

ELECTROTECNIA I

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA LEY DE FARADAY-LENZ

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA LEY DE FARADAY-LENZ

- 1. INTRODUCCION**
 - 2. FLUJO DE INDUCCION MAGNETICA**
 - 3. FLUJO CONCATENADO “ φ ”**
 - 4. BOBINA APRETADA**
 - 5. LEY DE FARADAY-LENZ**
 - 6. FLUJO TOTAL CONCATENADO “ λ ”**
 - 7. INDUCCION**
 - 7.1 Tensión inducida debida a la autoinductancia**
 - 7.2 Tensión inducida debida a la mutuainductancia**
 - 7.3 Fem inducida y caída inductiva**
 - 7.4 Composición de flujos propios y mutuos, acoplamiento magnético**
 - 7.4.1 Acoplamiento no deseado
 - 7.4.2 Acoplamiento fuerte
 - Representación en parámetros circuitales:
 - Signo del flujo mutuo o método del punto:
 - 7.4.3 Coefficiente de acoplamiento
 - 7.4.4 Equivalente simplemente conexo de acoplamientos magnéticos
 - Relación entre “ $v_1(t)$ ” y “ $v_2(t)$ ”
 - Relación entre “ $i_1(t)$ ” e “ $i_2(t)$ ”
 - 7.4.5 Tipos de acoplamientos magnéticos usados como transformadores
 - 7.5 Energía magnética o electrocinética y curva de magnetización**
 - 7.6 Energía y potencia transferida y absorbida por un acoplamiento magnético.**
 - 8. GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA MONOFASICO**
 - Relación entre ángulo geométrico o mecánico y ángulo eléctrico
 - 9. EFECTOS DEBIDOS A “ $B(t)$ ”**
 - 9.1 Corrientes de Foucault**
 - 9.2 Efecto skin**
 - Tabla 5.1 conductor de Cu, aislación PVC 1.1 kV, 50Hz, 80 °C
- PROBLEMAS PROPUESTOS CAPITULO 5**

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA LEY DE FARADAY-LENZ

1. INTRODUCCION

Para una comprensión a fondo del capítulo es importante que el lector tenga bien firme conceptos tales como: campo de inducción magnética " B ", Ley de Biot y Savart, Ley de Ampère, líneas de fuerza, atracción y repulsión entre corrientes, campo de inducción magnética o de densidad de flujo magnético en un solenoide infinito.

2. FLUJO DE INDUCCION MAGNETICA

Desde un punto de vista cualitativo, se entiende por flujo " ϕ " al número de líneas de fuerza que atraviesan una superficie hipotética. Esta superficie puede ser cerrada o abierta. Para superficies cerradas si las líneas son salientes el flujo es positivo y si son entrantes negativo.

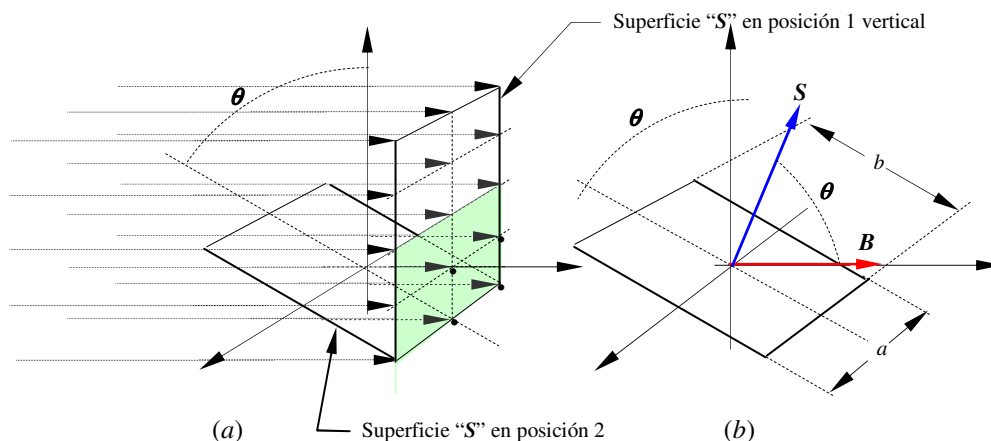


Figura 5.1

El flujo a través de una superficie " S ", figura 5.1 en posición 1 (vertical), para un coeficiente de proporcionalidad unitario, resulta " $\phi = 15 LF$ ". En cambio si la superficie se rebate a la posición 2, como se muestra en la misma figura, el flujo será " $\phi = 9 LF$ ". Esto es obvio ya que como se ve en la figura 5.1(a), al inclinar la superficie algunas líneas de fuerza dejan de atravesarla.

Si al módulo del vector densidad de flujo magnético “ \mathbf{B} ”, se toma como el número de líneas de fuerza por unidad de área de una superficie perpendicular a estas, entonces por definición el flujo en la figura 5.1, para la posición 2 resultará:

$$\phi' = (\text{NLF que atraviesan } S) = |\mathbf{B}| \cdot S' \quad (5.1)$$

Y puede ser obtenido por

$$\phi' = B \cdot ab \cdot \cos \theta = B \cdot S \cdot \cos \theta \quad (5.2)$$

Como en la expresión (5.2) “ $S = ab$ ” es el módulo de “ \mathbf{S} ”, “ B ” el módulo de “ \mathbf{B} ” y “ θ ” el ángulo entre ambos vectores, cuantitativamente el flujo se obtiene como el producto escalar:

$$\phi' = \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (5.3)$$

Con el objeto de generalizar el concepto para campos no uniformes y superficies de forma arbitraria, siempre es posible elegir un “ $d\mathbf{S}$ ” que sea plano y en el cual el campo “ \mathbf{B} ” pueda considerarse uniforme, entonces:

$$d\phi = \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (5.4)$$

El flujo total se obtiene integrando a lo largo y ancho de la superficie en cuestión:

$$\phi = \iint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (5.5)$$

3. FLUJO CONCATENADO “ ϕ ”

Cualitativamente el flujo concatenado (FC) “ ϕ ” por una espira, puede considerarse dado por el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie interior del plano de la espira. Este concepto de flujo vale sea que las líneas de fuerza estén producidas por un agente externo o por su propia corriente.

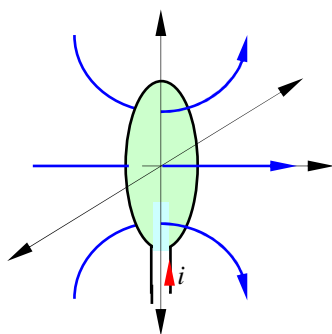


Figura 5.2

Supóngase una espira como la de la figura 5.2, en la que las líneas de fuerza son producidas por la propia corriente que recorre la espira. Simplificando conceptos de acuerdo con lo dicho, el flujo en la espira de la figura será:

$$\phi = 3 LF \quad (5.6)$$

Las líneas de fuerza que atraviesan la superficie interior del plano de la espira son tres y su sentido con relación a la corriente, viene dado por la regla de la mano derecha.

Suponga ahora tres espiras iguales a la de la figura 5.2, recorridas por la misma corriente “ i ” y separadas entre sí por una cierta distancia, tal como se muestra en la

figura 5.3, de manera que sólo las líneas de fuerzas distinguidas con “2” atraviesan las superficies interiores de los planos de las tres espiras.

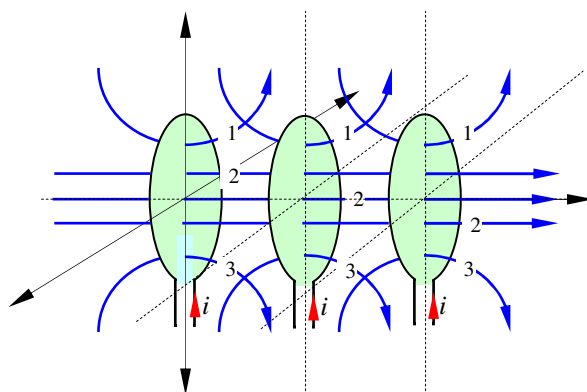


Figura 5.3

Como se ve en la figura 5.3, en las tres espiras, las líneas de fuerza distinguidas con “1” y “3” por su propia curvatura se desvían y sólo concatenan a la propia espira. Como puede ser observado también en la figura 5.3, cada espira ha aumentado su flujo concatenado a 5 LF . Las líneas de fuerzas que conforman este aumento distinguidas con “2”, producidas una por cada espira, concatenan a las tres espiras y se suman a las “1” y “3” propias, para dar las 5 LF que forman el FC. Las líneas de fuerza “1” y “3”, por su curvatura sólo concatenan la espira que las produce y constituyen lo que se conoce como flujo de dispersión.

4. BOBINA APRETADA

La configuración de líneas de fuerza de la figura 5.3, podría haberse logrado interconectando en serie las tres espiras para formar una bobina.

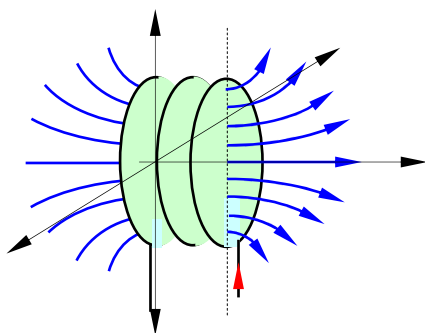


Figura 5.4

Si ahora se disminuye la separación entre las espiras de esta bobina, de manera tal que las tres líneas de fuerza de cada espira concatenen también a las otras dos, el flujo total concatenado por cada espira así logrado, tal como se muestra en la figura 5.4, es máximo y en consecuencia el flujo de dispersión nulo.

Una bobina que cumpla con estas características, en la realidad no existe, su idealización es lo que se conoce como bobina apretada.

En la figura 5.4 se ve que el resultado de apretar las espiras entre sí, es que cada espira no sólo concatene el flujo propio, sino también el producido por las otras espiras que componen la bobina apretada.

5. LEY DE FARADAY-LENZ

En toda espira concatenada por un flujo de inducción magnética “ $\phi(t)$ ” producido por su propia corriente o por algún agente externo, se induce una fuerza electromotriz (fem) “ e ”. En la mayoría de los casos no es posible deducir esta ley a partir de las

fuerzas eléctricas y magnéticas que obran sobre las cargas (electrones que pertenecen al metal de la espira). En cambio se debe asumir tal como la expresó Faraday

$$e_i = -\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.7)$$

Esta fórmula que expresa la ley de Faraday puede tomarse como una ley de la naturaleza y resume el resultado de muchas experiencias. El signo negativo que permite determinar la dirección y sentido de la fem y de la corriente inducida se conoce como ley de Lenz y significa:

“Que la fem inducida y la corriente que impulsa (si la espira esta cerrada), deben tener un sentido tal que se oponga a la causa que las genera.”

A pesar de que la causa enunciada en el desarrollo se refiere a la variación de flujo, esta oposición puede manifestarse de varias maneras.

Esta fem inducida en la espira si no circula corriente (espira abierta), puede medirse con un voltímetro conectado a sus terminales. Sin embargo, es importante tener presente que la espira, a lo largo de toda su longitud, es asiento de dicha fem. Es decir se induce en cada diferencial de alambre de la espira y su integral de trayectoria a lo largo de todo el alambre resulta ser la fem inducida.

6. FLUJO TOTAL CONCATENADO “ λ ”

Si se toma la bobina de la figura 5.4 y si se supone que el flujo concatenado “ ϕ ”, por cada una de sus espiras es una función del tiempo, entonces por ley de Faraday-Lenz, en cada espira, se inducirá una fem “ e_i ” dada por (5.7). Ahora dado que las tres espiras están conectadas en serie formando un dispositivo llamado bobina y como el flujo que las concatena varía para todas las espiras con la misma función del tiempo, dada por su propia corriente, la fem total “ e ” inducida en esta bobina, para el caso será:

$$e = \sum_{i=1}^3 e_i \quad (5.8)$$

Como por ser una bobina apretada las tres espiras (“ N ” para el caso general), concatenan el mismo flujo “ $\phi(t)$ ”, entonces la expresión (5.8) puede ser escrita como:

$$e = N \cdot e_i = -\frac{N \cdot d\phi(t)}{dt} = -\frac{d[N \cdot \phi(t)]}{dt} \quad (5.9)$$

Donde el producto “ $N\phi(t)$ ” es lo que se conoce como flujo total concatenado de la bobina y para el cual se propone la siguiente definición:

“Se llamará flujo total concatenado “ λ ” de un dispositivo, a una entidad fisicomatemática cuya derivada respecto del tiempo, da la fem inducida de origen magnético, en dicho dispositivo.”

Para el caso de la bobina el flujo total concatenado (FTC) está dado por “ $\lambda(t) = N\phi(t)$ ”.

Se ha elegido definir el “FTC” de esta manera, para darle un carácter más amplio a este concepto. Esto se debe a que hay otros dispositivos (no bobinas) que al ser recorridos por corrientes poseen flujo concatenado (FC) “ ϕ ” y flujo total concatenado “ λ ”, cuya derivada de acuerdo con la definición, dará la fem de origen magnético que en ellos se induce. Tal es el caso por ejemplo de un “circuito de alimentación”, constituido por dos conductores rectos muy largos de sección circular que vinculan una fuente con su carga y que en consecuencia se encontrará recorrido por una corriente “ i ”.

Por lo dicho este dispositivo “circuito de alimentación”, poseerá FC “ ϕ ” y FTC “ λ ”. En tal dispositivo ya no se puede decir que el FTC esté dado por “ $\lambda = N\phi$ ”. En este dispositivo el FTC, viene dado por la siguiente expresión matemática:

$$\lambda = 2 \frac{\mu_o l}{2\pi} I \cdot \left(\frac{\mu_r}{4} + \ln \frac{D}{r} \right) \quad [\text{Wb}] \quad (5.10)$$

Donde:

r : radio del conductor,

$\mu_o = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]} = \text{[Wb/(Am}^2\text{)]} = \text{[H/m]} = \text{[(V.s/A.m)]}$ permeabilidad del espacio libre,

μ_r : permeabilidad relativa del conductor,

D : distancia entre ejes de los conductores del circuito.

Como se observa, la expresión del FTC dada por la (5.10), es diferente al de la bobina. Sin embargo su derivada respecto de “ t ”, de acuerdo con la definición dada, dará la fem inducida de origen magnético, en los conductores de ida y vuelta del circuito.

7. INDUCCION

Por lo explicado anteriormente una espira concatenada por un flujo magnético variable con el tiempo “ $\phi(t)$ ”, es asiento de una fem tal que si la espira está cerrada, circulará una corriente que por ley de Lenz, deberá oponerse a dicha variación de flujo. Esta tensión inducida, conocida como fem, no es otra cosa que la aplicación de la ley de Faraday-Lenz. En la realidad hay unos dispositivos eléctricos llamados bobinas o inductores que usan este efecto con distintos fines útiles.

También por lo dicho esta inducción de tensión es inherente a todos los circuitos que se encuentren recorridos por corrientes variables con el tiempo “ $i(t)$ ” y muchas veces juega un papel no deseado para los mismos.

Según la procedencia del flujo que concatenan las espiras se pueden distinguir dos tipos de tensiones inducidas:

- 1) La debida a la autoinductancia, cuando el flujo es producido por la corriente propia de la espira (figura 5.2 y 5.4) y
- 2) La debida a la mutuainductancia, cuando el flujo proviene de la corriente que circula por una espira aledaña según lo muestra la figura 5.7.

7.1 Tensión inducida debida a la autoinductancia

Sea una bobina apretada como la de la figura 5.4, formada por “ N ” espiras. Suponga que esta bobina se encuentra recorrida por una corriente “ i ”, que origina un flujo FC “ ϕ ” que concatena por igual a todas las espiras. Resulta así según se vio, un flujo total concatenado “ $\lambda = N \cdot \phi$ ”. Si la corriente que lo produce es variable con el tiempo “ $i(t)$ ”, se inducirá una tensión denominada fem, dada por la expresión (5.9).

Si ni en el interior de la bobina, ni en la proximidad de ésta, hubiera materiales ferromagnéticos, se cumplirá que “ $\phi(t) \propto B(t) \propto i(t)$ ” y como “ $N = \text{cte}$ ”, entonces \Rightarrow “ $N\phi(t) \propto i(t)$ ” guardan una proporcionalidad lineal. Si existe esta proporcionalidad lineal entre el flujo total concatenado por la bobina y la corriente que le da origen, puede entonces expresarse por la siguiente igualdad:

$$N\phi = L \cdot i \quad (5.11)$$

Esta constante de proporcionalidad, simbolizada con “ L ”, es lo que se conoce como coeficiente de autoinducción, autoinductancia o inductancia propia y al relacionarse con la corriente, constituye el parámetro circuital que representa a una bobina. Como resulta de (5.11) se puede obtener de:

$$L = \frac{N\phi}{i} = \left[\frac{Wb}{A} \right] = \left[\frac{\frac{Wb}{m^2} \cdot m^2}{A} \right] = \left[\frac{T \cdot m^2}{A} \right] \quad (5.12)$$

De acuerdo con lo visto, la ley de Faraday-Lenz en lugar de ser expresada en función de parámetros magnéticos como en (5.9), ahora puede hacerse en función de parámetros circuitales como el introducido con la (5.11), es decir por:

$$e_L = - \frac{d[L \cdot i(t)]}{dt} = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (5.13)$$

En la (5.13) la fem calculada ha sido caracterizada con el subíndice “ L ”, para destacar que es la tensión inducida en la bobina. De esta expresión puede deducirse la unidad “SI” de autoinductancia

$$L = - \frac{e_L}{di/dt} = \left[\frac{\text{voltios} \cdot \text{segundos}}{\text{amperios}} \right] = [\text{Henry}] = [H] \quad (5.14)$$

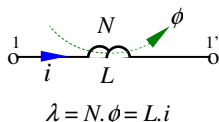


Figura 5.5

La figura 5.5 muestra el símbolo circuital con que se representa una bobina, acompañado del coeficiente de autoinductancia “ L ”. Según (5.11), este coeficiente multiplicado por la corriente “ i ” (también parámetro circuital) permite calcular el FTC “ λ ” de la bobina, en términos de sus parámetros circuitales “ L ” e “ i ”, en lugar de hacerlo en función del parámetro magnético “ ϕ ”. Se aclara que para la representación en circuitos no es necesario señalar ni “ N ”, ni “ ϕ ”.

7.2 Tensión inducida debida a la mutuainductancia

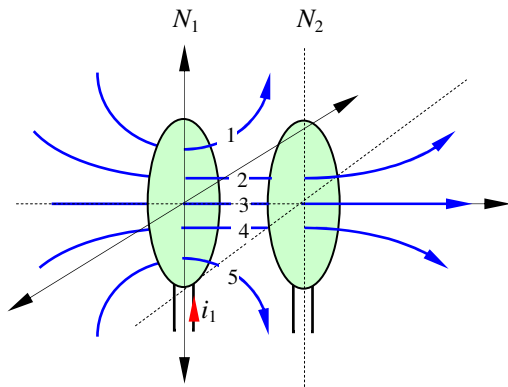


Figura 5.6

La figura 5.6 muestra dos bobinas apretadas 1 y 2 enfrentadas entre sí, de “ N_1 ” y “ N_2 ” número de espiras respectivamente. La bobina 1 se encuentra recorrida por una corriente “ i_1 ” función del tiempo que produce un flujo concatenado propio “ ϕ_{1p} ”, parte del cual “ ϕ_{21} ” conocido como mutuo, es concatenado por las “ N_2 ” espiras de la bobina 2. El primer subíndice indica el circuito que concatena el flujo y el segundo el circuito que lo produce. La “ p ” significa propio o debido a la propia corriente.

De acuerdo con lo visto, si en el entorno del sistema de las dos bobinas, no hay materiales ferromagnéticos involucrados y si la disposición física de ambas bobinas es fija, habrá un coeficiente de proporcionalidad “ M_{21} ” entre la fracción de flujo mutuo “ ϕ_{21} ” concatenado por las “ N_2 ” espiras de la bobina 2 y la corriente “ i_1 ” de la bobina 1 que le da origen. Esta proporcionalidad puede ser expresada como:

$$N_2 \phi_{21} = M_{21} \cdot i_1 \tag{5.15}$$

De donde se obtiene:
$$M_{21} = \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1} \tag{5.16}$$

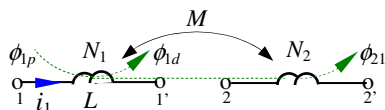
La (5.16) es lo que se denomina coeficiente de mutuainducción o mutuainductancia o inductancia mutua.

Del mismo modo, una corriente “ i_2 ” que recorra la bobina 2, producirá un flujo propio “ ϕ_{2p} ”, parte del cual “ ϕ_{12} ” será el concatenado mutuo por las “ N_1 ” espiras de la bobina 1 y da origen a través de un coeficiente de mutuainductancia “ M_{12} ”, a un flujo total concatenado mutuo dado por:

$$N_1 \phi_{12} = M_{12} \cdot i_2 \quad \text{de donde} \quad M_{12} = \frac{N_1 \phi_{12}}{i_2} \tag{5.17}$$

Aunque no resulte fácil de comprender por observación directa:

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{5.18}$$



$$\lambda_{21} = N_2 \cdot \phi_{21} = M \cdot i_1$$

Figura 5.7

La forma de simbolizar circuitalmente un acoplamiento magnético, es como se indica en la figura 5.7, mediante una línea en arco que señala las bobinas acopladas, caracterizada con la letra “ M ” y las inductancias propias “ L_1 ” y “ L_2 ” de cada bobina. Se aclara también que para la representación circuital, no es necesario mostrar en el dibujo “ N_1 ”, “ N_2 ”, ni los distintos “ ϕ ” mostrados.

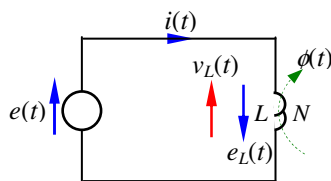
7.3 Fem inducida y caída inductiva

Se vio que cuando una bobina es concatenada por un flujo " $\phi(t)$ ", es asiento de una tensión inducida llamada fem, si el " $\phi(t)$ " es producido por su propia corriente, la fem se calcula con la (5.13) y puede también denominarse fuerza contra electromotriz (fcem) habida cuenta que por ley de Lenz, se opone a la causa que la genera.

Dado que la bobina es un elemento pasivo de circuito no es capaz de generar energía, en tal sentido parecería más aceptable considerar la tensión que en ella se induce, cuando es recorrida por una corriente " $i(t)$ ", como una fcem en lugar de considerarla como fem. Por ser la bobina un elemento pasivo, más bien se propone llamar a esta tensión inducida, como caída inductiva. Esto se hace por semejanza a la caída resistiva que se produce en terminales de una resistencia cuando es recorrida por una corriente.

Por lo hasta aquí estudiado tanto " R " como " L " cuando son recorridas por corriente, absorben energía. La diferencia radica en que mientras que la resistencia transforma la energía eléctrica que absorbe en calor y se pierde del sistema, la bobina la almacena en su campo magnético y la conserva intacta, para devolverla en forma de energía eléctrica cuando se da la condición para ese efecto. Obviamente esta energía es devuelta al circuito y deberá ser absorbida por los elementos que eventualmente lo conformen. En tal sentido a la tensión que se induce en la bobina debida a " $\phi(t)$ ", puede considerarse según convenga: 1) como fem inducida o 2) como caída inductiva, cuya comprensión requiere de la consideración simultánea de dos aspectos:

- 1) El primero de fondo, se debe cumplir la segunda ley de Kirchhoff y
- 2) El segundo de forma, corresponde a la convención adoptada para escribir la ecuación de trayectoria que representa la aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.



$$\lambda(t) = N \cdot \phi(t) = L \cdot i(t)$$

Figura 5.8

Para abordar dichos aspectos, considérese el circuito de la figura 5.8 formado por una fuente de tensión " $e(t)$ " conectada formando un circuito cerrado con una bobina de inductancia " L ". En tal sentido por la bobina circulara una corriente " $i(t)$ " que será también una función del tiempo y en consecuencia, su flujo " $\phi(t)$ " y " $\lambda(t)$ " originará una fem " $e_L(t)$ " que como ha sido dicho debe verificar la segunda ley de Kirchhoff.

$$e(t) + e_L(t) = 0 \quad (5.19)$$

La fem " $e_L(t)$ " inducida en la bobina consecuencia de " $\lambda(t)$ ", si se calcula de acuerdo con (5.13), para que a su vez la expresión (5.19) esté de acuerdo con la formalidad adoptada para escribir ecuaciones de trayectoria, la indicación de la fem " $e_L(t)$ " en el dibujo, deberá hacerse con una flecha que apunte a favor de la corriente.

Si ahora en la (5.19) se pasa " $e_L(t)$ " al miembro de las "caídas de tensión" (llamando así arbitrariamente al término de la derecha), se tendrá que la caída en la bobina designada con " $v_L(t)$ " será igual y de signo contrario al de la fem, es decir:

$$e(t) = -e_L(t) = v_L(t) \quad \text{de donde} \quad v_L(t) = L(di/dt) \quad (5.20)$$

Como es lógico esta caída inductiva “ $v_L(t)$ ” deberá ser indicada con una flecha contraria a la que indica “ $e_L(t)$ ” ver figura (5.8), es decir contraria a la corriente. Por la convención adoptada, queda así con el mismo sentido relativo a la corriente, con que se indica la caída de tensión en una resistencia y consecuentemente se podrá usar la misma aplicación formal al escribir ecuaciones de trayectoria.

Se aclara que aunque en la explicación anterior se usó la letra “ e ”, para indicar fem y la “ v ”, para indicar caída de potencial, no necesariamente siempre será de este modo. En algunos casos según convenga, como por ejemplo cuando se desarrolle el transformador, puede usarse la misma letra para indicar en un arrollamiento caída y en el otro fem o viceversa, por lo que se recomienda prestar mucha atención.

En resumen: cuando una bobina de inductancia “ L ” es recorrida por una corriente “ $i(t)$ ”, es asiento de una tensión inducida que de acuerdo a la convención propuesta, puede ser considerada: 1) como fem inducida, en cuyo caso se dibuja a favor de la corriente y se calcula con (5.13) o 2) como caída inductiva, se dibuja en sentido contrario a la corriente y se calcula con (5.13) cambiada de signo.

7.4 Composición de flujos propios y mutuos, acoplamiento magnético

7.4.1 Acoplamiento no deseado

La inducción es inherente a todos los circuitos eléctricos recorridos por corrientes variables con el tiempo, cualquiera sea su configuración física. Cuando por algún motivo dos circuitos sin interconexión galvánica se encuentran próximos uno de otro, como los mostrados en figura 5.9, se da origen a acoplamientos magnéticos que si no son expresamente buscados producirán, de acuerdo con lo visto, caídas inductivas no deseadas. Estos acoplamientos entre circuitos son una consecuencia de lo que fue visto como coeficiente de mutuainductancia o inductancia mutua.

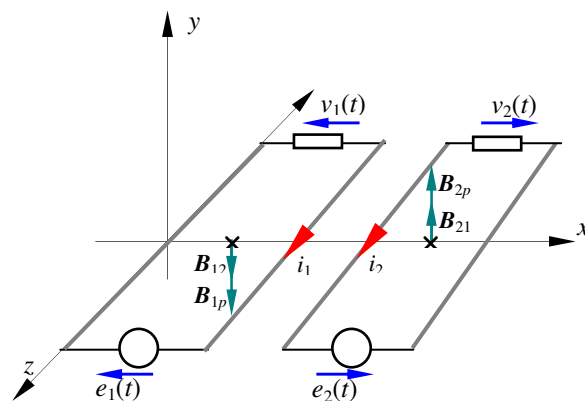


Figura 5.9

Notas aclaratorias:

- 1) En adelante las letras que en dibujo o en texto aparezcan como las “ B ” de figura 5.9 (tipo Times New Roman, inclinación itálica y negritas), indicarán magnitudes vectoriales, equivalentes a “ \vec{B} ” o fasoriales dependiendo de lo que trate.
- 2) El primer subíndice indica cual es el circuito que concatena el flujo y el segundo el que lo produce.

Sean los circuitos de la figura 5.8, próximos uno del otro, por cercanía el circuito 1 por ejemplo, además de tener su propio flujo total concatenado " $\lambda_{1p}(\mathbf{B}_{1p})$ " producido por su propia corriente " i_1 ", concatenará otro flujo " $\lambda_{12}(\mathbf{B}_{12})$ ", producido por la corriente " i_2 " que fluye por el circuito 2. Si los dos circuitos están sumergidos en aire habrá, entre " λ " e " i ", una proporcionalidad lineal dada por:

Para el flujo propio según se vió

$$\lambda_{1p} = L_{1p} \cdot i_1 \quad (L_{1p}: \text{autoinductancia}) \text{ y para el flujo mutuo} \quad (5.21)$$

$$\lambda_{12} = L_{12} \cdot i_2 \quad (L_{12}: \text{mutuainductancia}) \quad (5.22)$$

Lo mismo puede decirse para el circuito 2. El flujo total concatenado por cada circuito será:

$$\lambda_1 = \lambda_{1p} + \lambda_{12} \quad \text{para el circuito 1} \quad (5.23)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{2p} + \lambda_{21} \quad \text{para el circuito 2} \quad (5.24)$$

De acuerdo con lo visto, de las anteriores se pueden obtener las caídas inductivas de los correspondientes circuitos:

$$\Delta v_1(t) = e_1(t) - v_1(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} \quad (5.25)$$

$$\Delta v_2(t) = e_2(t) - v_2(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt} \quad (5.26)$$

7.4.2 Acoplamiento fuerte

En general las máquinas eléctricas operan con bobinas que se encuentran fuertemente acopladas. Los acoplamientos se deben a flujos producidos por bobinas inductoras, cuyo objeto es que sean íntegramente concatenados por bobinas de inducido. La consecuencia de dicho acoplamiento sobre las bobinas de inducido será: 1) la generación de una fem en caso de un generador o 2) la aparición de una cupla motora en caso de un motor. Cualquiera sea el objeto, es necesario que entre estas bobinas haya acoplamiento fuerte (perfecto si fuera posible), es decir sería deseable que no haya flujo de dispersión.

El acoplamiento perfecto no es posible, sin embargo éste puede aproximarse mucho mediante el uso de núcleos ferromagnéticos que tienen por un lado, dos características sobresalientes y por otro lado, como siempre sucede en la realidad, dos negativas. Sin embargo, lo malo de estas últimas es muy inferior a las bondades de las primeras. Estas características son:

- 1) Para las sobresalientes:
 - a) Enorme poder multiplicador del flujo (se reduce enormemente la reluctancia) y
 - b) Posee la particularidad de confinar el flujo al núcleo. Así el núcleo constituye un verdadero camino (o circuito) para el flujo magnético y reduce la dispersión a pequeños porcentajes del flujo propio.
- 2) Características negativas:
 - a) Introduce pérdidas de Foucault e histéresis (relativamente pequeñas) y
 - b) Introduce alinealidad debido al comportamiento alineal de los materiales ferromagnéticos. Con cierto cuidado, puede ser prácticamente despreciada.

Además de las máquinas mencionadas, generadores y motores, un caso típico de necesidad de acoplamiento fuerte entre bobinas, lo constituye el transformador que también es una máquina eléctrica y que será abordado en detalle en el capítulo 11. Para explicar el tema se recurre al caso de un acoplamiento genérico representado por un dibujo didáctico figura 5.10. Este dibujo que contempla la realidad, tiene ciertos aspectos, a los que se les ha dado cierta forma no real para facilitar su entendimiento.

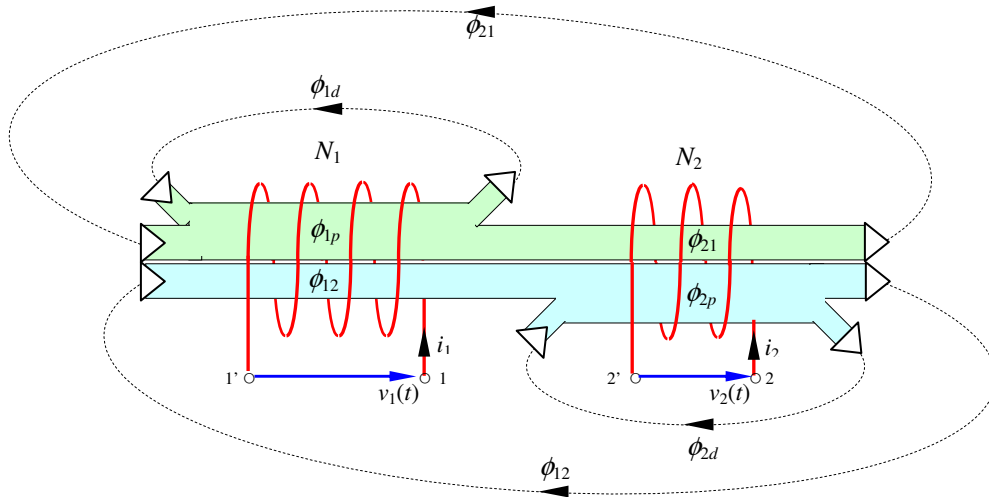


Figura 5.10

Con relación al acoplamiento de la figura 5.10, los aspectos que adoptan una forma didáctica de la realidad son:

- 1) Que el flujo se muestra con franjas cuyo espesor representa de alguna manera la cantidad de líneas de fuerza, de campo de inducción uniforme que lo compone.
- 2) Los flujos producidos y concatenados propios de cada bobina, en lugar de estar dibujados distribuidos en todo el núcleo como sería en la realidad, han sido dibujados, el " ϕ_{1p} " debido a la corriente " i_1 ", ocupando la mitad superior del núcleo y el " ϕ_{2p} " debido a la corriente " i_2 ", la mitad inferior.
- 3) Los flujos de dispersión " ϕ_{1d} " y " ϕ_{2d} " se muestran concentrados en sendas franjas de líneas de fuerza de campo de inducción uniforme que se curvan y no llegan a concatenar a la bobina aledaña.

En la realidad los flujos descritos, se encuentran mezclados y no uniformemente distribuidos en el interior de sendas bobinas. Si se quisiera representar la realidad sería muy difícil distinguir estos flujos, unos de otros. Con relación a la nomenclatura se recuerda que el primer subíndice numérico, indica la bobina que concatena el flujo y el segundo subíndice numérico, quién lo produce. Cuando el segundo subíndice es una " p " significa que el flujo es propio, es decir producido por la propia corriente y si es una " d " señala el flujo de dispersión de la bobina cuyo subíndice numérico acompaña.

Por observación de la figura se puede ver que los flujos concatenados propios en función de las partes que los componen son:

$$\phi_{1p} = \phi_{1d} + \phi_{21} \quad (5.27)$$

$$\phi_{2p} = \phi_{2d} + \phi_{12} \quad (5.28)$$

El flujo concatenado total (FCT) de cada bobina será:

$$\phi_1 = \phi_{1p} + \phi_{12} \quad (5.29)$$

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{2p} \quad (5.30)$$

Para el caso de las dos bobinas, los flujos totales concatenados totales (FTCT) serán entonces:

$$\lambda_1 = N_1 \phi_1 = N_1 \phi_{1p} + N_1 \phi_{12} \quad (5.31)$$

$$\lambda_2 = N_2 \phi_2 = N_2 \phi_{21} + N_2 \phi_{2p} \quad (5.32)$$

Las expresiones anteriores dan los FTCT en función de los FTC propios y mutuos. Si los FC propios se reemplazan por el de las expresiones (5.27) y (5.28), quedan los FTCT expresados en función del flujo de dispersión y del flujo resultante de los FC mutuos. Estos FC mutuos tienen la importante particularidad de estar íntegramente confinados al acoplamiento, es decir si sólo existiera este FC mutuo, constituiría lo que se espera en términos ideales de un acoplamiento perfecto, es decir que estén exentos de dispersión, queda así:

$$\lambda_1 = N_1 \phi_{1d} + N_1 (\phi_{21} + \phi_{12}) = N_1 \phi_{1d} + N_1 (\phi) \quad (5.33)$$

$$\lambda_2 = N_2 \phi_{2d} + N_2 (\phi_{12} + \phi_{21}) = N_2 \phi_{2d} + N_2 (\phi) \quad (5.34)$$

Los acoplamientos magnéticos de las expresiones (5.31/32) y (5.33/34), tienen dos aplicaciones preferenciales que son:

- 1) La (5.31/32) en electrónica: para analizar acoplamiento de etapas de equipos electrónicos y
- 2) La (5.33/34) en sistemas de potencia, para analizar máquinas eléctricas y distintos aspectos del funcionamiento de los circuitos donde estas intervengan.

En tal sentido lo que se espera de un acoplamiento depende esencialmente de su aplicación:

- Para el caso de Sistemas de Potencia, interesa la eficiencia con que será transmitida la potencia a través del acoplamiento. Como esta eficiencia para el caso en estudio es función de la dispersión, resulta de gran importancia ponerla de manifiesto, con el objeto de hacer lo posible para minimizarla.
- Para el caso de acoplamientos entre etapas de equipos electrónicos, lo que interesa es la fidelidad con que se transfiera la señal que se procesa. En tal caso importa más la linealidad que tenga el acoplamiento que la eficiencia energética del mismo (por lo general se manejan bajos niveles de potencia). La dispersión pasa a ocupar así un lugar secundario, incluso si para mejorar la linealidad, fuera necesario el uso de entrehierros que aumentan la dispersión, serían aceptados sin objeción.

De acuerdo con la utilización final del acoplamiento resultará el modelo a elegir para su análisis y dependerá de la consideración que se haga de los FTCT. Como ya fue dicho, hay dos formas de tratar los acoplamientos magnéticos: 1) cuando van a ser aplicados a análisis de Sistemas de Potencia, donde se pone expresamente de manifiesto la dispersión magnética y 2) para aplicar en Electrónica, en tal caso se deja

de lado la dispersión magnética, para acentuar el interés más en la linealidad del dispositivo.

Sea cual fuere el tratamiento que se de al FTCT para el análisis de un acoplamiento, los resultados serán exactamente los mismos.

Representación en parámetros circuitales:

Como en electrotecnia se opera con teoría de circuitos, entonces las expresiones (5.31/32/33/34), expresadas en términos de parámetros magnéticos, conviene que sean expresadas según (5.11) y (5.15) en términos de parámetros circuitales, con lo que se obtienen:

Para uso preferente en electrónica, las (5.31/32) quedan:

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (5.35)$$

$$\lambda_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad (5.36)$$

Para uso preferente en SP, las (5.33/34) quedan en forma mixta según se indica:

$$\lambda_1 = L_{1d} i_1 + N_1 (\phi) \quad (5.37)$$

$$\lambda_2 = L_{2d} i_2 + N_2 (\phi) \quad (5.38)$$

De acuerdo con la (5.20) las caídas inductivas en cada bobina, según la consideración que se haga de los FTCT, será:

1) Para el modelo electrónico

$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (5.39)$$

$$v_2(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (5.40)$$

2) Para el modelo de SP

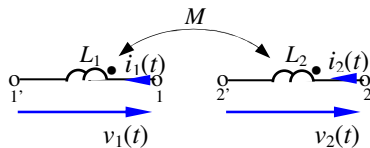
$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = L_{1d} \frac{di_1(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.41)$$

$$v_2(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = L_{2d} \frac{di_2(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (5.42)$$

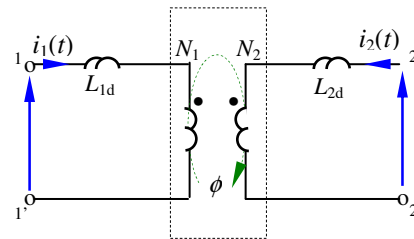
Las anteriores permiten modelar el sistema de acuerdo con las configuraciones circuitales de parámetros concentrados de las figuras 5.11 y 12, a partir de las cuales se deberán poder escribir las ecuaciones que modelan el funcionamiento del acoplamiento en cuestión. Sin embargo queda un problema y es que la dirección del flujo mutuo depende de los terminales por donde entren las corrientes a las bobinas. Como puede inferirse por observación de la figura 5.10, si se invierte el terminal de entrada de cualquiera de las corrientes, por la regla de la mano derecha, se invertirá el flujo que esta origina y los FTC mutuos de las expresiones (5.35/36) y la del flujo resultante “ ϕ ” de las (5.37/38), también cambiarán de signo.

Signo del flujo mutuo o método del punto:

Para considerar el aspecto antes descrito se adopta el método del punto que consiste como se indica en la figura 5.11, en marcar con un punto los terminales de las bobinas, por donde deberán entrar o salir ambas corrientes si se quiere que los flujos mutuos adopten el mismo signo del flujo propio y signo contrario al flujo propio, si una corriente entra por el punto y la otra opuesta al punto.



Modelo para Electrónica
Figura 5.11



Acoplamiento ideal
Modelo para Sistemas de Potencia
Figura 5.12

En el caso del modelo de la figura 5.12, ambas corrientes entran por el punto con lo que el signo del flujo resultante “ $\phi = \phi_{21} + \phi_{12}$ ” o “ $\phi = \phi_{12} + \phi_{21}$ ”, resultara el mismo. Pero si fuera el caso que la corriente “ $i_1(t)$ ” entra por el punto e “ $i_2(t)$ ” sale por este, entonces el signo del flujo resultante será para la bobina 1 “ $\phi = \phi_{21} - \phi_{12}$ ” y para la bobina 2 “ $-\phi = \phi_{12} - \phi_{21}$ ”, es decir cuando sale por el punto es positivo y negativo cuando entra por este.

7.4.3 Coeficiente de acoplamiento

Ya se dijo que la inductancia mutua “ M ”, de acuerdo con lo que se espera de un par de circuitos o bobinas, puede ser un fenómeno deseado o no. Por ejemplo la reactancia de un tubo fluorescente es una bobina que en régimen permanente, interesa produzca una caída de potencial o sea que importa su comportamiento como auto inductancia, por lo que cualquier acoplamiento magnético de ésta bobina con otra parte del circuito es no deseado. Esto quiere decir que de ser posible la mutua inductancia de esta bobina con relación a cualquier otra parte del circuito debería ser nula.

Hay sin embargo otros dispositivos con dos o más bobinadas, como: motores eléctricos, generadores, transformadores, etc, en los que se busca que el acoplamiento magnético entre arrollamientos sea el mayor posible (acoplamiento fuerte). Esto significa, de acuerdo con la figura 5.10, que el flujo magnético “ ϕ_{21} ”, concatenado por la bobina 2, en lo posible sea el total producido por la bobina 1 “ ϕ_{1p} ”. Lo mismo puede decirse para “ ϕ_{12} ”. En la realidad el flujo total producido y concatenado por las bobinas 1 y 2 de la figura 5.10, según (5.27/29) y (5.28/30) puede ser escrito como:

	Producido	Concatenado	
Para la bobina 1:	$\phi_{1p} = \phi_{1d} + \phi_{21}$	$\phi_1 = \phi_{1p} + \phi_{12}$	(5.43)

Para la bobina 2:	$\phi_{2p} = \phi_{2d} + \phi_{12}$	$\phi_2 = \phi_{2p} + \phi_{21}$	(5.44)
-------------------	-------------------------------------	----------------------------------	--------

Se recuerda que las fracciones de flujo “ ϕ_{1d} y ϕ_{2d} ” corresponden a la parte que se dispersa de los flujos propios “ ϕ_{1p} ” y “ ϕ_{2p} ”, es decir no llegan a concatenar a la bobina aledaña. A estos flujos se los designa como flujos de dispersión y constituyen un efecto no deseado en los acoplamientos magnéticos fuertes. A partir de (5.43) y (5.44), se define como coeficiente de acoplamiento a cualquiera de las siguientes relaciones:

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_{1p}} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{2p}} \quad (5.45)$$

De (5.16) y (5.17) se sabe que:

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot \phi_{12}}{i_2} = M \quad \text{y} \quad M_{21} = \frac{N_2 \cdot \phi_{21}}{i_1} = M \quad (5.46)$$

Multiplicando las (5.46) m.a.m. y reemplazando “ ϕ_{21} ” y “ ϕ_{12} ”, según corresponda a (5.45), se tendrá:

$$M^2 = \left(\frac{N_1 \cdot k \cdot \phi_{2p}}{i_2} \right) \cdot \left(\frac{N_2 \cdot k \cdot \phi_{1p}}{i_1} \right) \quad (5.47)$$

Intercambiando el orden de N_1 y N_2 se puede escribir

$$M^2 = k^2 \cdot \left(\frac{N_2 \cdot \phi_{2p}}{i_2} \right) \cdot \left(\frac{N_1 \cdot \phi_{1p}}{i_1} \right) = k^2 \cdot L_1 \cdot L_2 \quad (5.48)$$

Y el coeficiente de acoplamiento será:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad (5.49)$$

Como el coeficiente de acoplamiento “ k ” es único, de acuerdo con (5.45), se podrá escribir:

$$\phi_{21} = k \phi_{1p} \quad \text{y} \quad \phi_{12} = k \phi_{2p} \quad (5.50)$$

Despejando (5.27) y (5.28) y reemplazando (5.50)

$$\phi_{1d} = \phi_{1p} - \phi_{21} = (1-k)\phi_{1p} \quad \text{y} \quad \phi_{2d} = \phi_{2p} - \phi_{12} = (1-k)\phi_{2p} \quad (5.51)$$

Se concluye que $(1-k)$ resultará en el factor de dispersión y es el mismo para ambos arrollamientos del acoplamiento.

7.4.4 Equivalente simplemente conexo de acoplamientos magnéticos

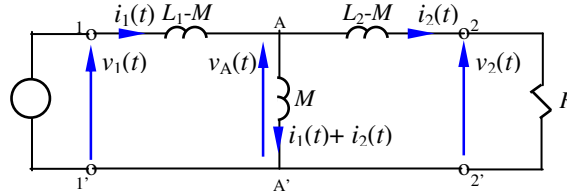
Como para la versión electrónica del acoplamiento, como ha sido desarrollado anteriormente, no se considera la representación expresa del acoplamiento magnético, es decir, no se pone expresamente de manifiesto el flujo resultante “ ϕ ”, como sucede con el modelo conveniente para utilizar en sistemas de potencia, entonces existe la posibilidad de transformar el acoplamiento en un circuito simplemente conexo, es decir donde la transferencia de potencia sea íntegramente galvánica. Considere para tal fin

las expresiones (5.39) y (5.40), a las que respectivamente se les suman y restan “ $\pm M[di_1(t)/dt]$ ” y “ $\pm M[di_2(t)/dt]$ ”, reordenando queda:

$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = (L_1 - M) \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{d}{dt} [i_1(t) + i_2(t)] \quad (5.52)$$

$$v_2(t) = \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = M \frac{d}{dt} [i_2(t) + i_1(t)] + (L_2 - M) \frac{di_2(t)}{dt} \quad (5.53)$$

Las expresiones (5.52/53) pueden ser escritas desde la siguiente configuración circuital equivalente, simplemente conexa.



Modelo de acoplamiento
simplemente conexo
Figura 5.13

A continuación, suponiendo que en los terminales de entrada “1-1'”, hay una fuente “ $v_1(t)$ ” y en los terminales de salida “2-2'”, hay una resistencia “ R ” y siguiendo la técnica de resolución de circuitos en escalera, se quieren determinar para el modelo equivalente, las relaciones entre tensiones y corrientes de entrada y salida del acoplamiento.

Relación entre “ $v_1(t)$ ” y “ $v_2(t)$ ”

$$i_2(t) = -v_2(t)/R \quad (5.54)$$

$$v_A(t) = v_2(t) - (L_2 - M) \frac{di_2(t)}{dt} = v_2(t) + \frac{(L_2 - M)}{R} \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (5.55)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = \frac{1}{M} \int v_A(t) dt = \frac{1}{M} \int v_2(t) dt + \frac{(L_2 - M)}{MR} v_2(t) \quad (5.56)$$

Se recuerda que por tratarse de circuitos en régimen estacionario, en la integral indefinida de (5.56), no se ha considerado la constante de integración, habida cuenta que dicha constante sólo interviene en el régimen transitorio. Si de (5.56) se despeja “ $i_1(t)$ ”, al mismo tiempo que se considera el reemplazo de la (5.54), se tendrá:

$$i_1(t) = \frac{1}{M} \int v_2(t) dt + \frac{L_2 - M}{MR} v_2(t) + \frac{v_2(t)}{R} \quad (5.57)$$

$$v_1(t) = v_A(t) + (L_1 - M) \frac{di_1(t)}{dt} = v_2(t) + \frac{(L_2 - M)}{R} \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{(L_1 - M)}{M} v_2(t) + \frac{(L_1 - M)(L_2 - M)}{MR} \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{(L_1 - M)}{R} \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (5.58)$$

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{L_1 - M}{M} v_2(t) + \frac{L_1 - M}{R} \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{L_2 - M}{R} \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{L_1 L_2 - L_1 M - L_2 M + M^2}{MR} \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (5.59)$$

$$v_1(t) = \frac{L_1}{M} v_2(t) + \frac{L_1 L_2 - M^2}{MR} \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (5.60)$$

Relación entre “ $i_1(t)$ ” e “ $i_2(t)$ ”

Expresando la (5.55) en función de “ $i_2(t)$ ”, es decir considerando “ $v_2(t) = -R i_2(t)$ ”

$$v_A(t) = -R i_2(t) - (L_2 - M) \frac{di_2(t)}{dt} \quad (5.61)$$

Y también en (5.56)

$$i_1(t) + i_2(t) = \frac{1}{M} \int v_A(t) dt = -\frac{R}{M} \int i_2(t) dt - \frac{(L_2 - M)}{M} i_2(t) \quad (5.62)$$

De donde

$$i_1(t) = -\frac{R}{M} \int i_2(t) dt - \frac{L_2 - M}{M} i_2(t) - i_2(t) \quad (5.63)$$

$$i_1(t) = -\frac{L_2}{M} i_2(t) - \frac{R}{M} \int i_2(t) dt \quad (5.64)$$

Las (5.59/60) y (5.63/64) son las relaciones buscadas. Es interesante ver la forma que adoptan estas relaciones, la (5.59/60) para funcionamiento en vacío y la (5.63/64) para cortocircuito.

1) Vacío “ $R=\infty$ ” \Rightarrow que (5.59/60)

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{L_1 - M}{M} v_2(t) = \frac{L_1}{M} v_2(t) \quad (5.65)$$

Además se ve que si en (5.65) “ $M \rightarrow L_1$ ” y/o “ $M \rightarrow \infty$ ”, entonces “ $v_2(t) = v_1(t)$ ”

2) Corto “ $R=0$ ” \Rightarrow que (5.63/64)

$$i_1(t) = -\frac{L_2 - M}{M} i_2(t) - i_2(t) = -\frac{L_2}{M} i_2(t) \quad (5.66)$$

También ahora si en (5.66) “ $M \rightarrow L_2$ ” y/o “ $M \rightarrow \infty$ ”, entonces “ $i_2(t) = -i_1(t)$ ”

Despejando “ M ” de la expresión (5.49) y reemplazando en (5.65)

$$v_1(t) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} v_2(t) \quad \text{de donde} \quad \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (5.67)$$

Y ahora en (5.66)

$$i_1(t) = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} i_2(t) \quad \text{de donde} \quad \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (5.68)$$

Si ahora se toma “ $L_1 \rightarrow \infty$ ” y “ $L_2 \rightarrow \infty$ ” \Rightarrow “ $M = (L_1 L_2)^{1/2} \rightarrow \infty$ ”, entonces

$$\lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} k = \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = 1 \quad (5.69)$$

En el caso de (5.69) las relaciones (5.67) y (5.68), resultarían exactamente inversas e independientes de la resistencia de carga. En la realidad esto se puede aproximar bastante pero nunca se logra.

Conclusión importante

Si se cumple que “ $L_1 \rightarrow \infty$ ” y “ $L_2 \rightarrow \infty$ ”, como por (5.49) “ $M = k(L_1 L_2)^{1/2}$ ”, también tiende a infinito, implica que “ k ” debe tender a “1”, lo que implica que el acoplamiento resultaría perfecto.

7.4.5 Tipos de acoplamientos magnéticos usados como transformadores

Los acoplamientos magnéticos entre bobinas, se pueden usar para transferir potencia o señal, adaptando: 1) tensión, 2) corriente, 3) ambas cosas (impedancias) y 4) se suelen usar también para aislación galvánica de circuitos o combinando algunas de las funciones anteriores. En todos estos casos donde el flujo de potencia tiene dirección única, el acoplamiento es designado con el nombre específico de transformador, el que podrá completarse con alguna palabra adicional derivada de la función del mismo. Es así que se pueden mencionar los siguientes tipos de transformadores:

- 1) Transformador de potencia.
- 2) Transformador de tensión.
- 3) Transformador de corriente.
- 4) Transformador de impedancia.
- 5) Transformador de aislamiento.

7.5 Energía magnética o electrocinética y curva de magnetización

Se denomina así a la energía que se almacena en el campo magnético producido por la corriente que recorre una bobina de inductancia “ L ”. Dado que es consecuencia del movimiento de cargas que recorren el conductor de la bobina, también es conocida como energía electrocinética. Como dicha energía se quiere determinar tanto en función de parámetros magnéticos como circuitales, en el circuito de la figura 5.14, se muestran ambos tipos de parámetros.

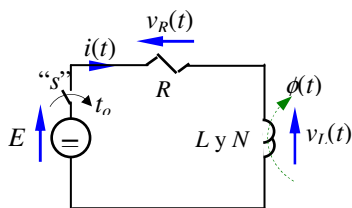


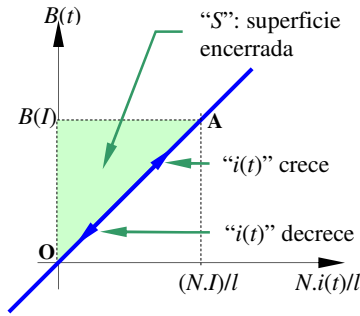
Figura 5.14

Dada la linealidad entre “ $B(t)$ ” e “ $i(t)$ ”, existente en bobinas con núcleo de aire, para su representación, bastaría con apelar a la expresión (5.70). Sin embargo para el desarrollo del concepto de energía almacenada, se ha querido hacer a través del concepto de curva de magnetización. El objeto de introducir la curva de magnetización aquí, es orientar al lector hacia el comportamiento de bobinas con núcleos ferromagnéticos, que por sus características alineales, para su tratamiento se utiliza la curva de magnetización.

Para la determinación de la energía almacenada en función de parámetros magnéticos, suponga que la inductancia “ L ” del circuito de la figura 5.14, corresponde a un solenoide de “ N ” espiras y cuyo radio “ r ” es mucho menor que su longitud “ l ”, de manera tal que la densidad de flujo magnético en su interior, pueda ser considerada como la de un solenoide infinitamente largo (ideal). Con tal simplificación la inducción “ B ” puede ser calculada fácilmente por aplicación de la ley de Ampere y resultará:

$$B(t) = \mu_o \cdot \frac{N}{l} \cdot i(t) \quad (5.70)$$

Por la curva de magnetización de la figura 5.15, la inducción “ $B(t)$ ” en el interior del solenoide implica la existencia de una corriente “ $i(t)$ ” que queda perfectamente definida a través de la (5.70). Se ha querido representar también dicha relación mediante la curva llamada de magnetización que relaciona “ $B(t)$ ” con “ $N \cdot i(t) / l$ ”, a través de la constantes “ μ_o ” que es la pendiente de la curva. De esta manera resultará más fácil entender el desarrollo del tema para bobinas que contengan núcleos ferromagnéticos.



Curva de magnetización de bobina
sin núcleo ferromagnético
Figura 5.15

La resistencia “ R ” que figura en el circuito corresponde al alambre del solenoide. Si ni en el núcleo ni en las inmediaciones del solenoide, existe material ferromagnético, entonces “ $B(t)$ ” resultará linealmente proporcional a “ $i(t)$ ”, tal como lo expresa (5.70) y lo representa la recta que pasa por el origen de la figura 5.15. Esta gráfica se denominará curva de magnetización del solenoide.

Al cerrar la llave “ s ” en el instante “ t_0 ”, la tensión de la fuente queda aplicada y la corriente “ $i(t)$ ” crece desde cero hasta el valor de régimen permanente “ I ” donde se hace constante e igual a:

$$I = E / R \quad (5.71)$$

En el instante inicial, toda la caída de tensión ocurre en la resistencia y en consecuencia la bobina no absorbe energía. Sin embargo dado que “ $i(t)$ ”, en la etapa transitoria crece, habrá también caída de tensión “ $v_L(t)$ ”, tal que de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff :

$$E = v_R(t) + v_L(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.72)$$

En régimen permanente “ $I = E / R$ ”, la caída en la inductancia será nula y como se dijo no absorbe energía. Sin embargo en la etapa transitoria la caída en la bobina, como se puede extraer de (5.72), será:

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} = N \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} \quad (5.73)$$

Donde “ A ” es el área de la sección transversal del núcleo de la bobina. Si en (5.73) se multiplican ambos miembros por “ $i(t)$ ”.

$$p_L(t) = v_L(t) \cdot i(t) \quad (5.74)$$

Se puede obtener la potencia instantánea “ $p_L(t)$ ” absorbida por la bobina, tanto en parámetros circuitales, como magnéticos.

$$i(t) = \frac{1}{\mu_o} \frac{l}{N} \cdot B(t) \quad (5.75)$$

Reemplazando (5.73) y (5.75) en (5.74) y designando con “ E_L ” a la energía magnética absorbida por la bobina se tiene:

$$p_L(t) = \frac{dE_L}{dt} = N \cdot A \cdot \frac{dB}{dt} \cdot \frac{1}{\mu_o} \frac{l}{N} \cdot B(t) \quad (5.76)$$

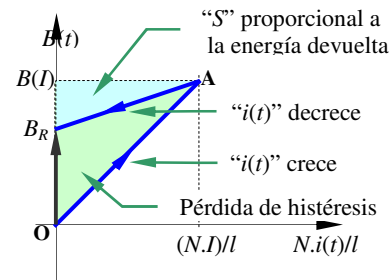
Multiplicando por “ dt ”, integrando y considerando que “ $A \cdot l = vol$ ” volumen del núcleo, se tiene:

$$E_L = \int_{t_0}^t p_L(t) dt = \frac{vol}{\mu_o} \int_0^B B \cdot dB = \frac{vol}{\mu_o} \cdot \frac{B^2}{2} \quad (5.77)$$

De la expresión anterior se ve que la energía electrocinética almacenada depende del área comprendida entre la curva de inducción magnética “ B ”, el eje de ordenadas y del volumen del núcleo de la bobina en cuestión. Dado que la función “ $B=f(H)$ ” para el caso planteado es lineal, el área mencionada será:

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{\mu_o} \cdot B \cdot vol = \frac{1}{2} \cdot \frac{N \cdot I}{l} \cdot B \cdot A \cdot l = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \phi \cdot I = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \quad (5.78)$$

Esta energía almacenada, al desaparecer la corriente “ I ”, es devuelta al circuito. Una prueba de ello es la chispa que aparece en el interruptor “ s ” cuando se desconecta la fuente. Además de la linealidad, un aspecto que se quiere resaltar, con relación a la curva de magnetización para la bobina con núcleo de aire figura 5.15, es que cuando la corriente crece o decrece, los valores de “ B ” lo hacen por aplicación de los “ $N.i(t)/l$ ”, a través de la misma curva, tal como lo muestran las flechas dibujadas sobre ella. Esto pone de manifiesto que toda la energía, proporcional a la superficie “ S ” que almacena la bobina cuando la corriente crece desde “ 0 a I ”, es íntegramente devuelta al sistema cuando decrece de “ I a 0 ”.



Curva de magnetización de bobina con núcleo ferromagnético

Figura 5.16

Para bobinas con núcleos magnéticos la recta que aplica “ $N.i(t)/l$ ” en “ B ” cuando la corriente crece, no es la misma que aplica “ $N.i(t)/l$ ” en “ B ” cuando decrece. Esta diferencia de camino entre la ida y la vuelta, trae como consecuencia que la energía absorbida cuando la corriente crece (proporcional al área “ $OAB(I)$ ”), es mayor que la devuelta cuando decrece (proporcional a “ $AB(I)B_R$ ”). La diferencia de ambas áreas “ $OA B_R$ ”, es proporcional a una energía que se pierde en forma de calor, conocida como pérdida de histéresis.

El valor de inducción “ B_R ”, se llama magnetismo remanente y persiste en el material del núcleo luego de que la corriente por la bobina ha cesado. Para eliminarlo es necesario magnetizar al núcleo con una corriente contraria, es decir con signo negativo “ $-N.i(t)/l$ ”.

La diferencia de camino entre ida y vuelta da origen así a la curva de histéresis y a sus correspondientes pérdidas que serán tratadas con mayor detalle más adelante. Este tipo de pérdida es habitual en núcleos ferromagnéticos, expuestos a campos debidos a corrientes alternadas, donde la corriente crece y decrece, tanto en sentido positivo como negativo, apareciendo la diferencia de área planteada, en ambos sentidos.

7.6 Energía y potencia transferida y absorbida por un acoplamiento magnético.

Considérese ahora el acoplamiento dado por el equivalente de la figura 5.13 y sus correspondientes relaciones de tensión y corriente dadas por (5.60), (5.64) y multiplicándolas m.a.m.

$$v_1(t)i_1(t) = -\frac{L_1L_2}{M^2}v_2(t)i_2(t) - \frac{L_1R}{M^2}v_2(t)\int i_2(t)dt - \frac{L_1L_2 - M^2}{M^2}\frac{dv_2(t)}{dt}\int i_2(t)dt - \frac{L_1L_2 - M^2}{M^2}\frac{L_2}{R}\frac{dv_2(t)}{dt} \quad (5.79)$$

Considerando que la potencia instantánea absorbida por la resistencia conectada a “2-2’”, de acuerdo con la convención de signos utilizada será “ $p_2(t) = -v_2(t).i_2(t)$ ” y que la potencia instantánea erogada por la fuente será “ $p_1(t) = v_1(t).i_1(t)$ ”, entonces la potencia instantánea transferida y la absorbida por el acoplamiento, vendrán dadas por:

$$p_1(t) = \frac{L_1L_2}{M^2}p_2(t) - \frac{L_1R}{M^2}v_2(t)\int i_2(t)dt - \frac{L_1L_2 - M^2}{M^2}\frac{dv_2(t)}{dt}\int i_2(t)dt - \frac{L_1L_2 - M^2}{M^2}\frac{L_2}{R}\frac{dv_2(t)}{dt} \quad (5.80)$$

Si en la anterior se reemplaza por “ $M = k(L_1L_2)^{1/2}$ ”

$$p_1(t) = \frac{1}{k^2} p_2(t) - \frac{1}{k^2} \frac{R}{L_2} v_2(t) \int i_2(t) dt - \frac{1-k^2}{k^2} \frac{dv_2(t)}{dt} \int i_2(t) dt - \frac{1-k^2}{k^2} \frac{L_2}{R} \frac{dv_2(t)}{dt} i_2(t) \quad (5.80)$$

Para “ $k=1$ ”, la potencia sera transferida con el mejor rendimiento y si ademas “ $L_2 \rightarrow \infty$ ”, la potencia transferida es del 100%, implica acoplamiento perfecto. Como fue dicho que “ $L_2 \rightarrow \infty$ ” \Rightarrow que “ $L_1 \rightarrow \infty$ ” \Rightarrow que “ $M \rightarrow \infty$ ” \Rightarrow que “ $k \rightarrow 1$ ” y entonces:

$$p_1(t) = -v_2(t) i_2(t) = p_2(t) \quad (5.81)$$

En tal caso el acoplamiento es ideal, la corriente “ $i_1(t)=i_2(t)$ ”, en fase con “ $v_1(t)=v_2(t)$ ”.

Conclusiones importantes

1) El acoplamiento magnético perfecto sólo involucra corrientes cuando hay carga conectada, en vacío “ $i_2(t)=0$ ” que \Rightarrow “ $i_1(t)=0$ ”, 2) el desfase de las corrientes “ $i_1(t)$ ” e “ $i_2(t)$ ”, con respecto a “ $v_1(t)$ ” y “ $v_2(t)$ ”, depende de la carga conectada.

8. GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA MONOFASICO

Una de las aplicaciones más interesantes de la ley de Faraday es en el generador de corriente alterna. Estos son los que generan la energía eléctrica de uso residencial, industrial y comercial.

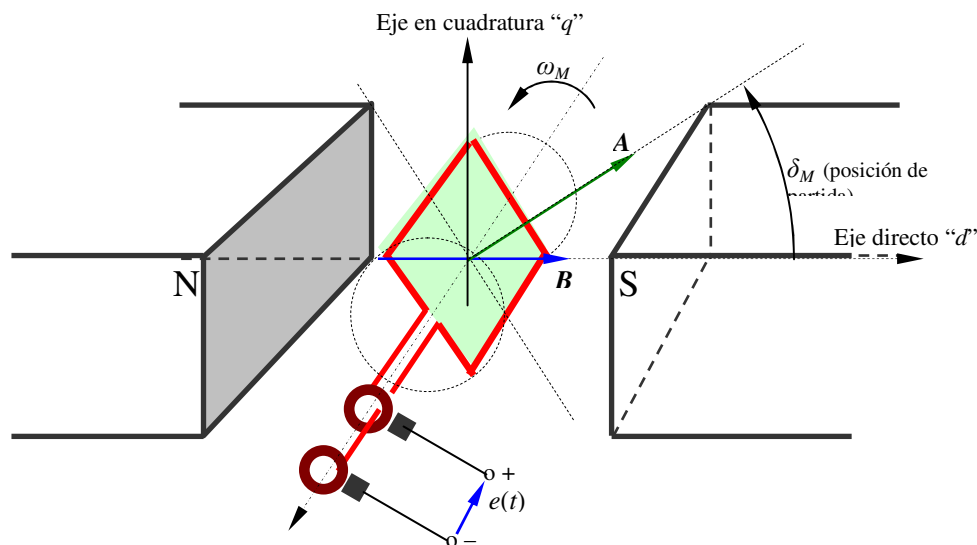


Figura 5.17

La figura 5.16 muestra una espira (bobina de inducido de la máquina), cuya superficie interior está representada por un vector “ A ” que gira con velocidad “ $\omega = \text{cte}$ ” (rotor de la máquina), sumergida en un campo de inducción “ B ” uniforme. Este campo es originado por dos masas polares fijas, una norte y otra sur (estator de la máquina) que también se muestran en la figura y que constituyen el inductor de la máquina. Supóngase que entre estos dos vectores, “ A ” y “ B ”, existe originalmente un ángulo arbitrario “ δ_M ”, con relación al eje directo que según se indica en la figura, corresponde a la dirección positiva de “ B ”.

Como el vector “ B ” representativo de la densidad de flujo magnético permanece fijo en el espacio, cuando la espira gira a partir de un ángulo inicial arbitrario “ δ_M ”, con

velocidad angular constante “ $\omega_M=\omega_s$ ”, conocida como velocidad sincrónica, la posición angular mecánica instantánea con relación al vector “ \mathbf{B} ” vendrá dada por

$$\theta_M(t) = \omega_M t + \delta_M \quad (5.82)$$

Este ángulo geométrico o mecánico “ $\theta_M(t)$ ”, se mide en “grados” o “radianes” y como se dijo es el valor instantáneo del ángulo que forma la espira con el eje directo. Suponiendo que el campo “ \mathbf{B} ” entre masas polares sea uniforme (implica que no habrá dispersión), de acuerdo con lo estudiado el flujo total concatenado por la bobina de inducido (de fase o de armadura) representada por la espira será:

$$N\phi(t) = N(\overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{A}}) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta_M(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega_M \cdot t + \delta_M) \quad (5.83)$$

Como se explicará luego, la relación entre el ángulo mecánico “ θ_M [grd] o [rad]” y el ángulo eléctrico “ θ [grd-ele] o [rad-ele]”, viene dada por el número de polos “ p ” que tenga la máquina impulsora. La máquina impulsora se encarga de proporcionar la velocidad angular “ $\omega_M=\omega_s$ ”, necesaria para la velocidad de sincronismo. Por lo dicho:

$$\theta(t)[\text{grd} - \text{ele}] \rho[\text{rad} - \text{ele}] = \frac{p}{2} \cdot \theta_M(t)[\text{grd}] \rho[\text{rad}] \quad (5.84)$$

Esta máquina impulsora es la que provee la energía mecánica en su eje que a través del proceso que se está explicando, el generador convierte en la energía eléctrica que alimenta la carga que eventualmente se encuentre conectada a sus terminales. Como usualmente se trabaja en grados eléctricos o radianes eléctricos, si de (5.84) se despeja “ $\theta_M(t)$ ” en función de “ $\theta(t)$ ”:

$$\theta_M(t)[\text{grd}] \rho[\text{rad}] = \frac{2}{p} \cdot \theta(t)[\text{grd} - \text{ele}] \rho[\text{rad} - \text{ele}] \quad (5.85)$$

Derivando m.a.m. la (5.85) respecto de “ t ”, se obtiene:

$$\omega_s \left[\frac{\text{grd}}{s} \right] \rho \left[\frac{\text{rad}}{s} \right] = \frac{2}{p} \cdot \omega \left[\frac{\text{grd} - \text{ele}}{s} \right] \rho \left[\frac{\text{rad} - \text{ele}}{s} \right] = \text{cte} \quad (5.86)$$

Considerando (5.85) y (5.86), la (5.93) quedará:

$$\lambda(t) = N\phi(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \left[\frac{2}{p} \theta(t) \right] = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \left[\frac{2}{p} (\omega t + \delta) \right] \quad (5.87)$$

El FTC “ $\lambda(t)$ ” queda en función del ángulo eléctrico “ δ ” y de la pulsación o frecuencia angular “ ω ”. Considerando que para el caso en cuestión “ $p=2$ ”, entonces “ $\omega = \omega_s$ ” y la (5.87) queda:

$$\lambda(t) = N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (5.88)$$

Por claridad se ha dibujado una espira, sin embargo en la realidad el inducido o bobina de fase, es una bobina “apretada”, formada por “ N ” espiras. En (5.88) se denomina “ $\phi_{\max}=B \cdot A$ ” al flujo máximo concatenado por la bobina de fase o inducido. La (5.88) queda:

$$\lambda(t) = N\phi_{\max} \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (5.89)$$

Al ser el flujo total concatenado una función cosenoidal del tiempo, se induce una fuerza electromotriz que según ley de Faraday–Lenz resulta:

$$e(t) = -\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{d[N\phi_{\max} \cdot \cos(\omega t + \delta)]}{dt} \quad (5.90)$$

Derivando

$$e(t) = N \cdot \phi_{\max} \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (5.91)$$

La expresión (5.88) muestra que se obtuvo una función senoidal del tiempo u onda senoidal, que puede ser escrita:

$$e(t) = E_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (5.92)$$

Donde

E_{\max} : corresponde a la amplitud de la onda, se conoce como valor máximo o de pico y como lo muestra (5.91) depende del “ ϕ_{\max} ”.

δ : es el ángulo de referencia o de fase y puede usarse con diferentes fines.

Considerando que “ $\sin \alpha = \mp \cos(\alpha \pm 90^\circ)$ ”, la (5.92) puede escribirse también en función del coseno, es decir:

$$e(t) = E_{\max} \sin(\omega t + \delta) = \mp E_{\max} \cos(\omega t + \delta \pm 90^\circ) = E_{\max} \cos(\omega t + \delta') \quad (5.93)$$

Se aclara que debido a que el “ $\lambda(t)$ ” es producido por un agente externo al inducido, es decir el inductor, aquí no tiene mucho sentido manejar el concepto de caída inductiva como se introdujo anteriormente, recordar que ésta se debía a la tensión inducida en la bobina debida a su propia corriente y no a un agente externo.

Como se aprecia del desarrollo y se muestra en figura 5.18, el flujo varía cosenoidalmente con el tiempo y en consecuencia la fem inducida varía sinusoidalmente.

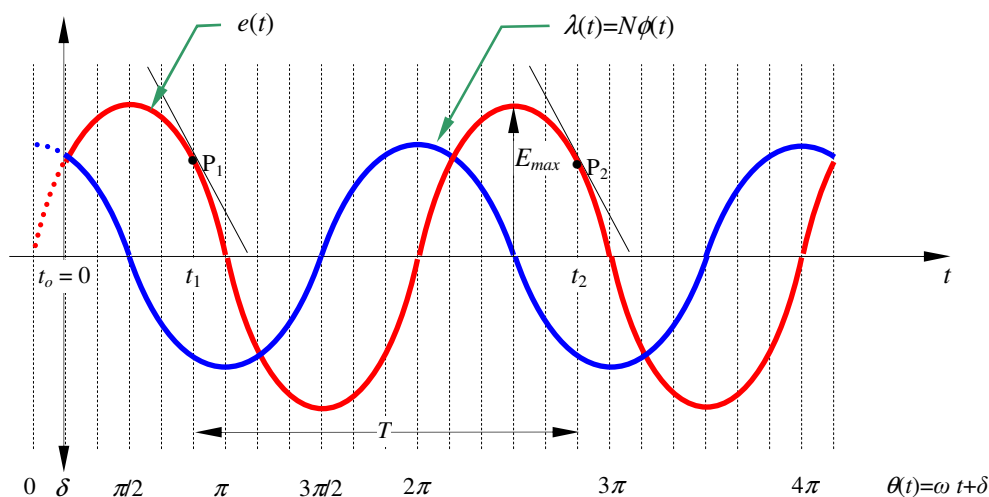


Figura 5.18

Al ser la tensión generada “ $e(t)$ ” positiva entre “ 0 y π ” y negativa entre “ π y 2π ” y se repite del mismo modo para ángulos congruentes, significa que en sus terminales

habrá inversión de la polaridad y como con el transcurso del tiempo, esto sucede con una periodicidad determinada (alternancia de la polaridad), a este tipo de generador se lo conoce como de corriente alterna, un ejemplo del cual lo constituye el alternador de un auto.

Los dos parámetros “ $\phi(t)$ ” y “ $e(t)$ ” que se muestran en la figura 5.17 anterior, resultan ser fenómenos periódicos: Se entiende por fenómeno periódico, tal como la palabra lo indica, a una forma funcional y/o evento que se repite con cierta periodicidad de tiempo llamada período designado con “ T ”.

En un fenómeno periódico se llama ciclo al conjunto de todas las partes distintas de la forma funcional y/o del evento que se repite y está siempre asociado al período. Según la figura 5.18, un ciclo podría estar definido entre cualquier par de puntos como los mostrados en la figura con “ P_1 para t_1 ” y “ P_2 para t_2 ”, ya que a ambos le corresponde la misma ordenada y pendiente, requisito que deberá cumplirse de acuerdo con la definición dada de ciclo. Se puede comprobar que en el intervalo de tiempo “ T ”, entre “ P_1 para t_1 ” y “ P_2 para t_2 ”, toda otra ordenada es diferente. En consecuencia el período para este caso, será:

$$T = t_2 - t_1 \quad [\text{s}] \quad (5.94)$$

Se define como frecuencia a la cantidad de ciclos que conforman un segundo de tiempo, es decir la cantidad de períodos “ T ” contenidos en un segundo. En consecuencia se la obtiene de:

$$f = 1 / T \quad [\text{s}^{-1}] \quad \text{de donde} \quad (5.95)$$

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f \quad [(\text{rad-ele})/\text{s}] = 360f \quad [(\text{grd-ele})/\text{s}] \quad (5.96)$$

Al ser “ ω ” proporcional a la frecuencia, como fue adelantado, este parámetro es también conocido como frecuencia angular o pulsación.

Se entiende por desfase al desplazamiento o corrimiento angular entre dos ondas. Por ejemplo en la figura, la función que expresa el flujo total concatenado esta desplazada 90° de la tensión inducida. Se dice entonces que “ $\lambda(t)$ ” está adelantada 90° con respecto a “ $e(t)$ ”, o que “ $e(t)$ ” está atrasada 90° con respecto a “ $\lambda(t)$ ”. Para manejar este concepto de desfase se aplica la siguiente convención: 1) El desfase es el menor ángulo de desplazamiento entre dos ondas. 2) Cualquier punto de una onda se puede tomar como partida para definir el desfase, siempre que para la onda con la que se compare se tome un punto homólogo. Por ejemplo: un cero creciente, decreciente, un máximo positivo, un máximo negativo, etc.

Relación entre ángulo geométrico o mecánico y ángulo eléctrico

Como puede deducirse para el caso expuesto, por cada vuelta completa de la bobina de fase o de inducido, habrá un ciclo de tensión “ $e(t)$ ” generada. Como cada ciclo de tensión se produce con el paso por cada par de polos y como cada ciclo de tensión generada se asocia con “ 2π ” [rad-ele] o 360 [grd-ele], entonces la cantidad de grados eléctricos o radianes eléctricos, vendrá dado por los grados o radianes geométricos o mecánicos, multiplicado por la cantidad de pares de polos que tenga la máquina y se calculan como fue adelantado con la expresión (5.85).

Como los requisitos que debe cumplir cualquier generador de energía para uso industrial, comercial y residencial, son: 1) mantener la amplitud “ E_{\max} ” y 2) la “ f ”, ambos parámetros constantes, entonces para que la frecuencia “ $f = 50 \text{ Hz}$ ”, de acuerdo con (5.96) implique “ $\omega = 314.16 \text{ [rad-ele]} = 18000 \text{ [grd-ele]}$ ” y como de (5.86), “ ω ” es función a su vez función de “ p ”, el número de polos deberá estar de acuerdo con la velocidad de la máquina impulsora (MI), o vice versa, de manera que “ ω ” resulte constante. Es decir:

Máquina impulsora (rpm)	Frecuencia angular (rad-ele/s)	Necesidad de polos (p)
3000	314.16	2
1500	314.16	4
750	314.16	8

Y así continúa.

9. EFECTOS DEBIDOS A “ $B(t)$ ”

En casi todas las máquinas eléctricas, transformadores, generadores, motores, reactores, etc, como ya fue dicho, con el objeto de multiplicar y canalizar el flujo magnético necesario para su funcionamiento, es frecuente encontrar núcleos magnéticos de diferentes aleaciones de hierro. Cuando estas máquinas son de corriente alterna, como el generador introducido en el punto anterior, su circuito magnético conformado de aleación de hierro, se encontrará recorrido por flujos variables con el tiempo y como consecuencia de la ley de Faraday-Lenz, aparecen ahora efectos no deseados, como por ejemplo las corrientes de Foucault.

Por otro lado cuando las bobinas inductoras y de inducido que componen una máquina eléctrica, son recorridas por corrientes alternas, el interior de sus propios conductores y a lo largo de sus ejes, es asiento de un campo “ $E_{sk}(t)$ ” que se opone a la corriente que los recorre, se da origen así a un efecto llamado skin.

9.1 Corrientes de Foucault

Las corrientes de Foucault están formadas por millones de torbellinos de corriente que se inducen en el núcleo metálico de las máquinas eléctricas, según la ley de Faraday-Lenz. Estos lazos de corrientes, formados por cargas en libertad existentes en el metal del núcleo, adoptan forma de remolino, en planos perpendiculares a la dirección de variación del flujo.

Las corrientes de Foucault “ i_F ” recorren caminos cerrados establecidos dentro del propio núcleo metálico. Estos caminos cerrados por estar en un metal, poseen resistencias ohmicas “ r ” y producen por efecto Joule “ $P_F = i_F^2 \cdot r$ ” una disipación de potencia en forma de calor. Esta potencia resulta ser un inconveniente ya que no sólo constituye una pérdida de energía que afecta el rendimiento del equipo en cuestión, sino que además produce una cantidad de calor que es necesario disipar para que no se eleve en demasía la temperatura del mismo.

Este efecto no deseado puede ser reducido aumentando la resistencia de los posibles caminos. La forma de implementar esta reducción, es con la laminación de los núcleos, en la dirección del flujo magnético, esto quiere decir perpendicular a las corrientes de Foucault. Luego de aislar las chapas con una fina película aislante, se unen y se conforma el núcleo de la máquina. La alta resistencia de unión entre láminas se opone

eficazmente a estas corrientes no deseadas disminuyéndolas notablemente. Este es el motivo por el que si se abre una máquina eléctrica se encontrará que sus núcleos magnéticos están laminados.

Estas corrientes de Foucault junto con la pérdida de histéresis introducida anteriormente en punto 7.4, constituyen lo que se conoce como pérdidas en el hierro.

9.2 Efecto skin

Otra manifestación importante de la ley de Faraday-Lenz, es la aparición de un campo eléctrico " $E_{sk}(t)$ ", inducidos por un campo " $B(t)$ ", debido a la propia corriente que recorre el conductor. Este campo que según Lenz se opone a la causa que los genera, tiene intensidad decreciente desde el eje en sentido radial hacia afuera, obligando a la corriente a desplazarse hacia la periferia del conductor, o sea, tiende a circular por la piel del conductor, razón por la que recibe el nombre efecto pelicular o skin.

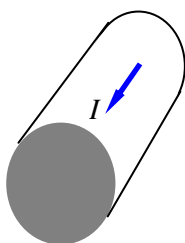


Figura 5.19

Cuando la corriente " I " que recorre un conductor es constante se distribuye uniformemente en toda su sección transversal " S ". Esto significa, tal como lo indica la uniformidad del sombreado de la figura 5.19, una densidad de corriente uniforme en todos los puntos de la sección transversal.

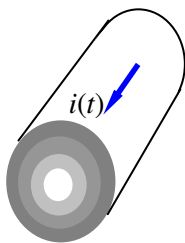


Figura 5.20

Si en cambio la corriente es variable con el tiempo, (para este caso interesa especialmente la que varía senoidalmente) " $i = I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t)$ ", la corriente tiende a circular por la periferia del conductor, tal como se indica aproximadamente con el sombreado no uniforme de la figura la 5.20. Este fenómeno se traduce en un aumento de la resistencia ohmica del conductor, debido a que la sección útil que resulta, para llevar la corriente, queda reducida a una superficie anular menor. La reducción de la superficie útil de conducción aumenta con la frecuencia.

Como fue dicho, la causa de este efecto es la variación con respecto al tiempo del campo magnético " B " originada por la propia corriente " i " que recorre el conductor. Una vez más se deben considerar las leyes de Faraday - Lenz. Del primero, se sabe que alrededor de un campo magnético variable " $B(t)$ " se induce un campo eléctrico " $E_{sk}(t)$ " no conservativo y del segundo, que este campo se opondrá a la causa que le dio origen. El resultado final es la inducción, en el eje del conductor, es una disminución del área útil de conducción que disminuye con la frecuencia, hacia la periferia, dando origen a la distribución periférica de la corriente.

Resumiendo, la caída de tensión total debida a la corriente alterna que lo recorre un conductor, resultará de la resistencia ohmica de corriente continua, incrementada por la reducción de área útil debida al efecto skin y que se suele denominar como resistencia del alambre en corriente alterna.

De este modo, cuando se trata de corriente alterna, es necesario hablar de una resistencia efectiva que se la define como el cociente entre la pérdida de potencia promedio en el conductor y el valor medio cuadrático de la corriente y que es el mismo que se obtendría de dividir las componentes en fase de la caída de tensión y la corriente.

Se define como relación de resistencia de efecto skin, al cociente (R/R_o), donde “ R ” es la resistencia efectiva en corriente alterna y “ R_o ” es la resistencia del mismo conductor en corriente continua o constante.

Los fabricantes de conductores dan en sus manuales de datos, lo que se conoce como resistencia de corriente alterna y que por lo dicho siempre habrá que asociarlo a una frecuencia, 50 Hz para el caso de nuestro país. Para los conductores introducidos en el capítulo 1, tabla 1.2, los valores de las respectivas resistencias de corriente alterna “ r_{CA} ”, para 50 Hz y a la temperatura máxima de servicio, según el fabricante son, según se indican en la tabla siguiente.

Tabla 5.1 conductor de Cu, aislación PVC 1.1 kV, 50Hz, 80 °C

SECCION S (mm ²)	RESISTENCIA EN CC r_{CC} (Ω/km) a 20 °C	RESISTENCIA EN CA r_{CA} (Ω/km) A temperatura máxima de servicio
1	18.1	22.40
1.5	12.7	15.70
2.5	7.28	9.000
4	4.56	5.640
6	3.05	3.770
10	1.83	2.260
16	1.15	1.420
25	0.727	0.898
35	0.524	0.648
50	0.387	0.478
70	0.268	0.331
95	0.193	0.239
120	0.153	0.190
150	0.124	0.154
185	0.099	0.123
240	0.075	0.095
300	0.060	0.077

PROBLEMAS PROPUESTOS
CAPITULO 5
APLICACIONES DE LA LEY DE FARADAY-LENZ

OBJETIVO PRINCIPAL

Aplicación práctica de la ley de Faraday-Lenz, se quiere que el lector aprenda a distinguir los diferentes tipos de flujos “FC”, “FTC” y de dispersión, como y cuales participan en un acoplamiento. Se quiere que sepa plantear las ecuaciones de trayectoria cuando en un circuito hay bobinas, sea que estén o no acopladas. Que sepa distinguir las características entre un acoplamiento para transferir potencia o señal. Se quiere que el lector, en forma preliminar, comprenda las bondades y problemas de los núcleos magnéticos, es decir interpretar los beneficios (poder multiplicador y aptitud para canalizar el flujo) y perjuicio (pérdidas de Foucault e histéresis) que acarrea su uso. Se quiere que el lector comprenda como se genera una fem alternada sinusoidal. También qué es y qué papel juega el efecto skin.

Problema 5.1

El factor de acoplamiento entre dos bobinas de “ $L_1 = 32 \text{ mH}$ ” y “ $L_2 = 8 \text{ mH}$ ”, cuya polaridad se indica en la figura, es “ $k=0.9$ ”. ¿Cuánto valen los diferentes FC y FTC, totales, propios y mutuos? Considere que las corrientes señaladas en el dibujo son “ $I_1=2\text{A}$ ” e “ $I_2=1\text{A}$ ”.

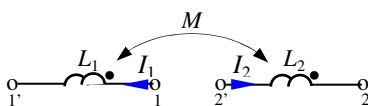


Figura P5.1

$\phi_{1p} = ?$	$\lambda_{1p} = ?$
$\phi_{21} = ?$	$\lambda_{21} = ?$
$\phi_1 = ?$	$\lambda_1 = ?$
$\phi_{2p} = ?$	$\lambda_{2p} = ?$
$\phi_{12} = ?$	$\lambda_{12} = ?$
$\phi_2 = ?$	$\lambda_2 = ?$

Problema 5.2

Una bobina apretada de “100 espiras”, recorrida por una corriente de “2 A”, tiene un flujo concatenado propio “ $\phi = 0.75 \text{ Wb}$ ”. ¿Cuánto vale su inductancia?

Problema 5.3

La representación circuital equivalente de una bobina de “ $L=1\text{H}$ ” y resistencia “ $R=32\Omega$ ”, conocida como modelo serie de parámetros concentrados, se indica en la figura.

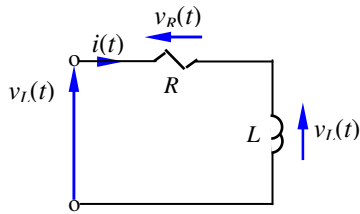


Figura P5.2

Se quiere que escriba:

- 1) La ecuación que modela el funcionamiento del circuito.
- 2) La expresión literal del FTC y del FC de la bobina.
- 3) La energía absorbida por ambos componentes.

Complemento teórico para comprender el problema

Dado que la inductancia se encuentra distribuida a lo largo de todo el alambre con que fue construida una bobina y como en la realidad dicho alambre tiene resistencia que también se encuentra distribuida en todo su largo, entonces ambos parámetros se encontrarán distribuidos y mezclados entre sí. Para la evaluación fisicomatemática de sus efectos que más se aproxima a la realidad, habría que pensar en cada elemento infinitesimal “ dl ” de alambre, como formado por sendos elementos infinitesimales de inductancia “ $dL=l_L dl$ ” y de resistencia “ $dR=r dl$ ”, tal que la caída infinitesimal que se produciría en cada elemento, será:

$$dv(t) = r dl \cdot i(t) + l_L dl \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{P5.1})$$

Donde: “ r ” y “ l_L ” son la resistencia e inductancia en por unidad de longitud del alambre con que se hizo la bobina.

Integrando a lo largo de la trayectoria de longitud “ l ” (del conductor de la bobina), se puede comprobar que:

$$v(t) = \int_0^l \left(r \cdot i(t) + l_L \cdot \frac{di(t)}{dt} \right) dl = i(t) \int_0^l r \cdot dl + \frac{di(t)}{dt} \int_0^l l_L \cdot dl = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{P5.2})$$

Es decir, el cálculo puede hacerse considerando que la resistencia y la inductancia de la bobina se encuentran ambas, como lo muestra la figura P5.2, separadas y concentradas en sendos puntos del circuito equivalente. Por tal motivo a este circuito así representado se lo conoce como modelo serie de parámetros concentrados.

Problema 5.4

Se quiere que para el acoplamiento magnético del problema 5.1, escriba las ecuaciones de Kirchhoff que modelan las caídas inductivas, cuando sendas bobinas, son recorridas por las corrientes “ $i_1(t)$ ” e “ $i_2(t)$ ”, con el mismo sentido arbitrario que en el problema original, tienen “ I_1 ” e “ I_2 ”.

Problema 5.5

Una bobina rectangular de N vueltas, de longitud “ b ” y ancho “ a ”, gira con velocidad angular “ $\omega_M = \pi \cdot n / 30$ ” inmersa en un campo de inducción magnética uniforme

“B”. a) Demostrar que en la espira aparecerá una fem inducida, dada por la siguiente expresión.

$$e(t) = \omega \cdot N \cdot b \cdot a \cdot B \cdot \sin(\omega t + \delta_e) \quad (\text{P5.3})$$

Donde: “ $\omega = \omega_M$ ”

b) Explique por que la pulsación resulta igual a la frecuencia angular.

c) ¿Cuántas y cuáles son las aplicaciones que se le puede dar al ángulo “ δ_e ” ?

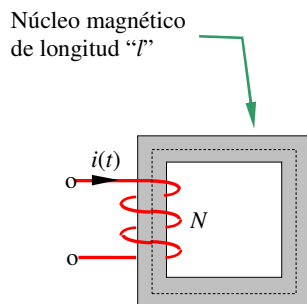
Problema 5.6

Con relación al problema anterior, se quiere:

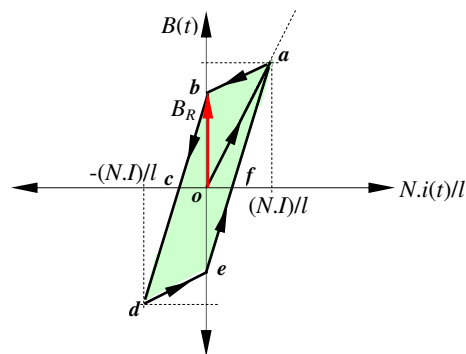
- 1) Diseñar una bobina de fase (o de inducido) que produzca una fem de amplitud “ $E_{max} = 311.13 \text{ V}$ ”, cuando la espira gire a razón de “ $n = 3000 \text{ [rpm]}$ ”, inmersa en un campo de inducción magnética de “ 6000 [G] ”.
- 2) Cuantos polos deberá tener la máquina y como se modificaría el diseño del inductor, si la máquina impulsora fuera de “ $n = 1500 \text{ [rpm]}$ ”.

Problema 5.7

Considere una bobina con núcleo magnético, formando un circuito magnético cerrado como el que se muestra en la figura P5.3.



Bobina con núcleo magnético
Figura P5.3



Características magnéticas del núcleo
Figura P5.4

Para cada ciclo de magnetización del núcleo, se quiere determinar la energía absorbida por el núcleo magnético debido a la curva de histéresis. Cada ciclo de magnetización del núcleo obedece a que la corriente “ $i(t)$ ” arranca de “0 a I ” luego vuelve a “0”, arranca en sentido negativo de “0 a $-I$ ” y regresa a “0”, donde se completa el ciclo de magnetización.

Característica magnética referida a la figura P5.4:

Tramo “ oa ”	$B(t) = 0.50 (NI/l)$
Tramo “ ab ”	$B(t) = 0.25 (NI/l) + B_R$
Tramo “ bcd ”	$B(t) = 0.75 (NI/l) + B_R$
Tramo “ de ”	$B(t) = 0.25 (NI/l) - B_R$
Tramo “ efa ”	$B(t) = 0.75 (NI/l) - B_R$

Complemento teórico para comprender el problema

La curva de histéresis “*abcdefa*” mostrada en la figura P5.4, cuando el material no ha sido previamente magnetizado, arranca en “*o*” y comienza su desarrollo a través de la recta “*oa*”, cuando la corriente va de “0 a *I*”, es decir cuando “ $Ni(t)/l$ ” va de “0 a (NIl)” y se llama curva de primera magnetización. Cuando la corriente decrece de “*I* a 0”, también lo hace “ $Ni(t)/l$ ” desde “(NIl) a 0”, sólo que ahora la curva vuelve por la recta “*ab*” y el material queda con un magnetismo remanente de inducción “ B_R ”.

Cuando la corriente cambia de sentido y va de “0 a $-I$ ”, “ $Ni(t)/l$ ” va de “0 a ($-NIl$)” y lo hace por una nueva curva “*bcd*”. El segmento “ $Ni(t)/l = bc$ ” es necesario para contrarrestar el magnetismo remanente y es la consecuencia de la pérdida de energía, es decir, no sirve para magnetizar el material en el nuevo sentido, sólo sirve para cancelar el efecto de la magnetización remanente del sentido positivo de la corriente.

En el regreso de “ $-I$ a 0”, “ $Ni(t)/l$ ” va de “($-NIl$) a 0” y la curva nuevamente retorna por un nuevo camino “*de*”, dejando en “*e*”, el mismo magnetismo remanente, pero de signo contrario que en “*b*”, es decir “ $-B_R$ ”.

En este punto comienza un nuevo ciclo de magnetización “*eabcde*”, sólo que de ahora en adelante, cada ciclo arrancará desde “*e*” y se repetirá tantas veces como lo haga el ciclo de la corriente que lo produce. El área que queda encerrada en estos ciclos llamados de histéresis, es proporcional a la energía no devuelta por la bobina, debido a que fue transformada en calor en el material.

Problema 5.8

Una bobina con 100 vueltas de alambre de cobre aislado arrolladas sobre un cilindro de hierro cuya sección transversal es de 0.001 m^2 , se conecta con una resistencia. La resistencia total en el circuito es de 10 ohms. Si la inducción magnética longitudinal en el hierro cambia de 1 weber/ m^2 en un sentido a 1 weber/ m^2 en sentido contrario, averiguar la carga que fluye por el circuito.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{e(t)}{R} \quad \text{Expresión sugerida} \quad (\text{P5.4})$$

Problema 5.9

Una bobina apretada de cobre de 100 vueltas y resistencia total de 5 ohms, es colocada fuera de un solenoide infinitamente largo de “ $n = 200 \text{ vtas/cm}$ ” y 3 cm de diámetro. Si la corriente en el solenoide cambia de 1.5 A a -1.5A en un $\Delta t = 0.05 \text{ s}$. Averiguar qué corriente aparecerá en la bobina.

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} \quad \text{Expresión sugerida} \quad (\text{P5.5})$$

Problema 5.10

Se dispone de un alambre de cobre de 50 cm de longitud y diámetro $d = 0.001016 \text{ m}$ (0.040 plg). Se le da la forma de una espira circular y se coloca perpendicular a un

campo magnético uniforme que aumenta con el tiempo a razón constante de 100 Gauss/seg. Calcular la rapidez con que se genera calor por efecto Joule en la espira.

Problema 5.11

Un pequeño imán recto se hace pasar rápidamente a través y a lo largo del eje de una espira conductora. Se quiere que haga un gráfico cualitativo:

- a) de la inducción,
- b) del flujo,
- c) de la corriente inducida y
- d) de la rapidez de calentamiento por efecto Joule en función de la posición del centro del imán.

Suponga que el polo norte del imán es el primero que entra a la espira y que el imán se mueve con velocidad constante. Asigne en forma arbitraria el sentido positivo de la corriente inducida.

Problema 5.12

Un alambre rígido doblado en forma de “ Ω ”, con su parte semicircular de radio “ R ” que forma una espira cerrada con un medidor “ M ” intercalado, se hace girar con una velocidad angular “ $\omega_M = \text{cte}$ ”, en un campo de inducción magnética uniforme “ B ”. Se quiere que calcule la amplitud y la frecuencia de la tensión inducida y la corriente si la resistencia interna del medidor “ M ” es “ R_M ” (considerar que el resto del circuito tiene resistencia despreciable).

Problema 5.13

Demuestre que si el flujo de inducción magnética que pasa por una bobina circular de “ N ” espiras, cambia en alguna forma de “ ϕ_2 ” a “ ϕ_1 ”, la carga “ q ” que pasa por el circuito de resistencia total “ R ” está dada por la expresión

$$q = \frac{N \cdot (\phi_2 - \phi_1)}{R} \quad (\text{P5.6})$$

Problema 5.14

Una inductancia de 10 Henrys (H), lleva una corriente constante de 2 A. Se quiere que calcule el intervalo de tiempo Δt en el que debe anularse la corriente para que se autoinduzca una fem de 100 volts.

Problema 5.15

Dos inductancias “ L_1 ” y “ L_2 ” se conectan en serie y separadas entre sí una gran distancia. Se quiere que obtenga: a) la inductancia equivalente “ $L = L_1 + L_2$ ” y b) que explique ¿por qué deben estar tan separadas?

Problema 5.16

Demuestre que si dos bobinas de igual inductancia “ L ” se conectan en paralelo, la inductancia equivalente a la combinación es “ $L/2$ ”. Las bobinas están muy alejadas entre sí.

Problema 5.17

Dos alambres paralelos de sección circular de radio “ r ”, cuyos centros están separados una distancia “ D ”, llevan corrientes iguales y de sentido contrario. Demostrar que el FTC de un tramo de longitud “ l ” de ese par de alambres, está dada por la siguientes expresión:

$$\lambda = 2 \frac{\mu_o l}{2\pi} I \cdot \left(\frac{\mu_r}{4} + \ln \frac{D}{r} \right) \quad [\text{Wb}] \quad (\text{P5.7})$$

Donde:

r : radio del conductor,

$\mu_o = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]} = \text{[Wb/(Am}^2\text{)]} = \text{[H/m]} = \text{[(V.s/A.m)]}$ permeabilidad del espacio libre,

μ_r : permeabilidad relativa del conductor,

D : distancia entre ejes de los conductores del circuito.

Problema 5.18

Un solenoide delgado y largo se puede doblar en forma de anillo para formar un toroide. Se debe demostrar que si el solenoide es suficientemente largo y delgado, la ecuación de la inductancia de un toroide, se reduce a la del solenoide.

Problema 5.19

Se construye un solenoide de una sola capa de alambre de cobre de 0.00254 m de diámetro. El solenoide tiene un diámetro de 4.0 cm y un largo de 2.0 metros. Se quiere determinar la inductancia por unidad de longitud del solenoide cerca de su centro, si se supone que los alambres adyacentes están pegados y que el espesor del aislamiento es despreciable.

Problema 5.20

La inductancia de una bobina apretada de 400 vueltas es de 8 mH. Calcular el flujo magnético que pasa por la bobina cuando la corriente es $5 \times 10^{-3} \text{ A}$.

Problema 5.21

Un núcleo toroidal de madera cuya sección transversal es cuadrada, de radio interior igual a 10 cm y radio exterior de 12 cm. El núcleo tiene arrollada una bobina de una capa de alambre de 1.02 mm de diámetro y $523 \text{ }\Omega\text{m}$ de resistencia. Calcular:

- a) la inductancia,
- b) la constante de tiempo inductiva.

No tomar en cuenta el espesor del aislamiento.

Problema 5.22

Encontrar el modelo más apropiado para utilizar en estudios de sistemas de potencia, del acoplamiento magnético dado en el problema 5.1.

Problema 5.23

En la figura P5.5 se muestra un corte transversal de dos circuitos aledaños que comparten la misma canalización. Estos circuitos poseen un arreglo geométrico similar al mostrado en la figura 5.9, del punto 7.3.1, de este mismo capítulo, pero sólo hay corriente en el circuito 1.

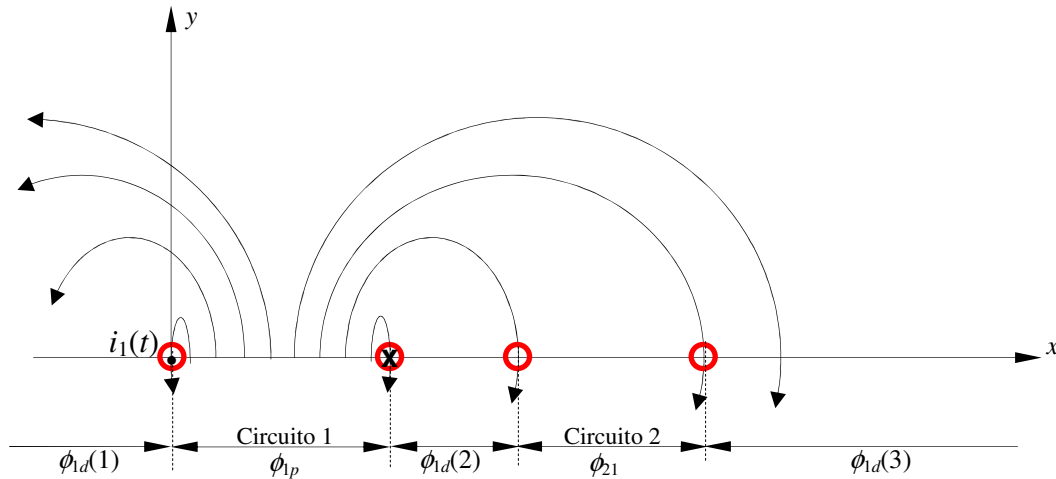


Figura P5.5

Se quiere que:

- Distinga gráficamente con diferentes colores, las franjas que conforman los distintos flujos que visualice en el gráfico y describa a que tipo de flujo pertenece, así como también su suma o composición si corresponde:
 - Flujo propio
 - Flujo disperso
 - Flujo mutuo
 - Flujo concatenado
 - Flujo total concatenado
- Cual de los flujos usaría para determinar la tensión inducida en el circuito 2 debida a la corriente " $i_1(t)$ " en el circuito 1.
- Si la corriente en el circuito 1 aumentara linealmente con el tiempo cual sería el sentido de la tensión inducida en el circuito 2.
- Si el circuito 2 tiene un coeficiente de autoinducción " L_2 " y el coeficiente de mutuainductancia entre ambos circuitos es " M " como escribiría la caída inductiva en el circuito 2 (suponga que el conductor con el que esta construido no tiene resistencia ohmica).
- ¿Qué obtiene de los productos " $i_2 \cdot L_2$ " e " $i_1 \cdot M$ "?
- Si el circuito 2 fuera una bobina de " N_2 " espiras cual sería:
 - el flujo total concatenado compuesto,
 - cual sería el total concatenado propio y
 - cual el total concatenado mutuo.

Problema 5.24

En la figura se muestran tres arrollamientos y mediante líneas de trazo los flujos propios " ϕ_{1p} ", " ϕ_{2p} " y " ϕ_{3p} " que cada arrollamiento produce. También se muestran los flujos mutuos " ϕ_{21} " y " ϕ_{31} ", estos últimos, por razones de claridad en el dibujo, se indican sólo para el acoplamiento entre la bobina "1" con la "2" y la "1" con la "3".

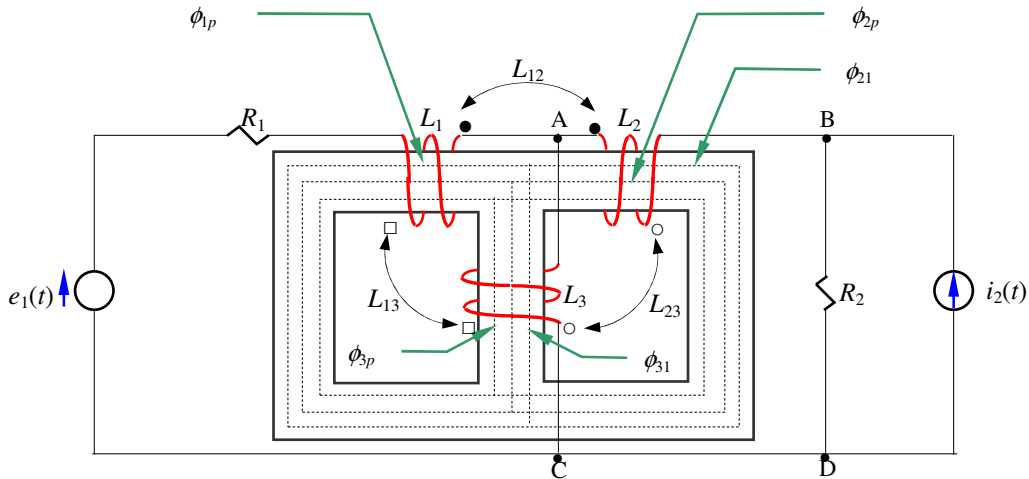


Figura P5.6

- Considerando la polaridad relativa indicada entre pares de bobinas ¿qué sentido arbitrario se deberá elegir para las corrientes de rama, de manera que los flujos mutuos se sumen a los flujos propios?
- ¿Se conseguirá algún arreglo arbitrario para el sentido de las corrientes, tal que los flujos mutuos sean aditivos al propio para todos los casos?
- Con el sentido arbitrario elegido para las corrientes, escriba las ecuaciones para cada rama.
- Escriba las ecuaciones de cada rama, si el sentido arbitrario elegido para las corrientes fuera convergente al nodo "A".
- Escriba para el sentido de las corrientes del punto anterior las caídas de tensión en cada bobina y señálelas en el dibujo con una flecha.
- Con el sentido arbitrario definido en el punto (a) y utilizando el método del punto, indique en la figura P5.7 simplificada, la polaridad relativa de acuerdo al sentido de los arrollamientos mostrados en la figura P5.6. Indique también en la misma figura simplificada la flecha y expresión de la caída de tensión para cada componente pasivo.

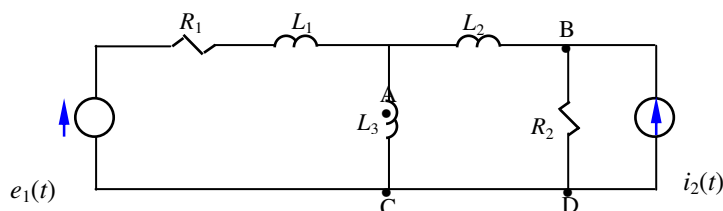


Figura P5.7

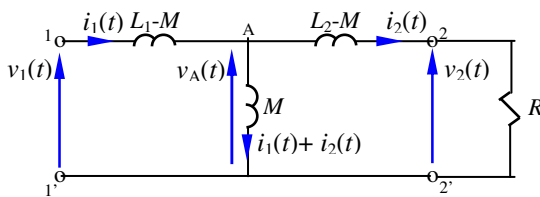
Problema 5.25

Considerando que el coeficiente de aumento de resistencia por grado de temperatura para el Cu, es “ $\alpha = 3.9 \times 10^{-3}$ [ohm/grado-celsius]”, determine los coeficientes necesario para calcular el efecto skin de los conductores de la tabla 5.1 Se deberá tomar como referencia de valores de continua los dados en la tabla 1.2, del capítulo 1 y para homologar resistencias en función de la temperatura se sugiere utilizar la siguiente expresión estudiada en capítulo 1.

$$r_{CA20^{\circ}C} (\text{ohm} / \text{km}) = \frac{r_{CA80^{\circ}C} ((\text{ohm} / \text{km}))}{\left[1 + \alpha \left(\frac{1}{^{\circ}C} \right) \cdot 60^{\circ}C \right]} \quad (\text{P5.8})$$

Se advierte que en 50 Hz, la resistencia de CA debida al efecto skin, tiene un aumento pequeño con relación a la resistencia de CC. Este efecto, cuyo cálculo es complejo, es creciente con la frecuencia.

Problema 5.26



Modelo de acoplamiento
simplemente conexo
Figura P5.8

Suponiendo que en los terminales de entrada “1-1’”, hay una fuente “ $v_1(t)$ ” y en los terminales de salida “2-2’”, hay una resistencia “ R ” y siguiendo la técnica de resolución de circuitos en escalera, se quieren determinar para el circuito de la figura, las relaciones entre tensiones y corrientes de entrada y salida del acoplamiento.

El procedimiento es similar al desarrollado en el punto 7.4.4.

CONSTANTES Y EQUIVALENCIAS

Constante	Símbolo	Valor	Unidad
Carga fundamental	e ó p	1.602	Coulombs
Masa del electrón	m_e	9.1095×10^{-31}	Kg
Masa del protón	m_p	1.673×10^{-27}	Kg
Masa del neutrón	m_n	1.675×10^{-27}	Kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N/A ²
Aceleración de la gravedad	G	9.81	m/s ²
Resistividad del cobre	ρ	1/57	$\Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}$
Resistividad del cobre	ρ	1.7×10^{-8}	$\Omega \cdot \text{m}$

Equivalencias

1 plg	1 plg	=	2.54 cm	cm
Energía	1eV	=	1.602×10^{-19} J	Joules
Inducción magnética	1 Tesla	=	10^4 G	Gauss