

ELECTROTECNIA I

CAPITULO 4

TEOREMAS, TECNICAS Y EQUIVALENCIAS DE CIRCUITOS

CAPITULO 4 TEOREMAS, TECNICAS Y EQUIVALENCIAS DE CIRCUITOS

1. INTRODUCCION
2. TECNICA DE RESOLUCION DE CIRCUITOS EN ESCALERA
 - 2.1 Funciones de transferencias
 - 2.2 Resistencia de entrada o de excitación
3. TECNICA DE DIVISORES DE TENSION Y CORRIENTE
 - 3.1 Divisor de tensión
 - 3.2 Divisor de corriente
4. TECNICA DE ELIMINACION DE MALLAS Y NODOS
O CONVERSION ESTRELLA-TRIANGULO
Conclusión importante
5. TEOREMA DE SUPERPOSICION
6. TEOREMAS DE THEVENIN Y NORTON
 - 6.1 Teorema de Thevenin
 - 6.2 Teorema de Norton
 - 6.3 Resumen de aplicación de los Teoremas de Thevenin y Norton
 - 6.3.1 Thevenin
 - 6.3.2 Norton
 - 6.4 Equivalencia entre fuentes reales de corriente y tensión
 - 6.5 Generalización sobre los teoremas de Thevenin y Norton
 1. Circuito sólo con fuentes independientes
 2. Circuito con fuentes independientes y también con fuentes controladas
 3. Circuito sólo con fuentes controladas
7. TEOREMA DE RECIPROCIDAD
Ejercicio 4.1 (de apoyo a teoría)
Ejercicio 4.2 (de apoyo a teoría)
8. TEOREMA DE MAXIMA TRANSFERENCIA DE ENERGIA
PROBLEMAS PROPUESTOS CAPITULO 4

CAPITULO 4

TEOREMAS, TECNICAS Y EQUIVALENCIAS DE CIRCUITOS

1. INTRODUCCION

Los teoremas de circuitos, las técnicas y los métodos de resolución son muy útiles para el tratamiento de circuitos simples o complejos. Con su aplicación es posible aproximarse y llegar a comprender de una manera sistemática problemas de circuitos que serían muy difíciles de abordar por la aplicación directa de las leyes de Kirchoff. Se da por hecho que el lector conoce perfectamente las características y técnicas de combinación de resistencias en serie y paralelo. Como corresponde a la teoría de circuitos, los teoremas aquí desarrollados son aplicables a los circuitos formados por elementos concentrados, lineales y bilaterales.

Como herramienta matemática principal para el desarrollo del capítulo, se utilizarán determinantes y su cálculo por el método de desarrollo de Laplace. El método de desarrollo de Laplace consiste en encontrar el valor de un determinante por la suma de los productos de los sucesivos elementos de una fila cualquiera (o columna cualquiera) y sus cofactores asociados. Es decir si se tiene una matriz cuadrada “A” de orden “n”, su determinante puede ser calculado por:

$$|A| = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \text{ (Los elementos de cualquier fila "i")} \quad (4.1)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \text{ (Los elementos de cualquier columna "j")} \quad (4.2)$$

Donde: “ Δ_{ij} ” es el cofactor asociado al elemento “ a_{ij} ” y se obtiene de resolver el determinante menor de orden “n-1” que resulta de eliminar en “A”, la fila “i” y la columna “j”.

Si bien la aplicación numérica de este método en la resolución de circuitos, implica una gran cantidad de cálculos (tal vez mayor que con algún otro método), si se lo utiliza con letras y notación compacta, como en las expresiones (4.1) y (4.2), permite poner de manifiesto una serie de características y propiedades de los circuitos, de las que surgen algunas demostraciones de teoremas y técnicas, objeto del capítulo.

2. TECNICA DE RESOLUCION DE CIRCUITOS EN ESCALERA

Los circuitos conocidos como circuito en escalera, adoptan este nombre debido a su forma de escalera marinera (ladder), ver figura 4.1. Estos circuitos, formados por elementos pasivos y frecuentemente también por activos (no para el caso de este capítulo), se caracterizan por tener claramente definida la entrada y salida y suelen ser una de las etapas de una serie de etapas de otro circuito más importante, razón por lo que resulta necesario conocer la relación de sus variables de entrada y salida que podrían ser:

- 1) Tensión de salida " V_o ", como función de la de entrada (o de excitación) " V_i ", conocida como función de transferencia de tensión.
- 2) Corriente de salida " I_o ", como función de la de entrada (o de excitación) " I_i ", conocida como función de transferencia de corriente.
- 3) Tensión de salida " V_o ", como función de la corriente de entrada (o de excitación) " I_i ", conocida como resistencia de transferencia.
- 4) Corriente de salida " I_o ", como función de la tensión de entrada (o de excitación) " V_i ", conocida como conductancia de transferencia.
- 5) Tensión de entrada " V_i " en función de corriente de entrada " I_i ", conocida como resistencia de entrada (o de excitación).

De modo que para calcular las anteriores funciones, donde cualquiera de ellas es conocida también con el nombre de función de red "FR", se puede utilizar una técnica que es el objeto de este punto. En la figura se ve que este tipo de circuito se configura con resistencias conectadas a lo largo que aunque desde un punto de vista riguroso no es correcto, se las suele llamar en serie y resistencias conectadas transversalmente que tampoco es correcto, pero suele referirse a ellas como conectadas en paralelo.

2.1 Funciones de transferencias

Para mostrar el mecanismo se desarrolla el caso de la función de transferencia de tensión, cualquier otro caso de función de transferencia consiste en seguir el mismo mecanismo, pero utilizando las variables que correspondan.

La técnica consiste en suponer conocida la tensión de salida " V_o " y la corriente salida " I_o " e ir remontando la red calculando paso a paso, de manera parecida a como fueron resueltos los ejercicios del capítulo 2. A continuación se aplica el procedimiento a realizar.

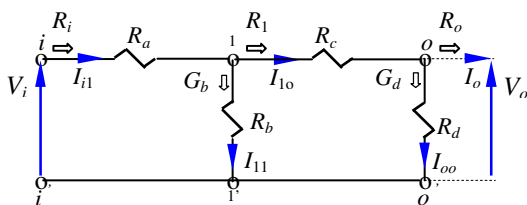


Figura 4.1

R_n : (n subíndice numérico o literal), es la resistencia vista hacia la derecha del nodo " n ".

G_m : (m subíndice literal), es la resistencia o conductancia de la rama transversal, entre nodos " $n-n$ ".

Para el ejemplo que ilustra el tema, se encontrará la función de transferencia de tensión " $A_{Voi}=V_o/V_i$ ". La técnica consiste, como fue dicho, en considerar conocidos los parámetros de salida " V_o " e " I_o " y a partir de la elección de una variable de salida, " V_o " para el caso, se resuelve remontando el circuito, calculando paso a paso todos los

parámetros de las ramas intermedias, manteniendo en cada paso la dependencia de la variable “ V_o ” seleccionada. Esto se hace hasta que se llegue a la variable de excitación “ V_i ” o de entrada, tal como se muestra a continuación:

$$I_o = G_o V_o \quad (4.3)$$

$$I_{oo} = G_d V_o \quad (4.4)$$

$$I_{1o} = I_o + I_{oo} = I_o + G_d V_o = G_o V_o + G_d V_o \quad (4.5)$$

$$V_1 = V_o + R_c I_{1o} = V_o + R_c G_d V_o + R_c G_o V_o \quad (4.6)$$

$$I_{11} = V_1 G_b = G_b V_o + G_b R_c G_d V_o + G_b R_c G_o V_o \quad (4.7)$$

$$I_{i1} = I_{1o} + I_{11} = G_o V_o + G_d V_o + G_b V_o + G_b R_c G_d V_o + G_b R_c G_o V_o \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} V_i &= V_1 + R_a I_{i1} = \\ &= V_o + R_a G_o V_o + R_a G_d V_o + R_a G_b V_o + R_a G_b R_c G_d V_o + R_a G_b R_c G_o V_o \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$A_{Voi} = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + R_a G_o + R_a G_d + R_a G_b + R_a G_b R_c G_d + R_a G_b R_c G_o} \quad (4.10)$$

Queda así la función de transferencia de tensión “ $A_{Voi}=V_o/V_i$ ” buscada.

2.2 Resistencia de entrada o de excitación

De la misma manera, paso a paso, se van combinando las resistencias remontando el circuito hacia la fuente tal como se muestra a continuación:

$$G_o = \frac{1}{R_o} \quad (4.11)$$

$$G_d = \frac{1}{R_d} \quad (4.12)$$

$$G_{do} = G_d + G_o \quad (4.13)$$

$$R_1 = R_c + \frac{1}{G_d + G_o} = \frac{R_c G_d + R_c G_o + 1}{G_d + G_o} \quad (4.14)$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{G_d + G_o}{R_c G_d + R_c G_o + 1} \quad (4.15)$$

$$G_b = \frac{1}{R_b} \quad (4.16)$$

$$G_{1b} = G_b + G_1 = G_b + \frac{G_d + G_o}{R_c G_d + R_c G_o + 1} = \frac{G_b R_c G_d + G_b R_c G_o + G_b + G_d + G_o}{R_c G_d + R_c G_o + 1} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} R_i &= R_a + \frac{1}{G_b + G_1} = R_a + \frac{R_c G_d + R_c G_o + 1}{G_b R_c G_d + G_b R_c G_o + G_b + G_d + G_o} = \\ &= \frac{R_a G_b R_c G_d + R_a G_b R_c G_o + R_a G_b + R_a G_d + R_a G_o + R_c G_d + R_c G_o + 1}{G_b R_c G_d + G_b R_c G_o + G_b + G_d + G_o} \end{aligned} \quad (4.18)$$

De acuerdo con lo dicho, todo circuito con una sola fuente de excitación, puede ser considerado compuesto por tres partes:

- 1) La excitación: fuente de corriente o tensión que se introduce entre dos nodos y constituye la rama de entrada, o en caso de considerar mallas, a la malla que se le asigne la excitación, constituirá la malla de entrada.
- 2) El circuito o red: Conjunto de elementos ideales de parámetros concentrados que interconectan los terminales de entrada con los de salida, es decir, vincula la excitación con la respuesta.
- 3) La respuesta: Puede ser la corriente o tensión de cualquier rama, o corriente de cualquier malla o potencial de cualquier nodo de interés. Cuando el parámetro de interés de la respuesta, se ubica también en la rama de entrada, La relación entre variables que establece la función de red, se conoce como inmitancia de entrada. En tal caso, las variables de entrada y salida, obviamente deberán ser de carácter distinto, si una es tensión, la otra deberá ser corriente y viceversa.

3. TECNICA DE DIVISORES DE TENSION Y CORRIENTE

Es frecuente encontrar circuitos electrónicos conformados por etapas que cumplen distintas funciones sobre la señal que se procesa. Dichas etapas se encuentran encadenadas, una a continuación de la otra, de manera que la salida de una etapa es la entrada de la siguiente, cuya salida, a su vez, es la entrada de la siguiente y así sucesivamente hasta llegar a la etapa de salida. En los acoplamientos entre etapas, es donde estas técnicas resultan de gran utilidad y toda vez que sean aplicables, estas técnicas, pueden ser usadas en cualquier configuración circuital.

Según el proceso que haga de la señal, como se muestra en las figuras 4.2 y 4.3, la entrada de la etapa “*k-esima*”, puede ser de tensión o de corriente. Dependiendo de este requerimiento puede convenir que la representación de la salida de la etapa “*j-esima*” previa, sea un equivalente de fuente de tensión o de corriente respectivamente, tal como se muestra en las figuras siguientes.

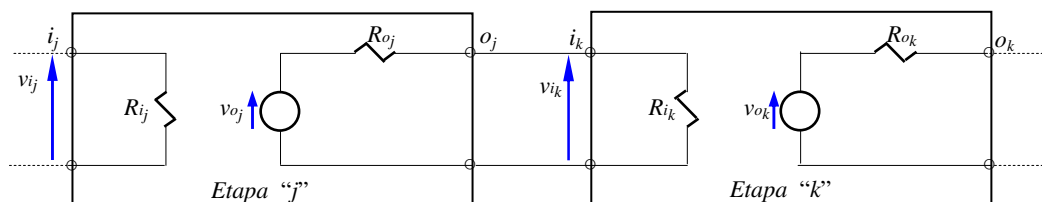


Figura 4.2

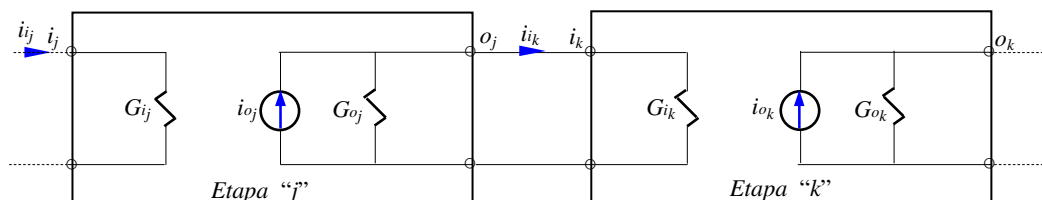


Figura 4.3

Como se muestra en las figuras 4.2 y 4.3 y se estudia más adelante, la salida de cada etapa, se comporta como una fuente de tensión en serie con una resistencia, o como una

fuente de corriente en paralelo con una resistencia. Mientras que la entrada de una etapa, puede mostrarse para la etapa anterior, también como se dijo o como si fuera una resistencia o conductancia.

3.1 Divisor de tensión

Se puede aplicar, por ejemplo para obtener la tensión de entrada a la etapa “*k*” del circuito de la figura 4.2, según se muestra a continuación:

$$v_{ik} = \frac{R_{ik}}{R_{oj} + R_{ik}} v_{oj} \quad (4.19)$$

3.2 Divisor de corriente

Idem al caso anterior pero para encontrar la corriente de entrada a la etapa “*k*” y corresponde al circuito de la figura 4.3, según se detalla a continuación:

$$i_{ik} = \frac{G_{ik}}{G_{oj} + G_{ik}} i_{oj} \quad (4.20)$$

4. TECNICA DE ELIMINACION DE MALLAS Y NODOS O CONVERSION ESTRELLA-TRIANGULO

A menudo en el proceso de resolución de un circuito se encuentran configuraciones de resistencia que no cumplen con los requisitos para estar en serie, ni en paralelo. Este tipo de configuraciones que se caracterizan por tener tres o más terminales de vinculación con el circuito en el que se encuentran incluidas, por la forma en que pueden ser dibujadas se llaman triángulo (o malla poligonal), estrella (o nodo radial), según se muestra en las figuras 4.4 y 4.5. Cuando en un circuito se pretende encontrar su resistencia y en el mismo se encuentra incluida una conexión triángulo o estrella, como la descrita, de no existir la posibilidad de la conversión que aquí se trata, el proceso para obtener la resistencia equivalente quedaría interrumpido.

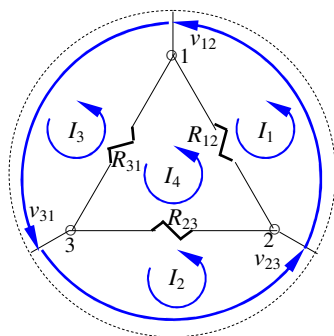


Figura 4.4

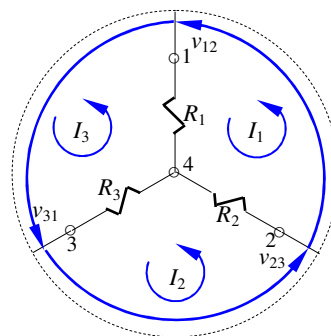


Figura 4.5

Aplicando los métodos ya conocidos de resolución de circuitos de mallas y nodos vistos en Capítulo 3 y con el apoyo del cálculo matricial, se puede demostrar que ambas configuraciones, vistas desde sus tres terminales externos “1, 2 y 3”, son equivalentes. Se puede encontrar así la manera de pasar de una configuración a la otra según convenga. El contorno en línea de trazos que circunscribe las configuraciones

propuestas, indican el resto del circuito en el que se encuentra incluida la configuración de la cual se trate.

Si las dos configuraciones son equivalentes, ambas resueltas por mallas, deberán dar los mismos resultados con relación a las variables “ I_1 ”, “ I_2 ”, “ I_3 ”, “ v_{12} ”, “ v_{23} ” y “ v_{31} ” que son las que operan en la vinculación con el resto del circuito. En tal sentido si se plantean las ecuaciones de mallas en ambas configuraciones, como se deduce de las figuras, la configuración triangulo tendrá 4 ecuaciones y la estrella 3 ecuaciones. Para que se pueda hablar de equivalencia, es necesario reducir el sistema de 4 ecuaciones de la configuración triangulo a tres ecuaciones con tres incógnitas, donde obviamente deberá eliminarse la corriente ficticia “ I_4 ”.

Las ecuaciones de la configuración triangulo son:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overleftarrow{v_{12,23,31}} \\ \overrightarrow{v_{12}} \\ \overrightarrow{v_{23}} \\ \overrightarrow{v_{32}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} = \begin{array}{c} \overleftarrow{A} \\ \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{C} \\ \overrightarrow{D} \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} R_{12} & 0 & 0 & -R_{12} \\ 0 & R_{23} & 0 & -R_{23} \\ 0 & 0 & R_{31} & -R_{31} \\ \hline -R_{12} & -R_{23} & -R_{31} & (R_{12}+R_{23}+R_{31}) \end{array} \right] \cdot \begin{array}{c} \overrightarrow{I_{123}} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} \end{array} \quad (4.21)
 \end{array}$$

Considerando la partición mostrada y escribiendo en forma de ecuaciones matriciales compactas, se tiene:

$$v_{12,23,31} = A \cdot I_{123} + B \cdot I_4 \quad (4.22)$$

$$0 = C \cdot I_{123} + D \cdot I_4 \quad (4.23)$$

De (4.23) se despeja “ $I_4 = -D^{-1} \cdot C \cdot I_{123}$ ” y se sustituye en (4.22), con lo que se obtiene:

$$v_{12,23,31} = (A - B \cdot D^{-1} \cdot C) \cdot I_{123} = R \cdot I_{123} \quad (4.24)$$

Donde “ R ” es la matriz reducida a las variables de vinculación con el resto de la red y haciendo las operaciones de matrices de la (4.24), se obtiene la relación de variables de vinculación buscadas.

$$v_{12,23,31} = R \cdot I_{123} = \begin{bmatrix} R_{12} \frac{R_{12}^2}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} & \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} & \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} & R_{23} \frac{R_{23}^2}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} & \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} & \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} & R_{31} \frac{R_{31}^2}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Si como se muestra en la figura 4.5, el triangulo, se reemplaza por una estrella equivalente, las ecuaciones de malla que se planteen para el mismo sector del circuito a reemplazar, deberán dar los mismos resultado, entre las variables de vinculación con el resto del circuito, es decir la matriz de vinculación deberá resultar ser la misma “ R ” de la expresión (4.25).

$$v_{12,23,31} = R \cdot I_{123} = \begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_3+R_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Por lo dicho, los elementos de las dos matrices de (4.25) y (4.26), deben ser iguales y en consecuencia deberán serlo sus elementos homólogos, con lo que la equivalencia se da sustituyendo las resistencias del triángulo por las de la estrella según las siguientes ecuaciones:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (4.27)$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (4.28)$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (4.29)$$

Del mismo modo pero resolviendo por nodos, de ambas redes de las figuras 4.6 y 4.7, se pueden obtener las expresiones para pasar de la configuración estrella a la del triángulo equivalente.

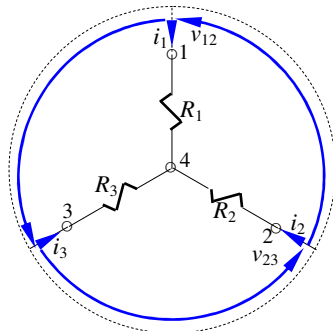


Figura 4.6

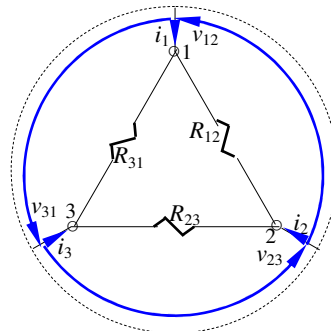


Figura 4.7

Siguiendo el mismo procedimiento, se deja para que sea desarrollado por el lector y a continuación se muestran las equivalencias a las que deberá llegar:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} \quad (4.30)$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1} \quad (4.31)$$

$$R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2} \quad (4.32)$$

Conclusión importante

- 1) La transformación de triángulo a estrella de las figuras 4.4 a 4.5, se puede considerar como un método para efectuar eliminación de mallas que también puede ser aplicado a mallas de más ramas (poligonales de más lados) y
- 2) La transformación de estrella a triángulo, figuras 4.6 a 4.7, se puede considerar como un método para efectuar eliminación de nodos que también puede aplicarse a nodos de más ramas (radial de más rayos).

5. TEOREMA DE SUPERPOSICION

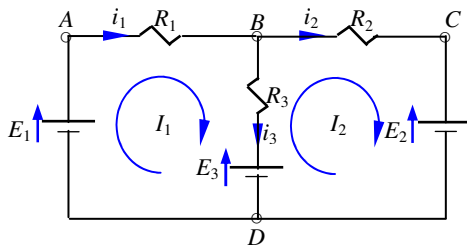


Figura 4.8

Dado un circuito como el de la figura 4.8, cualquier variable activada por el conjunto de fuentes que tenga el circuito, como por ejemplo la corriente de alguna rama cualquiera del circuito, resultará ser la suma algebraica de las corrientes que cada fuente del circuito impulse en esa rama, actuando sola.

Para lograr que cada fuente actúe sola, habrá que pasivar las restantes. Lo que significa que las restantes fuentes dejan de actuar como tales, pero mantienen su resistencia interna, esto quiere decir que las fuentes pierden su capacidad de entregar energía, pero su resistencia interna permanece intacta. Lo dicho equivale a reemplazar las fuentes ideales de tensión, por un cortocircuito y las ideales de corriente, por un circuito abierto. Para la demostración del teorema de superposición se recurre a un sencillo circuito de dos mallas, como el mostrado en la figura 4.8.

El circuito se resuelve en forma literal, por el método sistemático de mallas que resulta representado por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} E_1 - E_3 \\ E_3 - E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Resolviendo por determinantes

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} E_1 - E_3 & -R_3 \\ E_3 - E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} \quad (4.34)$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 - E_3 \\ -R_3 & E_3 - E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} \quad (4.35)$$

Donde “ Δ_i ” para ($i = 1, 2$) en el numerador, se conoce como determinante sustituto y se obtiene de reemplazar en el determinante principal “ Δ ”, su columna “ i -ésima”, por el vector columna de términos independientes del sistema de ecuaciones que se está resolviendo. Desarrollando el numerador de (4.34) y (4.35), según Laplace, por la suma de los productos de los sucesivos elementos de la columna “1” para “ I_1 ” y por la suma de los productos de los sucesivos elementos de la columna “2” para “ I_2 ”, en ambos casos, por sus respectivos cofactores asociados, se tendrá:

$$I_1 = (E_1 - E_3) \frac{\Delta_{11}}{\Delta} - (E_3 - E_2) \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \quad (4.36)$$

$$I_2 = -(E_1 - E_3) \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + (E_3 - E_2) \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \quad (4.37)$$

Desarrollando

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} E_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} E_2 + \left(-\frac{\Delta_{11}}{\Delta} - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \right) E_3 = I_{11} + I_{12} + I_{13} \quad (4.38)$$

$$I_2 = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} E_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} E_2 - \left(-\frac{\Delta_{12}}{\Delta} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \right) E_3 = I_{21} + I_{22} + I_{23} \quad (4.39)$$

Donde: I_{11} : Componente de “ I_1 ” que aporta “ E_1 ”, estando sola.
 I_{12} : Componente de “ I_1 ” que aporta “ E_2 ”, estando sola.
 I_{13} : Componente de “ I_1 ” que aporta “ E_3 ”, estando sola.
 I_{21} : Componente de “ I_2 ” que aporta “ E_1 ”, estando sola.
 I_{22} : Componente de “ I_2 ” que aporta “ E_2 ”, estando sola.
 I_{23} : Componente de “ I_2 ” que aporta “ E_3 ”, estando sola.

Si se consideran los distintos cofactores que aparecen en (4.38) y (4.39) que son:

$\Delta_{11} = R_2 + R_3$: cofactor del elemento “ s_{11} ” del determinante sustituto “ Δ_1 ”.
 $\Delta_{21} = -R_3$: cofactor del elemento “ s_{21} ” del determinante sustituto “ Δ_1 ”.
 $\Delta_{12} = \Delta_{21}$: cofactor del elemento “ s_{12} ” del determinante sustituto “ Δ_2 ”.
 $\Delta_{22} = R_1 + R_3$: cofactor del elemento “ s_{22} ” del determinante sustituto “ Δ_2 ”.

Las componentes de las corrientes resultan en:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} E_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad (4.40)$$

$$I_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} E_2 = \frac{-R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_2 \quad (4.41)$$

$$I_{13} = \left(-\frac{\Delta_{11}}{\Delta} - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \right) E_3 = \frac{-(R_2 + R_3) - (-R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_3 = \frac{-R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_3 \quad (4.42)$$

$$I_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} E_1 = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_1 \quad (4.43)$$

$$I_{22} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} E_2 = -\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_2 = -\frac{E_2}{\frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)} + R_2} \quad (4.44)$$

$$I_{23} = \left(-\frac{\Delta_{12}}{\Delta} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \right) E_3 = \frac{-(-R_3) - (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_3 = \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_3 \quad (4.45)$$

Para comprobar que los resultados anteriores son correctos se propone encontrar las corrientes en ambas mallas cuando sólo se encuentre activa la fuente “ E_2 ”, lo que significa que “ E_1 ” y “ E_3 ”, fueron pasivadas, tal como se muestra en la figura 4.9.

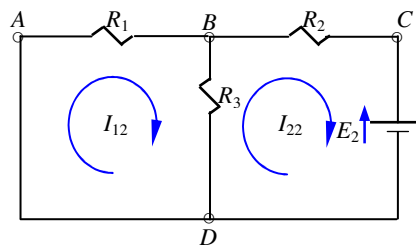


Figura 4.9

En tal caso se obtienen las componentes de corriente “ I_{12} ” e “ I_{22} ” que deberán resultar idénticas a las (4.41) y (4.44) anteriores. Por el método sistemático de mallas:

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{E} \quad \overleftrightarrow{R} \quad \overrightarrow{I} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{21} \\ I_{22} \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.46)$$

$$I_{21} = \frac{\Delta'_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_3 \\ -E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_2 \quad (4.47)$$

$$I_{22} = \frac{\Delta'_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & 0 \\ -R_3 & -E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = -\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E_2 \quad (4.48)$$

Los resultados obtenidos en (4.47) y (4.48) cuando únicamente está activa la fuente “ E_2 ”, según se comprueba de (4.41) y (4.42), son idénticos a las componentes que produce la misma “ E_2 ” cuando todas las fuentes están simultáneamente en el circuito.

6. TEOREMAS DE THEVENIN Y NORTON

Se aplican a circuitos de dos terminales como lo son: los dos terminales de alimentación de un circuito de alumbrado, la salida a los parlantes de un amplificador de sonido, la entrada de antena de un televisor, los tomacorrientes (enchufes) que se disponen en nuestras casas, etc. En general cualquier circuito o parte de un circuito vistos desde dos terminales, es ejemplo de circuitos de dos polos o de dos terminales.

Cuando un circuito de dos terminales esta formado por elementos lineales y bilaterales, puede ser reemplazado por un equivalente que según Thevenin, se forma con una fuente ideal de tensión “ E_{TH} ” en serie con una resistencia “ R_{TH} ” y según Norton, con una fuente ideal de corriente “ I_N ” en paralelo con una conductancia “ G_N ”. Estos equivalentes se comportan, para cualquier elemento o circuito conectado a sus terminales, en forma idéntica al circuito reemplazado. Sin embargo es obvio pero se aclara que el equivalente nada dice sobre el comportamiento interno de la red a la que esta reemplazando.

En este capítulo se tratarán los circuitos de dos terminales, de corriente continua formados sólo por resistencias. Los mismos conceptos podrán ser aplicados a circuitos de corriente alterna que serán tratados más adelante.

6.1 Teorema de Thevenin

Una consecuencia lógica de tratar con circuitos representados por sistemas lineales es que si entre dos terminales cualesquiera se impone una diferencia de potencial “ v ” variable que no altere la rama del circuito donde fue insertada, la corriente “ i ” que impulsa en la nueva malla que se origina, variará linealmente con dicha diferencia de

potencial y vendrá representada, en consecuencia, por la función de una recta como la que se muestra en la figura 4.10 y cuya ecuación es:

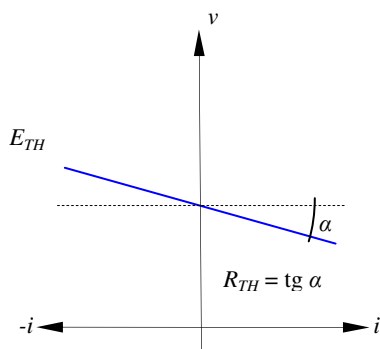


Figura 4.10

$$v = -R_{TH} \cdot i + E_{TH} \quad (4.49)$$

Para demostrar esta afirmación, se usa el circuito de la figura 4.11. En este caso se quiere comprobar el comportamiento del circuito visto hacia la izquierda de los dos terminales “C” y “E”. Para tal fin entre dichos terminales se conecta una fuente ideal de tensión “v” de valor ajustable que actuara como variable impuesta.

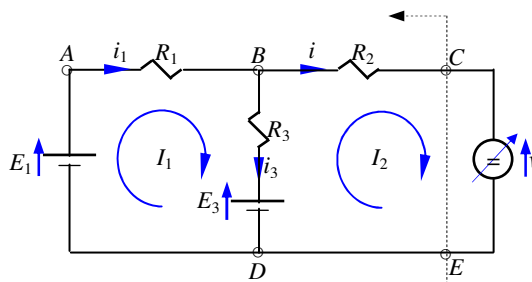


Figura 4.11

Para la demostración del teorema se resuelve el circuito por cualquier método, para el caso se ha decidido usar, a título de repaso, el método sistemático de mallas. Para simplificar la demostración se eligió un circuito formalmente igual al de la figura 4.8, por lo que la corriente “i” en la rama “2”, se corresponderá con la corriente ficticia “I₂” y la fuente ideal ajustable “v”, con la fuente ideal “E₂”, de manera que para ahorrar esfuerzo, sirve la ecuación (4.35) que se repite a continuación, con los reemplazos correspondientes antes dicho, es decir “v” por “E₂” e “i” por “I₂”.

$$i = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 - E_3 \\ -R_3 & E_3 - v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} \quad (4.50)$$

$$i = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta}(E_1 - E_3) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}(E_3 - v) \quad (4.51)$$

Despejando “v = f(i)”

$$v = -\frac{\Delta}{\Delta_{22}}i - \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}E_1 - \left(-\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} - 1\right)E_3 \quad (4.52)$$

Donde “ Δ/Δ_{22} ” tiene como unidad el “ Ω ” y por su localización en la expresión, en comparación con (4.49), deberá ser “ R_{TH} ”. Por otro lado como el cociente de los cofactores del mismo orden “ Δ_{12}/Δ_{22} ”, resulta adimensional, entonces la suma de los dos últimos términos de (4.52), por estar multiplicados ambos por sendas tensiones, le corresponderá como unidad “V” y en correspondencia con (4.49), tendrá que ser la fuente ideal de tensión equivalente de Thevenin “ E_{TH} ”. Los valores de “ R_{TH} ” y “ E_{TH} ”, se tienen resolviendo los términos de (4.52), tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 R_{TH} &= \frac{\Delta}{\Delta_{22}} = \frac{(R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_3) - R_3^2}{(R_1 + R_3)} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_2 + R_3^2 - R_3^2}{(R_1 + R_3)} = \\
 &= \frac{(R_1 + R_3) \cdot R_2 + R_1 R_3}{(R_1 + R_3)} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)} \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

La (4.53) demuestra que “ R_{TH} ” esta dada por la resistencia equivalente vista desde los terminales de la fuente “ v ” (nodos “ C ” y “ E ” del circuito), en el que previamente se hayan desactivado todas las fuentes, “ E_1 ” y “ E_3 ” para el caso. También la (4.52) muestra que la suma de los dos últimos términos, como se demuestra a continuación se corresponde con la “ E_{TH} ”.

$$E_{TH} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} E_1 - \left(-\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} - 1 \right) E_3 = -\frac{-R_3}{R_1 + R_3} E_1 - \left(-\frac{-R_3}{R_1 + R_3} - 1 \right) E_3 = \frac{(E_1 - E_3)}{R_1 + R_3} R_3 + E_3 \quad (4.54)$$

La (4.54) muestra que la “ E_{TH} ”, es la tensión que se mediría con un voltímetro intercalado entre los nodos “ C ” y “ E ”, en el circuito original. Como un voltímetro tiene resistencia infinita, también se puede decir que seria la diferencia de potencial calculada entre los nodos “ C ” y “ E ”, habiendo previamente abierto el circuito.

En resumen, de acuerdo con lo demostrado se puede afirmar que cualquier circuito formado por elementos lineales y bilaterales, o parte de cualquier circuito, visto desde dos terminales (nodos), tal como se muestra en la figura 4.12, se comporta como un generador en serie con una resistencia.

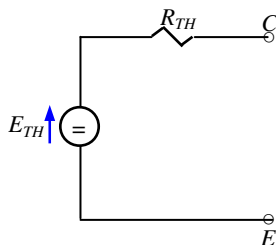


Figura 4.12

De la figura 4.10 y de las ecuaciones (4.49) y (4.50), se observa que la fuente equivalente, denominada tensión de Thevenin “ E_{TH} ”, se obtiene de determinar la diferencia de potencial entre los nodos abiertos del circuito, cuyo equivalente de Thevenin se esta buscando y la resistencia equivalente de Thevenin “ R_{TH} ”, es la que se ve desde dichos nodos después de haber pasivado todas las fuentes.

6.2 Teorema de Norton

Que la relación entre la diferencia de potencial “ v ” aplicada entre los terminales “ C ” y “ E ” del circuito de la figura 4.11 y la corriente “ i ” impulsada en la nueva malla, resulta ser una función lineal, podría haber sido expresada también como:

$$i = -(1/ R_{TH}) v + (E_{TH}/R_{TH}) = -G_N v + I_N \quad (4.55)$$

La expresión (4.55) permite deducir que el equivalente de la figura 4.12 a la izquierda de los nodos “ C ” y “ E ”, podría ser sintetizada con una fuente ideal de corriente “ I_N ”, en paralelo con una conductancia “ G_N ”, tal como se muestra en la figura 4.13. Ambos parámetros “ I_N ” y “ G_N ”, caracterizan un equivalente introducido por Norton, por lo que al equivalente de un circuito de dos terminales, realizado de esta manera, se lo conoce con este nombre.

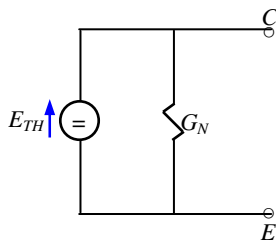


Figura 4.13

A continuación se demuestra el teorema de Norton, a partir de la resolución del circuito propuesto que puede hacerse con cualquier método. Para tal fin se ha decidido usar el método sistemático de nodos, según el cuál (punto 3.4 del Capítulo 3), el primer paso consiste en sustituir las fuentes reales de tensión por fuentes equivalentes reales de corriente. En tal caso para la demostración del teorema, entre los bornes “C” y “E”, de la fuente ajustable de tensión “v” (de la demostración de Thevenin), se usa una fuente ideal de corriente “i”, ajustable.

Para tal fin se usa una fuente ideal de corriente “i”, ajustable, tal como se muestra en figura 4.14 siguiente.

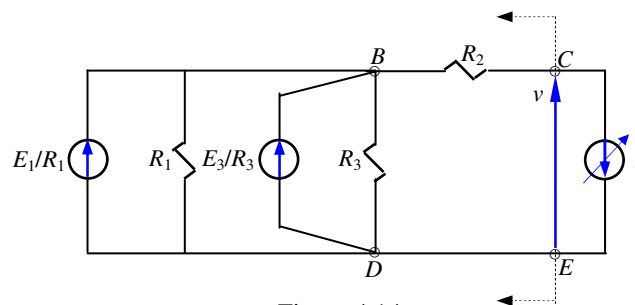


Figura 4.14

De la figura se desprende que hay “n=2” nodos efectivos y por lo tanto una única ecuación de nodo linealmente independiente. Notar que el nodo “E” es el mismo que el de referencia “D”, por lo que el circuito queda representado por:

$$\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} - i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) V_{BD} \quad \text{De donde} \quad (4.56)$$

$$V_{BD} = - \frac{i}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)} + \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)} \quad (4.57)$$

La variable “v”, puede ser determinada fácilmente, por una ecuación de trayectoria, en la que queda como variable ajustable, la fuente “i”, es decir.

$$v = V_{BD} - R_2 \cdot i \quad (4.58)$$

Sustituyendo (4.57) en (4.58) y despejando acorde a (4.55), se tiene:

$$i = - \frac{1}{\left(R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \right)} v + \left(\frac{R_3 E_1 + R_1 E_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \right) \quad (4.59)$$

Queda demostrado que un circuito lineal cualquiera o parte de él, visto desde dos nodos, se comporta como un generador de corriente “ I_N ” en paralelo con una conductancia “ G_N ”. De la (4.55) y (4.59), se observa que la fuente de corriente “ I_N ” denominada corriente de Norton, es la corriente que pasa por un cortocircuito hecho entre los nodos “C” y “E” en cuestión. La conductancia de Norton es la que se ve desde

dichos nodos, habiéndose quitado previamente el cortocircuito, o sea a circuito abierto, y calculada después que hayan sido pasivadas todas las fuentes. Es decir resulta igual a la inversa de la resistencia de Thevenin " $G_N=1/R_{TH}$ ".

6.3 Resumen de aplicación de los Teoremas de Thevenin y Norton

Se toma el circuito o sector del circuito de dos terminales que se va reemplazar por el equivalente de Thevenin o Norton y se procede como se indica a continuación:

6.3.1 Thevenin

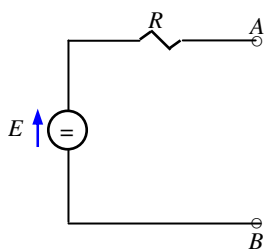
- 1) Se pasiva el circuito y se calcula la " R_{TH} ", vista desde los dos terminales hacia el circuito (o sector de circuito) que esta siendo reemplazado por el equivalente y
- 2) Se vuelve a activar el circuito y se calcula la tensión a circuito abierto " E_{TH} ", entre los dos nodos desde los que se reemplaza el circuito por el equivalente de Thevenin buscado.

6.3.2 Norton

- 1) Se pasiva el circuito y se calcula la " G_N ", vista desde los dos terminales hacia el circuito (o sector de circuito) que esta siendo reemplazado por el equivalente y
- 2) Se vuelve a activar el circuito y se calcula la corriente en el cortocircuito " I_N " efectuado, entre los dos nodos desde los que se reemplaza el circuito por el equivalente de Norton buscado.

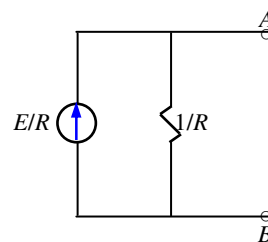
6.4 Equivalencia entre fuentes reales de corriente y tensión

Una aplicación interesante de estos teoremas, es su uso para demostrar la equivalencia entre fuentes reales de corriente y tensión.

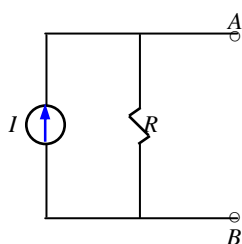


Fuente Real de Tensión FRT
Figura 4.15

NORTON →

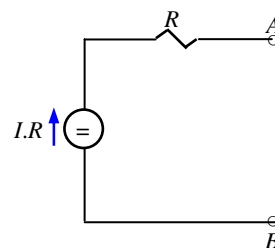


Fuente Real de Corriente FRC
Figura 4.16



Fuente Real de Corriente FRC
Figura 4.17

THEVENIN →



Fuente Real de Tensión FRT
Figura 4.18

6.5 Generalización sobre los teoremas de Thevenin y Norton

Como las fuentes controladas dependen de alguna variable del circuito, cuando un circuito contiene fuentes dependientes, las variables de control de dichas fuentes deben estar contenidas en el circuito del cual se requiere el equivalente. De no ser así, la fuente quedaría sin control lo que no tendría sentido. De manera tal que en la aplicación de los teoremas de Thevenin y Norton, se pueden dar los siguientes casos:

4. Circuito sólo con fuentes independientes: Son los vistos en puntos 6.1 y 6.2, en los que para hallar " R_{TH} " o " G_N ", se pasiva el circuito y se calcula el parámetro que corresponda visto desde los dos terminales abiertos, del circuito a ser reemplazado. Luego se calcula la " E_{TH} " con los terminales abiertos o " I_N " con los terminales en cortocircuito, para lo cual deben estar todas las fuentes activadas.
5. Circuito con fuentes independientes y también con fuentes controladas: Se halla " E_{TH} " con los terminales abiertos y todas las fuentes activadas. Se halla la corriente " I_N " por el cortocircuito efectuado entre los terminales y obviamente, también con todas las fuentes activadas. El cociente permite la obtención de " $R_{TH} = E_{TH} / I_N$ ".
6. Circuito sólo con fuentes controladas: Entre los dos terminales del circuito a ser reemplazado por el equivalente, se conecta una fuente ideal de corriente de "1 A" de manera que se activen las fuentes controladas y se calcula la tensión en los terminales de dicha fuente de corriente que resulta ser le " E_{TH} ". La resistencia del equivalente será " $R_{TH} = E_{TH} / 1A$ ". Por equivalencia se puede obtener el Norton.

7. TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Este teorema es aplicable a cualquier circuito lineal y bilateral, con la condición de que con independencia de su complejidad, tenga una única fuente de excitación. La rama en donde se encuentre localizada la fuente, toma el nombre de rama de excitación o de entrada. La fuente de excitación puede ser de tensión y se conecta en serie con la resistencia de la rama, o puede ser de corriente y se conecta en paralelo con la resistencia de dicha rama.

El teorema permite demostrar la propiedad de íter-cambiabilidad entre fuente y cualquier parámetro de la respuesta. Para tal fin es necesario resaltar dos ramas importantes, la de excitación " s " y la de respuesta " r ".

Una manera de expresar esta propiedad, consiste en que elegida una rama " r " de respuesta, la corriente que circula por ella en el circuito original, por ejemplo, será la misma que circule por la rama " s " donde estaba la excitación, si ahora la fuente se localiza en la rama " r " de respuesta.

Esta es una propiedad interesante de las redes que se comprueba con facilidad, a través del ordenamiento que se le da al sistema de ecuaciones que representa el funcionamiento de cualquier circuito. La simetría que se usa para demostrar el teorema, no corresponde a alguna propiedad física de los circuitos, sino que resulta del ordenamiento que se les da a sus ecuaciones y términos, al escribir el sistema que representan su funcionamiento. De manera que las ecuaciones de las mallas (o de los nodos): "1, 2, 3, ... y n " que podrían ocupar cualquier fila del sistema de ecuaciones, en forma deliberada se las ordena como filas: "1, 2, 3, ... n " y al mismo tiempo cada término de las ecuaciones que podrían ocupar cualquier posición, también deliberadamente se los ordena en forma creciente "1, 2, 3, ... n ".

Respetando tal ordenamiento, como podrá ser comprobado por el lector, la matriz que representa las ecuaciones de Kirchhoff del circuito, sea que se lo haya planteado por mallas o por nodos, resultará simétrica. Esto significa que los elementos no diagonales cumplirán con que “ $a_{ij} = a_{ji}$ ”. Se aclara que se habla de ordenamiento deliberado, habida cuenta que el sistema de ecuaciones podría ser resuelto sin la necesidad de dicho ordenamiento.

Se aclara también que si las ecuaciones se escriben usando los métodos de mallas o nodos, vistos en el capítulo 3, el ordenamiento descrito anteriormente resulta automático. Con el objeto de demostrar el teorema en forma generalizada, suponga que “ g ” sea una excitación genérica (fuente de tensión o de corriente) y “ f ” la respuesta genérica (se trate también de la corriente o de la tensión de la rama de respuesta), en consecuencia “ A ”, resultara ser la matriz genérica (de resistencias de mallas o conductancias de nodos), cuyos elementos “ a_{ij} ”, vinculan ambas variables. Entonces sea que el sistema sea resuelto por el método de mallas o nodos adoptará la siguiente forma matemática:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g_s \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} & \cdots & a_{sr} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_s \\ \vdots \\ f_r \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Como se dijo, la matriz correspondiente a la expresión (4.60), a la que se puede llegar automáticamente aplicando uno de los métodos, es simétrica. Suponga que en el circuito cuyo sistema de ecuaciones es (4.60), se quiere relacionar la respuesta “ f_r ” con la única excitación “ g_s ” que tiene el circuito, entonces se podría pasar la fila y columna “ s ” y la fila y columna “ r ”, , a ocupar respectivamente, la primer fila y columna y segunda fila y columna de la matriz “ A ”, de manera que el resto de filas y columnas se desplacen ordenadamente, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} g_s \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{sr} & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} & \cdots & a_{sn} \\ a_{rs} & a_{rr} & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} & \cdots & a_{rn} \\ a_{1s} & a_{1r} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2s} & a_{2r} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ks} & a_{kr} & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ns} & a_{nr} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_s \\ f_r \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$\xleftrightarrow{g_{sr}}$ $\xleftrightarrow{A_s}$ $\xleftrightarrow{A_m}$ $\xleftrightarrow{f_{sr}}$
 $\xleftrightarrow{0}$ $\xleftrightarrow{A_m^t}$ $\xleftrightarrow{A_k}$ $\xleftrightarrow{f_{kk}}$

Como se ve de la anterior, se puede cambiar deliberadamente filas y columnas, sin que por ello se altere el resultado del sistema y sin alterar la simetría del mismo. Si

ahora se particiona tal como se indica en (4.61) y se escribe en forma matricial compacta:

$$g_{sr} = A_s \cdot f_{sr} + A_m \cdot f_{kk} \quad (4.62)$$

$$0 = A_m^t \cdot f_{sr} + A_k \cdot f_{kk} \quad (4.63)$$

Despejando “ f_{kk} ” de (4.63) “ $f_{kk} = -A_k^{-1} \cdot A_m^t \cdot f_{sr}$ ” y sustituyendo en (4.62):

$$g_{sr} = (A_s - A_m \cdot A_k^{-1} \cdot A_m^t) \cdot f_{sr} = A_{eq} \cdot f_{sr} \quad (4.64)$$

Resolviendo y expresando en forma expandida:

$$\begin{bmatrix} g_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ss} & A_{sr} \\ A_{rs} & A_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_s \\ f_r \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Resolviendo por determinantes, la respuesta “ f_r ” será:

$$f_r = \frac{\Delta_r}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} A_{ss} & g_s \\ A_{rs} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{ss} & A_{sr} \\ A_{rs} & A_{rr} \end{vmatrix}} = \frac{-g_s \cdot A_{rs}}{A_{ss}A_{rr} - A_{sr}A_{rs}} \quad (4.66)$$

Si de acuerdo con el teorema de reciprocidad se hace el siguiente intercambio, o sea, se pasa la fuente a la rama “ r ” de respuesta y la respuesta se observa en la rama “ s ” de entrada, como se demuestra a continuación, por la simetría de la matriz “ A ”, la respuesta evaluada sigue siendo la misma, es decir “ $f_s = f_r$ ”. El cambio sugerido produce el siguiente cambio en el planteo de las ecuaciones:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \overleftarrow{g_{sr}'} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ g_s \end{array} \right] \\ \overleftarrow{0} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overleftarrow{A_s} \\ \left[\begin{array}{cc} a_{ss} & a_{sr} \\ a_{rs} & a_{rr} \end{array} \right] \\ \overleftarrow{A_m^t} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overleftarrow{A_m} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} & \cdots & a_{sn} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} & \cdots & a_{rn} \\ a_{1s} & a_{1r} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2s} & a_{2r} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ks} & a_{kr} & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ns} & a_{nr} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\ \overleftarrow{A_k} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overrightarrow{f_{sr}'} \\ \left[\begin{array}{c} f_s' \\ f_r' \\ f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_k' \\ \vdots \\ f_n' \end{array} \right] \\ \overrightarrow{f_{kk}'} \end{array} \end{array} = \quad (4.67)$$

En forma matricial compacta:

$$g_{sr}' = A_s \cdot f_{sr}' + A_m \cdot f_{kk}' \quad (4.68)$$

$$0 = A_m^t \cdot f_{sr}' + A_k \cdot f_{kk}' \quad (4.69)$$

Como se observa de (4.67), “ g_{sr}' ”, “ f_{sr}' ” y “ f_{kk}' ”, son los parámetros que cambian en el nuevo sistema. Despejando de (4.68) las incógnitas “ f_{kk}' ” que no interesan para la demostración y sustituyendo en (4.68):

$$g_{sr}' = (A_s - A_m \cdot A_k^{-1} \cdot A_m^t) \cdot f_{sr}' = A_{eq} \cdot f_{sr}' \quad (4.70)$$

Que en forma expandida:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ g_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ss} & A_{sr} \\ A_{rs} & A_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_s \\ f'_r \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Resolviendo por determinantes, la respuesta “ f'_s ” será:

$$f'_s = \frac{\Delta'_s}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_{sr} \\ g_s & A_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{ss} & A_{sr} \\ A_{rs} & A_{rr} \end{vmatrix}} = \frac{-g_s \cdot A_{sr}}{A_{ss}A_{rr} - A_{sr}A_{rs}} \quad (4.72)$$

Como por simetría “ $A_{sr} = A_{rs}$ ”, entonces se cumple el teorema de reciprocidad, ya que “ $f'_s = f'_r$ ”.

Ejercicio 4.1 (de apoyo a teoría)

Suponga el circuito de la figura 4.19, resuelto por el método de mallas, nótese que en este circuito existe una única fuente en la malla “s”, llamada malla de entrada (o de fuente, o de excitación), el resto del circuito está constituido por elementos pasivos. En el mismo circuito considere también, en particular, cualquier malla que contenga una rama cuya corriente resulte de interés para el problema. Dicha malla designada con la letra “r” se denomina malla de salida, o de observación de la respuesta (o sea de la corriente de la rama de interés) y aunque no es necesario, para reforzar la idea de rama de observación, se ha intercalado un galvanómetro.

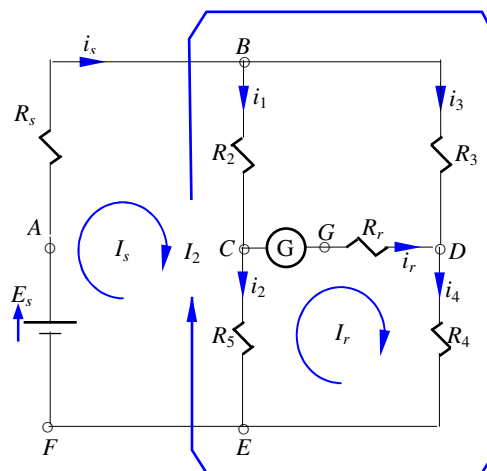


Figura 4.19

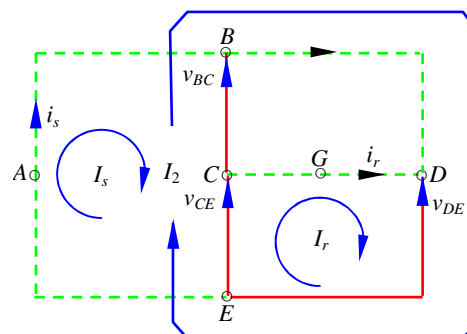


Figura 4.20

Como se muestra en el grafo de la figura 4.20, de acuerdo con lo estudiado en el capítulo 3, al ser el método de resolución el de mallas, tanto la rama de la fuente, perteneciente a la malla de entrada, como la del galvanómetro, perteneciente a la malla de salida, deberán ser ramas de enlace. Se recuerda que ramas de enlace son aquellas que completan el circuito original después de haberse definido el árbol del circuito.

En el circuito se han indicado en línea llena y de trazo, las ramas del árbol y de enlace respectivamente, convenientemente seleccionadas para el problema propuesto. Escribiendo las ecuaciones de malla:

$$E_s - I_s \cdot R_s - (I_s - I_2) \cdot R_2 - (I_s - I_2 - I_r) \cdot R_2 = 0 \quad (4.73)$$

$$0 - (I_2 - I_s) \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 - (I_2 + I_r) \cdot R_4 - (I_2 + I_r - I_s) \cdot R_5 = 0 \quad (4.74)$$

$$0 - I_r \cdot R_r - (I_r + I_2) \cdot R_4 - (I_r + I_2 - I_s) \cdot R_5 = 0 \quad (4.75)$$

Ordenando incógnitas y escribiendo matricialmente se tiene:

$$\begin{bmatrix} E_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_s + R_2 + R_5) & -(R_2 + R_5) & -R_5 \\ -(R_2 + R_5) & (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) & (R_4 + R_5) \\ -R_5 & (R_4 + R_5) & (R_r + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ I_2 \\ I_r \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Asumiendo para la (4.76) notación generalizada se tiene que:

$$R_{11} = R_s + R_2 + R_5$$

$$R_{12} = -(R_2 + R_5)$$

$$R_{13} = -R_5$$

$$R_{21} = -(R_2 + R_5) = R_{12}$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \quad (4.77)$$

$$R_{23} = (R_4 + R_5) = R_{23}$$

$$R_{31} = -R_5 = R_{31}$$

$$R_{32} = (R_4 + R_5) = R_{32}$$

$$R_{33} = R_r + R_4 + R_5$$

De acuerdo con el método de resolución por determinantes, la corriente que se establece en la malla “r” vendrá determinada por:

$$I_r = \frac{\Delta_r}{\Delta} = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta} \cdot E_s = \frac{R_{21} \cdot R_{32} - R_{31} \cdot R_{22}}{\Delta} \cdot E_s \quad (4.78)$$

Si ahora se coloca la fuente “ E_s ” intercalada entre “CG”, en serie con la rama de salida “r”, cuya resistencia “ R_r ” no es alterada, habida cuenta que la fuente es ideal de tensión y entre “AE” se deja un corto de manera de que tampoco se altere la resistencia de la rama de entrada “ R_s ”, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_s + R_2 + R_5) & -(R_2 + R_5) & -R_5 \\ -(R_2 + R_5) & (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) & (R_4 + R_5) \\ -R_5 & (R_4 + R_5) & (R_r + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ I_2 \\ I_r \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

De acuerdo con el teorema de reciprocidad, por la rama “s”, deberá circular ahora la misma corriente que circulaba por la rama “r”, cuando la fuente estaba en su posición original. Esto puede comprobarse resolviendo la ecuación matricial (4.79) y como se observa en (4.80), el resultado puede preverse, como ya fue dicho, por la simetría del sistema:

$$I_s = \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta} \cdot E_r = \frac{R_{12} \cdot R_{23} - R_{22} \cdot R_{13}}{\Delta} \cdot E_r \quad (4.80)$$

Al ser la matriz representativa del circuito simétrica, como fue dicho, implica afirmar que:

$$\Delta_{rs} = \Delta_{sr} \quad (4.81)$$

Se concluye que la respuesta es independiente del lugar donde se sitúe la fuente. Cabe aclarar que las corrientes en las restantes mallas sí cambian con la ubicación de la fuente. A una conclusión similar se podría arribar, pero referida al intercambio entre la única fuente de corriente, como excitación y la tensión “ v_r ” en la rama de respuesta.

Ejercicio 4.2 (de apoyo a teoría)

Suponga el mismo circuito anterior, pero como se muestra en figura 4.21, preparado ahora para ser resuelto por el método sistemático de nodos. Como puede verse la única fuente esta en paralelo con la rama “s” de entrada. El resto del circuito está constituido por elementos pasivos y contiene la rama de respuesta “r”, de la que interesa ahora conocer su tensión “ $v_r = v_{CD}$ ”.

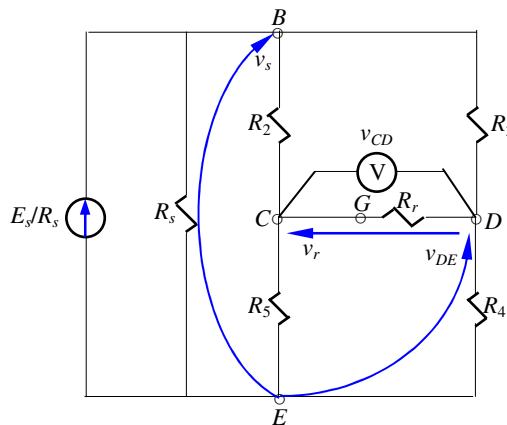


Figura 4.21

Como se muestra en el grafo de la figura 4.22, al ser ahora el método de resolución el de nodos, tanto la rama de la fuente perteneciente a la malla de entrada, como la del voltímetro, perteneciente a la malla de salida, deberán ser ramas de árbol.

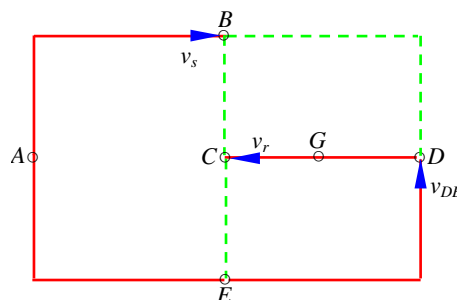


Figura 4.22

Escribiendo, como fue propuesto, las ecuaciones correspondientes al método sistemático de nodos.

$$\begin{bmatrix} \frac{E_s}{R_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_r} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_r} & \left(\frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \\ V_D \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Donde “ $I_s = E_s / R_s$ ” puede ser una FC (4.83)

$$G_{11} = 1 / R_s + 1 / R_2 + 1 / R_3$$

$$G_{12} = -1 / R_2$$

$$G_{13} = -1 / R_3$$

$$G_{21} = -1 / R_2 = G_{12}$$

$$G_{22} = 1 / R_r + 1 / R_2 + 1 / R_5$$

$$G_{23} = -1 / R_r$$

(4.84)

$$G_{31} = -1 / R_3 = G_{13}$$

$$G_{32} = -1 / R_r = G_{23}$$

$$G_{33} = 1 / R_r + 1 / R_3 + 1 / R_4$$

Por la simetría de la matriz obtenida se puede prever que los resultados serán tal como se esperaba.

$$V_D = \frac{\Delta_D}{\Delta} = \frac{\Delta_{D_s}}{\Delta} \cdot I_s = \frac{G_{21} \cdot G_{32} - G_{31} \cdot G_{22}}{\Delta} \cdot I_s \quad (4.85)$$

$$\text{Y como } \Delta_{D_s} = \Delta_{sD} \quad (4.86)$$

Con lo que se demuestra la reciprocidad.

8. TEOREMA DE MAXIMA TRANSFERENCIA DE ENERGIA

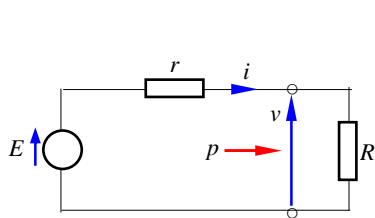


Figura 4.48

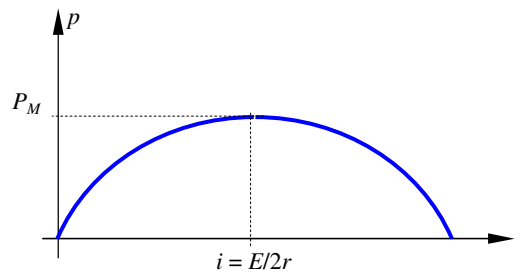


Figura 4.49

Sea un circuito como el mostrado en figura 4.48, cuya resistencia de carga “ R ” es ajustable en un rango de “0 a ∞ ”. Evidentemente que para “ $i = 0$ ”, la potencia transferida a la carga “ $p = v \cdot i$ ”, será cero. Cuando “ $v = 0$ ”, “ $i = E/r$ ” también “ $p = 0$ ”.

Como

$$p = v \cdot i \quad (4.216)$$

ahora como $v = E - r i$ reemplazando en (4.216) (4.217)

$$p = E i - r i^2 \quad (4.218)$$

Como se ve la función “ $p = f(i)$ ”, es cuadrática con la corriente y por lo tanto tendrá un máximo para la derivada de “ p ” respecto de “ i ” igualada a cero.

$$\frac{dp}{di} = E - 2ri = 0 \quad (4.219)$$

Que se da para $i = \frac{E}{2r}$, es decir para $R = r$ (4.220)

La máxima transferencia de potencia de la fuente a la carga se da cuando la resistencia de carga es del mismo valor que la de la fuente que la alimenta o que la del equivalente de Thevenin del circuito que la alimenta.

Un caso típico de este teorema se da por ejemplo en un amplificador. Este equipo con relación a los parlantes se comporta como un generador de tensión real o sea, con una resistencia interna que para el caso de alterna se conoce como impedancia. De acuerdo al teorema de máxima transferencia, si la impedancia que tienen los parlantes es del mismo valor, resultará entonces el mejor aprovechamiento del amplificador.

PROBLEMAS PROPUESTOS
CAPITULO 4
TEOREMAS, TECNICAS Y EQUIVALENCIAS DE CIRCUITOS

OBJETIVO PRINCIPAL

Aplicación para el análisis de circuitos, de teoremas, técnicas y equivalencias de circuitos. Función de red, de transferencia y de excitación.

Problema 4.1

Para el puente de Wheastone del problema 2.10 - figura P4.1 siguiente, encuentre la sensibilidad a la desviación de tensión por la aplicación del equivalente de Thevenin visto por el voltímetro digital entre los nodos "A" y "B".

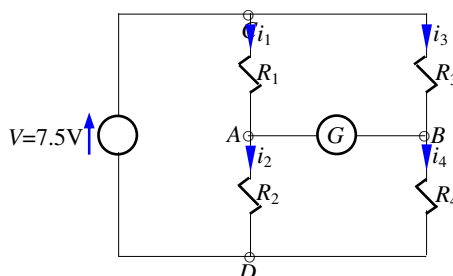


Figura P4.1

Suponga ahora para el equilibrio previo una relación " $R_1 / R_2 \cong 10$ ". Se asume que esta relación fue obtenida a partir del equilibrio con máxima sensibilidad con " R_2 " ajustado en " 129.2Ω ", tal como se obtuvo en el paso 2 del mencionado problema. Haciendo " $R_3 = 1000 \Omega$ " y ajustando el equilibrio mediante la manipulación de " R_1 " que de antemano se sabe será para " $R_1 = 1000 \Omega$ ". En estas condiciones trazar la curva que representa la desviación de tensión " V_{AB} " para una variación de " R_2 ", hecha sobre el equivalente de Thevenin del circuito visto por el voltímetro, según se indica en la tabla siguiente:

$\Delta R_2 / R_2$ (%)	R_2 (Ω)	R_{TH} (Ω)	E_{TH} (mV)	V_{AB} (mV)
-80	25.84			
-60	51.68			
-40	77.52			
-30	90.44			
-25	96.90			

-20	103.36
-15	109.82
-10	116.28
-5	122.74
0	129.20
5	135.66
10	142.12
15	148.58
20	155.04
25	161.5
30	167.96
40	180.88
60	206.72
80	232.56

Problema 4.2

Determinar a través de la aplicación del teorema de superposición la potencia que suministra la fuente de tensión.

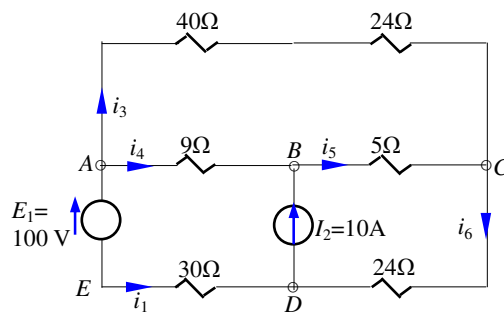


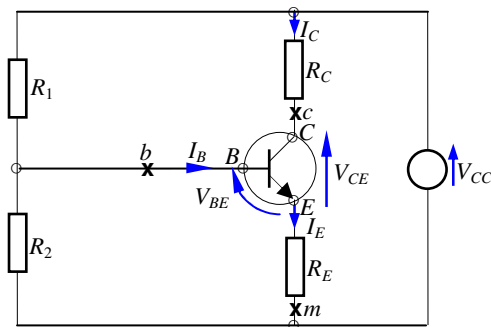
Figura P4.2

Problema 4.3

En el circuito de la figura anterior determinar el equivalente de Norton visto por la fuente de corriente, calcule la diferencia de potencial en bornes de dicha fuente y la potencia que suministra cuando se conecta al equivalente encontrado.

Problema 4.4

La polarización de un transistor suele hacerse mediante el uso de divisores de tensión en la forma indicada en la figura P4.3. Se desea encontrar los Thevenin equivalentes vistos desde el transistor hacia el circuito externo, entre los nodos “b-m” y “c-m”, correspondientes a la entrada y salida del transistor.



Considerar los siguientes datos:

- $V_{CC} = 10 \text{ V}$
- $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$
- $R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega$
- $R_C = 3.6 \text{ k}\Omega,$
- $R_E = 1 \text{ k}\Omega,$
- $V_{BE} = 0.7 \text{ V}$

Figura P4.3

En ambos casos, reemplazar el circuito externo por los Thevenin equivalentes. En el circuito original, encontrar la corriente “ I ” por el divisor si se desprecia “ I_B ”, cuanto vale “ V_B ”, “ V_E ”, “ I_E ”, “ V_{CE} ”. Trazar las rectas de carga “ $V_{BE} = f(I_B)$ ” y “ $V_{CE} = f(I_C)$ ”.

Problema 4.5

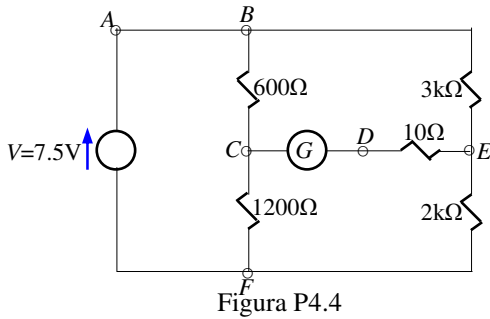


Figura P4.4

1) Por el teorema de reciprocidad demuestre la intercambiabilidad de el galvanómetro conectado entre “C” y “D” y la pila conectada entre “A” y “F”.

2) Indicar cuales son las ramas de excitacion y la de respuesta.

Suponga que el galvanómetro tiene resistencia interna nula.

Problema 4.6

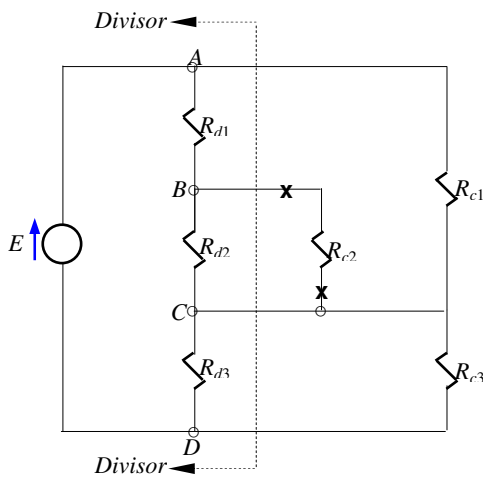


Figura P4.5

En el divisor de tensión de la figura P4.5 cuyos datos se señalan a continuación, encuentre el equivalente Norton visto por la resistencia de carga “ R_{c2} ” conectada a los nodos “B” y “C” de +5 V.

- $R_{c1} = 1800 \Omega$
- $R_{c2} = 1100 \Omega$: representa la carga en +5 V
- $R_{c3} = 1800 \Omega$
- $R_{d1} = 80 \Omega$
- $R_{d2} = 110 \Omega$
- $R_{d3} = 180 \Omega$
- $E = 9 \text{ V}$

Problema 4.7

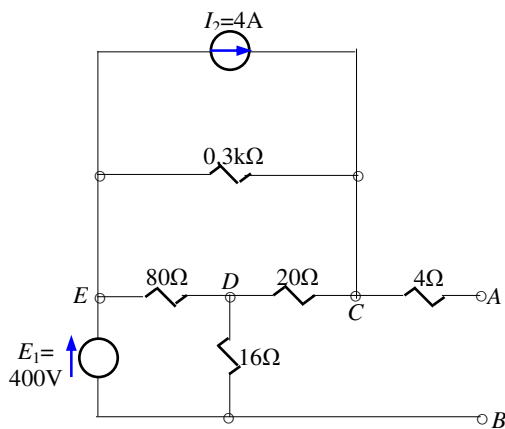
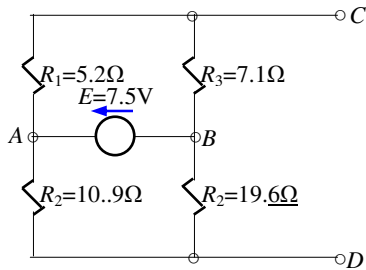


Figura P4.6

Encontrar el equivalente de Thevenin visto desde los nodos “A” y “B” en el circuito de la figura P4.6.

Problema 4.8



Que valor de resistencia habrá que conectar entre “C-D” para tener máxima transferencia de energía. ?

Figura P4.7

Problema 4.9

Equivalente de Norton entre nodos “A-B”.

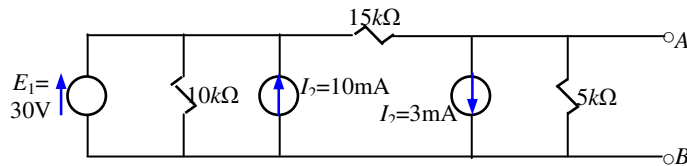


Figura P4.8

Problema 4.10

Encontrar el equivalente de Thevenin visto desde los nodos “A” y “B” en el circuito de la figura P4.9.

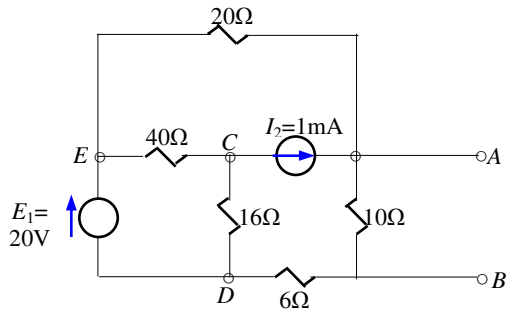


Figura P4.9

Problema 4.11

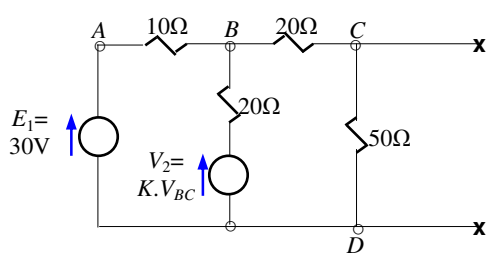


Figura P4.10

Determinar el valor de “K” de manera tal que la tensión del equivalente de Thevenin del circuito visto a la izquierda de las cruces, sea “ $E_{TH}=16V$ ”.

Resolver:

- 1) Aplicando 6.5(2) del capítulo 4.
- 2) Aplicando 6.5(3) del capítulo 4.

Problema 4.12

Aplicando la técnica de circuitos en escalera, encontrar todas las relaciones posibles entre las variables de entrada y/o salida del siguiente circuito.

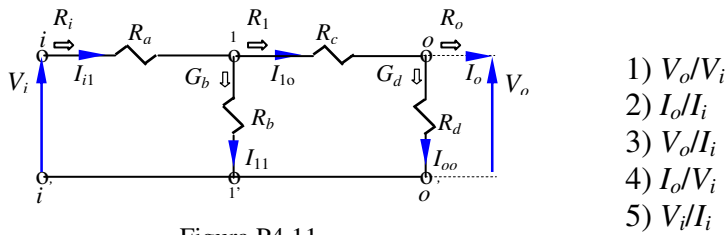


Figura P4.11

Problema 4.13

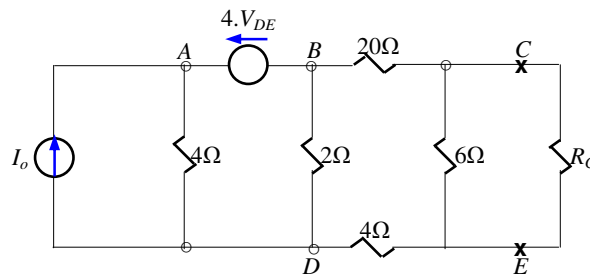


Figura P4.12

- 1) Calcular el valor de “ R_C ” para máxima transferencia de energía y
- 2) El valor de “ I_o ” para que la potencia disipada sea “ $P_{R_C}=54W$ ”.

Resolver:

- 1) Aplicando 6.5(2) del capítulo 4.
- 2) Aplicando 6.5(3) del capítulo 4.

Problema 4.14

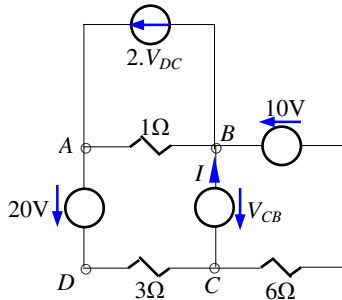


Figura P4.13

Aplicando Thevenin determinar el valor de “ V_{CB} ”, de manera que la corriente “ $I=5A$ ”.

Resolver:

- 1) Aplicando 6.5(2) del capítulo 4.
- 2) Aplicando 6.5(3) del capítulo 4.

Problema 4.15

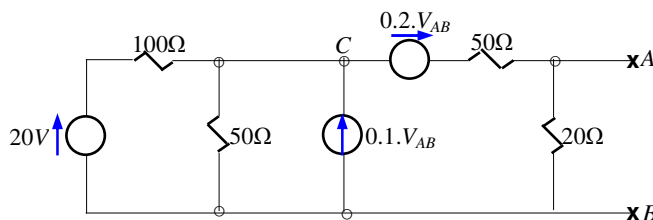


Figura P4.14

Aplicando 6.5(2) y 6.5(3) del capítulo 4, resolver los equivalentes de Thevenin y Norton entre los puntos “A” y “B”.

Problema 4.16

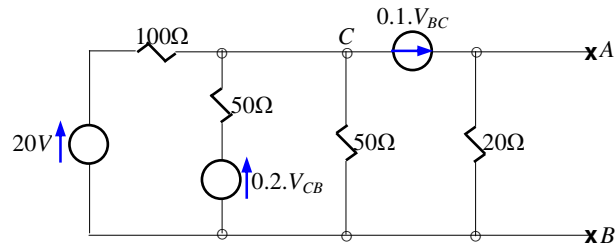


Figura P4.15

Aplicando 6.5(2) y 6.5(3) del capítulo 4, resolver los equivalentes de Thevenin y Norton entre los puntos “A” y “B”.

Problema 4.17

Haciendo uso de la conversión estrella-triángulo, transformar el circuito de la figura P4.16, al de la figura P4.17 y encontrar la función de transferencia de tensión “ $F=V_o/V_i$ ”.

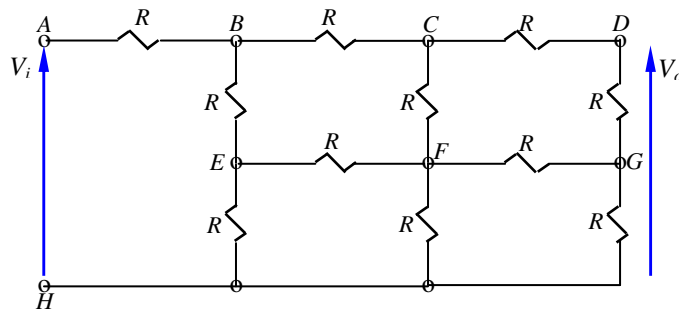


Figura P4.16

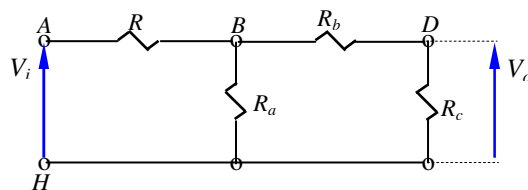


Figura P4.17

Como metodología se sugiere eliminar primero por la conversión estrella-triángulo, las estrellas cuyos centros, son “C”, “E” y “G”. Resultará así una estrella con nodo “F” que al eliminarlo para convertirla en triángulo y efectuando las combinaciones que hagan falta, se deberá arribar al circuito equivalente de la figura P4.17.