X

POTENCIA COMPLEJA Y FACTORES ASOCIADOS

1. INTRODUCCIÓN

La potencia compleja denominada así por estar representada por un número complejo, es una entidad fisicomatemática en parte de existencia real y en parte introducida por el hombre (ficticia), con el objeto de poder darle algún tratamiento a los dos términos de la *potencia instantánea (expresión (6.77), punto 3.8, capítulo 6), absorbida por una carga genérica "Z"* y válida para cualquier circuito de corriente alternada sinusoidal.

Esta suma de componentes de la expresión (6.77) resulta del tratamiento de la potencia que absorbe la combinación serie de una resistencia con una reactancia. Del tratamiento por separado de la potencia que absorben estos elementos se obtuvo:

1) por un lado la potencia instantánea absorbida y disipada por una resistencia pura (potencia consumida, expresión (6.70), punto 3.7 del capítulo 6) que tiene un efecto de consumo de energía real y
2) por otro lado la potencia instantánea absorbida y entretenida por cualquiera de los dos elementos reactivos puros, inductancia y/o capacitancia, vistas en puntos 3.5 y 3.6, del capítulo 6 y que no producen consumo de energía.

Ambos términos de la potencia instantánea dan origen a un tratamiento matemático de la potencia que se pasa a detallar.

1.1 Potencia activa

En punto 3.7 del capítulo 6 se analizó la potencia absorbida por una resistencia pura en *un circuito alimentado con generador de fem alternada sinusoidal siendo ésta*

$$p = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} - \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} . \cos(2.\omega.t) \tag{10.1}$$

Integrando *"p"* en un intervalo *"$\Delta t = t - t_o$"* y dividiendo por este mismo intervalo de tiempo, se obtiene un valor constante

$$P_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_o}^{t} p(t) \cdot dt = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} = V \cdot I \tag{10.2}$$

que coincide con el producto de los valores eficaces de la caida de potencial "$V=V_{max}/\sqrt{2}$" entre terminales y de la corriente "$I=I_{max}/\sqrt{2}$" que atraviesa la resistencia.

Remplazando en la expresión anterior "$V=I.R$" o "$I=V/R$" (ley de Ohm para valores eficaces), se manifiesta la validez de la ley de Joule también para corriente alterna, o sea:

$$P_m = I^2 . R \quad \text{o} \quad P_m = V^2 / R \qquad (10.3)$$

Las expresiones (10.2) y (10.3) corresponden al valor medio de la potencia absorbida y consumida durante el intervalo de tiempo que estuvo conectada la resistencia, de manera que si se multiplica por el intervalo "Δt", resultará la energía real consumida por la resistencia. Esta potencia se llama en consecuencia potencia activa o real, en adelante será expresada por "P" y su unidad está dada como es lógico en (*Vatios*).

1.2 Potencia reactiva

En los puntos 3.5 y 3.6 del capítulo 6 se vio que la potencia media "P_m" absorbida por una inductancia o un capacitor es nula. Sin embargo no se puede negar que entre el generador y la reactancia de carga (sea inductor o capacitor), en cada cuarto de ciclo, existe un intercambio de energía dado por:

$$E'(T/4) = \frac{V \cdot I}{\omega} = \frac{V \cdot I}{2\pi} \cdot T \qquad (10.4)$$

y la potencia media asociada a este cuarto de ciclo está dada por la expresión (6.66) del capítulo 6 que se repite a continuación:

$$P'_m(T/4) = \frac{E'(T/4)}{T/4} = \frac{V \cdot I}{\pi/2} \qquad (10.5)$$

Este vaivén de energía da lugar a una corriente "I" que despejada de la expresión (10.5) resultaría:

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P'_m(T/4)}{V} \qquad (10.6)$$

Esta corriente corresponde por definición al módulo del valor eficaz de la corriente que toma el elemento reactivo según se trate y expresada en forma fasorial será:

1) para una bobina $\quad \overline{I} = I \cdot e^{j\cdot\left(\delta_V - \frac{\pi}{2}\right)} = I \cdot e^{j\delta_I}$ y $\qquad (10.7)$

2) para un capacitor $\quad \overline{I} = I \cdot e^{j\cdot\left(\delta_V + \frac{\pi}{2}\right)} = I \cdot e^{j\delta_I} \qquad (10.8)$

Si los elementos que forman los circuitos fueran perfectos (valores resistivos no de dos nulos), estas corrientes (10.7) y (10.8) carecerían de importancia. Sin embargo las b nas de los generadores y los conductores de las líneas de interconexión de éstos con la ga contienen, aunque pequeñas, componentes resistivas que al ser atravesadas por corriente (cualquiera sea su origen), producirá pérdida de potencia por efecto Joule. I pérdida ocasiona un costo adicional que las empresas generadoras, de transporte y de tribución de energía, deben considerar en sus ecuaciones económicas y por lo tanto e que este vaivén de energía sea, de *alguna manera*, tomado en cuenta. La potencia qu pierde en las resistencias no deseadas de los circuitos reales motiva entonces que se l importancia a la corriente asociada a esta potencia puesta en juego por los elemer reactivos puros. De acuerdo a lo dicho se introce arbitrariamente un valor ficticio de po cia, a la que se le da el nombre de potencia reactiva o desvateada y se le asigna como dad el (*Volt-Amper-reactivos*) ó (*VAr*).

Se sabe que la potencia disipada por efecto Joule en una resistencia alimentada corriente alternada sinusoidal viene dada como se muestra en la expresión (10.3) ante Entonces adoptando desde el punto de vista formal la expresión matemática de la le Joule "" y tomando en cuenta que lo que se quiere es definir una potencia en forma arbi ria, se decidió siguiendo con la analogía ya vista entre la resistencia "R" y la reactanci usar como expresión matemática de esta nueva potencia ficticia:

1) para una bobina $\quad \overline{Q}_L = \overline{X}_L \cdot I^2 = j \cdot X_L \cdot I^2$ o $\qquad (10.9)$

2) para un capacitor $\quad \overline{Q}_C = \overline{X}_C \cdot I^2 = -j \cdot X_C \cdot I^2 \qquad (10.10)$

Estas potencias asi definidas, símil de la ley de Joule para elementos reactivos pu son números imaginarios puros y no tienen consecuencia alguna en el consumo de ene activa o real, es sólo una forma más de poner de manifiesto la corriente desvatead reactiva que originan los elementos reactivos. Como esta potencia, por definición de fas queda determinada por un valor constante con el tiempo, multiplicada por el interval tiempo "Δt" durante el que estuvo conectada la reactancia, manifestará una energía ab bida distinta de cero, también ficticia (no existe), llamada energía reactiva o desvatea

Los signos asociados a estas potencias reactivas por definición son arbitrarios y se p den interpretar como que la inductancia absorbe potencia reactiva del generador, mient que la capacitancia le inyecta potencia reactiva a éste. Ahora bien, como la potencia ab bida por una bobina se usa para generar el campo magnético de la misma, a la poter reactiva inductiva se la denomina también potencia magnetizante. La oposición de sig en las potencias reactivas definidas, coincide con la oposición real vista en los puntos 3 3.6 del capítulo 6.

Debe quedar claro que esta nueva potencia así definida *no* produce consumo energé por parte de los dispositivos reactivos ideales que la originan, pero la corriente que a tra de las expresiones (10.9) y (10.10) puede calcularse, *sí* producirá pérdida de potencia efecto Joule en las resistencias asociadas a los circuitos.

En corriente continua se puede obtener la potencia disipada por ley de Joule en resistencia utilizando también la expresión (1.24) vista en punto 5 del capítulo 1 y qu repite a continuación:

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad (10.11)$$

Pretender con el símil de la ley de Joule para el método fasorial, aplicar para el cál de la potencia reactiva ficticia en corriente alterna, tanto "$I^2 . X$" como "V^2 / X", tal com hace en continua no es posible. En corriente alterna el resultado de la potencia calculada, *sí* depende de la forma de la expresión de Joule que se utilice. Hay que tener mucho cuidado de no caer en la formalidad de querer obtener la potencia reactiva utilizando la expresión (10.11) anterior, ya que se obtendría como resultado el valor conjugado de la potencia reactiva:

1) para una bobina $\quad \dfrac{V^2}{\overline{X}_L} = \dfrac{V^2}{j \cdot X_L} = -j\dfrac{V^2}{X_L} = \overline{Q}_L^{*}$ y $\qquad$ (10.12)

2) para un capacitor $\quad \dfrac{V^2}{\overline{X}_C} = \dfrac{V^2}{-j \cdot X_C} = j\dfrac{V^2}{X_C} = \overline{Q}_C^{*}$ $\qquad$ (10.13)

Sin embargo si se quiere puede usarse la forma "V^2 / X" pero hay que tomar en cuenta que de acuerdo a la convención adoptada, lo que se obtiene es el valor conjugado de la potencia reactiva.

1.3 Potencia compleja y triángulo de potencia

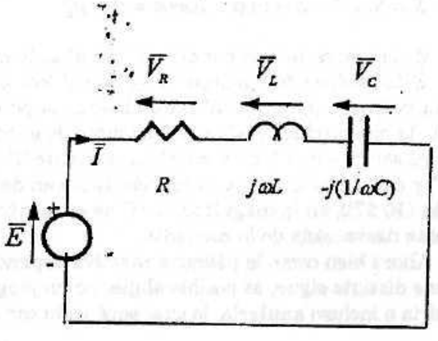


Figura 10.1

Sea un circuito como el de la figura 10.1 en el que se quiere determinar, considerando el nuevo concepto de potencia introducido, la potencia total absorbida por la carga constituida por "R", "$\overline{X}_L$" y "$\overline{X}_C$" en serie. Por ley de conservación de la energía la potencia total absorbida deberá ser la suma de las tres potencias, la real dada por la expresión (10.3) y las reactivas ficticias, introducidas según (10.9) y (10.10) de entidad imaginaria. Se obtiene así un número complejo denominado potencia compleja y se designada con la letra "$\overline{S}$".

$$\overline{S} = R \cdot I^2 + \overline{X}_L \cdot I^2 + \overline{X}_C \cdot I^2 = P + \overline{Q}_L + \overline{Q}_C = P + jQ \qquad \text{ó} \qquad (10.14)$$

$$\overline{S} = \left(R + \overline{X}_L + \overline{X}_C\right) \cdot I^2 = \overline{Z} \cdot I^2 \qquad (10.15)$$

potencia compleja

La expresión (10.15) sigue siendo análoga a la expresión de la ley de Joule tomada como base y podría considerarse desde un punto de vista formal como tal, para circuitos de corriente alternada sinusoidal.

De la expresión (10.14), para la representación gráfica de esta potencia compleja, se necesita recurrir a un plano complejo tal como se muestra a continuación.

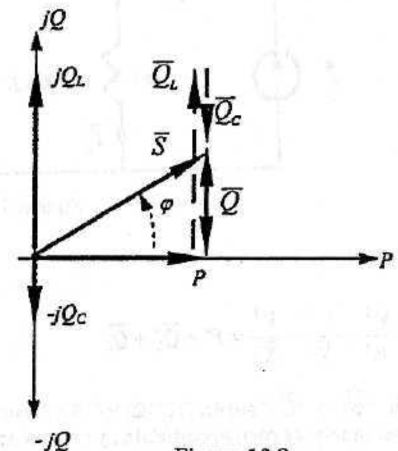


Figura 10.2

Se obtiene así un triángulo de potencias con el vector "$\overline{S}$" como hipotenusa donde "P" y "Q" son los catetos. De la expresión (10.15) y considerando que "$I^2 = \overline{I} \cdot \overline{I}^{*}$", la potencia compleja puede adoptar la forma:

$$\overline{S} = \overline{Z} \cdot \overline{I} \cdot \overline{I}^{*} = Z.e^{j.\varphi} \cdot I.e^{j.\delta i} \cdot I.e^{-j.\delta i} \qquad (10.16)$$

Simplificando y considerando que "$V = Z \,.\, I$" se tiene

$$\overline{S} = V \cdot I \cdot e^{j\varphi} = S \cdot e^{j\varphi} \qquad (10.17)$$

Donde
$S = V \,.\, I$: es el módulo de la potencia compleja "$\overline{S}$", se conoce como potencia aparente, su unidad está dada en (*Volt-Amper*) y
φ: es el argumento de la potencia compleja y coincide con el argumento de "$\overline{Z}$"

También a partir de considerar que "$\overline{V} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$" la potencia compleja puede ser obtenida del siguiente producto:

$$\overline{S} = \overline{V} \cdot \overline{I}^{*} \qquad (10.18)$$

Se ha llegado así a una expresión para la obtención de la potencia en corriente alterna, similar a la de la potencia para corriente continua ya que se obtiene de multiplicar el fasor diferencia de potencial "V" por el fasor corriente "I", ambos constantes por definición de fasor.

Un razonamiento similar puede efectuarse para el circuito de la figura 10.3 siguiente donde por estar los elementos pasivos en paralelo lo común, a "R'", "$\overline{X}_L'$" y "$\overline{X}_C'$", resulta ser la caida de tensión "$\overline{V}$" y en consecuencia para calcular la potencia compleja absorbida puede ser conveniente utilizar ahora las formas de las expresiones (10.11), (10.12) y (10.13).

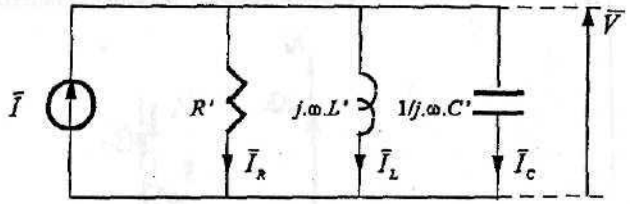


Figura 10.3

Entonces

$$\overline{S}' = \frac{V^2}{R'} + \frac{V^2}{\overline{X}_L'} + \frac{V^2}{\overline{X}_C'} = P' + \overline{Q}_L' + \overline{Q}_C' \qquad (10.19)$$

donde "$\overline{Q}_L'$" y "$\overline{Q}_C'$" según (10.12) y (10.13) corresponden a los valores conjugados de las potencias reactivas correspondientes y en consecuencia la potencia total "$\overline{S}'$" expresada en (10.19) es el valor conjugado de la potencia compleja que resultaría de aplicar el concepto inicial expresión (10.14) que se tomó como base de definición de la potencia compleja. Compárese entonces las potencias calculadas primero según (10.14) y luego según (10.19)

Según (10.14)

$$\overline{S} = R'\cdot I_R^2 + \overline{X}_L'\cdot I_L^2 + \overline{X}_C'\cdot I_C^2 = P + \overline{Q}_L + \overline{Q}_C = P + jQ \qquad (10.20)$$

$$\overline{S} = R'\cdot \overline{I}_R.\overline{I}_R^* + \overline{X}_L'\cdot \overline{I}_L.\overline{I}_L^* + \overline{X}_C'\cdot \overline{I}_C.\overline{I}_C^* \qquad (10.21)$$

Como por la conexión se puede asegurar que "$R'\cdot\overline{I}_R = \overline{X}_L'\cdot\overline{I}_R = \overline{X}_C'\cdot\overline{I}_R = \overline{V}$" la (10.21) queda

$$\overline{S} = \overline{V}\cdot\left(\overline{I}_R^* + \overline{I}_L^* + \overline{I}_C^*\right) = \overline{V}\cdot\overline{I}^* \qquad (10.22)$$

Ahora según (10.19) y considerando también que "$V^2 = \overline{V}\cdot\overline{V}^*$"

$$\overline{S}' = \frac{\overline{V}.\overline{V}^*}{R'} + \frac{\overline{V}.\overline{V}^*}{\overline{X}_L'} + \frac{\overline{V}.\overline{V}^*}{\overline{X}_C'} = \frac{\overline{V}}{R'}\overline{V}^* + \frac{\overline{V}}{\overline{X}_L'}\overline{V}^* + \frac{\overline{V}}{\overline{X}_C'}\overline{V}^* \qquad (10.23)$$

como

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{V}}{R'},\ \overline{I}_L = \frac{\overline{V}}{\overline{X}_L'}\ y\ \overline{I}_C = \frac{\overline{V}}{\overline{X}_C'} \qquad (10.24)$$

Entonces la (10.23) puede escribirse

$$\overline{S}' = \overline{I}_R\cdot\overline{V}^* + \overline{I}_L\cdot\overline{V}^* + \overline{I}_C\cdot\overline{V}^* = \left(\overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C\right)\cdot\overline{V}^* = \overline{I}\cdot\overline{V}^* \qquad (10.25)$$

El valor obtenido en (10.25) resulta ser el conjugado de la expresión (10.22) con lo q concluye que:

$$\overline{S}' = \overline{S}^*$$

En resumen se han obtenido las siguientes expresiones para calcular la potencia pleja en circuitos de corriente alternada sinusoidal:

$$\overline{S} = \overline{V}\cdot\overline{I}^* = V.I\cdot e^{j\varphi} \quad o \quad \overline{S}^* = \overline{V}^*\cdot\overline{I} = V.I\cdot e^{-j\varphi} \qquad (10.26)$$

2. FACTOR DE POTENCIA, COMPENSACIÓN Y FACTOR REACTIVO

2.1 Factor de potencia

Desarrollando la expresión (10.17) y comparándola con la (10.14) se obtiene

$$\overline{S} = S\cdot e^{j\varphi} = S\cdot\cos\varphi + jsen\varphi = P + jQ \qquad (10.27)$$

de la que resulta el por qué al "cos φ" se lo denomina factor de potencia.

Esto es obvio de comprender ya que el "cos φ" es el valor por el cual hay que multip a la potencia aparente "S" para obtener la potencia real "P" consumida por el circui sea, la que produce realmente consumo de energía.

Al ser "$S = V\,.\,I$", si "V = cte", la corriente "I" resulta ser función de la potencia apar "S" y como ésta a su vez es función también de la potencia reactiva requerida (ver ex sión (10.27)), en la magnitud de "I" se encuentra entonces involucrada tambien la cor nente desvateada de la corriente.

Ahora bien como la potencia reactiva dependiendo del elemento reactivo que la ori tiene distinto signo, es posible eligiendo un juego adecuado de elementos reactivos, di nuirla o incluso anularla, lo cual será visto con la resolución del siguiente ejercicio.

Ejercicio 10.1 (de apoyo a teoría)

Sea un tubo fluorescente cuyo circuito en funcionamiento se muestra en la figur guiente y en el que se toma a "E" tensión de alimentación, como fasor de referencia, o "$\delta_E = 0$".

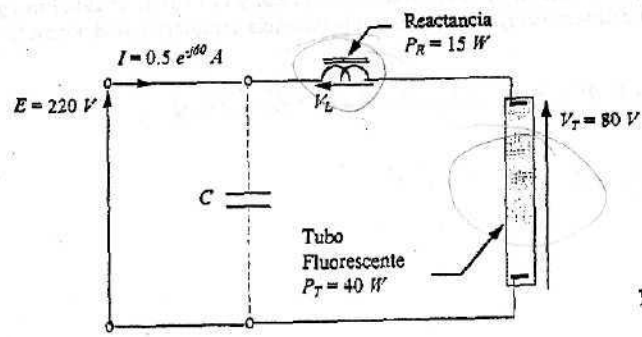


Figura 10.4

Se quiere determinar el factor de potencia y usando un capacitor "*C*", mostrado en líneas de trazos, corregirlo de manera que el "cos $\varphi = 1$". Como el tubo fluorescente encendido se comporta como una carga resistiva pura y considerando la potencia activa "$P_R = 15$ W" absorbida por la parte resistiva de la reactancia, la potencia activa total demandada por el tubo en régimen permanente será:

$$P = P_T + P_R = V_T \, . \, I + 15\ W = 80\ V \, . \, 0.5\ A + 15\ W = 55\ W \qquad (10.28)$$

La potencia compleja:

$$\overline{S} = \overline{E} \cdot \overline{I}^* = 220 \cdot e^{j0} \times 0.5 \cdot e^{j60} = 110 \cdot e^{j60} \quad (VA)$$
$$\overline{S} = 110 \cdot \cos 60 + j110 \cdot sen60 = 55 + j \cdot 95.2628 \quad (VA) \qquad (10.29)$$

El factor de potencia "cos 60° = 0.5" se lo quiere llevar a "1", en consecuencia el capacitor deberá poner en juego la misma potencia reactiva que la que absorbe el sistema del tubo fluorescente o sea:

$$\overline{Q}_C = -j \cdot 95.2628 \quad (VAr) \qquad (10.30)$$

Con lo que de acuerdo a la expresión más conveniente de la "ley de Joule para CA" en este caso, la reactancia capacitiva a conectar en paralelo será:

$$X_C = \frac{E^2}{Q_C} = \frac{220^2}{95.2628} = 508.0682\ (\Omega) \qquad (10.31)$$

y la capacitancia necesaria será:

$$C = \frac{1}{2\pi f \cdot X_C} = \frac{1}{159614.3325} = 6.2651\ (\mu F) \qquad (10.32)$$

2.2 Factor de reactivo

Así como, se denomina factor de potencia al coseno de "φ" por ser un factor que indica la potencia real absorbida en valores por unidad de la potencia aparente, se denomina factor reactivo al seno de "φ" ya que éste indica en valores por unidad de la potencia aparente la potencia reactiva que absorbe la carga.

3. FACTOR DE MÉRITO

3.1 Introducción

La calidad de un elemento reactivo está determinada por la relación entre la energía reactiva que debe absorber, o sea para lo que fue diseñado y la energía activa que está obligado a consumir debido a la imperfección de los materiales reales con que está construido. La imperfección de los materiales a la que se hace referencia se debe al valores aunque pequeño de la resistencia ohmica de los conductores o en caso de bobinas con nucleos ferromagnéticos, también a los consumos adicionales de energía por histéresis y foucault.

La energía absorbida por un elemento reactivo real aunque resultará mayoritariamente reactiva siempre contendrá alguna componente de energía activa que atenta contra la calidad del dispisitivo.

Se define entonces como factor de mérito, calidad o factor "*Q*" (letra derivada de la palabra *Quality*) de un elemento reactivo al cociente entre la energía reactiva para la que fue diseñado dividida por la energía activa concomitante que está obligado a consumir debido a los aspectos constructivos reales del elemento en cuestión. De acuerdo con la definición dada para la potencia reactiva en punto 1.2 la expresión matemática de este factor resulta:

$$Q = \frac{X \cdot I^2 \cdot T}{R \cdot I^2 \cdot T} \qquad (10.33)$$

De la expresión anterior se deduce que el factor de mérito puede ser evaluado también por el cociente de las potencias, caidas de tensión e incluso por el de sus valores ohmicos, tal como se muestra a continuación:

$$Q = \frac{X \cdot I^2}{R \cdot I^2} = \frac{X \cdot I}{R \cdot I} = \frac{X}{R} \qquad (10.34)$$

3.2 Factor de mérito de una bobina

La figura 10.5 representa una bobina de inductancia "*L*" con nucleo de aire, donde "*R*" es la resistencia ohmica del alambre con que fue construida la bobina. El factor de mérito de esta bobina de acuerdo a la definición expresión (10.33).

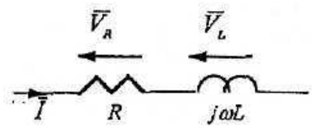


Figura 10.5

$$Q = \frac{X_L \cdot I^2 \cdot T}{R \cdot I^2 \cdot T} \qquad (10.35)$$

$$Q = \frac{|\overline{Q}_L|}{P} = \frac{|\overline{V}_L|}{|\overline{V}_R|} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} \qquad (10.36)$$

Cabe aclarar que no hay que confundir la letra "*Q*" que representa el factor de mérito con la que se usa para representar la potencia reactiva.

3.3 Factor de mérito de un condensador

Por el mismo motivo constructivo que la bobina, un condensador posee resistencia ohmica que puede ser modelada en serie o en paralelo. Para el caso de la figura donde fue representada en serie, el factor de mérito podrá estar dado por las siguientes expresiones:

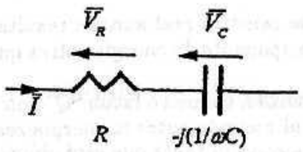


Figura 10.6

$$Q = \frac{X_C \cdot I^2 \cdot T}{R \cdot I^2 \cdot T} \qquad (10.37)$$

$$Q = \frac{\left|\overline{Q}_C\right|}{P} = \frac{\left|\overline{V}_C\right|}{\left|\overline{V}_R\right|} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR} \qquad (10.38)$$

3.4 Factor de mérito en circuitos reactivos mixtos

Supóngase un circuito RLC como el de la figura 10.7 siguiente

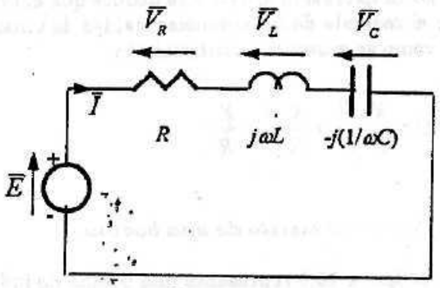


Figura 10.7

Se sabe que la impedancia de este circuito es una función de la frecuencia como se expresa a continuación:

$$\overline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (10.39)$$

Si se desprecia la dependencia de la resistencia con la frecuencia debida al efecto skin y se grafican en función de la frecuencia "ω" los términos de la expresión (10.39) se tiene:

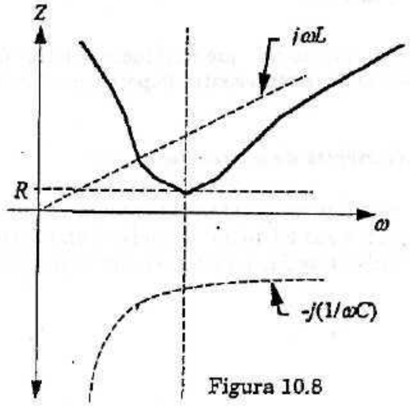


Figura 10.8

Se ve la variación con la frecuencia del módulo de la impedancia "Z" y cómo se mínimo y puramente resistiva para la frecuencia de resonancia, lo que implica que l rriente será máxima. La corriente para un circuito de este tipo resulta ser, tal con muestra en el siguiente gráfico, una función de la frecuencia.

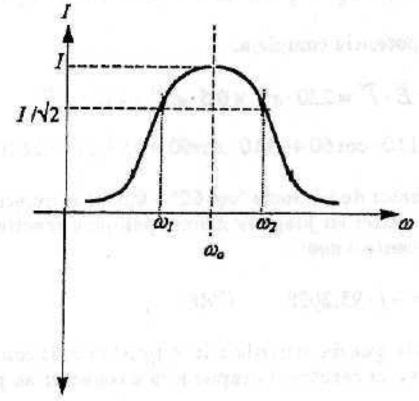


Figura 10.9

Tal como se deduce de las figuras 10.8 y 10.9 esta impedancia puesta en serie en circuito que maneje múltiples frecuencias ofrecerá mínima oposición a la component corriente cuya frecuencia sea "ω_o" (frecuencia de resonancia) y la oposición aumentará el aumento del apartamiento de la frecuencia de la componente con relación a la de r nancia. Esto quiere decir que las componentes de corriente que circulan por el circ serán menores mientras mayor sea la desviación de su frecuencia con relación a la de r nancia. Aprovechando este fenómeno se construyen dispositivos que actúan como fil permitiendo el paso de corrientes de determinada frecuencia y parando las frecuen muy apartadas de la de resonancia. Algo similar pero a la inversa ocurrirá con circu "*RLC*" paralelos.

Es obvio que en estos circuitos constituidos especialmente con elementos reactivos t drá una particular importancia el factor de mérito. Para definirlo se considera la condic de resonancia ya que al ser el de máxima corriente corresponderá al de máxima poter disipada por la resistencia. En esta condición de resonancia el valor máximo de ener reactiva almacenada tanto en la bobina como en el condensador resulta ser el mism igual al total de energía reactiva en juego. Este valor máximo de energía reactiva comc fue visto, estará entretenida oscilando entre el condensador y la bobina y la corriente pu ta así en juego al pasar por la resistencia del circuito producirá una disipación de poten que deberá ser aportada por el generador en cada ciclo.

El factor de mérito puede ser determinado entonces por:

$$Q_O = \frac{X_L(\omega_O) \cdot I_O^2 \cdot T}{R \cdot I_O^2 \cdot T} = \frac{X_C(\omega_O) \cdot I_O^2 \cdot T}{R \cdot I_O^2 \cdot T} \qquad (10.40)$$

O como fue demostrado

$$Q_O = \frac{\omega_O L}{R} = \frac{1}{\omega_O CR} \qquad (10.41)$$

3.5 *Factor de mérito y ancho de banda*

Para un circuito de filtro ideal, cuya característica de filtrado se muestra en la figura 10.10, se entiende por ancho de banda o banda pasante al conjunto de componentes de corriente, cuyas frecuencias están comprendidas entre "ω_1" y "ω_2" y son permitidas en el circuito.

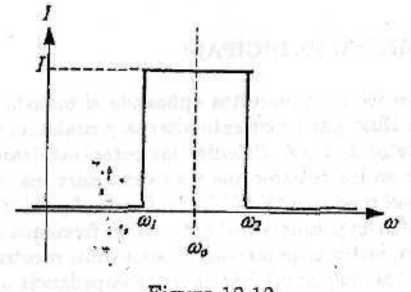


Figura 10.10

Como se observa claramente en el gráfico de la figura 10.10 la amplitud de cualquier componente de corriente, cuya frecuencie esté por debajo de "ω_1" o por arriba de "ω_2" resulta nula. Por este motivo a las frecuencias extremas "ω_1" y "ω_2" se las denomina frecuencias de corte y su diferencia "$B = \omega_2 - \omega_1$" es lo que que se definió como ancho de banda.

En un circuito de filtro ideal, cuya respuesta de frecuencia sea la de la figura 10.10, no existe ninguna dificultad para la determinación del ancho de banda. Sin embargo la respuesta en frecuencia de un circuito de filtro "*RLC*" serie como el de la figura 10.7 es aproximadamente como se mustra en la figura 10.9 y como resulta obvio ya no es tan fácil definir las frecuencias de corte y su ancho de banda.

Para este caso se acuerda como banda pasante a toda componente de corriente que origine una potencia consumida mayor que la mitad de la potencia consumida en resonancia es decir si se designa con "P_B" a las potencias originadas por componentes de la banda pasante deberán cumplir con:

$$P_B \geq \frac{P_o}{2} \qquad (10.42)$$

El hecho de usar, para definir las frecuencias de corte, la potencia activa y no la reactiva obedece a que como la "*R*" varía muy poco con la frecuecia, esta variación se desprecia y la única variable con la frecuencia que interviene es la corriente, mientras que no se puede decir lo mismo de las reactancias ya que éstas son también eminentemente variables con la frecuencia. De tal manera la condición definida en la expresión (10.42) queda:

$$P_B \geq \frac{R \cdot I_o^2}{2} = R \cdot \left(\frac{I_o}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (10.43)$$

Como "$I = f(\omega)$" las frecuencias de corte corresponderán a aquellos valores de corriente cuya amplitud sea de acuerdo con (10.43)

$$I_B = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{E/R}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}R} = \frac{E}{Z_1} = \frac{E}{Z_2} \qquad (10.44)$$

Ahora bién, de acuerdo con la expresión (10.44), para las frecuencias de corte "ω_1" y "ω_2", la impedancia "$Z_1 = \sqrt{2}R = Z_2$".

Entonces para "ω_1"

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L\right)^2} = \sqrt{2}R \qquad (10.45)$$

Para que lo anterior se cumpla debe ser

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \qquad (10.46)$$

Operando

$$\frac{1 - \omega_1^2 LC}{\omega_1 C} = R \qquad (10.47)$$

$$LC\omega_1^2 + RC\omega_1 - 1 = 0 \qquad (10.48)$$

$$\omega_1 = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{2L} \qquad (10.49)$$

Como la frecuencia no puede ser negativa, la expresión de la frecuencia de corte inferior resultará:

$$\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{2L} \qquad (10.50)$$

Partiendo ahora del mismo concepto pero ahora para Z_2

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \qquad (10.51)$$

Idéntico desarrollo se puede efectuar para la frecuencia superior de corte "ω_2", con lo que se llega a la expresión:

$$\omega_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{2L} \qquad (10.52)$$

Efectuando la diferencia entre (10.52) y (10.50) se obtiene, según se vio, el ancho de banda:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2\frac{R}{2L} \qquad (10.53)$$

$$\frac{B}{\omega_o} = \frac{R}{\omega_o L} = \frac{1}{Q_o} \qquad (10.54)$$

Con lo que queda demostrada la relación entre el factor de mérito y el ancho de banda.

PROBLEMAS PROPUESTOS
CAPITULO 10

OBJETIVO PRINCIPAL:

Resolver los circuitos aplicando el método fasorial asociado a las leyes de Kirchl símil Ohm para corriente alterna y cualquiera de los métodos y/o teoremas vistos er capítulos 2, 3 y 4. Calcular las potencias deseadas y factores asociados usando la le Joule en las resistencias y su símil para las reactancias, así como también otras for como el producto "$V \cdot I^*$", "$V \cdot I \cdot \cos\varphi$" y "$V \cdot I \cdot \mathrm{sen}\,\varphi$". También a través del concept mitad de la potencia real determinar frecuencias de corte de circuitos resonantes, anch banda, factores de méritos de elementos reactivos, etc. Toda vez que se pueda deberán cerse los diagramas fasoriales de impedancia o admitancia y diagramas de potencia.

PROBLEMA 10.1

Una línea de corriente alterna modelada por una resistencia en serie con u inductancia cuyos valores en Ohms para 50 Hz se dan en la figura P10.1, vincula una fu te con una impedancia de carga "Z" que absorbe con una ddp de 380 V una potencia de kVA con factor de potencia de 0.6 inductivo.

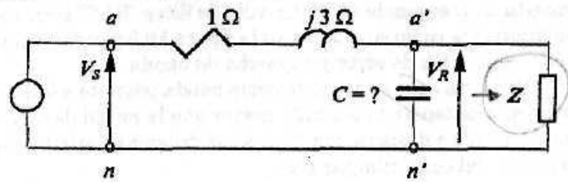


Figura P10.1

Considere:

a) Si en primer término no existe el capacitor conectado entre los terminales "a' - n'" carga calcular:

1) Pérdidas de potencia activa y reactiva en los conductores de la línea.
2) Tensión en los terminales "a' - n'" de la carga.
3) Tensión en bornes de la fuente.
4) Potencia absorbida por la carga y entregada por la fuente.

b) Si ahora se determina la capacitancia del condensador "*C*" entre "*a' - n'*" que haga que las tensiones en la fuente (que es constante) y en la carga sean iguales, se requiere:

5) Calcular caída de tensión y pérdidas de potencia activa y reactiva en la línea.
6) Calcular potencia absorbida por la impedancia de carga en estas nuevas condiciones.
7) Analizar y escribir alguna conclusión de las observaciones efectuadas.

PROBLEMA 10.2

Si la fuente de corriente tiene un valor eficaz de "250 mA" con "ω = 100 rad/seg", se quiere determinar: las potencias, activa, rectiva, aparente y compleja absorbidas por la carga conectada entre bornes "*A - B*".

R $\frac{1}{Q}$ P = V I cos φ

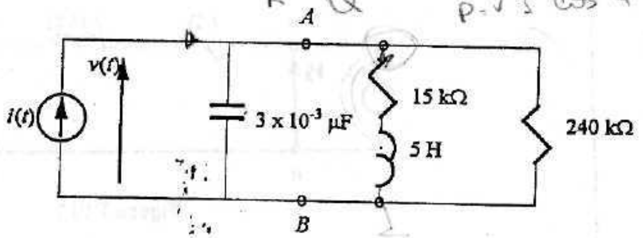


Figura P10.2

PROBLEMA 10.3

Determinar la potencia compleja que suministra la fuente considerando que la frecuencia "*f* = 16 Hz".

em $LC\omega_1^2 + RC\omega_1 = 0$

¿es lo el?

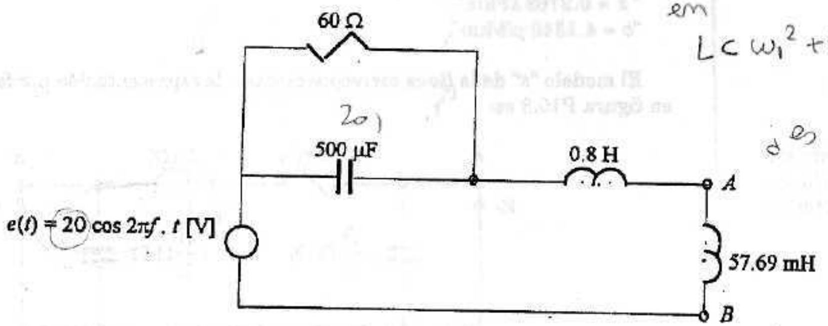


Figura P10.3

¿Cuánto vale la potencia compleja entregada por la fuente si entre los bornes "*A - B*" se sustituye la inductancia por una resistencia de idéntico valor ohmico?.

PROBLEMA 10.4

Se desea encontrar la reactancia inductiva de la línea del circuito de la figura P10.4 del que se conoce que la potencia real absorbida por "*Z*" es de 6250 W cuando la fuente entrega 6500 W con "V_S = 1000 $e^{j0°}$ [V_{ef}]".

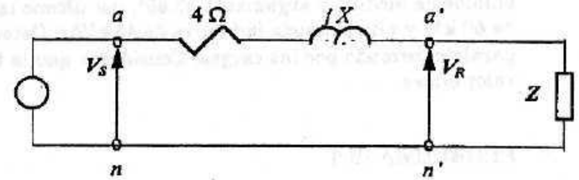


Figura P10.4

PROBLEMA 10.5

El sector del circuito comprendido entre los terminales "*a - b*", por su comportamiento se conoce con el nombre de filtro pasabanda. Se desea determinar:

a) la frecuencia de resonancia "ω_o" para la que fue diseñado el filtro,
b) la potencia absorbida por la resistencia para "ω_o",
c) las frecuencias de corte y el ancho de banda que definen,
d) el factor de mérito del filtro,
e) determinar y graficar la variación del módulo y argumento de la impedancia del filtro en función de "ω" y
f) las potencias absorbidas por los elementos reactivos a la frecuencia de resonancia y de corte.

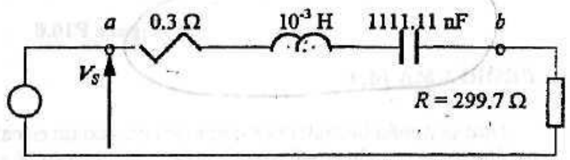


Figura P10.5

PROBLEMA 10.6

Tres cargas que absorben la primera 30 kW y 25 kVAr, la segunda 20 kVA con un factor de potencia de 0.8 capacitivo y la tercera, resistiva pura, 11 kW, son conectan en paralelo. Encontrar la impedancia equivalente a las tres cargas.

PROBLEMA 10.7

Tres cargas conectadas en paralelo se encuentran vinculadas con la fuente a través de un circuito cuya reactancia inductiva es de 4 ohmios. La potencia que absorbe la primer carga es de 22.3 kVA con un argumento de -26,6°, la segunda es una impedancia de 180 ohmios de módulo y argumento 33.69°; por último la tercera absorbe una potencia media de 60 kW y una potencia inductiva de 40 kVAr. Determinar el fasor tensión en bornes del paralelo formado por las cargas. Considerar que la tensión de la fuente es de 2400 V de valor eficaz.

PROBLEMA 10.8

Si las fuentes del circuito de la figura P10.6 son: "$V_1 = 220\ e^{j30°}$", "$V_1 = 220\ e^{-j90°}$" y "$V_1 = 220\ e^{j150°}$", calcule la potencia compleja y el factor de potencia que ve cada generador.

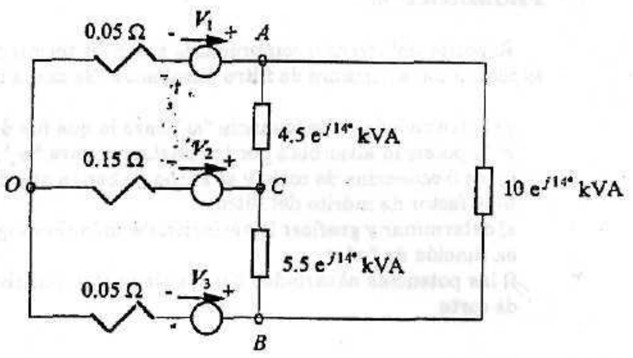
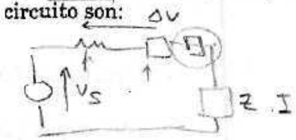


Figura P10.6

PROBLEMA 10.9

Una pequeña industria está alimentada con un circuito monofásico de 50 Hz en corriente alterna, formado por dos conductores de cobre de 16 mm² aislación PVC y 70 m de largo. La demanda en el extremo receptor (con una tensión de 220 V) es de 20 kVA y factor de potencia en atraso de 0.85. Si las características del circuito son:



a) la resistencia "$r = 1.4\ \Omega/km$" y
b) la reactancia "$x = 0.247\ \Omega/km$",

determinar:

a) el valor eficaz de la tensión en el extremo fuente del circuito alimentador,
b) pérdida de potencia en el alimentador,
c) capacitor en el extremo receptor para contar con un factor de potencia de 0.95,
d) valor eficaz de la tensión en el extremo receptor después de conectado el capacitor del punto anterior,
e) pérdida de potencia en el alimentador después de colocado el capacitor.

PROBLEMA 10.10

Se tiene como dato que con 4.8 kV de tensión nominal sobre la impedancia de carga circuito de la figura P10.7, se absorbe una potencia compleja de 200 kVA y 36.87° de ar mento. ¿Qué tensión hará falta en el extremo emisor del circuito para disponer de e tensión en el extremo receptor?. ¿Cuál será la caida en el circuito que vincula fuent carga?. Si la tensión de partida en el extremo emisor está dada por los 4.8 kV antes men nados ¿qué porcentaje de la tensión nominal tendrá aplicada la carga? Si el porcent calculado en el paso anterior es inferior al 95% de la tensión nominal no resulta aceptal en tal caso proponer una forma de corregir el problema. Calcular un capacitor para que tensión en el extremo receptor resulte igual a la del extremo emisor.

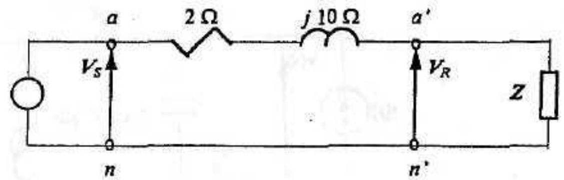


Figura P10.7

PROBLEMA 10.11

La línea de 500 kV que vincula las Centrales Hidráulicas Yacyretá con Salto Gran Argentino es de 507 km de largo. Para la representación por fase con el modelo "π" se cor con los siguientes parámetros:

"$r = 0.0240\ \Omega/km$",
"$x = 0.2768\ \Omega/km$" y
"$b = 4.1340\ \mu S/km$".

El modelo "π" de la línea correspondiente a la representación por fase según se muest en figura P10.8 es:

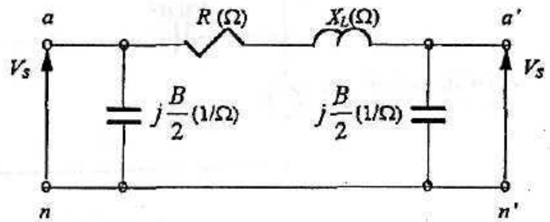


Figura P10.8

Se quiere:

a) Reemplazar en la figura los parámetros totales para la representación de la línea.
b) Si la tensión por fase en el extremo emisor es $V_S = 288.6751$ kV, ¿qué tensión habrá e el extremo receptor con la línea en vacío?. (Se aclara que por línea en vacío deb

interpretarse a la línea sin carga, o sea extremo receptor abierto). Por el resultado que se obtenga notará que no es posible dejar una línea de estas características sin carga.
c) Se quiere efectuar la maniobra de interconectar ambas centrales cerrando primero el interruptor que está en el extremo Yacyretá y luego el que está en Salto Grande Argentino. Esta segunda maniobra es preciso hacerla con una diferencia de potencial como máximo del 10% entre los extremos que van a entrar en contacto. Se quiere entonces determinar esta ddp tomando en cuenta que la tensión en los terminales del interruptor conectado a SGA es el valor nominal por fase de 288.6751 kV.
d) En caso que la diferencia de potencial calculada en el paso anterior sea excesiva ¿qué elemento reactivo y de que valor habrá que instalar en extremo SGA de la línea, para que la ddp no supere el 10%?.

PROBLEMA 10.12

La factura de consumo eléctrico de una instalación alimentada con 220 VCA, 2f-2h, 50 Hz, acusa un consumo de:

a) Energía activa: 1440 kWh (bimestrales)
b) Energía reactiva inductiva: 864 kVArh (bimestrales)

La empresa distribuidora emplaza al propietario a corregir el factor de potencia a un valor mínimo de 0.9 en un plazo de 30 días, o en su defecto aplicará una multa que incrementará la cuenta de luz en un porcentaje igual a [1 - (0.5/cosφ)] x 100%.
El propietario decide la conveniencia de corregir el factor de potencia, para lo cual contrata a un especialista que determine los medios para su implementación. La persona a cargo de efectuar el cálculo para la corrección, sabe que debe emplear un capacitor, pero no cuenta con la experiencia suficiente y se le plantean los siguientes dilemas:

a) ¿Conectar el capacitor en serie o en paralelo con la "Z" de carga?.
b) ¿Dependerá de la forma de conexión la capacitancia que resulte del cálculo?.
c) ¿Qué arreglo circuital finalmente deberá elegir?.

Se sugiere para resolver el dilema plantear por separado ambos casos. Previamente (con la carga original) determinar: 1) la diferencia de potencial y la potencia absorbida por los elementos constitutivos de la carga, 2) efectuar el diagrama fasorial para esta condición. Luego calcular la capacidad para las dos configuraciones que ocasionan el dilema y repetir, para cada caso, el cálculo de: 1) la diferencia de potencial y la potencia absorbida por los elementos constitutivos de la carga (incluyendo ahora el capacitor de cada configuración), 2) efectuar los diagramas fasoriales correspondientes. 3) Analizar los resultados y escribir una conclusión al respecto.

XI

TRATAMIENTO FASORIAL DE ACOPLAMIENTOS MAGNÉTICOS Y TRANSFORMADOR