

ELECTROTECNIA I

CAPITULO 6

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA EN VARIABLE REAL

CAPITULO 6 CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA EN VARIABLE REAL

1. INTRODUCCION
 2. GENERADOR DE CA MONOFASICO MAS ELEMENTO PASIVO SIMPLE
 - 2.1 Generador de fem alternada sinusoidal más resistencia
 - 2.2 Generador de fem alternada sinusoidal más inductancia
Conclusiones importantes
 - 2.3 Generador de fem alternada sinusoidal más capacitancia
 - 2.4 Reactancia y susceptancia
 - 2.5 Circuito RLC serie con fem alternada sinusoidal
Conclusión general
Graficación de variables
 - 2.6 Impedancia y admitancia
 - 2.7 Circuito RLC paralelo con fuente de corriente alternada sinusoidal
 - 2.8 Resonancia
 3. OPERACIÓN CON FUNCIONES ARMONICAS
 - 3.1 Expresión rectangular de funciones armónicas.
 - 3.2 Suma de funciones armónicas de igual frecuencia.
 4. POTENCIA EN CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA
 - 4.1 Generalización de los conceptos de energía y potencia.
 - 4.2 Potencia instantánea.
Aclaración importante
 - 4.3 Valor medio cuadrático, eficaz y potencia media.
Conclusión importante
Nota importante
 - 4.4 Cálculo del valor medio cuadrático y eficaz de una función senoidal del tiempo.
 - 4.5 Potencia en corriente alterna, absorbida (entretenida) por una bobina.
 - 4.6 Potencia en corriente alterna, absorbida (entretenida) por un condensador.
 - 4.7 Cálculo de la energía o potencia entretenida verdadera, de cuarto de ciclo.
 - 4.8 Potencia en corriente alterna, absorbida (consumida) por una resistencia.
 - 4.9 Generalización de potencia en CA, absorbida por una impedancia.
 - 4.10 Cálculo de energía y potencia según la configuración del modelo.
 - 1) Caso de componentes en paralelo
 - 2) Caso de componentes en serie
 5. ACOPLAMIENTOS MAGNETICOS EN CORRIENTE ALTERNA
 - 5.1 Introducción.
 - 5.2 Modelo del transformador para análisis electrónico.
 - 5.3 Modelo del transformador para sistemas de potencia.
- PROBLEMAS PROPUESTOS CAPITULO 6**

CAPITULO 6

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA EN VARIABLE REAL

1. INTRODUCCION

En corriente continua se vio que para un circuito en régimen estacionario, una resistencia es un coeficiente de proporcionalidad lineal entre “ V ” e “ I ”, una inductancia un cortocircuito y una capacitancia un circuito abierto. Si estos elementos pasivos son conectados en cualquier configuración a una fuente de fem alternada sinusoidal como la estudiada en el punto 8 del capítulo 5, cuya tensión en terminales puede venir dada por: “ $e(t) = E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$ ” o por “ $e(t) = E_{max} \cdot \text{cos}(\omega t + \delta_e)$ ”, se originará de acuerdo a lo estudiado, una corriente que en régimen permanente, también será alternada sinusoidal. Lo anterior significa que en circuitos de corriente alterna, tanto el inductor como el capacitor, también se comportan linealmente.

Se aclara que cuando se dice “variable real”, además de señalar que se encuentra en el campo de los números reales, fundamentalmente se quiere significar que como función del tiempo se trabaja con la variable en su verdadera forma funcional, senoidal o cosenoidal, es decir, resultan funciones armónicas.

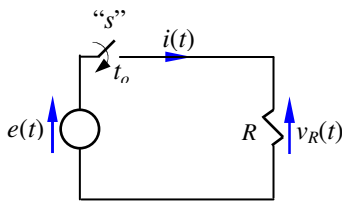
2. GENERADOR DE CA MONOFASICO MAS ELEMENTO PASIVO SIMPLE

Para ir de lo simple a lo complejo se comenzará con el estudio de la conexión de los tres elementos pasivos simples “ R ”, “ L ” y “ C ”, de a uno por vez.

2.1 Generador de fem alternada sinusoidal más resistencia

Si se conforma un circuito con un generador de corriente alternada sinusoidal que alimenta una resistencia, como el de la figura 6.1, al cerrar la llave “ s ”, circulará una corriente que en régimen estacionario, también será alternada sinusoidal y que como debe ser para cualquier circuito y cualquiera sea su estado de funcionamiento, podrá ser determinada por la aplicación de las leyes de Kirchhoff. Esto debe ser así ya que como fue estudiado anteriormente, las leyes de Kirchhoff, constituyen la versión para circuitos eléctricos, de principios naturales tales como:

- 1) el principio de conservación de la carga y
- 2) el principio de conservación de la energía.



$$e(t) = E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$$

Figura 6.1

La (6.1) => que “ $V_{Rmax} = E_{max}$ ” y “ $\delta_v = \delta_e$ ”

- 1) El cumplimiento de la primera ley de Kirchhoff por ser el circuito propuesto de trayectoria única, resulta obvio. En cualquier nodo del circuito la corriente que entra será igual a la que sale.
- 2) Para el cumplimiento de la segunda ley de Kirchhoff, es necesario que:

$$e(t) = v_R(t) \quad (6.1)$$

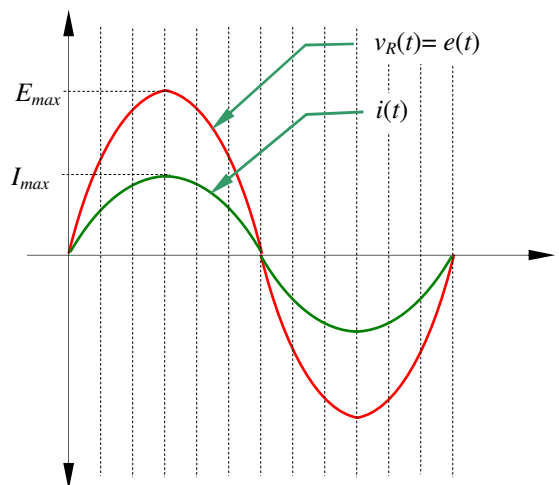
$$(6.2)$$

Por tratarse de una resistencia la ley física que relaciona “ $v_R(t)$ ” con “ $i(t)$ ”, es la ley de Ohm, es decir:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_{Rmax}}{R} \sin(\omega t + \delta_v) = \frac{E_{max}}{R} \sin(\omega t + \delta_e) = I_{max} \sin[\omega t + (\delta_e - 0)] \quad (6.3)$$

El “0” del término que se encuentra entre paréntesis ($\delta_e - 0$), correspondiente al argumento de la corriente “ δ_i ”, indica que el desfase de la corriente con relación a la tensión “ $v_R(t)$ ”, para el caso por tratarse de una resistencia, es nulo.

Aunque en la expresión (6.3), para el circuito propuesto, se podría haber escrito directamente “ $i(t) = e(t)/R$ ”, se ha preferido y se recomienda fuertemente respetar la ley de Ohm en un sentido riguroso. Es decir, como se hizo en (6.3), se debe escribir primero “ $i(t) = v_R(t)/R$ ” y luego debidamente justificado “ $i(t) = e(t)/R$ ”. El sentido riguroso al que se hace referencia, significa que la expresión debe ser escrita en función de los parámetros asociados a la resistencia (es decir, dividir la tensión “ $v_R(t)$ ” en la resistencia por dicha resistencia) y no usar cualquier otra tensión que circunstancialmente coincida, como para el caso sucede por ley de Kirchhoff con “ $e(t) = v_R(t)$ ”. Los resultados han sido graficados en la figura 6.2 siguiente.



Generador de CA más “R”

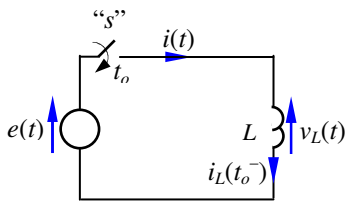
Figura 6.2

Para no quitar generalidad al desarrollo, el ángulo de referencia de la tensión “ $\delta_v = \delta_e$ ” que por simplicidad de representación se toma como “0”, ha sido dejado expresado. El ángulo de fase de la corriente que en (6.3) se designó con “ $\delta_i = (\delta_i - 0) = (\delta_e - 0)$ ”, muestra que no existe desfase de la corriente “ i ” con relación a la caída “ $v_R(t)$ ”, por lo que el desfase “ $\varphi = \delta_v - \delta_i = 0$ ”.

Se aclara que en adelante para indicar diferencia angular (desfase), entre tensiones y corrientes, se usará fundamentalmente la letra griega “ φ ”. Para desfases sólo entre tensiones o sólo entre corrientes, se usará la letra griega “ δ_{vk-vm} ” con doble subíndice. Ejemplo de esto último, es el caso del desfase entre dos tensiones “ $v_k(t)$ ” con respecto a “ $v_m(t)$ ” que se indicará como “ $\delta_{vk-vm} = \delta_{vk} - \delta_{vm}$ ”.

2.2 Generador de fem alternada sinusoidal más inductancia

Sea ahora un generador de corriente alternada sinusoidal con un inductor como el de la figura 6.3, al cerrar la llave “ s ”, también ahora circulará una corriente que en régimen estacionario será alternada sinusoidal y siguiendo el mismo procedimiento que para el caso anterior, podrá ser determinada a través de las leyes de Kirchhoff.



$$e(t) = E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$$

Figura 6.3

- 1) Del mismo modo que en el caso anterior, el cumplimiento de la primera ley de Kirchhoff por ser el circuito propuesto de trayectoria única, resulta obvio.
- 2) El cumplimiento de la segunda ley de Kirchhoff, se tiene que dar ahora también para:

$$e(t) = v_L(t) \quad (6.4)$$

Igual que en el caso anterior, la (6.4) => que “ $V_{Lmax} = E_{max}$ ” y “ $\delta_v = \delta_e$ ” (6.5)

Por tratarse ahora de una inductancia, la ley física que relaciona los parámetros asociados a la bobina “ $v_L(t)$ ” con “ $i(t)$ ” es la ley de Faraday-Lenz, es decir de acuerdo con lo visto, la caída inductiva en la bobina deberá ser:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{De donde} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt + i_L(t_0^-) \quad (6.6)$$

Donde “ $i_L(t_0^-)$ ”, es la condición inicial que podría haber en la bobina en el instante “ t_0^- ”, un infinitésimo de tiempo antes de que se cierre la llave “ s ”. Como en el presente capítulo interesa sólo el tratamiento de los circuitos en régimen estacionario “ $t \gg t_0$ ”, es decir, cuando el régimen transitorio se ha hecho despreciable, entonces la condición inicial que opera sólo en régimen transitorio, no tendrá influencia y por lo tanto no se considera. Entonces (6.6) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int V_{Lmax} \sin(\omega t + \delta_v) \cdot dt = \frac{1}{L} \int E_{max} \sin(\omega t + \delta_e) \cdot dt = \\ &= \frac{E_{max}}{\omega L} \int \sin(\omega t + \delta_e) \cdot \omega \cdot dt = -\frac{E_{max}}{\omega L} \cos(\omega t + \delta_e) \quad (6.7) \end{aligned}$$

Transformando la función coseno en el seno equivalente y haciendo “ $X_L = \omega L$ ”, se tiene:

$$i(t) = \frac{V_{Lmax}}{X_L} \sin \left[\omega \cdot t + \left(\delta_v - \frac{\pi}{2} \right) \right] = I_{max} \sin(\omega \cdot t + \delta_i) \quad (6.8)$$

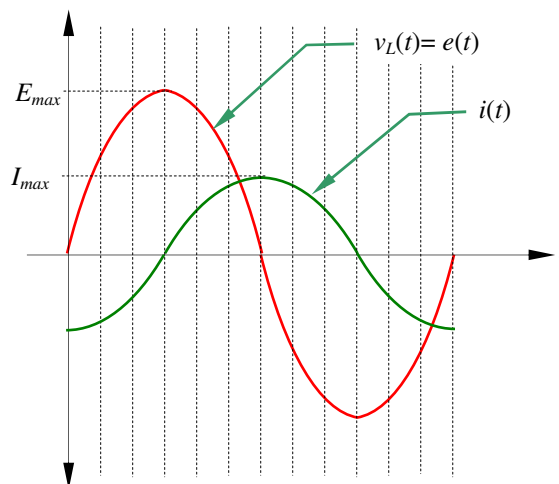
Como se observa en la expresión (6.8), para obtener el valor pico de la corriente, hay que dividir por “ X_L ”, el valor pico “ V_{Lmax} ” de la caída de tensión en la bobina. Esto resulta matemáticamente lo mismo que se hizo por Ley de Ohm en (6.3), para obtener el valor pico de la corriente a través de la resistencia. Esta analogía matemática permite hacer una analogía circuital comparando el efecto limitador que la inductancia ejerce sobre la corriente, con el de la resistencia. En consecuencia, por analogía, al nuevo parámetro “ X_L ” se le da un nombre parecido al de la resistencia, reactancia inductiva por corresponder a una inductancia y por ser al igual que la resistencia, coeficiente de proporcionalidad lineal entre “ $v_L(t)$ ” e “ $i(t)$ ”, su unidad es el “ohm”.

Es importante aclarar que la analogía descripta, es sólo desde un punto de vista matemático formal, recuerde que la resistencia disipa la energía que absorbe, mientras que la inductancia la almacena en su campo magnético, para devolverla luego al circuito.

La amplitud:

$$I_{max} = \frac{E_{max}}{X_L} \quad (6.9)$$

Por analogía puede llamarse Ley de Ohm para valores máximos (o de pico) de corriente alterna y es válida por lo menos, para el caso de que la fem sea alternada sinusoidal. En caso de que se quiera escribir la expresión de la corriente en forma directa, hay que tener presente que la corriente “ $i(t)$ ” sufre un desfase en atraso, con respecto a la tensión de terminales “ $v_L(t)$ ” dada por “ $\varphi = \delta_v - \delta_i = \pi/2$ ”. Aquí también, para no quitar generalidad al desarrollo, el ángulo de referencia de la tensión “ δ_v ”, a pesar de ser “0”, se ha dejado expresado. A diferencia de lo visto en punto 2.1 anterior, la corriente tiene un ángulo de referencia o de fase dado por “ $\delta_i = \delta_v - \varphi = \delta_v - \pi/2$ ”.



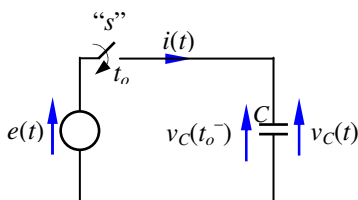
Generador de CA más “L”
Figura 6.4

Conclusiones importantes

- Se puede ahora enunciar que la “ $i(t)$ ” antes calculada, atrasada 90[grd-ele] con relación a “ $v_L(t)$ ”, es consecuencia de la necesidad de que aparezca un flujo FC “ $\phi(t)$ ” y su correspondiente FTC “ $\lambda(t)$ ”, tal que su derivada con signo positivo, caída inductiva “ $v_L(t)$ ” verifique la segunda ley de Kirchhoff, es decir, siempre se debe cumplir que “ $e(t) = v_L(t)$ ”.
- Se podría decir también que toda vez que en una bobina su corriente “ $i(t)$ ”, se encuentre desfasada 90[grd-ele] en atraso, con respecto a su tensión de terminales “ $v_L(t)$ ”, ésta es una consecuencia directa de su inductancia propia y resulta necesaria para que se cumpla la segunda ley de Kirchhoff.
- Las aclaraciones anteriores se hacen porque cuando una bobina forma parte de un acoplamiento magnético, la corriente a través de ella por lo general no estará desfasada 90[grd-ele] con respecto a su tensión de terminales “ $v_L(t)$ ”. Esto se debe a que resulta de la combinación de dos componentes separable: 1) la necesaria, como fue antes descrito para que se cumpla la segunda ley de Kirchhoff y 2) la corriente que tiene que aparecer para que de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz, se opere la cancelación del flujo mutuo, consecuencia de la transferencia de energía a través del acoplamiento con la otra bobina.

2.3 Generador de fem alternada sinusoidal más capacitancia

Queda ahora conectar un generador de corriente alternada sinusoidal con un capacitor, como el de la figura 6.5, nuevamente al cerrar la llave “s” circulará una corriente que en régimen estacionario será también alternada sinusoidal y con el mismo procedimiento que para los casos anteriores, podrá ser determinada a través de las leyes de Kirchhoff.



$$e(t) = E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$$

Figura 6.5

1) Por ser el circuito propuesto de trayectoria única, el cumplimiento de la primera ley de Kirchhoff resulta obvio.

2) También para el cumplimiento de la segunda ley de Kirchhoff, se tiene que dar:

$$e(t) = v_C(t) \quad \text{que implica} \quad (6.10)$$

$$“V_{Cmax} = E_{max}” \text{ y } “\delta_v = \delta_e” \quad (6.11)$$

Para establecer la relación entre “ $v_C(t)$ ” con “ $i(t)$ ”, parámetros asociados al capacitor, es necesario ahora acudir al concepto físico de capacitancia, es decir, la tensión en terminales del capacitor deberá ser:

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt + v_C(t_0^-) \quad \text{Derivando y despejando } i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (6.12)$$

Aquí también “ $v_C(t_0^-)$ ”, es la condición inicial que podría haber en el capacitor en el instante “ t_0^- ”, un infinitésimo de tiempo antes de que se cierre la llave “s”. Nuevamente se recuerda que como lo que interesa es el tratamiento en régimen estacionario, es decir para “ $t \gg t_0$ ”, cuando el régimen transitorio resulta despreciable, la condición inicial

“ $v_C(t_0^-)$ ” que opera sólo en régimen transitorio, no tendrá influencia y por lo tanto no se considera. Por lo dicho (6.12) puede escribirse como:

$$i(t) = C \frac{d}{dt} [V_{C_{\max}} \sin(\omega t + \delta_v)] = C \frac{d}{dt} [E_{\max} \sin(\omega t + \delta_e)] = \omega C E_{\max} \cos(\omega t + \delta_e) \quad (6.13)$$

O también

$$i = \frac{V_{C_{\max}}}{\frac{1}{\omega C}} \cdot \cos(\omega t + \delta_v) \quad (6.14)$$

Transformando el coseno en una función seno equivalente y haciendo “ $X_C = 1/(\omega C)$ ”, se tiene:

$$i(t) = \frac{V_{C_{\max}}}{X_C} \sin \left[\omega t + \left(\delta_v + \frac{\pi}{2} \right) \right] = I_{\max} \sin(\omega \cdot t + \delta_i) \quad (6.15)$$

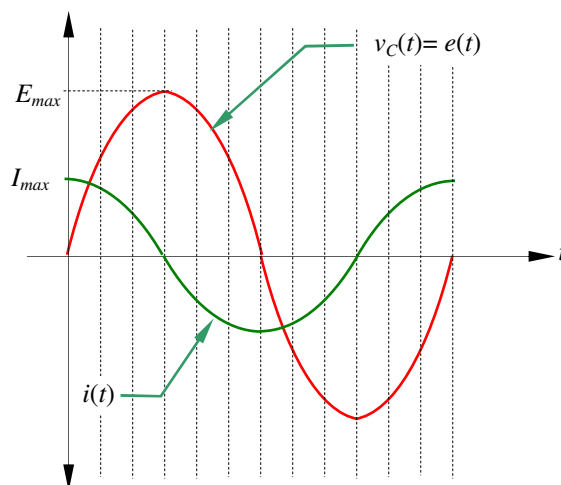
Nuevamente la expresión (6.15) muestra que el valor pico de la corriente que toma el capacitor, se obtiene de dividir el valor pico de la tensión “ $V_{C_{\max}}$ ” que obra en terminales del capacitor, por “ X_C ”. Al igual que en el punto anterior, es matemáticamente lo mismo que se hizo para obtener el valor pico de la corriente a través de la resistencia, lo que permite aquí también hacer una analogía circuital, comparando el efecto limitador que la capacitancia ejerce sobre la corriente, con el de la resistencia. Al nuevo parámetro “ X_C ” se le da un nombre parecido al de la resistencia, reactancia capacitiva, por corresponder a una capacitancia y por ser al igual que la resistencia, coeficiente de proporcionalidad lineal entre la tensión “ $v_C(t)$ ” y la corriente “ $i(t)$ ”, su unidad es el “ohm”.

Aquí al igual que en el caso de la inductancia, la analogía es sólo desde un punto de vista matemático formal. La energía que absorbe un condensador es almacenada en su campo eléctrico y devuelta también al circuito. La expresión final de la corriente a través de un capacitor resulta como se indica en la (6.15).

La amplitud dada ahora por:

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{X_C} \quad (6.16)$$

Es lo que se llama también ley de Ohm para corriente alterna y es válida por lo menos, para el caso de que la excitación sea alternada sinusoidal para valores de pico. En caso de querer escribir la expresión de la corriente en forma directa, hay que tener presente que la corriente “ $i(t)$ ” sufre un desfase en adelante, con respecto a la tensión de terminales “ $v_C(t)$ ” que viene dada por “ $\varphi = \delta_v - \delta_i = -\pi/2$ ”. Una vez más, para no quitar generalidad al desarrollo, el ángulo de referencia de la tensión “ δ_v ”, a pesar de que por simplicidad de representación es “0”, se deja expresado. Para este caso también a diferencia de lo visto en punto 2.1, la corriente tiene un ángulo de referencia o de fase designado con “ $\delta_i = \delta_v - (-\pi/2) = \delta_v + \pi/2$ ”. Este ángulo corresponde a un desplazamiento angular de 90° en adelante.



Generador de CA más “C”
Figura 6.6

Nota general:

Como fue explicado dado que lo que se quiere es estudiar y/o analizar son circuitos en régimen estacionario, en adelante no será necesario señalar sus condiciones iniciales y salvo por alguna particularidad que se quiera poner de manifiesto, tampoco será necesario mostrar la llave “s” de puesta en funcionamiento del circuito.

2.4 Reactancia y susceptancia

Cuando se estudió el concepto de resistencia “R”, cuya unidad es el “[ohm]=[Ω]”, se vio que su inversa conocida como conductancia y designada con la letra “G”, tiene como unidad $[1/\Omega]=[mho]=[Siemen]$. Pues bien, ahora se ha definido un nuevo parámetro, la reactancia que aún cuando en el fondo difiere de la resistencia, en lo formal se comporta como ésta. Como se dijo su unidad es también el “[ohm]=[Ω]” y de acuerdo con esto se puede definir a la inversa de la reactancia como susceptancia. La susceptancia que puede ser inductiva o capacitiva, según sea el caso:

$$B_L = \frac{1}{X_L} \quad \text{ó} \quad B_C = \frac{1}{X_C} \quad (6.17)$$

En consecuencia su unidad se corresponderá con la de la conductancia, es decir, $[1/\Omega]=[mho]=[Siemen]$.

2.5 Circuito RLC serie con fem alternada sinusoidal

Casi todos los circuitos reales finalmente representan para el generador una combinación serie o paralelo de los elementos pasivos simples: resistencia, inductancia y/o capacitancia. Se quiere ahora introducir al lector en el cálculo de circuitos de corriente alterna en variable real, el objeto es que se comprenda su funcionamiento y que se tome conciencia, dado que el planteo del sistema en variable real resulta en ecuaciones integro-diferenciales, de lo complicado que resulta su modelado y resolución. Para demostrar lo dicho se analiza el circuito de la figura 6.7, combinación serie de “R”, “L” y “C”.

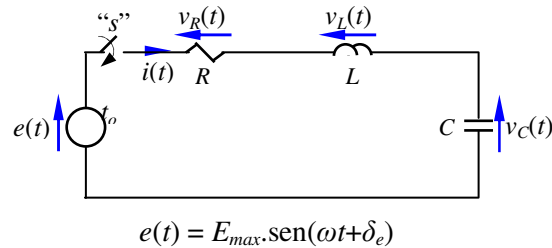


Figura 6.7

Como fue dicho, para la resolución del circuito, siempre será necesario aplicar las leyes de Kirchhoff. En el caso del circuito de la figura 6.7, por tratarse de una malla, la primera ley resulta obvia y la segunda ley de Kirchhoff se cumplirá para:

$$e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \quad (6.18)$$

Reemplazando cada caída de tensión por la que corresponda según la ley física que aplique: Ohm, Faraday-Lenz o concepto de capacitancia, la (6.18) quedará:

$$e(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt + v_C(t_0^-) \quad (6.19)$$

Analizando el caso para $e(t) = E_{max} \text{sen}(\omega t + \delta_e)$, la solución completa de la (6.19), como se sabe será:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad (6.20)$$

Si el tiempo transcurrido después de haber cerrado la llave “s” es suficientemente largo como para considerar que la respuesta libre se ha hecho despreciable “ $i_h(t) \approx 0$ ”, entonces de la solución completa quedará “ $i(t) \approx i_p(t)$ ”, es decir aproximadamente igual a la respuesta forzada por la fuente (régimen estacionario o permanente). Por estar compuesto el circuito por elementos lineales y bilaterales y como fue demostrado en forma individual para cada componente, la corriente “ $i_p(t)$ ” será sinusoidal, o sea, de la misma forma funcional que la parte in-homogénea “ $e(t)$ ” que representa la fuente forzante en la ecuación (6.19). Es decir que

$$i(t) \approx i_p(t) = I_{max} \text{sen}[\omega t + (\delta_e - \varphi)] \quad (6.21)$$

Como la (6.21) es solución, reemplazada en (6.19) junto con “ $e(t) = E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$ ”, deberá verificarla:

$$\begin{aligned} E_{max} \text{sen}(\omega t + \delta_e) &= R \cdot I_{max} \text{sen}(\omega t + \delta_e - \varphi) + \\ &+ \omega L \cdot I_{max} \cos(\omega t + \delta_e - \varphi) + \\ &+ (1/\omega C) \cdot I_{max} \cos(\omega t + \delta_e - \varphi) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Haciendo “ $\alpha = \omega t + \delta_e$ ”, “ $\beta = \varphi$ ” y considerando que

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha \quad (6.23)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta \quad (6.24)$$

Desarrollando según (6.23/24)

$$E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e) = I_{max} R [\text{sen}(\omega t + \delta_e) \cdot \cos \varphi - \cos(\omega t + \delta_e) \cdot \text{sen} \varphi] + \\ + I_{max} \omega L [\cos(\omega t + \delta_e) \cdot \cos \varphi + \text{sen}(\omega t + \delta_e) \cdot \text{sen} \varphi] - \\ - (I_{max} / \omega C) [\cos(\omega t + \delta_e) \cdot \cos \varphi + \text{sen}(\omega t + \delta_e) \cdot \text{sen} \varphi]$$

Operando y reagrupando

$$E_{max} \sin(\omega t + \delta_e) = I_{max} \left[R \cos \varphi + \omega L \sin \varphi - \frac{1}{\omega C} \sin \varphi \right] \sin(\omega t + \delta_e) + \\ + I_{max} \left[-R \sin \varphi + \omega L \cos \varphi - \frac{1}{\omega C} \cos \varphi \right] \cos(\omega t + \delta_e)$$

La última igualdad se cumple si y sólo si

$$E_{max} = I_{max} \left[R \cos \varphi + \omega L \sin \varphi - \frac{1}{\omega C} \sin \varphi \right] \quad \text{y} \quad (6.25)$$

$$-I_{max} \left[R \sin \varphi - \omega L \cos \varphi + \frac{1}{\omega C} \cos \varphi \right] = 0 \quad (6.26)$$

De (6.25) se obtiene “ $Z = E_{max} / I_{max}$ ” que representa a los efectos de calcular “ I_{max} ” una constante equivalente al conjunto de componentes conectados a “ $e(t)$ ” y que resulta función: 1) de los componentes y su configuración circuital, 2) de la frecuencia angular “ ω ” y 3) del ángulo de desfase “ φ ”, es decir:

$$Z = \frac{E_{max}}{I_{max}} = R \cos \varphi + \omega L \sin \varphi - \frac{1}{\omega C} \sin \varphi \quad (6.27)$$

Esta constante “ Z ” juega el mismo papel que “ R ” en (6.3), o que “ $X_L = \omega L$ ” en (6.8), o “ $X_C = 1/\omega C$ ” en (6.15), por tal motivo para este nuevo parámetro se adopta un nombre parecido a aquellos, el de impedancia y debe entenderse como un componente equivalente a la configuración circuital que eventualmente se trate. Como se deduce de la misma expresión, por relacionar tensión y corriente, su unidad debe ser también el “[ohm]=[Ω]”.

De la (6.26) se obtiene el ángulo de desfase entre la tensión “ $v(t)$ ” y la corriente “ $i(t)$ ” producido por la impedancia “ Z ” antes introducida, donde la tensión “ $v(t)$ ” corresponde a la caída provocada por “ Z ”.

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6.28)$$

De acuerdo con la construcción geométrica de la figura 6.8, se desarrolla la expresión (6.29). Esta es la impedancia “ Z ” del circuito que ve la fuente y se constituye para el caso, al igual que “ R ”, “ X_L ” y “ X_C ”, en el efecto limitador de la corriente. Esta impedancia, para el caso, resulta de la combinación de las tres componentes simples conectadas en serie y su expresión por Pitágoras resulta:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (6.29)$$

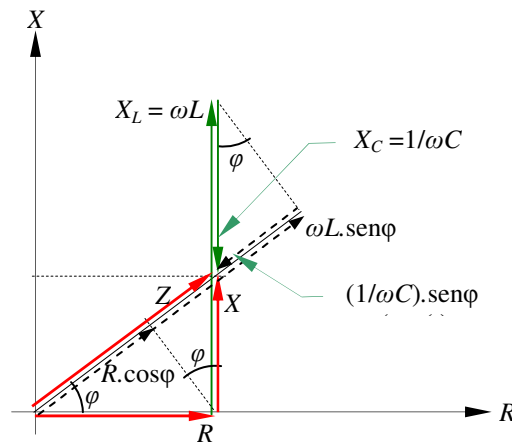


Figura 6.8

Del mismo modo de la (6.28) y del gráfico de la figura 6.8, se obtiene el desfase entre la tensión “ $v(t)$ ” en terminales de la impedancia “ Z ” y su corriente “ $i(t)$ ” que para el caso resulta en:

$$\varphi = \arctg \frac{\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)}{R} = \arctg \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad (6.30)$$

De la (6.27) se ve que la amplitud de la corriente puede obtenerse de

$$I_{\max} = \frac{E_{\max}}{Z} \quad (6.31)$$

La expresión (6.31) representa la generalización de lo que se puede denominar ley de Ohm para corriente alterna. La (6.31) que es formalmente similar a la ley de Ohm, puede ser usada para determinar el valor pico de la corriente a través de cualquier impedancia conocida de un circuito de corriente alterna. Por otra parte, de la (6.28/30), se obtiene el ángulo de desfase necesario para definir el ángulo de fase “ δ_i ”:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} \quad (6.32)$$

Conclusión general: Cuando se trabaja con variable real (función verdadera), cualquier dispositivo pasivo en su forma más general, como se muestra en la figura 6.9, queda definido por dos constantes reales, la impedancia “ Z ” y su ángulo “ φ ”. Estas constantes son obtenidas de resolver las ecuaciones diferenciales planteadas para el circuito en cuestión y sirven para:

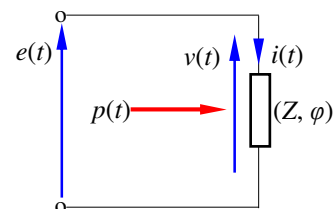


Figura 6.9

- 1) “ Z ”: permite obtener “ $I_{\max} = V_{\max}/Z$ ” y
- 2) “ φ ”: es el ángulo de desfase de la corriente con relación a la tensión, es decir “ $\varphi = \delta_v - \delta_i$ ”.

$$\text{Por lo estudiado si } v(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \delta_v) \quad (6.33)$$

Es la diferencia de potencial en terminales de la impedancia “Z” de la configuración serie “RLC”, entonces

$$i(t) = (V_{\max}/Z) \sin(\omega t + \delta_v - \varphi) = (E_{\max}/Z) \sin(\omega t + \delta_e - \varphi) = I_{\max} \sin(\omega t + \delta_i) \quad (6.34)$$

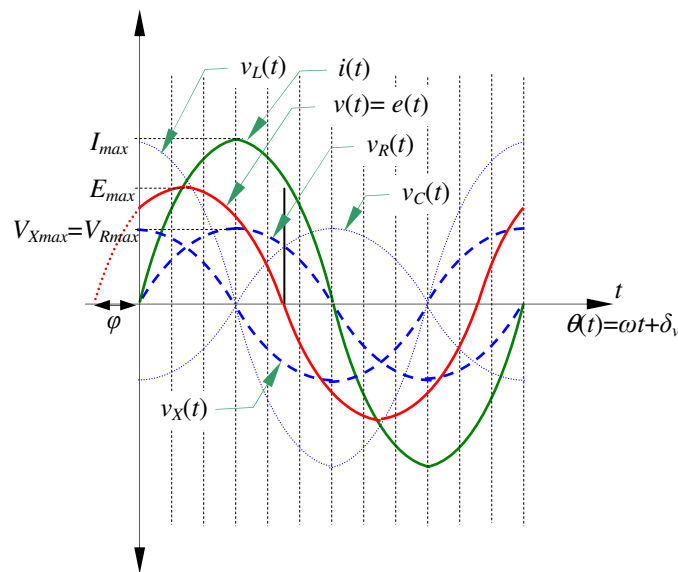
Graficación de variables:

Como se puede inferir de las figuras 6.2, 6.4 y 6.6, otro problema que se pone de manifiesto cuando se trabaja en variable real, es la representación gráfica de las variables que son funciones sinusoidales del tiempo. La dificultad aumenta con la complejidad del circuito. Como ejemplo, se representarán las variables “ $e(t)$ ”, “ $i(t)$ ”, “ $v(t)$ ”, “ $v_R(t)$ ”, “ $v_L(t)$ ” y “ $v_C(t)$ ”, de la configuración “RLC” serie desarrollada. Para tal fin, una vez determinada “ $i(t)$ ”, se pueden encontrar las caídas de tensión en cada componente que son:

$$v_R(t) = Ri(t) = RI_{\max} \sin(\omega t + \delta_i + 0) = V_{R\max} \sin(\omega t + \delta_{vR}) \quad (6.35)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = X_L I_{\max} \sin\left(\omega t + \delta_i + \frac{\pi}{2}\right) = V_{L\max} \sin(\omega t + \delta_{vL}) \quad (6.36)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = X_C I_{\max} \sin\left(\omega t + \delta_i - \frac{\pi}{2}\right) = V_{C\max} \sin(\omega t + \delta_{vC}) \quad (6.37)$$



Generador de CA más “RLC” serie
Figura 6.10

Los valores de las variables en el gráfico anterior son arbitrarios. Por simplicidad se adoptó también arbitrariamente, como referencia, el ángulo de fase de la corriente “ $\delta_i=0$ ” que es común a todos los elementos del circuito. La caída de tensión “ $v_X(t)=v_L(t)-v_C(t)$ ”, pone de manifiesto el carácter inductivo del circuito, por lo que la “ $v(t)=e(t)$ ”, adelanta un ángulo “ φ ” con relación a la corriente “ $i(t)$ ”. Por facilidad de representación, se hicieron “ $V_{X\max} = V_{R\max}$ ”, en la realidad generalmente no lo serán.

2.6 Impedancia y admitancia

Haciendo el mismo razonamiento que en punto 2.4 expresión (6.17), ahora que se ha definido otro nuevo parámetro llamado impedancia, cuya unidad es también el “[ohm]=[Ω]”, se define su inversa como la admitancia:

$$Y = \frac{1}{Z} \quad [1/\Omega]=[mho]=[Siemen] \quad (6.38)$$

2.7 Circuito RLC paralelo con fuente de corriente alternada sinusoidal

Anteriormente se resolvió un circuito “RLC” serie, como el mostrado en la figura 6.7. Se propone ahora la resolución de un circuito “RLC” paralelo, tal como se muestra en la figura 6.11.

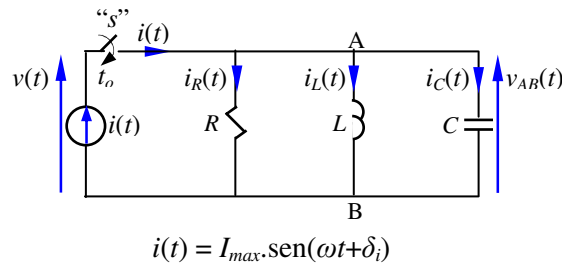


Figura 6.11

En este circuito de un solo par de nodos, de acuerdo con Kirchhoff resulta ahora evidente el cumplimiento de la segunda ley “ $v(t)=v_{AB}(t)$ ” y para que se verifique la primera, en los nodos “A” o “B”, deberá cumplirse que:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \quad (6.39)$$

Reemplazando cada corriente por la que corresponda según la ley física que aplique: Ohm, Faraday-Lenz o concepto de capacitancia, la (6.39) quedará:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) \cdot dt + i_L(t_0^-) + C \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.40)$$

Cuando se da la particularidad como la que se ve en la expresión (6.40), es decir que resulta matemáticamente igual a la del circuito “RLC” serie del punto 2.5, expresión (6.19), a los que la originan se los conoce como duales, concepto que sólo se menciona y que no será tratado.

Como se ve la (6.40), también resulta en una ecuación integro-diferencial, correspondiente a un circuito de un nodo linealmente independiente. Si el tiempo transcurrido después de haber cerrado la llave “s” es suficientemente largo como para considerar que la respuesta libre sea despreciable “ $v_h(t) \approx 0$ ”, entonces de la solución completa quedará “ $v(t) \approx v_p(t)$ ”, es decir aproximadamente igual a la respuesta forzada por la fuente (régimen estacionario o permanente). Como ya se dijo por estar el circuito compuesto por elementos lineales y bilaterales, la tensión “ $v_p(t)$ ” será sinusoidal, o sea, de la misma forma funcional que la parte in-homogénea “ $i(t)$ ” de la fuente forzante que sirve de excitación al circuito.

$$v(t) \approx v_p(t) = V_{max} \text{sen} [\omega t + \underbrace{\delta_v}_{\delta_i + \varphi}] \quad \text{Donde} \quad (6.41)$$

$$V_{max} = \frac{I_{max}}{Y} \quad (6.42)$$

La (6.42) es la ley de Ohm para corriente alterna expresada en términos de la admitancia.

2.8 Resonancia

Cuando un circuito se encuentra configurado con bobinas y capacitores como los casos de las configuraciones “*RLC*” serie o paralelo antes vistas, puede aparecer un fenómeno conocido como resonancia y es una consecuencia de que el efecto limitador que hacen las reactancias “ $X_L = \omega L$ ” y “ $X_C = 1/\omega C$ ”, para la configuración serie, o el efecto favorecedor de la corriente que tienen las susceptancias “ $B_C = \omega C$ ” y “ $B_L = 1/\omega L$ ” para la configuración paralelo, como se muestra para el caso de la configuración serie, expresiones (6.27) y (6.29), se restan y son función de la frecuencia. Entonces podrá haber un valor de frecuencia “ ω_o ” tal que para el caso de configuración serie, haga que “ $X_L - X_C = 0$ ” y que la corriente quede limitada sólo por la resistencia del circuito, o para el caso de configuración paralelo, haga que “ $B_C - B_L = 0$ ” y la caída de potencial común adopte un valor sólo por la resistencia.

En ambos casos la corriente y tensión entregadas por la fuente, como lo muestran para el caso las expresiones (6.28) y (6.30) de la configuración serie, los parámetros “ $v(t)$ ” e “ $i(t)$ ” se encontrarán en fase. Esto pone de manifiesto que en resonancia, la fuente del circuito, ve carga resistiva pura.

Se aclara que la forma matemática que adopta la reactancia total del circuito en resonancia “ $\omega_o L - 1/(\omega_o C) = 0$ ” de la expresión (6.27) o (6.29), es decir “ $\omega_o = (1/LC)^{1/2}$ ”, es exclusiva de la configuración serie. Si la configuración circuital cambia, también cambiará la expresión que define la frecuencia de resonancia. Por su importancia se volverá sobre la resonancia más adelante.

3. OPERACIÓN CON FUNCIONES ARMÓNICAS

Para la resolución y representación de los parámetros obtenidos es necesario saber operar con funciones armónicas, por lo que a continuación se introducen un par de conceptos útiles para tal fin.

3.1 Expresión rectangular de funciones armónicas.

En los circuitos, la forma más usual de las funciones armónicas puede ser:

$$g(t) = G_{\max} \sin(\omega t + \delta_g) \quad (6.43) \quad \text{o} \quad g(t) = G_{\max} \cos(\omega t + \delta_g) \quad (6.44)$$

Con el objeto de dar carácter general, las fuentes de tensión y corriente, o sea la excitación de los circuitos, se representan con la misma letra “ $g(t)$ ”. Del mismo modo las tensiones y corrientes resultante del cálculo del circuito excitado con las fuentes “ $g(t)$ ”, se representan con la misma letra genérica “ $f(t)$ ”.

$$\text{Haciendo } \theta(t) = \omega t + \delta_g \quad (6.45)$$

Cuando una excitación armónica como la (6.43) o (6.44) se aplica a un circuito lineal, como respuesta de régimen permanente, se obtiene una función armónica de la misma forma funcional, representada por:

$$f(t) = F_{\max} \sin[\theta(t) \mp \varphi] \quad \text{o} \quad (6.46)$$

$$f(t) = F_{\max} \cos[\theta(t) \mp \varphi] \quad (6.47)$$

Desarrollando (6.46) y (6.47) según las siguientes funciones trigonométricas, resultarán:

$$f(t) = F_{\max} \sin[\theta(t) \mp \varphi] = F_{\max} \sin \theta(t) \cos \varphi \mp F_{\max} \sin \varphi \cos \theta(t) \quad (6.48)$$

$$f(t) = F_{\max} \cos[\theta(t) \mp \varphi] = F_{\max} \cos \theta(t) \cos \varphi \pm F_{\max} \sin \theta(t) \sin \varphi \quad (6.49)$$

$$\text{Si en (6.48) se hace:} \quad A = F_{\max} \cos \varphi \text{ y } B = \mp F_{\max} \sin \varphi \quad (6.50)$$

$$\text{O en (6.49)} \quad A = \pm F_{\max} \sin \varphi \text{ y } B = F_{\max} \cos \varphi \quad (6.51)$$

Ambas expresiones (6.48) y (6.49) se reducen a la misma genérica siguiente:

$$f(t) = A \sin \theta(t) + B \cos \theta(t) \quad (6.52)$$

Donde como se observa en la figura 6.12, “A” y “B” podrían ser los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa “ F_{\max} ”, forma con el cateto horizontal, el ángulo “ φ ”.

Esta analogía es la que le confiere a la expresión (4.52), el nombre de representación rectangular. En la figura el cateto vertical “A” o “B”, se muestra sólo con su signo positivo.

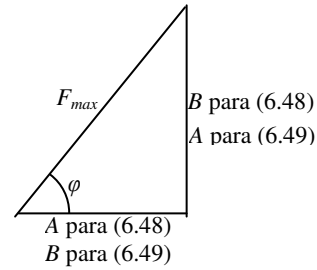


Figura 6.12

Considerando el teorema de Pitágoras, la relación pitagórica “ $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ ” y la tangente trigonométrica, los tres conceptos aplicados a (6.48), se tendrá que:

$$F_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2} = F_{\max} \sqrt{\cos^2 \varphi + (\mp \sin \varphi)^2} = F_{\max} \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (6.53)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{B}{A} = \tan^{-1} \frac{\mp F_{\max} \sin \varphi}{F_{\max} \cos \varphi} = \tan^{-1} \left(\mp \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \quad (6.54)$$

Y aplicados a (6.49), se tendrá:

$$F_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2} = F_{\max} \sqrt{(\pm \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} = F_{\max} \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (6.55)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{A}{B} = \tan^{-1} \frac{\pm F_{\max} \sin \varphi}{F_{\max} \cos \varphi} = \tan^{-1} \left(\pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \quad (6.56)$$

Las expresiones (6.53), (6.54) y (6.55), (6.56), permiten pasar de la expresión rectangular a la de función armónicas, seno y coseno respectivamente.

3.2 Suma de funciones armónicas de igual frecuencia.

Sean dos funciones “ $f_1(t) = F_{1\max} \sin[\theta(t) \mp \varphi_1]$ ” y “ $f_2(t) = F_{2\max} \sin[\theta(t) \mp \varphi_2]$ ”, expresando de acuerdo con (6.52) y sumando:

$$f_1(t) = A_1 \sin \theta(t) + B_1 \cos \theta(t) \text{ y } f_2(t) = A_2 \sin \theta(t) + B_2 \cos \theta(t) \quad (6.57)$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = (A_1 + A_2) \sin \theta(t) + (B_1 + B_2) \cos \theta(t) \quad (6.58)$$

Idéntico resultado se hubiera obtenido para armónicas expresadas en función del coseno. En caso de que las armónicas estén expresadas en los dos tipos, senos y cosenos, a través del círculo trigonométrico, pueden ser convertidas a una cualquiera de ambas.

4. POTENCIA EN CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

4.1 Generalización de los conceptos de energía y potencia.

En capítulo 1 punto 5, se estudió que la energía o trabajo “ T ” que absorbe y disipa una resistencia “ R ”, si “ V ” es la tensión en sus terminales y “ Δq ” la carga transportada durante un intervalo de tiempo “ Δt ”, a través de su diferencia de potencial “ V ”, resulta:

$$T = V \cdot \Delta q \quad (6.59)$$

Por definición de corriente, si la carga que atraviesa por unidad de tiempo la sección transversal de la resistencia es constante, se cumple que:

$$\Delta q = I \cdot \Delta t \Rightarrow T = V \cdot I \cdot \Delta t \quad \text{De donde} \quad (6.60)$$

$$P = T/\Delta t = V \cdot I \quad (6.61)$$

Esta expresión es válida para “ V ” e “ I ” constantes. Ahora bien, ¿qué pasa cuando el circuito no es de corriente continua y en consecuencia la tensión y corriente que originan la potencia, son variables con el tiempo, como por ejemplo de corriente alterna?. En tal caso siempre habrá un “ dt ” tal que los parámetros involucrados “ $v(t)$ ” e “ $i(t)$ ” puedan considerarse constantes y se pueda aplicar el concepto de energía, tal como se indica a continuación, por el producto de valores constantes, aunque sean casi de cráter instantáneo:

$$dT = v(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (6.62)$$

4.2 Potencia instantánea.

Si (6.62) es dividida m.a.m. por “ dt ”, se obtiene el concepto de potencia que obviamente será ahora función del tiempo, con lo que se obtiene lo que se conoce como potencia instantánea que como se ve es función del tiempo:

$$p(t) = \frac{dT}{dt} = v(t) \cdot i(t) \quad (6.63)$$

Aclaración importante: Esta expresión es la más general aplicable a la determinación de la potencia absorbida o suministrada por cualquier elemento, sea cual

fuere el circuito del que se trate. La potencia así calculada, necesariamente debe haber sido obtenida de algún otro tipo, o desde el mismo tipo de energía. Esta potencia permite en consecuencia calcular la energía real (verdadera), es decir los “Joules” que absorbe o suministra el elemento de circuito y que origina el consumo de algún tipo de combustible o su extracción a partir de alguna fuente de energía.

4.3 Valor medio cuadrático, eficaz y potencia media.

En corriente continua al ser “ V ” e “ T ” constantes, la energía consumida tal como lo expresa (6.60) resulta muy fácil de obtener. No sucede lo mismo para la nueva situación planteada ya que los parámetros “ $v(t)$ ” e “ $i(t)$ ” ahora varían con el tiempo. Para conocer la energía absorbida en un intervalo de tiempo “ $\Delta t = t - t_0$ ” finito, es necesario integrar (6.62), de manera que la energía real (verdadera) que absorbe cualquier dispositivo, siempre se deberá calcular con la expresión:

$$E_r = \int_{t_0}^t p(t) dt = \int_{t_0}^t \pm v(t)i(t) dt \quad [\text{Joules}] \quad (6.64)$$

Como se muestra en (6.64), el signo de la energía puede ser positivo o negativo, según se explica a continuación.

De acuerdo con el sentido convencional de la corriente (de positivo a negativo), adoptado, un dispositivo pasivo absorbe energía si la corriente entra por el terminal positivo y sale por el negativo y en sentido contrario si el dispositivo es activo, ver punto 2.5, capítulo 1. Entonces de acuerdo con la convención adoptada para la flecha que representa la polaridad instantánea de la tensión o caída de potencial “ $v(t)$ ”, para un elemento pasivo la potencia absorbida es positiva, cuando el valor instantáneo de la corriente “ $i(t)$ ” entra por la punta de la flecha representativa de “ $v(t)$ ” y para un elemento activo la potencia suministrada será positiva en caso contrario, es decir que salga por positivo. A los casos anteriores suele hacerse referencia como convención carga y fuente respectivamente.

Cuando los parámetros “ $v(t)$ ” e “ $i(t)$ ” varían con el tiempo, aparece una complicación adicional dado que ahora la inductancia deja de comportarse como un cortocircuito y la capacitancia ya no es un circuito abierto. La energía entretenida relacionada con estos elementos, en corriente alternada sinusoidal, como se verá más adelante, resulta ser una energía reactiva e involucra la definición de un concepto de potencia reactiva muy particular que también será tratado más adelante.

Considérese un circuito formado por una fuente de fem alternada sinusoidal y una carga constituida por una resistencia “ R ”, de acuerdo con la conclusión general del punto 2.5, en el circuito de la figura 6.9 se tendrá que “ $Z=R$ ” y el ángulo “ $\varphi=0$ ”. La energía absorbida estará dada por la expresión (6.64), en la que si se considera simultáneamente la ley de Ohm “ $v(t) = R i(t)$ ” o “ $i(t) = v(t)/R$ ”, se tendrán otras dos expresiones posibles:

$$E_r = \int_{t_0}^t R i^2(t) dt = R \int_{t_0}^t i^2(t) dt = R I^2 \Delta t \quad \text{o} \quad (6.65)$$

$$E_r = \int_{t_0}^t \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \int_{t_0}^t v^2(t) dt = \frac{1}{R} V^2 \Delta t \quad (6.66)$$

Las expresiones (6.65/66) permiten la introducción de dos nuevos valores, “ I^2 ” y “ V^2 ”, con los cuales, las expresiones para calcular la energía resultarán similares a las usadas en corriente continua. Si de las expresiones (6.65) y (6.66), se despeja “ I^2 ” y “ V^2 ” respectivamente, se obtiene la manera de calcular este nuevo par de valores, cada uno conocidos como valor medio cuadrático de las funciones “ $i(t)$ ” y “ $v(t)$ ” respectivamente. Lo dicho se puede expresar como:

$$I^2 = \frac{1}{(t-t_o)} \int_{t_o}^t i^2(t) dt \quad \text{o} \quad (6.67)$$

$$V^2 = \frac{1}{(t-t_o)} \int_{t_o}^t v^2(t) dt \quad (6.68)$$

En ambos casos, si los términos ficticios “ I^2 ” o “ V^2 ” fueran conocidos, permitirían calcular la energía absorbida y disipada, mediante el uso de una expresión de la ley de Joule, como la utilizada en corriente continua, es decir:

$$E_r = R I^2 (t-t_o) \quad \text{o} \quad E_r = (V^2/R) (t-t_o) \quad (6.69)$$

Donde “ I^2 ” o “ V^2 ” son los valores medios cuadráticos y “ $RI^2=V^2/R$ ”, una nueva potencia constante “ P ” que como se ve más adelante, corresponde a un valor medio que permite obtener lo mismo que con (6.65) ó (6.66).

Los valores constantes “ P ” y “ V ” que son las bases de las potencias que conforman los valores medio cuadráticos, son conocidos como valor eficaz de la corriente “ $i(t)$ ” y de la tensión “ $v(t)$ ” respectivamente y de acuerdo al desarrollo anterior se pueden obtener extrayendo raíz cuadrada a los valores medios cuadráticos, tal como se muestra en las siguientes expresiones:

$$I = \sqrt{I^2} = \sqrt{\frac{1}{(t-t_o)} \int_{t_o}^t i^2(t) dt} \quad \text{o} \quad (6.70)$$

$$V = \sqrt{V^2} = \sqrt{\frac{1}{(t-t_o)} \int_{t_o}^t v^2(t) dt} \quad (6.71)$$

Estos valores eficaces pueden ser definidos como valores equivalentes de corriente continua que producirían en una resistencia “ R ”, el mismo efecto de disipación de potencia que el que produce la corriente alterna real (verdadera), a través de dicha resistencia “ R ”. Reemplazando en (6.65) y (6.66), la potencia constante “ $P=RI^2=(V^2/R)$ ” que se mide en vatios [W], obtenida de (2.69), se puede calcular con:

$$P = \frac{E_r}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^t R i^2(t) dt = R I^2 \quad [\text{W}] \quad \text{o} \quad (6.72)$$

$$P = \frac{E_r}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^t \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{V^2}{R} \quad [\text{W}] \quad (6.73)$$

Donde “ I^2 ” y “ V^2 ” son los valores medios cuadráticos de las funciones reales “ $i(t)$ ” y “ $v(t)$ ”, considerando nuevamente que por ley de Ohm “ $v(t)=Ri(t)$ ” o “ $i(t)=v(t)/R$ ”, también, se tendrá que:

$$P = \frac{E_r}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^t v(t)i(t)dt = VI \quad [\text{W}] \quad (6.74)$$

Aquí “V” e “I” son los valores eficaces correspondientes a “i(t)” y “v(t)”, calculables con (6.70/71) que permiten calcular la nueva potencia media, real o activa, con las expresiones (6.72/73/74) que son similares a las usadas en CC.

Conclusión importante: Por las expresiones matemáticas (6.72) o (6.73), la potencia “P=cte” obtenida se denomina potencia media. También se llama potencia real o activa y es la que para ser suministrada necesita de la transformación desde otro tipo de energía, es decir, originará el gasto del combustible necesario para obtenerla.

Nota importante: como ya se dijo y se insiste, con la palabra (verdadero/a) entre paréntesis, se ha querido enfatizar que las variables tratadas no sólo pertenecen al campo de los números reales, sino fundamentalmente que la forma funcional del fenómeno es la que se tendrán en la realidad. Por último se puede decir que el concepto de valor medio cuadrático y el de valor eficaz es aplicable a cualquier función periódica, aun cuando corresponda a otro concepto de la física, distinto al de los circuitos eléctricos.

Es importante resaltar que cuando la función al que se aplican estos conceptos es sinusoidal, el valor medio cuadrático y eficaz, siempre resultará según se indica:

$$\text{Si } f(t) = F_{\max} \sin(\omega t + \delta_f), \text{ entonces } F = \sqrt{F^2} = \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{2}} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (6.75)$$

Para comprobar (6.75), a continuación se calculan los valores medio cuadrático y eficaz de una función armónica, típica de CA.

4.4 Cálculo del valor medio cuadrático y eficaz de una función senoidal del tiempo.

Sea una función sinusoidal del tiempo genéricamente expresada como:

$$“f(t) = F_{\max} \cdot \text{sen } \omega t” \quad (6.76)$$

De la que se quiere obtener el valor medio cuadrático y el valor eficaz. Si se aplica para tal fin (6.67) ó (6.68) el valor medio cuadrático será:

$$F^2 = \frac{1}{(t-t_0)} \int_{t_0}^t f^2(t)dt = \frac{F_{\max}^2}{\Delta t} \int_{t_0}^t \sin^2(\omega t)dt \quad (6.77)$$

$$\text{Aplicando la } \int \text{sen}^2 u \cdot u' du = \frac{1}{2} \cdot (u - \text{sen } u \cdot \text{cos } u) \quad (6.78)$$

$$F^2 = \frac{F_{\max}^2}{\omega \Delta t} \cdot \frac{1}{2} [\omega t - \text{sen}(\omega t) \cdot \text{cos}(\omega t)]_{t_0}^t \quad (6.79)$$

Si como intervalo de integración se considera “ $\Delta t = (t - t_0) = T$ ”, la (6.79) quedará:

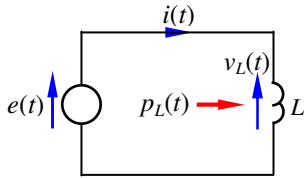
$$F^2 = \frac{F_{\max}^2}{\omega T} \cdot \frac{1}{2} [[\omega T - \text{sen}(2\pi) \cdot \text{cos}(2\pi)] - [\omega \cdot 0 + \text{sen}(0) \cdot \text{cos}(0)]] =$$

$$= \frac{F_{\max}^2}{\omega T} \cdot \frac{1}{2} \{[\omega \cdot T - 0 \cdot 1] - [0 + 0 \cdot 1]\} = \frac{F_{\max}^2}{2} \quad (6.80)$$

Considerando (6.70) ó (6.71) el valor eficaz

$$F = \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{2}} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (6.81)$$

4.5 Potencia en corriente alterna, absorbida (entretenida) por una bobina.



$$e(t) = E_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$$

Figura 6.13

Sea el circuito de la figura 6.13 donde la tensión alternada sinusoidal, en terminales del generador, está dada por “ $e(t) = E_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$ ”, por simplicidad de representación se hace “ $\delta_e = 0$ ”. El generador se encuentra conectado a una bobina de la que se pretende conocer la potencia que absorbe que por lo visto hasta aquí, deberá ser:

$$p_L(t) = v_L(t) \cdot i(t) \quad (6.82)$$

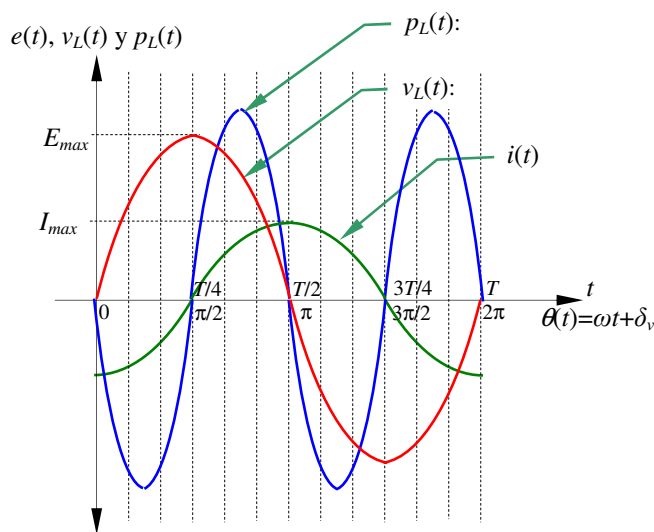
Igual que para el punto 2.2 “ $v_L(t) = V_{L\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_v)$ ”, donde por Kirchoff “ $V_{L\max} = E_{\max}$ ” y “ $\delta_v = \delta_e$ ”. Como según (6.8) “ $i(t) = I_{\max} [-\cos(\omega t + \delta_v)]$ ”, reemplazando junto con “ $v_L(t)$ ” en (6.82) queda:

$$p_L(t) = -V_{L\max} \cdot I_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_v) \cdot \cos(\omega t + \delta_v) \quad (6.83)$$

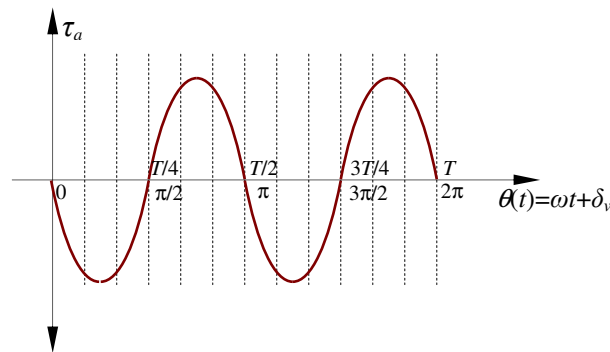
Considerando que “ $2 \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$ ”, la (6.83) queda

$$p_L(t) = -\frac{V_{\max} \cdot I_{\max}}{2} \text{sen}(2\omega t + 2\delta_v) \quad (6.84)$$

Se ve que la potencia instantánea es una función sinusoidal de frecuencia doble, es decir de “ 2ω ” y su representación gráfica será:



Potencia instantánea
Figura 6.14



Cupla impulsiva
Figura 6.15

De la figura 6.14 se ve que:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) Entre “0 y $\pi/2$ ”: | “ $v_L(t)$ positiva” e “ $i(t)$ negativa” \Rightarrow “ $p_L(t)$ negativa” |
| 2) Entre “ $\pi/2$ y π ”: | “ $v_L(t)$ positiva” e “ $i(t)$ positiva” \Rightarrow “ $p_L(t)$ positiva” |
| 3) Entre “ π y $3\pi/2$ ”: | “ $v_L(t)$ negativa” e “ $i(t)$ positiva” \Rightarrow “ $p_L(t)$ negativa” |
| 4) Entre “ $3\pi/2$ y 2π ”: | “ $v_L(t)$ negativa” e “ $i(t)$ negativa” \Rightarrow “ $p_L(t)$ positiva” |

Como se destaca en (1) entre “0 y $\pi/2$ ” la potencia “ $p_L(t)$ ” es negativa y significa que la inductancia está devolviendo energía al generador. Un generador absorbe energía cuando “ $e(t)$ ” e “ $i(t)$ ” son de distinto signo, en tal caso la cupla antagónica “ τ_a ” originada por la carga conectada al generador, es negativa y significa que el generador actúa como motor (se suele decir que el generador se motoriza). Mientras la bobina está devolviendo su energía almacenada al generador, tal como se ve en la figura 6.14, éste está bajo la acción de una cupla antagónica negativa figura 6.15 que tiende a motorizarlo durante un cuarto de ciclo y en consecuencia tiende a aumentar su velocidad, tendiendo también a incrementar su energía cinética “ ΔE_C ”.

Una vez que la bobina devuelve toda la energía almacenada en su campo magnético que sucede en el instante “ $T/4$ ”, se alcanzaría la condición de máxima energía cinética almacenada en el rotor del generador. Como se ve en la figura 6.14, es en ese mismo instante para “ $\theta(T/4)=\pi/2$ ” que se invierte la corriente y pasa a tener el mismo signo que la tensión de bornes del generador.

Entre “ $\pi/2$ y π ”, como “ $e(t)=v_L(t)$ ” e “ $i(t)$ ” tienen el mismo signo, la potencia “ $p_L(t)$ ” es positiva lo que significa que el generador ahora entrega energía a la bobina. Esta energía origina ahora, durante el siguiente cuarto de ciclo, entre “ $T/4$ ” y “ $T/2$ ”, una cupla impulsiva antagónica de signo positivo que cancela el “ ΔE_C ” de energía cinética que se hubiera obtenido a expensas de la cupla impulsiva de signo negativo que actuó durante el cuarto de ciclo inmediato anterior, entre “0” y “ $T/4$ ”.

Este proceso de intentos de entrega y devolución de energía que se repite en los próximos ciclos, se traduce en un tren de cuplas impulsivas, figura 6.15, de “ $\Delta t=T/4$ ” segundos de duración, de manera que en un período habrá dos cuplas impulsivas positivas y dos negativas iguales y contrarias que se cancelan mutuamente, sin causar sobre la máquina, ni aceleración ni frenado.

A la energía involucrada en las cuplas impulsivas referidas, se las conoce como energía de vaivén por que en un cuarto de ciclo, va del generador a la bobina donde se almacena, para volver en el próximo cuarto de ciclo al generador y cancela el efecto desacelerante de la cupla impulsiva del cuarto de ciclo anterior. También se llama energía entretenida, por su condición de encontrarse entretenida sin que se gaste, entre el generador y la bobina.

Si el circuito estuviera formado por elementos ideales (sin resistencia eléctrica ni rozamientos mecánicos), dado que la energía en ambas direcciones es almacenada (no disipada), podría desacoplarse el generador de la máquina impulsora y el generador seguiría girando sin máquina impulsora, es decir sin gasto de combustible.

Ahora bien, como el momento de inercia (función de la masa del rotor) es grande, implica una constante de tiempo para el cambio de movimiento, mucho mayor que la duración de “5ms” para “50Hz” de las cuplas impulsivas, en consecuencia la velocidad “ $\omega_M = \omega_s$ ” de la máquina permanecería constante.

Lo anterior significa que luego de generados los primeros “Joules” en el primer cuarto de ciclo, esta energía eléctrica se mantendrá como energía atrapada en el sistema, yendo y viniendo del generador a la bobina, sin necesidad de que la máquina impulsora haga girar al generador. La máquina impulsora podrá entonces ser desacoplada mecánicamente del generador y apagada, mientras que el generador seguirá girando por la acción nula del vaivén de energía existente. Esto se puede visualizar con la expresión (6.64), en la que se sustituye la (6.84) y se integra en un número entero de semiciclos de red. Para el caso, como intervalo de integración, se ha tomado de “0” a “ T ”, es decir un ciclo de red. Se entiende por ciclo de red al de la tensión o al de la corriente generada y cuyo período fue designado por “ T ”.

$$E_r = \int_0^T p_L(t) dt = \int_0^T -\frac{V_{\max} \cdot I_{\max}}{2} \sin(2\omega t + 2\delta_v) dt = 0 \quad [\text{Joules}] \quad (6.85)$$

De acuerdo con la anterior, una bobina ideal (sin resistencia ni pérdidas) se podría alimentar, salvo por el primer cuarto de ciclo, sin la necesidad de generar la única energía real, los “Joules” que como se dijo van y vienen. Esto se puede visualizar también considerando la expresión anterior reemplazada en (6.74).

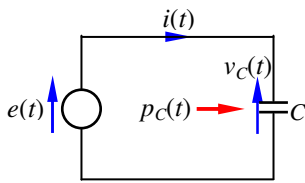
$$P = \frac{E_r}{T} = \frac{1}{2\omega T} \int_0^T -\frac{V_{\max} \cdot I_{\max}}{2} \cdot \sin 2(\omega t + \delta_v) \cdot 2\omega \cdot dt = 0 \quad [\text{W}] \quad (6.86)$$

Es decir que la potencia media, real o activa, absorbida por la bobina es nula, lo que significa que no se gasta combustible para tenerla en funcionamiento. Que la expresión (6.86) resulta cero, es fácil darse cuenta tan sólo por observación de la figura 6.14, en ella se ve que para “ $\Delta t = T$ ” un período, el área encerrada entre la función potencia instantánea, el eje de abscisas y los límites de integración, esta formada por cuatro partes, dos partes positivas, iguales a dos partes negativas que también son iguales entre sí, luego su suma resultará nula.

4.6 Potencia en corriente alterna, absorbida (entretenida) por un condensador.

Sea ahora el circuito de la figura 6.16, con un generador de la misma tensión alternada sinusoidal “ $e(t) = E_{\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$ ”, donde como anteriormente por simplicidad de representación se hace “ $\delta_e = 0$ ”. El generador se encuentra conectado con un capacitor del que se quiere encontrar la potencia absorbida que será:

$$p_C(t) = v_C(t) \cdot i(t) \tag{6.87}$$



Igual que antes “ $v_C(t) = V_{Cmax} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_v)$ ”, donde por Kirchhoff “ $V_{Cmax} = E_{max}$ ” y “ $\delta_v = \delta_e$ ”. Como según (6.14) “ $i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \delta_v)$ ”, reemplazando junto con “ $v_C(t)$ ” en (6.87) quedará:

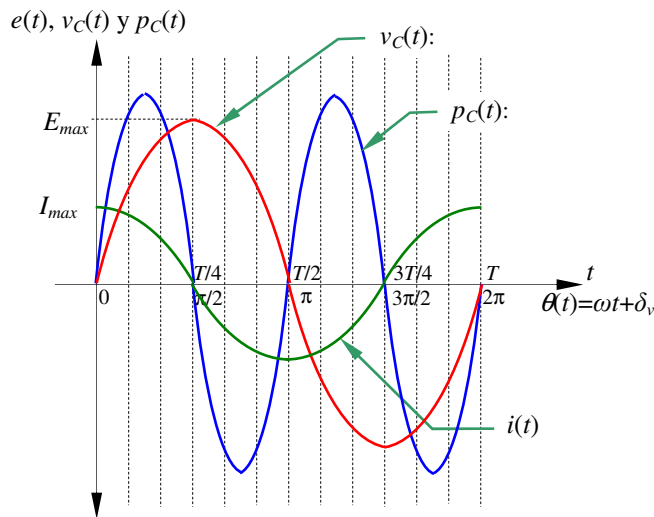
$$p_C(t) = V_{Cmax} \cdot I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_v) \cdot \cos(\omega t + \delta_v) \tag{6.88}$$

Figura 6.16

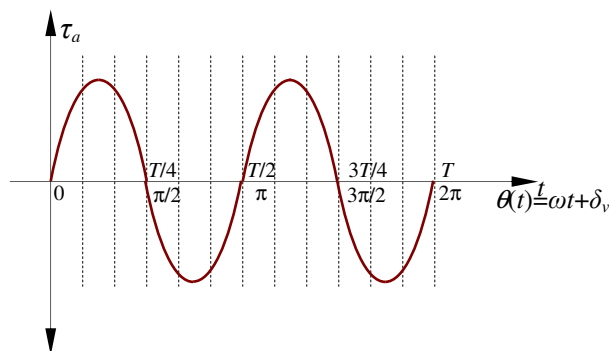
Considerando que “ $2 \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$ ”, la (6.83) queda:

$$p_C(t) = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} \text{sen}(2\omega t + 2\delta_v) \tag{6.89}$$

Se ve que la potencia instantánea es una función sinusoidal de frecuencia doble, es decir de “ 2ω ” y su representación gráfica será:



Potencia instantánea
Figura 6.17



Cupla impulsiva
Figura 6.18

Ahora de la figura 6.17 se ve que:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) Entre “0 y $\pi/2$ ”: | “ $v_C(t)$ positiva” e “ $i(t)$ positiva” \Rightarrow “ $p_C(t)$ positiva” |
| 2) Entre “ $\pi/2$ y π ”: | “ $v_C(t)$ positiva” e “ $i(t)$ negativa” \Rightarrow “ $p_C(t)$ negativa” |
| 3) Entre “ π y $3\pi/2$ ”: | “ $v_C(t)$ negativa” e “ $i(t)$ negativa” \Rightarrow “ $p_C(t)$ positiva” |
| 4) Entre “ $3\pi/2$ y 2π ”: | “ $v_C(t)$ negativa” e “ $i(t)$ positiva” \Rightarrow “ $p_C(t)$ negativa” |

Como se ve, pero con un desfase de 180° , sucede lo mismo que con la bobina, por lo que con relación al intercambio de energía, para las figuras 6.17/18, vale la misma explicación de la figura 6.14/15.

Tanto en el caso de la bobina como en el del capacitor desarrollados anteriormente, se ve que el sistema no necesita gastar energía para mantenerse en funcionamiento, es decir “ $P=0$ ”, esto se comprobó para el caso de la bobina con la expresión (6.86) y lo mismo vale para el capacitor.

$$P = \frac{E_r}{T} = \frac{1}{2\omega T} \int_0^T \frac{V_{\max} \cdot I_{\max}}{2} \cdot \sin(2\omega t + \delta_v) \cdot 2\omega \cdot dt = 0 \quad [\text{W}] \quad (6.90)$$

4.7 Cálculo de la energía o potencia entretenida verdadera, de cuarto de ciclo.

Aunque como se ve de las (6.86/90) la potencia media, real o activa resulta nula (vatios nulos), no se puede negar que en cada cuarto de ciclo hay un intercambio de energía real [Joules] y en consecuencia habrá un flujo de potencia activa [vatios] del generador a la carga y viceversa. Como es lógico para calcularla habrá que integrar la (6.85), entre “ $T/4$ ” y “ $T/2$ ”, de manera que se obtiene:

$$\begin{aligned} E(T/4) &= -\frac{V_{\max} I_{\max}}{4\omega} \cdot \int_{T/4}^{T/2} \sin(2\omega t + 2\delta_v) \cdot 2\omega \cdot dt = \\ &= -\frac{V_{\max} I_{\max}}{4\omega} \cdot [-\cos(2\omega t + 2\delta_v)]_{T/4}^{T/2} = \\ &= -\frac{V_{\max} I_{\max}}{4\omega} \cdot \left[-\cos(2\pi) + \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2 \frac{V_{\max} I_{\max}}{4\omega} \end{aligned} \quad (6.91)$$

Tomando en cuenta el valor eficaz de una función alternada sinusoidal definido en (6.81) y además que la pulsación es “ $\omega=2\pi/T$ ”

$$E(T/4) = \frac{VI}{\omega} = \frac{VI}{2\pi} \cdot T \quad [\text{Joules}] \quad (6.92)$$

Y la potencia media para el cuarto de ciclo considerado, a la que se hará referencia como potencia media, real o activa de cuarto de ciclo, será:

$$P(T/4) = \frac{E(T/4)}{T/4} = \frac{VI}{\pi/2} \quad [\text{Vatios}] \quad (6.93)$$

Tanto la (6.92), como (6.93) corresponden a los valores verdaderos de energía [Joules] y potencia [vatios], entretenida entre el generador y la bobina o capacitor. Se hace la acotación de “valores verdaderos”, puesto que más adelante esta energía y potencia serán tratadas con valores ficticios conocidos como energía y potencia reactiva que no podrán ser expresados ni en [Joules], ni en [vatios], como se hizo más arriba.

4.8 Potencia en corriente alterna, absorbida (consumida) por una resistencia.

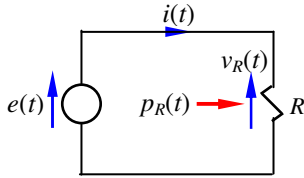


Figura 6.19

En la figura 6.19 se muestra una resistencia alimentada con un generador de fem alternada sinusoidal “ $e=E_{max}\text{sen}(\omega t+\delta_v)$ ” y en la que se considera “ $\delta_e=\delta_i=0$ ” y se pretende conocer la potencia absorbida y disipada por la misma.

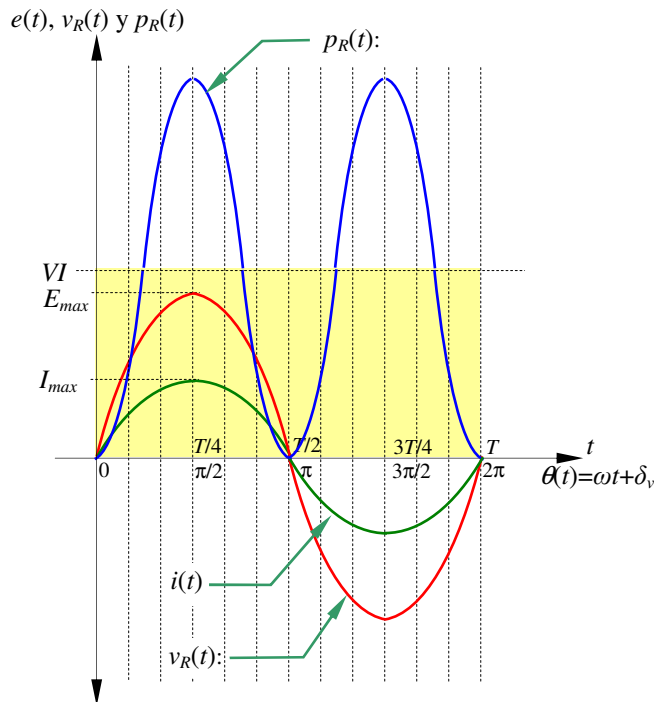
$$p_R(t) = v_R(t) \cdot i(t) \tag{6.94}$$

Como ya se demostró “ $v_R(t) = V_{Rmax}\cdot\text{sen}(\omega t+\delta_v)$ ” e “ $i(t) = I_{max}\cdot\text{sen}(\omega t+\delta_i)$ ”, considerando que “ $\delta_i= \delta_v-0$ ” y sustituyendo en (6.94), se tendrá que la potencia instantánea estará dada por:

$$p_R(t) = V_{max}I_{max}\text{sen}^2 (\omega t+\delta_v) \tag{6.95}$$

Ahora como “ $2\text{sen}^2 \alpha=1-\text{cos}2\alpha$ ”, entonces

$$p_R(t) = \frac{V_{max} I_{max}}{2} - \frac{V_{max} I_{max}}{2} \text{cos} 2(\omega t + \delta_v) \tag{6.96}$$



Potencia instantánea

Figura 6.20

Ahora en la figura 6.20 se ve que:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) Entre “0 y $\pi/2$ ”: | “ $v_R(t)$ positiva” e “ $i(t)$ positiva” \Rightarrow “ $p_R(t)$ positiva” |
| 2) Entre “ $\pi/2$ y π ”: | “ $v_R(t)$ positiva” e “ $i(t)$ negativa” \Rightarrow “ $p_R(t)$ negativa” |
| 3) Entre “ π y $3\pi/2$ ”: | “ $v_R(t)$ negativa” e “ $i(t)$ negativa” \Rightarrow “ $p_R(t)$ positiva” |
| 4) Entre “ $3\pi/2$ y 2π ”: | “ $v_R(t)$ negativa” e “ $i(t)$ positiva” \Rightarrow “ $p_R(t)$ negativa” |

La potencia “ $p_R(t)$ ” siempre resulta positiva y su integral en un “ $\Delta t = T - 0$ ”, por observación de (6.96) será la potencia media:

$$P = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = VI \quad (6.97)$$

4.9 Generalización de potencia en CA, absorbida por una impedancia.

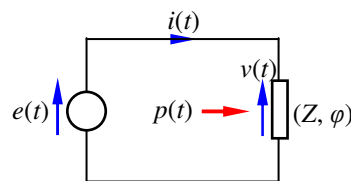


Figura 6.21

Finalmente la figura 6.21 muestra una impedancia “ Z ” alimentada con un generador de CA, cuya fem es “ $e(t) = E_{\max} \cdot \sin(\omega t + \delta_e)$ ”, donde por facilidad de representación se ha considerado “ $\delta_e = 0$ ”. Se quiere obtener una expresión generalizada para la potencia absorbida por “ Z ”.

La potencia instantánea será:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (6.98)$$

Anteriormente vio que como

$$v(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \delta_v) \quad \text{entonces} \quad (6.99)$$

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \delta_i) = I_{\max} \sin[\omega t + (\delta_v - \varphi)] \quad (6.100)74$$

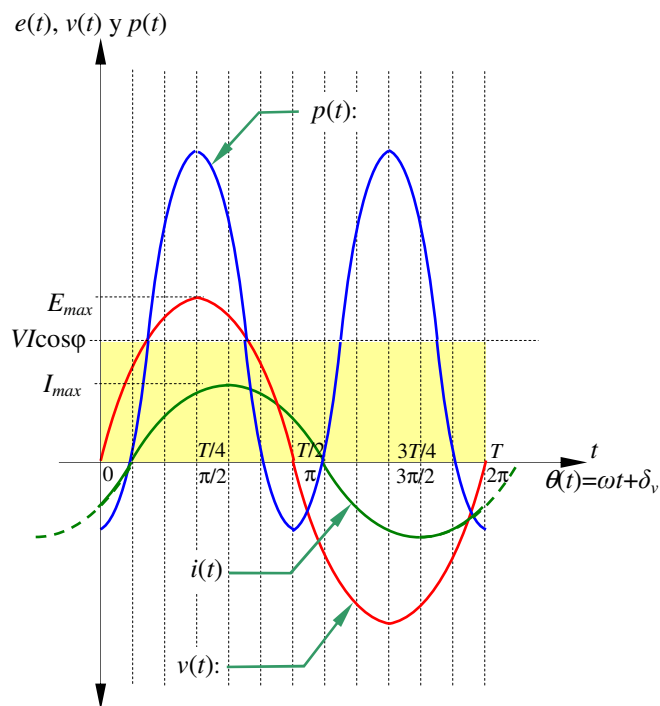
$$p(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \delta_v) \cdot I_{\max} \sin(\omega t + \delta_v - \varphi) \quad (6.101)75$$

$$\text{Ahora como } \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (6.102)76$$

$$\text{Si se hace } \alpha = (\omega t + \delta_v) = \theta(t) \quad \text{y} \quad \beta = [\theta(t) - \varphi] \quad (6.103)$$

$$\text{Entonces } p(t) = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2} \cos \varphi - \frac{V_{\max} I_{\max}}{2} \cdot \cos[2\theta(t) - \varphi] \quad (6.104)$$

Cuya representación gráfica es:



Potencia instantánea
Figura 6.22

El área del rectángulo por debajo de la línea de trazos, cuya altura es “ $VI \cos \varphi$ ”, corresponde a la energía que realmente consume la impedancia “ Z ”. Dicha altura es el valor medio de la potencia calculada por la integral entre “ 0 a T ”, de la expresión (6.104) y se vio que también se llama potencia real o activa. Como se ve, en esta expresión aparece un factor “ $\cos \varphi$ ” que multiplica a una potencia “ VI ” para dar la potencia que realmente se está disipando o consumiendo. Por este motivo al “ $\cos \varphi$ ” se lo conoce también como factor de potencia.

También en la expresión de la potencia instantánea existe un término

$$VI \cdot \cos[2(\omega t + \delta_v) - \varphi] \quad (6.105)$$

Como se puede inferir la integración de este término, variable cosinusoidalmente con el tiempo (con un desfase dado por el ángulo “ φ ”), resultará “ 0 ” (o sea, no produce consumo de energía) y representa la potencia entretenida entre la parte reactiva de la impedancia y el generador.

4.10 Cálculo de energía y potencia según la configuración del modelo.

Como la carga corresponde a una composición de elementos resistivos y reactivos, cuyos parámetros pueden estar distribuidos y mezclados entre si. Para una bobina real formada por inductancia y resistencia, como fue visto, se usa el modelo de parámetros concentrados que pueden ser representados en paralelo o en serie. En el primer caso, la corriente total y en el segundo la caída de tensión total, estará compuesta por la suma de funciones armónicas desfasadas “ 90° ”. La potencia total para cada caso será:

1) Caso de componentes en paralelo

El parámetro común es la tensión “ $v(t)$ ” y la corriente “ $i(t) = i_R + i_L$ ”, es la suma de las que absorben “ R ” y “ L ”.

$$i = i_R + i_L = I_{Rmax} \sin(\omega t + \delta_{iR}) + I_{Lmax} \sin(\omega t + \delta_{iL} - 90^\circ) \quad (6.106)12$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = v \cdot i_R + v \cdot i_L \quad (6.107)113$$

2) Caso de componentes en serie

Ahora el parámetro común es la corriente “ $i(t)$ ” y la tensión será “ $v(t) = v_R + v_L$ ”, la suma de las caídas de tensión en “ R ” y “ L ”.

$$v = v_R + v_L = V_{Rmax} \sin(\omega t + \delta_{vR}) + V_{Lmax} \sin(\omega t + \delta_{vL} + 90^\circ) \quad (6.108)114$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = i \cdot v_R + i \cdot v_L \quad (6.109)115$$

En términos generales la potencia instantánea se plantea como el producto de la tensión y la corriente instantánea asociadas al elemento del cual se quiere determinar su potencia, tal como se expresa a continuación:

$$v = V_{max} \sin(\omega t + \delta_v) \quad (6.110)116$$

$$i = I_{max} \sin(\omega t + \delta_i) = I_{max} \sin(\omega t + \delta_v - \varphi) \quad (6.111)117$$

Haciendo “ $\theta = \omega t + \delta_v$ ” y resolviendo

$$i = I_{max} [\sin \theta \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \theta] \quad (6.112)118$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_{max} \cdot I_{max} [\cos \varphi \cdot \sin^2 \theta - \sin \varphi \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta] \quad (6.113)119$$

Ahora por trigonometría

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta) / 2 \quad (6.114)120$$

$$\cos \theta \cdot \sin \theta = \sin 2\theta / 2 \quad (6.115)121$$

Reemplazando en (113)

$$p(t) = \left(\frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} \cos \varphi - \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} \cos \varphi \cdot \cos 2\theta - \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} \sin \varphi \cdot \sin 2\theta \right) \quad (6.116)122$$

Como de acuerdo con lo visto “ $V_{max} \cdot I_{max} / 2 = V \cdot I$ ”, corresponde al producto de los valores eficaces de la tensión “ V ” y de la corriente “ I ” y efectuando algún arreglo formal conveniente, la (6.116) queda:

$$p(t) = [VI \cdot \cos \varphi - VI \cdot (\cos \varphi \cdot \cos 2\theta + \sin \varphi \cdot \sin 2\theta)] \quad (6.117)123$$

Por lo visto haciendo “ $A = \sin \varphi$ ” y “ $B = \cos \varphi$ ”

$$p(t) = VI \cdot \cos \varphi - VI \cdot \cos(2\theta - \varphi) \quad (6.118)124$$

El sentido que tiene conocer la potencia instantánea que es la potencia real “verdadera” puesta en juego en cualquier circuito, es poder calcular, en un intervalo “ $t - t_o$ ”, la energía absorbida por cualquier componente del mismo.

$$E_r = \int_{t_0}^t p(t)dt = \int_{t_0}^t [VI \cdot \cos \varphi - VI \cdot \cos(2\omega t + 2\delta_v - \varphi)]dt \quad (6.119)125$$

Si se supone el intervalo de funcionamiento “ $t - t_0$ ” igual a un número entero de semiciclos de red, con relación a la frecuencia angular “ ω ” y que así resulta aproximadamente la realidad, la resolución de (6.119), puede ser distribuida en dos partes:

$$E_r(R) = \int_{t_0}^t [VI \cdot \cos \varphi]dt = VI \cdot \cos \varphi \cdot \Delta t \quad (6.120)6$$

$$E_r(L) = \int_{t_0}^t [-VI \cdot \cos(2\omega t + 2\delta_v - \varphi)]dt = 0 \quad (6.121)7$$

Suponga que los términos anteriores, resultantes de la integración, correspondan al caso 1 de una “ R ” y una “ L ” en paralelo, propuesto anteriormente. Como es obvio, el resultado del término (6.120) sólo podrá corresponder a la energía absorbida y disipada por “ R ”. El término (6.121) corresponderá entonces a la energía real “verdadera”, de vaivén que pone en juego, para el caso propuesto, la inductancia “ L ” de la bobina.

Ahora como el término (6.121) resulta nulo, en términos prácticos significa que no produce consumo de combustible del generador que la alimenta. Esto se debe a que en un cuarto de ciclo, la energía reactiva real en juego, es absorbida por la inductancia, durante el cual no la gasta, la almacena en forma de energía electrocinética en su campo magnético y en el cuarto de ciclo siguiente se la devuelve al generador.

De acuerdo con lo dicho la energía puesta en juego por un elemento reactivo no produce consumo de combustible, por lo que una apreciación apresurada podría conducir a la idea de que no sería necesario considerarla. Sin embargo, debido a que los conductores que vinculan el generador con una inductancia, tienen resistencia y que esta energía de vaivén se encuentra sustentada por tensión y corriente, cuando la componente de la corriente absorbida por la inductancia pasa por las resistencias de los conductores de vinculación, se producen pérdidas por efecto Joule que deben ser consideradas en las ecuaciones económicas, por lo que habrá que tomar en cuenta su efecto.

5. ACOPLAMIENTOS MAGNETICOS EN CORRIENTE ALTERNA

5.1 Introducción.

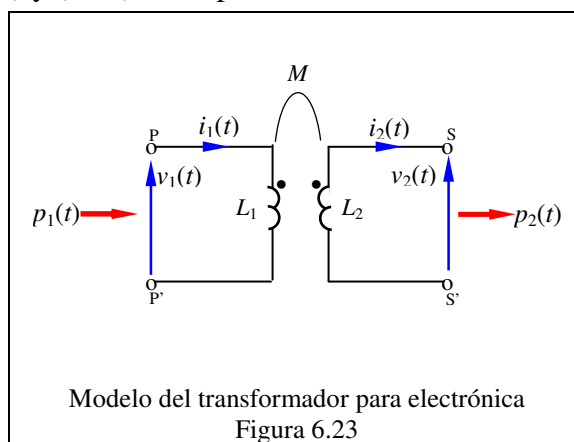
Una de las funciones importantes de los acoplamientos magnéticos, tanto en corriente continua como en alterna, es que sirven como soporte para transformar la energía de mecánica a eléctrica y viceversa, en el funcionamiento de las máquinas eléctricas rotantes. Es a través del acoplamiento magnético, donde la energía eléctrica se transfiere a energía mecánica rotacional en el eje de un motor o de energía mecánica rotacional, recibida desde el eje de una máquina mecánica, a energía eléctrica disponible en los terminales de un generador. Sin embargo existe una máquina estática llamado transformador, sin partes móviles en rotación, en la que el acoplamiento magnético en corriente alterna, por la facilidad y eficiencia con que permite transferir energía y al mismo tiempo modificar los parámetros de tensión y corriente que sustentan la energía transferida, cobra una especial importancia.

Esta máquina es un dispositivo de cuatro terminales, implementado con el acoplamiento magnético de dos bobinas, dos terminales de la bobina primaria donde, con determinado valor de tensión y corriente, entra la energía que se transfiere y dos de la bobina secundaria, donde se recibe la energía transferida, con los parámetros de tensión y corrientes adaptados a los de la carga conectada.

Como en el capítulo 5 se estudiaron dos modelos de acoplamiento magnético de dos bobinas, a continuación se analizará el comportamiento de estos modelos usados como transformador, es decir cuando se usan para transferir energía desde los terminales del primario, (o lado fuente), a los del secundario (o lado carga). Es decir la energía, salvo por las pérdidas, es pasante. Cualquiera de los dos arrollamientos puede actuar como lado fuente o primario y consecuentemente cualquiera, el que quede disponible, como lado carga o sea secundario.

5.2 Modelo del transformador para análisis electrónico.

En el punto 7.4 del capítulo 5, se llegó a la representación circuital de los modelos de acoplamientos magnéticos, cuyo uso como transformador generalmente se muestra como en la figura siguiente y que para el caso del modelo en cuestión fue derivado de las expresiones (5.39) y (5.40) del capítulo 5.



Como se observa en la figura, para reforzar la idea de arrollamiento primario y secundario, en los terminales de las bobinas de entrada y salida de energía, fueron respectivamente designadas con las letras “P” y “S” y como fue dicho que el transformador sirve para adaptar los parámetros “ $v(t)$ ” e “ $i(t)$ ”, de la energía que se transfiere de primario a secundario, el primario se comporta para la fuente como una carga y el secundario para la carga como una fuente, por lo que para el primario se adoptará la convención carga y para el secundario la convención fuente.

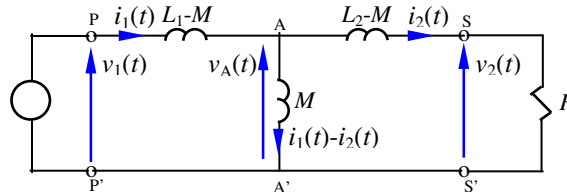
En tal sentido como en el primario la corriente entra por el positivo de la tensión “ $v_1(t)$ ” inducida en el primario, es una caída inductiva, entonces ya existe la convención carga. En el secundario la corriente sale por el positivo de la tensión inducida “ $v_2(t)$ ” que para el caso es una fem inducida y por lo tanto también se tiene la convención fuente. Por lo que de acuerdo con lo estudiado se escribirán las correspondientes ecuaciones:

$$\text{Caída inductiva para el primario:} \\ v_1(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (6.122)$$

Fem inducida para el secundario:

$$v_2(t) = -\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt} - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \quad (6.123)$$

Si para el caso se adopta el modelo simplemente conexo estudiado, punto 7.4.4 del capítulo 5, con una fuente conectada al primario y una resistencia conectada al secundario, cuya configuración circuital se muestra en la figura 6.24 siguiente.



Equivalente simplemente conexo
Del transformador
Figura 6.24

Las relaciones de tensiones y corrientes obtenidas de la representación equivalente simplemente conexa del modelo de transformador en estudio, de acuerdo con el desarrollo visto en 7.4.4 del capítulo 5, serán:

$$v_1(t) = \frac{L_1}{M} v_2(t) + \frac{L_1 L_2 - M^2}{MR} \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (6.124)$$

$$i_1(t) = \frac{L_2}{M} i_2(t) + \frac{R}{M} \int i_2(t) dt \quad (6.125)$$

$$\text{Si } "v_2(t) = V_{2\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_{v_2})" \Rightarrow \text{que } "i_2(t) = I_{2\max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_{i_2})" \quad (6.126)$$

$$\text{Donde } "I_{2\max} = V_{2\max}/R" \text{ y } "\delta_{i_2} = \delta_{v_2}" \quad (6.127)$$

Tomando en cuenta (6.127) y reemplazando (6.126) en (6.124) y (6.125)

$$V_{1\max} \sin(\omega t + \delta_{v_1}) = \frac{L_1}{M} V_{2\max} \sin(\omega t + \delta_{v_2}) + \omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{MR} V_{2\max} \cos(\omega t + \delta_{v_2}) \quad (6.128)$$

$$I_{1\max} \sin(\omega t + \delta_{i_1}) = \frac{L_2}{M} I_{2\max} \sin(\omega t + \delta_{i_2}) - \frac{I_{2\max} R}{\omega M} \cos(\omega t + \delta_{i_2}) \quad (6.129)$$

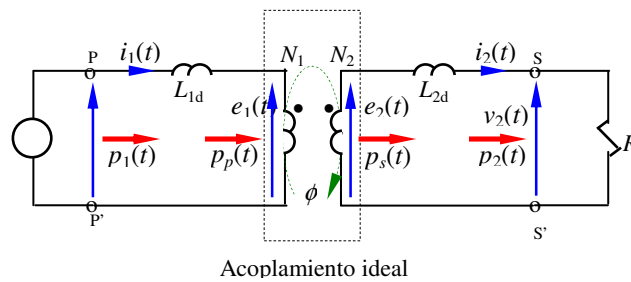
Multiplicando m.a.m. (6.128) con (6.129) y considerando " $p_1(t) = v_1(t)i_1(t)$ " y que para el caso " $\delta_{i_2} = \delta_{v_2}$ ", tal como se muestra a continuación se obtiene la potencia transferida y la absorbida por el acoplamiento:

$$\begin{aligned} p_1(t) = & 2 \frac{L_1 L_2}{M^2} \frac{V_{2\max} I_{2\max}}{2} [1 - \cos(2\omega t + 2\delta_{v_2})] - \\ & - \frac{R}{\omega M} \frac{L_1}{M} \frac{V_{2\max} I_{2\max}}{2} \sin(2\omega t + 2\delta_{v_2}) + \\ & + \frac{\omega L_2}{R} \frac{L_1 L_2 - M^2}{M^2} \frac{V_{2\max} I_{2\max}}{2} \sin(2\omega t + 2\delta_{v_2}) \\ & - \frac{L_1 L_2 - M^2}{M^2} \frac{V_{2\max} I_{2\max}}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\delta_{v_2})] \end{aligned} \quad (6.130)$$

El primer término corresponden a la potencia transferida y los demás a las potencias absorbidas, si el acoplamiento no es ideal, es decir si “ $k < 1$ ”.

5.3 Modelo del transformador para sistemas de potencia.

También en el punto 7.4 del capítulo 5, se llegó a la representación circuital del modelo de acoplamiento magnético para uso en análisis de sistemas de potencia, cuya representación circuital generalmente es como se muestra en la figura siguiente y que para el caso de este modelo fue derivado de las expresiones (5.41) y (5.42) del capítulo 5.



Modelo del transformador para Sistemas de Potencia
Figura 5.25

Nuevamente se respetan las convenciones carga y fuente para el primario y secundario, como fue explicado para el modelo anterior. Como la corriente “ $i_1(t)$ ” entra por el punto e “ $i_2(t)$ ” sale por este, entonces el signo del flujo resultante será para la bobina 1 “ $\phi = \phi_{21} - \phi_{12}$ ” y para la bobina 2 “ $-\phi = \phi_{12} - \phi_{21}$ ”, es decir cuando sale por el punto es positivo y negativo cuando entra por este. Por lo que de acuerdo con lo estudiado se escribirán las correspondientes ecuaciones:

Caída inductiva para el primario:

$$v_1(t) = \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = L_{1d} \frac{di_1(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} = L_{1d} \frac{di_1(t)}{dt} + e_1(t) \quad (6.131)$$

Fem inducida para el secundario:

$$v_2(t) = -\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -L_{2d} \frac{di_2(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} = -L_{2d} \frac{di_2(t)}{dt} + e_2(t) \quad \text{o} \quad (6.132)$$

Como se observa de (6.131) y de (6.132), el cociente “ $e_1(t)/e_2(t)$ ”, será:

$$\frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{N_1 \frac{d\phi(t)}{dt}}{N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.133)$$

Se obtiene la relación de tensiones de un transformador ideal y como no hay potencia absorbida por el acoplamiento, entonces “ $p_p(t) = p_s(t)$ ”, en consecuencia se tendrá que cumplir que

$$e_1(t)i_1(t) = e_2(t)i_2(t) \quad \text{e} \quad \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{e_2(t)}{e_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} \quad (6.134)$$

Si de la (6.132), se despeja “ $e_2(t)$ ”, se multiplican ambos miembros por “ N_1/N_2 ” y se sustituye según (6.134) “ $i_2(t) = (N_1/N_2)i_1(t)$ ”, se obtendrá:

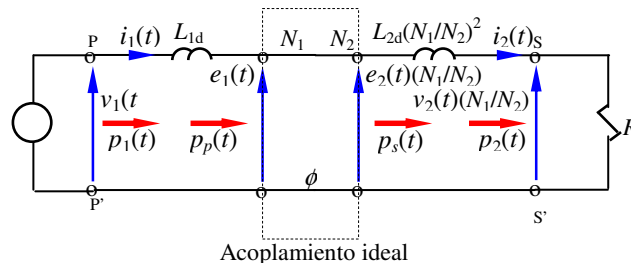
$$e_2(t) \frac{N_1}{N_2} = L_{2d} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{di_1(t)}{dt} + v_2(t) \frac{N_1}{N_2} \quad (6.135)$$

$\longleftarrow e_1(t):$

Que reemplaza en (6.131) permite encontrar una expresión del acoplamiento expresada en función de las variables del primario y por lo tanto un circuito equivalente simplemente conexo referido al primario.

$$v_1(t) = L_{1d} \frac{di_1(t)}{dt} + L_{2d} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{di_1(t)}{dt} + v_2(t) \frac{N_1}{N_2} \quad (6.136)$$

Cuya representación circuital será:



Modelo equivalente del transformador para
Sistemas de Potencia
Figura 5.26

Si ahora se multiplican ambos miembros de la (6.131) por “ N_2/N_1 ” y se sustituye según (6.134) “ $i_1(t) = (N_2/N_1)i_2(t)$ ”, se obtiene:

$$v_1(t) \frac{N_2}{N_1} = L_{1d} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{di_2(t)}{dt} + e_1(t) \frac{N_2}{N_1} \quad (6.137)$$

$\longleftarrow e_2(t):$

Despejando de la anterior “ $e_1(t)(N_2/N_1)$ ” y reemplazada en (6.132), se obtiene

$$v_1(t) \frac{N_2}{N_1} = L_{1d} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{di_2(t)}{dt} + L_{2d} \frac{di_2(t)}{dt} + v_2(t) \quad (6.138)$$

Se deja para el lector que haga el diagrama circuital referido al secundario correspondiente.

Multiplicando por “ $i_1(t)$ ” la (6.136), o por “ $i_2(t)$ ” la (6.138), se obtienen las potencias puestas en juego con estos modelos del transformador para sistemas de potencia y resultarán en:

$$p_1(t) = v_1(t)i_1(t) = L_{1d} \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) + L_{2d} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) + v_2(t) \frac{N_1}{N_2} i_1(t) \quad (6.139)$$

$$p_1(t) = v_1(t) \frac{N_2}{N_1} i_2(t) = L_{1d} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) + L_{2d} \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) + v_2(t) i_2(t) \quad (6.140)$$

El último término de (6.139) u de (6.140), corresponde a la potencia transferida y los demás a las potencias absorbidas, si el acoplamiento no es ideal, es decir, para el caso si “ L_{1d} ” y “ L_{2d} ” son distintos de cero.

PROBLEMAS PROPUESTOS
CAPITULO 6
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA EN VARIABLE REAL

OBJETIVO PRINCIPAL

Resolver y representar en función del tiempo, circuitos de corriente alterna. Determinar el valor medio cuadrático y eficaz de distintos tipos de ondas. Se quiere que ejercite el planteo de ecuaciones en variable real de circuitos con elementos reactivos y en especial cuando se trata de bobinas acopladas. Se quiere que el lector tome conciencia de las dificultades de trabajar con circuitos en variable real (tensiones y corrientes alternadas sinusoidales), así podrá apreciar la mayor simplicidad del tratamiento de circuitos en variable fasorial que será introducido en capítulo 9. Además se quiere que maneje los conceptos de energía y potencia real y entretenida, en circuitos de variable alternada sinusoidal.

Problema 6.1

Sea un circuito formado por una inductancia y una fuente de fem alternada sinusoidal " $e(t)$ " de " $E_{max} = 311.127 \text{ V}$ " y frecuencia " $f = 159.1549 \text{ Hz}$ ", en el que se mide una corriente cuyo valor máximo " $I_{max} = 10 \text{ A}$ ". Considerando un ángulo de fase o de referencia para la tensión de " $\delta_e = 90^\circ$ ", se pide: a) graficar " $e(t)$ ", " $v(t)$ " e " $i(t)$ ", b) Angulo de fase o de referencia de " $i(t)$ ", c) Reactancia inductiva, d) Potencia instantánea " $p(t)$ " absorbida por la inductancia, e) Potencia media " P_m " y f) Energía absorbida en un " Δt " equivalente a un número entero de períodos.

Problema 6.2

Al aplicar la tensión de una fuente de " $E_{max} = 10 \text{ mV}$ ", " 50 Hz " y ángulo de fase o referencia " $\delta_e = 0^\circ$ ", a un capacitor, se establece una corriente " $I_{max} = 600 \mu\text{A}$ ". Se quieren determinar los mismos conceptos del problema anterior.

Problema 6.3

Se conectan en serie una resistencia de 8Ω , un inductor de 56 mH y un capacitor de $100 \mu\text{F}$. Si la corriente de régimen permanente en el circuito es " $I_{max} = 14.1421 \text{ A}$ " y la caída de tensión en la bobina es de " $V_{Lmax} = 497.8032$ ", se quiere determinar:

- a) Las reactancias inductiva y capacitiva.
- b) La tensión y frecuencia de la fuente.
- c) Los gráficos de “ $e(t)$ ”, “ $i(t)$ ”, “ $v_R(t)$ ”, “ $v_L(t)$ ” y “ $v_C(t)$ ”.
- d) Potencia instantánea “ $p(t)$ ” absorbida por cada elemento.
- e) Potencia media “ P_m ” absorbida por la impedancia.

Problema 6.4

Se conectan en serie una resistencia de 10Ω , un inductor de 8 mH y un capacitor de $2.5 \mu\text{F}$. Estos elementos pasivos así conectados se alimentan con una fuente de tensión alternada sinusoidal de “ $E_{max} = 240 \text{ V}$ ” y ángulo de fase o referencia “ $\delta_e = -40^\circ$ ”, se quiere:

- a) Escribir la ecuación diferencial del circuito incluidos los coeficientes numéricos.
- b) De acuerdo con la expresión (6.29) determinar el valor de la frecuencia angular “ ω_0 ” tal que “ $Z(\omega_0) = R$ ”. Es decir que “ ω_0 ” es la frecuencia angular de resonancia.
- c) La corriente “ $i(t)$ ” para “ ω_0 ”.
- d) La potencia media “ $P_m(\omega_0)$ ”. Donde obviamente “ P_m ” es la potencia media en la resistencia.
- e) Determinar los valores de “ Z ” para “ $\omega \rightarrow 0$ ” y para “ $\omega \rightarrow \infty$ ”.
- f) Determinar “ $\omega_1 < \omega_0$ ” y “ $\omega_2 > \omega_0$ ” tal que “ $P_m(\omega_1) = P_m(\omega_2) = P_m(\omega_0) / 2$ ”. Por lo que “ $P_m(\omega_1)/P_m(\omega_0) = P_m(\omega_2)/P_m(\omega_0) = 1/2 = [V_R(\omega_c)/V_R(\omega_0)]^2$ ”. Donde “ $\omega_c = \omega_1$ ” u “ $\omega_c = \omega_2$ ”, según corresponda.
- g) Graficar: “ Z ”, “ ϕ ”, “ I_{max} ”, “ V_{Rmax} ”, “ V_{Lmax} ” y “ V_{Cmax} ” en función de la frecuencia angular.
- h) Analizar los resultados y escribir conclusiones acerca del comportamiento del circuito como función de la frecuencia angular.

Problema 6.5

Los elementos del circuito del problema anterior se conectan en paralelo. Se quiere:

- a) Escribir la ecuación diferencial del circuito incluido los coeficientes numéricos.
- b) Determinar el valor de la frecuencia angular “ ω_0 ” tal que “ $Y(\omega_0) = G$ ”.
- c) La diferencia de potencial común “ $v(t)$ ”, a todos los elementos, para “ ω_0 ”.
- d) La potencia media “ $P_m(\omega_0)$ ”.
- e) Determinar los valores de “ Y ” para “ $\omega \rightarrow 0$ ” y para “ $\omega \rightarrow \infty$ ”.
- f) Determinar “ $\omega_1 < \omega_0$ ” y “ $\omega_2 > \omega_0$ ” tal que “ $P_m(\omega_1) = P_m(\omega_2) = P_m(\omega_0) / 2$ ”.
- g) Graficar: “ Y ”, “ ϕ ”, “ V_{max} ”, “ I_{Rmax} ”, “ I_{Lmax} ” e “ I_{Cmax} ” en función de la frecuencia angular.
- h) Analizar los resultados y escribir conclusiones acerca del comportamiento del circuito en función de la frecuencia angular.

Problema 6.6

Determinando previamente el equivalente simplemente conexo del acoplamiento magnético del circuito de la figura P6.1, se quiere que escriba en forma literal las ecuaciones diferenciales que modelan el circuito. También se quiere analizar las potencias instantáneas relacionadas con el mismo.

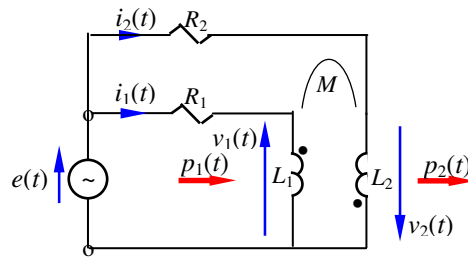


Figura P6.1

Problema 6.7

Suponiendo que la fuente es sinusoidal y siguiendo los mismos pasos que los utilizados en el punto 2.5 del capítulo 6, resuelva literalmente el circuito de la figura P6.2. Determine la potencia instantánea absorbida o suministrada por cada elemento.

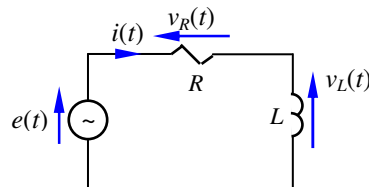


Figura P6.2

Problema 6.8

Idem que el problema 6.7 pero para el circuito de la figura P6.3.

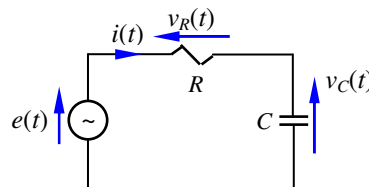


Figura P6.3

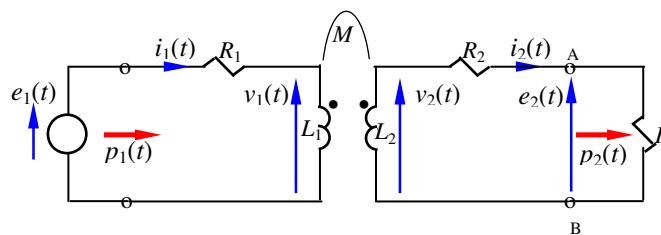
Problema 6.9

Figura 6.4

En el circuito de la figura determinar la tensión " $e_2(t)$ " entre los bornes "A-B", la potencia absorbida por la carga y la suministrada por la fuente.

Problema 6.10

Determinar los valores medio cuadrático y eficaz de la onda diente de sierra que se muestra en la figura P6.5. Fijar previamente la escala de tiempo.

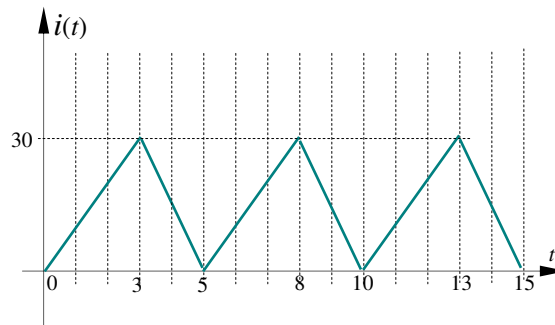


Figura P6.5

Problema 6.11

Determinar los valores medio cuadrático y eficaz de la onda cuadrada de la figura P6.6. Elegir previamente la escala de tiempo.

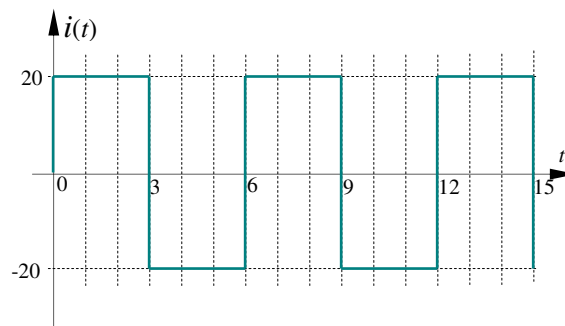


Figura P6.5

Problema 6.12

Resolver el circuito de la figura con “ $e_1(t)=E_{1\max}\text{sen}(\omega t+\delta_{e1})$ ” e “ $i_2(t)=I_{2\max}\text{sen}(\omega t+\delta_{i2})$ ”. Encontrar las potencias absorbidas y suministradas por los elementos, según corresponda.

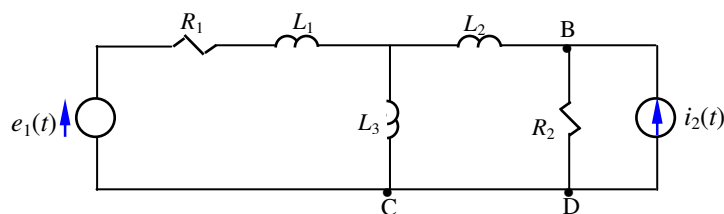


Figura P6.7