*1*), $\psi = 2xy + 4y + F(x)$. Luego al sustituir en (*2*), $2y + F'(x) = 2y - 2$ o $F'(x) = -2$ y $F(x) = -2x + c$. De donde $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

(*b*) Por (*a*),
$$\begin{aligned} f(z) &= \phi + i\psi = x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c) \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x + iy) - 2i(x + iy) + ic = z^2 + 4z - 2iz + c_1 \end{aligned}$$

donde c_1 es una constante imaginaria pura.

Esto también se puede hacer observando que $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ de modo que $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$. El resultado se obtiene entonces por sustitución; los términos en $\bar{z}$ se eliminan.

INTEGRALES, TEOREMA DE CAUCHY, FORMULAS INTEGRALES

10. Calcular $\displaystyle\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz$

(*a*) a lo largo de la parábola $x = t$, $y = t^2$, $1 \leq t \leq 2$,
(*b*) a lo largo del segmento de $1 + i$ a $2 + 4i$,
(*c*) a lo largo de los segmentos $1 + i$ a $2 + i$ y luego a $2 + 4i$.

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz &= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x + iy)^2 (dx + i\,dy) = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2 - y^2 + 2ixy)(dx + i\,dy) \\ &= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy \end{aligned}$$

Método 1:

(*a*) Los puntos (1, 1) y (2, 4) corresponden a $t = 1$ y $t = 2$, respectivamente. Con lo que las integrales curvilíneas anteriores se convierten en

$$\int_{t=1}^{2} \{(t^2 - t^4)\,dt - 2(t)(t^2)2t\,dt\} + i\int_{t=1}^{2} \{2(t)(t^2)\,dt + (t^2 - t^4)(2t)\,dt\} = -\frac{86}{3} - 6i$$

(*b*) El segmento de (1, 1) a (2, 4) está sobre la recta de ecuación $y - 1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1)$ o $y = 3x - 2$. Se encuentra así

$$\int_{x=1}^{2} \{[x^2 - (3x-2)^2]\,dx - 2x(3x-2)3\,dx\} + i\int_{x=1}^{2} \{2x(3x-2)\,dx + [x^2 - (3x-2)^2]3\,dx\} = \frac{86}{3} - 6i$$

(*c*) De $1+i$ a $2+i$ [de (1, 1) a (2, 1)], $y = 1$, $dy = 0$ y se tiene

$$\int_{x=1}^{2} (x^2 - 1)\,dx + i\int_{x=1}^{2} 2x\,dx = \frac{4}{3} + 3i$$

De $2+i$ a $2+4i$ [de (2, 1) a (2, 4)], $x = 2$, $dx = 0$ y se tiene

$$\int_{y=1}^{4} -4y\,dy + i\int_{y=1}^{4} (4 - y^2)\,dy = -30 - 9i$$

Sumando. $(\frac{4}{3} + 3i) + (-30 - 9i) = -\frac{86}{3} - 6i.$

Método 2:

Por los métodos del Capítulo 10 se ve que las integrales curvilíneas son independientes del camino, así que eso explica que se obtengan los mismos valores en (*a*), (*b*) y (*c*) en lo que precede. En tal caso la integral se puede calcular directamente, como para las variables reales, como sigue:

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3} - 6i$$

11. (*a*) Demostrar el teorema de Cauchy: Si $f(z)$ es analítica sobre una curva simple cerrada C y en su interior, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

(*b*) En estas condiciones, demostrar que $\int_{P_1}^{P_2} f(z)\,dz$ es independiente del camino de P_1 a P_2.

(*a*)
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u + iv)(dx + i\,dy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$

Por el teorema de Green (Capítulo 10),

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad \oint_C v\,dx + u\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

siendo $\mathcal{R}$ la región (simplemente conexa) delimitada por C.

Puesto que $f(z)$ es analítica, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (Problema 7), y, por tanto, las integrales anteriores son nulas. Entonces, $\oint_C f(z)\,dz = 0$, suponiendo que $f'(z)$ [y por consiguiente, las derivadas parciales] son continuas.

(*b*) Considérense dos caminos cualesquiera entre los puntos P_1 y P_2 (véase Fig. 17-3). Por el teorema de Cauchy,

$$\int_{P_1AP_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

Luego
$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz + \int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

o sea
$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz = -\int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = \int_{P_1BP_2} f(z)\,dz$$

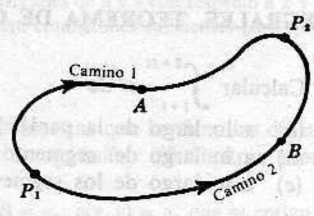


Fig. 17-3

esto es, la integral a lo largo de P_1AP_2 (camino 1) = integral a lo largo de P_1BP_2 (camino 2) y, por tanto, la integral es independiente del camino que une P_1 y P_2.

Esto explica los resultados del Problema 10, puesto que $f(z) = z^2$ es analítica.

12. Si $f(z)$ es analítica sobre el contorno y en el interior de una región delimitada por dos curvas cerradas C_1 y C_2 (Fig. 17-4) demostrar que

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

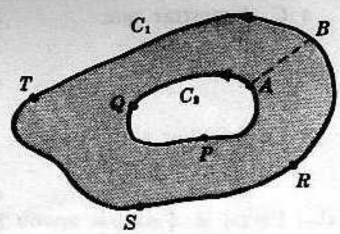


Fig. 17-4

Como en la Fig. 17-4, constrúyase el corte AB que une un punto de C_1 con uno de C_2. Por el teorema de Cauchy (Problema 11),

$$\int_{AQPABRSTBA} f(z)\,dz = 0$$

puesto que $f(z)$ es analítica en la región sombreada y también en el contorno. Entonces,

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BRSTB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

Pero $\displaystyle\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz.$ Luego (*1*) da

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz = -\int_{BRSTB} f(z)\,dz = \int_{BTSRB} f(z)\,dz$$

esto es
$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Obsérvese que $f(z)$ no tiene que ser analítica *dentro* de la curva C_2.

13. (*a*) Demostrar que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ siendo C una curva simple cerrada que encierra una región en cuyo interior queda $z = a$.
(*b*) ¿Cuál es el valor de la integral si $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$?

(*a*) Sea C_1 un círculo de radio ϵ de centro $z = a$ (Fig. 17-5). Como $(z-a)^{-n}$ es analítica en el contorno y dentro de la región encerrada por C y C_1, se tiene, por el Problema 12,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

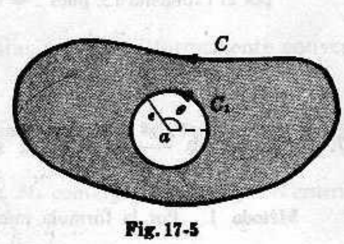


Fig. 17-5

Para calcular esta última integral nótese que sobre C_1, $|z-a| = \epsilon$ o $z - a = \epsilon e^{i\theta}$ y $dz = i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$. La integral es, pues,

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{si } n \neq 1$$

Si $n = 1$ se tiene $i\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$

(*b*) Para $n = 0, -1, -2, \ldots$ el integrando es $1, (z-a), (z-a)^2, \ldots$ y es analítico en todo punto interior a C_1 incluso en $z = a$. Por tanto, según el teorema de Cauchy, la integral es nula.

14. Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-3}$ donde C es (*a*) el círculo $|z| = 1$, (*b*) el círculo $|z + i| = 4$.

(*a*) Como $z = 3$ no es interior a $|z| = 1$, la integral es igual a cero Problema 11).

(*b*) Como $z = 3$ es interior a $|z + i| = 4$, la integral es igual a $2\pi i$ (Problema 13).

15. Si $f(z)$ es analítica sobre una curva simple cerrada C y en su interior, y si a es un punto interior a C, demostrar que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Refiriéndose al Problema 12 y a la figura del Problema 13 se tiene

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Haciendo $z - a = \epsilon e^{i\theta}$ la última integral se vuelve $i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta$. Pero como $f(z)$ es analítica, es continua. Luego

$$\lim_{\epsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = 2\pi i\,f(a)$$

con lo que se tiene el resultado pedido.

16. Calcular (a) $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$, (b) $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ siendo C el círculo $|z-1| = 3$.

(a) Como $z = \pi$ queda dentro de C, $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = \cos\pi = -1$ por el Problema 15 con $f(z) = \cos z$, $a = \pi$. Luego $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = -2\pi i$.

(b)
$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \oint_C e^z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}\,dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}\,dz$$
$$= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i(1-e^{-1})$$

por el Problema 15, pues $z = 0$ y $z = -1$ son interiores a C.

17. Calcular $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ siendo C una curva simple cerrada que rodea a $z = 1$.

Método 1 Por la fórmula integral de Cauchy, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.

Si $n = 2$ y $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, es $f''(1) = 10$. De donde

$$10 = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz \quad \text{o} \quad \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = 10\pi i$$

Método 2: $5z^2 - 3z + 2 = 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$. Luego

$$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = \oint_C \frac{5(z-1)^2+7(z-1)+4}{(z-1)^3}\,dz$$
$$= 5\oint_C \frac{dz}{z-1} + 7\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\oint_C \frac{dz}{(z-1)^3} = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0)$$
$$= 10\pi i$$

por el Problema 13.

SERIES Y SINGULARIDADES

18. ¿Para qué valores de z converge cada serie?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$. El término n-ésimo es $= u_n = \frac{z^n}{n^2 2^n}$. Luego

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}\cdot\frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{2}$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si $|z| < 2$ y diverge si $|z| > 2$. Si $|z| = 2$ falla el criterio.

Pero entonces la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2 2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2 2^n}$ converge si $|z| = 2$, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Así, pues, la serie converge (absolutamente) para $|z| \leqq 2$, esto es, en todo punto del círculo $|z| = 2$ o interior al mismo.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$. Se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-z^2}{2n(2n+1)}\right| = 0$$

Con lo que la serie, que representa a sen z, converge para todo valor de z.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(z-i)^n}\right| = \frac{|z-i|}{3}$.

La serie converge si $|z-i| < 3$ y diverge si $|z-i| > 3$.

Si $|z-i| = 3$, entonces $z - i = 3e^{i\theta}$ y la serie se convierte en $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$, que diverge puesto que el término n-ésimo no tiende a cero con $n\to\infty$.

La serie, pues, converge dentro del círculo $|z-i| = 3$, pero no en el contorno.

19. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente para $|z| \leqq R$, mostrar que es uniformemente convergente para estos valores de z.

Las definiciones, teoremas y demostraciones para series de términos complejos son análogas a aquéllas para series reales.

En este caso se tiene $|a_n z^n| \leqq |a_n|R^n = M_n$. Como por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, se sigue según el criterio M de Weierstrass que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente para $|z| \leqq R$.

20. Situar en el plano finito z todas las singularidades, si las hubiere, de cada función y nombrarlas.

(a) $\frac{z^2}{(z+1)^3}$. $z = -1$ es un polo de orden 3.

(b) $\frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$. $z = 4$ es un polo de orden 2 (polo doble); $z = i$ y $z = 1 - 2i$ son polos de orden 1 (polos simples).

(c) $\frac{\text{sen } mz}{z^2 + 2z + 2}$, $m \neq 0$. Como $z^2 + 2z + 2 = 0$ cuando $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$, se puede escribir $z^2 + 2z + 2 = \{z - (-1+i)\}\{z - (-1-i)\} = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$.

La función tiene dos polos simples: $z = -1 + i$ y $z = -1 - i$.

(*d*) $\dfrac{1-\cos z}{z}$. $z=0$ parece ser una singularidad. Pero como $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z}=0$, se trata de una singularidad evitable.

Otro método:

Como $\dfrac{1-\cos z}{z}=\dfrac{1}{z}\left\{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right\}=\dfrac{z}{2!}-\dfrac{z^3}{4!}+\cdots,$ se ve que $z=0$ es singularidad evitable.

(*e*) $e^{-1/(z-1)^2}=1-\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{2!\,(z-1)^4}-\cdots$

Esta es una serie de Laurent en que la parte principal tiene un número infinito de términos no nulos. Entonces, $z=1$ es una *singularidad esencial.*

(*f*) e^z.

Esta función carece de singularidades finitas. Sin embargo, haciendo $z=1/u$ se obtiene $e^{1/u}$, que tiene una singularidad esencial en $u=0$. Se deduce, pues, que $z=\infty$ es una singularidad esencial de e^z.

En general, para averiguar la naturaleza de una posible singularidad de $f(z)$ en $z=\infty$, se hace $z=1/u$ y luego se examina el comportamiento de la nueva función para $u=0$.

21. Si $f(z)$ es analítica en todo punto interior de un círculo de radio R y centro a, y si $a+h$ es un punto cualquiera interior a C, demostrar el *teorema de Taylor*:

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

Por la fórmula integral de Cauchy (Problema 15) se tiene

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a-h} \tag{1}$$

Por división,

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{(z-a)[1-h/(z-a)]}$$

$$= \frac{1}{(z-a)}\left\{1+\frac{h}{(z-a)}+\frac{h^2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{h^n}{(z-a)^n}+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)}\right\} \tag{2}$$

Sustituyendo (*2*) en (*1*) y utilizando las fórmulas integrales de Cauchy se tiene

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + R_n$$

$$= f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n$$

donde
$$R_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

Ahora bien, si z está sobre C, $\left|\dfrac{f(z)}{z-a-h}\right| \leqq M$ y $|z-a|=R$, de modo que por (*4*), página 346, se tiene, puesto que $2\pi R$ es la longitud de C,

$$|R_n| \leqq \frac{|h|^{n+1}M}{2\pi R^{n+1}}\cdot 2\pi R$$

Con $n\to\infty$, $|R_n|\to 0$. Entonces, $R_n\to 0$ y se tiene el resultado pedido.

Si $f(z)$ es analítica en una región anular $r_1 \leqq |z-a| \leqq r_2$, se puede generalizar la serie de Taylor a una serie de Laurent (Problema 92). En ciertos casos, como se ve por el Problema 22, la serie de Laurent se puede obtener utilizando series de Taylor conocidas.

22. Hallar series de Laurent en torno a la singularidad que se indica para cada una de las funciones siguientes. Nómbrese la singularidad en cada caso y dése la región de convergencia para cada serie.

(*a*) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; $z = 1$. Sea $z - 1 = u$. Luego $z = 1 + u$ y

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{1+u}}{u^2} = e \cdot \frac{e^u}{u^2} = \frac{e}{u^2}\left\{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \frac{e(z-1)^2}{4!} + \cdots$$

$z = 1$ es *un polo de orden 2*, o *polo doble*.
La serie converge para todo valor de $z \neq 1$.

(*b*) $z \cos \dfrac{1}{z}$; $z = 0$.

$$z \cos \frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \cdots\right) = z - \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!\,z^3} - \frac{1}{6!\,z^5} + \cdots$$

$z = 0$ es una *singularidad esencial*.
La serie converge para todo valor de $z \neq 0$.

(*c*) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z - \pi}$; $z = \pi$. Con $z - \pi = u$. es $z = \pi + u$ y

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi} = \frac{\operatorname{sen}(u+\pi)}{u} = -\frac{\operatorname{sen} u}{u} = -\frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= -1 + \frac{u^2}{3!} - \frac{u^4}{5!} + \cdots = -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots$$

$z = \pi$ es una *singularidad evitable*.
La serie converge para todo valor de z.

(*d*) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -1$. Sea $z + 1 = u$. Entonces,

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u}(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)$$

$$= -\frac{1}{u} + 2 - 2u + 2u^2 - 2u^3 + \cdots$$

$$= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - \cdots$$

$z = -1$ es un *polo de orden 1*, o *polo simple*.
La serie converge para valores de z tales que $0 < |z + 1| < 1$.

(*e*) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$; $z = 0, -2$.

Caso 1, $z = 0$. Por el teorema del binomio,

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z(1+z/2)^3} = \frac{1}{8z}\left\{1 + (-3)\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{8z} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}z - \frac{5}{32}z^2 + \cdots$$

$z = 0$ es un *polo de orden 1*, o *polo simple*.
La serie converge para $0 < |z| < 2$.

Caso 2, $z = -2$. Sea $z + 2 = u$. Entonces,

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{-2u^3(1-u/2)} = -\frac{1}{2u^3}\left\{1 + \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2u^3} - \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{8u} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}u - \cdots$$

$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) - \cdots$$

$z = -2$ es un *polo de orden 3*.

La serie converge para $0 < |z+2| < 2$.

RESIDUOS Y EL TEOREMA DEL RESIDUO

23. Si $f(z)$ es analítica en todo punto interior a una curva simple cerrada C excepto en $z = a$ y sobre la curva misma, si $z = a$ es un polo de orden n tal que

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

con $a_{-n} \neq 0$, demostrar que

(*a*) $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$

(*b*) $a_{-1} = \lim_{z\to a} \dfrac{1}{(n-1)!} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$.

(*a*) Por integración, se tiene, empleando el Problema 13,

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}\,dz + \cdots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz + \oint_C \{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\}\,dz$$
$$= 2\pi i\, a_{-1}$$

Como solamente el término en que entra a_{-1} no se elimina, se dice que a_{-1} es el *residuo* de $f(z)$ en el polo $z = a$.

(*b*) Multiplicando por $(z-a)^n$ se tiene la serie de Taylor

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots$$

Tomando $(n-1)$-ésima derivada de ambos miembros y haciendo $z \to a$, se tiene

$$(n-1)!\, a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$$

con lo que resulta lo afirmado.

24. Determinar los residuos de cada función en los polos que se indican.

(*a*) $\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$; $z = 2, i, -i$. Estos polos son simples. Entonces,

Residuo en $z = 2$ es $\lim_{z\to 2} (z-2)\left\{\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\} = \dfrac{4}{5}$.

Residuo en $z = i$ es $\lim_{z\to i} (z-i)\left\{\dfrac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \dfrac{i^2}{(i-2)(2i)} = \dfrac{1-2i}{10}$.

Residuo en $z = -i$ es $\lim_{z\to -i} (z+i)\left\{\dfrac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \dfrac{i^2}{(-i-2)(-2i)} = \dfrac{1+2i}{10}$.

(*b*) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$; $z = 0, -2$. $z = 0$ es un polo simple, $z = -2$ es un polo de orden 3. Entonces:

$$\text{Residuo en } z = 0 \text{ es} \qquad \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1}{z(z+2)^3} \;=\; \frac{1}{8}.$$

$$\text{Residuo en } z = -2 \text{ es} \qquad \lim_{z \to -2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3 \cdot \frac{1}{z(z+2)^3}\right\}$$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; \lim_{z \to -2} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^3}\right) \;=\; -\frac{1}{8}.$$

Obsérvese que estos residuos también se pueden obtener a partir de los coeficientes de $1/z$ y $1/(z+2)$ en las series de Laurent respectivas [véase Problema 22(*e*)].

(*c*) $\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$; $z = 3$, un polo de orden 2 o polo doble. Entonces:

$$\text{El residuo es} \qquad \lim_{z \to 3} \frac{d}{dz}\left\{(z-3)^2 \cdot \frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\} \;=\; \lim_{z \to 3} \frac{d}{dz}(ze^{zt}) \;=\; \lim_{z \to 3} (e^{zt} + zte^{zt})$$

$$= e^{3t} + 3te^{3t}$$

(*d*) $\cot z$; $z = 5\pi$, un polo de orden 1. Entonces:

$$\text{El residuo es} \qquad \lim_{z \to 5\pi} (z - 5\pi) \cdot \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \;=\; \left(\lim_{z \to 5\pi} \frac{z - 5\pi}{\operatorname{sen} z}\right)\left(\lim_{z \to 5\pi} \cos z\right) \;=\; \left(\lim_{z \to 5\pi} \frac{1}{\cos z}\right)(-1)$$

$$= (-1)(-1) \;=\; 1$$

habiéndose utilizado la regla de L'Hôpital, que, como se demuestra, es aplicable a funciones de variable compleja.

25. Si $f(z)$ es analítica sobre una curva simple cerrada C y en su interior excepto en un número de polos $a, b, c, \ldots$ interiores a C, demostrar que

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \,\{\text{suma de residuos de } f(z) \text{ en los polos } a, b, c, \text{ etc.}\}$$

Referirse a la Figura 17-6.

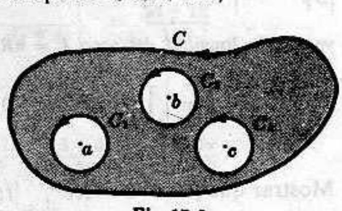


Fig. 17-6

Por un razonamiento parecido al del Problema 12 (esto es, haciendo cortes de C a C_1, C_2, C_3, etc.), se tiene

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots$$

Para el polo a,

$$f(z) \;=\; \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

de modo que, como en el Problema 23, $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, a_{-1}$.

Análogamente, para el polo b, $f(z) \;=\; \dfrac{b_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \dfrac{b_{-1}}{(z-b)} + b_0 + b_1(z-b) + \cdots$

de modo que

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, b_{-1}$$

Siguiendo en la misma forma se ve que

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \cdots) \;=\; 2\pi i\,(\text{suma de los residuos})$$

26. Calcular $\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z-1)(z+3)^2}$ siendo C dada por (*a*) $|z| = 3/2$, (*b*) $|z| = 10$.

Residuo en el polo simple $z = 1$ es $\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \frac{e}{16}$

Residuo en el polo doble $z = -3$ es

$$\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \lim_{z\to -3}\frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} = \frac{-5e^{-3}}{16}$$

(*a*) Como $|z| = 3/2$ encierra solo el polo $z = 1$,

$$\text{la integral que se requiere es} = 2\pi i\left(\frac{e}{16}\right) = \frac{\pi i e}{8}$$

(*b*) Como $|z| = 10$ encierra ambos polos $z = 1$ y $z = -3$,

$$\text{la integral que se requiere es} = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) = \frac{\pi i(e - 5e^{-3})}{8}$$

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

27. Si $|f(z)| \leqq \frac{M}{R^k}$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 1$ y M son constantes, demostrar que $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ siendo Γ el arco semicircular de radio R que se ve en la Figura 17-7.

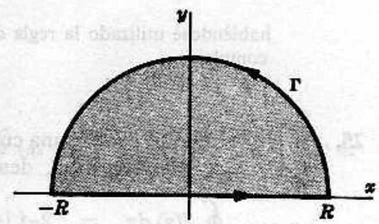


Fig. 17-7

Por el resultado (*4*), página 346,

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqq \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \leqq \frac{M}{R^k}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

ya que la longitud del arco $L = \pi R$. Luego

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = 0 \qquad \text{y así} \qquad \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

28. Mostrar que para $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| \leqq \frac{M}{R^k}$, $k > 1$ si $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$.

Si $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| = \left|\frac{1}{1 + R^4e^{4i\theta}}\right| \leqq \frac{1}{|R^4e^{4i\theta}| - 1} = \frac{1}{R^4 - 1} \leqq \frac{2}{R^4}$ si R es suficientemente grande (o sea, $R > 2$, por ejemplo) de modo que $M = 2$, $k = 4$.

Obsérvese que se ha utilizado la desigualdad $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ con $z_1 = R^4e^{4i\theta}$ y $z_2 = 1$.

29. Calcular $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

Considérese $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$, siendo C el contorno cerrado del Problema 27, que consiste en el segmento de $-R$ a R y del semicírculo Γ, recorrido en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj).

Como $z^4 + 1 = 0$ cuando $z = e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$, éstos son polos simples de $1/(z^4 + 1)$. Solamente los polos $e^{\pi i/4}$ y $e^{3\pi i/4}$ quedan dentro de C. Entonces, utilizando la regla de L'Hôpital,

$$\text{Residuo en } e^{\pi i/4} = \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \left\{(z - e^{\pi i/4})\frac{1}{z^4+1}\right\}$$

$$= \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}$$

$$\text{Residuo en } e^{3\pi i/4} = \lim_{z \to e^{3\pi i/4}} \left\{(z - e^{3\pi i/4})\frac{1}{z^4+1}\right\}$$

$$= \lim_{z \to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4}$$

Así, pues,

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\{\tfrac{1}{4}e^{-3\pi i/4} + \tfrac{1}{4}e^{-9\pi i/4}\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

es decir,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

Tomando límites de ambos miembros de (2) para $R \to \infty$ y aplicando los resultados del Problema 28, se tiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, la integral buscada vale $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

30. Mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$.

Los polos de $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ encerrados dentro del contorno C del Problema 27 son $z = i$ de orden 2 y $z = -1+i$ de orden 1.

El residuo en $z = i$ es $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2 \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{9i-12}{100}$.

El residuo en $z = -1+i$ es $\displaystyle\lim_{z\to -1+i} (z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25}$

Entonces, $$\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right\} = \frac{7\pi}{50}$$

o

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} + \int_\Gamma \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

Tomando el límite para $R \to \infty$ y observando que la segunda integral tiende a cero, según el Problema 27, se obtiene el resultado pedido.

31. Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\,\text{sen}\,\theta}$.

Sea $z = e^{i\theta}$. Luego $\text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$ de modo que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\,\text{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5+3\left(\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_C \frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3}$$

donde C es el círculo unidad de centro en el origen, como se ve en la Figura 17-6.

Los polos de $\dfrac{2}{3z^2+10iz-3}$ son los polos simples

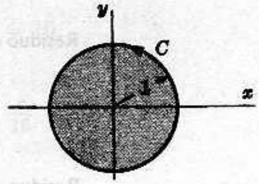


Fig. 17-8

$$z = \frac{-10i \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6} = -3i, -i/3.$$

Solo el $-i/3$ queda dentro de

$$\text{Residuo en } -i/3 = \lim_{z\to -i/3}\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(\frac{2}{3z^2+10iz-3}\right) = \lim_{z\to -i/3}\frac{2}{6z+10i} = \frac{1}{4i} \text{ por la regla de L'Hôpital}$$

$$\text{Entonces, } \oint_C \frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3} = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ el valor buscado}$$

32. Mostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{12}$.

Si $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\cos 3\theta = \dfrac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2} = \dfrac{z^3+z^{-3}}{2}$, $dz = iz\,d\theta$.

$$\text{Entonces, } \int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-4\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz$$

siendo C el contorno del Problema 31.

El integrando tiene un polo de orden 3 en $z=0$ y un polo simple $z=\frac{1}{2}$ dentro de C.

$$\text{El residuo en } z=0 \text{ es } \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3\cdot\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = \frac{21}{8}.$$

$$\text{El residuo en } z=\tfrac{1}{2} \text{ es } \lim_{z\to 1/2}\left\{(z-\tfrac{1}{2})\cdot\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = -\frac{65}{24}.$$

$$\text{Entonces, } -\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right\} = \frac{\pi}{12} \text{ como se buscaba.}$$

33. Si $|f(z)| \leqq \dfrac{M}{R^k}$ para $z = Re^{i\theta}$, siendo $k>0$ y M constante, demostrar que

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}f(z)\,dz = 0$$

siendo Γ el arco semicircular del contorno del Problema 27 y m una constante positiva.

$$\text{Si } z = Re^{i\theta}, \quad \int_\Gamma e^{imz}f(z)\,dz = \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

$$\begin{aligned}\text{Entonces, } \left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\leqq \int_0^\pi\left|e^{imRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\right|d\theta \\ &= \int_0^\pi\left|e^{imR\cos\theta - mR\,\text{sen}\,\theta}f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\right|d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\,|f(Re^{i\theta})|\,R\,d\theta \\ &\leqq \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^\pi e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

Ahora bien, sen $\theta \geqq 2\theta/\pi$ para $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ (Problema 77, Capítulo 4). Luego la última integral es menor o igual que

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}\, d\theta \quad = \quad \frac{\pi M}{mR^k}(1 - e^{-mR})$$

Al tender $R \to \infty$, ésta tiende a cero, pues m y k son positivos y se tiene el resultado que se pedía demostrar.

34. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0.$

Considérese $\displaystyle\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz$ con C el contorno del Problema 27.

El integrando tiene polos simples en $z = \pm i$, pero solo $z = i$ queda dentro de C.

Residuo en $z = i$ es $\displaystyle\lim_{z \to i} \left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}.$

Entonces,
$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz \quad = \quad 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) \quad = \quad \pi e^{-m}$$

o
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\, dx \; + \; \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz \; = \; \pi e^{-m}$$

es decir,
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx \; + \; i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} mx}{x^2+1}\, dx \; + \; \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz \quad = \quad \pi e^{-m}$$

y así
$$2\int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx \; + \; \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz \quad = \quad \pi e^{-m}$$

Tomando el límite para $R \to \infty$ y aplicando el Problema 33 para mostrar que la integral en torno a Γ tiende a cero, se obtiene el resultado.

35. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$

El método del Problema 34 lleva a considerar la integral de e^{iz}/z a lo largo del contorno del Problema 27. Pero como $z = 0$ queda sobre el camino de integración y como no se puede integrar en una singularidad, se modifica el contorno mellando el camino en $z = 0$, como se ve en la Fig. 17-9, quedando entonces el contorno C' o $ABDEFGHJA$.

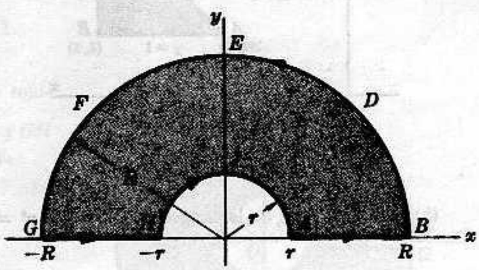


Fig. 17-9

Como $z = 0$ es exterior a C' se tiene

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \; = \; 0$$

o bien
$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \; + \; \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \; + \; \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx \; + \; \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \quad = \quad 0$$

Remplazando x por $-x$ en la primera integral y combinando con la tercera integral, se halla que

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx \; + \; \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \; + \; \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \quad = \quad 0$$

o bien
$$2i\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad = \quad -\int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \; - \; \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

Sea $r \to 0$ y $R \to \infty$. Por el Problema 33, la segunda integral de la derecha tiende a cero. La primera integral del segundo miembro tiende a

$$-\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta \quad = \quad -\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} ie^{ire^{i\theta}}\, d\theta \quad = \quad \pi i$$

pues se puede tomar el límite bajo el signo integral.

Se tiene entonces

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} 2i\int_{r}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad = \quad \pi i \qquad \text{o sea,} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad = \quad \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMAS VARIOS

36. Sea $w = z^2$ una transformación del plano z (plano xy) en el plano w (plano uv). Considérese un triángulo del plano z de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$. (a) Mostrar que la *imagen* o *representación* de este triángulo es un triángulo curvilíneo del plano uv. (b) Hallar los ángulos de este triángulo curvilíneo y compararlos con los del triángulo original.

(a) Como $w = z^2$, se tiene $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ como ecuaciones de transformación. Así que el punto $A(2, 1)$ del plano xy se transforma en el punto $A'(3, 4)$ del plano uv (véase figura adjunta). Asimismo, los puntos B y C se transforman en los B' y C', respectivamente. Los segmentos AC, BC, AB del triángulo ABC se transforman, respectivamente, en los segmentos parabólicos $A'C'$, $B'C'$, $A'B'$ del triángulo curvilíneo $A'B'C'$ de ecuaciones como se anotan en las Figuras 17-10(a) y (b).

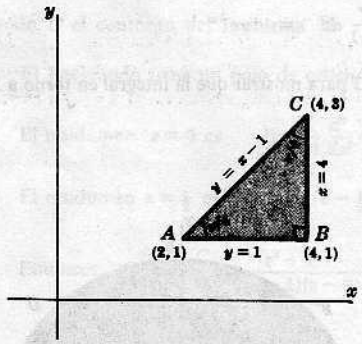


Fig. 17-10 (a)

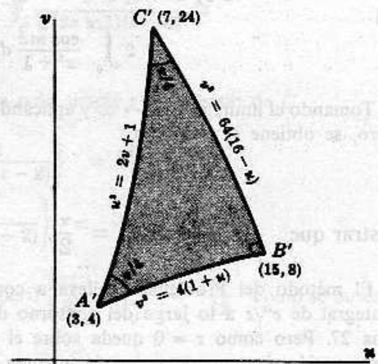


Fig. 17-10 (b)

(b) La pendiente de la tangente a la curva $v^2 = 4(1+u)$ en $(3, 4)$ es $m_1 = \left.\dfrac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = \left.\dfrac{2}{v}\right|_{(3,4)} = \dfrac{1}{2}$.

La pendiente de la tangente a la curva $u^2 = 2v+1$ en $(3, 4)$ es $m_2 = \left.\dfrac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = u = 3$.

Luego el ángulo θ entre las dos curvas en A' está dado por

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + (3)(\frac{1}{2})} = 1, \quad \text{y} \quad \theta = \pi/4$$

Análogamente puede demostrarse que el ángulo entre $A'C'$ y $B'C'$ es $\pi/4$, y que el ángulo de $A'B'$ y $B'C'$ es $\pi/2$. Por consiguiente, los ángulos del triángulo curvilíneo son iguales a los correspondientes del triángulo dado. En general, si $w = f(z)$ es una transformación en que $f(z)$ es analítica, el ángulo de dos curvas del plano z, que se cortan en $z = z_0$, tiene igual magnitud y sentido (orientación) que el ángulo que forman las imágenes de las dos curvas, siempre que $f'(z_0) \neq 0$. Esta propiedad es la llamada propiedad conforme de las funciones analíticas y por esta razón la transformación $w = f(z)$ se suele llamar *transformación* o *representación conforme*.

37. Sea la transformación del plano z en el plano w definida por $w = \sqrt{z}$. Un punto se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj por el círculo $|z| = 1$. Mostrar que cuando ha vuelto a su posición de partida la primera vez, su punto imagen aún no ha dado la vuelta, pero que cuando ha vuelto por segunda vez, el punto imagen llega a su posición de partida por primera vez.

Sea $z = e^{i\theta}$. Entonces, $w = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}$. Sea $\theta = 0$ el valor que corresponde a la posición de partida. Luego $z = 1$ y $w = 1$ [que corresponden a A y P en las Figuras 17-11(a) y (b)].

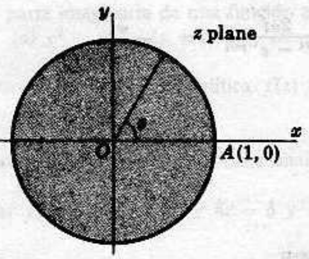


Fig. 17-11 (a)

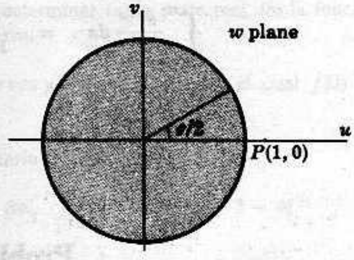


Fig. 17-11 (b)

Dada una vuelta completa en el plano z, $\theta = 2\pi$, $z = 1$, pero $w = e^{i\theta/2} = e^{i\pi} = -1$, de modo que el punto imagen no ha vuelto aún a su posición de partida.

En cambio, hechas dos revoluciones completas en el plano z, $\theta = 4\pi$, $z = 1$ y $w = e^{i\theta/2} = e^{2\pi i} = 1$, de modo que el punto imagen ha regresado por primera vez.

Se sigue de lo anterior que w no es una función uniforme de z, sino *biforme*; esto es, dado z, hay dos valores de w. Si se quiere considerarla como función uniforme hay que restringir θ. Se puede, por ejemplo, elegir $0 \leqq \theta < 2\pi$ si bien hay otras posibilidades. Esto representa una rama de la función biforme $w = \sqrt{z}$. Pasando de este intervalo se está sobre la segunda rama, por ejemplo, $2\pi \leqq \theta < 4\pi$. El punto $z = 0$ en torno al cual ocurre la rotación es un punto múltiple o de *ramificación*. De igual modo puede asegurarse que $f(z) = \sqrt{z}$ es uniforme conviniendo en no cruzar la recta Ox o *línea de ramificación*.

38. Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}, \quad 0 < p < 1.$

Considérese $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$. Como $z = 0$ es un punto múltiple, elíjase para C el contorno de la Fig. 17-12, en que AB y GH coinciden con el eje x, pero se hacen ver separadamente.

El integrando tiene el polo $z = -1$ interior a C.

El residuo en $z = -1 = e^{\pi i}$ es

$$\lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$$

Entonces, $$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

o bien, omitiendo el integrando,

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

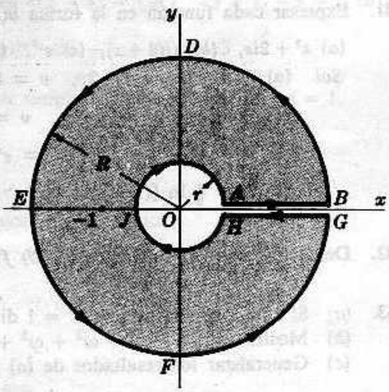


Fig. 17-12

Así, pues, se tiene

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}\, iRe^{i\theta}\, d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}\,dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{i\theta})^{p-1}\, ire^{i\theta}\, d\theta}{1+re^{i\theta}} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

habiéndose de utilizar $z = xe^{2\pi i}$ para la integral a lo largo de GH, pues el argumento de z se aumenta en 2π al recorrer el círculo $BDEFG$.

Tomando el límite para $r \to 0$ y $R \to \infty$ y observando que la segunda y cuarta integrales tienden a cero, se halla que

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \;+\; \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}\,x^{p-1}}{1+x}\,dx \;=\; 2\pi\, e^{(p-1)\pi i}$$

o bien
$$(1 - e^{2\pi i(p-1)})\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \;=\; 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

de modo que

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \;=\; \frac{2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} \;=\; \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} \;=\; \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

Problemas propuestos

FUNCIONES, LIMITES, CONTINUIDAD

39. Describir los conjuntos (*a*) $|z + 2 - 3i| = 5$, (*b*) $|z + 2| = 2|z - 1|$, (*c*) $|z + 5| - |z - 5| = 6$. Construir una figura en cada caso.
Sol. (*a*) Círculo $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, centro $(-2, 3)$, radio 5.
(*b*) Círculo $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, centro $(2, 0)$, radio 2.
(*c*) Rama de hipérbola $x^2/9 - y^2/16 = 1$, donde $x \geqq 3$.

40. Determinar la región del plano z representada por:
(*a*) $|z - 2 + i| \geqq 4$, (*b*) $|z| \leqq 3$, $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4}$, (*c*) $|z - 3| + |z + 3| < 10$.
Construir una figura en cada caso.
Sol. (*a*) Contorno y exterior del círculo $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.
(*b*) Región del primer cuadrante limitada por $x^2 + y^2 = 9$, el eje x y la recta $y = x$.
(*c*) Interior de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

41. Expresar cada función en la forma $u(x, y) + iv(x, y)$, siendo u y v reales.
(*a*) $z^3 + 2iz$, (*b*) $z/(3 + z)$, (*c*) e^{z^2}, (*d*) $\ln(1 + z)$.
Sol. (*a*) $u = x^3 - 3xy^2 - 2y, \quad v = 3x^2y - y^3 + 2x$
(*b*) $u = \dfrac{x^2 + 3x + y^2}{x^2 + 6x + y^2 + 9}, \quad v = \dfrac{3y}{x^2 + 6x + y^2 + 9}$
(*c*) $u = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy, \quad v = e^{x^2 - y^2}\operatorname{sen} 2xy$
(*d*) $u = \frac{1}{2}\ln\{(1 + x)^2 + y^2\}, \quad v = \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{1 + x} + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

42. Demostrar que (*a*) $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, (*b*) $f(z) = z^2$ es continua en $z = z_0$ directamente de la definición.

43. (*a*) Si $z = \omega$ es una raíz de $z^5 = 1$ distinta de 1, demostrar que todas las raíces son $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.
(*b*) Mostrar que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
(*c*) Generalizar los resultados de (*a*) y (*b*) a la ecuación $z^n = 1$.

DERIVADAS, ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

44. (*a*) Si $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, hallar $\dfrac{dw}{dz}$ directamente de la definición.
(*b*) ¿Para qué valores finitos de z no es analítica $f(z)$?
Sol. (*a*) $1 - 1/z^2$, (*b*) $z = 0$

45. Dada la función $w = z^4$, (*a*) Hallar funciones reales u y v tales que $w = u + iv$. (*b*) Mostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican en todo punto del plano finito z. (*c*) Demostrar que u y v son funciones armónicas. (*d*) Calcular dw/dz. *Sol.* (*a*) $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v = 4x^3y - 4xy^3$ (*d*) $4z^3$

46. Demostrar que $f(z) = z\,|z|$ no es analítica en ningún punto.

47. Demostrar que $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ es analítica en toda región que no incluya el punto $z = 2$.

48. Si la parte imaginaria de una función analítica es $2x(1 - y)$, determinar (*a*) la parte real, (*b*) la función. *Sol.* (*a*) $y^2 - x^2 - 2y + c$, (*b*) $2iz - z^2 + c$, donde c es real

49. Construir una función analítica $f(z)$ cuya parte real $e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y)$ y para el cual $f(0) = 1$. *Sol.* $ze^{-z} + 1$

50. Demostrar que no hay funciones analíticas de parte imaginaria $x^2 - 2y$.

51. Hallar $f(z)$ tal que $f'(z) = 4z - 3$ y $f(1 + i) = -3i$. *Sol.* $f(z) = 2z^2 - 3z + 3 - 4i$

INTEGRALES, TEOREMA DE CAUCHY, FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

52. Calcular $\displaystyle\int_{1-2i}^{3+i} (2z + 3)\,dz$:

(*a*) a lo largo del camino $x = 2t + 1$, $y = 4t^2 - t - 2$ $\quad 0 \leq t \leq 1$.
(*b*) a lo largo del segmento de $1 - 2i$ a $3 + i$.
(*c*) a lo largo de los segmentos de $1 - 2i$ a $1 + i$ y de aquí a $3 + i$.
Sol. $17 + 19i$ en todos los casos

53. Calcular $\displaystyle\int_C (z^2 - z + 2)\,dz$, siendo C el semicírculo superior de $|z| = 1$ recorrido en sentido positivo.
Sol. $-14/3$

54. Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{z\,dz}{2z - 5}$, siendo C el círculo (*a*) $|z| = 2$, (*b*) $|z - 3| = 2$. *Sol.* (*a*) 0, (*b*) $5\pi i/2$

55. Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{(z + 2)(z - 1)}\,dz$, siendo C (*a*) un cuadrado de vértices $-1 - i$, $-1 + i$, $-3 + i$, $-3 - i$; (*b*) el círculo $|z + 1| = 3$; (*c*) el círculo $|z| = \sqrt{2}$. *Sol.* (*a*) $-8\pi i/3$ (*b*) $-2\pi i$ (*c*) $2\pi i/3$

56. Calcular (*a*) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos \pi z}{z - 1}\,dz$, (*b*) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z + z}{(z - 1)^4}\,dz$ siendo C una curva simple cerrada que encierre $z = 1$.
Sol. (*a*) $-2\pi i$ (*b*) $\pi i e/3$

57. Demostrar las fórmulas integrales de Cauchy.
[Sugerencia: Aplíquese la definición de derivada y luego la inducción matemática.]

SERIES Y SINGULARIDADES

58. ¿Para qué valores de z converge cada serie?

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z + 2)^n}{n!}$, (*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z - i)^n}{n + 1}$, (*c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^2 + 2z + 2)^{2n}$.

Sol. (*a*) todo z (*b*) $|z - i| < 1$ (*c*) $z = -1 \pm i$

59. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n + 1)}$ es (*a*) absolutamente convergente, (*b*) uniformemente convergente para $|z| \leq 1$.

60. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + i)^n}{2^n}$ converge uniformemente dentro de cualquier círculo de radio R tal que $|z + i| < R < 2$.

61. Situar en el plano finito z todas las singularidades, si las hay, de cada función y nombrarlas:

(*a*) $\dfrac{z-2}{(2z+1)^4}$, (*b*) $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)^2}$, (*c*) $\dfrac{z^2+1}{z^2+2z+2}$, (*d*) $\cos\dfrac{1}{z}$, (*e*) $\dfrac{\operatorname{sen}(z-\pi/3)}{3z-\pi}$, (*f*) $\dfrac{\cos z}{(z^2+4)^2}$.

Sol. (*a*) $z=-\frac{1}{2}$, polo de orden 4
(*b*) $z=1$, polo simple; $z=-2$, polo doble
(*c*) Polos simples $z=-1\pm i$
(*d*) $z=0$, singularidad esencial
(*e*) $z=\pi/3$, singularidad evitable
(*f*) $z=\pm 2i$, polos dobles

62. Hallar series de Laurent en torno a la singularidad que se indica para cada una de las funciones siguientes, nombrando en cada caso la singularidad. Indicar la región de convergencia de cada serie.

(*a*) $\dfrac{\cos z}{z-\pi}$; $z=\pi$ (*b*) $z^2e^{-1/z}$; $z=0$ (*c*) $\dfrac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$; $z=1$

Sol. (*a*) $-\dfrac{1}{z-\pi}+\dfrac{z-\pi}{2!}-\dfrac{(z-\pi)^3}{4!}+\dfrac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$, polo simple, para todo $z\neq\pi$

(*b*) $z^2-z+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!\,z}+\dfrac{1}{4!\,z^2}-\dfrac{1}{5!\,z^3}+\cdots$, singularidad esencial, para todo $z\neq 0$

(*c*) $\dfrac{1}{4(z-1)^2}+\dfrac{7}{16(z-1)}+\dfrac{9}{64}-\dfrac{9(z-1)}{256}+\cdots$, polo doble, $0<|z-1|<4$

RESIDUOS Y TEOREMA DEL RESIDUO

63. Determinar los residuos de cada función en sus polos:

(*a*) $\dfrac{2z+3}{z^2-4}$, (*b*) $\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$, (*c*) $\dfrac{e^{zt}}{(z-2)^3}$, (*d*) $\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$.

Sol. (*a*) $z=2$; $7/4$, $z=-2$; $1/4$ (*c*) $z=2$; $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$
(*b*) $z=0$; $8/25$, $z=-5$; $-8/25$ (*d*) $z=i$; 0, $z=-i$; 0

64. Hallar el residuo de $e^{zt}\operatorname{tg} z$ en el polo simple $z=3\pi/2$. *Sol.* $-e^{3\pi t/2}$

65. Calcular $\displaystyle\oint_C\frac{z^2\,dz}{(z+1)(z+3)}$, siendo C una curva simple cerrada que encierra todos los polos. *Sol.* $-8\pi i$

66. Si C es una curva simple cerrada que encierra a $z=\pm i$, mostrar que

$$\oint_C\frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz = \tfrac{1}{2}t\operatorname{sen} t$$

67. Si $f(z)=P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios tales que el grado de $P(z)$ es al menos inferior en dos al de $Q(z)$, demostrar que $\oint_C f(z)\,dz=0$, siendo todos los polos de $f(z)$ interiores a C.

CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Integrando a lo largo de un contorno comprobar las integrales:

68. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

69. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^6+a^6}=\frac{2\pi}{3a^5},\quad a>0$

70. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{\pi}{32}$

71. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx=\frac{\pi}{3}$

72. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(x^4+a^4)^2}=\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}a^{-7},\quad a>0$

73. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}=\frac{\pi}{9}$

74. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

75. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

76. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{8}$

77. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2}=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

78. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad 0 < a < 1$

79. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^3} = \frac{(2a^2 + b^2)\pi}{(a^2 - b^2)^{5/2}}, \quad a > |b|$

80. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2 + 4}\, dx = \frac{\pi e^{-4}}{4}$

81. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + 4}\, dx = \frac{\pi e^{-\pi}}{8}$

82. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{4}$

83. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{\pi(2e - 3)}{4e}$

84. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$

85. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\, dx = \frac{3\pi}{8}$

86. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx = \frac{\pi}{2\cosh(\pi/2)}$. [Sugerencia: Considérese $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{\cosh z}\, dz$, donde C es un rectángulo de vértices en $(-R, 0)$, $(R, 0)$, (R, π), $(-R, \pi)$. Entonces hágase $R \to \infty$.]

PROBLEMAS VARIOS

87. Si $z = \rho e^{i\phi}$ y $f(z) = u(\rho, \phi) + i\, v(\rho, \phi)$, siendo ρ y ϕ coordenadas polares, demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

88. Si $w = f(z)$ con $f(z)$ analítica, define una transformación del plano z en el plano w, con $z = x + iy$ y $w = u + iv$, demostrar que el jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$$

89. Sea $F(x, y)$ que se transforma en $G(u, v)$ por la transformación $w = f(z)$. Mostrar que si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, en todos los puntos en que $f'(z) \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0$.

90. Mostrar que por la *transformación bilineal* $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, donde $ad - bc \neq 0$, los círculos del plano z se transforman en círculos del plano w.

91. Si $f(z)$ es analítica sobre y dentro del círculo $|z - a| = R$, demostrar la *desigualdad de Cauchy*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\, M}{R^n}$$

donde $|f(z)| \leq M$ sobre el círculo. [Sugerencia: Utilizar las fórmulas integrales de Cauchy.]

92. Sean C_1 y C_2 círculos concéntricos de centro a y radios r_1 y r_2, respectivamente, con $r_1 < r_2$. Si $a + h$ es un punto de la región anular delimitada por C_1 y C_2 y $f(z)$ es analítica en esta región, demostrar el *teorema de Laurent*

$$f(a + h) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}}$$

siendo C cualquier curva cerrada de la región anular que encierra a C_1.

[Sugerencia: Escríbase $f(a + h) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C_2} \frac{f(z)\, dz}{z - (a + h)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)\, dz}{z - (a + h)}$ y desarróllese $\dfrac{1}{z - a - h}$ de dos maneras diferentes.]

93. Hallar un desarrollo en serie de Laurent para la función $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ que converja para $1 < |z| < 2$ y diverja en cualquier otro punto.

$\left[\text{Sug.. Escríbase } \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} = \dfrac{-1}{z+1} + \dfrac{2}{z+2} = \dfrac{-1}{z(1+1/z)} + \dfrac{1}{1+z/2}.\right]$

Sol. $\cdots - \dfrac{1}{z^5} + \dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} + 1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^3}{8} + \cdots$

94. Sea $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s)$ donde $f(s)$ es una función racional dada cuyo numerador es de grado inferior al del denominador. Si C es una curva simple cerrada que encierra todos los polos de $f(s)$, se puede demostrar que

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{zt} f(z)\,dz = \text{suma de los residuos de } e^{zt} f(z) \text{ en sus polos}$$

Empléese este resultado para hallar $F(t)$ si $f(s)$ es (*a*) $\dfrac{s}{s^2+1}$, (*b*) $\dfrac{1}{s^2+2s+5}$, (*c*) $\dfrac{s^2+1}{s(s-2)^2}$, (*d*) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ y compruébense los resultados en cada caso.

[Obsérvese que $f(s)$ es la *transformada de Laplace* de $F(t)$ y que $F(t)$ es la *transformada inversa de Laplace* de $f(s)$ (véase Capítulo 12). Se puede generalizar a otras funciones $f(s)$.]

Sol. (*a*) $\cos t$, (*b*) $\frac{1}{2}e^{-t}$ sen $2t$, (*c*) $\frac{1}{4} + \frac{5}{2}te^{2t} + \frac{3}{4}e^{2t}$, (*d*) $\frac{1}{2}(\text{sen } t - t\cos t)$

INDICE

Schaum

- En los primeros capítulos de este libro se revisan y amplían los conceptos fundamentales del cálculo elemental.
- Los temas estudiados abarcan el cálculo diferencial e integral de una o más variables y sus aplicaciones.
- Los métodos vectoriales se estudian casi desde el principio y entre los temas especiales se incluyen las integrales curvilíneas y de superficie, así como los teoremas sobre integrales, las series, las integrales impropias, las funciones Gamma y Beta y las series de Fourier, las integrales elípticas y las funciones de variable compleja.
- Esta obra es de gran utilidad para todos los estudiantes de Física, Matemáticas e Ingeniería.

9 789701 000656
ISBN: 970-10-0065-X

Mc Graw Hill

falta pag
9

55