# Cálculo Avanzado

## Examen Final — 11/2/10

Apellido y nombre: Registro:

Carrera:

**EJERCICIOS SELECCIONADOS:**

Tema 1

**1.** Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = a^2 b$ , para todo $\mathbf{v} = (a,b)$ , tal que $a^2 + b^2 = 1$ . ¿Cuánto valen las derivadas parciales de $f$ en el origen? La función $f$ , ¿puede ser diferenciable en $(0,0)$ ?

**2.** Sea $V$ el sólido del primer octante definido por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$ . Calcule el volumen de $V$ .

**3.** Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 3x - 2y$ orientada en el sentido definido por los puntos $(2,0,6)$ , $(0,2,-4)$ , $(-2,0,-6)$ . Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen}(x^8) + y,\ -3y,\ x+z)$ . Calcule la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de $C$ .

**4.** Sean $V : x^2 + z^2 \leq 4$ , $1 \leq y \leq 4$ , $z \geq 0$ y $\mathbf{F}(x,y,z) = (f(y,z),\ y^2,\ x+z)$ con $f$ una función $C^1$ . Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie borde de $V$ , orientada con vectores normales que apuntan hacia afuera.

**5.** Halle y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 - xy + y^3 - 2x + y$ .

---

**6.** De la definición de función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ en el caso $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ .

**7.** Defina longitud de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$ y área de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ .

**8.** Sean $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo $C^1$ y $C$ una curva suave que comienza en el punto $A$ y termina en el punto $B$ . Demostrar que si existe $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = \mathbf{F}$ , entonces $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \varphi(B) - \varphi(A)$ .

**9.** Sea $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ un campo $C^1$ . ¿Qué relación hay entre las integrales de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ a través de las superficies $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , $z \geq 0$ , orientada con vectores normales hacia arriba y $S_2 : z = x^2 + y^2 - 1$ , $z \leq 0$ , orientada con vectores normales hacia abajo. Enuncie claramente el o los teoremas que use para justificar su afirmación.

**10.** Enuncie el teorema de Gauss y explique si es posible o no aplicarlo para calcular el flujo de $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$ a través de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ .

**NOTA:** Debe seleccionar y resolver, a lo sumo, tres ejercicios de los primeros cinco (1 a 5) y dos de los últimos cinco (6 a 10).
Ejercicios diferentes deben resolverse en hojas distintas.

**Justificar todos los pasos utilizados**