

# **ELECTROTECNIA I**

## **CAPITULO 3**

### **TOPOLOGIA Y METODOS DE RESOLUCION DE CIRCUITOS**

## CAPITULO 3

### TOPOLOGIA Y METODOS DE RESOLUCION DE CIRCUITOS

#### 1. INTRODUCCION

##### 1.1 Conjunto mínimo de corrientes de rama

Conceptos de introducción a topología de circuitos

##### 1.2 Conjunto mínimo de tensiones de rama

Conceptos de introducción a topología de circuitos

#### 2. TOPOLOGIA DE CIRCUITOS

##### 2.1 Definición

##### 2.2 Subcircuitos árbol y enlaces

##### 2.3 Grafo o gráfica de un circuito

##### 2.4 Rama y malla orientada

#### 3. METODOS DE RESOLUCION DE CIRCUITOS

##### 3.1 Método de las corrientes ficticias de malla

*Ejercicio 3.1* (de apoyo a teoría)

##### 3.2 Método sistemático de mallas

*Ejercicio 3.2* (de apoyo a teoría)

##### 3.3 Malla fundamental (concepto de topología de circuitos)

##### 3.4 Método de los potenciales de nodo

*Ejercicio 3.3* (de apoyo a teoría)

##### 3.5 Método sistemático de nodos

COMPARACION FORMAL DE METODOS SISTEMATICOS

##### 3.6 Sección de corte fundamental (concepto de topología de circuitos)

#### 4. CIRCUITOS CON FUENTES IDEALES NO CONVERTIBLES

##### 4.1 Equivalencia entre fuentes reales de tensión y corriente

##### 4.2 Casos conflictivos

##### 4.2.1 Resolución por artificios basados en topología de circuitos

*Ejercicio 3.4* (de apoyo a teoría)

Resolución por el método de mallas

Resolución por el método de nodos

##### 4.2.2 Resolución por transformación de las fuentes ideales por desdoblamiento

Transformación de fuente ideal a fuente real de corriente

Transformación de fuente ideal a fuente real de tensión

#### 5. SINGULARIDADES EN CIRCUITOS

#### 6. OTRAS CONFIGURACIONES UTILES DE FUENTES IDEALES

##### 6.1 Paralelo de fuentes ideales de tensión y corriente.

##### 6.2 Serie de fuentes ideales de corriente y tensión.

#### PROBLEMAS PROPUESTOS CAPITULO 3

## CAPITULO 3

### TOPOLOGIA Y METODOS DE RESOLUCION DE CIRCUITOS

#### 1. INTRODUCCION

Con el objeto de ir de lo simple a lo complejo se ha elegido introducir los métodos de resolución de circuito en corriente continua, de esta manera su comprensión resulta más natural. Esto se debe a que en corriente continua las ecuaciones que representan un circuito, son algebraicas en variable real y como los métodos de resolución son una consecuencia del procedimiento matemático, entonces resultan más fáciles de comprender.

Una consecuencia lógica de lo dicho, es que como el procedimiento no altera los conceptos físicos aplicados, los métodos que aquí se verán, como será comprobado cuando se estudie la resolución de circuitos de corriente alterna, son utilizables en cualquier tipo de circuito. La única diferencia que se encontrará, es la complicación que aparece en el cálculo matemático, por la necesidad de usar ecuaciones diferenciales o métodos que se apoyan en los números complejos.

Con el ejercicio 2.1 (de apoyo a teoría) visto en punto 3.3 del Capítulo 2, se comprueba que según el procedimiento matemático que se siga en la resolución de las ecuaciones de ramas y nodos que representan el funcionamiento del circuito, se puede, apelando a la sistematización, lograr un planteo más simplificado del problema. Lo que en realidad sucede es que si se establecen ciertas reglas, se podrán saltar algunos pasos que además ayudará a evitar errores.

Como se mostró en el ejercicio citado, si de las ecuaciones de rama se despejan las tensiones de rama y se igualan según corresponda a la configuración del circuito, entonces desaparecen las tensiones de rama y con ellas, los potenciales de nodo. Los potenciales de nodo desaparecen al eliminar las tensiones de rama, debido a que las tensiones de rama dependen de la diferencia de los potenciales de los nodos, extremos de cada rama.

La eliminación de las tensiones de ramas, es una consecuencia de la vinculación entre ramas que impone el circuito y pone de manifiesto que el funcionamiento de un circuito no depende de los eventuales potenciales que tengan sus nodos, sino de sus diferencias, es decir de las tensiones de rama. En un circuito, la tensión de cada rama

coincidirá necesariamente con la de otra u otras ramas con las que se encuentre conectada en paralelo o formando una poligonal cerrada, de manera tal que despejando las tensiones de rama e igualando las que correspondan según la configuración del circuito, los potenciales de nodos asociados, quedarán eliminados.

### 1.1 Conjunto mínimo de corrientes de rama

Por otro lado, observando la ecuación (2.34) del mismo ejercicio 2.1 se puede aseverar que de las “ $r$ ” corrientes de rama que tiene un circuito, hay un conjunto mínimo “ $m$ ” de corrientes de rama, de las que dependen las restantes. Para el caso del ejercicio 2.1, por la ecuación del nodo “ $A$ ”, se ve que una de las tres corrientes de rama, cualquiera de ellas, depende de las otras dos. Para el ejercicio señalado, este conjunto mínimo de corrientes es entonces “ $m=2$ ”, debido al despeje efectuado para el caso “ $i_3 = i_1 - i_2$ ”, entonces “ $i_3$ ” depende de las corrientes “ $i_1$ ” e “ $i_2$ ”, por lo que se comprueba la aseveración anterior. En consecuencia, con la eliminación de los potenciales de nodos descrita al principio y con la eliminación de las corrientes de ramas que son dependientes del conjunto mínimo referido, el sistema de ecuaciones queda reducido a un orden muy inferior.

Recurriendo a la geometría del circuito, una manera sencilla de obtener este conjunto mínimo “ $m$ ” de corrientes de rama, es elegir arbitrariamente una corriente de rama “ $i_k$ ” y asignarla ficticiamente a una malla (poligonal cerrada o trayectoria cerrada de ramas), también arbitrariamente elegida y a la que debe pertenecer la rama “ $k$ ”, cuya corriente fue elegida. De la misma manera se pueden seguir eligiendo corrientes de rama que todavía no hayan sido incluidas en las mallas arbitrariamente elegidas y se las asigna a nuevas mallas arbitrarias. Se sigue el procedimiento hasta que no quede ninguna rama libre de estas corrientes ficticias de malla asignadas. Las mallas que así resulten se corresponderán con uno de los posibles conjuntos de corrientes ficticias que permitirá obtener todas las corrientes reales de rama del circuito.

A este conjunto mínimo de corrientes “ $i_k$ ”, eventualmente elegidas que fueron asignadas a las “ $m$ ” mallas también arbitrariamente elegidas, para mayor claridad se les da un valor ficticio “ $I_m = \pm i_k$ ”. El circuito queda así conformado por las mallas arbitrariamente elegidas y sus respectivas corrientes ficticias que se constituyen en el mínimo conjunto de corrientes “ $m$ ” buscado y que ahora se llaman corrientes ficticias de malla. De estas corrientes ficticias, dependen todas las corrientes reales de ramas. Este conjunto mínimo de corrientes ficticias “ $m$ ” permite escribir un sistema de ecuaciones linealmente independientes que constituyen un sistema compatible y determinado.

De lo visto se puede inferir que para que dos mallas de un circuito sean linealmente independientes deben diferir, por lo menos, en una rama. Cada una de estas ramas que son las que corresponden a las corrientes “ $i_k$ ” antes referidas, es exclusiva de cada una de las mallas arbitrariamente elegidas.

Las ramas exclusivas a las que pertenece el juego “ $i_k$ ” de corrientes elegidas, se conocen como ramas de enlace. Se puede inferir que para “ $m$ ” mallas linealmente independientes de un circuito, puede haber distintos juegos de “ $m$ ” corrientes de rama de enlace que permitirán obtener las restantes.

## Conceptos de introducción a topología de circuitos

Elegido cualquier conjunto de ramas de enlace, el circuito queda dividido en dos subcircuitos: 1) el conformado por estas ramas exclusivas (o de enlace), cuyas corrientes fueron convertidas en ficticias de malla y que determinan el número mínimo de corrientes de rama, de las que dependen todas las corrientes reales de rama y 2) el conformado por las ramas restantes que completan el circuito y cuyas corrientes reales resultan de la composición de las ficticias de malla que para el ejercicio tomado de ejemplo serian:

$$"I_a = i_1" \text{ e } "I_b = i_2", \text{ las ficticias seleccionadas e} \quad (3.1)$$

$$"i_3 = I_a - I_b", \text{ la que depende de las ficticias seleccionadas.} \quad (3.2)$$

Tomando el ejercicio 2.1 Figura 2.23 del Capítulo 2 antes referido que se repite a continuación como Figura 3.1, si se elige primero " $i_1$ " y luego " $i_2$ " y previo convertirlas en las ficticias asociadas " $I_a = i_1$ " e " $I_b = i_2$ ", a cada una se le asigna sucesivamente una malla arbitrariamente elegida "HACH" y "CEGHC", tal como fue descrito y se muestra a continuación, se ve que estas dos corrientes ficticias, constituyen para el caso, el conjunto mínimo " $m$ " buscado.

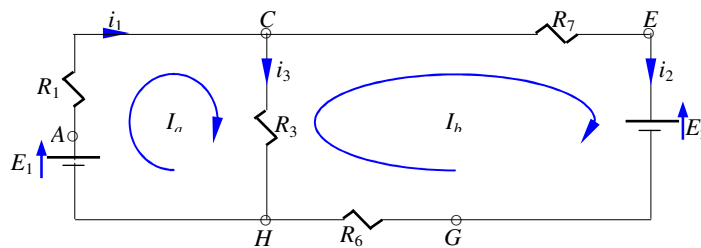


Figura 3.1

Mediante las siguientes ecuaciones se puede ver que toda corriente de rama depende de las ficticias de mallas, esto en forma genérica se expresa según se indica a continuación:

$$i_1 = I_a + 0 \quad (3.3)$$

$$i_2 = 0 + I_b \quad (3.4)$$

$$i_3 = I_a - I_b \quad (3.5)$$

De lo expuesto se puede ver que si de la ecuación del nodo "A" se hubiera despejado otra de las corrientes, por ejemplo " $i_2 = i_1 - i_3$ " o " $i_1 = i_2 + i_3$ ", los respectivos conjuntos mínimos estarían ahora conformados por " $i_1$ " e " $i_3$ " o " $i_2$ " e " $i_3$ " y las ramas exclusivas serian entonces "1" y "3" o "2" y "3" y las respectivas mallas y corrientes ficticias serian "HACEGH", "HCEGH" e " $I_a = i_1$ ", " $I_b = -i_3$ " o "CEGHAC" y "CHAC" e " $I_a = i_2$ ", " $I_b = i_3$ ". Las letras subrayadas constituyen la rama exclusiva " $k$ " correspondiente a la malla arbitraria.

### 1.2 Conjunto mínimo de tensiones de rama

De la misma manera que se demostró que existe un conjunto mínimo de corrientes de rama de las que dependen todas las corrientes de rama restantes, se puede demostrar

que hay un conjunto mínimo de “ $n-1$ ” tensiones de rama, donde “ $n$ ” depende del tipo de nodo considerado, es decir: 1) los nodos que se quieran considerar (los efectivos como mínimo) o 2) sólo los nodos efectivos. De este conjunto mínimo arbitrario de tensiones de rama, dependerán todas las tensiones de rama del circuito.

El ejercicio 2.1 elegido para la ilustración que se repite a continuación como Figura 3.2, muestra uno de los posibles conjuntos mínimos “ $n-1=4$ ” de tensiones de ramas que permiten determinar las “ $r=6$ ” tensiones de ramas del circuito. En la figura 3.2, las “ $v_{(n-1)}$ ” tensiones de rama, arbitrariamente seleccionadas para formar uno de los posibles conjuntos mínimos, son: “ $v_{AH} = v_1$ ”, “ $v_{CH} = v_3$ ”, “ $v_{EG} = v_5$ ” y “ $v_{GH} = v_6$ ”, caracterizadas por subíndices literales correspondientes a los nodos extremos que las definen y permiten determinar todas las tensiones de rama del circuito.

Estas tensiones, además de ser indicadas con su propia tensión de rama, subíndice numérico y con subíndice literal, han sido simbolizadas con flechas en línea llena al lado de la rama a la que pertenecen, con su variable en subíndice numérico (flechas en líneas de trazo cuando corresponden a ramas que resultan ser función del conjunto mínimo arbitrario “ $v_{(n-1)}$ ” seleccionado).

De esta manera, considerando este juego de tensiones arbitrariamente elegido “ $v_{AH}$ ”, “ $v_{CH}$ ”, “ $v_{EG}$ ” y “ $v_{GH}$ ”, como se muestra mas adelante, se pueden escribir las ecuaciones que las vinculan con las tensiones de todas las ramas del circuito.

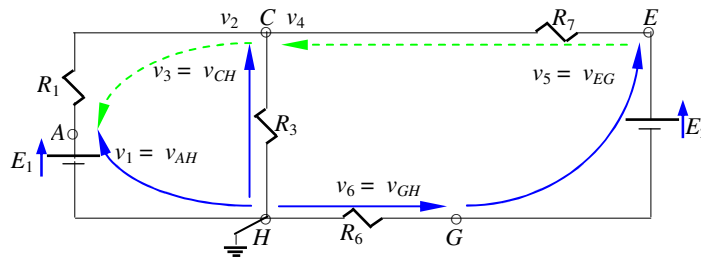


Figura 3.2

$AH \quad CH \quad EG \quad GH$  (indican la ubicación del término en la suma)

$$v_1 = v_{AH} + 0 + 0 + 0 \quad (3.6)$$

$$v_2 = -v_{AH} + v_{CH} + 0 + 0 \quad (3.7)$$

$$v_3 = 0 + v_{CH} + 0 + 0 \quad (3.8)$$

$$v_4 = 0 + v_{CH} - v_{EG} - v_{GH} \quad (3.9)$$

$$v_5 = 0 + 0 + v_{EG} + 0 \quad (3.10)$$

$$v_6 = 0 + 0 + 0 + v_{GH} \quad (3.11)$$

Como se observa de las ecuaciones anteriores, la tensión de cada rama del circuito es función del conjunto mínimo “ $v_{(n-1)}$ ”, señalado con subíndice literal.

Así como a cada malla linealmente independiente, le corresponde una rama exclusiva (de enlace) que le confiere la independencia lineal, habrá un conjunto de ramas exclusiva correspondientes a este nuevo conjunto mínimo “ $v_{(n-1)}$ ”, ahora llamadas ramas de árbol, las que podrán ser asignadas, de a una por vez, en forma exclusiva a cada nodo y constituyen un subcircuito denominado árbol del circuito. De

esta manera se le confiere la independencia lineal a cada nodo que la contiene y estas nuevas ramas exclusivas denominadas ramas del árbol del circuito, son complementarias de las de enlaces antes definidas.

De lo expuesto puede inferirse que por cada nodo linealmente independiente de un circuito debe haber una rama exclusiva (o rama de árbol) que le confiere esa propiedad. Cada una de estas ramas que son las que corresponden a las " $v_{(n-1)}$ " antes referidas, son entonces las ramas que constituyen el árbol del circuito y deben vincular todos los nodos entre sí, una y sólo una vez. Si al elegir una rama de árbol, esta cerrara una poligonal, es decir conformara una malla, entonces esta última no podrá ser rama de árbol del circuito y por lo tanto o se la elimina, o se elimina alguna otra rama de la malla para que no haya trayectoria cerrada. Lo anterior se debe a que la suma de las tensiones asociadas a una malla constituye una dependencia lineal.

En resumen el conjunto mínimo de tensiones de ramas " $v_{(n-1)}$ ", corresponderá a ramas que se obtienen de vincular todos los nodos considerados de un circuito, sin que se forme ninguna trayectoria cerrada, poligonal cerrada o malla.

Como fue dicho, las ramas exclusivas a las que pertenece el juego " $v_{(n-1)}$ " de tensiones elegidas, se conoce como ramas de árbol del circuito. Se puede inferir que para cada conjunto de " $n-1$ " de nodos linealmente independientes de un circuito, puede haber distintos juegos de " $n-1$ " tensiones de rama que permitirán obtener las restantes, es decir que sean ramas del árbol del circuito.

### Conceptos de introducción a topología de circuitos

Elegido cualquier árbol arbitrario, el circuito queda dividido en dos subcircuitos: 1) el conformado por estas ramas exclusivas (o de árbol), que constituyen el número mínimo de tensiones de rama, de las que dependen todas las ramas del circuito y 2) el conformado por las ramas restantes que completan el circuito y cuyas tensiones reales resultan de la composición de las tensiones de las ramas del árbol.

De las expresiones vistas más arriba, correspondientes al ejercicio tomado de ejemplo se ve que (3.6), (3.8), (3.10) y (3.11) que dependen de una única tensión de rama, constituyen el conjunto mínimo de tensiones de rama (ramas de árbol) y que (3.7) y (3.9), corresponden al resto de tensiones de ramas que pueden ser obtenidas por la composición de las anteriores.

De la figura 3.2 se puede ver que podría haber otros árboles, es decir, como se dijo, cualquier conjunto de ramas que vinculen todos los nodos sin que se forme ninguna trayectoria cerrada, como por ejemplo aquellos cuyas tensiones son:

$$\begin{aligned} & "v_{AH} = v_1", "v_{CH} = v_3", "v_{EG} = v_5" \text{ y } "v_{GH} = v_6" \text{ o} \\ & "v_{AH} = v_1", "v_{CA} = v_2", "v_{EG} = v_5" \text{ y } "v_{GH} = v_6" \text{ o} \\ & "v_{AH} = v_1", "v_{CE} = v_4", "v_{EG} = v_5" \text{ y } "v_{GH} = v_6" \text{ o} \\ & "v_{CA} = v_2", "v_{CH} = v_3", "v_{EG} = v_5" \text{ y } "v_{GH} = v_6", \text{ etc.} \end{aligned}$$

Incluso se podría haber conformado algún árbol sólo con ramas correspondientes a nodos efectivos y como el circuito que sirve de ilustración cuenta con " $n=2$ " nodos efectivos, entonces el circuito contendrá " $n-1=1$ " ramas de árbol o exclusivas que

podrá ser cualquiera de las tres ramas efectivas que contiene el circuito: “CH” o “CAH” o “CEGH” y esta será la manera más eficiente de resolver el circuito en cuestión.

Como se deduce de lo visto hasta aquí, los circuitos tienen ciertos aspectos geométricos que resultan muy útiles para su cálculo y análisis. Estos aspectos son tratados como topología de circuitos, cuyos conceptos básicos se desarrollan a continuación.

## 2. TOPOLOGIA DE CIRCUITOS

### 2.1 Definición

La topología de circuitos es la ciencia que estudia razonamientos matemáticos aplicados al análisis de circuitos, dentro de la cual se encuadran todas las propiedades que surgen de la estructura geométrica del mismo y permite arribar a métodos sistemáticos para escribir mecánicamente sistemas de ecuaciones que modelan el funcionamiento de circuitos complejos.

### 2.2 Subcircuitos árbol y enlaces

Desde el punto de vista geométrico es interesante destacar, como ya fue dicho que el conjunto “ $n-1$ ” de ramas cuyas tensiones fueron seleccionadas para conformar el conjunto mínimo “ $v_{(n-1)}$ ” de tensiones de rama, visto en punto 1.2 anterior, se denomina árbol del circuito y son complementarias con las del conjunto de ramas, que determinan el número mínimo “ $i_k$ ”, de corrientes de rama, visto en el punto 1.1 anterior que se denominan ramas de enlace.

### 2.3 Grafo o gráfica de un circuito

Para el análisis de un circuito desde el punto de vista de su geometría, tratamiento conocido como topología de circuitos, se acostumbra a dibujar las ramas del circuito con segmentos rectos o curvos, sin identificar los elementos que la componen. Un ejemplo de grafo o gráfica de circuito, es el de la figura 3.3 que corresponde al circuito de la figura 3.2.

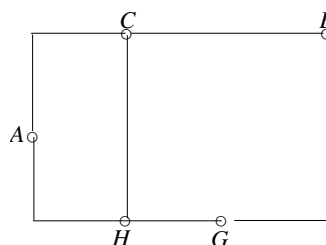


Figura 3.3

El grafo anterior muestra las 6 ramas y los 5 nodos que las determinan. Si sólo se hubieran considerado los 2 nodos efectivos, entonces sólo habría que considerar las 3 ramas efectivas y el grafo del mismo circuito hubiera sido como el de la figura 3.4.

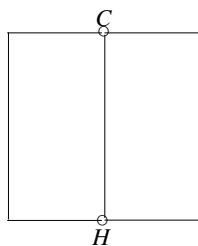


Figura 3.4

En la figura 3.5 se muestra el grafo del circuito de la figura 3.2, constituido por dos subgrafos: 1) el de segmentos en línea llena que es uno de los posibles árboles del circuito y 2) el de segmentos en línea de trazos que es el de sus ramas de enlace. Ambos subgrafos son complementarios y tal como se muestra en la figura los dos, en conjunto, conforman el grafo del circuito completo:



En cada rama de ambos subgrafos, se muestra la variable fundamental que la caracteriza, tensión de rama para las ramas de árbol y corriente de rama para la de enlace. En el diagrama se muestran también las “ $I_m$ ” corrientes ficticias de malla, asignadas a las corrientes de rama “ $i_k$ ” que constituyen el conjunto mínimo “ $m$ ”, ya descrito. Las tensiones de rama se muestran con una flecha al lado de cada rama y con una flecha en el extremo del segmento de la rama, cuando corresponde a este conjunto mínimo “ $v_{(n-1)}$ ” (árbol del circuito).

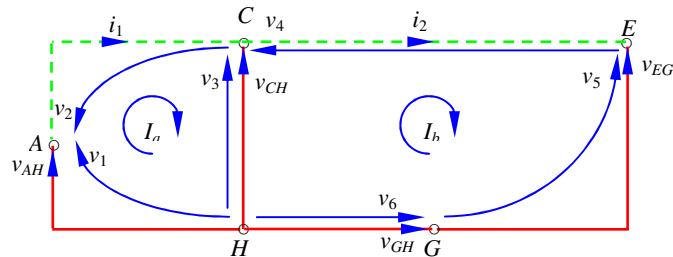


Figura 3.5

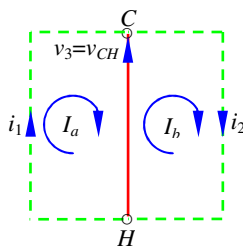


Figura 3.6

Si se hubiera considerado, el grafo del mismo circuito, pero definido ahora sólo por los nodos efectivos, figura 3.3, entonces el grafo del circuito constituido por los dos subgrafos árbol y enlaces, sería como el que se muestra en la figura 3.6. Como se ve habría una rama de árbol y dos de enlace. Como se deduce de la observación de la figura 3.6, trabajar con los nodos efectivos que implica considerar sólo las ramas efectivas, resulta la manera más eficiente para la resolución de un circuito.

## 2.4 Rama y malla orientada

Cuando a cada rama de un grafo se le asigna una dirección que puede estar dada por: 1) una flecha en la mitad de la rama que indica la corriente y/o 2) con una flecha en el extremo de la rama que indica la tensión, según se muestra en figura 3.6, se dice que la rama ha sido orientada. En el caso de malla orientada, se debe recurrir a una flecha en curva que permita identificar las ramas que la componen y en su interior se coloca el valor ficticio “ $I_m$ ” asignado, ver figura 3.6.

## 3. METODOS DE RESOLUCION DE CIRCUITOS

### 3.1 Método de las corrientes ficticias de malla

Anteriormente se estudio que de las “ $r$ ” corrientes de rama que tiene un circuito, basta con determinar un conjunto mínimo “ $m$ ”, para que el circuito quede completamente determinado. Como fue visto, si las ramas de enlace, se corresponden con el conjunto mínimo de corrientes de rama antes estudiado, como son complementarias de las ramas del árbol, es obvio que las corrientes de las ramas del árbol serán función de las de enlace.

Como cada rama de enlace es exclusiva de una malla arbitrariamente elegida, a la que se le asigna una corriente ficticia de malla " $I_m$ " y como cada malla, por segunda ley de Kirchhoff, anula sus tensiones de ramas (es decir sus potenciales de nodo), el conjunto de mallas así obtenido resulta linealmente independiente y permite resolver el circuito. En consecuencia el número de mallas linealmente independientes de un circuito vendrá dado por:

$$m = r - (n - 1) \quad (3.12)$$

Donde como fue visto " $n$ " puede estar dado: 1) por los nodos que se quieran involucrar o 2) como mínimo por los nodos efectivos.

El conjunto " $m$ " de mallas obtenido permite entonces escribir el mínimo número de ecuaciones de malla linealmente independientes que resuelve de circuito. Un ejercicio ayudará a entender con naturalidad lo expuesto.

### Ejercicio 3.1 (de apoyo a teoría)

Sea el circuito de la figura 3.7 que tiene " $r = 7$ " ramas, " $6$ " de las cuales son efectivas y " $n = 5$ " nodos, " $4$ " de los cuales son efectivos. Para mayor generalidad, se muestra también un nodo de interés " $A$ " y uno ficticio " $F$ ".

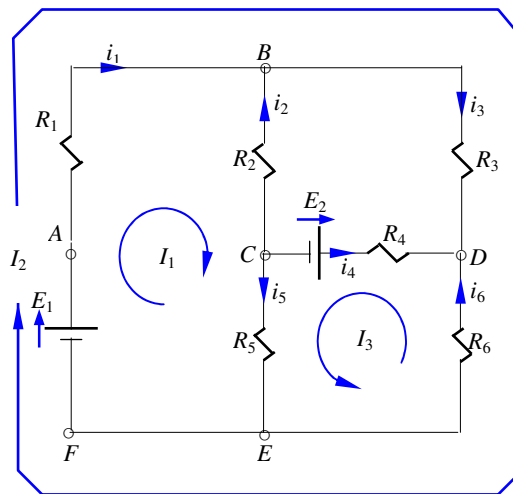


Figura 3.7

Si se aplica Kirchhoff a cada una de las ramas efectivas y a cada uno de los " $n-1$ " nodos efectivos, esto daría un sistema de " $r+n-1=9$ " ecuaciones linealmente independientes. Ahora si se aplica el método de las corrientes ficticias de malla, de acuerdo a la expresión (3.12) habrá:

$$m = r - (n - 1) = 6 - 4 + 1 = 3 \text{ mallas independientes} \quad (3.13)$$

Como se vio, por el método de las mallas, 3 es el número de ecuaciones a resolver, en lugar de las 9 que habría que resolver por el método que asegura también que las ecuaciones planteadas, son de un sistema compatible y determinado. La ventaja así obtenida tiene como contrapartida la necesidad de elegir el conjunto mínimo de mallas

linealmente independientes que por (3.13), se sabe que son tres. Para entender la frase anterior, a título de ejemplo se señalan todas las posibles mallas que se podrían ser seleccionadas para el circuito de la figura 3.7:

<i>ABCEFA</i>	mallas 1	
<i>ABDEFA</i>	mallas 2	
<i>ABCDEFA</i>	mallas 3	
<i>ABDCEFA</i>	mallas 4	(3.14)
<i>BDECB</i>	mallas 5	
<i>BDCB</i>	mallas 6	
<i>CDEC</i>	mallas 7	

De las siete posibles, cualquier combinación de tres de ellas que difieran por lo menos en una rama (la de enlace), como fue determinado por la (3.13), resultará linealmente independiente. Una vez seleccionado el conjunto mínimo de tres mallas, como ya fue explicado, se le asigna una corriente ficticia con un sentido arbitrario y se escriben las ecuaciones de cada una de las mallas, con lo que el circuito quedaría parcialmente resuelto.

Hay un método gráfico que permite obtener cualquier conjunto mínimo arbitrario de mallas linealmente independientes. Este se parece al método descrito en el punto 1.1 y consiste en elegir primero una malla cualquiera, por ejemplo la malla 1 de (3.14) y eliminar una de sus ramas, tachándola, ejemplo la “*BC*” (ver figura 3.8). Esta rama ya no podrá participar de ninguna de las siguientes mallas, a elegir.

Se elige entonces una segunda malla, tomando en cuenta que no puede contener la rama *BC* antes tachada, esta puede ser ahora por ejemplo la malla 2 y se elimina la rama “*BD*” tachándola (ver figura 3.8). Se aclara que esta rama podría ser cualquier rama no tachada de la nueva malla, incluso podría haber sido salvo la tachada, alguna que este formando parte de la malla 1 anteriormente elegida.

La tercera y última malla posible, para el caso, sin pasar por una rama tachada, resulta ser la malla 7 y una vez más se elimina una rama, la “*DE*”, como se muestra en figura 3.8 que confirmar lo antes dicho, ya que la rama tachada corresponde ahora a la malla 2 anteriormente elegida. Con un mínimo de esfuerzo se comprobará que no es posible ninguna otra trayectoria cerrada, sin que haya que pasar por una de las ramas tachadas. Cuando se llega a esta situación, las mallas así obtenidas constituyen uno de los conjuntos mínimos “*m*” de juegos posibles de tres mallas que para el circuito en cuestión, determinan un sistema de ecuaciones de mallas linealmente independientes.

Anteriormente se dijo que una rama puede ser tachada, aun cuando haya sido asignada a alguna malla previa. Esto parecería estar en contradicción con lo expuesto en punto 1.1, donde se dijo que para que dos mallas sean linealmente independientes, deben diferir por lo menos en una rama. Sin embargo no hay tal contradicción, puesto que si se continúa con el método gráfico de tachado hasta finalizar, se podrá comprobar que cada malla resultante, contará con su rama exclusiva, sin que necesariamente tenga que ser una tachada.

En la figura 3.8 se muestra el grafo del circuito de acuerdo con el conjunto arbitrario de corrientes ficticias de malla seleccionado por el método gráfico expuesto y

se ve que las ramas exclusivas (o de enlaces, en líneas de trazos), no necesariamente deben corresponder con las tachadas por el método gráfico.

El conjunto mínimo “ $I_m$ ” de corrientes ficticias encontrado por este método gráfico, permiten escribir un sistema de ecuaciones de mallas linealmente independientes que constituye un sistema compatible y determinado que resuelve el circuito.

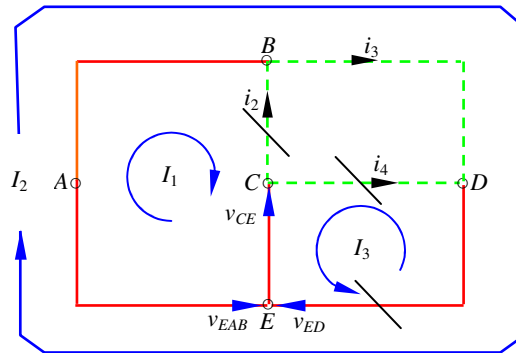


Figura 3.8

Como al escribir las ecuaciones de malla no hay ninguna restricción en relación con el sentido en el que se recorra la malla, con la idea de ir sistematizando el proceso de cálculo, se propone escribir las ecuaciones de malla, recorriendo cada malla en el sentido que se le haya dado a su corriente ficticia, en tal caso, observando la figura 3.7, las ecuaciones del circuito en cuestión serán:

$$\begin{aligned}
 \text{Malla 1)} \quad & E_1 - (I_1 + I_2) \cdot R_1 - I_1 \cdot R_2 - (I_1 + I_3) \cdot R_5 = 0 \\
 \text{Malla 2)} \quad & E_1 - (I_1 + I_2) \cdot R_1 - I_2 \cdot R_3 - (I_2 - I_3) \cdot R_6 = 0 \\
 \text{Malla 3)} \quad & -E_2 - (I_3 + I_1) \cdot R_5 - (I_3 - I_2) \cdot R_6 - I_3 \cdot R_4 = 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Resolviendo el sistema (3.15) se obtienen para el caso, las tres corrientes ficticias y con estas, las seis corrientes reales, según se indica a continuación:

$$i_1 = I_1 + I_2 + 0 \tag{3.16}$$

$$i_2 = -I_1 + 0 + 0 \tag{3.17}$$

$$i_3 = 0 + I_2 + 0 \tag{3.18}$$

$$i_4 = 0 + 0 - I_3 \tag{3.19}$$

$$i_5 = I_1 + 0 + I_3 \tag{3.20}$$

$$i_3 = 0 - I_2 + I_3 \tag{3.21}$$

Para obtener los potenciales de nodos se fija uno cualquiera a un valor conocido, como por ejemplo el nodo “E”, se conecta a masa y a partir de la suma de las tensiones de ramas del árbol, se pueden obtener los restantes potenciales de nodo, tal como sigue:

$$\begin{aligned}
 V_E &= 0 \\
 V_B &= V_E + E_1 - i_1 \cdot R_1 \\
 V_C &= V_E + i_5 \cdot R_5 \\
 V_D &= V_E - i_6 \cdot R_6
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Así el circuito queda completamente resuelto.

### 3.2 Método sistemático de mallas

Con el objeto de simplificar aún más la resolución de un circuito, observando el método de mallas con el que se resolvió el ejercicio 3.1 propuesto, si se sistematizan algunos pasos del procedimiento se podrá elegir, de las siete mallas posibles del circuito de la figura 3.7, un juego específico de tres mallas que como será demostrado, permitirá escribir mecánicamente las ecuaciones que resuelven el circuito.

#### *Ejercicio 3.2* (de apoyo a teoría)

Idem al circuito de la figura 3.7 que se muestra ahora como figura 3.9, pero utilizado para ilustrar el método sistemático de mallas.

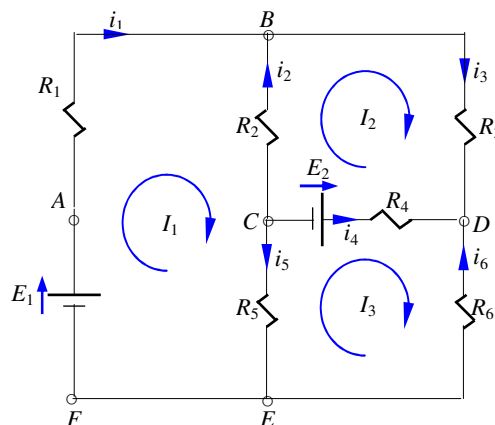


Figura 3.9

Los pasos propuestos son:

- 1) Elegir las mallas de forma tal que las ramas tachadas en el proceso de selección de mallas independientes, sean las externas. Esto equivale a visualizar al circuito como un conjunto de agujeros y elegir una malla por agujero. Si el circuito contiene mallas internas, ver las mallas como agujeros resuelve la dificultad.
- 2) Definir las corrientes ficticias de mallas todas en el mismo sentido.
- 3) Verificar que ninguna rama comparta más de dos corrientes ficticias y que ambas corrientes ficticias, tengan sentido opuesto.
- 4) Las ecuaciones de malla deberán ser escritas recorriendo la malla en el mismo sentido elegido para las corrientes ficticias.

Como se demuestra mas adelante, si se respetan los pasos descritos, se puede asegurar que las ecuaciones de malla a las que se arribe, siempre tendrán la misma forma y por lo tanto se podrán escribir mecánicamente, de acuerdo con los siguientes pasos:.

- 1) Este paso se deja **pendiente** para ser definido más adelante.
- 2) Poner un signo igual por cada ecuación.
- 3) A la izquierda del signo igual, escribir la suma algebraica de todas las fuentes de tensión encontradas en la malla en cuestión, cada una con el signo que le

corresponda. Para tal fin habrá que recorrer la malla en el sentido asignado a la corriente ficticia.

4) A la derecha del signo igual se desarrolla la siguiente suma de términos:

- a) Término propio: con signo positivo se desarrolla un término correspondiente a la incógnita de la malla propia. Para tal fin se abre paréntesis y se escribe la suma de las resistencias encontradas en la malla en cuestión, multiplicada por la corriente de la malla correspondiente a la ecuación que se escribe.
- b) Términos mutuos: son todos los términos restantes, uno por cada una de las “ $m-1$ ” incógnitas mutuas que tiene cada malla. Todos los términos mutuos tienen signo negativo y se forman por el producto de la resistencia compartida con cada malla adyacente y la corriente ficticia de la malla adyacente con quien comparte la rama.

Para ilustrar esta sistematización, se resuelve ahora nuevamente el circuito de la figura 3.7, pero tal como se muestra ahora en figura 3.9, con el juego de mallas específico para el método sistemático. El grafo del circuito, con el conjunto arbitrario de corrientes ficticias de malla seleccionadas por el método gráfico sistemático, como muestra la figura 3.10 que ahora las ramas exclusivas (o de enlaces en línea de trazos), se corresponden con las tachadas por el método gráfico.

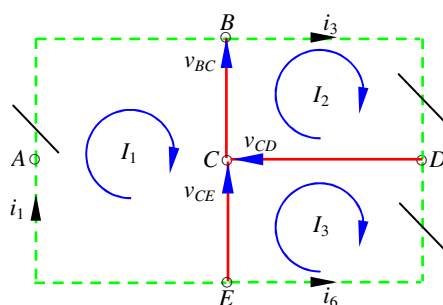


Figura 3.10

Dado que para la sistematización buscada, se parte del método de mallas anteriormente visto, entonces resulta obvio que el conjunto mínimo “ $I_m$ ” de corrientes ficticias de malla encontrado, conduce a un sistema de ecuaciones linealmente independientes que resuelve el circuito. La diferencia ahora, con relación al método de mallas antes desarrollado, como se demuestra a continuación, radica en que si se respetan los pasos sugeridos, la forma matemática de las ecuaciones es siempre la misma y en consecuencia, pueden ser escritas directamente, en forma mecánica.

De la figura 3.10 se ve que las mallas resultantes que cumplen con las premisas del método sistemático, son: “EABCE”, “BDCB” y “DECD”. La parte subrayada son las ramas externas tachadas. Las corrientes ficticias son las mostradas en las figuras 3.9 y 3.10. Como se comprueba de las figuras, dos son las corrientes ficticias compartidas por rama y en todos los casos, la recorren en sentido contrario. Esto prueba que están bien elegidas.

Para demostrar la forma matemática que adquieren las ecuaciones por el método sistemático, se aplica la segunda ley de Kirchhoff en forma directa, tal como se lo hizo por el método convencional, en las ecuaciones (3.15):

$$\begin{aligned}
 \text{Malla 1)} \quad & E_1 - I_1.R_1 - (I_1 - I_2).R_2 - (I_1 - I_3).R_5 = 0 \\
 \text{Malla 2)} \quad & -E_2 - (I_2 - I_1).R_2 - I_2.R_3 - (I_2 - I_3).R_4 = 0 \\
 \text{Malla 3)} \quad & E_2 - (I_3 - I_2).R_4 - I_3.R_6 - (I_3 - I_1).R_5 = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ordenando y separando variables

$$\begin{aligned}
 \text{Malla 1)} \quad & E_1 = (R_1 + R_2 + R_5).I_1 - R_2.I_2 - R_5.I_3 \\
 \text{Malla 2)} \quad & -E_2 = -R_2.I_1 + (R_2 + R_3 + R_4).I_2 - R_4.I_3 \\
 \text{Malla 3)} \quad & E_2 = -R_5.I_1 - R_4.I_2 + (R_4 + R_5 + R_6).I_3
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Si se respetan las reglas, las ecuaciones (3.24) pueden ser escritas directamente siguiendo, paso a paso, la sistematización propuesta.

La solución de cualquier circuito formado por elementos lineales y bilaterales, puede ser encarada de la manera expuesta y la representación matricial del sistema de ecuaciones a la que se arriba, también puede ser escrita mecánicamente. A continuación se indican las ecuaciones del método sistemático, en forma matricial:

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{E} \\ \left[ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \overleftarrow{R_m} \overrightarrow{I_m} \\ \left[ \begin{array}{ccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \right] \end{array} \tag{3.25}$$

Donde

$E$ : Vector columna de fuentes de tensión (suma algebraica de las fem's de la malla).

$R_m$ : Matriz de resistencias de mallas.

$I_m$ : Vector columna de corrientes ficticias de mallas.

En forma matricial compacta

$$E = R_m \cdot I_m \tag{3.26}$$

Si para resolver un circuito se aplica el método sistemático de mallas, éste puede ser representado matemáticamente por la expresión matricial (3.26) y considerando a su vez (3.25) y (3.24) se puede enunciar lo siguiente:

- 1) Cada elemento " $R_{ii}$ " de la diagonal principal de la matriz " $R_m$ ", se denomina resistencia propia de la malla y es la suma de todas las resistencias de la "*i-esima*" malla.
- 2) Cada elemento no diagonal " $R_{ij}$ ", se denomina resistencia mutua o de acoplamiento, es la suma con signo negativo de las resistencias compartidas entre las mallas "*i-esima*" y "*j-esima*".

Un aspecto que ayudará en el planteo de las ecuaciones de un circuito, es considerar que salvo en el caso de circuitos con fuentes controladas, la matriz " $R_m$ " resultará siempre simétrica, lo que quiere decir que " $R_{ij} = R_{ji}$ ". Es preciso decir que en el caso de fuentes controladas, dependiendo de como se planteen las ecuaciones, la matriz del sistema podría adoptar también la simétrica antes dicha.

### 3.3 Malla fundamental (concepto de topología de circuitos)

De acuerdo con lo visto, la manera topológica de definir el conjunto “ $m$ ” de mallas linealmente independientes, sería elegir un árbol del circuito, el cual por complemento permite determinar las ramas de enlace. Se llama malla fundamental, a las mallas linealmente independientes que surgen de dibujar el subgrafo del árbol eventualmente elegido, colocar una rama de enlace por vez y definir así una malla entre ésta y las que correspondan del árbol. La malla así definida tendrá como rama exclusiva la de enlace mencionada y por lo tanto será una malla linealmente independiente. Siguiendo el mismo procedimiento, se obtienen las mallas restantes. A cada malla así obtenida se le da el nombre de malla fundamental y el conjunto constituye un conjunto mínimo “ $m$ ” que permite resolver el circuito.

En las figuras 3.11, 3.12 y 3.13, se repite el mismo grafo de árbol de la figura 3.10, correspondiente al circuito de la figura 3.9, en el que se ha considerado una rama de enlace por vez, de manera tal que se puedan visualizar con facilidad, las del árbol que le corresponden para formar las mallas fundamentales del caso.

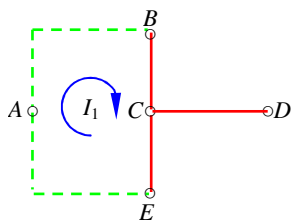


Figura 3.11

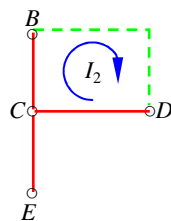


Figura 3.12

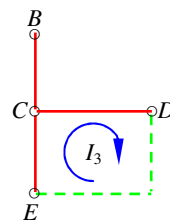


Figura 3.13

### 3.4 Método de los potenciales de nodo

Anteriormente se estudio que de las “ $r$ ” tensiones de rama que tiene un circuito, basta con determinar un conjunto mínimo “ $b=n-1$ ” de tensiones de ramas del árbol, para que todos los potenciales de nodo del circuito queden determinados. Esto se logra tomando el potencial de un nodo como referencia y por suma algebraica agregar las tensiones del conjunto mínimo “ $b=n-1$ ” que vincula todos los nodos. Quedan así determinados los potenciales de todos los nodos del circuito. En consecuencia las tensiones de rama de un árbol constituyen el conjunto mínimo de tensiones que permite resolver el circuito por la obtención de los potenciales de nodo. Como las ramas de árbol son complementarias de las de enlace e incluyen la totalidad de nodos del circuito, con el conjunto mínimo “ $b=n-1$ ” de tensiones de rama de árbol, se podrán obtener también las tensiones de las ramas de enlace.

Si a cada rama del árbol de un circuito, se la hace exclusiva de un conjunto formado dicha rama y las ramas de enlace que resulten necesarias para que el conjunto, cumpla la primera ley de Kirchhoff, permitirá escribir un sistema de ecuaciones linealmente independientes que resolverá el circuito. Estos conjuntos de ramas así obtenidos se denominan secciones de corte, puesto que cualquiera de ellos que se suprima del circuito, éste quedará seccionado en dos subcircuitos independientes. Hay algunas ramas del árbol que en conjunto con las de enlace que le corresponda, separarán al circuito como se dijo en dos partes, una de las cuales puede resultar ser un nodo. En tal sentido cualquier nodo puede ser considerado como caso particular de sección de corte. Como habrá tantas secciones de corte como ramas tenga el árbol del circuito, el número



de secciones de corte linealmente independientes de un circuito se corresponderá con las ramas del árbol, a través de cuyas tensiones, se calcularán sus potenciales, es decir estará dado por:

$$b = n - 1 \quad (3.27)$$

Donde como fue visto “ $n$ ” puede estar dado: 1) por los nodos que se quieran involucrar o 2) como mínimo por los nodos efectivos.

El conjunto “ $b = n - 1$ ” de nodos obtenido permite entonces escribir el mínimo número de ecuaciones de nodo que son linealmente independientes y que consecuentemente resuelven el circuito. En rigor, como cualquier punto de un circuito puede ser nodo, podría decirse en forma más general que se puede elegir el número de nodos “que se quiera” menos uno. Por elegir el número de nodos que se quiera debe entenderse que siempre entre dos nodos elegibles debe haber algún elemento de circuito que imponga un cambio de potencial. Un ejercicio ayudará a entender con naturalidad lo expuesto.

### Ejercicio 3.3 (de apoyo a teoría)

Sea el circuito de la figura 3.14, el mismo de la figura 3.7 que como se dijo tiene “ $r = 7$ ” ramas, “6” efectivas, “ $n = 5$ ” nodos, “4” efectivos y que se repite a continuación.

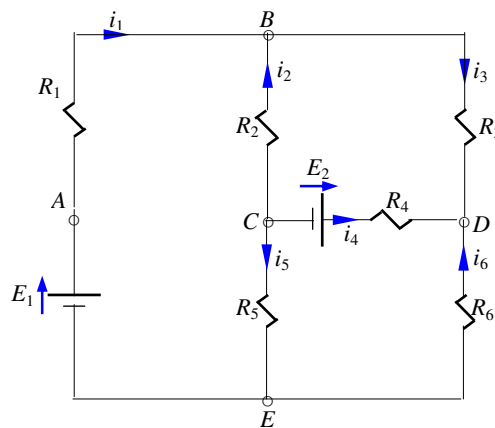


Figura 3.14

Si se aplica Kirchhoff a cada una de las ramas efectivas y a cada uno de los “ $n-1$ ” nodos efectivos, esto dará como ya fue dicho, un sistema de “ $r+n-1=9$ ” ecuaciones linealmente independientes. Ahora si se aplica el método de los potenciales de nodo, al circuito visto por sus nodos efectivos, de acuerdo a la expresión (3.27) habrá:

$$b = n - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ nodos linealmente independientes} \quad (3.28)$$

Como se ve, por el método de los potenciales de nodos, 3 es el número de ecuaciones a resolver, en lugar de las 9 que habría que resolver por la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff, vista en el capítulo 2.

Una vez seleccionado, en forma arbitraria, el conjunto mínimo de nodos “ $B$ ”, “ $C$ ” y “ $D$ ” para el caso, se le asigna a cada rama del circuito, una corriente con sentido arbitrario y se escribe, por primera ley de Kirchhoff, una ecuación por cada uno de los “ $n-1$ ” nodos arbitrariamente seleccionados.

$$\begin{aligned}
\text{Nodo B)} \quad i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\
\text{Nodo C)} \quad -i_2 - i_4 - i_5 &= 0 \\
\text{Nodo D)} \quad i_3 + i_4 + i_6 &= 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Como por ley de Ohm o por segunda ley de Kirchhoff, la corriente de cada rama puede ser escrita en función de los potenciales de sus nodos extremos y de los elementos que la componen, tal como se muestra a continuación resultarán:

$$i_1 = \frac{E_1 + (V_E - V_B)}{R_1} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{V_B}{R_1} \tag{3.30}$$

$$i_2 = \frac{(V_C - V_B)}{R_2} = \frac{V_C}{R_2} - \frac{V_B}{R_2} \tag{3.31}$$

$$i_3 = \frac{(V_B - V_D)}{R_3} = \frac{V_B}{R_3} - \frac{V_D}{R_3} \tag{3.32}$$

$$i_4 = \frac{E_2 + (V_C - V_D)}{R_4} = \frac{E_2}{R_4} + \frac{V_C}{R_4} - \frac{V_D}{R_4} \tag{3.33}$$

$$i_5 = \frac{(V_C - V_E)}{R_5} = \frac{V_C}{R_5} \tag{3.34}$$

$$i_6 = \frac{(V_E - V_D)}{R_6} = -\frac{V_D}{R_6} \tag{3.35}$$

Sustituyendo las anteriores en (3.29) ordenando y separando variables se llega a:

$$\begin{aligned}
\frac{E_1}{R_1} &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot V_B - \frac{1}{R_2} \cdot V_C - \frac{1}{R_3} \cdot V_D \\
-\frac{E_2}{R_4} &= -\frac{1}{R_2} \cdot V_B + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) \cdot V_C - \frac{1}{R_4} \cdot V_D \\
\frac{E_2}{R_4} &= -\frac{1}{R_3} \cdot V_B - \frac{1}{R_4} \cdot V_C + \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot V_D
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Si el método de potenciales de nodo descrito, se aplica a cualquier otro circuito, siempre se llegará a obtener un sistema de ecuaciones formalmente parecidas a las (3.36), lo que sugiere la posibilidad de una sistematización del método. De acuerdo con lo dicho, las ecuaciones (3.36) podrían ser escritas directamente de acuerdo con las siguientes reglas:

- 1) Este número se deja **pendiente** para ser definido más adelante.
- 2) Por cada ecuación se pone un signo igual.
- 3) A la izquierda del signo igual se escribe la suma algebraica de los cocientes formados por: cada fuente de tensión dividida por el total de resistencias en serie de la rama. Dicha suma se refiere a cada rama de este tipo que converja al nodo en cuestión. El signo que le corresponderá a cada término será: 1) positivo si el nodo del circuito está relacionado con el borne positivo de la fuente de

tensión y 2) negativo si el nodo se encuentra vinculado al negativo de dicha fuente.

4) A la derecha del signo igual se desarrolla la siguiente suma de términos:

- a) Término propio: con signo positivo se desarrolla un término correspondiente a la incógnita del propio nodo. Para tal fin se abre paréntesis y se escribe la suma de las inversas de las resistencias (conductancias) de las ramas que convergen al nodo en cuestión. Dicha suma es multiplicada por el potencial del nodo correspondiente a la ecuación que se escribe.
- b) Términos mutuos: son todos los términos restantes, uno por cada una de las “ $n-2$ ” incógnitas mutuas que tiene cada nodo. Todos los términos mutuos tienen signo negativo y se forman por el producto de la inversa de la resistencia (conductancia), de cada rama compartida con cada nodo adyacente y por el potencial del nodo adyacente con quien comparte dicha rama.

### 3.5 Método sistemático de nodos

Como se observa de lo anterior casi no habría diferencia entre el método de los potenciales de nodos visto en punto 3.4 con su sistematización. Se podría pensar como sistematización del método de los potenciales de nodo, solo en alguna sutileza que permita enunciar la mecánica de aplicación de este método sistemático, como se enuncia la aplicación del método sistemático de mallas.

Con la idea entonces de que la mecánica de sistematización sea formalmente igual al la del método sistemático de mallas anteriormente estudiado, se propone para el circuito el siguiente cambio formal:

- 1) Reemplazar la inversa de cada resistencia por su conductancia correspondiente.
- 2) Con el objeto de que en la presente sistematización, lo que se escriba a la izquierda del signo igual del paso 3, sea formalmente igual a lo dicho para el paso 3 del método sistemático de mallas, se propone convertir las ramas que tengan fuentes de tensión en serie con resistencias, a fuentes de corriente cuyo valor sea el de los cocientes “ $E_i/R_k$ ”, en paralelo con la misma resistencia “ $R_k$ ” que tiene en serie la fuente de tensión que se está convirtiendo a fuente de corriente.

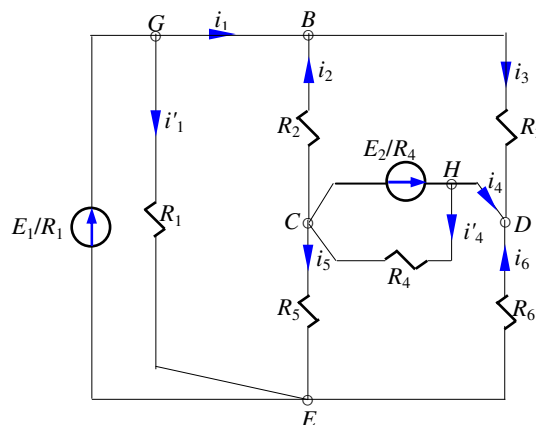


Figura 3.15

En tal caso el circuito de la figura 3.14, según se muestra en la figura 3.15, puede ser reemplazado por su equivalente en el que las fuentes de tensión en serie con resistencias, fueron convertidas tal como fue explicado, a fuentes de corriente en paralelo con resistencias. Como se deduce de lo dicho la conversión propuesta, esta referida a fuentes reales.

Para el caso particular del ejercicio propuesto, cada fuente de tensión en serie con una resistencia “ $E_1$  con  $R_1$ ” y “ $E_2$  con  $R_4$ ” equivale, según ha sido propuesto, a sendas fuentes de corriente de valor “ $E_1/R_1$ ” en paralelo con su resistencia “ $R_1$ ” y a “ $E_2/R_4$ ” que debe ir en paralelo con “ $R_4$ ”.

Se puede ahora completar el punto (1) dejado pendiente anteriormente, de manera tal que desde el punto de vista formal, en el paso (3) de la sistematización propuesta, se diga lo mismo que en el paso (3) del método sistemático de las mallas. Es decir en el paso (1) que había quedado pendiente, tendrá que decir:

- 1) Previo a la determinación de los nodos a incluir en el análisis del circuito, se deben reemplazar, todas las fuentes reales de tensión por fuentes equivalentes reales de corriente.

En consecuencia en el paso (3), en el que se decía:

“A la izquierda del signo igual se escribe la suma algebraica de los cocientes formados por: cada fuente de tensión dividida por el total de resistencias en serie de la rama. Dicha suma se refiere a cada rama de este tipo que converja al nodo en cuestión. El signo que le corresponderá a cada término será: 1) positivo si el nodo del circuito está relacionado con el borne positivo de la fuente de tensión y 2) negativo si el nodo se encuentra vinculado al negativo de dicha fuente.”

Se deberá decir ahora:

- 3) A la izquierda del signo igual, escribir la suma algebraica de todas las fuentes de corriente que converjan al nodo en cuestión. Con signo (+) las entrantes al nodo y con (–) las salientes.

Cabe destacar que al hacer este reemplazo deben redefinirse las corrientes que circulan por las resistencias “ $R_1$ ” y “ $R_4$ ”, en su nueva configuración. Para el caso del circuito de la figura 3.15, estas nuevas corrientes son “ $i_1$ ” e “ $i_4$ ”.

Si en el circuito de la figura 3.15, todavía se quisieran visualizar las corrientes “ $i_1$ ” e “ $i_4$ ” del circuito original, habrá que crear dos nodos ficticios  $G$  y  $H$ . En tal caso las corrientes originales serán las existentes en los tramos de rama ficticia “ $GB$ ” y “ $HD$ ”.

Volviendo al paso (1) que había sido dejado pendiente en el método sistemático de planteo de las ecuaciones de malla, resulta importante señalar que antes de la elección de las mallas por el método sistemático, por el procedimiento inverso al de conversión de fuentes reales de tensión antes descrito que permite convertir ahora, las fuentes reales de corriente, en fuentes reales de tensión, habría que decir:

- 1) Previo a la determinación de las mallas para la aplicación del método sistemático, se deben reemplazar, si es posible, todas las fuentes reales de corriente por fuentes equivalentes reales de tensión.

En resumen con el objeto de comparar las sistematizaciones propuestas se propone la siguiente tabla comparativa.

#### COMPARACION FORMAL DE METODOS SISTEMATICOS

##### De mallas

- 1 Previo a la determinación de las mallas para la aplicación del método sistemático, se deben reemplazar, si es posible, todas las fuentes reales de corriente por fuentes equivalentes reales de tensión.
- 2 Por cada ecuación se pone un signo igual.
- 3 A la izquierda del signo igual, escribir la suma algebraica de todas las fuentes de tensión encontradas en la malla en cuestión, cada una con el signo que le corresponda. Para tal fin habrá que recorrer la malla en el sentido asignado a la corriente ficticia.
- 4 A la derecha del signo igual se desarrolla la siguiente suma de términos:
  - a) Término propio: con signo positivo se desarrolla un término correspondiente a la incógnita de la malla propia. Para tal fin se abre paréntesis y se escribe la suma de las resistencias encontradas en la malla en cuestión, multiplicada por la corriente de la malla correspondiente a la ecuación que se escribe.
  - b) Términos mutuos: son todos los términos restantes, uno por cada una de las “ $m-1$ ” incógnitas mutuas que tiene cada malla. Todos los términos mutuos tienen signo negativo y se forman por el producto de la resistencia compartida con cada malla adyacente y la corriente ficticia de la malla adyacente con quien comparte en la rama.

##### De nodos

- 1 Previo a la determinación de los nodos a incluir en el análisis del circuito, se deben reemplazar, todas las fuentes reales de tensión por fuentes equivalentes reales de corriente.
- 2 Por cada ecuación se pone un signo igual.
- 3 A la izquierda del signo igual, escribir la suma algebraica de todas las fuentes de corriente que convergen al nodo en cuestión. Con signo (+) las entrantes al nodo y con (-) las salientes.
- 4 A la derecha del signo igual se desarrolla la siguiente suma de términos:
  - a) Término propio: con signo positivo se desarrolla un término correspondiente a la incógnita del propio nodo. Para tal fin se abre paréntesis y se escribe la suma de las inversas de las resistencias (conductancias) de las ramas que converjan al nodo en cuestión. Dicha suma es multiplicada por el potencial del nodo correspondiente a la ecuación que se escribe.
  - b) Términos mutuos: son todos los términos restantes, uno por cada una de las “ $n-2$ ” incógnitas mutuas que tiene cada nodo. Todos los términos mutuos tienen signo negativo y se forman por el producto de la inversa de la resistencia (conductancia), de cada rama compartida con cada nodo adyacente y por el potencial del nodo adyacente con quien comparte dicha rama.

La solución de cualquier circuito formado por elementos lineales y bilaterales, puede ser encarada por el método sistemático de nodos propuesto y su representación matricial, también puede ser escrita mecánicamente. A continuación se indican las ecuaciones del método sistemático, en forma matricial:

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{I} \\ \left[ \begin{array}{c} I_B \\ I_C \\ I_D \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \overleftarrow{G_n} \\ \left[ \begin{array}{ccc} G_{BB} & G_{BC} & G_{BD} \\ G_{CB} & G_{CC} & G_{CD} \\ G_{DB} & G_{DC} & G_{DD} \end{array} \right] \end{array} \cdot \begin{array}{c} \overrightarrow{V_n} \\ \left[ \begin{array}{c} V_B \\ V_C \\ V_D \end{array} \right] \end{array} \quad (3.37)$$

Donde

$I$ : Vector columna de fuentes de corriente (suma algebraica de las corrientes procedentes de fuentes que converjan al nodo).

$G_n$ : Matriz de conductancias de nodos.

$V_n$ : Vector columna de potenciales de nodos.

En forma matricial compacta

$$I = G_n \cdot V_n \quad (3.38)$$

Si para resolver un circuito se aplica el método sistemático de mallas, éste puede ser representado matemáticamente por la expresión matricial (3.38) y considerando a su vez (3.37) y (3.36) se puede enunciar lo siguiente:

- 1) Cada elemento " $G_{ii}$ " de la diagonal principal de la matriz " $G_n$ ", se denomina conductancia propia del nodo y es la suma de todas las conductancias que converjan al " $i$ -ésimo" nodo.
- 2) Cada elemento no diagonal " $G_{ij}$ ", se denomina conductancia mutua o de acoplamiento y es la suma con signo negativo de las conductancias compartidas entre el nodo " $i$ -ésimo" y cada uno de los respectivos " $j$ -ésimos" adyacentes.

Como ya fue dicho, un aspecto que ayudará en el planteo de las ecuaciones de un circuito, es considerar que salvo en el caso de circuitos con fuentes controladas, la matriz " $G_n$ " resultará siempre simétrica, lo que quiere decir que " $G_{ij} = G_{ji}$ ". Es preciso decir que en el caso de fuentes controladas, dependiendo de como se planteen las ecuaciones, la matriz del sistema podría adoptar también la simétrica antes dicha.

### 3.6 Sección de corte fundamental (concepto de topología de circuitos)

La manera topológica de definir el conjunto " $n-1$ " de nodos linealmente independientes, es bastante sencilla, ya que son todos los nodos que se quieran considerar (los efectivos como mínimo), menos uno que se toma como referencia. Lo anterior equivale a elegir un árbol del circuito que por complemento permitirá determinar sus ramas de enlace. Se llama sección de corte fundamental, a ciertos conjuntos de ramas linealmente independientes que surgen a partir del grafo del circuito, en el que si se suprime cada conjunto de ramas formado por una rama del árbol por vez, en conjunto con las de enlace que le corresponda, permite definir una sección de corte que divide al circuito en dos subcircuitos. En dicha sección de corte se cumplirá la primera ley de Kirchhoff.

La sección de corte ( $SC$ ) así definida tendrá como rama exclusiva la del árbol que reemplazada, una por vez en el subgrafo de enlaces, en conjunto con las que le corresponda de éste, constituirá una sección de corte linealmente independiente. Siguiendo el mismo procedimiento, se obtienen las restantes  $SC$ 's. A cada  $SC$  así obtenida se le da el nombre de sección de corte fundamental y el conjunto permite el planteo de un conjunto mínimo " $b=n-1$ " de ecuaciones que permite resolver el circuito.

En las figuras 3.16, 3.17 y 3.18, se repite el mismo grafo de enlaces de la figura 3.10, correspondiente al circuito de la figura 3.9, en el que se ha considerado una rama de árbol por vez, de manera tal que se puedan visualizar con facilidad, las de enlaces que le corresponden para formar secciones de corte fundamentales.

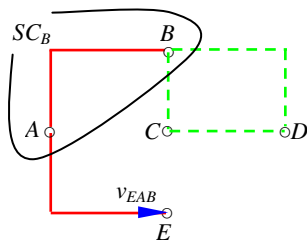


Figura 3.16

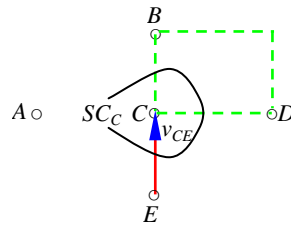


Figura 3.17

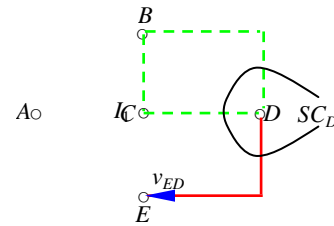


Figura 3.18

De la figura 3.16, se observa que las ramas de árbol en serie “EA” y “AB”, pueden ser consideradas como una única rama, ya que por estar en serie, tienen la misma corriente. Este es el motivo por el que fue considerada la rama efectiva “EAB”, en lugar de las dos ramas por separado. Esto se debe a que la linealidad entre la tensión y la corriente de una rama formada por ramas lineales conectadas en serie, mantiene la linealidad y se comporta como una rama independiente. Esta propiedad permite inferir que el circuito podría ser resuelto sólo por las ramas efectivas o consecuentemente, sólo por los nodos efectivos.

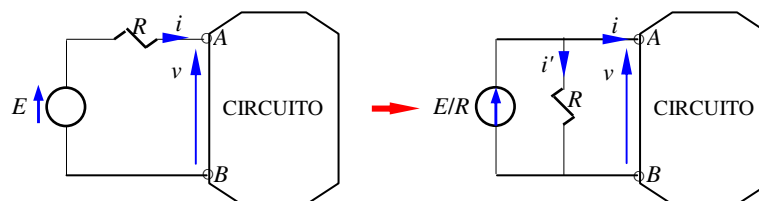
Se podría decir que cualquier línea que seccione a un circuito en dos partes, se denomina sección de corte y obviamente deberá cumplir con la primera ley de Kirchhoff, es decir la suma de las corrientes de las ramas seccionadas por el corte deberá ser nula. Pero solo podrá ser sección de corte fundamental toda vez que la línea que secciona al circuito, lo haga cortando una y sólo una rama de árbol (la exclusiva), además de las de enlace que hagan falta para seccionar el circuito.

Dicho de otra forma, en un circuito puede haber distintos juegos “ $b = n-1$ ” de ramas, cuyas tensiones permitirán obtener las restantes. Pero sólo la sección que contenga una única rama de árbol, en conjunto con las de enlace que le corresponda, dará origen a lo que se denomina sección de corte fundamental.

## 4. CIRCUITOS CON FUENTES IDEALES NO CONVERTIBLES

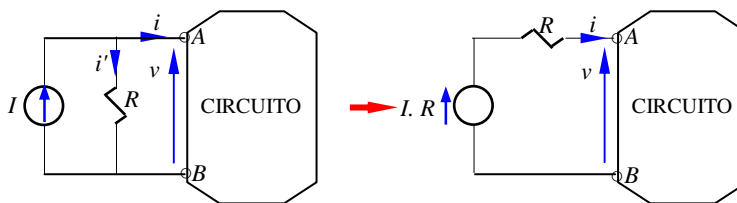
### 4.1 Equivalencia entre fuentes reales de tensión y corriente

La equivalencia entre fuentes de tensión y fuentes de corriente, tal como fue introducida, sólo es válida para el caso de fuentes reales.



Fuente real de tensión FRT a fuente real de corriente FRC

Figura 3.19



Fuente real de corriente FRC a fuente real de tensión FRT  
 Figura 3.20

Ambas fuentes equivalentes conectadas al circuito entre los nodos “A” y “B”, deben tener la misma *ddp* “ $v=V_{AB}$ ” y corriente “ $i$ ”. La equivalencia entre ambas fuentes según se ha deducido anteriormente a partir de (3.36), es tal como se muestra en las figuras 3.19 y 3.20. En ambos casos la resistencia “R” es la misma pero en el caso de fuente de tensión va en serie y en caso de fuente de corriente en paralelo.

Si las fuentes son ideales, la de tensión FT tendrá “ $R=0$ ” y la fuente de corriente FC, tendrá “ $R=\infty$ ” y dicha conversión resulta absurda (una singularidad).

### 4.2 Casos conflictivos

#### 4.2.1 Resolución por artificios basados en topología de circuitos

Cuando en un circuito aparecen fuentes ideales de ambos tipos simultáneamente, al no poder ser convertidas en un sólo tipo de fuente, no podría encararse la resolución del circuito en alguna de las formas sistemáticas. Esto sucede cuando aparecen fuentes ideales de tensión y/o corriente, a las que no se le puede asociar, al menos en forma directa, alguna resistencia del circuito, en serie, o en paralelo, respectivamente. Surge así un aspecto conflictivo que hay que resolverlo por uno de los dos métodos vistos, recurriendo a algún artificio.

El método a utilizar para resolver estos casos conflictivos, no podrá ser entonces ninguno de los sistemáticos, habida cuenta que no se podría cumplimentar el primer paso propuesto para los mismos. Estos casos conflictivos pueden ser abordados con algún artificio, según se indica a continuación con la resolución de los siguientes ejercicios de apoyo a teoría:

#### Ejercicio 3.4 (de apoyo a teoría)

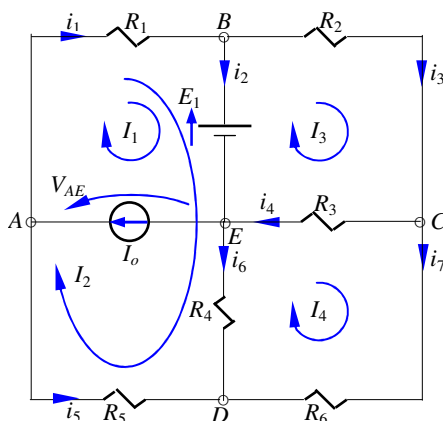


Figura 3.21



En el circuito de la figura 3.21 dada la forma en como han sido interconectadas las fuentes ideales de corriente y tensión, no es posible asociarles alguna resistencia del circuito que las conviertan en fuentes reales. En consecuencia, las fuentes no pueden ser transformadas y el cálculo no puede ser sistematizado. Con lo que no quedaría más remedio que aplicar el método de mallas o de nodos, a secas, es decir no se pueden usar sus versiones sistemáticas. Sin embargo, como se verá más adelante, si existe algún atajo que permitirá, aunque no en forma directa, convertir las fuentes y entonces si se podrán utilizar los métodos sistemáticos estudiados.

### Resolución por el método de mallas

Considerando que las ramas de enlace definen la corriente ficticia de malla, si al elegir las ramas de enlace que definen las mallas linealmente independientes, se eligen obligatoriamente todas las que contengan FC (fuente ideal de corriente) entonces las corrientes ficticias de malla que le correspondan no serán incógnitas del sistema, es decir “ $I_1=I_o$ ”. Las corrientes ficticias así definidas dejan de ser incógnitas. Entonces sólo habrá que plantear tantas ecuaciones de malla como otro tipo de ramas de enlace haya en el circuito. Para que el artificio sea válido, las FC tienen que corresponder necesariamente con ramas de enlace.

Como en el ejercicio hay “ $m=4$ ” mallas LI y una corresponde a la de enlace definida por la FC “ $I_o$ ”, las restantes cuyas corrientes ficticias son “ $I_2$ ”, “ $I_3$ ” e “ $I_4$ ” permitirán resolver el circuito. Para el ejercicio propuesto, con el fin de visualizar el inconveniente que surge, se plantean las cuatro posibles, tres de las cuales, de incógnita desconocida, son las necesarias.

$$\begin{aligned}
 \text{Malla 1)} \quad & V_A - (I_1 + I_2) \cdot R_1 - E_1 + V_{AE} = V_A \\
 \text{Malla 2)} \quad & V_A - (I_1 + I_2) \cdot R_1 - E_1 - (I_2 - I_4) \cdot R_4 - I_2 \cdot R_5 = V_A \\
 \text{Malla 3)} \quad & V_E + E_1 - I_3 \cdot R_2 - (I_3 - I_4) \cdot R_3 = V_E \\
 \text{Malla 4)} \quad & V_E - (I_4 - I_3) \cdot R_3 - I_4 \cdot R_6 - (I_4 - I_2) \cdot R_4 = V_E
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ordenando, eliminando potenciales de nodo y separando variables:

$$\begin{aligned}
 -E_1 - V_{EA} &= R_1 \cdot I_1 + R_1 \cdot I_2 \\
 -E_1 &= R_1 \cdot I_1 + (R_1 + R_4 + R_5) \cdot I_2 - R_4 \cdot I_4 \\
 E_1 &= (R_2 + R_3) \cdot I_3 - R_3 \cdot I_4 \\
 0 &= -R_4 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + (R_3 + R_4 + R_6) \cdot I_4
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Se sabe que “ $I_1 = I_o$ ” que reemplazada en (3.40)

$$-E_1 - V_{EA} - R_1 \cdot I_o = R_1 \cdot I_2 \tag{3.41}$$

$$-E_1 - R_1 \cdot I_o = (R_1 + R_4 + R_5) \cdot I_2 - R_4 \cdot I_4 \tag{3.42}$$

$$E_1 = (R_2 + R_3) \cdot I_3 - R_3 \cdot I_4 \tag{3.43}$$

$$0 = -R_4 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + (R_3 + R_4 + R_6) \cdot I_4 \tag{3.44}$$

La ecuación 3.41 contiene la caída de potencial “ $V_{AE}$ ” entre bornes de la fuente de corriente que no se conocerá hasta que no se resuelva el circuito, sin embargo como la corriente de la malla 1, por el artificio propuesto, no es incógnita, esta ecuación no hace falta. Las tres ecuaciones restantes (3.42, 43 y 44), cuyas incógnitas son: “ $I_2$ ”, “ $I_3$ ” e

“ $I_4$ ”, constituyen un sistema de tres ecuaciones linealmente independientes y por lo tanto determinado, con lo que queda resuelto el circuito.

### Resolución por el método de nodos

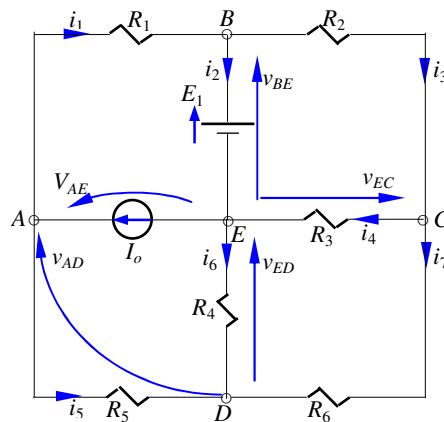


Figura 3.22

Considerando ahora que las ramas del árbol definen los potenciales de nodo, si al elegir el árbol, se incluyen obligatoriamente las que contengan FT (fuente ideal de tensión) entonces las tensiones de las ramas correspondientes no serán incógnitas del sistema, es decir “ $v_{BE}=E_1$ ”. Las tensiones de ramas así definidas dejan de ser incógnitas. Entonces sólo habrá que plantear tantas ecuaciones de secciones de corte, como otro tipo de rama de árbol haya en el circuito. Para que el artificio sea válido, las FT tienen que corresponder necesariamente con ramas del árbol del circuito. Un grafo ayudara a la determinación de las secciones de corte fundamentales.

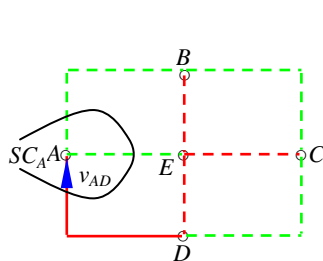


Figura 3.23

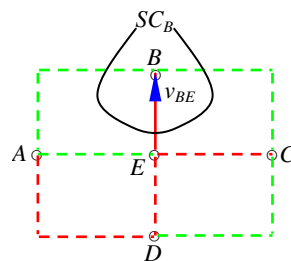


Figura 3.24

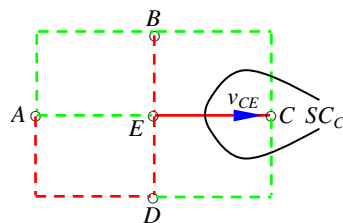


Figura 3.25

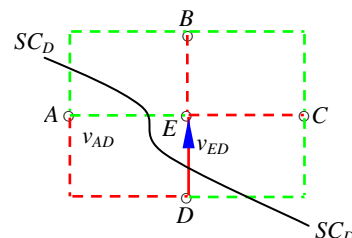


Figura 3.26

Como se observa de las figuras, en la elección de las secciones de corte fundamental, se han dejado dibujadas en línea de trazos las ramas de árbol que no corresponden, a efectos de asegurarse que no sean incluidas por error.

Como en el ejercicio hay “ $b=4$ ” “ $SC$ ” LI y una corresponde a la rama de árbol definida por la FT “ $v_{BE}=E_1$ ”, las restantes cuyas tensiones son “ $v_{AD}$ ”, “ $v_{CE}$ ” y “ $v_{ED}$ ” permitirán resolver el circuito. Para el ejercicio propuesto, con el fin de visualizar el inconveniente que surge, se plantean las cuatro posibles, tres de las cuales de incógnita desconocida son las necesarias. Si se elige un nodo como referencia “ $V_E=0$ ”, las ecuaciones que determinan los potenciales de nodos serán:

$$\begin{array}{cccc} & AD & BE & CE & ED \\ \text{Nodo A) } V_A = & V_E + v_{AD} + 0 & + 0 & - v_{ED} & \end{array} \quad (3.45)$$

$$\text{Nodo B) } V_B = V_E + 0 + v_{BE} + 0 + 0 = V_E + E_1 \quad (3.46)$$

$$\text{Nodo C) } V_C = V_E + 0 + 0 + v_{CE} + 0 \quad (3.47)$$

$$\text{Nodo D) } V_D = V_E + 0 + 0 + 0 - v_{ED} \quad (3.48)$$

De (3.46) se ve que al conocer la referencia “ $V_E$ ”, “ $V_B$ ” deja de ser incógnita, entonces solo habrá que plantear ecuaciones para las secciones de corte “ $SC_A$ ”, “ $SC_C$ ” y “ $SC_D$ ”. Igual que antes, con el fin de visualizar el inconveniente que surge, se plantean las cuatro posibles, tres de las cuales, de incógnita desconocida, son las necesarias. Si se considera “ $V_E = 0$ ” y se escriben las ecuaciones de las secciones de corte elegidas.

$$SC_A) I_o = i_1 + i_5 \quad (3.49)$$

$$SC_B) i_1 = i_2 + i_3 \quad (3.50)$$

$$SC_C) i_3 = i_4 + i_7 \quad (3.51)$$

$$SC_D) I_o + i_6 + i_7 = i_1 \quad (3.52)$$

La ecuación 3.50 contiene la corriente “ $i_2$ ” a través de la fuente de tensión que no es posible obtener hasta que no se resuelva el circuito, sin embargo como la tensión de esa rama de árbol, por corresponder a la FT ideal no es incógnita “ $v_{BE} = E_1$ ”, no hace falta su planteo. Las tres ecuaciones restantes (3.49, 51 y 52), cuyas incógnitas como se demuestra en el desarrollo a continuación son:

$$\begin{array}{l} i_1 = \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_B}{R_1} \\ i_2: \text{ se obtiene cuando se resuelva el circuito.} \\ i_3 = \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_C}{R_2} \\ i_4 = \frac{V_C}{R_3} - \frac{V_E}{R_3} \\ i_5 = \frac{V_A}{R_5} - \frac{V_D}{R_5} \\ i_6 = \frac{V_D}{R_4} - \frac{V_E}{R_4} \\ i_7 = \frac{V_C}{R_6} - \frac{V_D}{R_6} \end{array} \quad (3.54)$$

Reemplazando (3.54) en las (3.49, 50, 51 y 52) y eliminando el nodo “ $V_E = 0$ ”

$$I_o = \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_B}{R_1} + \frac{V_A}{R_5} - \frac{V_D}{R_5}$$

$$\begin{aligned}
 i_2 &= \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_B}{R_1} - \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_C}{R_2} \\
 \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_C}{R_2} &= \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_C}{R_6} - \frac{V_D}{R_6} \\
 \frac{V_A}{R_5} - \frac{V_D}{R_5} + \frac{V_C}{R_6} - \frac{V_D}{R_6} &= \frac{V_D}{R_4}
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

Ordenando y separando variables:

$$I_o = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} \right) \cdot V_A - \frac{1}{R_1} \cdot V_B - \frac{1}{R_5} \cdot V_D \tag{3.56}$$

$$0 = -\frac{1}{R_1} \cdot V_A + \left[ i_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot V_B \right] - \frac{1}{R_2} \cdot V_C \tag{3.57}$$

$$0 = -\frac{1}{R_2} \cdot V_B + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot V_C - \frac{1}{R_6} \cdot V_D \tag{3.58}$$

$$0 = -\frac{1}{R_5} \cdot V_A - \frac{1}{R_6} \cdot V_C + \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot V_D \tag{3.59}$$

La ecuación 3.57 contiene una corriente de rama “ $i_2$ ” a través de la fuente ideal que no puede ser determinada si no se resuelve el circuito. Al ser entonces el potencial del nodo B “ $V_B = V_E + E_I$ ”, las incógnitas quedan reducidas a tres “ $V_A$ ,  $V_C$  y  $V_D$ ”, y como se cuenta con tres ecuaciones (3.56, 58 y 59) linealmente independientes el sistema es determinado y queda resuelto el circuito.

#### 4.2.2 Resolución por transformación de las fuentes ideales por desdoblamiento

Un recurso válido para la resolución de estos casos conflictivos es también la transformación de las fuentes ideales a fuentes reales que luego puedan ser tratadas por los métodos sistemáticos estudiados. También aquí conviene abordar el tema con ejercicios, por lo que se ha elegido el mismo caso del ejercicio 3.4, figura 3.21 o 3.22.

El método está basado en que el intercalado de una fuente ideal de tensión en serie o el intercalado de una fuente ideal de corriente en paralelo, con una rama, no cambia la resistencia total de dicha rama, es decir no modifica su característica pasiva, aunque al hacerlo pase a ser una rama activa.

##### Transformación de fuente ideal a fuente real de corriente

Si en el circuito de la figura 3.21 o 3.22, se desdobra la fuente ideal de corriente “ $I_o$ ”, en tantas iguales como segmentos (dos para el caso), tenga la poligonal lateral elegida, de las dos posible que tiene cualquier rama, como se demuestra a continuación, salvo por el propio desdoblamiento el resto del circuito resulta equivalente

Si a las fuentes ideales de corriente resultantes del desdoblamiento, se las conecta en paralelo con cada una de las ramas de la poligonal lateral elegida, tal como se indica en el circuito de la figura 3.27, se obtiene el circuito equivalente, transformado a fuentes reales de corriente:

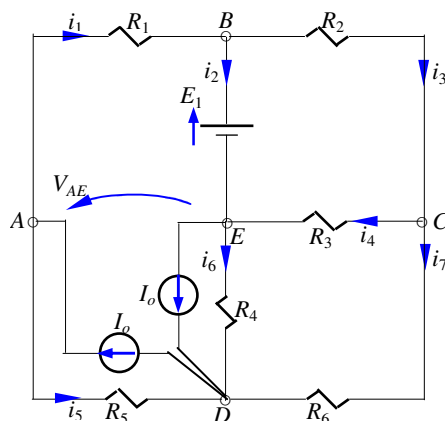


Figura 3.27

Como se muestra en el circuito de la figura 3.27, de los nodos “E” y “A” se extrae e inyecta la misma corriente “ $I_o$ ” del circuito original. La diferencia con éste es que en el nodo “D”, elegido arbitrariamente de una de las dos mallas asociadas a la rama de la FC que se esta reemplazando, se inyecta y se extrae la misma corriente también “ $I_o$ ”, por lo que el balance de corrientes en dicho nodo resulta inalterado y en consecuencia tampoco cambia.

Aunque como se ve en la figura, para el caso hubo que desdoblar en dos FC. Como fue dicho, la fuente de corriente original debe ser desdoblada en tantas FC iguales, como ramas tenga la poligonal o malla lateral elegida para el desdoblamiento, obviamente que de las ramas mencionadas se debe excluir la propia rama de la fuente que se esta desdoblando.

Cada fuente de corriente obtenida por el desdoblamiento, debe ser conectada, como se muestra para el caso en figura 3.27, en paralelo con cada una de las ramas de la malla elegida para el desdoblamiento. Lo último, como fue dicho, no incluye la rama que constituye la FC que se desdobla.

Por otra parte como las fuentes ideales de corriente tienen resistencia infinita no alteran las resistencias de las ramas con las que se conectan en paralelo, “ $R_4$ ” y “ $R_5$ ”, para el ejercicio de ejemplo.

Entre los nodos “A” y “E” en los que estaba conectada originalmente la rama de la fuente desdoblada, como la FC desdoblada tiene resistencia infinita y ahora ha sido reemplazada por las resultantes del desdoblamiento, el circuito entre “A” y “E” queda abierto, por que habrá resistencia infinita y por lo tanto tampoco se altera la resistencia de la rama de la FC desdoblada.

Por todo lo anterior se puede asegurar que el circuito de la figura 3.27, salvo en el interior del propio desdoblamiento, es equivalente al original de la figura 3.21 ó 3.22 y por lo tanto los resultados que de su resolución se obtengan.

La ventaja conseguida es que al elegir la partición arbitraria de la fuente ya indicada, ambas fuentes resultantes de la partición quedan transformadas en fuentes reales y en consecuencia la resolución del circuito equivalente puede ser abordada por el método sistemático de las mallas.

### Transformación de fuente ideal a fuente real de tensión

Si en el circuito de la figura 3.21 o 3.22, se desdobla la fuente ideal de tensión “ $E_1$ ”, en tantas iguales como segmentos (dos para el caso), converjan a uno cualquiera de los dos nodos extremos de la fuente ideal a desdoblar, como se demuestra a continuación, salvo por el propio desdoblamiento el resto del circuito resulta equivalente

Si a cada una de las fuentes ideales resultantes del desdoblamiento, se las conecta en serie con cada una de las ramas correspondientes a los segmentos que convergen al nodo extremo elegido, tal como se indicaba en el circuito de la figura 3.28, se obtiene el circuito equivalente, transformado a fuentes reales de tensión:

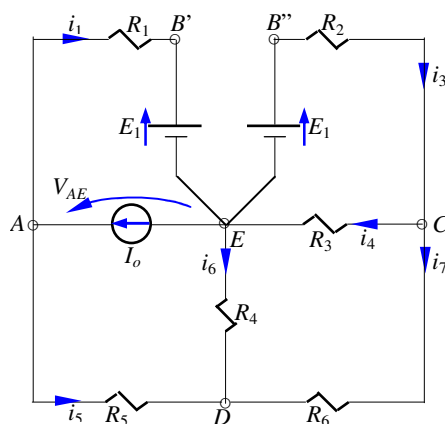


Figura 3.28

En la figura se ve que con el desdoblamiento el potencial del nodo “ $B$ ” ha sido transferido a los nodos “ $B'$ ” y “ $B''$ ” por lo que la diferencia de potencial en las resistencias “ $R_1$ ” y “ $R_2$ ”, no ha variado. Tampoco cambia la resistencia de estas ramas habida cuenta que las fuentes ideales de tensión tienen resistencia nula. La diferencia con el circuito original radica en que ahora en la rama “ $E - B$ ” ya no está la FT pero no se modifica la resistencia de la rama debido a que la fuente ideal que estaba localizada en ella tiene por definición resistencia nula.

En consecuencia se puede asegurar que el circuito de la figura 3.28, , salvo en el interior del propio desdoblamiento, es equivalente al original de la figura 3.21 ó 3.22 y por lo tanto, son equivalentes los resultados que de su resolución se obtengan.

También aquí la ventaja obtenida es que al elegir el nodo de desdoblamiento, las fuentes que resulten (dos para el caso), quedan transformadas en fuentes reales y en consecuencia la resolución del circuito equivalente puede ser abordada por el método sistemático de los nodos.

## 5. SINGULARIDADES EN CIRCUITOS

Se entenderá por singularidades de circuito a dos configuraciones que no cumplen alguna de las leyes sobre las que se apoya la teoría de circuitos. Estas configuraciones son: 1) Mallas de fuentes ideales de tensión y 2) Nodos de fuentes ideales de corriente. En ambos casos, si la suma de las fuentes no resulta nula, no se cumplirán la segunda y primera ley de Kirchhoff, respectivamente y tampoco se cumplirá el principio de superposición.

Hay ciertas configuraciones singulares que pueden ser aceptadas con cierta restricción, como por ejemplo, fuentes ideales de la misma tensión, conectadas en paralelo. Estas se comportan como una única fuente de tensión del mismo valor, ver figura 3.29.

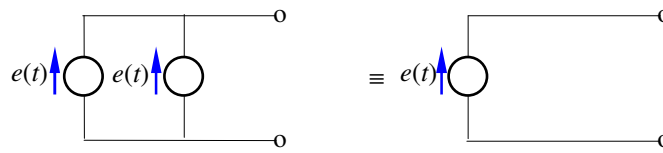


Figura 3.29

La restricción de esta configuración radica en que no le es aplicable, por ejemplo, el teorema de superposición. Dado que dos fuentes ideales en paralelo, resultan una combinación lineal de la otra, para resolver el circuito, el paralelo de fuentes puede ser reemplazado por una fuente equivalente única y al volver a considerar las fuentes dadas para el circuito original, se deberá dividir la corriente de la fuente equivalente, en tantas partes iguales, como fuentes tenga el paralelo de la configuración aludida. Es importante señalar que esta configuración no tiene sentido práctico, habida cuenta que una fuente de tensión ideal, por definición, no tiene restricción de potencia.

Algo similar ocurre con la conexión en serie de fuentes ideales de corriente del mismo valor, ver figura 3.30. Tampoco aquí por el mismo motivo de no haber restricción de potencia, no tendría sentido práctico dicha serie.

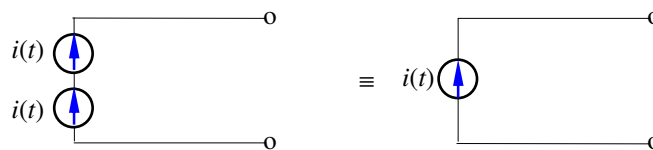


Figura 3.30

La restricción ahora, es que tampoco se puede aplicar el teorema de superposición. Dado que dos fuentes ideales en serie, resultan también combinación lineal una de la otra, para resolver el circuito, la configuración serie de fuentes ideales, deberá ser reemplazada por la fuente equivalente única y al volver a considerar las fuentes dadas para el circuito original, se deberá dividir la tensión en terminales de la fuente equivalente, en tantas partes iguales, como fuentes tenga la configuración serie dada.

Otras configuraciones singulares que resultan aceptable son: 1) cualquier trayectoria poligonal cerrada (malla), formada por fuentes ideales de tensión cuya suma resulte nula y 2) cualquier configuración radial (nodo), formada por fuentes ideales de corriente cuya suma resulte nula.

Estas configuraciones tienen la misma restricción de no poderseles aplicar el teorema de superposición. Para que las singularidades sean salvables, en el triángulo se deberá cumplir que “ $e_a + e_b + e_c = 0$ ” lo que implica que “ $e_c = - (e_a + e_b)$ ” y en la estrella que “ $i_a + i_b + i_c = 0$ ” lo que implica que “ $i_b = - (i_a + i_c)$ ”. En cualquier caso, una de las fuentes resultará ser combinación lineal de las restantes por lo que para resolver el circuito, la configuración de fuentes ideales, poligonal o radial, deberá ser reemplazada por la configuración equivalente (cuyas fuentes estarán dadas por la

cantidad de fuentes de la configuración dada, menos una) y al volver a considerar las fuentes dadas en el circuito original, se deberá encontrar el conjunto de corrientes de valor mínimo para las ramas de la poligonal o el conjunto de tensiones de valor mínimo para las ramas radiales, cuyas sumas resulten nulas.

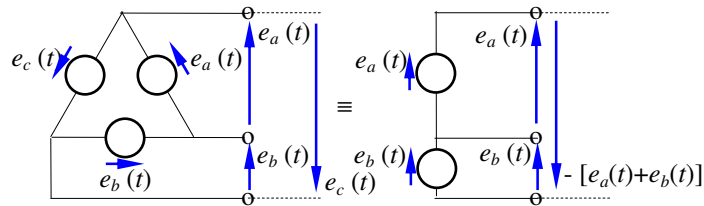


Figura 3.31

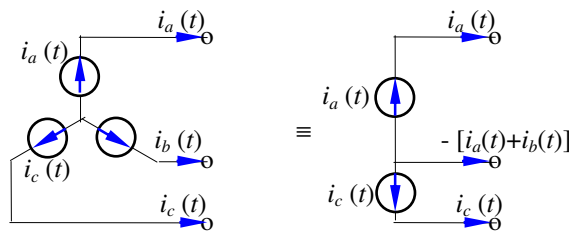


Figura 3.32

## 6. OTRAS CONFIGURACIONES UTILES DE FUENTES IDEALES

En la resolución de circuitos además de las singularidades aceptables vistas en el punto anterior pueden también aparecer, como consecuencia de los desdoblamientos de fuentes antes vistos, paralelos entre fuentes ideales que no constituyen singularidades y que se describen a continuación.

### 6.1 Paralelo de fuentes ideales de tensión y corriente.

Como las fuentes ideales de tensión por definición imponen la tensión a cualquier componente que se les conecte en paralelo (por singularidad se excluyen las propias fuentes de tensión), entonces en el paralelo con cualquier fuente de corriente, la tensión será la de la fuente de tensión.

Como al mismo tiempo, desde el punto de vista de la impedancia de una fuente ideal de tensión, se tiene un cortocircuito, entonces toda la corriente de la fuente de corriente quedará atrapada en el lazo que forma con el cortocircuito de la fuente de tensión. El equivalente queda como se muestra en la figura 3.33.

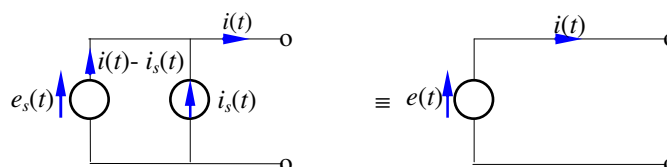


Figura 3.33

### 6.2 Serie de fuentes ideales de corriente y tensión.

Como también las fuentes ideales de corriente por definición imponen su corriente a cualquier componente que se les conecte en serie (por singularidad se excluyen las



propias fuentes de corriente), entonces con cualquier fuente de tensión en serie, la corriente resultará la de la fuente de corriente. Ahora, como la impedancia de una fuente ideal de corriente es un circuito abierto, entonces para obtener la tensión de la fuente equivalente, a la tensión en los terminales de la fuente de corriente, hay que restarle la de la fuente de tensión. El equivalente queda como se muestra en la figura 3.34.

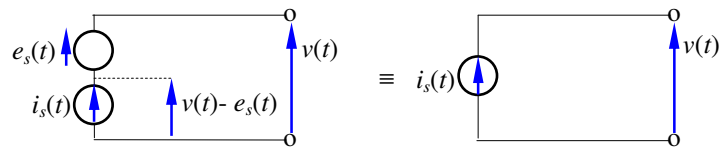


Figura 3.34

**PROBLEMAS PROPUESTOS**  
**CAPITULO 3**  
**TOPOLOGIA Y METODOS DE RESOLUCION DE CIRCUITOS**

**OBJETIVO PRINCIPAL**

Aplicación de conceptos de topología de circuitos y su implementación en la resolución de circuitos por los métodos de mallas, nodos y sus correspondientes sistematizaciones.

**Problema 3.1**

Para el circuito de la figura P3.1 se quiere:

- 1) ¿Cuántas ramas y nodos totales y efectivos hay involucrados en el mismo.
- 2) Usando el método gráfico del tachado, indicar tres juegos distintos de ramas tachadas que conduzcan al conjunto mínimo de corrientes ficticias de malla, mostradas.
- 3) Dibujar el grafo usando, línea llena para las ramas del árbol y línea de trazos para las ramas de enlace.
- 4) Comprobar que las ramas de enlace (o exclusivas), no necesariamente son las mismas que las ramas tachadas como respuesta a la pregunta (2).
- 5) Explique ¿Por qué cada rama de enlace con las del árbol que le correspondan forman mallas linealmente independiente? —
- 6) Para el grafo dibujado en el punto (3) determine las secciones de corte fundamentales correspondientes.

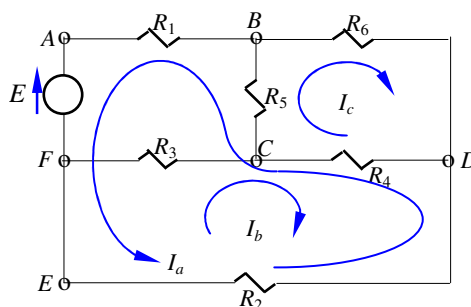


Figura P3.1

**Problema 3.2**

Utilizando el método de las mallas con las corrientes ficticias indicadas, determinar las corrientes y caídas de tensión en cada rama.

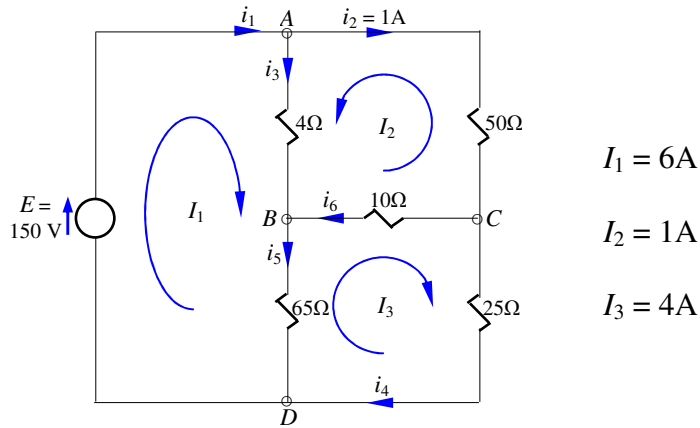


Figura P3.2

Obtenga las corrientes de ramas y compare los resultados obtenidos con el problema 2.1.

**Problema 3.3**

A partir de los datos consignados en el circuito de la figura y por el metodo que resulte más eficiente, se pide calcular la potencia suministrada por cada fuente.

- $V_{AD} = 182.96V$
- $V_{BD} = 209.14V$
- $V_{CD} = 173.68V$
- $i_1 = 2.7653A$
- $I_2 = 10A$
- $i_3 = 0.145A$
- $i_1 = -2.908A$
- $i_1 = 7.092A$
- $i_1 = 7.236A$

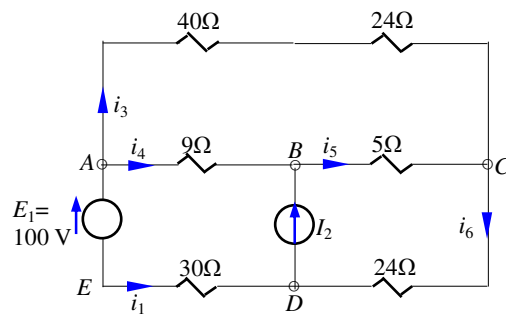


Figura P3.3

**Problema 3.4**

En forma literal y por aplicación del método sistemático de nodos determine la corriente que circula por la resistencia “R3”.

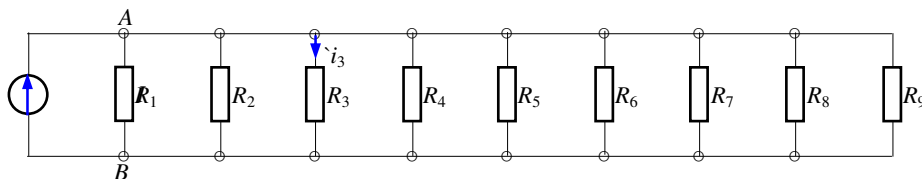


Figura P3.4

**Problema 3.5**

Por el método de nodos, encontrar la corriente por la fuente y determinar la potencia suministrada.

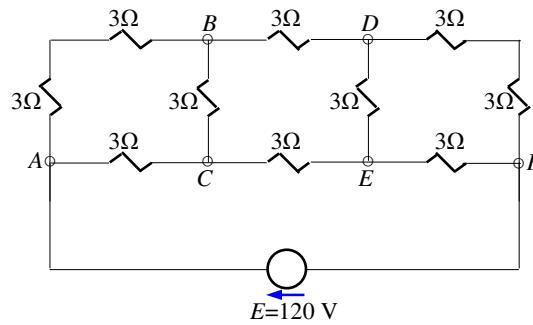


Figura P3.5

**Problema 3.6**

Potencia total suministrada y absorbida calculando las variables necesarias a través del método de potenciales de nodos.

$$\begin{aligned} V_{AD} &= -40.5170\text{V} \\ V_{BD} &= -667.016\text{V} \\ V_{CD} &= 25.9750\text{V} \end{aligned}$$

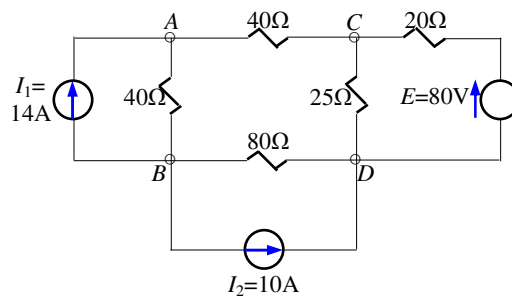


Figura P3.6

**Problema 3.7**

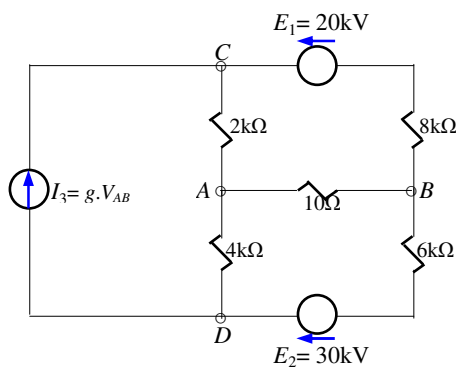


Figura P3.7

La conductancia de la fuente de corriente controlada con tensión (FCCT), e “ $g=5\text{mhos}$ ”. Se quiere determinar:

- 1) “ $V_{AB}$ ”.
- 2) Potencia suministrada por las fuentes.
- 3) Potencia disipada en “ $R=10\Omega$ ”.

**Problema 3.8**

Primera parte:

En forma literal, utilizando el método de las mallas y con las corrientes ficticias indicadas, determinar la relación de dependencia “ $v = f(i)$ ”.

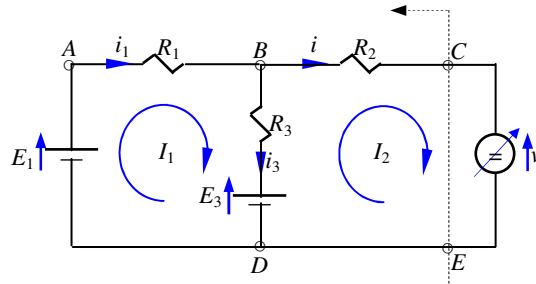


Figura P3.8(a)

Segunda parte:

Con el mismo circuito convertido a fuentes de corrientes y usando el método de los potenciales de nodo, determinar ahora la relación de dependencia  $i = f(v)$ .

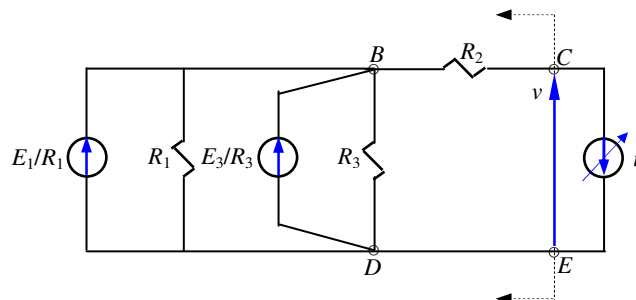


Figura P3.8(b)

Tercera parte:

Comprobar por comparación que los resultados obtenidos son recíprocos.

**Problema 3.9**

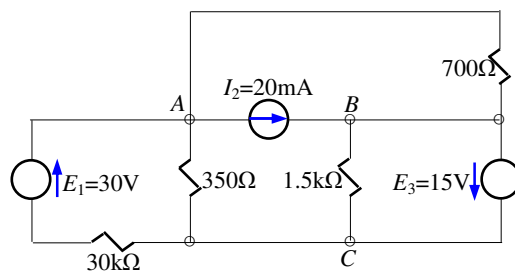


Figura P3.9

Resolver por mallas y nodos.

**Problema 3.10**

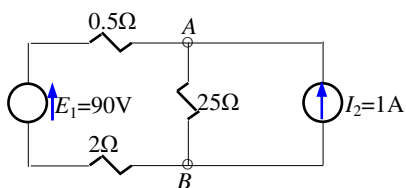


Figura P3.7

Resolver por el método de los potenciales de nodos.

**Problema 3.11**

Resolver por el método de los potenciales de nodos.

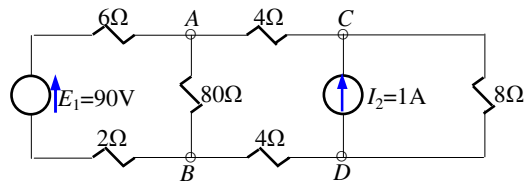


Figura P3.11