PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS E INGENIERÍA

CÁLCULO AVANZADO

LORD LIVIN BARRERA BOCANEGRA

BUENOS AIRES - ARGENTINA

2010

Lord Livin Barrera Bocanegra
lbarrerab@unmsm.edu.pe
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas e Ingeniería
Pontificia Universidad Católica Argentina
Av Alicia Moreau de Justo
Buenos Aires - Argentina

Cálculo Vectorial

Edición a cargo: Fondo Editorial UCA

Buenos Aires, marzo de 2010

Primera edición

Tiraje: 000 ejemplares

ISBN: 000-0000-00-000-0

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional Argentina: 2010-00000

Impreso en Argentina

Printed in Argentina

Tipeado por el autor en LaTeX

Dedico este libro a mis Padres, con mucho amor

Índice

Prefacio

El presente libro consiste de las notas de curso de Cálculo Avanzado, dictado en la Pontificia Universidad Católica Argentina durante el año 2009. El orden de los contenidos está adaptado al programa cuatrimestral.

Fueron muchos los colaboradores que participaron en este trabajo, a todos ellos mi más rendido agradecimiento.

Lord Livin Barrera Bocanegra

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas e Ingeniería
Pontificia Universidad Católica Argentina
Buenos Aires - Argentina
Marzo, 2010

Introducción

El álgebra describe la geometría, mientras que la geometría dibuja el álgebra.

Sophie Germain

bla bla bla...

Capítulo 1

Álgebra Vectorial

En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de vectores en el plano y el espacio, las que serán suficientes para ser utilizadas a lo largo de todo el libro. Desarrollaremos el álgebra de vectores, relacionándolo con el concepto general de espacio vectorial, sin dejar de lado los aspectos geométricos que serán de mucha ayuda para visualizar mejor los conceptos. También veremos rectas y planos en el espacio, este último siendo parte de las superficies cuádricas que veremos en la sección 1.6.

1.1 Vectores en el Plano y el Espacio

El *plano euclideano* es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Representamos un elemento $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ como en la figura

La coordenada x_0 se llama *abscisa*, mientras que y_0 es la *ordenada*. El elemento $(0,0)$ es llamado *origen de coordenadas.*

Similarmente tenemos el *espacio euclideano*

$$\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z) \,:\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

Un elemento $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ es representado geométricamente como sigue

En este caso, el origen de coordenadas es $(0,0,0)$.

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ son llamados *puntos* o *vectores*; el primer concepto siendo geométrico, mientras que el segundo concepto es más físico. Como puntos representamos tales elementos por las letras $A, B, C, \ldots, etc$, y como vectores denotamos por las letras $u, v, w \ldots, etc$.

Definición 1.1.1. Dados los vectores $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$, la *suma* de u con v es

$$u + v := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Geométricamente:

De manera similar definimos la *suma* de $u = (x_1, y_1, z_1)$ con $v = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$ mediante

$$u + v := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Ejemplo 1.1.1. Calcular $(-3, 5) + (4, 7)$ y $(-3, 5, -2) + (1, 7, 6)$. En efecto

$$(-3, 5) + (4, 7) = (-3 + 4, 5 + 7) = (1, 12),$$

también

$$(-3, 5, -2) + (1, 7, 6) = (-3 + 1, 5 + 7, -2 + 6) = (-2, 12, 4).$$

Definición 1.1.2. Dado $a \in \mathbb{R}$ y $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, el *producto escalar* de a con v es

$$a.(x, y) := (ax, ay).$$

Geométricamente:

Similarmente definimos el *producto escalar* de $a \in \mathbb{R}$ con $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como sigue

$$a.(x, y, z) := (ax, ay, az).$$

Observación 1.1.1. Por lo general denotamos

$$a(x, y) := a.(x, y) \quad \text{y} \quad a(x, y, z) := a.(x, y, z).$$

También hacemos

$$-(x, y) := (-x, -y) \quad \text{y} \quad (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

en el caso de $\mathbb{R}^3$ se tiene $-(x, y, z) := (-x, -y, -z)$ y

$$(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

También denotamos el origen de coordenadas $(0, 0)$ o $(0, 0, 0)$ por 0.

Ejemplo 1.1.2. Calcular $2(6,-3)+3(2,5)$. En efecto

$$2(6,-3)+3(2,5)=(12,-6)+(6,15)=(18,9).$$

De acuerdo al álgebra lineal, las operaciones definidas en las definiciones 1.1.1 y 1.1.2 convierten a $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial como resume el siguiente teorema

Teorema 1.1.3. *Dados los vectores u, v, w y escalares a, b. Entonces*

(a) $(u+v)+w=u+(v+w)$.

(b) $v+w=w+v$.

(c) $v+0=v=0+v$.

(d) $v+(-v)=0$.

(e) $a(bv)=(ab)v$.

(f) $1v=v$.

(g) $a(v+w)=av+aw$.

(h) $(a+b)v=av+bv$.

Demostración. Ejercicio. □

A continuación interpretaremos geométricamente vectores en $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1.3. Un par de puntos es llamado *vector geométrico* si uno de los puntos, digamos A es el *punto inicial*, y el otro B es el *punto final*. Visualizamos un vector geométrico como una flecha de A a B como muestra la siguiente figura y lo denotamos por el símbolo $\overrightarrow{AB}$.

Sabemos que $v = u + \overrightarrow{AB}$. Luego

$$\overrightarrow{AB} = v - u = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = B - A.$$

Vectores geométricos son convenientes para representar cantidades físicas que poseen longitud y dirección tales como la fuerza, velocidad o aceleración.

La figura anterior muestra dos vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ con $B - A = D - C$. En términos de coordenadas esto significa que

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \qquad \text{y} \qquad b_2 - a_2 = d_2 - c_2$$

Comparando los triángulos congruentes en la figura anterior, vemos que las flechas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen igual longitud, son paralelos y apuntan en la misma dirección. Tales vectores son llamados *equivalentes*, esto es

$$\overrightarrow{AB} \text{ es equivalente a } \overrightarrow{CD} \text{ si y sólo si } B - A = D - C$$

La interpretación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^n$ sugiere que podemos definir paralelismo de vectores

Definición 1.1.4. Dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ tienen la *misma dirección* si $u = av$ para algún escalar positivo a, y tienen dirección opuesta si $u = av$ para algún escalar negativo a. Ellos son llamados *paralelos* si $u = av$ para algún escalar no nulo, denotamos por $u \parallel v$ para indicar que u y v son paralelos.

Veamos esto gráficamente:

Observación 1.1.2. De acuerdo a la definición vemos que el vector nulo es el único vector que tiene la misma dirección a su opuesto. También, el vector nulo es el único vector paralelo a si mismo.

Definición 1.1.5. (Norma). La *norma* del vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es el número

$$\|v\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De manera similar, la *norma* de $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se define

$$\|v\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Un vector de norma 1 es llamado *vector unitario*.

Observación 1.1.3. Recordemos del álgebra lineal que la norma tiene las siguientes propiedades: dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$

(a) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.

(b) $\|av\| = |a|\|v\|$.

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular).

Ejemplo 1.1.4. La norma de $(3, 4) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

mientras que la norma de $(-1, 0, 2)$ es

$$\|(-1, 0, 2)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Definición 1.1.6. (Distancia). Dados los puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$, se define la *distancia* entre P y Q como

$$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$$

Ejemplo 1.1.5. Si $P = (-1, 0)$ y $Q = (2, 5)$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \|(2,5) - (-1,0)\| = \|(3,5)\| = \sqrt{34}.$$

Ejemplo 1.1.6. Si $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (0, -1, 2)$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q-P\| = \|(0,-1,2)-(1,2,3)\| = \|(-1,-3,-1)\| = \sqrt{11}.$$

Observación 1.1.4. Si en el plano $\mathbb{R}^2$ denotamos $\widehat{\imath} := (1, 0)$ y $\widehat{\jmath} := (0, 1)$, podemos escribir

$$(x, y) := x(1, 0) + y(0, 1) = x\widehat{\imath} + y\widehat{\jmath}.$$

Similarmente, denotando en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\widehat{\imath} := (1, 0, 0)$, $\widehat{\jmath} := (0, 1, 0)$ y $\widehat{k} := (0, 0, 1)$ tenemos

$$(x, y, z) := x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\widehat{\imath} + y\widehat{\jmath} + z\widehat{k}.$$

1.2 Producto Interno

Definición 1.2.1. Dados los vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definimos el *producto interno* de u con v por

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Similarmente, para vectores $u = (u_1, u_2, u_2)$ y $v = (v_1, v_2, v_2)$ en $\mathbb{R}^3$, el *producto interno* de u con v es

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Debemos notar que para cualquier vector v, se tiene $v.v = \|v\|^2$.

Ejemplo 1.2.1. Si $u = (-1, 2)$ y $v = (3, 3)$, entonces

$$u.v = (-1)(3) + (2)(3) = 3.$$

Definición 1.2.2. (Ángulo entre dos vectores). El ángulo entre dos vectores no nulos con el mismo punto inicial, es el mas pequeño ángulo entre ellos. Se sigue entonces que si θ es el ángulo entre dichos vectores, $0 \leq \theta \leq 180°$ como indica la siguiente figura

Teorema 1.2.2. *Sean v y w vectores no nulos, y sea θ el ángulo entre ellos. Entonces*

$$cos\theta = \frac{v.w}{\|v\|\|w\|}$$

Demostración. Haremos la demostración para vectores en $\mathbb{R}^3$ (la prueba para $\mathbb{R}^2$ es similar). Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por la ley de cosenos (ver figura abajo) tenemos

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|cos\theta \tag{1.2.1}$$

(Notemos que la ecuación (1.2.1) se tiene para los casos "degenerados", es decir, $\theta = 0$ y $\theta = 180°$).

Desde que $v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$, desarrollando $\|v - w\|^2$

en la ecuación (1.2.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| cos\theta &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 \\
&= (v_1^2 - 2v_1w_1 + w_1^2) + (v_2^2 - 2v_2w_2 + w_2^2) + (v_3^2 - 2v_3w_3 + w_3^2) \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - 2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v.w)
\end{aligned}$$

De donde conseguimos $-2\|v\|\|w\| cos\theta = -2(v.w)$, y desde que $v \neq 0$ y $w \neq 0$

$$cos\theta = \frac{v.w}{\|v\|\|w\|}$$

como queríamos probar. □

Ejemplo 1.2.3. Hallar el ángulo θ entre los vectores $v = (2, 1, -1)$ y $w = (3, -4, 1)$. En efecto, desde que $v.w = (2)(3) + +(1)(-4) + (-1)(1) = 1$, $\|v\| = \sqrt{6}$ y $\|w\| = \sqrt{26}$, entonces

$$cos\theta = \frac{v.w}{\|v\|\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \frac{1}{2\sqrt{39}} \approx 0.08 \quad \Rightarrow \quad \theta = 85.41^\circ$$

Definición 1.2.3. Dos vectores no nulos son *perpendiculares* si el ángulo entre ellos es 90°. Denotamos por $v \perp w$ para indicar que v y w son perpendiculares.

Desde que $cos 90^0 = 0$ tenemos el siguiente corolario

Corolario 1.2.4. *Dos vectores no nulos v y w son perpendiculares si y sólo si $v.w = 0$.*

Desde que $cos\theta > 0$ para $0 \leq \theta < 90^\circ$ y $cos\theta < 0$ para $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, tenemos:

Corolario 1.2.5. *Si θ es el ángulo entre los vectores no nulos v y w, entonces*

$$v.w \quad es \quad \begin{cases} > 0, & si \;\; 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \\ \;\; 0, & si \;\; \theta = 90^\circ \\ < 0, & si \;\; 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.6. Los vectores $u = (-1, 5, -2)$ y $v = (3, 1, 1)$ son perpendiculares, pues

$$u.v = (-1)(3) + (5)(1) + (-2)(1).$$

El siguiente teorema resume las propiedades básicas del producto interno

Teorema 1.2.7. *Para cualquier terna de vectores u, v, w y cualquier escalar $a \in \mathbb{R}$ se cumplen:*

(a) $v.w = w.v$.

(b) $(av).w = v.(aw) = a(v.w)$.

(c) $v.0 = 0 = 0.v$.

(d) $u.(v + w) = u.v + u.w$.

(e) $(u + v).w = u.w + v.w$.

(f) $|v.w| \leq \|v\|\|w\|$ (desigualdad de Cauchy - Schwartz).

Demostración. Viene del álgebra lineal. $\square$

Observación 1.2.1. Usando el teorema anterior vemos que si $u.v = 0$ y $u.w = 0$, entonces $u.(av + bw) = a(u.v) + b(u.w) = a(0) + b(0) = 0$ para todos los escalares a, b. Por tanto tenemos lo siguiente

$$\text{Si } \; u \perp v \; \text{ y } \; u \perp w, \; \text{ entonces } \; u \perp (av + bw) \;\; \forall \;\; a, b \in \mathbb{R} \qquad (1.2.2)$$

Para dos vectores v y w, la colección de todas las *combinaciones lineales* $ab + bw$ es llamada *subespacio generado* por v y w. Si dos vectores no nulos v y w son paralelos, entonces generan una recta; mientras que si no son paralelos, ellos generan un plano (ver sección 1.5). Así que la relación (1.2.2) muestra que un vector perpendicular a otros dos, también es perpendicular al subespacio generado.

Definición 1.2.4. (Proyecciones). Sean u y v vectores no nulos como indica la figura Sabemos que $u.v = \|u\|\|v\|cos\theta$, que implica $\|v\|cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|}$.

El número

$$comp_u v := \frac{u.v}{\|u\|}$$

es llamado *proyección escalar* de v sobre u. El vector dirigido

$$proy_u v := \frac{u.v}{\|u\|}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{(u.v)u}{\|u\|^2}$$

se llama *proyección vectorial* de v sobre u.

Ejemplo 1.2.8. Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de v sobre u, donde $u = (-2, 3, 1)$ y $v = (1, 1, 2)$. En efecto

$$comp_u v = \frac{u.v}{\|u\|} = \frac{(-2)(1) + (3)(1) + (1)(2)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

también

$$proy_u v = \frac{(u.v)u}{\|u\|^2} = \frac{3}{\sqrt{14}}\frac{(-2,3,1)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{14}(-2,3,1).$$

1.3 Producto Vectorial

Definición 1.3.1. Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. El *producto vectorial* de v y w, denotado por $v \times w$ es el vector en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Ejemplo 1.3.1. Calcular $\widehat{i} \times \widehat{j}$. En efecto, desde que $\widehat{i} = (1, 0, 0)$ y $\widehat{j} = (0, 1, 0)$, entonces

$$\widehat{i} \times \widehat{j} = ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \widehat{k}$$

Similarmente se consigue $\widehat{j} \times \widehat{k} = \widehat{i}$ y $\widehat{k} \times \widehat{i} = \widehat{j}$.

Teorema 1.3.2. *Si el producto vectorial $v \times w$ de dos vectores no nulos v y w es también un vector no nulo, entonces este es perpendicular a v y w.*

Demostración. Mostraremos que $(v \times w).v = 0$. En efecto

$$\begin{aligned}(v \times w).v &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).(v_1, v_2, v_3)\\ &= v_2w_3v_1 - v_3w_2v_1 + v_3w_1v_2 - v_1w_3v_2 + v_1w_2v_3 - v_2w_1v_3\\ &= v_1v_2w_3 - v_1v_2w_3 + w_1v_2v_3 - w_1v_2v_3 + v_1w_2v_3 - v_1w_2v_3\\ &= 0.\end{aligned}$$

y por el corolario 1.2.4 se tiene $v \times w \perp v$. Similarmente se consigue $v \times w \perp w$. $\square$

Observación 1.3.1. Según el teorema anterior y la observación 1.2.1, el producto vectorial $v \times w$ de dos vectores no nulos v y w es también un vector no nulo; además este es perpendicular al subespacio generado por v y w.

Proposición 1.3.3. *Si θ es el ángulo entre vectores no nulos $v, w \in \mathbb{R}^3$, entonces*

$$\|v \times w\| = \|v\|\|w\| sen\theta.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}\|v \times w\|^2 &= (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2 \\ &= v_2^2w_3^2 - 2v_2w_2v_3w_3 + v_3^2w_2^2 + v_3^2w_1^2 - 2v_1w_1v_3w_3 + v_1^2w_3^2 \\ &\quad + v_1^2w_2^2 - 2v_1w_1v_2w_2 + v_2^2w_1^2 \\ &= v_1^2(w_2^2 + w_3^2) + v_2^2(w_1^2 + w_3^2) + v_3^2(w_1^2 + w_2^2) \\ &\quad - 2(v_1w_1v_2w_2 + v_1w_1v_3w_3 + v_2w_2v_3w_3)\end{aligned}$$

Ahora sumamos y restamos $v_1^2w_1^2$, $v_2^2w_2^2$ y $v_3^2w_3^2$ al lado derecho para obtener

$$\begin{aligned}&= v_1^2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + v_2^2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + v_3^2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &\quad - \big((v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2) + 2(v_1w_1v_2w_2 + v_1w_1v_3w_3 + v_2w_2v_3w_3)\big) \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - \big((v_1w_1)^2 + (v_2w_2)^2 + (v_3w_3)^2 + \\ &\quad + 2(v_1w_1)(v_2w_2) + 2(v_1w_1)(v_3w_3) + 2(v_2w_2)(v_3w_3)\big)\end{aligned}$$

Usando ahora la igualdad $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, obtenemos

$$\begin{aligned}&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2 \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - (v.w)^2 \\ &= \|v\|^2\|w\|^2(1 - \frac{(v.w)^2}{\|v\|^2\|w\|^2}) \\ &= \|v\|^2\|w\|^2(1 - cos^2\theta) \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 sen^2\theta\end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta \leq 180$, $sen\theta \geq 0$. Por tanto $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| sen\theta$. $\square$

Ejemplo 1.3.4. Sean $\triangle PQR$ y $PQRS$ un triángulo y un paralelogramo, respectivamente, como muestra la siguiente figura

Podemos pensar de dicho triángulo en $\mathbb{R}^3$ e identificar los lados QR y QP con los vectores v y w, respectivamente en $\mathbb{R}^3$. Sea θ el ángulo entre v y w. El área A_{PQR} de $\triangle PQR$ es $\frac{1}{2}bh$, donde b es la base del triángulo y h es su altura. Vemos que

$$b = \|v\| \quad \text{y} \quad h = \|w\| sen\theta$$

Además

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}\|v\|\|w\| sen\theta = \frac{1}{2}\|v \times w\|.$$

Luego, desde que el área A_{PQRS} del paralelogramo $PQRS$ es dos veces el área del triángulo $\triangle PQR$, se sigue

$$A_{PQRS} = \|v\|\|w\| sen\theta.$$

Del ejemplo anterior deducimos el siguiente teorema

Teorema 1.3.5. (Área de triángulos y paralelogramos). *Se cumplen:*

(a) *El área A de un triángulo con lados adyacentes v, w (como vectores en $\mathbb{R}^3$) es*

$$A = \frac{1}{2}\|v \times w\|.$$

(b) *El área A de un paralelogramo con lados adyacentes v, w (como vectores en $\mathbb{R}^3$) es*

$$A = \|v \times w\|.$$

Ejemplo 1.3.6. Calcular el área del triángulo $\triangle PQR$, donde $P = (2, 4, -7)$, $Q = (3, 7, 18)$ y $R = (-5, 12, 8)$.

Solución: Sea $u = \overrightarrow{PQ}$ y $v = \overrightarrow{PR}$ como muestra la figura abajo.

Entonces $u = (3, 7, 18) - (2, 4, -7) = (1, 3, 25)$ y $v = (-5, 12, 8) - (2, 4, -7) = (-7, 8, 15)$. Si A es el área, entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\|u \times v\| = \frac{1}{2}\|(1, 3, 25) \times (-7, 8, 15)\| \\ &= \frac{1}{2}\|(-155, -190, 29)\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{60966} \\ &\approx 123.46 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.7. Calcular el área del paralelogramo $PQRS$, donde $P = (1, 1)$, $Q = (2, 3)$, $R = (5, 4)$ y $S = (4, 2)$.

Veamos esto. Sea $u = \overrightarrow{SP}$ y $v = \overrightarrow{SR}$ como muestra la figura abajo.

Entonces $u = (1, 1) - (4, 2) = (-3, -1)$ y $v = (5, 4) - (4, 2) = (1, 2)$. Podemos pensar de u y v como vectores en $\mathbb{R}^3$, es decir, $u = (-3, -1, 0)$ y $v = (1, 2, 0)$. Si A es el área del paralelogramo, entonces

$$\begin{aligned} A &= \|u \times v\| = \|(-3, -1, 0) \times (1, 2, 0)\| \\ &= \|(0, 0, -5)\| \\ &= 5. \end{aligned}$$

El siguiente teorema resume las propiedades básicas del producto vectorial

Teorema 1.3.8. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $a \in \mathbb{R}$. Se cumplen:*

(a) $u \times v = -v \times u$.

(b) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

(c) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.

(d) $(av) \times w = v \times (aw) = a(v \times w)$.

(e) $u \times 0 = 0 = 0 \times u$.

(f) $u \times u = 0$.

(g) $u \times v = 0$ *si y sólo si* $u \parallel v$.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 1.3.9. (Volumen de un paralelepipedo). Sean u, v, w vectores en $\mathbb{R}^3$ los cuales representan lados adyacentes de un paralelepípedo P como en la figura abajo.

Veamos que el volumen de P está dado por el número $u.(v \times w)$. En efecto, recordemos que el volumen de un paralelepípedo es el área A de la base (que es un paralelogramo) por la altura h. Por el teorema 1.3.5, el área A de la base paralelogramo es $\|v \times w\|$, y desde que $v \times w$ es perpendicular a la base paralelogramo determinado por v y w, entonces la altura h es $\|u\| cos\theta$, donde θ es el ángulo entre u y $v \times w$. Por el teorema 1.2.2 sabemos que

$$cos\theta = \frac{u.(v \times w)}{\|u\|\|v \times w\|}$$

de aquí

$$vol(P) = Ah = \|v \times w\| \frac{\|u\| u.(v \times w)}{\|u\|\|v \times w\|} = u.(v \times w).$$

Observación 1.3.2. Desde que el volumen es el mismo sin importar cual es la base y la altura, podemos repetir los mismos pasos usando la base determinada por u y v y obtener el volumen $w.(u \times v)$. Repitiendo esto con la base determinada por w y u tenemos como volumen $v.(w \times u)$. En conclusión

$$u.(v \times w) = w.(u \times v) = v.(w \times u).$$

Teorema 1.3.10. *Si los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ representan los tres lados adyacentes de un paralelepípedo, entonces su volumen está dado por $|u.(v \times w)|$.*

Teorema 1.3.11. *Dados los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$*

$$u \times (v \times w) = (u.w)v - (u.v)w$$

Demostración. Ejercicio. □

En esta última parte vamos a asociar las coordenadas del producto vectorial $v \times w$ con los términos de un determinante.

Definición 1.3.2. Recordemos que una *matriz de orden* 2×2 es un ordenamiento de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. El *determinante* de tal matriz es el número

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc.$$

Ejemplo 1.3.12.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (7)(4) - (3)(5) = 13.$$

Definición 1.3.3. Una *matriz de orden* 3×3 es un ordenamiento que consiste de tres filas y tres columnas

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

El *determinante* de tal matriz es el número

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1.3.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-2-0)-0(8-3)+2(0+1) = 0.$$

Definición 1.3.4. Ya vimos el determinante de una matriz cuyas entradas son escalares. Si colocamos tres vectores en la primera fila de una matriz de orden 3×3, entonces la definición tiene sentido ya que en lugar de multiplicar números reales lo que hacemos es el producto escalar de un número real por un vector. Esto nos da un determinante el cual es ahora un vector. Más precisamente, si $v = v_1\widehat{i} + v_2\widehat{j} + v_3\widehat{k}$ y $w = w_1\widehat{i} + w_2\widehat{j} + w_3\widehat{k}$, definimos

$$\begin{aligned} v \times w &= \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \widehat{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_3 & w_3 \end{vmatrix} \widehat{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \widehat{k} \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)\widehat{i} - (v_3w_1 - v_1w_3)\widehat{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\widehat{k}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.14. Sea $v = 4\widehat{i} - \widehat{j} + 3\widehat{k}$ y $w = \widehat{i} + 2\widehat{k}$. Entonces

$$v \times w = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \widehat{i} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \widehat{j} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \widehat{k} = -2\widehat{i} - 5\widehat{j} + \widehat{k}.$$

Teorema 1.3.15. *Dados los vectores* $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ *en* $\mathbb{R}^3$, *se tiene*

$$u.(v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

Ejemplo 1.3.16. Calcular el volumen del paralelepipedo P con lados adyacentes los vectores $u = (2, 1, 3)$, $v = (-1, 3, 2)$ y $w = (1, 1, -2)$.

Solución: por el teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned} u.(v \times w) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\widehat{i} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\widehat{j} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\widehat{k} \\ &= 2(-8) - 1(0) + 3(-4) = -28. \end{aligned}$$

Luego $vol(P) = |-28| = 28$.

1.4 Geometría Analítica Plana

Definición 1.4.1. (Circunferencia). *La circunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano, de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo del plano.

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia y la distancia constante se llama *radio*. Formalmente, si (h,k) es el centro y r el radio, tenemos

$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)-(h,k)\| = r\}.$$

Otra manera de expresar es haciendo

$$\mathcal{C} : \qquad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{1.4.3}$$

O sea, conociendo el centro y el radio podemos obtener la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 1.4.1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(1,2)$ y radio 3.

Solución: tenemos $h=1$, $k=2$ y $r=3$. Luego

$$\mathcal{C} : \qquad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2.$$

Desarrollando la ecuación (1.4.3) tenemos

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

reordenando tenemos

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2+k^2-r^2) = 0$$

y haciendo $D=-2h$, $E=-2k$, y $F=h^2+k^2-r^2$ conseguimos

$$\mathcal{C} : \qquad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.4.4}$$

que se llama *ecuación general* de la circunferencia.

Veamos ahora como recuperar la ecuación (1.4.3) a partir de (1.4.4). La ecuación (1.4.4) es equivalente a

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

que implica

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4} = \left(\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}\right)^2$$

Si $D^2+E^2-4F > 0$ obtenemos entonces una circunferencia de radio $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ y centro $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

Ejemplo 1.4.2. Calcular el centro y radio de la siguiente circunferencia

$$\mathcal{C}: \qquad x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

Solución: completando cuadrados tenemos

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

O sea que el centro es $C = (1, -2)$ y el radio $r = 2$.

Definición 1.4.2. (Parábola). La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano, de tal manera que la distancia a una recta fija situada en el plano es siempre igual que la distancia a un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

La recta $\mathcal{L}$ se llama *recta directriz*, F es el foco, V el vértice y $\mathcal{L}'$ el eje focal.

Veamos a continuación como se obtiene la ecuación de la parábola:

Sea p la distancia del vértice V a la recta $\mathcal{L}$. Podemos suponer que el eje focal es paralelo al eje x. Tenemos

$$x - h + p = \sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2}$$

y elevando al cuadrado

$$\big((x - h) + p\big)^2 = \big((x - h) - p\big)^2 + (y - k)^2$$

o también

$$\big((x - h) + p\big)^2 - \big((x - h) - p\big)^2 = (y - k)^2$$

de donde se tiene

$$4p(x - h) = (y - k)^2$$

Concluímos de aquí que la ecuación de una parábola con eje focal paralelo al eje x es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Gráficamente tenemos los siguientes casos:

Imitando el argumento dado antes podemos obtener la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje y

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

y gráficamente tenemos los siguientes casos

Ejemplo 1.4.3. Localizar el vértice y el foco; deduzca la ecuación de la directriz de la parábola y trace su gráfico.

$$\mathcal{P}: \qquad (x+2)^2 = 8(y-3)$$

Solución:

Definición 1.4.3. (Elipse).

Definición 1.4.4. (Hipérbola). La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano, de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Tenemos

$$\begin{aligned} C :& \quad \text{centro} \\ F, F' :& \quad \text{focos} \\ V, V' :& \quad \text{vértices} \\ \mathcal{L} :& \quad \text{eje focal} \\ \mathcal{L}' :& \quad \text{eje normal} \\ L, L' :& \quad \text{rectas asíntotas} \end{aligned}$$

1.5 Rectas y Planos en $\mathbb{R}^3$

Definición 1.5.1. Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo y $v = (a, b, c)$ un vector no nulo. La recta $\mathcal{L}$ pasando por P con vector dirección v es el conjunto

$$\mathcal{L} : \qquad X = P + tv, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.5.5}$$

Más explícitamente, si $X = (x, y, z)$ es un punto general sobre la recta $\mathcal{L}$, entonces

$$\mathcal{L} : \qquad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.5.6}$$

Las ecuaciones (1.5.5) y (1.5.6) se llaman *representaciones vectoriales* de la recta $\mathcal{L}$.

Geométricamente:

Tenemos así que $\overrightarrow{PX} = tv$ para algún punto $t \in \mathbb{R}$. De la relación (1.5.6) conseguimos las ecuaciones

$$\mathcal{L}: \qquad x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc, \quad \text{donde} \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.5.7}$$

estas ecuaciones son llamadas *representación paramétrica* de la recta $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1.5.1. Determinar la ecuación paramétrica de la recta $\mathcal{L}$ pasando por el punto $P = (1, -1, 2)$ con vector dirección el vector $v = (1, 1, 1)$.

Solución:

$$\mathcal{L}: \qquad (x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, 1, 1) = (1 + t, -1 + t, 2 + t).$$

Observación 1.5.1. Si en (1.5.7) los escalares a, b, c son todos no nulos, podemos escribir

$$\mathcal{L}: \qquad \frac{x - x_0}{a}, \quad \frac{y - y_0}{b}, \quad \frac{z - z_0}{c}, \quad \text{donde} \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.5.8}$$

estas ecuaciones se llaman *representación simétrica o cartesiana* de la recta $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1.5.2. Determinar la ecuación de la recta (en sus tres formas si es posible) pasando por los puntos $P = (2, 5, -3)$ y $Q = (1, 3, 7)$.

Solución: Hagamos el gráfico de la recta $\mathcal{L}$ pasando por los puntos P y Q

Tenemos $v = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,3,7) - (2,5,-3) = (-1,-2,10)$. De donde

$$\mathcal{L}: \qquad (x,y,z) = (2,5,-3) + t(-1,-2,10).$$

Definición 1.5.2. (Distancia de un punto a una recta). Sea $\mathcal{L}$ la recta en $\mathbb{R}^3$ dada en su forma vectorial

$$\mathcal{L}: \qquad X = P + tv, \qquad t \in \mathbb{R}$$

y consideremos un punto $Q \notin \mathcal{L}$, tomemos el vector $w = \overrightarrow{PQ}$. Si θ es el ángulo entre v y w, tenemos

$$d = \|w\| sen\theta$$

Además, desde que $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| sen\theta$ y $v \neq 0$, conseguimos

$$d = \|w\| sen\theta = \frac{\|v \times w\|}{\|v\|}.$$

llamado *distancia* del punto Q a la recta $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1.5.3. Hallar la distancia d del punto $Q = (1, 1, 1)$ a la recta

$$\mathcal{L} : \qquad (x, y, z) = (-3, 1, -4) + t(7, 3, -2).$$

Solución: graficando tenemos

Sea $P = (-3, 1, -4)$ y $v = (7, 3, -2)$. Desde que $P \in \mathcal{L}$, sea $w = \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) - (-3, 1, -4) = (4, 0, 5)$. Entonces

$$v \times w = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 7 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \widehat{i} - \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \widehat{j} + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \widehat{k}.$$

Luego

$$d = \frac{\|v \times w\|}{\|v\|} = \frac{\|15\widehat{i} - 43\widehat{j} - 12\widehat{k}\|}{\|(7, 3, -2)\|} = \frac{\sqrt{15^2 + (-43)^2 + (-12)^2}}{\sqrt{7^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 5.98$$

Ejemplo 1.5.4. Hallar el punto de intersección (si es posible) de las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \qquad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

y

$$\mathcal{L}_2 : \qquad x + 3 = \frac{y-8}{-3} = \frac{z+3}{2}.$$

Solución: Escribiendo las rectas en su forma paramétrica tenemos

$$x = -1+3s,\ y = 2+2s,\ z = 1-s \quad \text{y} \quad x = -3+t,\ y = 8-3t,\ z = -3+2t$$

Las rectas se intersecan cuando

$$(-1+3s, 2+2s, 1-s) = (-3+t, 8-3t, -3+2t) \quad \text{para algunos} \quad s, t.$$

$$\begin{aligned}
-1+3s = -3+t: &\quad \Rightarrow t = 2+3s \\
2+2s = 8-3t: &\quad \Rightarrow 2+2s = 8-3(2+3s) = 2-9s \\
&\quad \Rightarrow 2s = -9s \Rightarrow s = 0 \Rightarrow t = 2-3(0) = 2 \\
1-s = -3+2t: &\quad 1-0 = -3+2(2) \Rightarrow 1 = 1.
\end{aligned}$$

Haciendo $s = 0$ en las ecuaciones de la primera recta, o haciendo $t = 2$ en las ecuaciones para la segunda recta obtenemos el punto de intersección $(-1, 2, 1)$.

Definición 1.5.3. (Planos). Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto fijo y u, v vectores no nulos y no paralelos en $\mathbb{R}^3$. Definimos la *ecuación vectorial del plano* como sigue

$$\Pi: \quad X = P + su + tv, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Geométricamente:

Los vectores u y v son llamados *vectores directores o vectores dirección* del plano.

Ejemplo 1.5.5. Determinar la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $(1, 1, 3)$ y con vectores dirección los vectores $(1, -2, 5)$ y $(3, 3, 4)$.

Solución: De acuerdo a la definición tenemos

$$\Pi: \quad (x, y, z) = (1, 1, 3) + s(1, -2, 5) + t(3, 3, 4), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Observación 1.5.2. Haciendo en la definición 1.5.3

$$X = (x, y, z), \quad u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{y} \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

obtenemos

$$\Pi : \quad x = su_1 + tv_1, \quad y = su_2 + tv_2, \quad z = su_3 + tv_3, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

estas son llamadas *ecuaciones paramétricas* del plano Π.

Observemos también lo siguiente: desde que u y v no son paralelos, el vector $u \times v$ es un vector no nulo y perpendicular a los vectores u y v. O sea, $u \times v$ es un vector perpendicular al subespacio generado por los vectores u y v. El vector $\eta = u \times v$ se llama *vector normal* al plano Π. Este no es precisamente el único vector normal a Π, en realidad cualquier vector normal a dicho plano tiene la forma $a\eta$ con $a \in \mathbb{R}$ no nulo.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo del plano Π y $\eta = (a, b, c)$ un vector normal a dicho plano. Si $X = (x, y, z)$ es un punto general del plano, se tiene que

$$\Pi : \quad \eta.(X - P) = 0$$

y reemplazando coordenadas esto significa que

$$\Pi : \quad (a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

o también

$$\Pi : \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1.5.9}$$

que es llamada *ecuación cartesiana* o algunas veces *forma punto normal* del plano Π.

Si hacemos $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, la relación (1.5.9) se convierte en

$$ax + by + cz + d = 0$$

llamada *forma normal* del plano Π.

Ejemplo 1.5.6. Hallar la ecuación del plano Π conteniendo el punto $(-3, 1, 3)$ y perpendicular al vector $\eta = (2, 4, 8)$.

Solución: Por la fórmula (1.5.9) el plano Π consiste de los puntos (x, y, z) tal que

$$2(x + 3) + 4(y - 1) + 8(z - 3) = 0.$$

Ejemplo 1.5.7. Hallar la ecuación del plano Π conteniendo los puntos $(2, 1, 3)$, $(1, -1, 2)$ y $(3, 2, 1)$.

Solución: Sea $P = (2, 1, 3)$, $Q = (1, -1, 2)$ y $R = (3, 2, 1)$. Entonces para los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-1, -2, -1)$ y $\overrightarrow{PR} = (1, 1, -2)$, el plano Π tiene vector normal

$$\eta = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-1, -2, -1) \times (1, 1, -2) = (5, -3, 1)$$

Ahora bien, de la ecuación (1.5.9) conseguimos que el plano Π consiste de los puntos (x, y, z) tal que

$$5(x - 2) - 3(y - 1) + (z - 3) = 0.$$

Teorema 1.5.8. (Distancia de un punto a un plano). *Sea* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *un punto de* $\mathbb{R}^3$*, y sea* Π *el plano con ecuación en su forma normal* $ax + by + cz + d = 0$*, que no contiene a* P*. Entonces la distancia de* P *a* Π *es*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Demostración. Sea $X = (x, y, z)$ un punto general del plano, o sea, $ax + by + cz + d = 0$, y sea $v = \overrightarrow{XP} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Entonces $v \neq 0$, pues, $P \notin \Pi$. De la ecuación en su forma normal para Π sabemos que $\eta = (a, b, c)$ es un vector normal para Π. Por otro lado, cualquier plano Π divide a $\mathbb{R}^3$ en dos partes disjuntas. Supongamos que las coordenadas de η están localizadas del lado de Π donde está ubicado el punto P. Sea θ el ángulo entre v y η. Entonces $0° < \theta° < 90°$ y $cos\theta > 0$ como indica la figura

por tanto, la distancia d es $cos\theta\|v\| = |cos\theta|\|v\|$. Pero sabemos que

$cos\theta = \frac{\eta . v}{\|\eta\| \|v\|}$. Luego

$$\begin{aligned} d = |cos\theta| \|v\| = \frac{|\eta . v|}{\|\eta\| \|v\|} \|v\| &= \frac{|\eta . v|}{\|\eta\|} \\ &= \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (-d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Si las coordenadas de η no están del lado de Π donde se encuentra P, entonces $90° < \theta < 180°$ y así $cos\theta < 0$. Entonces la distancia d es $|cos\theta| \|v\|$, y repitiendo el argumento anterior obtenemos el mismo resultado. $\square$

1.6 Ejercicios

Capítulo 2

Subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

2.1 Conjuntos Abiertos y Cerrados

Definición 2.1.1. (Bola abierta). Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La *bola abierta* con centro p y radio r es el conjunto

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x - p\| < r\}$$

Si $n = 2$ y $p = (a, b)$ tenemos

$$B_r(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$$

Si $n = 3$ y $p = (a, b, c)$ tenemos

$$B_r(p) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2\}.$$

Ejemplo 2.1.1. El disco abierto de radio 1, centrado en el origen

$$B_1(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1\}$$

Definición 2.1.2. (Conjunto abierto). Un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ es llamado *conjunto abierto* si para cada $p \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subseteq U$.

Proposición 2.1.2. *Toda bola abierta es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Veamos que $B_r(p)$ es un conjunto abierto. Tomemos $x \in B_r(p)$, entonces

$$\|x - p\| < r$$

Elegimos $s = r - \|x - p\| > 0$ y mostremos que $B_s(x) \subseteq B_r(p)$. Dado $y \in B_s(x)$, se tiene $\|x - y\| < s$. Por tanto

$$\|y - p\| \leq \|y - x\| + \|x - p\| < s + \|x - p\| = r$$

que implica $y \in B_r(p)$. $\square$

Ejemplo 2.1.3. (El plano menos un punto). Dado $p \in \mathbb{R}^2$, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ es abierto.

Ejemplo 2.1.4. (El plano menos una recta). El conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es una recta.

Ejemplo 2.1.5. Generalizando el ejemplo anterior, dado un polinomio en dos variables $f(x, y)$, el conjunto

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \, : \, f(x, y) = 0\}$$

es un conjunto abierto. Geométricamente, U es el plano menos un conjunto finito de curvas.

Ejemplo 2.1.6. (Semiplano abierto). Dada una curva $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$, los puntos del plano que se encuentran a un lado de la curva pero que no están en la curva, forman un conjunto abierto.

Definición 2.1.3. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *conjunto cerrado* si $\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto.

Ejemplo 2.1.7. De acuerdo a los ejemplos 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5 resulta que los puntos, las rectas y unión finita de curvas son conjuntos cerrados.

Ejemplo 2.1.8. Si en el ejemplo 2.1.6 tomamos la circunferencia

$$\mathcal{C}: \qquad x^2 + y^2 = 1$$

entonces conseguimos los conjuntos cerrados

Definición 2.1.4. (Bola reducida). Dado $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos la *bola reducida o punteada* $B_r^*(p)$ de centro p y radio r como el conjunto

$$B_r^*(p) = B_r(p) \setminus \{p\}.$$

Ejemplo 2.1.9. Grafiquemos la bola reducida de centro $(1, 0)$ y radio 2, es decir, $B_2^*(1, 0)$.

2.2 Algunas Superficies Cuádricas

Ya estudiamos en el capítulo anterior planos en el espacio, estos son tipos particulares de superficies. A continuación describiremos algunas *superficies cuádricas*, estas se definen por ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

para algunas constantes $A, B, \ldots, J$. En el próximo capítulo definiremos con más generalidad las superficies con las que trabajaremos en todo el libro. Por ahora comencemos con estos conceptos básicos

Definición 2.2.1. (Esfera en $\mathbb{R}^3$). La *esfera* $\mathbb{S}$ es el conjunto de puntos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ los cuales distan una constante r (llamada *radio*) de un punto fijo $p = (x_0, y_0, z_0)$ (llamado *centro*). Más precisamente

$$\mathbb{S} := \{(x, y, z) \,:\, \|X - p\| = r\}$$

o también

$$\mathbb{S} : \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Ilustrando geométricamente tenemos

Ejemplo 2.2.1. Determinemos la ecuación de la esfera que pasa por el origen O y cuyo centro es $C = (1, 2, 3)$. En efecto, es claro que el radio es

$$r = d(O, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{14}.$$

Luego

$$\mathbb{S} : \qquad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 14$$

Definición 2.2.2. (Cilindro). Los *cilindros circulares rectos* resultan por mover una recta $\mathcal{L}$ a lo largo de una circunferencia base $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$ de tal manera que $\mathcal{L}$ es siempre perpendicular al plano conteniendo $\mathcal{C}$.

En lo que sigue usaremos los casos en donde el plano conteniendo $\mathcal{C}$ es paralelo a uno de los planos coordenados.

Ejemplo 2.2.2. La ecuación de un cilindro cuya base es la circunferencia en el plano xy, centrado en $(a, b, 0)$ y de radio r es

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

De manera similar podemos obtener las ecuaciones de los cilindros con circunferencia base en los otros planos coordenados.

Observación 2.2.1. Debemos tener presente que un plano interseca a un cilindro circular recto en lo siguiente: o una circunferencia o una elipse o una recta o dos rectas, dependiendo de si el plano es paralelo u oblicuo (o sea el ángulo está entre 0° y 90°), perpendicular, respectivamente al plano conteniendo $\mathcal{C}$.

Definición 2.2.3. (Elipsoide). Otra superficie cuádrica es el *elipsoide*, su ecuación tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

En el caso $a = b = c$ se tiene precisamente la esfera.

Definición 2.2.4. (Hiperboloide). Tenemos el *hiperboloide de una hoja* y el *hiperboloide de dos hojas*, respectivamente, con ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Definición 2.2.5. (Paraboloide). Tenemos el *paraboloide elíptico* y el *paraboloide hiperbólico*, cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Definición 2.2.6. El último tipo de superficie cuádrica que debemos considerar es el *cono elíptico* cuya ecuación es dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

2.3 Puntos de Acumulación y Puntos Frontera

Comenzamos esta sección definiendo puntos de acumulación, concepto importante para definir límite de funciones $f : X \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Definición 2.3.1. (Punto de acumulación). Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de acumulación* de X si

$$\big(B(p,r) \setminus \{p\}\big) \cap X \neq \emptyset \quad \text{para todo} \quad r > 0.$$

Definición 2.3.2. (Punto frontera). Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto frontera* de X si

$$B(p,r) \cap X \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad B(p,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset.$$

El conjunto de puntos frontera del conjunto X se denota por $Fr(X)$.

Ejemplo 2.3.1. Si $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, entonces $Fr(X) = \mathbb{S}^1$.

Notemos que si $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ también se tiene $Fr(X) = \mathbb{S}^1$. O sea, dos conjuntos distintos pueden tener la misma frontera.

Ejemplo 2.3.2. La caja rectangular sólida B que se encuentra en el primer octante, acotada por los planos $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$ se expresa mediante las desigualdades

$$B : \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 2, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

Geométricamente:

En este caso $Fr(B) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$, donde

$$\begin{array}{llll}
E_1: & z = 0, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq 2 \\
E_2: & z = 3, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq 2 \\
E_3: & y = 0, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq z \leq 3 \\
E_4: & y = 2, & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq z \leq 3 \\
E_5: & x = 0, & 0 \leq y \leq 2, & 0 \leq z \leq 3 \\
E_6: & x = 1, & 0 \leq y \leq 2, & 0 \leq z \leq 3.
\end{array}$$

Ejemplo 2.3.3. El sólido

$$S: \qquad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$$

es la parte de la esfera sólida que se encuentra entre las esferas

$$S_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad S_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Geométricamente

En este caso la frontera de S es la unión de las esferas S_1 y S_2, es decir, $Fr(S) = S_1 \cup S_2$.

Ejemplo 2.3.4. La región del espacio representada por

$$S: \qquad |z| \leq 2$$

es la parte sólida que se encuentra limitada inferiormente por el plano $z = -2$ y superiormente por el plano $z = 2$.

2.4 Funciones de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.4.1. Sea $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^m$. Una función de X en $\mathbb{R}^n$ es una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ que asocia a cada punto $(x_1, \ldots, x_m) \in X$ un punto $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Para cada $(1 \leq j \leq n)$ hacemos $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$, las funciones $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ son llamadas *funciones coordenadas* de f.

Definición 2.4.2. (Funciones vectoriales). Son funciones $r : I \to \mathbb{R}^n$ donde I es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $n > 1$ La imagen $Im(r)$ se llama *traza de la función vectorial* r o *traza de la curva* r. Para cada punto $t \in I$ hacemos $r(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$. Las ecuaciones

$$y_1 = r_1(t), \quad y_2 = r_2(t), \quad \ldots, \quad y_n = r_n(t)$$

son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva r.

Ejemplo 2.4.1. (Función vectorial en $\mathbb{R}^2$). Sea I un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una función vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una función $r : I \to \mathbb{R}^2$. Para cada $t \in I$ tenemos

$$r(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\widehat{i} + y(t)\widehat{j}.$$

En este caso las funciones $x, y : I \to \mathbb{R}$ son las *funciones coordenadas* de r. Se escribe entonces $r = (x, y)$.

Ejemplo 2.4.2. Aquí tenemos algunas funciones vectoriales $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

(i) $r(t) = (t^3, t^2)$.

(ii) $r(t) = (t^4 + 1)\widehat{i} + t\widehat{j}$.

(iii) $r(t) = (cost, sent)$.

De manera similar al ejemplo 2.4.1, tenemos la función vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.4.3. (Función vectorial en $\mathbb{R}^3$). Sea I un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una función vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una función $r : I \to \mathbb{R}^3$. Para cada $t \in I$ tenemos

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\widehat{i} + y(t)\widehat{j} + z(t)\widehat{k}.$$

En este caso las funciones coordenadas de r son las funciones $x, y, z : I \to \mathbb{R}$. Se escribe entonces $r = (x, y, z)$.

Ejemplo 2.4.4. Algunas funciones vectoriales $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

(i) $r(t) = (t, t^2, t^3)$ (*cúbica torcida*).

(ii) $r(t) = (t^4 + 1)\widehat{i} + t\widehat{j} - e^t\widehat{k}$.

(iii) $r(t) = (cost, sent, t)$ (*la hélice*).

Ejemplo 2.4.5. La función vectorial $r(t) = (cost)\widehat{i} + (sent)\widehat{j} + t\widehat{k}$ tiene como traza la curva que se muestra en la figura.

En este caso tenemos $r(0) = (1, 0, 0)$ y $r(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$. Desde que $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, la curva está en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo 2.4.6. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = tcost, \quad y = tsent, \quad z = t$$

se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$, pues,

$$(tcost)^2 + (tsent)^2 = t^2(cos^2t + sen^2t) = t^2.$$

Ejemplo 2.4.7. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = sent, \quad y = cost, \quad z = sen^2t \tag{2.4.1}$$

es la curva de intersección de las superficies

$$z = x^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 = 1 \tag{2.4.2}$$

En efecto, desde que

$$sen^2t = (sent)^2 \qquad \text{y} \qquad (sent)^2 + (cost)^2 = 1$$

es claro que la curva está en la intersección de dichas superficies. Ahora bien, un punto (x, y, z) que está en ambas superficies satisface las relaciones (2.4.2). Haciento $x = sent$, $y = cost$ tenemos que $z = sen^2t$, o sea, el punto está en la curva dada por las ecuaciones paramétricas en (2.4.1).

Definición 2.4.3. (Funciones escalares). Otras funciones importantes que serán estudiadas en el capítulo 4 son las *funciones escalares.* Estas son funciones $f : X \to \mathbb{R}$ donde $X \subseteq \mathbb{R}^m$ y $m \geq 1$. El conjunto X es llamado *dominio* de f, denotado por $dom(f)$ y $\mathbb{R}$ es el codominio de f, denotado $codom(f)$. También recordemos que el *rango* de f es el conjunto

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x),\ x \in X\}.$$

Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ usaremos las notaciones $f(x)$ o $f(x_1, \ldots, x_n)$ para $x \mapsto f(x)$.

Ejemplo 2.4.8. La función $f(x, y) = y - x^2$ asocia a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el número $y - x^2$; así

$$\begin{aligned}(1, 2) &\mapsto 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1\\ (3, 3) &\mapsto 3 - 3^2 = 3 - 9 = -6.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.9. La función $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ asocia a la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el número real $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$; por ejemplo

$$(1, 0, 0) \mapsto f(1, 0, 0) = \sqrt{1 - 1^2 - 0^2 - 0^2} = 0$$

$$\begin{aligned}Dom(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}\\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.10. La función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ tiene como dominio

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Ejemplo 2.4.11. Sea la función $f : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{y}{1 - |x|}$$

donde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\}$. Desde que $1 - |x| > 0$, entonces f está bien definida.

Ejemplo 2.4.12. La función $f(x, y) = arcsen\frac{x}{x+y}$ tiene como dominio

$$Dom(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq \frac{x}{x + y} \leq 1\right\}$$

Evidentemente este conjunto excluye los pares (x, y) tales que $x + y = 0$.

Luego para $(x, y) \in Dom(f)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{x+y}\right| \leq 1 &\Leftrightarrow |x| \leq |x+y| \quad \text{y} \quad x \neq -y \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq (x+y)^2 \quad \text{y} \quad x \neq -y \\ &\Leftrightarrow y^2 + 2xy = y(y+2x) \geq 0 \quad \text{y} \quad x \neq -y \\ &\Leftrightarrow [(y \geq 0 \ \text{ y } \ y \geq -2x) \ \text{ o } \ (y \leq 0 \ \text{ y } \ y \leq -2x)] \ \text{ y } \ x \neq -y\end{aligned}$$

Definición 2.4.4. (Operaciones entre funciones). Sean U y V subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y consideremos las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$. Definimos

(i) La *suma* de f con g como la función $f + g : U \cap V \to \mathbb{R}$ tal que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

(ii) El *producto* de f con g como la función $fg : U \cap V \to \mathbb{R}$ tal que

$$(fg)(x) = f(x) + g(x).$$

(iii) El *cociente* de f con g como la función $\frac{f}{g} : W \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $W = U \cap V \setminus \{x \in V \ : \ g(x) = 0\}$.

(iv) El *producto por un escalar* de $a \in \mathbb{R}$ con f como la función $af : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$(af)(x) = af(x).$$

Ejemplo 2.4.13. Sean las funciones definidas por $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y $g(x,y) = ln(xy)$. Tenemos

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

y

$$Dom(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x>0,\ y>0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x<0,\ y<0\}$$

Ahora bien

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + ln(xy)$$
$$(fg)(x,y) = f(x,y)g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}ln(xy)$$

$Dom(f) \cap Dom(g)$:

Observación 2.4.1. La suma y el producto por un escalar dotan al conjunto de funciones $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial, este espacio es denotado por $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Definición 2.4.5. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función.

(i) f se llama *función constante* si $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

(ii) f es llamada *función lineal* si $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ para algunas constantes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

(iii) f es una *función polinomial* si $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$. El máximo número $i_1 + \ldots + i_n$ es llamado *grado de f*.

Definición 2.4.6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Dada la función $f : X \to \mathbb{R}$, definimos el *gráfico* de f por

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_m, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \,:\, y = f(x_1, \ldots, x_1)\}.$$

Ejemplo 2.4.14. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ es una función escalar que tiene como gráfico

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \,:\, z = x^2 + y^2\}$$

que es precisamente el paraboloide como en la figura

Definición 2.4.7. (Conjunto de nivel). Dada la función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, definimos el *conjunto de nivel* con valor k como el conjunto

$$f^{-1}(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) = k\}$$

Para $n = 2$ se llama *curva de nivel* y para $n = 3$ *superficie de nivel.*

Observación 2.4.2. El nivel k de la superficie $z = f(x, y)$ se puede interpretar geométricamente como la intersección de dicha superficie con el plano $z = k$.

Otra manera de interpretar el nivel k es tomar la curva de nivel $f^{-1}(k)$ y trasladar al plano $z = k$. Estos niveles de la superficie nos dan una aproximación geométrica de la superficie $Gr(f)$.

Ejemplo 2.4.15. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene como rango $Im(f) = [0, +\infty)$. Además

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 0\} \\ f^{-1}(1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \\ f^{-1}(2) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 2\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.16. La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2+y^2+z^2$ tiene como rango $Im(f) = [0, +\infty)$. Además

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \\ f^{-1}(1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ f^{-1}(4) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 2\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.17. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} ln(x^2 + y^2 - 1), & \text{si} \quad (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(i) Determinemos el dominio de f.
(ii) El conjunto A, ¿es abierto? ¿Cuál es su frontera?
(iii) El punto $(0,0)$, ¿es un punto de acumulación de A?
(iv) ¿Cuál es la curva de nivel 0 de f? ¿Y cuál la de nivel 1?
Solución: (i) Debemos tener que $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Luego

$$A = \{(x, y) \, : \, x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

(ii) El conjunto A no es abierto ya que podemos encontrar un disco abierto centrado en $(0, 0)$; sin embargo este disco no está contenido en A. Ver figura abajo

La frontera de A es precisamente la circunferencia unitaria

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \, : \, x^2 + y^2 = 1\}.$$

(iii) El punto $(0, 0)$ no es punto de acumulación de A por la misma razón del ítem anterior. Podemos conseguir una bola reducida centrada en $(0, 0)$ pero que no está contenida en A. Ver figura abajo

(iv) Claramente $(0,0) \in f^{-1}(0)$. Por otro lado, si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = ln(x^2+y^2-1) = 0$, debemos tener que $x^2+y^2 = 2$. Por tanto,

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in A : x^2+y^2 = 2\} \cup \{(0,0)\}.$$

También

$$f^{-1}(1) = \{(x,y) \in A : ln(x^2+y^2-1) = 1\} = \{(x,y) \in A : x^2+y^2 = e+1\}.$$

Definición 2.4.8. (Funciones vectoriales de variable vectorial). Las *funciones vectoriales de variable vectorial* son funciones $f : X \to \mathbb{R}^n$ donde $X \subseteq \mathbb{R}^m$ y $m, n > 1$. Ejemplos importantes de este tipo de funciones son los *campos vectoriales*, estas son funciones $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde U es abierto en $\mathbb{R}^n$. Campos vectoriales serán estudiados en el capítulo 6.

2.5 Ejercicios

Capítulo 3

Funciones Vectoriales

3.1 Límites y Continuidad

Definición 3.1.1. Sea $r : I \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial definida en un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$, y sea $t_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de I. Decimos que el vector $v \in \mathbb{R}^n$ es el *límite de* $r(t)$ *cuando* t *tiende a* t_0 y se escribe

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = v$$

para significar lo siguiente:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0; \;\; t \in I, \;\; 0 < |t - t_0| < \delta \;\Rightarrow\; \|r(t) - v\| < \epsilon.$$

Proposición 3.1.1. *Sea t_0 un punto de acumulación de I y sea la función vectorial $r = (x, y) : I \to \mathbb{R}^2$. Entonces $\lim_{t \to t_0} r(t) = (a, b)$ si y sólo si $\lim_{t \to t_0} x(t) = a$ y $\lim_{t \to t_0} y(t) = b$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Desde que $\lim_{t \to t_0} r(t) = (a, b)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in I \quad \text{y} \quad 0 < |t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|r(t) - (a, b)\| < \epsilon$$

Ahora bien, para $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$ tenemos

$$|x(t) - a|, \; |y(t) - b| \leq \|(x(t) - a, y(t) - b)\| = \|(x(t), y(t)) - (a, b)\| < \epsilon$$

De esto se sigue que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = b. \tag{3.1.1}$$

Recíprocamente, supongamos que se tienen los límites en (3.1.1). Tomemos $\epsilon > 0$. Por hipótesis sabemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que

$$t \in I \quad \text{y} \quad 0 < |t - t_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |x(t) - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

también

$$t \in I \quad \text{y} \quad 0 < |t - t_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |y(t) - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

Haciendo $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, para cada $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$ tenemos

$$|x(t) - a|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} \qquad \text{y} \qquad |y(t) - b|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

de donde se tiene

$$\|r(t) - (a, b)\| = \|(x(t) - a, y(t) - b)\| = \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} < \epsilon.$$

Esto conluye la demostración. $\square$

Proposición 3.1.2. *Sea t_0 un punto de acumulación de I y sea la función vectorial $r = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$. Entonces $\lim\limits_{t\to t_0} r(t) = (a, b, c)$ si y sólo si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$ y $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = c$.*

Demostración. Imitar la demostración de la proposición anterior. $\square$

Ejemplo 3.1.3. La función $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $r(t) = (t^2 + 1,\ 2t,\ t)$ tiene como funciones coordenadas $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$, $z(t) = t$. Puesto que

$$\lim_{t\to 1} x(t) = 2, \quad \lim_{t\to 1} y(t) = 2, \quad \lim_{t\to 1} z(t) = 1$$

por el teorema anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} r(t) &= \big(\lim_{t\to 1} x(t),\ \lim_{t\to 1} y(t),\ \lim_{t\to 1} z(t)\big)\\ &= (2, 2, 1).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.4. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t}, \frac{3}{1+t}\right)$$

En efecto, Por L'hopital tenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1}=1,$$

también

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right)\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{\sqrt{1+t}+1}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+t}+1}=\frac{1}{2},$$

finalmente

$$\lim_{t\to 0}\frac{3}{1+t}=3.$$

Luego

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t},\frac{\sqrt{1+t}-1}{t},\frac{3}{1+t}\right)=\left(1,\frac{1}{2},3\right).$$

Definición 3.1.2. Sea I un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una función $r:I\to\mathbb{R}^n$ es llamada *continua en* $t_0\in I$ si

$$\lim_{t\to t_0}r(t)=r(t_0).$$

Decimos que r es *continua en* I si es continua en cada punto de I.

Observación 3.1.1. La función vectorial $r=(x,y):I\to\mathbb{R}^2$ es continua en t_0 si y sólo si $x,y:I\to\mathbb{R}$ son continuas en t_0. Similarmente, la función $r=(x,y,z):I\to\mathbb{R}^3$ es continua en t_0 si y sólo si las funciones $x,y,z:I\to\mathbb{R}$ son continuas en t_0.

Ejemplo 3.1.5. La función $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definida por $r(t)=(t^3+1,t^2-2t)$ es continua pues cada función coordenada es continua por ser polinomial.

3.2 Derivadas e Integrales de Funciones Vectoriales

Definición 3.2.1. Sea $r:I\to\mathbb{R}^n$ una función vectorial definida en el intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ y sea $t_0\in I$. Definimos la *derivada* de r en t_0 denotada por $r'(t_0)$ o $\frac{dr}{dt}(t_0)$ como el límite

$$r'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{r(t_0+h)-r(t_0)}{h}$$

cuando éste existe. En este caso decimos que la función r es *diferenciable en* t_0. Si r es diferenciable en todos los puntos de I diremos que r es *diferenciable en* I.

Cuando el vector $r'(t_0)$ es no nulo conseguimos la *recta tangente* a la curva r en el punto $r(t_0)$, o sea, la recta

$$\mathcal{L}: \qquad X = r(t_0) + tr'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Observación 3.2.1. De acuerdo a las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 podemos decir que una función vectorial $r : I \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en I si y sólo si sus funciones coordenadas lo son. En este caso para $r = (x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ y cada $t \in I$ tenemos

$$r'(t) = \big(x'(t),\ y'(t)\big)$$

y en el caso $r = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$ y cada $t \in I$ tenemos

$$r'(t) = \big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\big).$$

Ejemplo 3.2.1. La función $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $r(t) = (cost,\ sent)$ es diferenciable, pues, sus funciones coordenadas son diferenciables. La traza es precisamente la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos $r'(t) = (-sent,\ cost)$ y $\|r'(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2.2. ¿En qué puntos se intersecan las curvas $r_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$ y $r_2(s) = (3 - s, s - 2, s^2)$? Encuentre su ángulo de intersección, ajuste al grado más próximo.

Solución: Para hallar el punto de intersección debemos encontrar puntos t y s que satisfacen las ecuaciones

$$t = 3 - s, \qquad 1 - t = s - 2, \qquad 3 + t^2 = s^2.$$

Resolviendo las dos últimas ecuaciones conseguimos $t = 1$ y $s = 2$ que satisfacen la primera ecuación. Luego el punto de intersección es $(1, 0, 4)$. Ahora hallemos el ángulo de intersección θ. Los vectores tangentes a las respectivas curvas en $(1, 0, 4)$ son $r_1'(1) = (1, -1, 2)$ y $r_2'(2) = (-1, 1, 4)$. Así que

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{18}}(-1 - 1 + 8) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \theta = cos^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \approx 55°.$$

Teorema 3.2.3. *Sean $u, v : I \to \mathbb{R}^n$ funcionres vectoriales, $f : I \to \mathbb{R}$ una función real y $c \in \mathbb{R}$. Se cumplen:*

(a) $\frac{d}{dt}(u(t) \pm v(t)) = u'(t) \pm v'(t)$.

(b) $\frac{d}{dt}(cu(t)) = cu'(t)$.

(c) $\frac{d}{dt}(f(t)u(t)) = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$.

(d) $\frac{d}{dt}(u(t).v(t)) = u'(t).v(t) + u(t).v'(t)$.

(e) $\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$.

(f) $\frac{d}{dt}(u(f(t))) = f'(t)u'(f(t))$.

Demostración. □

Definición 3.2.2. La *integral definida* de una función vectorial continua $r = (x, y, z) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se define por

$$\int_a^b r(t)dt = \Big(\int_a^b x(t)dt\Big)\widehat{i} + \Big(\int_a^b y(t)dt\Big)\widehat{j} + \Big(\int_a^b z(t)dt\Big)\widehat{k}$$

También utilizamos la notación $\int r(t)dt$ para la integral indefinida de la función vectorial r. Esto es

$$\int r(t)dt = \Big(\int x(t)dt\Big)\widehat{i} + \Big(\int y(t)dt\Big)\widehat{j} + \Big(\int z(t)dt\Big)\widehat{k}$$

3.3 Vectores Normales y Binormales

Si la función vectorial $r : I \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, tiene sentido considerar la función $r' : I \to \mathbb{R}^n$ e indagar si ella es continua, diferenciable, etc. Cuando r' es continua decimos que r es un camino de clase C^1. Podemos entonces investigar la existencia de la derivada de r'. Cuando existe el vector $(r')'(t_0) = r''(t_0)$, se llama *segunda derivada* de r en el punto t_0 o *vector aceleración* de r en el punto t_0. Se tiene entonces

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \qquad \text{o} \qquad r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

según sea el caso. En general definimos

$$r''(t) = \frac{d}{dt}r'(t), \quad r'''(t) = \frac{d}{dt}r''(t), \ldots, \frac{d^n r}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}\right) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

Definición 3.3.1. Dada una función vectorial $r : I \to \mathbb{R}^n$, definimos el

$$\begin{aligned}
\text{Vector posición}: &\quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))\\
\text{Vector velocidad}: &\quad v(t) = \dot{r}(t) = r'(t) = \frac{dr}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))\\
\text{Vector aceleración}: &\quad a(t) = \dot{v}(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}\\
&\quad = \ddot{r}(t) = r''(t) = \frac{d^2 r}{dt^2} = (x''(t), y''(t), z''(t))\\
\text{Vector momento}: &\quad p(t) = mv(t)\\
\text{Vector fuerza}: &\quad F(t) = \dot{p}(t) = p'(t) = \frac{dp}{dt} \quad \text{(segunda ley de Newton).}
\end{aligned}$$

El número $\|v(t)\|$ es llamado *rapidez* en el instante t.

Ejemplo 3.3.1. Hallar la velocidad, aceleración y rapidez en el instante $t = 0$, de una partícula que se mueve en el espacio y describe la curva $r(t) = (sent,\ t,\ cost)$.

Solución: (i) $v(t) = r'(t) = (cost, 1, -sent)$, luego $v(0) = (1, 1, 0)$.
(ii) $a(t) = v'(t) = (-sent, 0, -cost)$, luego $a(0) = (0, 0, -1)$.
(iii) $\|v(0)\| = \sqrt{2}$.

Ejemplo 3.3.2. Hallar los vectores de velocidad y posición de una partícula que tiene la aceleración dada y la velocidad y posición iniciales dadas

$$a(t) = -10\widehat{k}, \quad v(0) = \widehat{i} + \widehat{j} - \widehat{k}, \quad r(0) = 2\widehat{i} + 3\widehat{j}$$

Solución:

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (-10)\widehat{k}dt = -10t\widehat{k} + C_1$$

Como $\widehat{i} + \widehat{j} - \widehat{k} = v(0) = -10(0)\widehat{k} + C_1$, entonces $C_1 = \widehat{i} + \widehat{j} - \widehat{k}$. Luego

$$v(t) = -10t\widehat{k} + \widehat{i} + \widehat{j} - \widehat{k} = \widehat{i} + \widehat{j} - (10t+1)\widehat{k}$$

Por otro lado,

$$r(t) = \int v(t)dt = \int [\widehat{i} + \widehat{j} - (10t+1)\widehat{k}]dt = t\widehat{i} + t\widehat{j} - (5t^2 + t)\widehat{k} + C_2$$

pero $2\widehat{i} + 3\widehat{j} = r(0) = C_2$. Luego

$$r(t) = t\widehat{i} + t\widehat{j} - (5t^2 + t)\widehat{k} + 2\widehat{i} + 3\widehat{j} = (t+2)\widehat{i} + (t+3)\widehat{j} - (5t^2 + t)\widehat{k}.$$

Ejemplo 3.3.3. Hallemos la fuerza necesaria para que una partícula de masa m tenga la función de posición $r(t) = t^3\widehat{i} + t^2\widehat{j} + t^3\widehat{k}$.

Solución: Sabemos que $a(t) = r''(t) = 6t\widehat{i} + 2\widehat{j} + 6t\widehat{k}$, y por la segunda ley de Newton $F(t) = ma(t) = 6mt\widehat{i} + 2m\widehat{j} + 6mt\widehat{k}$.

Proposición 3.3.4. *Si r es una función vectorial tal que existe r'', entonces*

$$\frac{d}{dt}\big[r(t) \times r'(t)\big] = r(t) \times r''(t)$$

Demostración. Utilizando la afirmación (e) en el teorema 3.2.3 tenemos

$$\frac{d}{dt}\big[r(t) \times r'(t)\big] = r'(t) \times r'(t) + r(t) \times r''(t) = r(t) \times r''(t).$$

La segunda igualdad viene de $r'(t) \times r'(t) = 0$. □

Proposición 3.3.5. *Si $r(t) \neq 0$, entonces*

$$\frac{d}{dt}\|r(t)\| = \frac{1}{\|r(t)\|} r(t).r'(t) \tag{3.3.2}$$

Demostración. Sabemos que $\|r(t)\|^2 = r(t).r(t)$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\|r(t)\|^2 = 2\|r(t)\|\frac{d}{dt}\|r(t)\| = r'(t).r(t) + r(t).r'(t) = 2r(t).r'(t) \tag{3.3.3}$$

de donde se obtiene (3.3.2). □

Proposición 3.3.6. *Si una curva es tal que el vector posición $r(t)$ es siempre perpendicular al vector tangente $r'(t)$, entonces la curva se encuentra sobre una esfera con centro en el origen.*

Demostración. Por hipótesis tenemos $r(t).r'(t) = 0$ para todo t. Ahora bien, de (3.3.3) tenemos

$$\frac{d}{dt}\|r(t)\|^2 = 2r(t).r'(t) = 0$$

Esto implica que $\|r(t)\|^2 = r^2$ donde r es una constante positiva. Por tanto, la curva está en la esfera

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| = r\}.$$

□

Proposición 3.3.7. *Si* $u(t) = r(t).[r'(t) \times r''(t)]$, *entonces*

$$u'(t) = r(t).[r'(t) \times r'''(t)].$$

Demostración.

$$\begin{aligned} u'(t) &= r'(t).[r'(t) \times r''(t)] + r(t).[r'(t) \times r''(t)]' \\ &= r''(t).[r'(t) \times r'(t)] + r(t).[r''(t) \times r''(t) + r'(t) \times r'''(t)] \\ &= r(t).[r'(t) \times r'''(t)] \end{aligned}$$

□

Definición 3.3.2. Sea $r : I \to \mathbb{R}^n$ una *curva regular*, es decir, $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Definimos el *vector tangente unitario* T por

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

Supongamos ahora que $r'(t)$ y $r''(t)$ no son paralelos. Entonces $T'(t) \neq 0$ y podemos definir el *vector normal unitario principal* N como

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

Finalmente definimos el *vector binormal unitario* B como

$$B(t) = T(t) \times N(t).$$

3.4 Longitud y Reparametrización de Curvas

Definición 3.4.1. Sea $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial de clase C^1. La *longitud de arco* de r está dada como sigue

$$l(r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

En $\mathbb{R}^3$ la fórmula es

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

y para curvas en $\mathbb{R}^2$ la fórmula es

$$l(r) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Ejemplo 3.4.1. La longitud de arco de la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $r(t) = (Rcost, Rsent)$ es

$$l(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-Rsent)^2 + (Rcost)^2}\, dt = 2\pi R.$$

3.5 Ejercicios

Capítulo 4

Funciones de Varias Variables

4.1 Límites y Continuidad

Definición 4.1.1. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de X. Decimos que el número $L \in \mathbb{R}$ es el *límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

para significar lo siguiente:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0; \;\; x \in X, \;\; 0 < \|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon.$$

Interpretación geométrica:

Ejemplo 4.1.1. Mostremos que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} xy = 0$$

En efecto, sea $\epsilon > 0$ y elegimos $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Ahora bien,

$$0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta = \sqrt{\epsilon} \quad \text{implica} \quad |x|,\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\epsilon}.$$

Luego

$$|xy - 0| = |x||y| \leq x^2 + y^2 < \epsilon.$$

Ejemplo 4.1.2. Mostremos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Veamos. Sea $\epsilon > 0$ y tomamos $\delta = \epsilon$. Ahora bien,

$$0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta = \epsilon \quad \text{implica} \quad |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon.$$

Luego

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| < \epsilon.$$

El último ejemplo sugiere la siguiente proposición

Proposición 4.1.3. *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones y x_0 un punto de acumulación de X. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y existe $r > 0$ tal que g es acotada en $B_r^*(x_0) \cap X$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Demostración. Desde que g es acotada en $B_r^*(x_0) \cap X$, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M \quad \text{para todo} \quad x \in B_r^*(x_0) \cap X.$$

Por otro lado, desde que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$x \in X,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta' \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{M}$$

Elegimos $0 < \delta < \min\{\delta', r\}$ y $x \in X$. Luego para $0 < \|x - x_0\| < \delta$ tenemos

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

$\square$

Observación 4.1.1. Debemos destacar que la última proposición nos da una condición suficiente para que el límite de un producto sea 0. Con este resultado podemos calcular el límite en el ejemplo 4.1.2. Para notar esto hacemos

$$f(x,y) = x \quad \text{y} \quad g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Observación 4.1.2. (Condición suficiente para que un límite no exista). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 un punto de acumulación de X y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, también existe el límite de f en el punto x_0 relativo a cualquier conjunto $A \subseteq X$ tal que $x_0 \in A \cup Fr(A)$ y se tiene necesariamente

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

y este es el argumento de una técnica usual para probar la no existencia de determinados límites. Siempre que sea posible determinar conjuntos $A, B \subseteq X$ con $x_0 \in A \cup Fr(A)$ y $x_0 \in B \cup Fr(B)$ para los cuales se tenga

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x)$$

o también un solo conjunto A tal que no exista el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$, entonces se concluye que

$$\nexists \quad \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Ejemplo 4.1.4. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Para $C_1 : \quad y = x$ tenemos

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,x) \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,x) \to (0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Para $C_2 : \quad y = 2x$ tenemos

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,2x) \to (0,0)} \frac{x(2x)}{x^2+(2x)^2} = \lim_{(x,2x) \to (0,0)} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Por tanto, no existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Ejemplo 4.1.5. Analicemos el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^7}{x+y-3}$$

Consideremos la curva

$$A: \quad x(t) = 1+t, \quad y(t) = 2+2t^7-t, \quad t \in \mathbb{R}$$

tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^7}{x+y-3} = \lim_{t\to 0} \frac{(x(t)-1)^7}{x(t)+y(t)-3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^7}{2t^7} = \frac{1}{2}$$

Por otro lado, para la curva

$$B: \quad x(t) = 1+t, \quad y(t) = 2+3t^7-t, \quad t \in \mathbb{R}$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^7}{x+y-3} = \lim_{t\to 0} \frac{(x(t)-1)^7}{x(t)+y(t)-3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^7}{3t^7} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto,

$$\nexists \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^7}{x+y-3}.$$

Ejemplo 4.1.6. Analicemos el siguiente límite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

Sobre el eje x tenemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x(0)+0(0)^2+0(0)^2}{x^2+0^2+0^4} = 0$$

También, sobre la recta diagonal $x=y$, $z=0$ tenemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4} = \lim_{(x,x,0)\to(0,0,0)} \frac{xx+x(0)^2+x(0)^2}{x^2+x^2+0^4} = \frac{1}{2}$$

Teorema 4.1.7. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 un punto de acumulación de X y $f, g : X \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, entonces*

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$.

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$.

(c) *Si* $M \neq 0$, *entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Demostración. (a) Sea $\epsilon > 0$. Existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

también

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora bien, para $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, la relación $0 < \|x - x_0\| < \delta$ implica

$$|\big(f(x) \pm g(x)\big) - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(b) Sea $\epsilon > 0$. Existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < min\Big\{1, \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)}\Big\}$$

también

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2(|L| + 1)}$$

Sea ahora $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces para $0 < \|x - x_0\| < \delta$ tenemos

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$$

Además

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)(g(x) - M) + Mf(x) - LM| \\
&\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\
&< |f(x)|\frac{\epsilon}{2(|L| + 1)} + |M| min\Big\{1, \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)}\Big\} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + |M|\frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

(c) Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - L| < \frac{|M|\epsilon}{4}$$

También

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_2 \ \ \Rightarrow \ \ |g(x) - M| < \frac{|M|^2\epsilon}{4(1+|L|)}.$$

Ahora bien, para $|M| > 0$ existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$x \in X \ \text{ y } \ 0 < \|x - x_0\| < \delta_3 \ \ \Rightarrow \ \ |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}.$$

De

$$\big||g(x)| - |M|\big| \leq |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

se sigue que

$$|g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

Sea ahora $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\Big| &= \frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|g(x)M|} \\
&< \frac{2}{|M|^2}|Mf(x) - Lg(x)| \\
&= \frac{2}{|M|^2}|M(f(x) - L) + L(M - g(x))| \\
&\leq \frac{2}{|M|^2}\big(|M||f(x) - L| + |L||M - g(x)|\big) \\
&= \frac{2}{|M|}|f(x) - L| + \frac{2|L|}{|M|^2}|M - g(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon|L|}{2(1+|L|)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Definición 4.1.2. (Continuidad en en punto). Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida en $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in X$. Decimos que f es *continua en* x_0 si

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0; \;\; x \in X, \;\; \|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Si f no es continua en x_0, se dice que es *discontinua* en dicho punto. La función f es llamada *continua* si es continua en cada punto de X.

Podemos expresar continuidad en un punto en términos de límites

Proposición 4.1.8. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in X$ un punto de acumulación de X. Entonces f es* continua en x_0 *si y sólo si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4.1.1}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\text{ y }\; \|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Luego, para $x \in X$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Supongamos ahora que se tiene (4.1.1). Para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\text{ y }\; 0 < \|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{4.1.2}$$

Sabemos que $x_0 \in X$. Ahora bien, para $x \in X$ y $\|x - x_0\| < \delta$, se sigue de la relación (4.1.2) que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. $\square$

Ejemplo 4.1.9. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$, pues,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Proposición 4.1.10. *Sean $f, g : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones y $a \in \mathbb{R}$. Si f y g son continuas, entonces*

(a) $f + g : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

(b) $af : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

(c) $fg : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

(d) $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ *es continua en el conjunto* $X \setminus \{x \in X \,:\, g(x) = 0\}$.

Demostración. Consecuencia del teorema 4.1.7. □

Observación 4.1.3. Las propiedades (a) y (b) implican que el conjunto $C(X, \mathbb{R})$ de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$, forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Más precisamente $C(X, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Ejemplo 4.1.11. Las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$ son continuas, luego $f(x, y)g(x, y) = xy$ es continua.

Ejemplo 4.1.12. Toda función polinomial $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ es continua.

Ejemplo 4.1.13. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \alpha x, & \text{si} \quad (x, y) \neq (1, 0) \\ \alpha^2, & \text{si} \quad (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

y determinemos los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales f es continua en $(1, 0)$. Es claro que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$$

de donde

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(\frac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \alpha x \right) = \alpha$$

Para que f sea continua en $(1, 0)$ debemos tener que este último límite sea igual a $f(1, 0) = \alpha^2$, o sea, $\alpha = \alpha^2$. Por tanto, $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Proposición 4.1.14. *Sean* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones tal que* $f(X) \subseteq I$. *Si* g *y* f *son continuas, entonces* $g \circ f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Demostración. □

Ejemplo 4.1.15. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = sen\Big(\frac{xy}{x^2+y^2+1}\Big)$$

es continua en $\mathbb{R}^2$, pues, f es la composición de las funciones

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2+1} \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & senx \end{array}$$

las cuales son continuas.

4.2 Derivadas Parciales

Definición 4.2.1. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Dado $p = (x_0, y_0) \in X$ un punto de acumulación de X, definimos la *derivada parcial de f con respecto a x* (respecto a la primera variable) en el punto p, como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Del mismo modo, la *derivada parcial de f con respecto a y* (respecto a la segunda variable) en el punto p se define

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Ejemplo 4.2.1. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(h)(0)}{h^2+0^2} - 0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(0)(h)}{0^2+h^2} - 0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2. Consideremos la función $f(x, y) = |(x-1)y|$ y hallemos las derivadas parciales en el punto $(0, 0)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|(h-1)0\,|-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|(0-1)h|-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists.
\end{aligned}$$

Observación 4.2.1. Algunas veces omitiremos el punto $p = (x, y)$ y escribiremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

También utilizaremos las notaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f = f_x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f = f_y$$

Ejemplo 4.2.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 y$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xhy + h^2 y}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2xy + hy) \\
&= 2xy.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)-x^2y}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}x^2\\ &= x^2.\end{aligned}$$

Observación 4.2.2. Las derivadas parciales son derivadas de funciones reales de una variable. Veamos esto. Definiendo

$$\varphi(x) = f(x,y_0) \qquad \text{por fijar } \; y_0$$

entonces

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & I & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & f(x,y_0)\end{array}$$

donde I es la proyección de X sobre el eje x; además

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Desde el punto de vista geométrico, la función $\varphi(x) = f(x,y_0)$ representa la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$. Esta es una curva que en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ tiene una recta tangente cuya pendiente es $\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Similarmente, por fijar x_0 podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \psi: & J & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

donde J es la proyección de X sobre el eje y. Así tenemos

$$\begin{aligned} \psi'(y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(y_0+h)-\psi(y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ahora bien, $\psi(y) = f(x_0, y)$ representa la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$. Esta es una curva que en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene una recta tangente cuya pendiente es $\psi'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Observación 4.2.3. Notemos que, debido a la expresión $\varphi(x) = f(x, y_0)$ podemos derivar tranquilamente la función $\varphi(x)$ utilizando las reglas de derivación de funciones de una variable para obtener la derivada parcial.

Ejemplo 4.2.4. Sea $f(x, y) = x^2 y$ como en el ejemplo 4.2.3. Por fijar $y = y_0$ se tiene $\varphi(x) = f(x, y_0) = x^2 y_0$, de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \varphi'(x) = 2xy_0$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy.$$

Similarmente, fijando $x = x_0$ y haciendo $\psi(y) = f(x_0, y) = x_0^2 y$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \psi'(y) = x_0^2$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

Observación 4.2.4. Las expresiones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x,y)+h(1,0)) - f(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x,y)+h(0,1)) - f(x,y)}{h}$$

sugieren la siguiente definición.

Definición 4.2.2. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$. Dado un punto $p \in X$ el cual es punto de acumulación de X, definimos la *derivada parcial de f en el punto p, con respecto a la i-ésima variable* como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+he_i) - f(p)}{h}$$

Así por ejemplo, para la función $f(x, y, z)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &:= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x,y,z)+h(1,0,0)\big) - f(x,y,z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &:= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x,y,z)+h(0,1,0)\big) - f(x,y,z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &:= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x,y,z)+h(0,0,1)\big) - f(x,y,z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.5. Dada la función $f(x, y, z) = e^{xy}z$,

$$f_x = ye^{xy}z, \qquad f_y = xe^{xy}z, \qquad f_z = e^{xy}.$$

4.3 Funciones Diferenciables y Linealización

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$ un punto de acumulación de I. Recordemos que una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0 si existe el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4.3.3}$$

equivalentemente: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon \tag{4.3.4}$$

Haciendo

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \tag{4.3.5}$$

entonces (4.3.4) nos dice que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{r(h)}{h} \right| < \epsilon \tag{4.3.6}$$

es decir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \tag{4.3.7}$$

Ahora bien, de (4.3.5) tenemos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + r(h) \tag{4.3.8}$$

Luego de (4.3.7) y (4.3.8) se sigue que f es diferenciable en x_0 si existe $A \in \mathbb{R}$ (en este caso $A = f'(x_0)$) tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hA + r(h) \quad \text{donde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

La última caracterización sugiere la siguiente definición

Definición 4.3.1. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $p = (x_0, y_0) \in U$ un punto de acumulación de U. Decimos que f *es diferenciable en el punto* p si existen

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y si el residuo $r(h_1, h_2)$ definido en la expresión

$$f\big((x_0, y_0) + (h_1, h_2)\big) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + r(h_1, h_2) \tag{4.3.9}$$

satisface

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0 \tag{4.3.10}$$

La función f es *diferenciable* si lo es en cada punto de U.

Ejemplo 4.3.1. Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ya vimos en el ejemplo 4.2.1 que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Por otro lado,

$$f\big((0,0)+(h_1,h_2)\big) = f(0,0) + A_1h_1 + A_2h_2 + r(h_1,h_2)$$

que implica $f(h_1,h_2) = 0 + 0h_1 + 0h_2 + r(h_1,h_2)$, o sea,

$$r(h_1,h_2) = \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \\ \text{para } h_1 = h_2: \quad &= \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2}{(2h_1^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{1}{2^{3/2}h_1} \qquad \nexists \end{aligned}$$

luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 4.3.2. La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en $(0,0)$. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Se sigue que $\nexists \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y por tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 4.3.3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+0^2)sen\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}\right)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} hsen\frac{1}{\sqrt{h^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(0^2+h^2)sen\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+h^2}}\right)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} hsen\frac{1}{\sqrt{h^2}} = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$f\big((0,0)+(h_1,h_2)\big) = f(0,0) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + r(h_1,h_2)$$

o sea, $f(h_1,h_2) = r(h_1,h_2)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)sen\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,sen\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego f es diferenciable en $(0,0)$.

Teorema 4.3.4. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $p \in U$ y punto de acumulación de U. Si la función $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en p, entonces f es continua en p.*

Demostración. Hagamos $df(p) = (f_x(p), f_y(p))$. Para cualquier h tenemos

$$f(p+h) - f(p) = [f(p+h) - f(p) - df(p).h] + df(p).h \qquad (4.3.12)$$

De acuerdo al límite en (4.3.10) con $\epsilon = 1$, existe δ_0 tal que si $0 < \|h\| < \delta_0$ entonces

$$|f(p+h) - f(p) - df(p).h| < \|h\|$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se cumple

$$|df(p).h| \leq \|df(p)\|\|h\|$$

y aplicando la desigualdad triangular en (4.3.12) conseguimos

$$|f(p+h) - f(p)| \leq |f(p+h) - f(p) - df(p).h| + |df(p).h|$$

Consecuentemente, si $0 < \|h\| < \delta_0$

$$|f(p+h) - f(p)| < K\|h\| \qquad (4.3.13)$$

donde $K = 1+\|df(p)\|$. Ahora bien, dado $\epsilon > 0$, elegimos $\delta = min\{\delta_0, \epsilon/K\}$. Entonces

$$|f(p+h) - f(p)| < \epsilon$$

para todo h tal que $0 < \|h\| < \delta$. Esto muestra que

$$\lim_{h \to 0} f(p+h) = f(p)$$

Por tanto, f es continua en p. □

Proposición 4.3.5. *Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables.*

(a) *La suma $f + g$ es diferenciable.*

(b) *El producto fg es diferenciable.*

(c) *El cociente f/g es diferenciable en $V = U \setminus \{p \in U \,:\, g(p) \neq 0\}$.*

Demostración. □

Corolario 4.3.6. *Toda función polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Demostración. □

Ejemplo 4.3.7. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, pues, es el cociente de funciones diferenciables y $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ nunca se anula en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.3.8. La función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Teorema 4.3.9. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existen y son continuas en $p \in U$, entonces f es diferenciable en p.*

Demostración. □

Tal vez resulte dificultoso utilizar la definición para comprobar que una función es diferenciable en un punto; sin embargo, debido al teorema anterior podemos ver de manera fácil que la siguiente función es diferenciable en el punto indicado

Ejemplo 4.3.10. Sea la función $f(x,y) = x\sqrt{y}$. Esta función es diferenciable en $(1,4)$ ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$$

ambas son continuas en el punto $(1,4)$.

Observación 4.3.1. El teorema 4.3.9 nos da una condición suficiente de diferenciabilidad mas no necesaria como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.11. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$; sin embargo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no son continuas en $(0,0)$. En el primer caso podemos considerar el conjunto $A = \{\left(\frac{1}{n\pi}, 0\right) : n \in \mathbb{Z}\}$, y sobre este conjunto tenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n\pi}, 0\right) \quad \nexists$$

En el segundo caso podemos considerar el conjunto $B = \{\left(0, \frac{1}{n\pi}\right) : n \in \mathbb{Z}\}$, y sobre este conjunto tenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{1}{n\pi}\right) \quad \nexists.$$

Definición 4.3.2. (Linealización). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $(x_0, y_0) \in U$. Entonces existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Así, podemos definir la función $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

que es una función lineal cuya gráfica es un plano en $\mathbb{R}^3$ pasando por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La función L se llama *linealización de f* en el punto (x_0, y_0), y el valor $L(x,y)$ es llamado *aproximación lineal de f* en el punto (x,y), en este caso escribimos $f(x,y) \approx L(x,y)$.

Ejemplo 4.3.12. Sea $f(x,y) = xe^{xy}$. Entonces

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$$

Aproximemos $f(1.1, -0.1)$. En efecto, $(1.1, -0.1) = (1, 0) + (0.1, -0.1)$, en este caso $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y tenemos

$$f_x(1, 0) = e^{(1)(0)} + (1)(0)e^{(1)(0)} = 1 \quad \text{y} \quad f_y(1, 0) = (1)^2 e^{(1)(0)} = 1$$

Luego

$$L(x, y) = f(1, 0) + 1(x - 1) + 1(y - 0) = 1 + x - 1 + y = x + y.$$

Por tanto,

$$f(1.1, -0.1) \approx L(1.1, -0.1) = 1.1 + (-0.1) = 1.$$

Ejemplo 4.3.13. Hallar la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y utilícela para aproximar el número

$$\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}.$$

Solución: Tenemos que

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Así que

$$f_x(3, 2, 6) = \frac{3}{7}, \quad f_y(3, 2, 6) = \frac{2}{7}, \quad f_z(3, 2, 6) = \frac{6}{7}$$

Luego la aproximación lineal de f en $(3, 2, 6)$ es

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= 7 + \frac{3}{7}(x - 3) + \frac{2}{7}(y - 2) + \frac{6}{7}(z - 6) \\ &= \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2} &= f(3.02, 1.97, 5.99) \\ &\approx L(3.02, 1.97, 5.99) \\ &= \frac{3}{7}(3.02) + \frac{2}{7}(1.97) + \frac{6}{7}(5.99) \\ &= 6.9914 \end{aligned}$$

Definición 4.3.3. (Planos tangentes). Si una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $p = (x_0, y_0) \in U$, sabemos que existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

en este caso la ecuación del *plano tangente* a la gráfica de f en en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ está dada por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ejemplo 4.3.14. De acuerdo al ejemplo 4.3.12 resulta que $L(x, y) = x + y$ es la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = xe^{xy}$ en el punto $(1, 0, 1)$.

Ejemplo 4.3.15. Consideremos el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sea $(1, 1, 2)$ un punto de él. Tenemos $f_x = 2x$ y $f_y = 2y$, de donde, $f_x(1, 1) = 2$ y $f_y(1, 1) = 2$. Luego

$$z = L(x, y) = f(1, 1) + 2(x - 1) + 2(y - 1) = 2 + 2x - 2 + 2y - 2 = 2x + 2y - 2$$

es la ecuación del plano tangente a $Gr(f)$ en $(1, 1, 2)$.

4.4 Derivada Direccional, Gradiente y Diferenciales

Definición 4.4.1. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde U es abierto y $p \in U$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, definimos la *derivada direccional de f en p en la dirección del vector v*, denotada por $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ o $df(p).v$ como el límite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Observación 4.4.1. Debemos destacar que en muchos libros de Cálculo como en éste, se exige que v tenga norma 1; sin embargo adoptaremos la definición inicial con el propósito que $\frac{\partial f}{\partial v}$ dependa linealmente de v (que ocurre cuando f es diferenciable). Para ver esto, en primer lugar, si $0 \neq a \in \mathbb{R}$, entonces existe $\frac{\partial f}{\partial (av)}$ en un punto $p \in U$ si y sólo si existe $\frac{\partial f}{\partial v}$; en este caso tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(av)}(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+hav)-f(p)}{h}\\ &= a\lim_{h\to 0}\frac{f(p+hav)-f(p)}{ah}\\ &= a\frac{\partial f}{\partial v}(p)\end{aligned}$$

Además, si f es diferenciable se sigue de la proposición 4.4.3

$$\frac{\partial f}{\partial(u+v)}(p) = \frac{\partial f}{\partial u}(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Ejemplo 4.4.1. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$, donde $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $f(x,y) = x^2+y^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((x,y)+t(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\big)-f(x,y)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big(x+\frac{t}{\sqrt{2}}, y+\frac{t}{\sqrt{2}}\big)-f(x,y)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\big(x+\frac{t}{\sqrt{2}}\big)^2+\big(y+\frac{t}{\sqrt{2}}\big)^2-x^2-y^2}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2xt}{\sqrt{2}}+\frac{2yt}{\sqrt{2}}+t^2}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\,t(x+y)+t^2}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}[\sqrt{2}(x+y)+t] = \sqrt{2}(x+y).\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.2. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ donde $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(\frac{3}{5},\frac{4}{5})\big)-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{3t}{5},\frac{4t}{5})-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\left(\frac{3t}{5}\right)\left(\frac{4t}{5}\right)}{\left(\frac{3t}{5}\right)^2+\left(\frac{4t}{5}\right)^2}-0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{12}{25}\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \nexists
\end{aligned}
$$

La siguiente proposición nos da un criterio más simple para el cálculo de derivadas direcccionales

Proposición 4.4.3. *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, diferenciable en el punto $p \in U$ y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$
\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Big).(v_1, \dots, v_n)
$$

Demostración. □

Ejemplo 4.4.4. Sea $f(x,y) = xseny$ y calculemos $\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)}(1,\pi)$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial\Big(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\Big)}(1,\pi) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((1,\pi)+t\big(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\big)\big)-f(1,\pi)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\Big(1-\frac{2t}{\sqrt{13}},\pi+\frac{3t}{\sqrt{13}}\Big)-f(1,\pi)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\Big(1-\frac{2t}{\sqrt{13}}\Big)sen\Big(\pi+\frac{3t}{\sqrt{13}}\Big)-sen\pi}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-\Big(1-\frac{2t}{\sqrt{13}}\Big)sen\Big(\frac{3t}{\sqrt{13}}\Big)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\Big(\frac{2t}{\sqrt{13}}-1\Big)\frac{sen\Big(\frac{3t}{\sqrt{13}}\Big)\Big(\frac{3}{\sqrt{13}}\Big)}{\frac{3t}{\sqrt{13}}}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{3}{\sqrt{13}}\Big(\frac{2t}{\sqrt{13}}-1\Big)\\
&= \lim_{t\to 0}\Big(\frac{6t}{13}-\frac{3}{\sqrt{13}}\Big)\\
&= -\frac{3}{\sqrt{13}}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial\Big(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\Big)}(1,\pi) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi),\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)\Big).\Big(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\Big)\\
&= (sen\pi, cos\pi).\Big(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\Big)\\
&= (0,-1).\Big(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\Big)\\
&= -\frac{3}{\sqrt{13}}.
\end{aligned}
$$

Definición 4.4.2. (Gradiente). Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, diferenciable en el punto $p \in U$. Definimos el *vector gradiente de f en el punto p*, denotado por $grad\, f(p)$ o $\nabla f(p)$ como el vector

$$grad\, f(p) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Big)$$

Ejemplo 4.4.5. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2+y^2$. Entonces

$$\nabla f(1,2) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\Big) = (2,4).$$

Proposición 4.4.6. (Propiedades del vector gradiente). *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $p \in U$ y supongamos que $\nabla f(p) \neq 0$. Se cumplen:*

(a) *El vector gradiente $\nabla f(p)$ es perpendicular a la curva (superficie) de nivel de f que pasa por ese punto.*

(b) *El valor máximo de la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$ es $|\nabla f(p)|$. Esto significa que la función f crece más rapido en la dirección de $\nabla f(p)$ y decrece más rapido en la dirección de $-\nabla f(p)$.*

Demostración. $\square$

Ejemplo 4.4.7. Sea $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $w = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(1,2) = -2$$

Calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Solución: Desde que f es diferenciable en $(1,2)$ tenemos

$$\begin{aligned} 4 = \frac{\partial f}{\partial v}(1,2) &= \nabla f(1,2).v \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\Big).\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

También

$$\begin{aligned} -2 = \frac{\partial f}{\partial w}(1,2) &= \nabla f(1,2).w \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\Big).\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

De las relaciones (4.4.14) y (4.4.15) se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \sqrt{2}$$

Ejemplo 4.4.8. (Ejemplo de plano tangente definido implícitamente).

Definición 4.4.3. (Diferencial de una función). De acuerdo a la proposición 4.4.3, *el diferencial de f en el punto p* es el funcional lineal $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuyo valor en el vector $v = (v_1, \ldots, v_n)$ es dado por

$$df(p).v = \nabla f(p).v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i \tag{4.4.16}$$

La representación matricial del funcional lineal $df(p)$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es precisamente la matriz de orden $1 \times n$ dada por

$$Df(p) = grad\, f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

Cuando f es diferenciable en todo punto de U, obtenemos una aplicación $df : U \to (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que hace corresponder a cada punto $p \in U$, el funcional $df(p)$.

Indicaremos a la base canónica de $(\mathbb{R}^n)^*$ por $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$. Luego si $v = (v_1, \ldots, v_n)$ se tiene $dx_i.v = v_i$, y la expresión (4.4.16) queda

$$df(p).v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dx_i.v$$

Como esta igualdad vale para cada $v \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dx_i \tag{4.4.17}$$

Finalmente, como la igualdad (4.4.17) es también válida para todo $p \in U$, podemos escribir

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Esta expresión es llamada *diferencial de f*.

Observación 4.4.2. Si en la definición anterior tomamos en particular la función de dos variables $z = f(x, y)$, escribimos

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Si $p = (a, b)$ y hacemos $dx = \triangle x = x - a$ y $dy = \triangle y = y - b$, entonces el diferencial de f en el punto p es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Geométricamente tenemos

De este modo podemos escribir

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + dz$$

Ejemplo 4.4.9. El largo y el ancho de un rectángulo miden respectivamente $30\,cm$ y $24\,cm$, con un error máximo en la medición de $0.1\,cm$ en cada una de las dimensiones. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

Solución: Sea $A(x, y) = xy$ la función área. Tenemos

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = ydx + xdy$$

y también $|\triangle x| \leq 0.1,\ \ |\triangle y| \leq 0.1$. Ahora usamos $dx = 0.1$, $dy = 0.1$ con $x = 30$, $y = 24$. Entonces el máximo error en el área es

$$dA = 24(0.1) + 30(0.1) = 5.4cm^2.$$

Ejemplo 4.4.10. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si la resistencia se mide en ohms como $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 40\Omega$ y $R_3 = 50\Omega$, con un error posible de 0.5 por ciento en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

Solución: Calculemos $\frac{\partial R}{\partial R_1}$ tomando derivadas parciales en ambos lados

$$\frac{\partial}{\partial R_1}\Big(\frac{1}{R}\Big) = \frac{\partial}{\partial R_1}\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\Big) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2}$$

y por simetría obtenemos

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{R^2}{R_3^2}$$

Cuando $R_1 = 25$, $R_2 = 40$ y $R_3 = 50$,

$$\frac{1}{R} = \frac{17}{200} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{200}{17}\,\text{ohms}$$

Desde que el error posible para cada R_i es de 0.5 por ciento, el máximo error de R se consigue haciendo $\triangle R_i = 0.005 R_i$. Así que

$$\begin{aligned}\triangle R \approx dR &= \frac{\partial R}{\partial R_1}\triangle R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\triangle R_2 + \frac{\partial R}{\partial R_3}\triangle R_3 \\ &= (0.005)R^2\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\Big) \\ &= (0.005)R = \frac{1}{17} \approx 0,059\,\text{ohms.}\end{aligned}$$

4.5 Regla de la Cadena

Recordemos de la definición 4.3.1 que una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $p = (x_0, y_0) \in U$ cuando tenemos

$$f\big((x_0, y_0) + (h_1, h_2)\big) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$
y de acuerdo a la proposición 4.4.3, la expresión anterior se puede escribir como
$$f\big((x_0,y_0)+(h_1,h_2)\big) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(h_1,h_2) + r(h_1,h_2)$$
donde
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$
y sabemos que $df(x_0,y_0)$ es un funcional lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Esta última relación sugiere definir diferenciabilidad de $U \subseteq \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.5.1. Una función $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ se llama *diferenciable en el punto* $p \in U$ cuanto existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que
$$f(p+v) = f(p) + T_p(v) + r(v), \quad \text{donde} \quad \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$
La transformación lineal $df(p) = T_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ posee en relación a las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ una representación matricial de orden $n \times m$ llamada *matriz jacobiana de* f *en el punto* p, denotada por $D(f)(p)$ o también $Jac(f)(p)$. Más precisamente, si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, entonces
$$Jac(f)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$
La función f es *diferenciable* cuando es diferenciable en cada punto de U.

Proposición 4.5.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto. La aplicación $f : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto $p \in U$ si y sólo si cada una de las funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en ese punto.*

Demostración. □

Ejemplo 4.5.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^{xy}, sen(xy))$. Entonces f es diferenciable desde que cada función coordenada lo es; además para cada punto (x, y) se tiene

$$Jac(f)(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5.3. Sea $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Entonces

$$Jac(f)(r, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5.4. Sea $f(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$. Entonces

$$Jac(f)(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Teorema 4.5.5. (Regla de la cadena). *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en el punto p, con $f(U) \subseteq V$ y $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en el punto $f(p)$. Entonces $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto p; además*

$$d(g \circ f)(p) = d(g)(f(p)) \circ d(f)(p) \quad y \quad D(g \circ f)(p) = D(g)(f(p))D(f)(p).$$

Demostración. □

Ejemplo 4.5.6. Sea $f(u, v) = (e^{u-2}, u^2 - v^2)$ y $g(x, y) = (x + 2, x - y^2)$. Calculemos $D(f \circ g)(0, 1)$ a partir de la composición y utilizando la regla de la cadena.

Solución: (i) Componiendo tenemos

$$(f \circ g)(x, y) = f(x + 2, x - y^2) = (e^x, 4 + 4x + 2xy^2 - y^4)$$

entonces

$$D(f \circ g)(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 4 + 2y^2 & 4xy - 4y^3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$D(f \circ g)(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii) Ahora por la regla de la cadena se tiene

$$D(f \circ g)(0,1) = D(f)(g(0,1))D(g)(0,1)$$

Tenemos $g(0,1) = (2,-1)$ y

$$D(f)(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u-2} & 0 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \Rightarrow D(f)(g(0,1)) = D(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

También

$$D(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2y \end{pmatrix} \Rightarrow D(g)(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$D(f \circ g)(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5.7. Calcular $D(f \circ g)(0)$, donde

$$f(x,y) = \sin x \cos y \qquad \text{y} \qquad g(t) = (\pi t, \sqrt{t})$$

Solución: Debemos notar que no es posible aplicar la regla de la cadena desde que g no es diferenciable en $t = 0$. Componiendo tenemos

$$(f \circ g)(t) = f(\pi t, \sqrt{t}) = \sin \pi t \cos \sqrt{t}.$$

Desde que $f \circ g$ es una función real de variable real, se sigue

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(0) &= (f \circ g)'(0) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t \cos \sqrt{t} - 0}{t} \\ &= \pi \lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t \cos \sqrt{t}}{\pi t} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

4.6 Derivadas de Orden Superior

Sea la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U. Si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en cualquier punto $(x, y) \in U$, entonces podemos considerar las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

tal que a cada punto $(x, y) \in U$ se le hace corresponder las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

respectivamente. Definimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &:= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) & \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) & \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &:= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \end{aligned}$$

Otras notaciones

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_x = D_{11} f \\ f_{xy} &= (f_x)_y = D_{12} f \\ f_{yx} &= (f_y)_x = D_{21} f \\ f_{yy} &= (f_y)_y = D_{22} f \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.1. Sea $f(x, y) = x^2 e^y$. Entonces $f_x = 2xe^y$ y $f_y = x^2 e^y$. Luego

$$f_{xx} = 2e^y, \quad f_{xy} = 2xe^y, \quad f_{yy} = x^2 e^y, \quad f_{yx} = 2xe^y.$$

Ejemplo 4.6.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2 - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para $(x, y) \neq (0, 0)$ las derivadas de estas función son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x^3y^2 - xy^3}{x^2 + y^2}\Big) = \frac{x^4y^2 + x^2y^3 + 3x^2y^4 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x^3y^2 - xy^3}{x^2 + y^2}\Big) = \frac{2x^5y - 3x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3(0)^2-h(0)^3}{h^2+0^2}-0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^3h^2-0(h)^3}{0^2+h^2}-0}{h} = 0.$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{x^4y^2+x^2y^3+3x^2y^4-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2x^5y-3x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(0,0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^4h^2+0^2h^3+3(0)^2h^4-h^5}{(0^2+h^2)^2}-0}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(0,0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^5(0)-3h^30^2-h(0)^4}{(h^2+0^2)^2}-0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Teorema 4.6.3. (Schwartz). *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto U de $\mathbb{R}^2$. Si las derivadas*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

existen y son continuas en U, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Demostración. □

4.7 Extremos Locales y Multiplicadores de Lagrange

Definición 4.7.1. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo local* (resp. *mínimo local*) en un punto $x_0 \in X$ si existe una bola abierta $B(x_0, r)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in B(x_0, r) \cap X$. Un punto $x_0 \in X$ el cual es máximo local o mínimo local es llamado *extremo local.*

Si $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in X$, entonces x_0 se llama *máximo global o absoluto* (resp. *mínimo global o absoluto*) y un punto que es máximo o mínimo absoluto se llama *extremo absoluto.*

Teorema 4.7.1. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y sea p un punto interior de X tal que existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Si p es un extremo local, entonces $\nabla f(p) = 0$, es decir,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \tag{4.7.18}$$

Demostración. Hagamos $p = (a_1, \ldots, a_n)$. Por ser extremo local, existe una bola abierta $B(p, r)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que p es un extremo absoluto de f sobre $B(p, r) \cap X$. Sea $\varphi(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n)$ el cual está definido en $\pi_1(B(p, r) \cap X) \subseteq \mathbb{R}$. Ahora bien, a_1 es un extremo local de la función $\varphi(x)$, de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \varphi'(a_1) = 0$$

Las otras igualdades de (4.7.18) son probadas de manera similar. $\square$

Definición 4.7.2. (Punto crítico). Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y sea p un punto interior de X tal que existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ para todo $1 \leq i \leq n$, decimos que p es un *punto crítico* de f si $\nabla f(p) = 0$.

Observación 4.7.1. Del teorema anterior se sigue que todo extremo local es un punto crítico. Debemos observar también que no todo punto crítico es extremo local.

Por ejemplo consideremos la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. De las igualdades

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

se sigue que $(0, 0)$ es el único punto crítico de f; sin embargo, tomando una bola abierta suficientemente pequeña $B_r(0, 0)$ se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) > 0$ para $|x| < r$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) < 0$ para $|y| < r$. De esto se sigue que $(0, 0)$ no es un extremo local para f.

Definición 4.7.3. (Punto de silla). Un punto crítico de $f : X \to \mathbb{R}$ que no es extremo local, es llamado *punto de silla*.

Ejemplo 4.7.2. El punto $(0, 0)$ de la observación 4.7.1 es un punto de silla para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Teorema 4.7.3. (Condiciones suficientes para la existencia de extremos locales). *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 definida en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Dado un punto crítico $p \in U$, se cumplen*

(a) *Si todos los valores propios de $H(p)$ son positivos, entonces f tiene mínimo local en p.*

(b) *Si todos los valores propios de $H(p)$ son negativos, entonces f tiene máximo local en p.*

(c) *Si $H(p)$ tiene valores propios positivos y negativos, entonces f tiene punto de silla en p.*

Demostración. □

Corolario 4.7.4. *Con las hipótesis del teorema anterior y $D = det(H(p))$, se cumplen*

(a) *Si $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$, entonces f tiene mínimo local en p.*

(b) *Si $D > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$, entonces f tiene máximo local en p.*

(c) *Si $D < 0$, entonces f tiene punto de silla en p.*

(d) *Si $D = 0$, no podemos afirmar nada acerca de p.*

Demostración. Hagamos

$$H(p) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

que nos da la ecuación característica

$$0 = det[\lambda I_2 - H(p)] = \lambda^2 - (A + C)\lambda + D$$

Los valores propios λ_1 y λ_2 están relacionados por las fórmulas

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C \qquad \text{y} \qquad \lambda_1\lambda_2 = D \tag{4.7.19}$$

Si $D > 0$, tenemos $AC > B^2 \geq 0$ y A, C tienen el mismo signo. Se sigue de (4.7.19) que λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, lo que prueba (a) y (b). □

Ejemplo 4.7.5. Hallar los extremos locales de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

Ejemplo 4.7.6. Hallar los máximos y mínimos locales de la función $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$.

4.8 Ejercicios

Ejercicio 4.8.1. Sea $f(x,y)=\sqrt{3x-y}$. Utilizando la definición calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-y}-\sqrt{3x-y}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3x+3h-y}-\sqrt{3x-y}\,)(\sqrt{3x+3h-y}+\sqrt{3x-y}\,)}{h(\sqrt{3x+3h-y}+\sqrt{3x-y}\,)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3x+3h-y)-(3x-y)}{h(\sqrt{3x+3h-y}+\sqrt{3x-y}\,)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h-y}+\sqrt{3x-y}\,)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x+3h-y}+\sqrt{3x-y}}\\
&= \frac{3}{2\sqrt{3x-y}}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.8.2. Dada la función $f(x,y)=\sqrt{x(y-2)}$

(a) Determinar el dominio de f y el conjunto de puntos donde existen ambas derivadas parciales.

(b) Encontrar la aproximación lineal de f (justificar su existencia) en el punto $(1,6)$ y utilizarla para calcular aproximadamente $f(0.96,6.03)$.

Solución. (a) $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-2) \geq 0\}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)(y-2)}-\sqrt{x(y-2)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{(x+h)(y-2)}-\sqrt{x(y-2)}\,)(\sqrt{(x+h)(y-2)}+\sqrt{x(y-2)}\,)}{h(\sqrt{(x+h)(y-2)}+\sqrt{x(y-2)}\,)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(y-2)-x(y-2)}{h(\sqrt{(x+h)(y-2)}+\sqrt{x(y-2)}\,)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(y-2)}{\sqrt{(x+h)(y-2)}+\sqrt{x(y-2)}} \\
&= \frac{y-2}{2\sqrt{x(y-2)}}
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x(y+h-2)}-\sqrt{x(y-2)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x(y+h-2)}-\sqrt{x(y-2)}\,)(\sqrt{x(y+h-2)}+\sqrt{x(y-2)}\,)}{h(\sqrt{x(y+h-2)}+\sqrt{x(y-2)}\,)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(y+h-2)-x(y-2)}{h(\sqrt{x(y+h-2)}+\sqrt{x(y-2)}\,)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x}{\sqrt{x(y+h-2)}+\sqrt{x(y-2)}} \\
&= \frac{x}{2\sqrt{x(y-2)}}
\end{aligned}$$

Luego el conjunto donde existen ambas derivadas parciales es

$$U = \{(x, y) : x(y-2) > 0\}.$$

(b) De acuerdo a la parte (a), la función f es claramente diferenciable en $(1, 6)$; además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,6) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,6) = \frac{1}{4}$$

Luego

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,6) + f_x(1,6)(x-1) + f_y(1,6)(y-6) \\ &= 2 + 1(x-1) + \frac{1}{4}(y-6) \\ &= x + \frac{y}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(0.96, 6.03) \cong L(0.96, 6.03) = (0.96) + \frac{6.03}{4} - \frac{1}{2}$.

Ejercicio 4.8.3. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x-y^2}, & \text{si } \ x \neq y^2 \\ 0, & \text{si } \ x = y^2 \end{cases}$$

Calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^4}{h-0^2} - 0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{0-h^2} - 0}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Veamos a continuación si f es diferenciable en el origen: tomando el camino

$$r(t): \qquad x(t) = t^2 + 2t^4, \qquad y(t) = t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

se tiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)^4}{x(t) - y(t)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

Así que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Por lo tanto, f no es continua en $(0,0)$.

Ejercicio 4.8.4. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x^2 + y^3, x - y + xy, xy^2)$. Si

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) = 2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) = 1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial g(0,1,1)}{\partial(1/2, 0, \sqrt{3}/2)} = 1 - \sqrt{3}$$

calcular

$$\frac{\partial(g \circ f)(1,-1)}{\partial(3/5, -4/5)}$$

Solución. Se sabe que

$$\begin{aligned}
1 - \sqrt{3} &= \frac{\partial g(0,1,1)}{\partial(1/2, 0, \sqrt{3}/2)} \\
&= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1), \frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)\Big).\Big(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\
&= \Big(2, 1, \frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)\Big).\Big(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\
&= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)
\end{aligned}$$

que implica

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1) = -2$$

Por otra parte,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1+y & -1+x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)(1,-1)}{\partial(3/5,-4/5)} &= \nabla(g\circ f)(1,-1).\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= D(g\circ f)(1,-1).\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= Dg(f(1,-1))Df(1,-1).\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= Dg(0,1,1)Df(1,-1).\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= \nabla g(0,1,1)Df(1,-1).\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1),\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,1),\frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)\Big)\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}.\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= (2,1,-2)\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}.\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= (2,10).\Big(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\Big)\\
&= -\frac{34}{5}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.8.5. Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $F(-4,3,1)=0$ y $\nabla F(-4,3,1)=(-2,0,3)$. Dada la superficie S definida por

$$F(3x-2y^2-z,x-y+2z,e^{xyz})=0$$

(a) Hallar la ecuación del plano tangente a S en el punto $(0,1,2)$.

(b) Hallar la ecuación de la recta normal a la superficie S en el punto $(0,1,2)$.

Solución. (a) Consideremos la función $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $G(x,y,z)=(3x-2y^2-z,x-y+2z,e^{xyz})$. Entonces

$$DG(x,y,z)=\begin{pmatrix} 3 & -4y & -1\\ 1 & -1 & 2\\ yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz}\end{pmatrix}$$

Haciendo $H=F\circ G$, tenemos

$$H(x,y,z)=F(3x-2y^2-z,x-y+2z,e^{xyz})$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\nabla H(0,1,2) &= \nabla(F\circ G)(0,1,2)\\
&= D(F\circ G)(0,1,2)\\
&= DF(G(0,1,2))DG(0,1,2)\\
&= \nabla F(-4,3,1)\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= (-2,0,3)\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= (0,8,2).
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente a S en el punto $(0,1,2)$ es

$$\nabla H(0,1,2).(x-0,y-1,z-2)=0$$

que equivale a

$$4y+z-6=0$$

(b) Finalmente, la ecuación de la recta normal esta dada por

$$\mathcal{L}_N: \qquad (x,y,z)=t(0,8,2)+(0,1,2); \qquad t\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 4.8.6. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla f(1,0,2)=(2,-1,3)$ y $g(u,v)=(3u-v,u^2+v-3,2u-v^2+4)$.

(a) Determinar la derivada direccional máxima de $f\circ g$ en $(u,v)=(1,2)$.

(b) Si $f(1,0,2)=5$, hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $S=\{(x,y,z): f(x,y,z)=5\}$, en el punto $(1,0,2)$.

Solución. (a) Debemos calcular $\|\nabla(f\circ g)(1,2)\|$. En efecto,

$$DG(u,v)=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 2u & 1\\ 2 & -2v\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(f \circ g)(1,2) &= D(f \circ g)(1,2) \\
&= Df(g(1,2))Dg(1,2) \\
&= Df(1,0,2)Dg(1,2) \\
&= \nabla f(1,0,2)Dg(1,2) \\
&= (2,-1,3)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\
&= (10,-15).
\end{aligned}$$

Luego $\|\nabla(f \circ g)(1,2)\| = 5\sqrt{13}$.

Capítulo 5

Integrales Dobles

En una sola variable, el proceso de derivar e integrar pueden ser pensados como operaciones inversas. Por ejemplo, para integrar la función $f(x)$ es necesario hallar una antiderivada de f, es decir, otra función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$. Nos preguntamos: ¿existe una manera similar de definir la integral de una función escalar de dos o más variables? La respuesta es afirmativa, como veremos en este capítulo.

5.1 Definición y Propiedades Generales

Recordemos que una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos $t_0, \ldots, t_k$ donde

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

La partición $\mathcal{P}$ divide al intervalo $[a, b]$ en k subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$. Una *partición* del rectángulo $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es un conjunto de la forma $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde cada $\mathcal{P}_i$ es partición de $[a_i, b_i]$. Supongamos por ejemplo que $\mathcal{P}_1 = \{s_0, \ldots, s_l\}$ es una partición de $[a_1, b_1]$ y $\mathcal{P}_2 = \{t_0, \ldots, t_k\}$ es partición de $[a_2, b_2]$, entonces la partición

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(s_0, t_0), \ldots, (s_0, t_k), \ldots, (s_l, t_0), \ldots, (s_l, t_k)\}$$

de $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ divide al rectángulo cerrado $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ en lk subrectángulos

$$[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j] \qquad (i, j) \in \{1, \ldots, l\} \times \{1, \ldots, k\}$$

En general si $\mathcal{P}_i$ divide al subintervalo $[a_i, b_i]$ en en N_i subintervalos, entonces $\mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ divide a R en $N_1 \times \ldots \times N_k$ subrectángulos.

Definición 5.1.1. Sea $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada sobre el rectángulo R y $\mathcal{P}$ una partición de R. Para cada subrectángulo S de la partición, sea

$$\begin{aligned} m_S(f) &:= inf\{f(x) \, : \, x \in S\} \\ M_S(f) &:= sup\{f(x) \, : \, x \in S\} \end{aligned}$$

y sea $\nu(S)$ el volumen de S. La *suma inferior* de f para la partición $\mathcal{P}$ se define por

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) := \sum_S m_S(f)\nu(S)$$

También definimos la *suma superior* de f para la partición $\mathcal{P}$ como

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) := \sum_S M_S(f)\nu(S)$$

Observación 5.1.1.

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P})$$

En efecto, para cada S tenemos $m_S \leq M_S$ que implica

$$m_S(f)\nu(S) \leq M_S(f)\nu(S).$$

Luego

$$\sum_S m_S(f)\nu(S) \leq \sum_S M_S(f)\nu(S)$$

Lema 5.1.1. *Si $\mathcal{P}'$ es un refinamiento de la partición $\mathcal{P}$, entonces*

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(f, \mathcal{P}') \qquad y \qquad \mathcal{U}(f, \mathcal{P}') \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P})$$

Demostración. Dado un subrectangulo S de $\mathcal{P}$, este es dividido en subrectángulos $S_1, \ldots, S_l$ de $\mathcal{P}'$. Así

$$\nu(S) = \nu(S_1) + \ldots + \nu(S_l)$$

Luego

$$\begin{aligned} m_S(f)\nu(S) &= m_S(f)\nu(S_1) + \ldots + m_S(f)\nu(S_l) \\ &\leq m_{S_1}(f)\nu(S_1) + \ldots + m_{S_l}(f)\nu(S_l) \\ &= \sum m_{S_i}(f)\nu(S_i) \end{aligned}$$

Haciendo variar S para la la partición $\mathcal{P}$, conseguimos

$$\sum_{S\in\mathcal{P}} m_S(f)\nu(S) \leq \sum_{S}\sum m_{S_i}(f)\nu(S_i) = \sum_{S\in\mathcal{P}'} m_S(f)\nu(S)$$

que implica

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(f,\mathcal{P}')$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} M_S(f)\nu(S) &= M_S(f)\nu(S_1) + \ldots + M_S(f)\nu(S_l) \\ &\geq M_{S_1}(f)\nu(S_1) + \ldots + M_{S_l}(f)\nu(S_l) \\ &= \sum M_{S_i}(f)\nu(S_i) \end{aligned}$$

que implica

$$\sum_{S\in\mathcal{P}} M_S(f)\nu(S) \geq \sum_{S\in\mathcal{P}}\sum_{S_i} M_{S_i}(f)\nu(S_i) = \sum_{S\in\mathcal{P}'} M_S(f)\nu(S)$$

Luego

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}') \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}).$$

$\square$

Observación 5.1.2. Dadas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ particiones cualesquiera, se tiene

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}') \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P})$$

En efecto,

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}') \leq \mathcal{L}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{P}') \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{P}') \leq \mathcal{L}(f,\mathcal{P})$$

Definición 5.1.2. Fijando una partición $\mathcal{P}'$, se tiene

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}') \quad \text{para toda partición} \quad \mathcal{P}$$

de donde

$$sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} \text{ es partición}\} \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}')$$

y haciendo variar $\mathcal{P}'$ obtenemos

$$sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} \text{ es partición}\} \leq inf\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}') \,:\, \mathcal{P}' \text{ es partición}\} \quad (5.1.1)$$

Una función acotada $f : R \to \mathbb{R}$ definida en el rectángulo R de $\mathbb{R}^n$ se llama *integrable* si vale la igualdad en (5.2.2). En este caso el número

$$\int_R f := sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} \text{ es partición}\} = inf\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}') \,:\, \mathcal{P}' \text{ es partición}\}$$

se llama *integral de f sobre R.*

5.2 Integrales Dobles Sobre Rectángulos

Recordemos que la integral definida de una función no negativa f representa el área "bajo" la curva $y = f(x)$. A continuación veremos que la *integral doble* de una función escalar no negativa $f(x, y) \geq 0$ representa el volumen "bajo" la superficie $z = f(x, y)$.

Definición 5.2.1. Sea f una función continua definida en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, es decir,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

Fijado un número $x^* \in [a, b]$, cortamos la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x^*$ paralelo al plano yz. Entonces el área $A(x^*)$ de la región plana entre la curva $z = f(x^*, y)$ y el plano xy cuando y varía sobre el intervalo $[c, d]$, depende sólo de x^*. Así tenemos

$$A(x^*) = \int_c^d f(x^*, y)dy.$$

Si reemplazamos x en lugar de x^* tenemos

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

donde x es fijado e y varía. Esto tiene sentido siempre que para x fijo, la función $f(x, y)$ es una función continua de y sobre el intervalo $[c, d]$.

Definimos la *integral doble de f sobre el rectángulo* $R = [a, b] \times [c, d]$ como

$$\int_R f(x, y)dA := \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy\Big)dx \tag{5.2.2}$$

Notemos que integrar $f(x,y)$ con respecto a y es la operación inversa de tomar la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a y. También podemos considerar el área de la región plana entre la superficie y el plano xy la cual es paralela al plano xz. En este caso definimos

$$\int_R f(x,y)dA := \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy \tag{5.2.3}$$

Cuando $f(x,y) \geq 0$ sobre $R = [a,b] \times [c,d]$, la integral doble definida por las fórmulas (5.2.2) y (5.2.3) (que son el mismo valor por el teorema de Fubinni) representa el volumen del sólido bajo la superficie $z = f(x,y)$.

Teorema 5.2.1. (Fubinni). *Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy$$

Ejemplo 5.2.2. Calcular la siguiente integral iterada

$$\int_1^3 \Big(\int_0^1 (1+4xy)dx\Big)dy$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \Big(\int_0^1 (1+4xy)dx\Big)dy &= \int_1^3 \Big[(x+2x^2y)\Big|_{x=0}^{x=1}\Big]dy \\
&= \int_1^3 (1+2y)dy \\
&= (y+y^2)\Big|_1^3 \\
&= 10.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.3. Calcular la siguiente integral iterada

$$\int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\pi/2} \sin x \cos y dy\Big)dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\pi/2}\sin x\cos y dy\Big)dx &= \int_0^{\pi/2}\Big((\sin x\sin y)\Big|_{y=0}^{y=\pi/2}\Big)dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin x dx\\ &= (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.4. Calcular la siguiente integral doble

$$\int\int_R \frac{xy^2}{x^2+1}dA$$

donde $R = \{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1,\ -3 \le y \le 3\}$

Solución:

$$\begin{aligned}\int\int_R \frac{xy^2}{x^2+1}dA &= \int_0^1\Big(\int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1}dy\Big)dx\\ &= \int_0^1\Big[\frac{xy^3}{3(x^2+1)}\Big|_{y=-3}^{y=3}\Big]dx\\ &= \int_0^1 \frac{18x}{x^2+1}dx\\ &= 9\ln(x^2+1)\Big|_1^2\\ &= 9\ln\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.5. Halle el volumen del sólido que se encuentra bajo el gráfico de la función

$$f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

y arriba del rectángulo $R = [-1,1]\times[-2,2]$.

Solución: es fácil ver que $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} V &= \int\int_R f(x,y)dA \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\Big(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\Big)dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\Big(y-\frac{x^2y}{4}-\frac{y^3}{27}\Big)\Big|_{y=-2}^{y=2}dx \\ &= \int_{-1}^{1}\Big(\frac{92}{27}-x^2\Big)dx \\ &= \Big(\frac{92}{27}x-\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{166}{27}. \end{aligned}$$

5.3 Integrales Sobre Regiones de Tipo I y II

Ejemplo 5.3.1. Al evaluar una integral doble sobre una región R se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_0^e\Big(\int_0^{y/e} f(x,y)dx\Big)dy + \int_e^{e^2}\Big(\int_0^{\sqrt{2-lny}} f(x,y)dx\Big)dy$$

Trace la región R y exprese la integral doble como una integral iterada con el orden de integración invertido. Aplique esto para calcular $\int\int_R f(x,y)dA$, siendo $f(x,y) = e^{x^2}$

5.4 Integrales Dobles sobre Regiones Generales

5.5 Cambio de Variables en Integrales Dobles

Recordemos un poco sobre el cambio de variables para integrales de funciones de una sola variable. Por ejemplo calculemos

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx$$

Sea

$$\begin{array}{rcl} f: [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

Si hacemos $u = 1 + x^2$, entonces $x = \sqrt{u-1}$. Luego

$$x = 1 \Rightarrow u = 2 \qquad \text{y} \qquad x = 2 \Rightarrow u = 5$$

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \varphi: [2,5] & \to & [1,2] \\ u & \mapsto & \sqrt{u-1} \end{array}$$

que implica $f(\varphi(u)) = f(\sqrt{u-1}) = \sqrt{u-1}\sqrt{u}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(2)}^{\varphi(5)} f(x)dx &= \int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx \\ &= \int_2^5 \sqrt{u}\frac{du}{2} \\ &= \int_2^5 \sqrt{u-1}\sqrt{u}\Big(\frac{1}{2\sqrt{u-1}}\Big)du \\ &= \int_2^5 f(\varphi(u))\varphi'(u)du. \end{aligned}$$

Como un teorema tenemos

Teorema 5.5.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \varphi(u)$ de clase C^1 tal que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Demostración. □

A continuación daremos la versión del teorema anterior para funciones de dos variables

Dada una función

$$\begin{array}{rcl} \varphi: D \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

tal que existan

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}$$

definimos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

llamado jacobiano de la función φ.

Ejemplo 5.5.2. Sea

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (u^2+v^2, uv) \end{array}$$

Tenemos que

$$x(u,v) = u^2+v^2 \qquad \text{y} \qquad y(u,v) = uv$$

en este caso se tiene

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}$$

Teorema 5.5.3. *Sea $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $\varphi : R' \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$, $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ una función biyectiva de clase C^1, tal que $Jac(\varphi)$ es inversible en todo punto de R'. Entonces*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_{R'} f(\varphi(u,v))|Jac(\varphi)(u,v)|dudv$$

Demostración. □

Notemos que

$$Jac(\varphi)(u,v) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

y $|Jac(\varphi)(u,v)|$ es el valor absoluto de $Jac(\varphi)(u,v)$.

Ejemplo 5.5.4. Calcular la integral

$$\int\int_R (x+y+1)dxdy$$

donde R es la región de la figura abajo

Solución: Sea $u = y - x$ y $v = y + x$. Entonces

$$x(u, v) = \frac{v-u}{2} \qquad \text{y} \qquad y(u, v) = \frac{v+u}{2} \quad \text{donde} \quad -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq u \leq 1$$

Tenemos así la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [-1,1]\times[1,2] & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}\right) \end{array}$$

Luego para $f(x, y) = x + y + 1$

$$\begin{aligned}
\int\int_R f(x,y)dxdy &= \int\int_{[-1,1]\times[1,2]} f(\varphi(u,v))|Jac(\varphi)(u,v)|dudv \\
&= \int_1^2\int_{-1}^1 \Big(\frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2} + 1\Big)\Big|det\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\Big|dudv \\
&= \int_1^2\int_{-1}^1 (v+1)\frac{1}{2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\int_{-1}^1 (v+1)dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (vu+u)\Big|_{-1}^1 dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (v+1)-(-v-1)dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (2v+2)dv \\
&= \frac{1}{2}(v^2+2v)\Big|_1^2 \\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.5. Calcular

$$\int\int_R x^2y^2dxdy$$

donde R es la región limitada por las curvas

$$xy = 1, \qquad xy = 1, \qquad xy = 2, \qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{y}{x} = 3$$

Solución: Sea $xy = u$ e $\frac{y}{x} = v$. Entonces $1 \leq u \leq 2$ y $1/2 \leq v \leq 3$. Despejando x e y en función de u y v podemos definir la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi: [1,2] \times [1/2,3] & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, v\sqrt{\frac{u}{v}}\right) \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int\int_R x^2y^2 dA &= \int\int_{[1,2]\times[1/2,3]} f(\varphi(u,v))|Jac(\varphi)(u,v)|dvdu \\
&= \int_1^2\int_{1/2}^3 u^2 \left| det \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2}\frac{v}{u} & \frac{1}{2}\frac{u}{v} \end{pmatrix} \right| dvdu \\
&= \int_1^2\int_{1/2}^3 \frac{u^2}{2v} dvdu \\
&= \int_1^2 \frac{u^2}{2}\big(\ln v\big)\Big|_{1/2}^3 du \\
&= \int_1^2 \frac{u^2}{2}\ln 6 du \\
&= (\ln 6)\frac{u^3}{6}\Big|_1^2 \\
&= \frac{7}{6}\ln 6.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.6. Calcular

$$\int\int_R cos\Big(\frac{y-x}{y+x}\Big)dA$$

donde R es la región trapezoidal con vértices

$$(1,0), \qquad (2,0), \qquad (0,2), \quad \text{y} \quad (0,1)$$

Solución:

Sea $u = y - x$ y $v = y + x$. Entonces

$$x = \frac{v-u}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{v+u}{2}$$

y podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \psi: & R & \to & R' \\ & (x,y) & \mapsto & (u(x,y), v(x,y)) = (y-x, y+x) \end{array}$$

de donde se tiene

$$\psi(1,0) = (-1,1) \qquad \psi(2,0) = (-2,2) \qquad \psi(0,2) = (2,2) \qquad \psi(0,1) = (1,1)$$

Luego

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [-v,v] \times [1,2] & \to & R \\ & (u,v) & \mapsto & \left(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}\right) \end{array}$$

que implica

$$Jac(\varphi)(u,v) = det\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_R cos\Big(\frac{y-x}{y+x}\Big)dA &= \int\int_{R'} cos\big(\frac{u}{v}\big)\frac{1}{2}dudv \\
&= \int_1^2\int_{-v}^{v}\frac{1}{2}cos\big(\frac{u}{v}\big)dudv \\
&= \int_1^2\frac{v}{2}sen\big(\frac{u}{v}\big)\big|_{-v}^{v}dv \\
&= \int_1^2\frac{v}{2}(sen(1)-sen(-1))dv \\
&= \int_1^2\frac{v}{2}(2sen(1))dv \\
&= sen(1)\int_1^2 vdv \\
&= (sen(1))\frac{v^2}{2}\big|_1^2 \\
&= (sen(1))(2-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{3}{2}sen(1).
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la transformación polar

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [r_0,r_1]\times[\theta_0,\theta_0] & \to & R \\ & (r,\theta) & \mapsto & (x(r,\theta),y(r,\theta)) \end{array}$$

donde

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Entonces

$$Jac(\varphi)(r,\theta) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

Luego

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

Ejemplo 5.5.7. Calcular

$$\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dA$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Solución: Sea $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, donde $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces

$$\begin{aligned}\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\theta \\ &= \frac{2\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

5.6 Ejercicios

Capítulo 6

Integrales Triples

Así como se definen integrales dobles, también definiremos integrales triples.

6.1 Integrales Triples sobre Cajas

Trataremos primero sobre una caja rectangular

$$B = \{(x, y, z) \,:\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq s \leq d\}$$

Dividimos B en subcajas

esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual longitud, dividiendo $[c, d]$ en m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ y el intervalo $[r, s]$ en n subintervalos, todos de igual longitud, respectivamente.

Ahora fijemos una subcaja

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

y tomemos un punto $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk}$

Definición 6.1.1. La integral triple de f sobre la caja B es

$$\int\int\int_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)V(B_{ijk})$$

si este límite existe (por ejemplo cuando f es continua).

Teorema 6.1.1. (Fubini). *Si f es continua en la caja*

$$B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$$

entonces

$$\int\int\int_B f(x,y,z)dV = \int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Demostración. □

Ejemplo 6.1.2. Calcular la integral triple

$$\int\int\int_B xyz^2 dV$$

donde

$$B = \{(x,y,z) \,:\, 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_B xyz^2 dV &= \int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 xyz^2 dxdydz\\
&= \int_0^3\int_{-1}^2 yz^2\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^1 dydz\\
&= \int_0^3\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}dydz\\
&= \int_0^3 z^2\Big(\frac{y^2}{4}\Big)\Big|_{-1}^2 dz\\
&= \int_0^3 \Big(z^2-\frac{z^2}{4}\Big)dz\\
&= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}dz\\
&= \frac{3}{4}\Big(\frac{z^2}{3}\Big)\Big|_0^3 = \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

6.2 Integrales sobre Regiones de Tipo I, II y III

6.3 Integrales Triples sobre Regiones Generales

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ una región acotada y encerramos E en una caja rectangular B, o sea, $E \subseteq B$. Consideremos la función

$$\overline{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{si } (x, y, z) \in E \\ 0, & \text{si } (x, y, z) \notin E \end{cases}$$

y definimos

$$\int\int\int_B f(x, y, z) dV = \int\int\int_B \overline{f}(x, y, z) dV$$

esta integral existe si f es continua.

Definición 6.3.1. (Integral sobre una región de tipo I). Una región de tipo I es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano xy y $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Geométricamente:

En este caso

$$\int\int\int_E f(x, y, z) dV = \int\int_D \Big[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \overline{f}(x, y, z) \Big] dA$$

Si D es de tipo I, o sea,

$$E = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Por otro lado, si D es del tipo II, o sea,

$$E = \{(x,y,z) \,:\, c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

Ejemplo 6.3.1. Calcular

$$\iiint_E zdV$$

donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

Solución:

$$E: \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_B zdV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} zdzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(\frac{z^2}{2}\Big)\Big|_0^{1-x-y} dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\Big]\Big|_0^{1-x} dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx \\
&= \frac{1}{6}\Big[-\frac{(1-x)^4}{4}\Big]\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

Definición 6.3.2. (Integral sobre una región de tipo II). Una región de tipo II es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (y, z) \in D, \; u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano yz y $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Geométricamente:

En este caso

$$\int\int\int_E f(x, y, z)dV = \int\int_D \Big[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \overline{f}(x, y, z)\Big] dA$$

Si D es de tipo I, o sea,

$$E = \{(x, y, z) \, : \, a \leq x \leq b, \; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \; u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

entonces

$$\int\int\int_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Por otro lado, si D es del tipo II, o sea,

$$E = \{(x, y, z) \, : \, c \leq y \leq d, \; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \; u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

entonces

$$\int\int\int_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Definición 6.3.3. (Integral sobre una región de tipo III). Una región de tipo III es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x, z) \in D, \; u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano yz y $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Geométricamente:

En este caso

$$\int\int\int_E f(x, y, z) dV = \int\int_D \Big[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} \overline{f}(x, y, z) dy \Big] dA$$

Si D es de tipo I, o sea,

$$E = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

entonces

$$\int\int\int_E f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx$$

Por otro lado, si D es del tipo II, o sea,

$$E = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

entonces

$$\int\int\int_E f(x, y, z)dV = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dzdxdy$$

Ejemplo 6.3.2. Calcular

$$\int\int\int_E cos(x + y + z)dV$$

donde E es la región

$$E: \qquad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq z \leq x.$$

6.4 Cambio de Variables en Integrales Triples

Sabemos que un punto $p \in \mathbb{R}^2$ en coordenadas polares (r, θ) puede expresarse en cooordenadas cartesianas como

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\sin\theta$$

En tres dimensiones hay un sistema de coordenadas llamada *coordenadas cilíndricas.* Un punto $p \in \mathbb{R}^3$ está representado por la terna (r, θ, z) donde r y θ son coordenadas polares de la proyección del punto p sobre el plano xy y z es la distancia dirigida del plano xy al punto p.

Ejemplo 6.4.1. Localicemos el punto con coordenadas cilíndricas $(3, \frac{2\pi}{3}, 1)$ y encuentre sus coordenadas rectangulares.

Ejemplo 6.4.2. *Encuentre coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares* $(3, -3, -7)$.

Solución: $(3, -3, -7)$

6.5 Ejercicios

Capítulo 7

Integrales de Línea y Superficie

7.1 Integrales de Línea de Campos Escalares

Recordemos que para una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la integral de f sobre $[a, b]$ es

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$$

Geométricamente, este número es el área de la región plana limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x.

Una interpretación física para este resultado es la siguiente: si $f(x)$ es la fuerza (a lo largo del eje x) aplicada a un objeto en la posición $x \in [a, b]$, entonces el trabajo que resulta de mover el objeto de la posición $x = a$ hasta $x = b$ es

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

A continuación extenderemos esta idea para definir la integral de línea de un campo escalar sobre una curva. Esta definición es motivada por la noción física de trabajo.

En física, la idea intuitiva de trabajo es

$$\text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Supongamos que queremos hallar el trabajo total de mover un objeto a lo largo de la curva C contenida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^2$. Digamos que C es de clase C^1 y está parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} r: & [a,b] & \to & X \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

donde hay una fuerza $f(x, y)$ la cual varía en la posición (x, y) del objeto y es aplicada en la dirección del movimiento a lo largo de la curva C.

Sea ahora $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^2$ y

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \qquad (n \geq 2)$$

una partición del intervalo $[a, b]$. Según vemos en la figura anterior, sobre un subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, la distancia recorrida $\triangle s_i$ es aproximadamente

$$\triangle s_i = \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2}$$

Luego, si el subintervalo es suficientemente pequeño, el trabajo de mover el objeto a lo largo de este arco es aproximadamente

$$\text{fuerza} \times \text{distancia} \approx f(x_i^*, y_i^*)\sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2}$$

donde $(x_i^*, y_i^*) = (x(t_i^*), y(t_i^*))$ para algún $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$. Por tanto

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*, y_i^*)\sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2}$$

es aproximadamente el trabajo total sobre la curva C.

Si hacemos $\triangle t_i = t_{i+1} - t_i$, entonces

$$\sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} = \sqrt{\left(\frac{\triangle x_i}{\triangle t_i}\right)^2 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle t_i}\right)^2}\,\triangle t_i$$

Luego

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*, y_i^*)\sqrt{\left(\frac{\triangle x_i}{\triangle t_i}\right)^2 + \left(\frac{\triangle y_i}{\triangle t_i}\right)^2}\,\triangle t_i$$

Tomando ahora límite cuando la longitud de cada subintervalo tiende a cero, la suma de la derecha se convierte en la integral de $t = a$ a $t = b$; $\frac{\triangle x_i}{\triangle t_i}$ y $\frac{\triangle y_i}{\triangle t_i}$ se convierten en $x'(t)$ y $y'(t)$, respectivamente y $f(x_i^*, y_i^*)$ en $f(x(t), y(t))$. Por tanto,

$$W = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Esta última fórmula sugiere la siguiente definición

Definición 7.1.1. Sea $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y sea C un camino de clase C^1 parametrizado por $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de modo que $r([a, b]) \subseteq X$. Definimos *la integral de línea de f a lo largo de la curva C* como

$$\int_C f ds := \int_a^b f(r(t))\|r'(t)\|dt$$

En este caso la función longitud de arco es

$$s = s(t) = \int_a^t \|r'(u)\|du$$

Podemos interpretar a ds como una longitud infinitesimal de arco, f puede ser pensado como la función altura y $f ds$ como el área de una sección de banda. Así, la integral de línea $\int_C f ds$ es el área total de esta banda como se muestra en la siguiente figura

Ejemplo 7.1.1. Evaluar la siguiente integral

$$\int_C y ds$$

donde

$$C: \qquad x = t^2, \qquad y = t, \quad 0 \leq t \leq 2$$

Solución. Parametrizamos la curva C como

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t^2, t) \end{array}$$

y $f(x,y) = y$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_C y ds &= \int_0^2 f(r(t)) \| r'(t) \| dt \\ &= \int_0^2 f(t^2, t) \| (2t, 1) \| dt \\ &= \int_0^2 t\sqrt{4t^2 + 1} dt \\ &= \left. \frac{(4t^2+1)^{3/2}}{12} \right|_0^2 \\ &= \frac{17\sqrt{17} - 1}{12} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.2. Evaluar la siguiente integral

$$\int_C xe^{yz}ds$$

donde C es el segmento de recta de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$.

Solución. Parametrizando la curva C tenemos

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (t,2t,3t) \end{array}$$

y $f(x,y,z) = xe^{yz}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_C xe^{yz}ds &= \int_0^1 f(r(t))\|r'(t)\|dt \\ &= \int_0^1 f(t,2t,3t)\|(1,2,3)\|dt \\ &= \int_0^1 te^{6t^2}\sqrt{14}dt \\ &= \frac{\sqrt{14}}{12}e^{6t^2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{14}}{12}(e^6-1) \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.3. Use la integral de línea para mostrar que el área de la superficie lateral de un cilindro circular de radio r y altura h es $2\pi rh$.

Solución. La curva C tiene ecuación $x^2+y^2=r^2$, que es parametrizada como sigue

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

Sea $f(x,y) = h$. Entonces

$$\begin{aligned} A = \int_C fds &= \int_0^{2\pi} f(r(t))\|r'(t)\|dt \\ &= \int_0^{2\pi} h\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} hr\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt \\ &= \int_0^{2\pi} hrdt \\ &= 2\pi hr \end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos nos dicen que la integral de línea de un campo escalar no varía si cambiamos el recorrido de la curva

Ejemplo 7.1.4. Calculemos

$$\int_C xyds$$

donde C es parametrizada por

$$\begin{array}{rcl} r: [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,t^2) \end{array}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_C xyds &= \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}dt \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.5. Ahora cambiemos la orientación de la curva por $-C$, es decir, $-C$ es parametrizada por

$$\begin{array}{rcl} \overline{r}: [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big((1-t),(1-t)^2\big) \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-C} xyds &= \int_0^1 (1-t)^3\sqrt{1+4(1-t)^2}dt \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \end{aligned}$$

Los ejemplos 7.1.4 y 7.1.5 sugieren una propiedad más general

Teorema 7.1.6. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y consideremos un camino $C \subseteq X$ de clase C^1, parametrizado por $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $r([a,b]) \subseteq X$. Sea $\hat{r} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ una reparametrización de r, digamos $\hat{r} = r \circ \varphi$ donde $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ es sobreyectiva de clase C^1 tal que $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [c,d]$. Si $\widehat{C}$ es la curva de clase C^1 parametrizada por $\hat{r}$, entonces*

$$\int_C fds = \int_{\widehat{C}} fds$$

Demostración. Supongamos primero que $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$, entonces $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Luego por hacer $u = \varphi(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{C}} f ds &= \int_c^d f(\hat{r}(t))\|\hat{r}'(t)\| dt \\
&= \int_c^d f((r \circ \varphi)(t))\|r'(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt \\
&= \int_c^d f((r \circ \varphi)(t))\|r'(\varphi(t))\| \, |\varphi'(t)| dt \\
&= \int_c^d f((r \circ \varphi)(t))\|r'(\varphi(t))\| \, \varphi'(t) dt \\
&= \int_a^b f(r(u))\|r'(u)\| du \\
&= \int_C f ds
\end{aligned}$$

Suponiendo ahora que $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in [c, d]$, se tiene $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{C}} f ds &= \int_c^d f(\hat{r}(t))\|\hat{r}'(t)\| dt \\
&= \int_c^d f((r \circ \varphi)(t))\|r'(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt \\
&= \int_c^d f((r \circ \varphi)(t))\|r'(\varphi(t))\| \, |\varphi'(t)| dt \\
&= -\int_c^d f((r \circ \varphi)(t))\|r'(\varphi(t))\| \, \varphi'(t) dt \\
&= -\int_b^a f(r(u))\|r'(u)\| du \\
&= \int_a^b f(r(u))\|r'(u)\| du \\
&= \int_C f ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 7.1.1. Tomemos r y $\overline{r}$ de los ejemplos 7.1.4 y 7.1.5. Definiendo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [0,1] & \to & [0,1] \\ & t & \mapsto & 1-t \end{array}$$

Entonces

$$(r \circ \varphi)(t) = r(1-t) = \big((1-t),(1-t)^2\big) = \overline{r}(t)$$

y $\varphi'(t) = -1 \neq 0$; además φ es sobreyectiva.

Los siguientes ejemplos muestran que la integral de línea de un campo escalar depende del número de veces que recorramos sobre el camino.

Ejemplo 7.1.7. Calculemos

$$\int_C (x^2+y^2)ds$$

donde C es parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \int_C (x^2+y^2)ds &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\|(-\sin t, \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.8. Calculemos

$$\int_C (x^2+y^2)ds$$

donde C_n es parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} r_n: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos nt, \sin nt) \end{array}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int_{C_n}(x^2+y^2)ds &= \int_0^{2\pi}(\cos^2 nt+\sin^2 nt)\|(-n\sin t, n\cos t)\|dt\\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{(-n\sin nt)^2+(n\cos nt)^2}dt\\
&= \int_0^{2\pi} n\,dt\\
&= 2\pi n.
\end{aligned}$$

Enunciemos a continuación nuestra propiedad general

Proposición 7.1.9. *Consideremos una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$. Sean $r, r_n : [a,b] \to X$ caminos de clase C^1 con la misma traza, y tomemos los caminos C y C_n parametrizados por r y r_n, respectivamente, tal que C es simple. Entonces*

$$\int_{C_n} f ds = n\int_C f ds$$

A continuación extenderemos nuestra definición de integral de línea a caminos C seccionalmente C^1. Esto significa que podemos escribir

$$C = C_1 + \ldots + C_k \quad \text{donde cada } C_i \text{ es de clase } \quad C^1$$

Definición 7.1.2. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua definida en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y sea C un camino seccionalmente C^1 parametrizado por $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, de modo que $r([a,b]) \subseteq X$. Definimos *la integral de línea de f sobre la curva C* como

$$\int_C f ds := \sum_{i=1}^{k}\int_{C_i} f ds$$

Ejemplo 7.1.10. Calculemos

$$\int_C f(x,y)ds$$

donde $f(x,y) = 2x + y$, y C es la curva de la figura

Solución. Tenemos que $C = C_1 + C_2$ donde C_1 y C_2 son parametrizadas por

$$\begin{array}{rcl} r_1 : [0,3] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,0) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} r_2 : [0,2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (3,t) \end{array}$$

respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds \\ &= \int_0^3 f(r_1(t)) \|r_1'(t)\| dt + \int_0^2 f(r_2(t)) \|r_2'(t)\| dt \\ &= \int_0^3 f(t,0) \|(1,0)\| dt + \int_0^2 f(3,t) \|(0,1)\| dt \\ &= \int_0^3 2t dt + \int_0^2 (6+t) dt \\ &= t^2 \Big|_0^3 + \left(6t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2 \\ &= 23 \end{aligned}$$

7.2 Más Aplicaciones de Integrales de Línea

Asumimos conocida la densidad lineal de un alambre en el espacio, digamos que dada por la función $\rho = \rho(x,y,z)$; también consideremos el camino C parametrizado por $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ en cuya imagen se encuentra el alambre. Entonces su *masa total* se calcula por la fórmula

$$M = \int_C \rho ds$$

Ejemplo 7.2.1. Sea un alambre cuya forma es la de una hélice parametrizada por

$$\begin{array}{rcl} r : [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t, t) \end{array}$$

Si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto al origen, valiendo $1gr/cm$ en el punto inicial $r(0) = (1,0,0)$. Calcular la masa total del alambre.

Solución: $\rho(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)$ y $\rho(1,0,0) = k = 1$. O sea, $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Luego

$$\begin{aligned}
M &= \int_C \rho ds \\
&= \int_0^{2\pi} \rho(r(t))\|r'(t)\|dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2}dt \\
&= 2\sqrt{2}\pi\Big(1 + \frac{4}{3}\pi^2\Big)gr
\end{aligned}$$

Definición 7.2.1. Si tenemos un alambre C en el plano, parametrizado por

$$\begin{array}{rccc} r: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$$

con función densidad $\rho = \rho(x,y)gr/cm$

(i) Los *momentos estáticos* del alambre en relación a los ejes x e y, que son M_x y M_y respectivamente, se calculan como

$$M_x = \int_C y\rho(x,y)ds, \qquad M_y = \int_C x\rho(x,y)ds$$

(ii) El *centro de masa* del alambre (de masa total M) se encuentra en el punto $(\overline{x},\overline{y})$, donde

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_C x\rho(x,y)ds}{\int_C \rho(x,y)ds}, \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_C y\rho(x,y)ds}{\int_C \rho(x,y)ds}$$

(ii) El *momento de inercia* I_L del alambre respecto de un eje L, cuya distancia al punto (x,y) (perteneciente al alambre), que resulta $\delta(x,y)$ es

$$I_L = \int_C \delta^2(x,y)\rho(x,y)ds$$

Si el alambre está en $\mathbb{R}^3$ y es imagen del camino $r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ con función densidad $\rho=\rho(x,y,z)$, los resultados similares a los anteriores son los siguientes:

(i') Los *momentos estáticos* del alambre respecto de los planos xy, xy e yz son

$$M_{xy} = \int_C z\rho(x,y,z)ds$$
$$M_{xz} = \int_C y\rho(x,y,z)ds$$
$$M_{yz} = \int_C x\rho(x,y,z)ds$$

(ii') El *centro de masa* del alambre (de masa total M) se encuentra en el punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, donde

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int_C x\rho(x,y,z)ds}{\int_C \rho(x,y,z)ds}$$
$$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\int_C y\rho(x,y,z)ds}{\int_C \rho(x,y,z)ds}$$
$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\int_C z\rho(x,y,z)ds}{\int_C \rho(x,y,z)ds}$$

(iii') El *momento de inercia* I_L del alambre respecto de un eje L, cuya distancia al punto (x,y,z) del alambre es $\delta(x,y,z)$ se calcula por

$$I_L = \int_C \delta^2(x,y,z)\rho(x,y,z)ds$$

Ejemplo 7.2.2. Calculemos el centro de masa de un alambre homogéneo C en forma de semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Solución: La parametrización de esta curva es

$$\begin{array}{rcl} r: [0,\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

$$M = \int_C ds = \int_0^\pi \|r'(t)\|dt = \int_0^\pi rdt = \pi r$$
$$M_x = \int_C yds = \int_0^\pi (r\sin t)rdt = r^2 \int_0^\pi \sin tdt = r^2(-\cos t)\Big|_0^\pi = 2r^2$$
$$M_y = \int_C xds = \int_0^\pi (r\cos t)rdt = r^2 \int_0^\pi \cos tdt = r^2(\sin t)\Big|_0^\pi = 0$$

Luego

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{0}{M} = 0 \qquad \text{y} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

Ejemplo 7.2.3. Calculemos los momentos de inercia del alambre homogéneo de densidad $\rho_0 gr/cm$, imagen del camino

$$\begin{array}{rccc} r: & [-a,a] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, \cosh t) \end{array}$$

respecto a los ejes de coordenadas.

Solución:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C y^2 \rho_0 ds \\ &= \rho_0 \int_{-a}^{a} \cosh^2 t \sqrt{1+\sinh^2 t}\, dt \\ &= \rho_0 \int_{-a}^{a} \cosh^3 t dt \\ &= \rho_0 \int_{-a}^{a} (1+\sinh^2 t)\cosh t dt \\ &= \rho_0 (\sinh t + \frac{1}{3}\sinh^3 t)\Big|_{-a}^{a} \\ &= 2\rho_0 \sinh a \big(1 + \frac{1}{3}\sinh^2 a\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_C x^2 \rho_0 ds \\ &= \rho_0 \int_{-a}^{a} t^2 \sqrt{1+\sinh^2 t}\, dt \\ &= \rho_0 \int_{-a}^{a} t^2 \cosh t dt \\ &= \rho_0 \big[(t^2+2)\sinh t - 2t\cosh t\big]\Big|_{-a}^{a} \\ &= 2\rho_0 \big[(a^2+2)\sinh a - 2a\cosh a\big] \\ &= 2\rho_0 \sinh a \big(1 + \frac{1}{3}\sinh^2 a\big) \end{aligned}$$

7.3 Campos Vectoriales

7.4 Integrales de Línea de Campos Vectoriales

Definición 7.4.1. Sea $F = (f_1, \dots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y sea C una curva en X parametrizada por $r = (x_1, \dots, x_n) : [a, b] \to X$ el cual es un camino de clase C^1. La *integral de línea del campo F sobre el camino C* se define como

$$\int_C F.\, dr := \int_a^b F(r(t)).\, r'(t)dt$$

Aquí, $F(r(t)).r'(t)$ es un producto interno

Desde que $F(r(t)) = (F_1(r(t)), \dots, F_n(r(t)))$ y $r'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ se sigue que

$$F(r(t)).\, r'(t) = F_1(r(t))x_1'(t) + \ldots + F_n(r(t)))x_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(r(t)).\, x_i'(t)$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_C F.\, dr &= \int_a^b F(r(t)).\, r'(t)dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} F_i(r(t)).\, x_i'(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_a^b F_i(r(t)).\, x_i'(t)dt\end{aligned}$$

Otras notaciones para $\int_C F.\,dr$ son

$$\int_C F \qquad \text{o} \qquad \int_C F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n = \int_C F_1 dx_1 + \ldots + \int_C F_n dx_n$$

Observación 7.4.1. En lo que sigue trabajaremos sobre $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el campo $F : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lo escribimos como $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ y el camino $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $r([a,b]) \subseteq X$ como $r(t) = (x(t), y(t))$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_C F.\,dr &= \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)dt\end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$ y sea $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ el camino $r(t) = (t, 2t^2)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_C F.\,dr &= \int_0^1 P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_0^1 Q(x(t),y(t))y'(t)dt \\ &= \int_0^1 [t^2 + (2t^2)^2](1)dt + \int_0^1 2(t)(2t^2)(4t)dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 4t^4)dt + \int_0^1 16t^4 dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{4t^5}{5}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{16t^5}{5}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{16}{5} \\ &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.2. Consideremos el campo del ejemplo anterior $F(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$ y tomemos el camino C parametrizado por $\hat{r} : [0,1/2] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\hat{r}(t) = (2t, 8t^2)$. Observemos que $\hat{r} = r \circ \varphi$, donde $\varphi : [0,1/2] \to [0,1]$ es $\varphi(t) = 2t$. Calculemos

$$\int_{\hat{r}} F.\,d\hat{r}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{r}} F.\,d\hat{r} &= \int_{\hat{r}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\
&= \int_0^{1/2} P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_0^{1/2} Q(x(t),y(t))y'(t)dt \\
&= \int_0^{1/2} [(2t)^2 + (8t^2)^2]2dt + \int_0^{1/2} 2(2t)(8t^2)16tdt \\
&= 8\int_0^{1/2} (t^2 + 16t^4)dt + 2^9 \int_0^{1/2} t^4 dt \\
&= 8\Big(\frac{t^3}{3} + \frac{16}{5}t^5\Big)\Big|_0^{1/2} + 2^9\Big(\frac{t^5}{5}\Big)\Big|_0^{1/2} \\
&= 8\Big(\frac{1}{24} + \frac{1}{10}\Big) + 2^9\Big(\frac{1}{160}\Big) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{16}{5} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Los ejemplos 7.4.1 y 7.4.2 sugieren la siguiente propiedad general

Proposición 7.4.3. *Sea $F : X \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y $r : [a,b] \to X$ una parametrización de C, de clase C^1. Dada una función sobreyectiva $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ de clase C^1 y $\hat{r} = r \circ \varphi$, parametrización de $\widehat{C}$. Se cumplen:*

(a) *Si $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$, entonces*

$$\int_{\widehat{C}} F.\,d\hat{r} = \int_C F.\,dr$$

(b) *Si $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$, entonces*

$$\int_{\widehat{C}} F.\,d\hat{r} = -\int_C F.\,dr$$

Demostración. (a) Supongamos que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Haciendo el cambio $u = \varphi(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{C}} F.\, d\hat{r} &= \int_c^d F(\hat{r}(t)).\, \hat{r}'(t)dt \\
&= \int_c^d F((r \circ \varphi)(t)).\, r'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&= \int_a^b F(r(u)).\, r'(u)du \\
&= \int_C F.\, dr
\end{aligned}$$

(b) De manera similar, sea $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$. Haciendo el cambio $u = \varphi(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{C}} F.\, d\hat{r} &= \int_c^d F(\hat{r}(t)).\, \hat{r}'(t)dt \\
&= \int_c^d F((r \circ \varphi)(t)).\, r'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&= \int_b^a F(r(u)).\, r'(u)du \\
&= -\int_a^b F(r(u)).\, r'(u)du \\
&= -\int_C F.\, dr
\end{aligned}$$

Lo que concluye el teorema. □

Observación 7.4.2. Con las hipótesis de la proposición anterior, se tiene en particular que

$$\int_{-C} F.\, dr = -\int_C F.\, dr$$

Consideremos ahora el siguiente ejemplo

Ejemplo 7.4.4. Sea el campo $F(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ y $-C$ el camino parametrizado por

$$\begin{array}{rccc}
\overline{r}: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\
& t & \mapsto & (1-t, 2(1-t)^2)
\end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-C} F.\, d(\overline{r}) &= \int_0^1 P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_0^1 Q(x(t),y(t))y'(t)dt \\
&= \int_0^1 [(1-t)^2 + 4(1-t)^4](-1)dt \\
&\quad + \int_0^1 2(1-t)[2(1-t)^2][-4(1-t)]dt \\
&= -\int_0^1 (t-1)^2 dt - 4\int_0^1 (t-1)^4 dt \\
&\quad - 16\int_0^1 (t-1)^4 dt \\
&= -\frac{(t-1)^3}{3}\Big|_0^1 - 20\frac{(t-1)^5}{5}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Definición 7.4.2. Sea $F : X \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido en el subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ y sea C un camino seccionalmente C^1 el cual es parametrizado por $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, de modo que $r([a,b]) \subseteq X$. Si $C = C_1 + \ldots + C_k$, definimos *la integral de línea de F sobre la curva C* como

$$\int_C F.\, dr := \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} F.\, dr_i \tag{7.4.1}$$

donde C_i es parametrizado por r_i para $1 \le i \le k$.

Ejemplo 7.4.5. Calculemos

$$\int_{\widehat{C}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$$

donde $\widehat{C} = C_1 + C_2$, siendo C_1 el segmento de $(0,0)$ a $(0,2)$, y C_2 es el segmento de $(0,2)$ a $(1,2)$.

Solución. Sea C_1 parametrizado por

$$\begin{array}{rccc} r_1 : & [0,2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (0,t) \end{array}$$

$$\int_{C_1} (x^2 + y^2)dx + 2xydy = \int_0^2 (0^2 + t^2)(0)dt + \int_0^2 2(0)(t)(1)dt = 0$$

Por otra parte, C_2 es parametrizado por

$$\begin{array}{rcl} r_2: [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (x^2+y^2)dx + 2xydy &= \int_0^1 (t^2+4)(1)dt + \int_0^1 2(t)(2)(0)dt \\ &= \int_0^1 (t^2+4)dt \\ &= \Big(\frac{t^3}{3}+4t\Big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.6. La fórmula (7.4.1) junto con los ejemplos 7.4.1, 7.4.4 y 7.4.5 nos dan el siguiente resultado

$$\int_{\widetilde{C}} F.\,d\tilde{r} = 0 \quad \text{donde} \quad \widetilde{C} = \widehat{C} + (-C)$$

También debemos notar que F es un campo vectorial gradiente. Más precisamente,

$$F(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)$$

donde

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2$$

y como vimos en los ejemplos anteriores, los caminos $\widehat{C}$ y C van de $(0,0)$ a $(1,2)$ y se tiene

$$f(1,2) - f(0,0) = \frac{13}{3}.$$

El ejemplo anterior sugiere nuestro principal resultado

Teorema 7.4.7. *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *F es el campo gradiente de una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1.*

(b) *La integral $\int_C F.\,dr$ del campo F a lo largo de un camino $r : [a,b] \to U$ seccionalmente C^1, depende sólo de los extremos $r(a)$ y $r(b)$.*

(c) *Para todo camino cerrado $r : [a, b] \to U$, seccionalmente C^1, se tiene*

$$\int_C F.\,dr = 0$$

Demostración. □

Observación 7.4.3. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea $r : [a, b] \to U$ un camino seccionalmente C^1, parametrización de la curva C. Entonces

$$\int_C \nabla f.\,dr = f(r(b)) - f(r(a)).$$

Ejemplo 7.4.8. Consideremos el campo $F(x, y) = (x + y^2, 2xy)$. Este es un campo conservativo, pues, $F = \nabla f$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2$. Se tiene para

$$\begin{array}{rccc} r_1 : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, t^2) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} r_2 : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, t^3) \end{array}$$

que

$$\int_{r_1} F.\,dr_1 = \frac{3}{2} = \int_{r_2} F.\,dr_2$$

Si C es un camino seccionalmente C^1 que va $(0, 0)$ a $(1, 1)$, parametrizado por $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, de acuerdo al corolario anterior también se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f.\,dr &= f(r(1)) - f(r(0)) \\ &= f(1, 1) - f(0, 0) \\ &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.9. El campo $F(x, y) = (x + y, y)$ no es conservativo. En efecto, para el camino C_1 parametrizado por

$$\begin{array}{rccc} r_1 : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, t^2) \end{array}$$

se tiene

$$\int_{C_1} F.\,dr_1 = \frac{4}{3}$$

y para el camino C_2 parametrizado por

$$\begin{array}{rccc} r_2 : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, t^3) \end{array}$$

se tiene

$$\int_{C_2} F.\, dr_2 = \frac{5}{4}$$

Según el teorema 7.4.7 se sigue que F no es conservativo.

A continuación presentaremos otro tipo de condiciones que debe cumplir un campo $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 para que sea conservativo. Tomemos $n = 2$ y consideremos el campo $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, donde $P, Q : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.

Si F es conservativo, existe una función potencial $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$$grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (P, Q) = F$$

O sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

Ahora bien, debido a que f es dos veces diferenciable, el teorema de Schwartz implica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Esta es una propiedad más general

Teorema 7.4.10. (Condiciones necesarias para que un campo vectorial sea conservativo). *Sea $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1 definido en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si F es conservativo, entonces*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \quad \textit{para todo } p \in U, \quad \textit{y todo } 1 \leq i \neq j \leq n$$

Demostración. $\square$

Observación 7.4.4. Si el campo $F = (P, Q, R) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Ejemplo 7.4.11. Tomemos el campo $F(x, y) = (x + y, y)$, o sea,

$$P(x, y) = x + y \qquad \text{y} \qquad Q(x, y) = y.$$

Se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Luego F no es conservativo.

Ahora nos preguntamos si dado un campo $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, y $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es tal que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \quad \text{para todo } \; p \in U, \; \text{ y todo } \; 1 \leq i \neq j \leq n \tag{7.4.2}$$

¿Se tiene entonces que F es conservativo? La respuesta es NO! como indica el siguiente ejemplo

Ejemplo 7.4.12. Tomemos el campo

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \end{array}$$

que es de clase C^1. Si $F = (P, Q)$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}\Big) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

y se cumplen las igualdades en (7.4.2). Sin embargo, dado el camino C

$$\begin{array}{rccc} r: & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & t & \mapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\int_C F.dr &= \int_0^{2\pi} P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_0^{2\pi} Q(x(t),y(t))y'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{-\sin t}{r}\Big)(-r\sin t)dt + \int_0^{2\pi} \Big(\frac{r\cos t}{r^2}\Big)(r\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

De acuerdo al teorema 7.4.7 se sigue que F no es conservativo. Sin embargo, $f(x,y) = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface $F(x,y) = grad\, f$. Pero esta igualdad es local, es decir, vale en $Dom(F) \cap Dom(f)$; luego F es localmente conservativo.

Teorema 7.4.13. *Sea $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1 definido en el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \quad \textit{para todo } p \in U, \quad \textit{y todo } 1 \leq i \neq j \leq n$$

entonces el campo F es localmente conservativo.

Demostración. □

Finalizaremos esta sección con una condición necesaria y suficiente para que un campo $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 sea conservativo.

Definición 7.4.3. (Conjunto convexo). Un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ se llama *convexo* si para todo par de puntos $p, q \in U$, el segmento de recta

$$[p,q] := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x = (1-t)p + tq,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

está contenido en U.

Ejemplo 7.4.14. Las bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ y todo el espacio $\mathbb{R}^n$ son ejemplos de conjuntos convexos.

Teorema 7.4.15. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto convexo y $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1. Una condición necesaria y suficiente para que el campo F sea conservativo es que*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \quad \textit{para todo } p \in U, \quad \textit{y todo } 1 \leq i \neq j \leq n$$

Demostración. □

Veamos ahora una manera de calcular la función potencial f para un campo conservativo $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y U abierto convexo.

Fijemos un punto $p \in U$ y sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_C F.\, dr$$

donde C es parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,1] & \to & U \\ & t & \mapsto & tx + (1-t)p \end{array}$$

Ejemplo 7.4.16. Sea el campo $F(x, y) = (x + y^2, 2xy)$. Tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Como F está definido en $\mathbb{R}^2$ el cual es convexo, por el teorema anterior se sigue que F es conservativo.

Veamos como obtener f tal que $F = grad\, f$. Sea $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y

$$f(x, y) = \int_C F.\, dr$$

donde C está parametrizado por

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (tx, ty) \end{array}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_C F.\,dr \\
&= \int_0^1 (tx+t^2y^2)x\,dt + \int_0^1 2(tx)(ty)y\,dt \\
&= x^2\int_0^1 t\,dt + xy^2\int_0^1 t^2dt + 2xy^2\int_0^1 t^2dt \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{3} + \frac{2xy^2}{3} \\
&= \frac{x^2}{2} + xy^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.17. Consideremos el campo

$$\begin{array}{rccc}
F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\
 & (x,y,z) & \mapsto & (3y^2z+ye^x, 6xyz+e^x, 3xy^2)
\end{array}$$

Llamando P, Q y R a las funciones coordenadas se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3y^2z+ye^x) = 6yz+e^x = \frac{\partial}{\partial x}(6xyz+e^x) = \frac{\partial Q}{\partial x} \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(3y^2z+ye^x) = 3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2) = \frac{\partial R}{\partial x} \\
\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(6xyz+e^x) = 6xy = \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2) = \frac{\partial R}{\partial y}
\end{aligned}$$

Desde que $\mathbb{R}^3$ es convexo, se sigue que F es conservativo. Hallemos la función potencial de F.

Sea

$$\begin{array}{rccc}
r: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\
 & t & \mapsto & t(x,y,z)
\end{array}$$

parametrización de la curva C. Entonces

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_C F.\,dr \\
&= \int_0^1 \{[3(ty)^2(tz)+(ty)e^{tx}]x + [6(tx)(ty)(tz)+e^{tx}]y + [3(tx)(ty)^2]z\}dt \\
&= \int_0^1 (12t^3xy^2z + txye^{tx} + ye^{tx})dt \\
&= 3xy^2z + ye^x.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.18. Solución alternativa del ejemplo 7.4.16.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = x + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2xy$$

entonces

$$f(x,y) = \int (x+y^2)dx + g(y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + g(y)$$

y

$$2xy = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + g'(y)$$

esto implica $g'(y) = 0$, o sea, $g(y) = cte$. Si $g(y) = 0$ se sigue

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2.$$

Ejemplo 7.4.19. Solución alternativa del ejemplo 7.4.17. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2z + ye^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xyz + e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2$$

De la primera igualdad se obtiene

$$f(x,y,z) = \int (3y^2z + ye^x)dx + g(y,z) = 3y^2zx + ye^x + g(y,z)$$

derivando esta expresión respecto de y y de z

$$6xyz + e^x = \frac{\partial f}{\partial y} = 6xyz + e^x + \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$3xy^2 = \frac{\partial f}{\partial z} = 3y^2x + \frac{\partial g}{\partial y}$$

de donde $\frac{\partial g}{\partial y} = 0 = \frac{\partial g}{\partial z}$ que implica $g(y,z) = cte$. Elegimos $g(y,z) = 0$, luego

$$f(x,y,z) = 3xy^2z + ye^x.$$

Completamos esta sección generalizando el dominio del teorema 7.4.15

Definición 7.4.4. (Intuitiva). Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *simplemente conexo* si dos puntos cualesquiera $p, q \in U$ pueden ser unidos por una curva continua, y cualquier curva cerrada C en U se contrae a un punto.

En el plano $\mathbb{R}^2$ podemos pensar de un conjunto simplemente conexo como un conjunto sin agujeros.

Teorema 7.4.20. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto simplemente conexo y sea $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1. Una condición necesaria y suficiente para que el campo F sea conservativo es que*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \quad \textit{para todo } \ p \in U, \ \ \textit{y todo } \ 1 \leq i \neq j \leq n$$

Demostración. □

7.5 Teorema de Green

A continuación estudiaremos uno de los resultados clásicos del cálculo en $\mathbb{R}^n$ el cual relaciona integrales de línea con integrales dobles. En lo que sigue trabajaremos con campos vectoriales $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos en abiertos U de $\mathbb{R}^2$.

Definición 7.5.1. (Intuitiva). Sea C una curva continua cerrada simple, frontera de la región R con interior U. Diremos que C está *positivamente orientada* si a lo largo del recorrido de la curva, el conjunto U queda del lado izquierdo. En caso contrario diremos que C está orientada negativamente.

Las figuras del dibujo anterior muestran curvas cerradas simples.

Consideremos ahora una curva cerrada simple C en $\mathbb{R}^2$, así como un conjunto de curvas cerradas simples $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en $\mathbb{R}^2$, tales que

(i) C_i se encuentra en el interior de C para todo $i = 1, \ldots, k$.

(ii) $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

(iii) C_i se encuentra en el exterior de C_j para todo $i \neq j$.

Al subconjunto R formado por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que se encuentran en el interior de C y en el exterior de cada una de las C_i, $i = 1, \ldots, k$, junto con los puntos de las curvas $C, C_1, \ldots, C_k$ se le llama *región compacta en el plano*. La frontera de la región compacta R, denotada por $\partial(R)$ es la unión de las curvas $C, C_1, \ldots, C_k$. Decimos que la frontera $\partial(R)$ está orientada positivamente y escribimos $\partial(R)^+$ cuando al recorrer las curvas $C, C_1, \ldots, C_k$ de su frontera, la región R siempre se la observa a la izquierda.

Teorema 7.5.1. (Green). *Sea* $F = (P, Q) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un campo de clase* C^1 *definido en el abierto* U *de* $\mathbb{R}^2$. *Sea* $R \subseteq U$ *una región compacta con frontera* ∂R^+ *positivamente orientada. Entonces*

$$\int_{\partial R^+} F.dr = \int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy$$

donde r *es un camino seccionalmente* C^1 *cuya traza es* ∂R.

Demostración. Haremos la demostración para el caso donde la región compacta R es simple. Sea $C = \partial R$ y escribimos $C = C_1 \cup C_2$ de dos maneras distintas como indica la figura:

$$C_1 : \quad \text{la curva } \; y = y_1(x) \; \text{ del punto } \; p_1 \; \text{ al punto } \; p_2 \tag{7.5.3}$$

$$C_2 : \quad \text{la curva } \; y = y_1(x) \; \text{ del punto } \; p_2 \; \text{ al punto } \; p_1 \tag{7.5.4}$$

También

$$C_1 : \quad \text{la curva } \; x = x_1(y) \; \text{ del punto } \; q_2 \; \text{ al punto } \; q_1 \tag{7.5.5}$$

$$C_2 : \quad \text{la curva } \; x = x_2(x) \; \text{ del punto } \; q_1 \; \text{ al punto } \; q_2 \tag{7.5.6}$$

Integraremos $P(x, y)$ a lo largo de C y usaremos la representación $C = C_1 \cup C_2$ dada por las expresiones (7.5.3) y (7.5.4). Desde que

$$C_1 : \quad y = y_1(x) \qquad \text{y} \qquad C_2 : \quad y = y_2(x)$$

$$
\begin{aligned}
\oint P(x,y)dx &= \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx \\
&= \int_a^b P(x,y_1(x))dx + \int_b^a P(x,y_2(x))dx \\
&= \int_a^b P(x,y_1(x))dx - \int_a^b P(x,y_2(x))dx \\
&= -\int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]dx \\
&= -\int_a^b \Big[P(x,y)\Big]\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \\
&= -\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dydx \quad \text{por el TFC} \\
&= -\int\int_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, integraremos $Q(x,y)$ a lo largo de C y usaremos la representación $C = C_1 \cup C_2$ dada por las expresiones (7.5.5) y (7.5.6). Desde que

$$C_1: \quad x = x_1(y) \qquad \text{y} \qquad C_2: \quad x = x_2(y)$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
\oint Q(x,y)dx &= \int_{C_1} Q(x,y)dy + \int_{C_2} Q(x,y)dy \\
&= \int_d^c Q(x_1(y),y)dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)dy \\
&= -\int_c^d Q(x_1(y),y)dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)dy \\
&= -\int_c^d [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]dy \\
&= \int_c^d \Big[Q(x,y)\Big]\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} dy \\
&= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dxdy \quad \text{por el TFC} \\
&= \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\oint_C F.\,dr &= \oint_C P(x,y)\,dx + \oint_C Q(x,y)\,dy\\ &= -\int\int_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA + \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA\\ &= \int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy.\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración del teorema. $\square$

Ejemplo 7.5.2. Calculemos

$$\oint_C (x^2+y^2)dx + 2xydy$$

donde C es la frontera positivamente orientada de la región

$$R = \{(x,y)\,:\,0 \leq x \leq 1,\ 2x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Solución: ya sabemos que

$$\oint_C (x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$$

$P(x,y) = x^2+y^2$ y $Q(x,y) = 2xy.$ También

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 2y = 0.$$

Luego

$$\int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = 0.$$

Ejemplo 7.5.3. Calculemos

$$\oint_C x^2ydx + 2xydy = 0$$

donde C es la frontera de

$$R = \{(x,y)\,:\,0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$$

Solución: $C = C_1 + C_2$, donde

$$\begin{array}{rcl} r_1 :\ [0,1] & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & (t,t^2)\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} r_2: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (1-t, 1-t) \end{array}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\oint_C F.dr &= \oint_{C_1} F.dr_1 + \oint_{C_2} F.dr_2 \\
&= \int_0^1 (t^2)(t^2)(1)dt + \int_0^1 2(t)(t^2)(2t)dt + \\
&+ \int_0^1 (1-t)^2(1-t)(-1)dt + \int_0^1 2(1-t)(1-t)(-1)dt \\
&= \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{4t^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{(t-1)^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{2(t-1)^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \Big(0 - \frac{1}{4}\Big) - 2\Big(0 + \frac{1}{3}\Big) \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Utilicemos ahora Green

$$\begin{aligned}
\oint_C F.dr &= \int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dA \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x (2y - x^2) dy dx \\
&= \int_0^1 (y^2 - x^2 y)\Big|_{x^2}^x dx \\
&= \int_0^1 [(x^2 - x^3) - (x^4 - x^4)] dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\
&= \Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.5.4. Ahora usemos el teorema de Green para calcular la integral de línea del campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (2x + y, -x + 4xy)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ recorrido (una vuelta) en sentido antihorario.

Solución: $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial R^+} F.dr &= \int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dA \\
&= \int\int_R [(4y-1)-1] dxdy \\
&= \int\int (4y-2) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [4(r\sin\theta)-2] r d\theta dr \\
&= \int_0^1 (-4r^2\sin\theta - 2r) d\theta dr \\
&= \int_0^1 (-4r^2\cos\theta - 2r\theta)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \int_0^1 [(-4r^2 - 4\pi r) - (-4r^2)] dr \\
&= \int_0^1 -4\pi r dr \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.5.5. Calcular

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

donde C es la frontera de la región abajo

Sea $C = C_1 + C_2$. Parametrizando las curvas C_1 y C_2 tenemos

$$\begin{aligned}
r_1 : \ [0, 2\pi] \ &\to \quad \mathbb{R}^2 \\
t \quad &\mapsto \ (\cos t, \sin t)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{array}{rccc} r_2 : & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\frac{\cos t}{2}, -\frac{\sin t}{2}) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_{C_1} F.dr_1 + \int_{C_2} F.dr_2 \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t)dt + \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t)dt + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} (2\sin t)(-\frac{sent}{2})dt + \int_0^{2\pi} (2\cos t)(-\frac{\cos t}{2})dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt + \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora bien, por Green tenemos

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dA$$

pero

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

que implica

$$\int\int_R 0dA = 0.$$

Ejemplo 7.5.6. Consideremos las regiones

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le 16\} \\
R_2 &= \{(x,y) \,:\, (x-2)^2+y^2 \le 1\} \\
R_3 &= \{(x,y) \,:\, (x+2)^2+y^2 \le 1\}
\end{aligned}$$

Sea $R = R_1 \setminus [int(R_2) \cup int(R_2)]$. Sean

$$\begin{array}{rccc} r_1: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (4\cos t, 4\sin t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} r_2: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos t - 2, -\sin t) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} r_3: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos t + 2, -\sin t) \end{array}$$

las parametrizaciiones de las curvas C_1, C_2 y C_3, respectivamente; y sea $C = C_1 + C_2 + C_3$. Luego dado el campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (-y,x)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial R^+} &= \int_0^{2\pi} [(-4\sin t)(-4\sin t) + (4\cos t)(4\cos t)]dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} [(-4\sin t)(-\sin t) + (\cos t - 2)(-\cos t)]dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) + (\cos t + 2)(-\cos t)]dt \\ &= \int_0^{2\pi} 16dt + \int_0^{2\pi} (2\cos t - 1)dt - \int_0^{2\pi} (2\cos t + 1)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 14dt \\ &= 28\pi. \end{aligned}$$

Por otra parte, del teorema de Green se sigue

$$\begin{aligned} \int\int_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dA &= \int\int_R [1-(-1)]dxdy \\ &= 2\int\int_R dxdy \\ &= 2[\pi(4^2) - 2\pi(1)^2] \\ &= 28\pi. \end{aligned}$$

7.6 Teorema de Stokes

7.7 Ejercicios

Capítulo 8

Examenes

8.1 Examenes Parciales

8.2 Examenes Recuperatorios

Recuperatorio 03/07/2010 - Tema 1

1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que el plano tangente al gráfico de g en el punto $(3, 0, g(3, 0))$ es $z = 2x + y - 7$. Sea $f(x, y) = xg(x, y) + x^2 sen(xy)$.

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(3, 0)$ con $\breve{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b) Si $g(3, 0) = -1$, calcule mediante una aproximación lineal conveniente, $f(2.95, 0.07)$.

Solución. a) Sea $S = Graf(g)$ y π_T el plano tangente a S en $(3, 0, g(3, 0))$, es decir

$$\pi_T : \qquad 2x + y - z = 7 \tag{8.2.1}$$

Desde que $(3, 0, g(3, 0)) \in \pi_T$, entonces $g(3, 0) = -1$. Ahora bien, (8.2.1) se puede escribir en la forma

$$\pi_T : \qquad z = 2(x - 3) + (y - 0) - 1$$

que implica

$$\frac{\partial g}{\partial x}(3, 0) = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(3, 0) = 1$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) + x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + 2xsen(xy) + x^2 ycos(xy)$$

de donde
$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,0) = 5.$$
También
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + x^3 cos(xy)$$
de donde
$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,0) = 30.$$
Como f es diferenciable, tenemos
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(3,0) &= \nabla f(3,0).\breve{u}\\ &= (5,30).\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)\\ &= -\frac{25}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

b) La linealización de f en $(3,0)$ está dada por
$$\begin{aligned}L(x,y) &= f(3,0) + f_x(3,0)(x-3) + f_y(3,0)(y-0)\\ &= -3 + 5(x-3) + 30(y-0)\\ &= 5x + 30y - 18\end{aligned}$$
Por tanto,
$$f(2.95, 0.07) \approx L(2.95, 0.07) = 5(2.95) + 30(0.07) - 18.$$

2. Sea $f(x,y,z) = (x-y+z)^2 + (x+2y)^2 - 3z^2 + x$.

a) Halle la derivada direccional máxima de f en el punto $(0,1,1)$ ¿En qué dirección se alcanza esta derivada?.

b) Halle el plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel de f que pasa por el punto $(0,1,1)$.

Solución. a) Tenemos
$$\nabla f = \big(2(x-y+z)+2(x+2y)+1, -2(x-y+z)+4(x+2y), 2(x-y+z)-6z\big)$$
La derivada direccional máxima se alcanza en la dirección de
$$\nabla f(0,1,1) = (5,8,-6)$$

y la derivada direccional máxima es

$$\|\nabla f(0,1,1)\| = \|(5,8,-6)\| = 5\sqrt{5}.$$

b) Desde que $f(0,1,1) = 1$, el punto $(0,1,1)$ está en la superficie de nivel

$$S: \qquad (x-y+z)^2 + (x+2y)^2 - 3z^2 + x = 1$$

Haciendo $F(x,y,z) = (x-y+z)^2 + (x+2y)^2 - 3z^2 + x - 1$, la ecuación del plano tangente π_T a S en el punto $(0,1,1)$ es

$$\nabla F(0,1,1).(x-0, y-1, z-1) = 0$$

pero $\nabla F(0,1,1) = (5,8,-6)$, o sea,

$$\pi_T: \qquad (5,8,-6).(x-0, y-1, z-1) = 0$$

o también

$$\pi_T: \qquad 5x + 8y - 6z = 2.$$

La recta normal $\mathcal{L}_N$ a S en el punto $(0,1,1)$ es

$$\mathcal{L}_N: \qquad (x,y,z) = t(5,8,-6) + (0,1,1), \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Sea C una curva suave simple, contenida en el semiplano $y \geq 0$, que va del punto $(-3,0)$ a $(4,0)$. Si el área de la región encerrada por la curva C y el eje x es 5, calcule $\int_C F.dr$ donde F es el campo vectorial $F(x,y) = (3y + 2xy + x, x + x^2)$.

Solución. Sean $P(x,y) = 3y + 2xy + x$, $Q(x,y) = x + x^2$, y R la región encerrada por las curvas C y C_1 como se muestra en la figura

Parametrizamos C_1 por $r_1 : [-3,4] \to \mathbb{R}^2$ definida por $r_1(t) = (t,0)$. Entonces por Green tenemos

$$-\int_C F.dr + \int_{C_1} F.dr_1 = \int\int_R (Q_x - P_y)dA$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_C F.dr &= \int_{C_1} F.dr_1 - \int\int_R (Q_x - P_y)dA \\
&= \int_{-3}^{4} (t, t+t^2).(1,0)dt - \int\int_R (-2)dA \\
&= \int_{-3}^{4} tdt + 2\int\int_R dA \\
&= \frac{7}{2} + 2(5) \\
&= \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

4.

a) Sea $W \subseteq \mathbb{R}^2$ el subconjunto $W: \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 3, \ x \geq -1, \ y \geq 2$. Calcule $\int\int_W xdxdy$.

b) Calcule el volumen del sólido acotado V limitado por las superficies $z = 0, \ z = 1 + x + y, \ y = x^2, \ x = 1, \ y = 0$.

Solución. a) Dibujando la región W tenemos

cuya parametrización está dada por

$$x + 1 = rcos(\theta), \quad y - 2 = rsen(\theta), \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\int\int_W x dx dy &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r cos(\theta) - 1) r d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 cos(\theta) - r) d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} (r^2 sen(\theta) - r\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} (r^2 - \frac{\pi r}{2}) dr \\
&= \Big(\frac{r^3}{3} - \frac{\pi r^2}{4}\Big)\Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{4\sqrt{3} - 3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

b) Sea el sólido V como se muestra en la figura

Entonces el volumen es

$$
\begin{aligned}
Volumen &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{1+x+y} dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} (1 + x + y) dy dx \\
&= \int_0^1 \Big(y + xy + \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \Big(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\Big) dx \\
&= \frac{41}{60}.
\end{aligned}
$$

5. Sean $F(x,y,z) = (x + e^{yz}, z^2 + x^2, z^2 + xy)$ y W el sólido limitado por $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ y $z = x^2 + y^2$. Calcular el flujo de F a través de ∂W ¿Qué orientación hay que tomar en ∂W para que el flujo sea negativo?

Solución. El sólido W es tal como se muestra en la figura

cuya parametrización está dada por

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}$$

Considerando a ∂W con la orientación positiva, por Gauss tenemos

$$\begin{aligned}
\int\int_{\partial W} F.dS &= \int\int\int_W div(F)dV \\
&= \int\int\int_W (1 + 2z)dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} (1 + 2z)r dz d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (rz + rz^2)\Big|_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(r\sqrt{2 - r^2} + 2r - 2r^3 - r^5\big) d\theta dr \\
&= \Big(\int_0^1 \big(r\sqrt{2 - r^2} + 2r - 2r^3 - r^5\big) dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big) \\
&= 2\pi\Big[-\frac{(2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{6}\Big]\Big|_0^1 \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para que el flujo sea negativo, la orientación debe ser negativa.

Recuperatorio 03/07/2010 - Tema 2

1. Sea C una curva suave simple, contenida en el semiplano $y \geq 0$, que va del punto $(-4,0)$ a $(3,0)$. Si el área de la región encerrada por la curva C y el eje x es 6, calcule $\int_C F.dr$ donde F es el campo vectorial $F(x,y) = (3y + y^2 + x, x + 2xy)$.

Solución. Sean $P(x,y) = 3y + y^2 + x$, $Q(x,y) = x + 2xy$, y R la región encerrada por las curvas C y C_1 como se muestra en la figura

Parametrizamos C_1 por $r_1 : [-4,3] \to \mathbb{R}^2$ definida por $r_1(t) = (t,0)$. Entonces por Green tenemos

$$-\int_C F.dr + \int_{C_1} F.dr_1 = \int\int_R (Q_x - P_y)dA$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_C F.dr &= \int_{C_1} F.dr_1 - \int\int_R (Q_x - P_y)dA \\
&= \int_{-4}^{3} (t,t).(1,0)dt - \int\int_R (-2)dA \\
&= \int_{-4}^{3} tdt + 2\int\int_R dA \\
&= -\frac{7}{2} + 2(6) \\
&= \frac{17}{2}.
\end{aligned}$$

2. Sea $f(x,y,z) = (x - y + z)^2 + (x + 2y)^2 - 3z^2 + x$.

a) Halle la derivada direccional máxima de f en el punto $(0, 1, 1)$ ¿En qué dirección se alcanza esta derivada?.

b) Halle el plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel de f que pasa por el punto $(0, 1, 1)$.

Solución. a) Tenemos

$$\nabla f = \big(2(x-y+z)+2(x+2y)+1, -2(x-y+z)+4(x+2y), 2(x-y+z)-6z\big)$$

La derivada direccional máxima se alcanza en la dirección de

$$\nabla f(0, 1, 1) = (5, 8, -6)$$

y la derivada direccional máxima es

$$\|\nabla f(0, 1, 1)\| = \|(5, 8, -6)\| = 5\sqrt{5}.$$

b) Desde que $f(0, 1, 1) = 1$, el punto $(0, 1, 1)$ está en la superficie de nivel

$$S: \qquad (x - y + z)^2 + (x + 2y)^2 - 3z^2 + x = 1$$

Haciendo $F(x, y, z) = (x - y + z)^2 + (x + 2y)^2 - 3z^2 + x - 1$, la ecuación del plano tangente π_T a S en el punto $(0, 1, 1)$ es

$$\nabla F(0, 1, 1).(x - 0, y - 1, z - 1) = 0$$

pero $\nabla F(0, 1, 1) = (5, 8, -6)$, o sea,

$$\pi_T: \qquad (5, 8, -6).(x - 0, y - 1, z - 1) = 0$$

o también

$$\pi_T: \qquad 5x + 8y - 6z = 2.$$

La recta normal $\mathcal{L}_N$ a S en el punto $(0, 1, 1)$ es

$$\mathcal{L}_N: \qquad (x, y, z) = t(5, 8, -6) + (0, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Sean $F(x, y, z) = (x + e^{yz}, z^2 + x^2, z^2 + xy)$ y W el sólido limitado por $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ y $z = x^2 + y^2$. Calcular el flujo de F a través de ∂W ¿Qué orientación hay que tomar en ∂W para que el flujo sea negativo?

Solución. El sólido W es tal como se muestra en la figura cuya parametrización está dada por

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}$$

Considerando a ∂W con la orientación positiva, por Gauss tenemos

$$\begin{aligned}
\int\int_{\partial W} F.dS &= \int\int\int_W div(F)dV \\
&= \int\int\int_W (1 + 2z)dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} (1 + 2z)rdzd\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (rz + rz^2)\Big|_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(r\sqrt{2 - r^2} + 2r - 2r^3 - r^5\big)d\theta dr \\
&= \Big(\int_0^1 \big(r\sqrt{2 - r^2} + 2r - 2r^3 - r^5\big)dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big) \\
&= 2\pi\Big[-\frac{(2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{6}\Big]\Big|_0^1 \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para que el flujo sea negativo, la orientación debe ser negativa.

4.

a) Sea $W \subseteq \mathbb{R}^2$ el subconjunto $W: \quad (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 3, \;\; x \leq -1,$ $y \leq 2$. Calcule $\int\int_W xdxdy$.

b) Calcule el volumen del sólido acotado V limitado por las superficies $z = 0, \;\; z = 1 + x + y, \;\; y = x^2, \;\; x = 1, \;\; y = 0$.

Solución. a) Dibujando la región W tenemos cuya parametrización está dada por

$$x+1 = rcos(\theta), \quad y-2 = rsen(\theta), \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int\int_W xdxdy &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (rcos(\theta) - 1)rd\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (r^2cos(\theta) - r)d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} (r^2sen(\theta) - r\theta)\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} dr \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} (r\pi - \frac{3\pi r}{2} - r^2)dr \\
&= \Big(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{3\pi r^2}{4} - \frac{r^3}{3}\Big)\Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= -\Big(\frac{4\sqrt{3} + 3\pi}{4}\Big)
\end{aligned}$$

b) Sea el sólido V como se muestra en la figura

Entonces el volumen es

$$\begin{aligned}
Volumen &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{1+x+y} dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} (1+x+y)dydx \\
&= \int_0^1 \left(y + xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\right)dx \\
&= \frac{41}{60}.
\end{aligned}$$

5. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que el plano tangente al gráfico de g en el punto $(2, 0, g(2, 0))$ es $z = 2x + y - 5$. Sea $f(x, y) = xg(x, y) + x^2 sen(xy)$.

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \check{u}}(2, 0)$ con $\check{u} = \big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$.

b) Si $g(3, 0) = -1$, calcule mediante una aproximación lineal conveniente, $f(1.95, 0.07)$.

Solución. a) Sea $S = Graf(g)$ y π_T el plano tangente a S en $(2, 0, g(2, 0))$, es decir

$$\pi_T : \qquad 2x + y - z = 5 \tag{8.2.2}$$

Desde que $(2, 0, g(2, 0)) \in \pi_T$, entonces $g(2, 0) = -1$. Ahora bien, (8.2.2) se puede escribir en la forma

$$\pi_T : \qquad z = 2(x - 3) + (y - 0) + 1$$

que implica

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2, 0) = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(2, 0) = 1$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) + x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + 2xsen(xy) + x^2 ycos(xy)$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 3.$$

También

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + x^3 cos(xy)$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 10.$$

Como f es diferenciable, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(2,0) &= \nabla f(2,0).\breve{u}\\ &= (3,10).\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)\\ &= -\frac{13}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

b) La linealización de f en $(2,0)$ está dada por

$$\begin{aligned}L(x,y) &= f(2,0) + f_x(2,0)(x-2) + f_y(2,0)(y-0)\\ &= -2 + 3(x-2) + 10(y-0)\\ &= 3x + 10y - 8\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(1.95, 0.07) \approx L(1.95, 0.07) = 3(1.95) + 10(0.07) - 8.$$

8.3 Examenes Finales

Final 12/07/2010

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, indicando en que dirección corresponden y cuanto valen las derivadas direccionales máxima y mínima.

Solución. Fijemos un vector unitario $u = (a, b)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b)) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(a,b) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3a^3}{h^2a^2+h^2b^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^3}{a^2+b^2} \\ &= a^3.\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

Se sigue que la derivada direccional de f en $(0,0)$ existe en cualquier dirección de vectores unitarios no nulos. Por otra parte, desde que $a^2+b^2 = 1$, se sigue que $0 \leq a^2 \leq 1$ que implica $-1 \leq a \leq 1$. O sea que las derivadas direccionales máxima y mínima ocurren cuando a toma los valores 1 y -1.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = (1)^3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = (-1)^3 = -1.$$

2. Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 2,\ x^2 \leq y,\ 0 \leq z \leq 2\}$. Si S es la parte del borde ∂V correspondiente a los cilindros $x^2+y^2 = 2$ y $y = x^2$, calcular

$$\int\!\!\int xz\, dS$$

Solución. Aquí $S = S_1 \cup S_2$ donde S_1 es la parte de la superficie $y = x^2$ parametrizada por

$$\begin{array}{rcl}\varphi :\ [-1,1]\times[0,2] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,z) & \mapsto & (x, x^2, z)\end{array}$$

y S_2 es la parte de la superficie $x^2+y^2 = 2$ parametrizada por

$$\begin{array}{rcl}\psi :\ [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\times[0,2] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,z) & \mapsto & (\sqrt{2}cos\theta, \sqrt{2}sen\theta, z)\end{array}$$

Tenemos

$$\varphi_x = (1, 2x, 0), \quad \varphi_z = (0,0,1), \quad \text{y} \quad \varphi_x \times \varphi_z = (2x, -1, 0)$$

Entonces

$$\int\int xz\,dS_1 = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xz\sqrt{4x^2+1}\,dzdx$$
$$= \Big(\int_{-1}^{1} x\sqrt{4x^2+1}\,dx\Big)\Big(\int_0^2 z\,dz\Big)$$
$$= 0.$$

También de

$$\psi_\theta = (-\sqrt{2}sen\theta, \sqrt{2}cos\theta, 0), \quad \psi_z = (0,0,1), \quad \psi_x \times \psi_z = (\sqrt{2}cos\theta, \sqrt{2}sen\theta, 0)$$

Entonces

$$\int\int xz\,dS_2 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^2 \sqrt{2}cos\theta\, z\sqrt{2}\,dzd\theta$$
$$= \Big(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2cos\theta\,d\theta\Big)\Big(\int_0^2 z\,dz\Big)$$
$$= 0.$$

Por tanto,

$$\int\int xz\,dS = \int\int xz\,dS_1 + \int\int xz\,dS_2 = 0.$$

3. Para $a \in \mathbb{R}$, se define la función

$$f(x,y) = (a-1)x^2 + 2(a-1)xy + 2ay^2 - 2x^4$$

Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ $(0,0)$ es un punto crítico de f e indicar si es máximo local, mínimo local o punto de ensilladura según sea el valor de a.

Solución. Calculemos los puntos críticos: haciendo

$$f_x = 2(a-1)x + 2(a-1)y - 8x^3 = 0 \tag{8.3.4}$$

$$f_y = 2(a-1)x + 4ay = 0 \tag{8.3.5}$$

Si $a = 0$, es claro que el único punto crítico es $(x,y) = (0,0)$.

Supongamos que $a \neq 0$, entonces de (8.3.5)

$$2y = -\frac{(a-1)x}{a} \tag{8.3.6}$$

Reemplazando (8.3.6) en (8.3.4) conseguimos

$$x[8ax^2 + (1 - a^2)] = 0 \tag{8.3.7}$$

Si $|a| \leq 1$, de (8.3.7) se sigue que $(x, y) = (0, 0)$ es el único punto crítico de f. Por otro lado, si $a > 1$ existen tres raíces reales para la ecuación (8.3.7) que son

$$x = 0, \qquad x = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{8a}}, \qquad x = -\sqrt{\frac{a^2 - 1}{8a}}$$

De cualquier modo, $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico de f.

También

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2(a-1) - 24x^2 & 2(a-1) \\ 2(a-1) & 4a \end{pmatrix}$$

y

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2(a-1) & 2(a-1) \\ 2(a-1) & 4a \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$D = det(H(0, 0)) = 4(a^2 - 1)$$

Por consiguiente: los extremos locales se consiguen para $|a| > 1$, siendo el $(0, 0)$ mínimo local para $a > 1$, y máximo local para $a < 0$. También, el punto de silla se consigue para $|a| < 1$.

4. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x + 3, 2y - 3, z)$ y la curva C definida por $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ con $r(t) = \left(e^{t^2-t} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), 1 - e^{t^2-t} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), t^2\right)$ Hallar una función potencial de F y calcular el trabajo de F a lo largo de la curva C con la orientación contraria a la dada por la parametrización r.

Solución. Sean $P(x, y, z) = x + 3$, $Q(x, y, z) = 2y - 3$, $R(x, y, z) = z$. Sabemos que $Dom(F) = \mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, además

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

luego existe una función potencial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$, o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = z$$

Entonces

$$f(x, y, z) = \int (x + 3)dx = \frac{x^2}{2} + 3x + g(y, z)$$

pero

$$2y - 3 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}(y, z)$$

que implica

$$g(y, z) = \int (2y - 3)dy = y^2 - 3y + h(z)$$

de donde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 3x + y^2 - 3y + h(z)$$

También

$$z = \frac{\partial f}{\partial z} = h'(z)$$

o sea que

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + K \qquad \text{para alguna constante } K$$

Ahora bien, eligiendo $K = 0$ obtenemos

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 3x + y^2 - 3y + \frac{z^2}{2}$$

Finalmente

$$\int_{-C} F.\, d\overline{r} = f(r(0)) - f(r(1)) = f(0, 0, 0) - f(1, 1, 1) = 0 - 2 = -2$$

5. Enunciar y demostrar el teorema de Green.

6. Demostrar la existencia de todas las derivadas direccionales en todas las direcciones posibles cuando la función es diferenciable e indicar su relación con el gradiente de f.

7. Enunciar el teorema de Stokes, aclarando debidamente cómo son las orientaciones de las curvas y superficies involucradas.

Bibliografía

[Ad] Adkins W.A and Weintraub S.H. *Algebra-An Approach via Módule Theory.* Springer Verlag, 1992.

[Bo1] Bourbaki N. *Espaces Vectoriels topologiques.* Hermann, 1966.

[Bo2] Bourbaki N. *Theorie des Ensembles.* Masson, 1990.

[Bo3] Bourbaki N. *Algébre.* Hermann Paris, 1961.

[Br] Brown W. *A Second Course in Linear Algebra.* 1988.

[Ch] Chambadal L. y Ovaert J. *Algébre Linéaire et Algébre Tensorielle.* Dunod, Paris, 1968.

[Cu] Cukierman F. *Cuadricas y Cúbicas.* IMCA, 2000.

[Fl] Flávio U.C. y Mary L.L *Um curso de Álgebra Linear.* Universidade de Sao Paulo, 2001.

[Ga] Gatto L. *Un Introduzione Amichevole alla Forma canónica di Jordan.* C.L.U.T, Torino, 1998.

[Gr1] Greub W. *Linear Algebra.* Springer Verlag, 1967.

[Gr2] Greub W. *Multilinear Algebra.* Springer Verlag, 1967.

[Ha1] Halmos P. *Finite Dimensional Vector Spaces.* Van Nostrand, 1968.

[Ha2] Halmos P. *Linear Algebra Problem Book.* The Mathematical Association of America, 1995.

[Har] Hartshorne R. *Foundations of Projective Geometry.* Benjamin, 1967.

[He] Hefferon J. *Linear Algebra.* Colchester Vermont, 2001.

[Hi] Hitchin N. *Projective Geometry.* Notas de internet, 2003.

[Ho] Hodge and Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry, vol I.* Cambridge University Press 1994.

[Ho] Hoffman K. y Kunze R. *Linear Algebra.* Prentice-Hall Inc, 1961.

[Hu] Hungerford T. *Algebra.* Springer Verlag, 1974.

[Ja] Jacobson N. *Lectures in Abstrac Algebra.* Van Nostrand, 1951,53,64.

[Ka] Kahn P. *Introduction to Linear Algebra.* Harper y Row 1967.

[Ko] Kolmogorov A. and Fomin S. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications, INC, New York 1970.

[La] Lang S. *Linear Algebra.* Addison-Wesley, 1966.

[Ma] Marcus M. *Finite Dimensional Multilinear Algebra.* Marcel Dekker, 1973-75.

[Mar] Martinez J. *Teoría de módulos.* Trabajos de Matemática nº 28, 1999. Ciudad Universitaria-5000 Cordoba.

[Nef] Nef W. *Lehrbuch der Linearen Algebra.* Birkhauser Verlag, 1966.

[Ne] Nering E. *Linear Algebra and Matrix Theory, vol I.* John Wiley, 1970.

[No] Nomizu K. *Fundamentals of Linear Algebra.* MacGraw-HillBook, 1976.

[Ru] Russo F. *Notas de Álgebra Lineal.* UFPE, 2001.

[Sm] Smith L. *Linear Algebra.* Springer Verlag, 1984.

[Sp] Spindler K. *Abstract Algebra with Applications, vol I.* Marcel Dekker, 1994.

[St] Strang G. *Linear Algebra and Its Applications.* Academic Press, 1980.