Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

*(Variables separadas – Homogéneas – Diferenciales Exactas
Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden)*

María del Carmen Calvo

Comencemos repasando la definición de las ***líneas de flujo*** de un campo vectorial. Pensemos, más precisamente, en un campo de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad , \qquad \mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

Una trayectoria $\mathbf{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$ si $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ para cada $t \in [a,b]$. Denotando por $(x(t), y(t))$ a las componentes de $\mathbf{c}$, la condición anterior equivale a

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = F_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

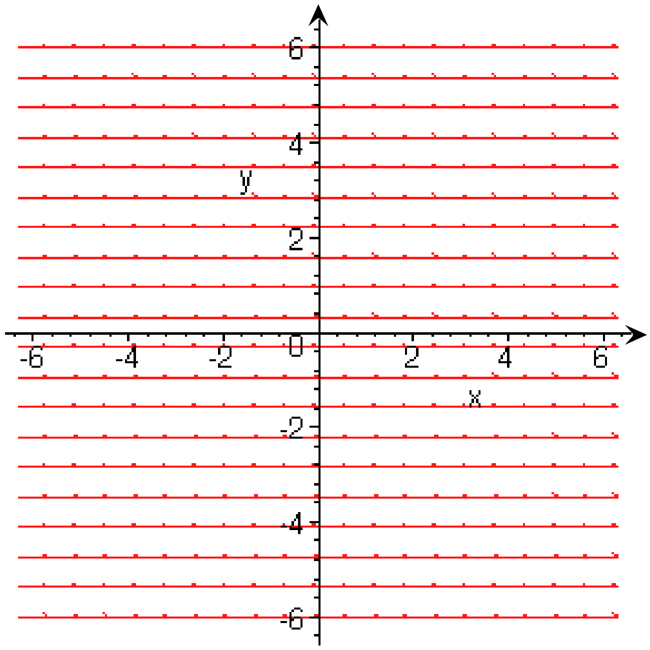
Se nos plantea el siguiente problema: *dado un campo vectorial* $\mathbf{F}$*, encontrar sus líneas de flujo*. Veamos algunos casos donde esto se puede hacer bastante fácilmente.

Recordemos que un campo vectorial (en $\mathbb{R}^2$) [1] se puede interpretar como una aplicación que a cada punto del plano le asigna un vector con origen en ese punto cuya dirección, magnitud y sentido van variando conforme se mueve el punto sobre el plano.

Ejemplos

1. Sea $\mathbf{F}(x,y) = (1,0)$. En este caso en particular la dirección, magnitud y sentido es la misma en todos los puntos del plano y coincide con la del vector $(1,0)$. El siguiente diagrama ilustra este hecho

[1] análogamente en $\mathbb{R}^3$



En cada punto (x, y) (en el diagrama, por supuesto, sólo se muestran algunas) cada flechita roja representa el vector $(1, 0)$ trasladado hasta (x, y).

De su misma definición se desprende que una línea de flujo de **F** debe tener en cada punto al $(1, 0)$ como su vector tangente. Intuitivamente podríamos conjeturar entonces que su imagen debe ser una recta horizontal. Comprobemos que esto es realmente así. Busquemos las trayectorias

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$$

tales que

$$x'(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad y'(t) = 0$$

Resultados bien conocidos nos permiten afirmar que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x(t) = t + c_1 \qquad \text{e} \qquad y(t) = c_2$$

De donde,

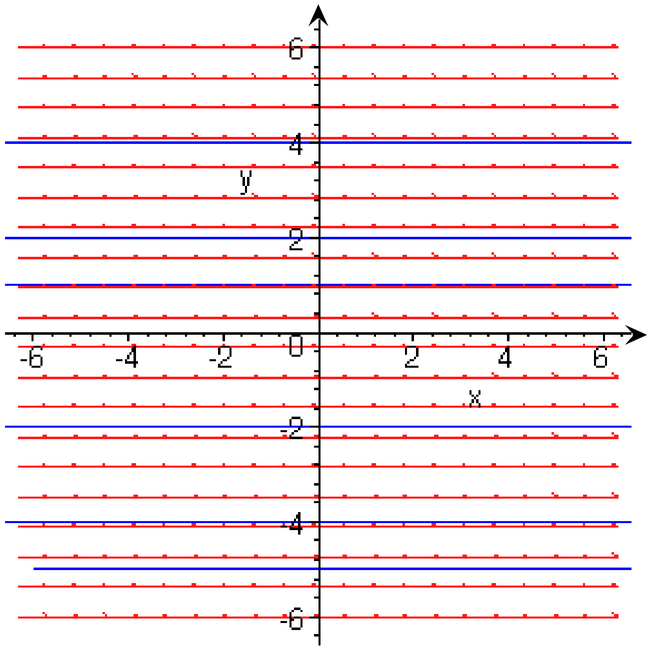
$$\mathbf{c}(t) = (t, 0) + (c_1, c_2)$$

cuya imagen es efectivamente una recta horizontal que pasa por (c_1, c_2). Es claro, por otra parte, que todas estas trayectorias son líneas de flujo de **F**.

Hemos probado así que, **c** es una línea de flujo de **F** si y sólo si existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{c}(t) = (t + c_1, c_2) = (t, 0) + (c_1, c_2)$$

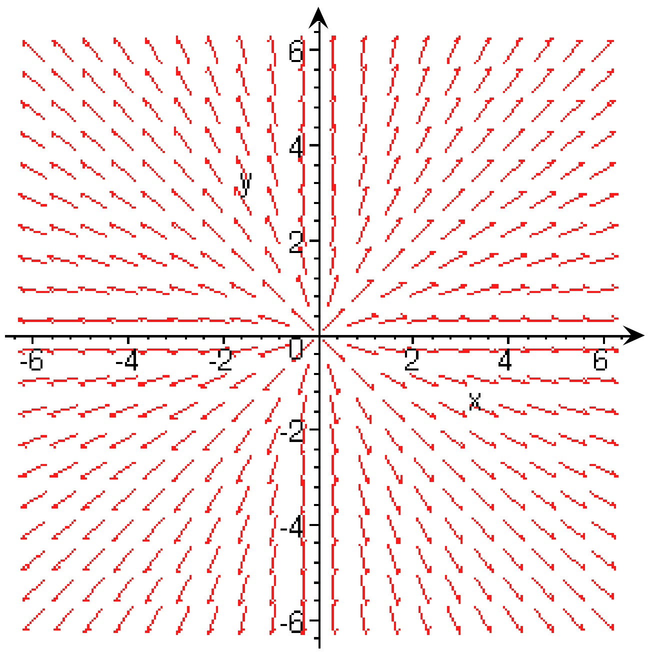
En el siguiente gráfico se representan (en azul) algunas de ellas,



Queda claro también en este caso que por cada punto $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ pasa una y sólo una línea de flujo de $\mathbf{F}$.

2. Sea $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

   El siguiente diagrama ilustra el comportamiento de $\mathbf{F}$



Mirando esta figura podríamos pensar que las líneas de flujo de este campo son rectas que pasan por el origen. Confirmemos esto. Sea $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ una línea de flujo de $\mathbf{F}$, entonces

$$x'(t) = x(t) \qquad \text{e} \qquad y'(t) = y(t)$$

Observemos lo siguiente: si $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\alpha' \equiv \alpha$, derivando el cociente $\dfrac{\alpha(t)}{e^t}$ se llega a probar que existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(t) = ke^t$$

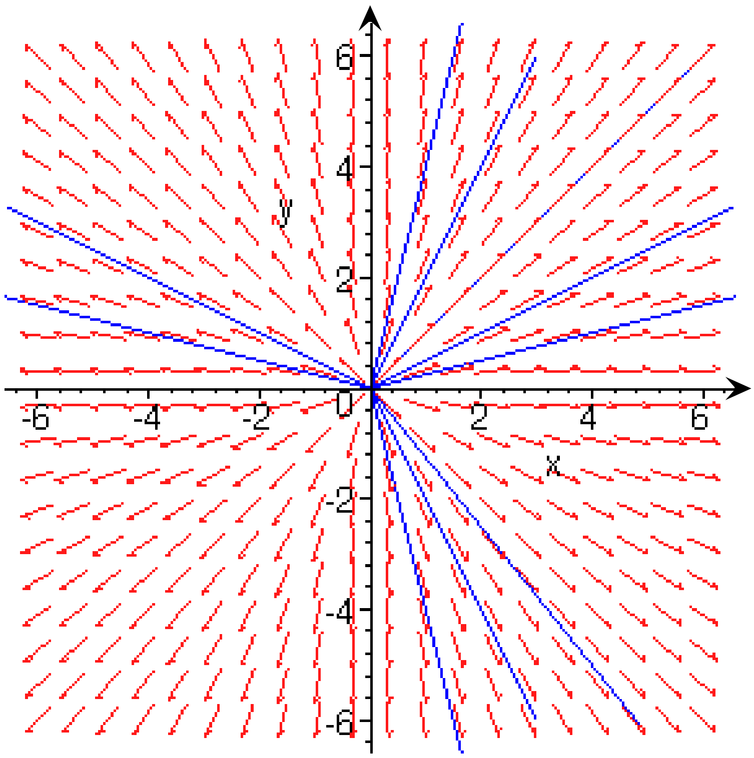
Es decir, si una función coincide con su derivada tiene que ser un múltiplo de la exponencial. Podemos utilizar este hecho para concluir que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x(t) = c_1 e^t \qquad \text{e} \qquad y(t) = c_2 e^t$$

Llegamos así a ver que las líneas de flujo de **F** son las trayectorias

$$\mathbf{c}(t) = e^t(c_1, c_2)$$

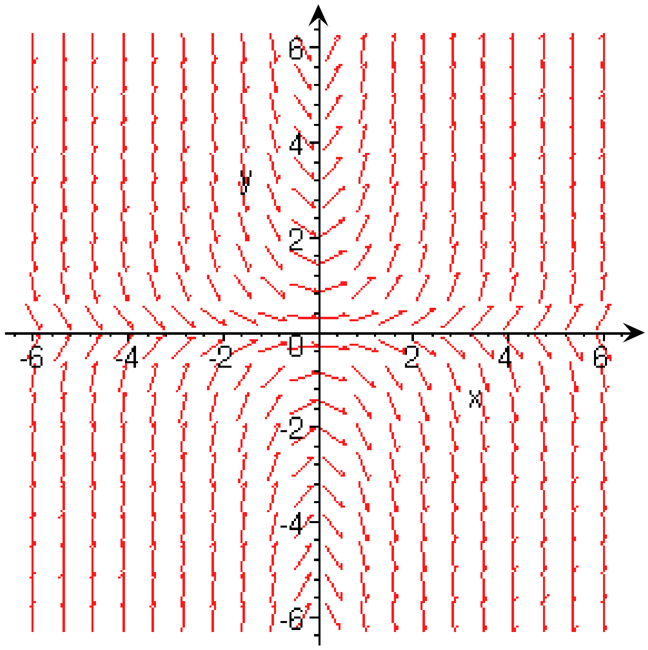
cuyas imágenes son claramente semirrectas [2] por el origen. Aquí también por cada punto del plano pasa una y sólo una [3] línea de flujo de **F**. El siguiente diagrama muestra algunas de estas curvas



[2] pues $e^t > 0$ para todo t, aunque ninguna contiene al origen
[3] ¿cuál es la que pasa por el origen?

3. Sea $\mathbf{F}(x, y) = (1, xy)$.

   Su comportamiento se puede apreciar en el siguiente diagrama



Las líneas de flujo de este campo son las que satisfacen

$$x'(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad y'(t) = x(t)y(t)$$

Es inmediato que

$$x(t) = t + c_1$$

para alguna constante $c_1 \in \mathbb{R}$. Para hallar $y(t)$, trabajemos en principio alrededor de un punto donde y no se anule; en tal caso,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = x(t) = t + c_1$$

Integrando respecto de t

$$\ln |y(t)| = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

de aquí,

$$|y(t)| = e^{t^2/2 + c_1 t + c_2} = e^{c_2} e^{t^2/2 + c_1 t}$$

Esto nos dice que y no se anula nunca y, siendo continua, debe conservar su signo; i.e.,

$$y(t) = e^{c_2} e^{t^2/2 + c_1 t} \qquad \text{o} \qquad y(t) = -e^{c_2} e^{t^2/2 + c_1 t}$$

Teniendo en cuenta que e^{c_2} representa –al variar c_2– cualquier número real positivo podemos decir que

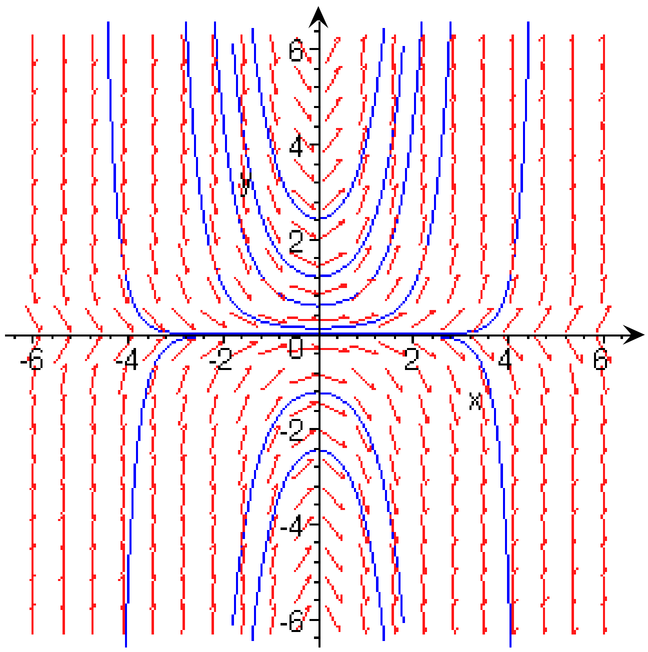
$$y(t) = K e^{t^2/2 + c_1 t}$$ $(c_1, K \in \mathbb{R}$ [4])

Lo que finalmente permite concluir que las líneas de flujo de $\mathbf{F}$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= (t + c_1, Ke^{t^2/2+c_1 t}) \\ &= (t, Ke^{t^2/2+c_1 t}) + (c_1, 0) \end{aligned} \qquad (c_1, K \in \mathbb{R})$$

i.e., los gráficos de las funciones $f(t) = Ke^{t^2/2+c_1 t}$ desplazados horizontalmente por el valor de c_1.

Algunas de ellas se ilustran en la siguiente figura



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Lo que hicimos para encontrar las líneas de flujo de los campos anteriores fue hallar las funciones $y(t)$ que satisfacen ecuaciones que involucran a la función y, a su variable y a su primer derivada.

Se puede plantear, más generalmente, como el problema de encontrar las funciones $y(x)$ que satisfacen

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1}$$

Ejemplos de esta situación podrían ser

1. $y' = 0$; i.e., $f(x, y) = 0$
2. $y' = y$; i.e., $f(x, y) = y$

3. $2yy' = x$; i.e., $f(x, y) = \dfrac{x}{2y}$

Acabamos de ver cómo se resuelven las dos primeras. Con respecto a la tercera, $2yy' = (y^2)'$; luego,

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + K$$

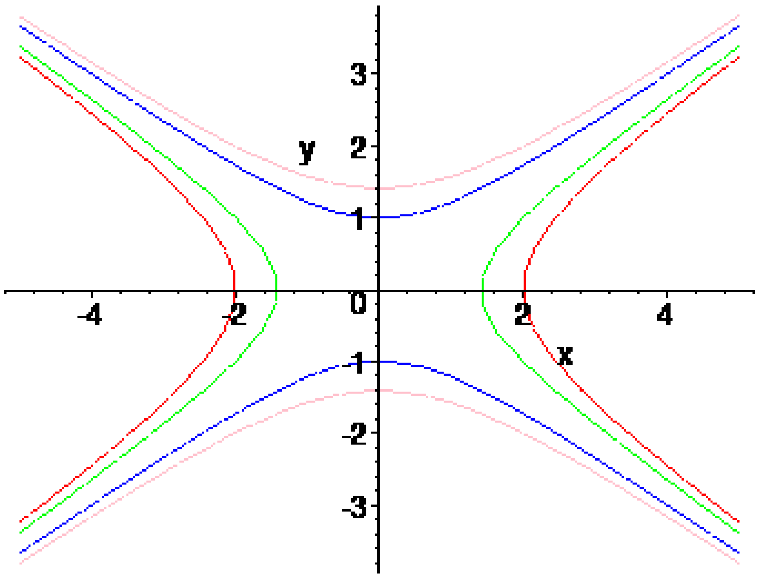
es decir,

$$y^2 - \frac{x^2}{2} = -K$$

o bien,

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = K$$

Se trata entonces de hipérbolas con focos sobre los ejes coordenados. El siguiente gráfico ilustra algunas de estas soluciones. Intente identificar el signo de la constante en cada caso particular.



En estos casos fue fácil hallar las soluciones, en la mayoría de las situaciones habrá que conformarse con poder probar que *existen* soluciones y, en la medida de lo posible, encontrar aproximaciones de la verdadera solución.

Observación

Dada la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y)$$

consideremos el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = (1, f(x, y))$$

Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$,

$$x'(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad y'(t) = f(t, y)$$

tomando la constante nula [5] resulta

$$x(t) = t \qquad \text{e} \qquad y' = f(t, y)$$

Deducimos de aquí que $\mathbf{c}(t) = (t, y(t))$. En consecuencia, podemos decir que

la función $y(t)$ es solución de (1) $\iff$ $\mathbf{c}(t) = (t, y(t))$ *es línea de flujo de* $\mathbf{F}(x, y) = (1, f(x, y))$

Dicho en palabras, las soluciones de una ecuación diferencial de la forma $y' = f(t, y)$ se pueden pensar como las líneas de flujo de un campo vectorial.

Se pueden plantear dos problemas

- ❖ Dado un campo vectorial o, equivalentemente, una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ encontrar la familia de líneas de flujo del campo (o de soluciones de la ecuación diferencial)
- ❖ Dada una familia de curvas, encontrar un campo (o una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$) que la tenga por familia de líneas de flujo (resp. soluciones)

Veamos algunos ejemplos de estas situaciones

1. $y' = e^x + 1 \qquad$ (resp.: $\mathbf{F}(x, y) = (1, e^x + 1)$)

   Es inmediato en este caso concluir que la familia de soluciones está dada por

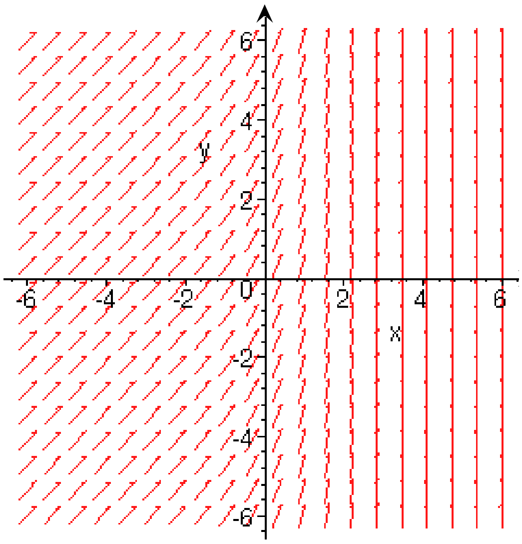
   $$y(x) = e^x + x + K \qquad (K \in \mathbb{R})$$

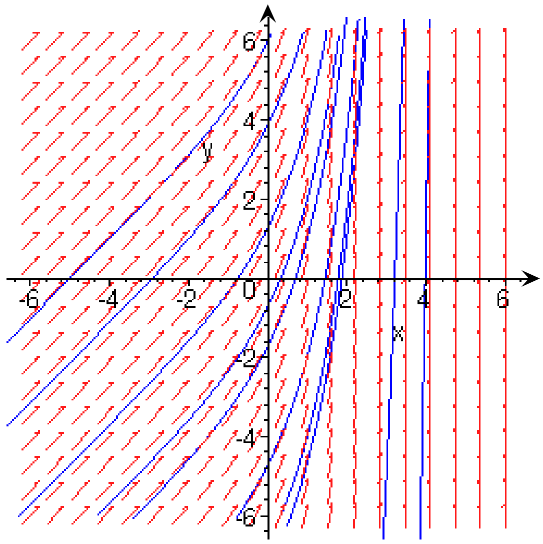
   o bien, dicho en términos de campos, que la familia de líneas de flujo es

   $$\mathbf{c}(x) = (x, e^x + x + K) \qquad (K \in \mathbb{R})$$

   A continuación se muestran el campo y algunas de sus líneas de flujo

[5] Esto sólo significa reparametrizarla con un cambio de la forma $\varphi(t) = t + k$





2. $y' = x^2 y$ (resp.: $\mathbf{F}(x, y) = (1, x^2 y)$)

Supongamos que $y(x_0) \neq 0$; i.e., $y \neq 0$ en un entorno V de x_0. Entonces, en V,

$$y' = x^2 y \iff \frac{y'}{y} = x^2 \iff \ln|y(x)| = \frac{x^3}{3} + K \iff |y(x)| = e^K e^{x^3/3}$$

Pero como y es continua y no se anula en V no puede cambiar de signo; tenemos entonces sólo dos posibilidades para y

$$y(x) = e^K e^{x^3/3} \qquad \text{o} \qquad y(x) = -e^K e^{x^3/3}$$

lo que se puede expresar en la forma

$$y(x) = C e^{x^3/3} \qquad (C \in \mathbb{R}\ [6])$$

Comprobemos ahora que esta función es solución de la ecuación en todo $\mathbb{R}$, no sólo en V. En efecto, si y es solución de la ecuación dada

$$\left(\frac{y}{e^{x^3/3}}\right)' = \frac{y' e^{x^3/3} - y x^2 e^{x^3/3}}{e^{2x^3/3}} = \frac{y x^2 e^{x^3/3} - y x^2 e^{x^3/3}}{e^{2x^3/3}} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

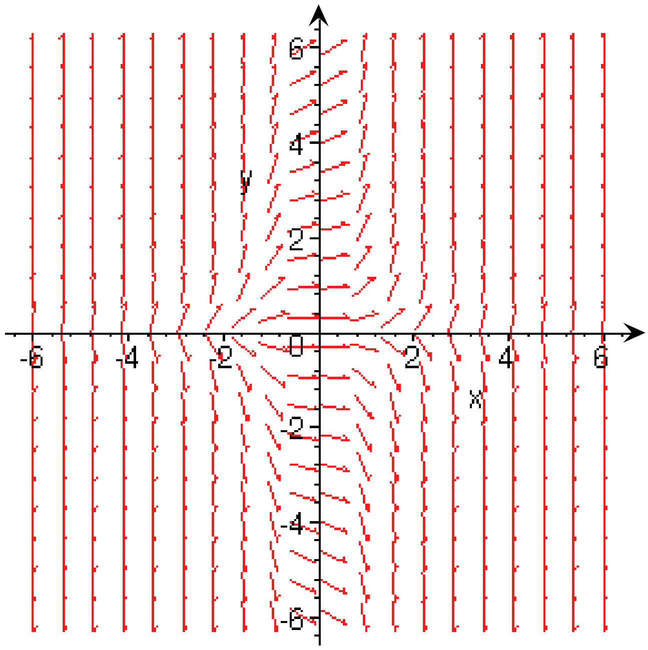
$$y(x) = C e^{x^3/3}$$

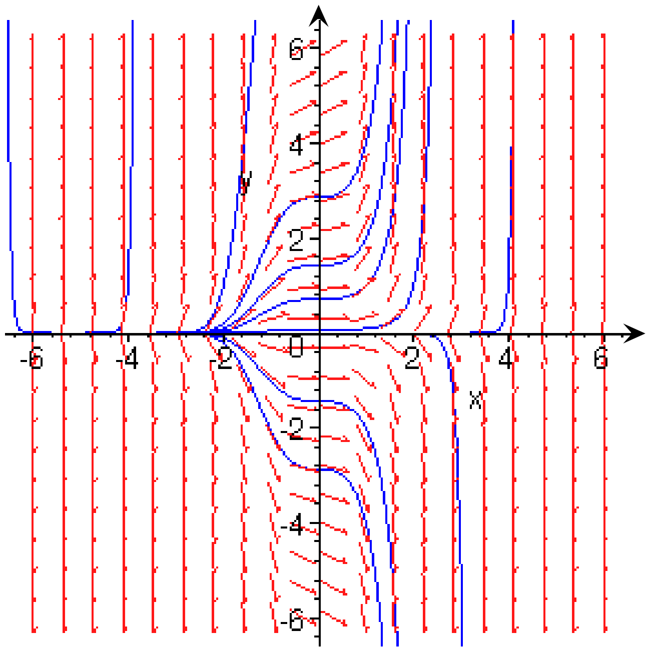
en $\mathbb{R}$.

En términos de líneas de flujo,

$$\mathbf{c}(x) = (x, C e^{x^3/3}) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Los siguientes gráficos ilustran el campo y algunas de sus líneas de flujo





3. Consideremos ahora la otra situación. Partimos de la familia de funciones

$$y(x) = kx \qquad (k \in \mathbb{R})$$

y tratamos de hallar una ecuación diferencial que tenga como conjunto de soluciones a esta familia.

Notemos que si $y(x) = kx$, entonces

$$y' = k$$

con lo cual, podemos reescribir a $y(x)$ en la forma

$$y(x) = xy'(x)$$

que es una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, siendo $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Verifiquemos que el conjunto de soluciones coincide con la familia dada. Si $y = xy'$, entonces

$$y' = (y'x)' = y' + xy''$$

de donde

$$y''x = 0$$

Pero esto implica que

$$y''(x) = 0$$

para todo $x \neq 0$ y, por razones de continuidad, también para $x = 0$. Luego,

$$y'' \equiv 0$$

pero entonces

$$y(x) = ax + b$$

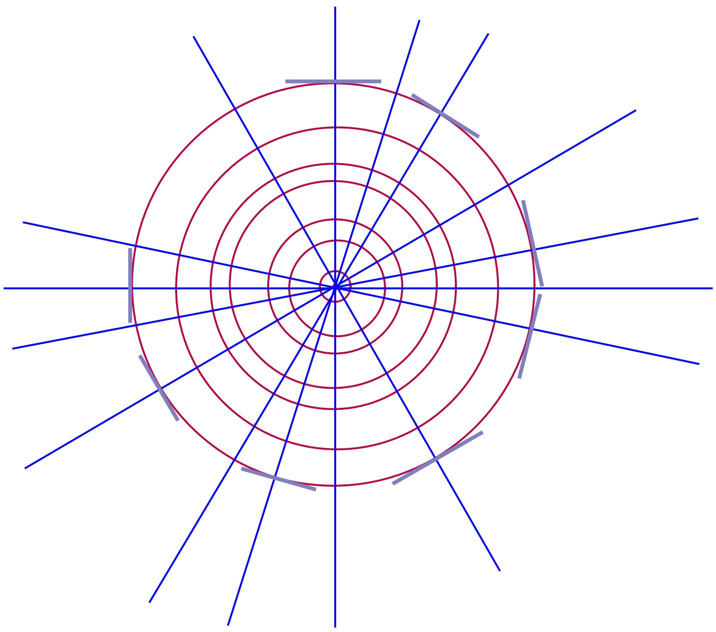
y como $y(0) = 0y'(0) = 0$ debe ser $b = 0$ con lo cual

$$y(x) = ax$$

como queríamos.

Trayectorias ortogonales

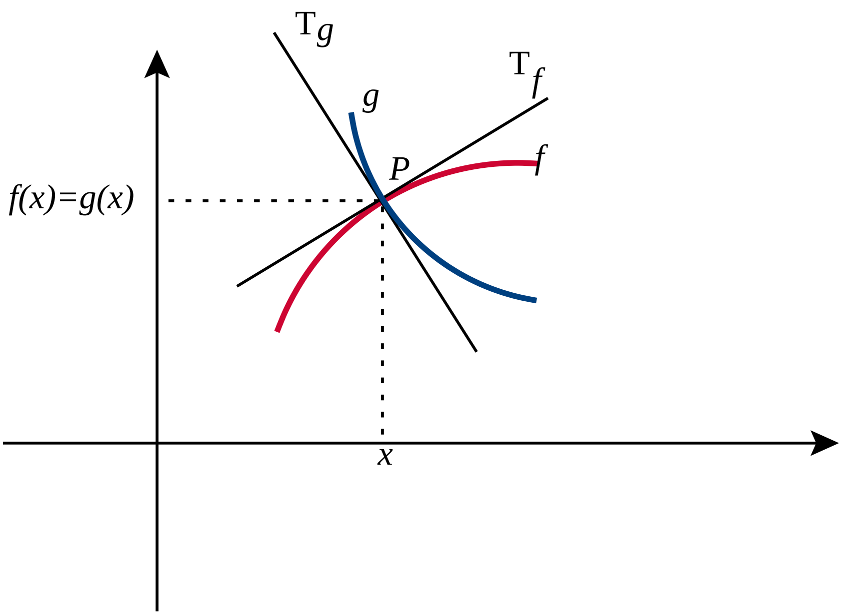
Observemos la siguiente figura. En ella están representadas dos familias de curvas. Una formada por circunferencias concéntricas y otra por rectas que pasan por el centro de las circunferencias.



Tienen la particularidad de que cada miembro de la primer familia corta a los de la otra formando un ángulo recto; i.e., se cortan orgonalmente. Se dice que, por ejemplo, la familia de circunferencias constituye el conjunto de trayectorias ortogonales de la familia de rectas.

En lo que sigue vamos a encontrar el conjunto de trayectorias ortogonales de dos familias de curvas y el procedimiento que apliquemos se podrá utilizar para hallar las trayectorias ortogonales de otras familias de curvas.

Antes que nada observemos que en el punto de intersección las rectas tangentes deben ser ortogonales. El siguiente esquema gráfico, donde representamos con f a un miembro de una de las familias y con g a uno de la otra, ilustra este hecho



f y g se cortan ortogonalmente en P si

$$T_f \quad \perp \quad T_g$$

$$i.e., \quad si\ f'(x)g'(x) = -1$$

En los siguientes ejemplos vamos a encontrar las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada y para ello vamos a hacer uso de las ecuaciones diferenciales.

1. Consideremos primero la familia de parábolas

$$y = \alpha x^2 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

En primer lugar buscamos la ecuación diferencial que tiene por conjunto de soluciones a esta familia de curvas. Para ello derivamos la ecuación $y = \alpha x^2$

$$y' = 2\alpha x$$

para obtener el parámetro α en términos de x y de y

$$\alpha = \frac{y'}{2x}$$

con lo cual la ecuación de esta familia se escribe en la forma

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 = \frac{1}{2}y'x$$

Con los métodos ya vistos se puede comprobar fácilmente que las soluciones de la ecuación

$$y = \frac{1}{2}y'x$$

que para $x \neq 0$ se puede escribir en la forma

$$y' = \frac{2y}{x}$$

son exactamente las parábolas

$$y = \alpha x^2$$

Ahora, como la familia de trayectorias ortogonales debe cumplir en cada punto de intersección que el producto de las pendientes es -1, concluimos que tiene que ser el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

que se puede escribir

$$2yy' = -x$$

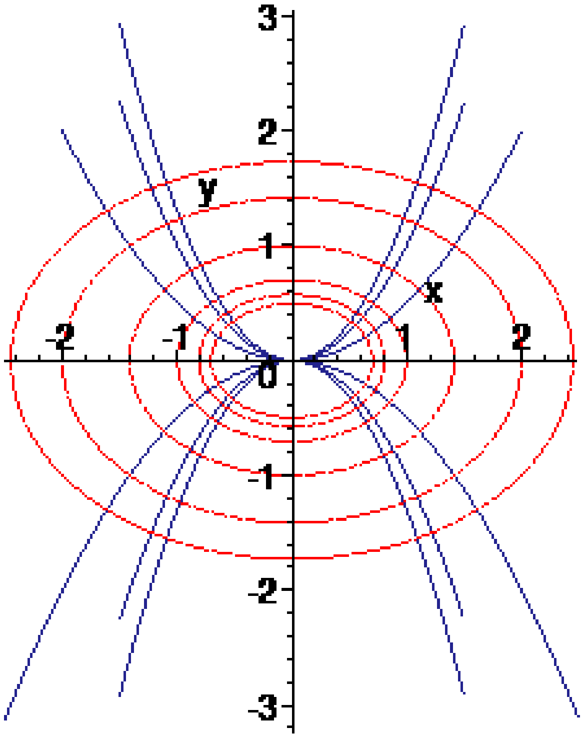
integrando se obtiene por conjunto de soluciones a la familia de curvas

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + K \qquad (K \geqslant 0)$$

o sea,

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = K \qquad (K \geqslant 0)$$

Vemos que las soluciones de esta ecuación son elipses cuyos ejes son los ejes coordenados. La siguiente figura muestra algunos miembros de la familia original y algunos otros de las trayectorias ortogonales



2. Nos ocuparemos ahora de hallar las trayectorias ortogonales a la familia de hipérbolas

$$x^2 - y^2 = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Comenzamos hallando la ecuación diferencial que tiene por soluciones precisamente a este conjunto de curvas. Si derivamos respecto de x,

$$2x - 2yy' = 0$$

de donde obtenemos que

$$y' = \frac{x}{y}$$

De modo que la familia de trayectorias ortogonales debe ser la solución de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{y}{x}$$

que es lo mismo que decir,

$$\frac{y'}{y} = -x$$

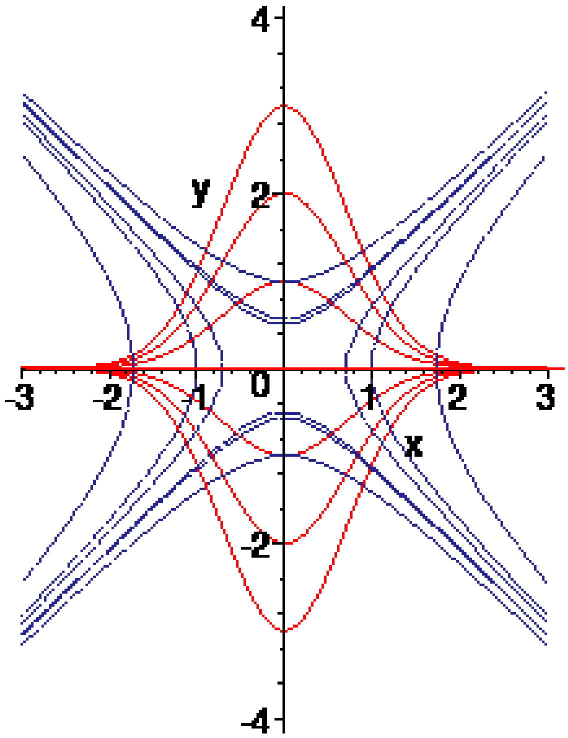
Integrando respecto de x obtenemos

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + K$$

y aplicando la exponencial y argumentando como hicimos anteriormente llegamos a

$$y = Ce^{-x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

La siguiente figura muestra varios miembros de la familia original y de la de sus trayectorias ortogonales



Métodos de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

I. Resolución por integrales indefinidas

(A) **Variables separadas**

$$\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}$$

Equivale a

$$g(y)y' = f(x)$$

Integrando respecto de x

$$\int g(y(x))y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

Es decir,

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

Podemos entonces hallar y si encontramos una primitiva de g y otra de f.

Ejemplos

1.

$$y' + xy = 0$$

Esta ecuación equivale a

$$y' = -xy$$

o sea,

$$\frac{y'}{y} = -x$$

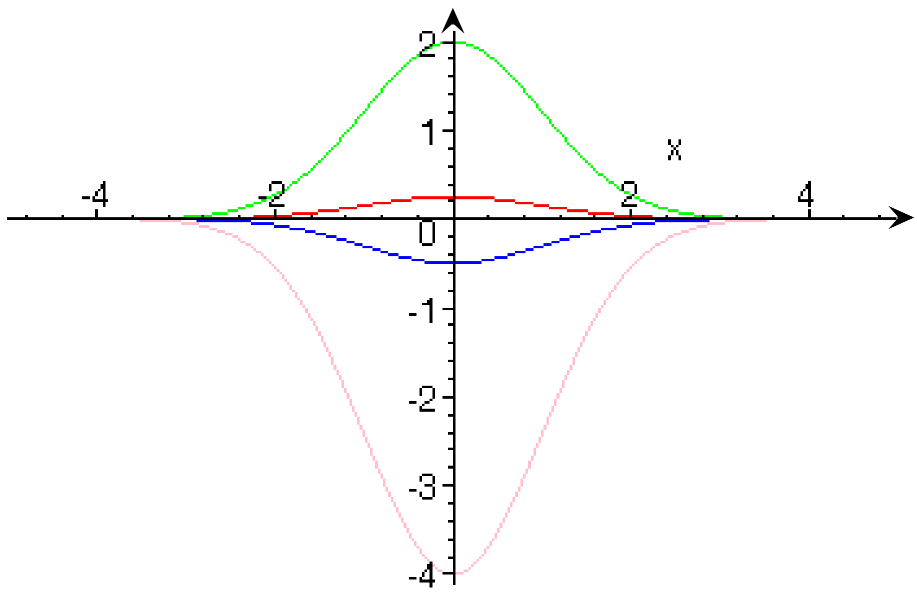
Integrando,

$$\ln|y(x)| = -\frac{x^2}{2} + C$$

Argumentando como en ejemplos anteriores podemos concluir que

$$y(x) = Ke^{-x^2/2} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

Se muestran a continuación algunas de estas soluciones. Intente identificar el signo de la constante correspondiente a cada gráfico.



2.

$$x^2y' + y = 0$$

Pasando de miembro,

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}$$

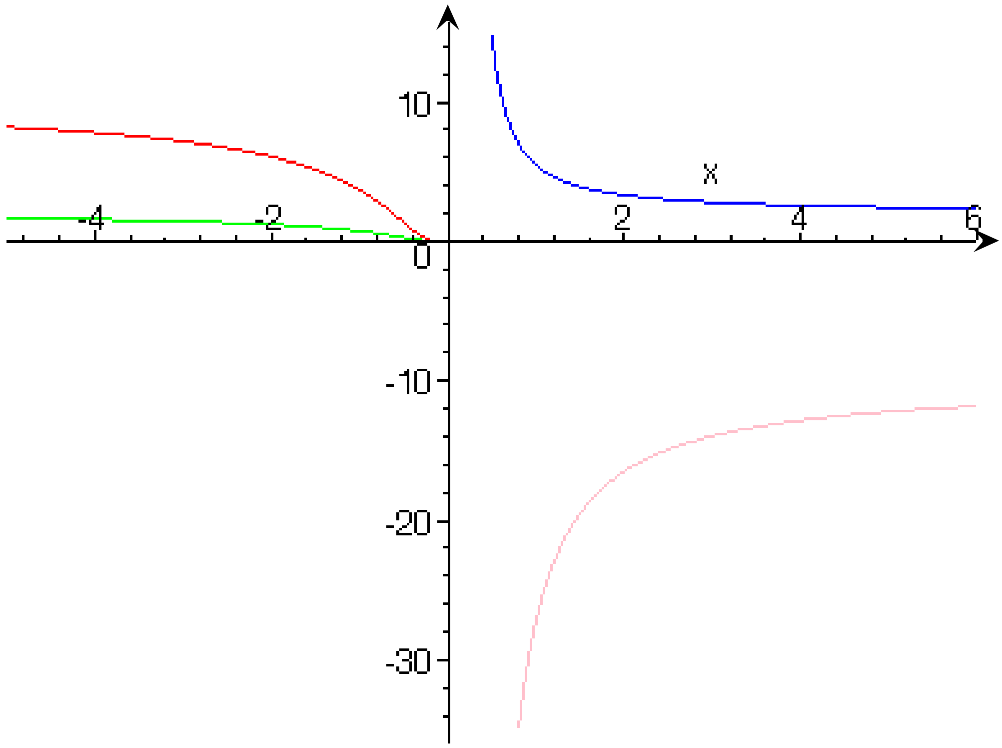
de aquí,

$$\ln |y(x)| = \frac{1}{x} + C$$

y, como antes,

$$y(x) = Ke^{1/x} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

El siguiente gráfico ilustra algunas soluciones. Intente relacionar la función con el signo de la constante.



(B) **Homogéneas de grado** 0

$$\boxed{\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ f \text{ homogénea de grado } 0 \end{array}}$$

Por ser f homogénea de grado 0, $f(t(x,y)) = f(x,y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$f(x,y) = f(x.1, x.\tfrac{y}{x}) = f(1, \tfrac{y}{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lo llamamos}}}{=} g(\tfrac{y}{x})$$

Esto sugiere pensar en el siguiente cambio de variable

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

o, lo que es lo mismo,

$$y(x) = xu(x)$$

De esta forma

$$y'(x) = f(x, y(x)) = g(\tfrac{y(x)}{x}) = g(u)$$

Pero por otro lado,

$$y'(x) = u(x) + xu'(x)$$

Tenemos entonces, que la nueva función u satisface la ecuación

$$u + xu' = g(u)$$

que se puede escribir en la forma

$$\frac{u'}{g(u) - u} = \frac{1}{x}$$

que ya sabemos resolver porque es de variables separadas. Y una vez que conozcamos u vamos a conocer y.

Ejemplo 1

$$xyy' = x^2 + y^2$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y)$$

Es inmediato verificar que f es homogénea de grado 0. En efecto,

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{txty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
Hacemos el cambio de variable: $y(x) = xu(x)$, con lo cual, notando además que

$$f(x, y) = \frac{1}{y/x} + \frac{y}{x}$$

se tiene

$$u + xu' = f(1, u) = \frac{1}{u} + u$$

simplificando u y pasando de miembro

$$uu' = \frac{1}{x}$$

integrando

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + k$$

de donde,

$$u^2 = \ln x^2 + C$$

volviendo a la variable y

$$y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2$$

o sea

$$|y| = \sqrt{x^2(\ln x^2 + C)}$$

equivalentemente,

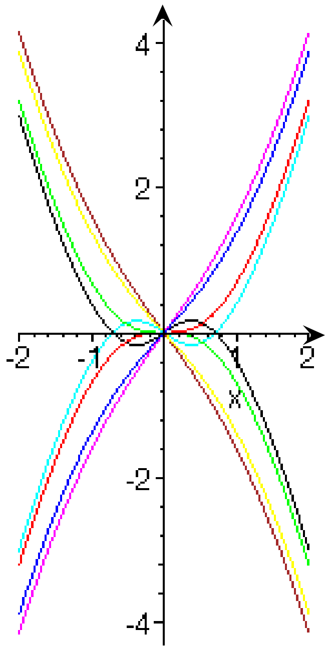
$$\left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{\ln x^2 + C}$$

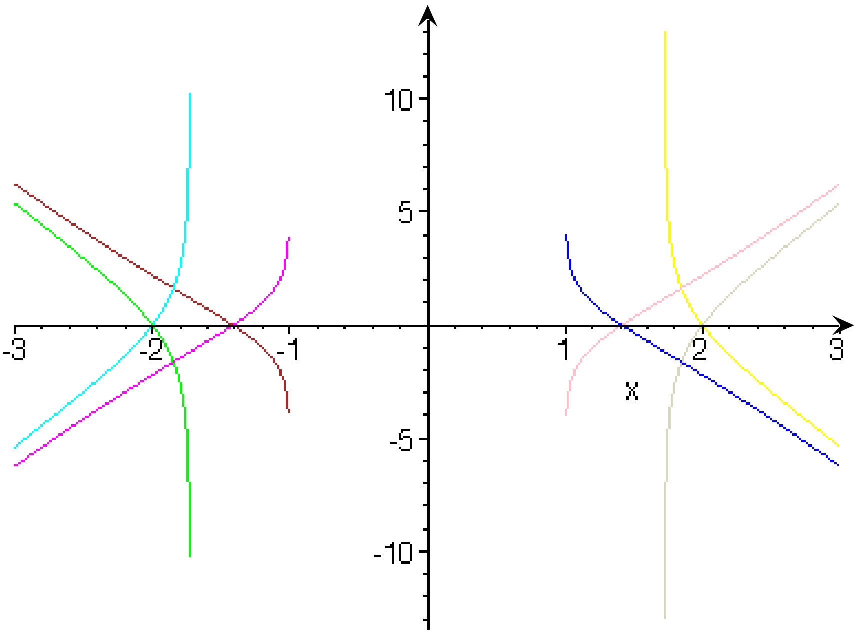
Usando nuevamente la continuidad de la función y llegamos a que las soluciones de esta ecuación tienen la forma

$$y(x) = x\sqrt{\ln x^2 + C} \qquad \text{o} \qquad y(x) = -x\sqrt{\ln x^2 + C}$$

Notemos que el dominio de estas funciones varía con C dado que debe ser $\ln x^2 + C \geqslant 0$, es decir $x^2 \geqslant e^{-C}$.

Las siguientes son algunas de sus soluciones. Intente relacionar a cada una con el signo de la constante.





Ejemplo 2

$$y' = \frac{-x - y}{x - y}$$

Siendo homogénea de grado 0, mediante el cambio de variable

$$y = xz$$

la convertimos en

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z}$$

de donde, separando variables,

$$\frac{1-z}{z^2+1}z' = \frac{1}{x}$$

e integrando respecto de x,

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) = \ln|x| + K$$

que se puede expresar como

$$\operatorname{arctg} z - \ln\sqrt{z^2+1} = \ln|x| + K$$

Pasando de miembro y aplicando la exponencial,

$$|x|\sqrt{z^2+1} = Ce^{\operatorname{arctg} z}$$

donde ahora C es una constante positiva. Pero debemos recordar que las variables originales eran x e y; volviendo a ellas,

$$|x|\sqrt{y^2/x^2+1} = Ce^{\operatorname{arctg}(y/x)}$$

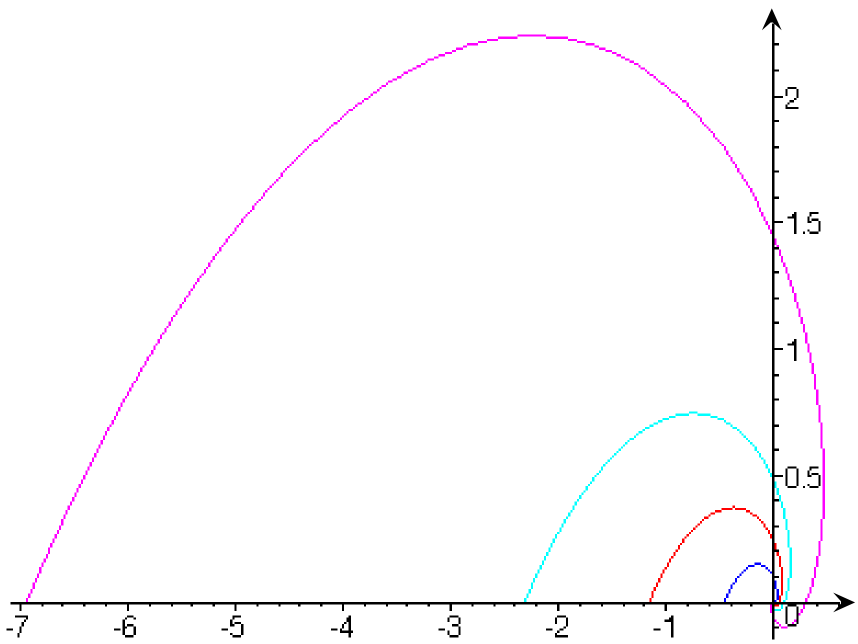
Simplificando,

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}(y/x)}$$

Expresando esta ecuación en coordenadas polares,

$$r = Ce^{\theta}$$

queda claro que las soluciones constituyen una familia de espirales logarítmicas, algunas de la cuales se muestran en la siguiente figura



$-\pi \leq \theta \leq \pi$

(C) **Diferenciales Exactas**

La expresión

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

se denomina 1–***forma diferencial*** y se identifica con el campo escalar

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Decimos que esta 1−forma diferencial es ***exacta*** en un abierto conexo D si existe una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ [7] de clase C^1 tal que

$$df = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

lo que se puede decir en la forma

$$\nabla f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Sabemos que para que esto pase (i.e., que exista f) en *necesario* que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en D. Pero esta condición no es *suficiente* a menos que este conjunto D sea simplemente conexo. [8]

Vamos a estudiar en esta sección la solución de una ecuación de la forma

$$\boxed{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0}$$

Cuando el campo $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ admita una función potencial, tendremos que

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

para una función f de clase C^1. En este caso,

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = df$$

con lo cual la ecuación que queremos resolver en el conjunto abierto y conexo D se expresa en la forma

$$df = 0$$

lo que equivale, por ser D conexo, a que f sea constante. Luego, si la forma diferencial

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

es exacta en D (i.e., $\mathbf{F}$ es un campo gradiente en D), la ecuación

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

[7] llamada ***función potencial***

[8] Esto se probará recién en la Práctica 11

tiene por solución

$$f(x,y) = C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

donde f es una función potencial de $\mathbf{F}$.

Ejemplo

$$(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0$$

En este caso,

$$P(x,y) = 2x - y \qquad \text{y} \qquad Q(x,y) = 2y - x$$

son de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$. Además,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Como esto vale en todo $\mathbb{R}^2$ (que es simplemente conexo), existe una función potencial $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

Para hallarla, integramos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = 2x - y$ respecto de x

$$f(x,y) = x^2 - yx + g(y)$$

siendo

$$g(y) = f(x,y) - x^2 + yx$$

resulta que g es derivable y además, por la otra condición,

$$2y - x = Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x + g'(y)$$

es decir,

$$g'(y) = 2y$$

de modo que

$$g(y) = y^2 + C$$

y por lo tanto,

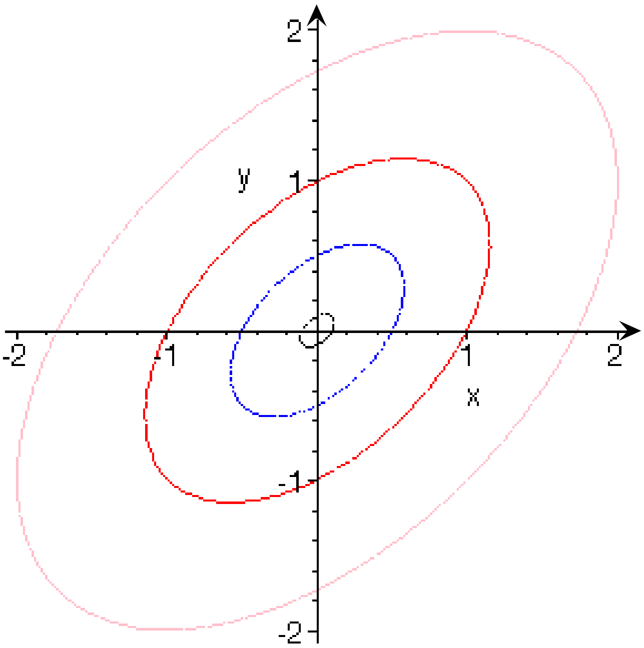
$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

Concluimos entonces que la solución de esta ecuación diferencial es el conjunto de curvas de nivel de f, i.e.,

$$x^2 - xy + y^2 = C \quad [9] \qquad (C \in \mathbb{R}_{\geqslant 0})$$

El siguiente gráfico ilustra algunas de estas curvas que, como se aprecia, son elipses cuyos ejes no son paralelos a los ejes coordenados

[9] La razón por la cual ponemos $C \geqslant 0$ es que la expresión $x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$



(D) **Factor Integrante**

Puede suceder que aún cuando $P\,dx + Q\,dy$ no sea una forma diferencial exacta sea posible encontrar una función $\mu(x, y)$ –llamada ***factor integrante***– tal que

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy$$

sí lo sea.

Notemos que mientras que μ no se anule, las ecuaciones diferenciales

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad \text{y} \qquad \mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$$

son equivalentes.

Para aplicar este método de resolución nos encontramos con dos problemas a resolver

- ❏ hallar μ que haga a $\mu P\,dx + \mu Q\,dy$ exacta
- ❏ resolver $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$

Ejemplo

$$y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$$

Comenzamos buscando μ. Llamemos

$$\tilde{P}(x, y) = y\mu(x, y) \qquad \text{y} \qquad \tilde{Q}(x, y) = (y^2 - x)\mu(x, y)$$

La condición que debe cumplir μ es

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}$$

es decir,

$$\mu + y\frac{\partial\mu}{\partial y} = -\mu + (y^2 - x)\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

En general encontrar una función que satisfaga estas condiciones es un problema aún más complicado que resolver la ecuación original (involucra derivadas parciales). Es por eso que uno suele pedir *ciertas condiciones* que faciliten el cálculo de una μ que cumpla con lo que necesitamos; por supuesto podría suceder que eso haga que no exista tal μ.

Volvamos al ejemplo que estamos analizando. Mirando la segunda condición es claro que el sumando

$$(y^2 - x)\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

complica bastante el proceso. Imponemos entonces como *condición adicional*

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} \equiv 0$$

Se trata entonces de buscar una función μ de una sola variable: $\mu = \mu(y)$. De las dos ecuaciones que teníamos quedó ahora solamente

$$y\mu' = -2\mu$$

Y esto resulta ser una ecuación diferencial de variables separadas, que ya sabemos tratar:

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{y}$$
$$\ln|\mu(y)| = 2\ln|y| + K$$
$$|\mu(y)| = y^{-2}e^K$$

i.e., $\mu \neq 0$ en todo punto; luego, por razones de continuidad resulta que debe ser

$$\mu(y) = \frac{C}{y^2}$$ [10]

Tomemos entonces como factor integrante

$$\mu(y) = y^{-2}$$

Con esto sabemos que la forma diferencial

$$\frac{1}{y}\,dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}\right)\,dy$$

es exacta (y la ecuación correspondiente equivalente a la que queríamos resolver). Aplicamos entonces el procedimiento descripto en la sección anterior para resolver

$$\frac{1}{y}\,dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}\right)\,dy = 0$$

[10] La constante C es $\pm e^K$.

Debemos hallar una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{x}{y^2}$$

Partiendo de la primera ecuación e integrando respecto de x,

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \varphi(y)$$

Siendo,

$$\varphi(y) = f(x, y) - \frac{x}{y}$$

vemos que φ es derivable para $y \neq 0$ y que además

$$\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{x}{y^2} = 1 - \frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 1$$

De modo que,

$$\varphi(y) = y + C$$

para $y \in \mathbb{R}$ (extendiéndola por continuidad a $y = 0$). Resulta entonces,

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + y$$

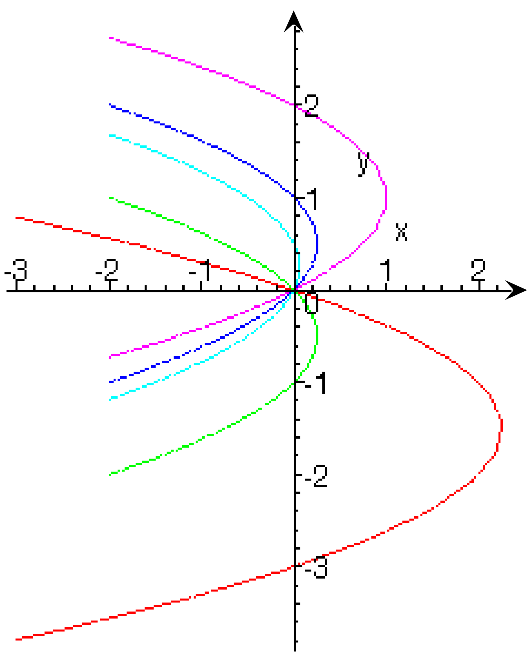
Recordando que la ecuación que acabamos de resolver es equivalente a la original, podemos decir que la solución general de esta última se expresa implícitamente por

$$\frac{x}{y} + y = C$$

Que también se puede escribir en la forma

$$x - Cy + y^2 = 0$$

En la siguiente figura se ilustran algunas de estas curvas



que *parecen* ser parábolas. De hecho lo son; basta notar que luego de completar cuadrados queda expresada en la forma

$$x = -(y + \tfrac{C}{2})^2 - \tfrac{C^2}{4}$$

i.e., parábolas de eje horizontal. Trate de averiguar, a partir del gráfico, el valor de la constante que corresponde a cada una de ellas.

(E) **Ecuaciones reducibles a homogéneas de grado 0 por cambio de variable**

Vamos a analizar dos ejemplos que nos darán la idea de cómo tratar la situación general.

Ejemplo 1

$$(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0$$

Equivale a tener

$$y' = \frac{-x - y + 2}{x - y + 4}$$

Visto de esta forma queda claro que la función del segundo miembro sería homogénea de grado 0 de no ser por el '2' del numerador y el '4' del denominador. Esto sugiere hacer un cambio de variable que *haga desaparecer* el '2' y el '4'.

Concretamente, llamemos

$$x = u + a \qquad \text{e} \qquad y = v + b$$

y averigüemos quiénes deben ser a y b. Con este cambio $y' = v'$ y la ecuación original resulta equivalente a

$$v' = \frac{-u - v - a - b + 2}{a - b + 4}$$

Es claro entonces que lo que necesitamos es

$$\begin{cases} -a - b + 2 = 0 \\ a - b + 4 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución única

$$a = -1 \qquad \text{y} \qquad b = 3$$

Resulta así que la ecuación que debemos resolver es

$$v' = \frac{-u - v}{u - v}$$

cosa que ya hicimos en el segundo ejemplo del caso de las ecuaciones diferenciales definidas por una función homogénea de grado 0 (cf. página 21). La solución que obtuvimos fue

$$\sqrt{u^2 + v^2} = Ce^{\operatorname{arctg}(v/u)}$$

lo que en términos de nuestras variables originales es

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = Ce^{\operatorname{arctg}(y-3/x+1)}$$

Ejemplo 2

$$(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$$

Si hacemos lo mismo que en el ejemplo anterior, el sistema lineal que deberíamos resolver para encontrar los valores de a y b resulta incompatible. Miremos la ecuación diferencial en esta otra forma,

$$y' = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$$

Hagamos la siguiente sustitución: $z = x + y$. Con esto tenemos

$$y = z - x \qquad , \qquad y' = z' - 1$$

y por lo tanto la ecuación toma la forma

$$z' - 1 = -\frac{z+1}{2z-1}$$

o sea,

$$z' = \frac{z-2}{2z-1}$$

Pasando de miembro y acomodando,

$$2\left(1 + \frac{3/2}{z-2}\right)z' = 1$$

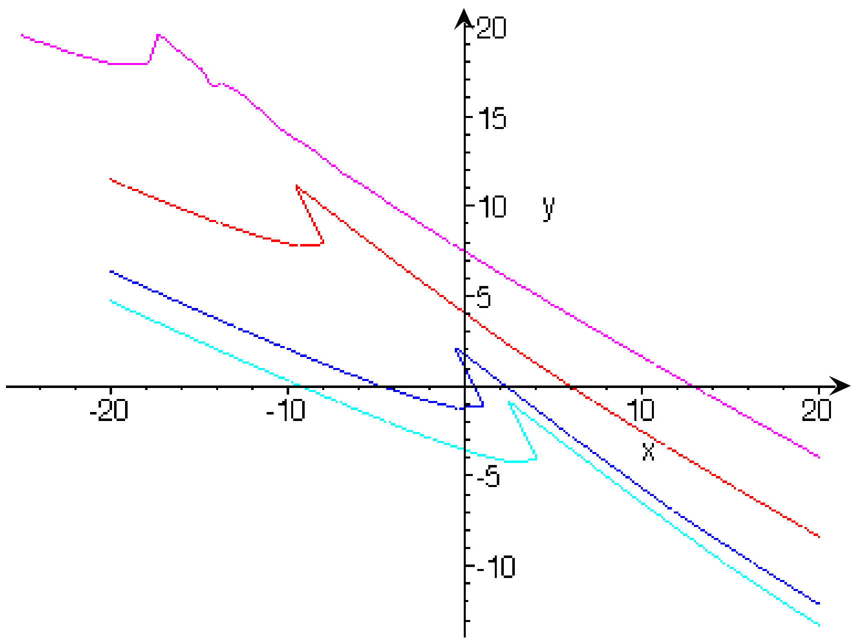
Integrando respecto de x,

$$2z + \ln|z-2| = x + C$$

Volviendo a la variable original, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$2(x+y) + 3\ln|x+y-2| - x = C$$

La siguiente figura ilustra algunas soluciones de esta ecuación diferencial



(F) **Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden**

Reciben este nombre las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2}$$

donde p y q son funciones continuas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Para resolverla vamos a hallar primero la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$y' + p(x)y = 0$$

Luego buscaremos *una* solución de (2). Finalmente, con estos datos ya estaremos en condiciones de exhibir todas las soluciones de (2).

- SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA ASOCIADA

  Claramente la función $y(x) = 0$ para todo x es solución de

$$y' + p(x)y = 0$$

  tratamos ahora de encontrar las soluciones no nulas. En tal caso podemos escribirla en la forma

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

  integrando respecto de x

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int -p(x)\,dx$$

Sea $P(x)$ una primitiva de la función continua $p(x)$. Como, por otro lado, $\ln|y(x)|$ es una primitiva de $\frac{y'}{y}$ resulta que

$$\ln|y(x)| = -P(x) + C$$

de donde,

$$|y(x)| = e^{-P(x)}e^{C}$$

Vemos que la función y no se puede anular nunca y por lo tanto, siendo continua, debe ser siempre positiva o siempre negativa; i.e.,

$$y(x) = e^{C}e^{-P(x)} \qquad \text{o} \qquad y(x) = -e^{C}e^{-P(x)}$$

Teniendo en cuenta que e^C representa cualquier número positivo, podemos expresar la solución general de la ecuación homogénea de manera única en la forma

$$\boxed{y(x) = Ke^{-P(x)}} \qquad\qquad (K \in \mathbb{R} \quad ^{11})$$

- Solución particular de la ecuación

Llamemos

$$y_1(x) = e^{-P(x)}$$

es decir, una solución de la ecuación homogénea asociada ($K = 1$). Vamos a ver que es posible encontrar una función $g(x)$ que hace que

$$f(x) = g(x)y_1(x) = g(x)e^{-P(x)}$$

sea una solución particular de la ecuación (2): pediremos que f sea solución y veremos cómo tiene que ser g. Concretamente, si f es solución

$$f'(x) + p(x)f(x) = q(x)$$

pero

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(x)y_1(x) + g(x)y_1'(x) &= g'(x)e^{-P(x)} + g(x)e^{-P(x)}(-P'(x)) \\ &= g'(x)e^{-P(x)} - g(x)e^{-P(x)}p(x) \\ &= e^{-P(x)}\left[g'(x) - g(x)p(x)\right] \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación anterior

$$e^{-P(x)}\left[g'(x) - g(x)p(x)\right] \ + \ p(x)g(x)e^{-P(x)} = q(x)$$

multiplicando miembro a miembro por $e^{P(x)}$

$$g'(x) - g(x)p(x) + p(x)g(x) = q(x)e^{P(x)}$$

de donde,

$$g'(x) = e^{P(x)}q(x)$$

Encontramos finalmente la función g integrando respecto de x

$$g(x) = \int e^{P(x)}q(x)\,dx$$

con lo cual una solución particular de la ecuación (2) es

$$f(x) = e^{-P(x)}R(x)$$

siendo R una primitiva de $e^{P(x)}q(x)$.

- SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DIFERNECIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Hasta ahora hemos conseguido resolver completamente la ecuación homogénea asociada y encontrar *una* [12] solución de la ecuación que pretendemos resolver. En realidad, aunque pueda parecer lo contrario, *ya tenemos* la solución de (2).
En efecto, supongamos que y es cualquier solución de (2) y consideremos la diferencia entre ella y f: $h = y - f$. Tenemos

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad , \qquad f' + p(x)f = q(x)$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$y' - f' + p(x)(y - f) = 0$$

o sea

$$h' + p(x)h = 0$$

lo que nos dice que h es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada; con lo cual

$$h(x) = Ke^{-P(x)}$$

y en consecuencia concluímos que la solución general de la ecuación (2) es

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= f(x) + h(x) \\ &= e^{-P(x)}R(x) + Ke^{-P(x)} \\ &= e^{-P(x)}[R(x) + K] \end{aligned}}$$

donde

$$P'(x) = p(x) \qquad , \qquad R'(x) = e^{P(x)}q(x) \qquad , \qquad K \in \mathbb{R}$$

[12] f

Observación

Si releemos lo que acabamos de hacer, notaremos que en realidad hemos probado que el conjunto S de todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$y' + p(x)y = 0$$

es un espacio vectorial de dimensión 1 y que la función

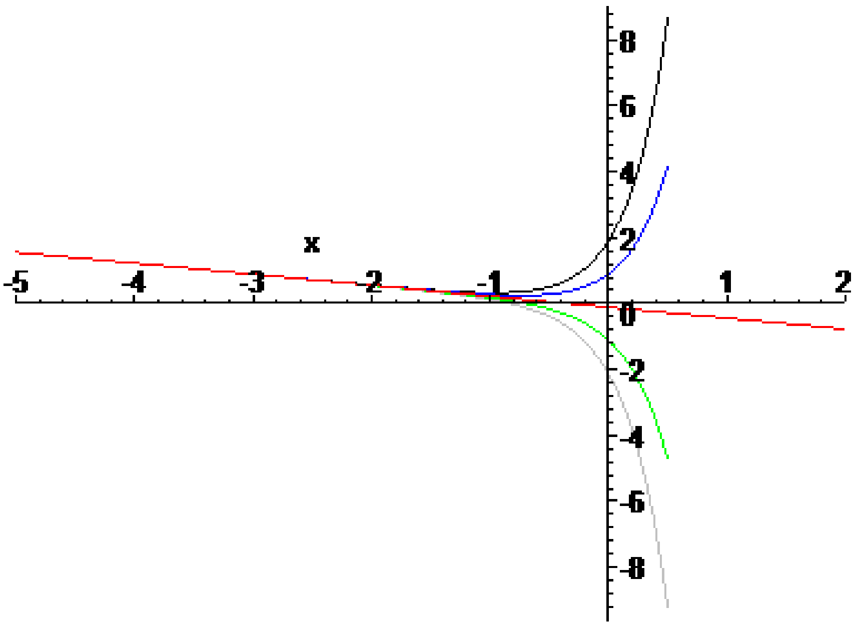
$$e^{-P(x)}$$

donde P es una primitiva de p, es una base de ese espacio.

Ejemplos

1. $y' - 3y = x$

   En este caso: $p(x) = -3$ y $q(x) = x$. Una base de la ecuación homogénea asociada es entonces
   $$e^{-P(x)} = e^{3x}$$
   pues $P(x) = -3x$ es una primitiva de p. Busquemos ahora una solución particular utilizando el resultado recién obtenido para lo cual debemos encontrar
   $$\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int e^{-3x}x\,dx$$
   Integrando por partes se llega a que una primitiva es
   $$R(x) = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}$$
   por lo cual, la solución general de la ecuación dada es
   $$y(x) = e^{3x}\left[-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x} + C\right]$$
   que se puede escribir más simplemente en la forma
   $$y(x) = -\frac{1}{9}(3x+1) + Ce^{3x}$$
   En la siguiente figura se pueden observar algunas de estas soluciones. El gráfico rojo corresponde al valor 0 de la constante C.



¿Qué sucede con estas soluciones cuando x tiende a infinito? ¿Se aprecia este hecho en el gráfico?

2. $xy' + y = x$

El coeficiente de y' en esta ecuación se anula para $x = 0$. Consideremos entonces que estamos en alguna de las semirrectas $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$. En tal caso esta ecuación es equivalente a

$$y' + \frac{1}{x}y = 1$$

En este caso

$$p(x) = \frac{1}{x} \qquad , \qquad q(x) = 1$$

por lo tanto, la función

$$e^{-P(x)} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$$

es una base de soluciones de la ecuación homogénea asociada dado que $P(x) = -\ln|x|$ es una primitiva de $p(x) = \frac{1}{x}$.

Observemos que si trabajamos en $(-\infty, 0)$ una base de soluciones de la homogénea es $-\frac{1}{x}$ y si en cambio lo hacemos en $(0, +\infty)$, esa base está dada por $\frac{1}{x}$.

Calculemos ahora la función R (primitiva de $q(x)e^{P(x)}$),

$$\int q(x)e^{P(x)}\,dx = \int e^{P(x)}\,dx = \int e^{\ln|x|}\,dx = \int |x|\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + C & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces la solución general

- en $(-\infty, 0)$ es

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{x}\left[\frac{-x^2}{2} + C\right] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

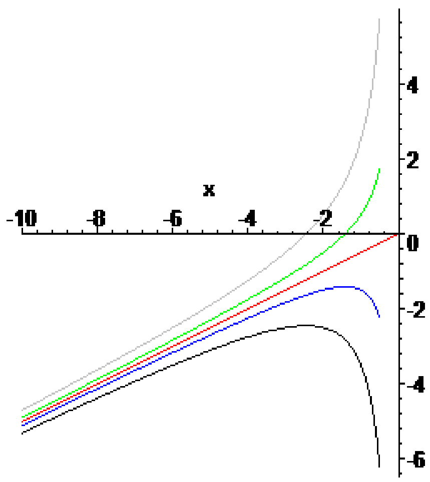
- en $(0, +\infty)$ es

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{2} + C\right] \\
&= \frac{x}{2} + \frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

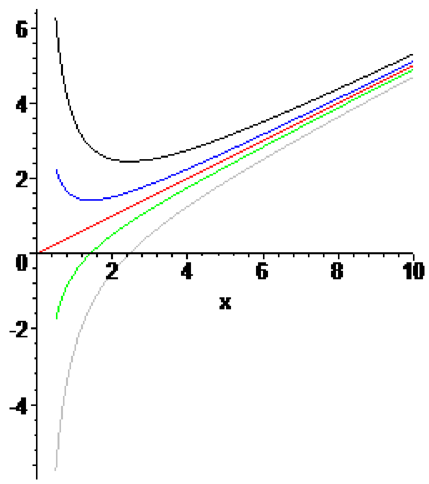
Es interesante notar que cuando tomamos $C = 0$ obtenemos la única solución que está definida en *todo* $\mathbb{R}$

$$
f(x) = \frac{x}{2}
$$

Las siguientes figuras ilustran algunas soluciones de esta ecuación para ciertos valores de la constante C. El gráfico en rojo representa la solución f mencionada arriba (la única que está definida en todo $\mathbb{R}$)



Soluciones en $R_{<0}$



Soluciones en $R_{>0}$

(G) **Problemas de Valores Iniciales**

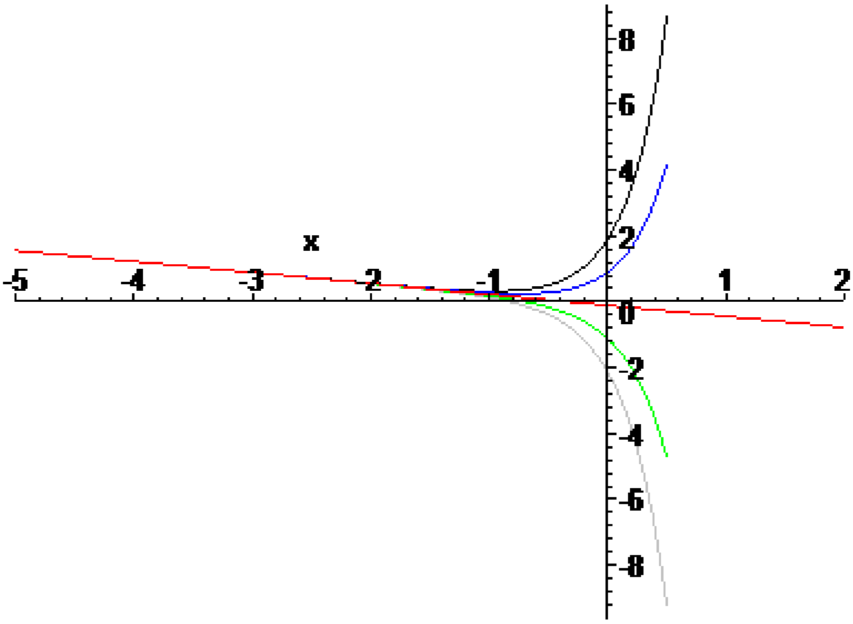
Acabamos de ver que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial primer orden es una familia de curvas. Por ejemplo, cuando estudiamos la ecuación diferencial lineal de orden 1

$$
y' - 3y = x
$$

obtuvimos que para cada valor de la constante C la función

$$
f_C(x) = -\frac{1}{9}(3x + 1) + Ce^{3x}
$$

es solución y además estas funciones son las únicas que la satisfacen. Recordemos el gráfico de algunas de ellas



Es claro que el valor de C queda determinado pidiéndole a la solución que pase por un punto específico. Por ejemplo, si pedimos que y sea solución y que su gráfico pase por el punto $(0, 2)$ obtenemos

$$y(x) = -\frac{1}{9}(3x + 1) + Ce^{3x} \qquad \text{(por ser solución)}$$

y

$$2 = y(0) = -\frac{1}{9} + C \qquad \text{(por tener que pasar su gráfico por } (0, 2))$$

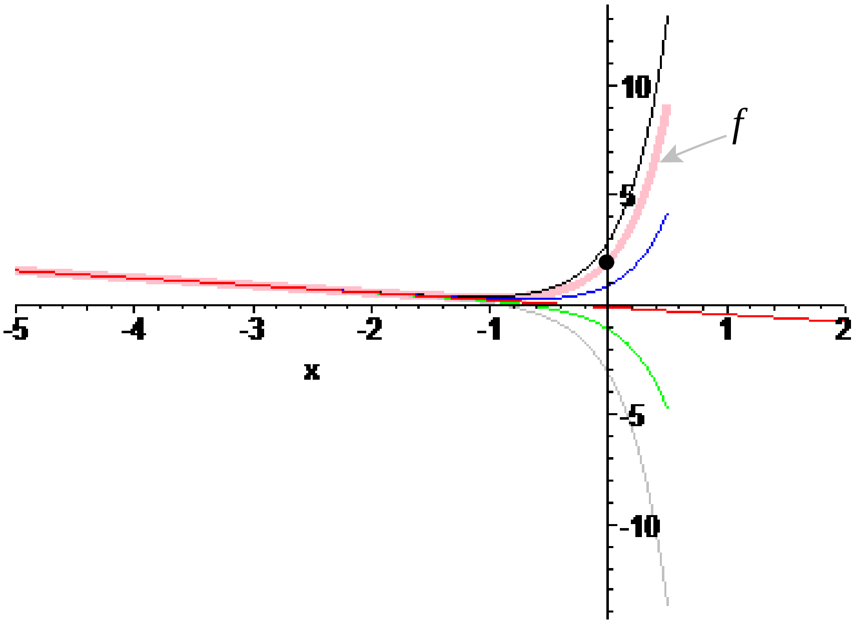
de donde,

$$C = \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9}$$

Es decir, por el punto $(0, 2)$ del plano pasa una *única solución* de esta ecuación

$$f(x) = -\frac{1}{9}(3x + 1) + \frac{19}{9}e^{3x}$$

En el siguiente gráfico la destacamos



A esta cuestión de *encontrar una solución que pase por un punto específico* se la llama ***problema de valores iniciales*** y se la suele expresar en la forma

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) & \\ y(x_0) = y_0 & \qquad \text{(condición inicial)} \end{cases}$$