

CÁLCULO AVANZADO
EXAMEN FINAL — 11/12/09

Apellido y nombre:

Registro

Carrera:

1	2	3	4	5	Calif.

TEMA 1

1. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
 - a) Sean $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ y $\mathbf{v} = (3/5, 4/5)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$.
 - b) Analice la diferenciabilidad de f en el origen.

2. a) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + 2z, 2xy, 2x + 2z)$. Sean A y B dos puntos distintos de \mathbb{R}^3 . Demuestre que la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es constante a lo largo de cualquier curva que empiece en A y termine en B .
 - b) Calcule la integral del inciso anterior en el caso $A = (0, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 0)$.

3. a) Enunciar el teorema de Stokes.
 - b) Sea S la superficie del primer octante definida por $z = 4 - x^2$, $y \leq 5$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$. Calcule la integral de \mathbf{F} a lo largo de la curva borde de S orientado en el sentido $(2, 0, 0)$, $(0, 0, 4)$, $(0, 4, 5)$.

4. a) Enuncie una condición necesaria para que una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tenga un extremo relativo en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$.
 - b) Halle y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 12x + 4y$.

5. a) Demuestre que si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 , entonces existen las derivadas direccionales de f en cualquier dirección.
 - b) Enuncie el teorema de Gauss o de la divergencia y demuestre que el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(y, z), Q(x, z), 0)$ a través de la superficie $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ es nulo. (Suponga que las funciones P y Q son C^1 .)