CALCULO AVANZADO — UCA
Recuperatorio — 21/11/2009 — TEMA 1

Apellido y Nombres: **Comisión:**

Carrera:

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ tal que $\nabla f(1,0,2) = (2,\ -1,\ 3)$ y $g(u,v) = (3u-v,\ u^2+v-3,\ 2u-v^2+4)$

a) Determinar la derivada direccional máxima de $f \circ g$ en $(u,v) = (1,2)$.

b) Si $f(1,0,2) = 5$, hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel $S = \{(x,y,z)\ :\ f(x,y,z) = 5\}$. Justificar su existencia.

2. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 + axz,\ 2 + 2xy,\ x^2)$.

a) Hallar todos los valores de a que verifican "existe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$".

b) Para los valores de a hallados, calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, con $\mathbf{r}(t) = \big(t^2 + 3t,\ (t-1)\ln(t+1),\ 1+t^2\big)$, $0 \le t \le 1$.

3. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.

a) Calcular el área de la porción del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,2,5)$ que está sobre el triángulo de vértices $(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,0)$.

b) Calcular el volumen del sólido del primer octante limitado por las superficies $z = f(x,y)$, $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

4. Sea C la curva simple cerrada parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1,\ t^3 - t)$, $-1 \le t \le 1$.

a) Calcular el área del recinto D encerrado por C.

b) Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$ con $F(x,y) = (xy, 0)$.

5. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^8,\ 3x^2 - z^3,\ 2z - 4)$ y S es la superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

6. a) De una condición suficiente para que exista la derivada direccional máxima de $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Bajo esa condición, ¿cuánto vale la derivada direccional máxima y en qué dirección se alcanza?

b) Enuncie una condición necesaria para que un campo vectorial $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sea conservativo.

c) Enuncie el teorema de Stokes.

Justificar todos los pasos utilizados

Para aprobar hay que tener, por lo menos, 4 items BIEN de los nueve correspondientes a los primeros cinco ejercicios y 1 BIEN del sexto ejercicio.