

## CAPITULO 7

### MATERIALES Y CIRCUITOS MAGNETICOS

#### 1. INTRODUCCION

En el punto 7.4.2 del capítulo 5, se puso de manifiesto la necesidad de los acoplamientos magnéticos entre bobinas, a efectos de lograr máquinas eléctricas (motores, generadores y transformadores), de alto rendimiento y bajo costo.

Las máquinas eléctricas que usan flujo magnético, como soporte para la transferencia de energía, son más eficientes y económicas cuanto más fuertes son los acoplamientos magnéticos entre sus bobinas, es decir cuanto menor sea su dispersión magnética. Dos bobinas geoméricamente bien posicionadas, es decir con sus ejes alineados y con la menor distancia posible entre ellas, se encontrarían perfectamente acopladas, si el flujo que produce una de ellas concatenara íntegramente a la otra.

Para que los caminos seguidos por las líneas de fuerza de un campo de inducción con aire como medio soporte del flujo, sean de mínima reluctancia, en conjunto y a lo largo de todo su recorrido, sus líneas de fuerza que deben curvarse para cerrarse sobre si mismas, adoptarán recorridos con secciones y longitudes diferentes, es decir, distintos radios de curvatura que sólo sería posible determinar en un universo vacío. Esta distribución de "LF" en curvas muy separadas entre si, es el origen fundamental de la elevada dispersión que se origina en cualquier acoplamiento magnético entre bobinas, cuyo medio soporte del flujo, sea el aire.

Tómese por ejemplo que se quiera el acoplamiento entre dos bobinas 1 y 2, con aire como medio soporte, de manera tal que cuando la bobina 1 sea recorrida por una corriente " $I_c$ " se origine un flujo " $\phi_{1p}=1000$  LF" que se quiera que concatene íntegramente a la bobina 2.

Si se efectuara tal montaje con los ejes de bobinas alineados y separadas la mínima distancia, se comprobaría que el flujo acoplado, sería mínimo. Suponga por ejemplo que hubiera resultado el 5% para el mutuo y el 95% para el disperso, es decir correspondería un " $\phi_{21}=50$  LF" y un " $\phi_{1d}=950$  LF". El resultado obtenido permite afirmar que el acoplamiento buscado de ninguna manera podría ser considerado como acoplamiento "fuerte".

En tal caso para que el acoplamiento sea aceptable, es necesario adoptar algún recurso, como la "capacidad de confinamiento" de líneas de fuerza que proporcionan los materiales ferromagnéticos. Por "capacidad de confinamiento" debe entenderse lo que ocurre cuando el material ferromagnético del interior de una bobina, es inundado por un " $B_o$ " provocado por la corriente de conducción " $I_c$ " que circula en la bobina. Entonces debido a un mecanismo que será explicado más adelante, aparecen intensas corrientes superficiales (o de Ampère) que producen un campo " $B_d$ " adicional, provisto por el propio material, mucho mayor que el " $B_o$ " que le dio origen.

Por su propia naturaleza, las "LF" de este campo " $B_d$ " aportado por el material, deben concatenar las corrientes superficiales que lo originan y en consecuencia deberán encontrarse confinadas al interior del material ferromagnético que produce dichas corrientes superficiales.

Suponga que para mejorar el acoplamiento magnético entre las bobinas 1 y 2 propuesto, se introduce en ambas bobinas, un trozo de hierro cilíndrico, macizo, de un diámetro " $d$ ", apenas menor que el interior de las bobinas acopladas y cuya longitud " $l$ " abarque ambas bobinas. En tal caso se podrá comprobar que ahora el porcentaje de líneas de flujo mutuo, habrá tenido un significativo aumento. Tómese por ejemplo que para la nueva configuración, se haya incrementado al 40% del total producido.

En el caso de esta nueva configuración, además del mejoramiento del factor de acoplamiento " $k$ ", se podrá comprobar también que simultáneamente con el aumento de flujo mutuo, se observará otra importantísima característica de los materiales ferromagnéticos, a la que se hará referencia, como "poder multiplicador".

Por "poder multiplicador", debe entenderse que con la misma corriente " $I_c$ " existente en la bobina 1 del ejemplo propuesto originalmente, las líneas de fuerza producidas han sido ahora importantemente incrementadas, suponga para el ejemplo propuesto que " $\phi_{1p}=2500$  LF, en lugar de las "1000 LF" que había con aire como medio soporte. Es decir, la consecuencia de la introducción de un núcleo de material ferromagnético, fue la de multiplicar el flujo previo existente. Este efecto, como será visto más adelante, puede interpretarse también como la disminución de la reluctancia originada por el tramo de hierro introducido en el camino de las "LF".

Como en realidad lo que se había requerido en el ejemplo propuesto es que la bobina 1 produzca "1000 LF", aprovechando este "poder multiplicador" del núcleo introducido, la corriente de la bobina podrá ser ahora " $I_c/2.5$ " del arreglo original. En tal caso la sección del alambre podrá ser " $S/2.5$ " y el dispositivo de menor el tamaño, todo lo cual redundará en un mejor acoplamiento, más pequeño, de menor tamaño y costo. Sin embargo el factor de acoplamiento de " $k=0.4$ ", logrado con el núcleo propuesto, sigue siendo una solución pobre a efectos de un buen acoplamiento.

Cuando se quiere mejorar algo que ya funciona, aún cuando no lo bien que se esperaba, como sucede con el caso del trozo de hierro introducido como núcleo de las bobinas acopladas, primero es necesario detectar cuál es el inconveniente. Para el caso, el problema radica en que más allá de los extremos del núcleo ferromagnético de las bobinas, es decir donde se termina el camino de hierro, el flujo se encuentra obligado a completar su recorrido por aire. En tal caso, dado que en el recorrido por aire no podrá haber corriente superficial, responsable del confinamiento del flujo, entonces a partir de

dichos extremos las líneas de fuerza deben completar su recorrido por caminos de sección y longitud indeterminada, de alta reluctancia y dispersión.

Resulta así casi obvia la mejor propuesta para mejorar el acoplamiento que es que el núcleo de hierro fuera completamente cerrado sobre si mismo. En tal caso las "LF" producidas por la corriente superficial que ahora aparecerían a lo largo de todo el núcleo, serían el motivo de que el flujo por ellas producido estuviera íntegramente confinado al núcleo ferromagnético y por lo tanto la bobina 2, ahora concatenaría íntegramente dicho flujo que era el objetivo buscado.

Al completar el núcleo ferromagnético como camino cerrado para el flujo producido por la corriente superficial, como se verá en detalle más adelante, podrá ser calculado por la ley de Hopkinson. El flujo mutuo concatenado habrá aumentado ahora enormemente, dado que ahora las LF del núcleo se cierran casi íntegramente por camino de material ferromagnético, de muy baja reluctancia. Solución que también contribuye a un enorme aumento del "poder multiplicador".

De acuerdo con el ejemplo propuesto, suponga ahora: 1) que el poder multiplicador hubiera aumentado a "10", es decir para la misma corriente de conducción " $I_c$ ", el flujo propio sería " $\phi_p=10000$  LF", 2) que el flujo mutuo fuera del 95%, es decir " $\phi_{21}=9500$  LF" y 3) el disperso del 5%, o sea " $\phi_{1d}=500$  LF". El coeficiente de acoplamiento sería entonces " $k=0.95$ " y consecuentemente se estaría en presencia de lo que se puede considerar un acoplamiento fuerte.

Como lo que se quería era que el flujo concatenado fuera de "1000 LF", entonces la corriente que lo origina, ahora podría ser la décima parte de la " $I_c$ " necesaria cuando el soporte del flujo era el aire, consecuentemente también la sección, el tamaño, el peso y el costo del sistema será ahora mucho menor, con la ventaja de que ahora si se ha logrado un acoplamiento fuerte, con un flujo mutuo del "95%" o " $k=0.95$ ".

## 2. MAGNETISMO EN LOS MATERIALES

Para comprender a fondo este capítulo el estudiante debe conocer: ley de Ampère, ley de Gauss, momento mecánico y magnético de una espira de corriente o dipolo magnético y flujo de inducción magnética.

En Física II se vio que un campo eléctrico que inunda un material, es afectado por los dipolos eléctricos del material que aportan su propio campo eléctrico al material. El campo de un dipolo eléctrico que va de positivo a negativo, tiene dirección contraria a la del momento dipolar " $p$ " del dipolo que lo origina. Los dipolos eléctricos, dependiendo del material, pueden ser permanentes o aparecer inducidos bajo la acción de un campo externo " $E_o$ ". En ambos casos el resultado es que el dipolo es asiento de una cupla mecánica que lo alinea paralelo al campo externo y en consecuencia tiende a debilitar dicho campo " $E_o$ ".

Algo parecido ocurre cuando un campo magnético " $B_o$ " inunda un material, ya sea porque existen previamente o por que se inducen, los átomos del material poseerán dos momentos dipolares magnéticos, uno debido al giro de los electrones alrededor del núcleo (momento magnético externo) y otro asociado al spin (momento magnético interno). La composición de ambos momentos da origen a un momento de dipolo magnético " $m$ " que en forma simplificada se muestra en la figura 7.1. En las figura

7.1/2, mediante cuatro líneas de fuerza representadas con flechas curvadas, se muestra el campo magnético " $\Delta B_d$ " asociado al dipolo. En dichas figuras se puede ver que a diferencia del campo de un dipolo eléctrico, el del dipolo magnético coincide en dirección y sentido con el momento dipolar " $m$ " del dipolo que lo origina.

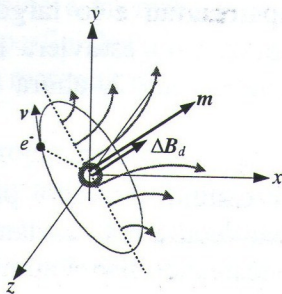


Figura 7.1

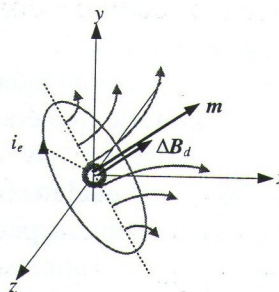


Figura 7.2

Para una comprensión natural del fenómeno, en la figura 7.2 se muestra el átomo de la figura 7.1 en el que el movimiento del electrón orbital, se representa como si fuera una espira de corriente " $i_e$ ", en un conductor sin resistencia que sería la órbita del electrón y por lo tanto sin sección. Esta espira de corriente, como cualquier espira de corriente y como se muestra en ambas figuras, produce un campo magnético " $\Delta B_d$ ", el del dipolo del átomo que representa.

**Nota:** se recuerda que las "letras time new roman" entre comillas y negritas representan vectores o fasores según el tema que se trate.

Por Física se sabe que el momento dipolar de una espira de corriente (dipolo magnético), se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\vec{m} = i_e \cdot \vec{A}_d \quad (7.1)$$

Como se muestra en figura 7.3, para el ejemplo propuesto, " $A_d$ " se correspondería con el área de la órbita que opera como espira de corriente.

Si al dipolo de la figura 7.3, se lo sumerge en un campo " $B_o$ ", será objeto de una cupla mecánica expresión (7.2) que tenderá a alinear el momento dipolar " $m$ " con dicho campo.

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_o \quad (7.2)$$

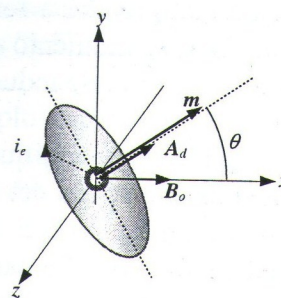


Figura 7.3

Con los dipolos magnéticos el alineamiento puede ser de dos maneras:

- 1) Que resulte paralelo y del mismo sentido a " $B_o$ ", el campo del dipolo " $\Delta B_d$ " y " $B_o$ " se suman.
- 2) Que resulte paralelo y de sentido contrario, entonces " $\Delta B_d$ " se resta a " $B_o$ " disminuyéndolo.

Dependiendo del alineamiento de los dipolos magnéticos antes descrito pueden suceder dos cosas:

- 1) Para el caso de los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos, en los que el momento " $m$ " es permanente, los dipolos se alinean paralelos al campo magnético externo (dirección y sentido) y por lo tanto el campo resultante es mayor.

$$\bar{B} = \bar{B}_o + \Delta\bar{B}_d \quad (7.3)$$

- 2) Para los materiales diamagnéticos, por motivos que exceden el alcance de la materia, los momentos " $m$ " son inducidos por el campo externo, en consecuencia se alinean paralelos pero de sentido contrario al campo magnético externo " $B_o$ ". En tal caso los campos magnéticos de los dipolos se restan de " $B_o$ ", tendiendo así a debilitar el campo externo, obteniéndose un campo resultante menor.

$$\bar{B} = \bar{B}_o - \Delta\bar{B}_d \quad (7.4)$$

En resumen, en función del tipo de alineamiento de los " $m$ ", los materiales se clasifican en paramagnéticos, diamagnéticos y ferromagnéticos. El caso que interesa expresamente para la materia es el de los materiales ferromagnéticos que como se dijo disponen de momentos dipolares permanentes que se orientan paralelamente a los campos externos que los originan.

Los dipolos de estos materiales interactúan fuertemente con el campo magnético externo, lo que resulta en un alto grado de alineamiento, incluso con campos externos débiles y la consecuencia es un efecto enormemente favorable didácticamente descritos como "poder multiplicador" y "capacidad de confinamiento".

Es decir el fenómeno analizado, no sólo produce un fuerte incremento de la inducción magnética resultante, sino que dado las características particulares del flujo aportado por los dipolos magnéticos, este se encontrará confinado en el material, lo que permite afirmar que el flujo queda canalizado en el núcleo, dando origen a una enormemente disminución de la dispersión magnética. Estos materiales se comportan como verdaderos caminos para el flujo y en consecuencia convenientemente usados constituyen lo que se denominan los circuitos magnéticos, objeto también del presente capítulo.

### 3. ANALISIS DE LOS MATERIALES FERROMAGNETICOS

#### 3.1 Generalidades

En todos los materiales y en consecuencia en los ferromagnéticos (o simplemente magnéticos), el magnetismo se debe al movimiento intrínseco organizado de los electrones atómicos, mostrados en forma simplificada en la barra de hierro de sección rectangular de la figura 7.4.

La simplificación referida, consiste según lo muestra la sección transversal del extremo derecho de la barra que se considera compuesta sólo por cuatro átomos. Estos átomos vistos como dipolos magnéticos se asume que se encuentran alineados uniformemente, tal como se muestra en la figura.

Se puede visualizar así que cuando los dipolos se encuentran alineados, es decir los momentos dipolares " $m$ " tienen la misma dirección, los tramos interiores de los orbitales que constituyen las espiras de corriente, se cancelan unos con otros (tachados con cruces en la figura). Otra simplificación es que para que la cancelación de efectos de las corrientes orbitales internas, se vea con mayor claridad, las órbitas se representaron con forma rectangular.

Se puede ver así que la parte de las órbitas de los átomos colindantes con la superficie del material que recorren la superficie de la barra, no tienen contrapartida cancelatoria y en consecuencia, cada uno de estos tramos, de espiras de corrientes de los dipolos orientados, tal como se muestra en la figura 7.4, conforman una espira de corriente que recorre la superficie, cerrándose sobre si misma, en dirección transversal a la dirección de magnetización.

Estas espiras de corriente superficial, transversales al eje de magnetización, se extienden a lo largo de toda la barra y en conjunto constituyen las corrientes superficiales o de Ampère que actúan como si estuvieran producidas por una bobina de alambre, sin resistencia y por lo tanto sin sección, en el que las espiras se encontraran una al lado de otra, constituyendo un verdadero "solenoides".

Estas corrientes superficiales aun cuando no son las corrientes que recorren los conductores (que para distinguirlas de la superficial, en adelante se hará referencia a ellas como corrientes de conducción), como fue explicado también están formadas por electrones y por lo tanto originarán a su alrededor líneas de fuerza de campo magnético de inducción. EL campo magnético que así resulta, puede interpretarse también como formado por la composición de los campos de todos los dipolos alineados. Es decir:

$$B_d = \sum \Delta B_d \quad (7.5)$$

Dado que en los materiales ferromagnéticos por el alto grado de alineamiento de sus dipolos, estas corrientes superficiales resultan muy intensas, hacen que el campo " $B_d$ ", sea muy superior al campo externo " $B_o$ " que le dio origen. Este es el efecto al que didácticamente se hace referencia como "poder multiplicador". Mientras mayor sea la dimensión longitudinal de la barra, con relación a sus dimensiones transversales, mayor será la tendencia del fenómeno a comportarse como un solenoide ideal, es decir las líneas de fuerza de " $B_d$ " estarán contenidas y aproximadamente uniformemente repartidas, a lo largo de toda la barra de hierro. Este es el efecto al que didácticamente se hace referencia como "capacidad de confinamiento".

Es importante señalar que dependiendo de la relación entre la dimensión longitudinal y las transversales de la barra, las corrientes superficiales se irán raleando hacia los extremos de la barra. Este aspecto que no se muestra en la figura 7.4, será mayor cuanto menor sea la relación aludida y es consecuencia de que las líneas de fuerza producidas por la corriente superficial, al alcanzar el extremo libre de la barra, deberán completar su recorrido en aire. En tal caso muchas LF escapan por la superficie lateral de la barra de hierro antes de alcanzar el extremo. Este efecto que atenta contra la uniformidad del flujo de " $B_d$ ", actúa en detrimento de la "capacidad de confinamiento".

En resumen si con un campo de inducción " $B_o$ " y en dirección paralela a su eje, se inunda una barra de material magnético, como la de la figura 7.4, cuya longitud " $l$ " sea

mucho mayor que sus dimensiones transversales, muchos de los momentos magnéticos “ $m$ ” se orientarán paralelos al eje de la barra. Si el material es homogéneo la corriente neta en el interior del material será cero, consecuencia de la cancelación entre corrientes atómicas adyacentes internas.

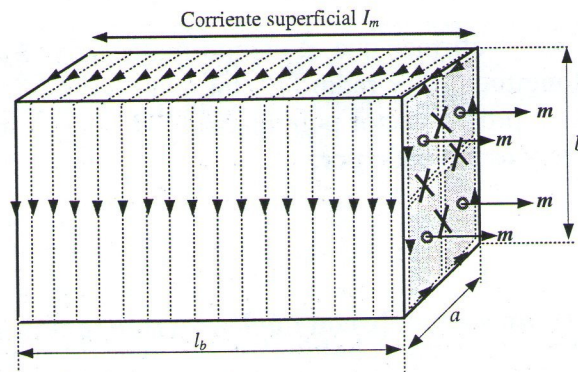


Figura 7.4

Ahora bien, como en la superficie no hay cancelación, existirá entonces una corriente resultante denominada corriente superficial o de Ampère. Esta corriente superficial se distribuye aproximadamente en forma uniforme, en la superficie y su densidad longitudinal de acuerdo con la figura 7.4, estará dada por:

$$M = \frac{I_m}{l_b} \quad (7.6)$$

En un caso más general, en el que la distribución de “ $I_m$ ” no resulte uniforme, la (7.6), estará dada por:

$$M = \frac{dI_m}{dl_b} \quad (7.7)$$

Si se multiplica numerador y denominador de (7.7), por “ $A_b = a \cdot b \cdot \mathbf{i}$ ” vector que representa el área de la sección transversal de la barra, donde “ $\mathbf{i}$ ” es el versor según el eje de la barra, entonces se obtiene un vector de momento dipolar que resultará ser el formado por todos los dipolos orientados en el volumen de material considerado, que dividido por dicho volumen, dará un promedio de la cantidad dipolos orientados en la barra de hierro, por unidad de volumen. El vector “ $\mathbf{M}$ ” da por lo tanto el estado de magnetización del material que como resulta de la (7.7), coincidirá con la densidad longitudinal de corriente superficial del material:

$$\overline{\mathbf{M}} = \frac{\overline{A_b} \cdot dI_m}{A_b \cdot dl_b} = \frac{d\overline{m}}{dvol} \quad (7.8)$$

El numerador de (7.8) corresponde al momento dipolar de una espira de corriente “ $dI_m$ ” y área “ $A_b$ ”, cuyo campo resultará de la composición de todos los dipolos “ $dm$ ” que se hayan orientados en el volumen considerado “ $A_b \cdot dl_b$ ”.

Por lo dicho, el vector " $M$ " recibe el nombre de "vector polarización magnética", o "vector momento magnético por unidad de volumen" o "vector imantación".

Se hace notar que el módulo " $M$ " del vector imantación, se asemeja a la corriente de conducción por unidad de longitud de un solenoide ideal dada por " $n \cdot I_c$ ", donde " $n$ " representa el número de espiras por unidad de longitud del solenoide.

Por lo dicho se puede afirmar que el campo magnético " $B_d$ " en el interior de una barra imantada, de longitud " $l_b$ " y radio " $r$ ", tal que " $r \ll l_b$ ", es decir el cálculo del campo debido sólo a su propio vector polarización " $M$ ", será similar al de un solenoide ideal de núcleo de aire y estará dado por:

$$\bar{B}_d = \mu_0 \cdot \bar{M} \quad (7.9)$$

### 3.2 Cálculo de " $B$ " en un solenoide con núcleo ferromagnético

A efecto de ir de lo simple a lo complejo, suponga una barra de material ferromagnético de las mismas dimensiones geométricas que las del interior de un solenoide " $r \ll l_b$ " tal que pueda ser considerado como ideal, ver figura 7.5.

La barra se introduce como núcleo para mejorar el comportamiento magnético del solenoide. Como el solenoide se encuentra recorrido por una corriente " $I_c$ ", la barra mencionada se encontrará sumergida en un campo magnético aproximadamente uniforme " $B_o$ ", de existencia previa a la introducción de la barra e independiente de esta. Se quiere calcular para el caso, el campo resultante " $B$ " con la barra introducida como núcleo.

Dado que la polarización magnética " $M$ " es función del campo magnético previo " $B_o$ ", como se muestra en el presente desarrollo, el cálculo del campo resultante resulta un tanto complejo.

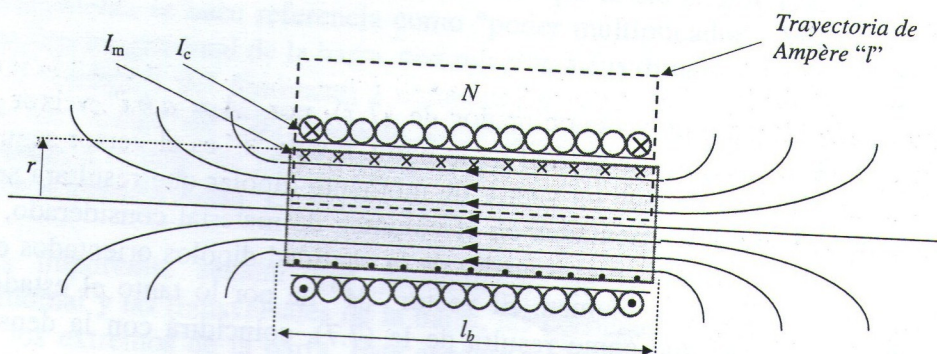


Figura 7.5

De acuerdo con la ley de Ampère y según la trayectoria de la figura 7.5, el campo en el interior de la barra núcleo del solenoide, se deberá tanto a la corriente de conducción " $I_c$ ", como a la superficial " $I_m$ " consecuencia del " $M$ " antes descrito, es decir será:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_o \sum I_c + \mu_o \sum I_m \quad (7.10)$$

El problema de la expresión (7.10), radica en la dificultad de obtener con facilidad la corriente superficial " $\sum I_m$ ", ahora bien por lo visto hasta aquí, el vector " $\bar{M}$ " puede ser considerado existente y uniforme en el interior de la barra de hierro y que no existe fuera de ésta. Esta aproximación que bajo determinada geometría suele darse con bastante frecuencia en la realidad, resulta así de característica similar al " $\bar{B}$ " de un solenoide ideal, por lo que puede asumirse, tal como se muestra a continuación que esta sujeta a que se le pueda aplicar la ley de Ampère:

$$\oint \bar{M} \cdot d\bar{l} = \int_0^{l_b} \bar{M} \cdot d\bar{l} = \mu_o \sum I_m \quad (7.11)$$

### 3.3 Intensidad de campo magnético o intensidad magnética " $\bar{H}$ "

Dividiendo (7.10) m.a.m. por " $\mu_o$ ", reemplazando (7.11) y despejando de manera que la (7.10) quede expresada como función sólo de la corriente de conducción, es decir queda:

$$\oint \left( \frac{\bar{B}}{\mu_o} - \bar{M} \right) \cdot d\bar{l} = \sum I_c \quad (7.12)$$

Se obtiene así la ley de Ampère aplicada a un nuevo vector " $\bar{H}$ " denominado intensidad de campo magnético o intensidad magnética, que sólo depende de la corriente de conducción, pero que intrínsecamente contempla en caso de existir núcleo, su vector imantación. Es decir:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_o} - \bar{M} \quad (7.13)$$

Como en caso de no existir núcleo " $\bar{M}=0$ " la expresión (7.12), se reduce a la ley de Ampère para una bobina sin material en su núcleo, es decir vacío, entonces la ley de Ampère con este vector " $\bar{H}$ ", expresión (2.14), resultará ser la forma más general de dicha ley, pero con la ventaja de que sólo interviene la corriente de conducción que resulta fácil de obtener o de medir con un amperímetro.

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_c \quad (7.14)$$

$$\text{De (2.13)} \quad \bar{B} = \mu_o \bar{H} + \mu_o \bar{M} \quad (7.15)$$

En síntesis se interpreta como intensidad de campo magnético o intensidad magnética, a un vector que depende solamente de la corriente de conducción debida a los conductores externos, o sea que no depende de las corrientes superficiales de ningún medio material que hubiera en el núcleo.

Aplicando la (7.14), al solenoide de la figura 7.5 resulta

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI_c \quad (7.16)$$

Como el solenoide de la figura 7.5, fue asumido como de características casi ideales, su vector " $H$ " resultará uniforme debido a que resulta de la composición de " $B_o/\mu_o$ " y " $M$ ", ambos uniformes y de existencia sólo en el interior del solenoide, con lo que resolviendo (7.16), se obtiene:

$$Hl_b = NI_c \quad (7.17)$$

La dimensión de " $H$ " es entonces (amperes-vueltas/metro) igual que para la imantación " $M$ ". Este magnitud " $H$ " representa la intensidad magnética necesaria para obtener un determinado " $B$ ". Depende sólo de la corriente de conducción, haya o no núcleo magnético, se obtiene con independencia de la imantación.

### 3.4 Importancia de los circuitos magnéticos

Como se muestra en la figura 7.5, las líneas de fuerza del flujo magnético, al alcanzar el extremo de la barra que obra de núcleo, para cerrarse sobre si mismas, para cerrarse sobre si mismas, deben retornar por el aire o vacío. En consecuencia deben recorrer caminos de alta reluctancia, parámetro que se opone al flujo y por lo tanto no aprovechan en plenitud, el poder multiplicador del material magnético del núcleo.

En tal sentido como ya fue dicho muchas de las LF abandonarán la barra antes de alcanzar su extremo, lo que por otro lado indica que la densidad longitudinal de corriente superficial irá disminuyendo hacia los extremos del núcleo, aspecto no representado en la figura 7.5.

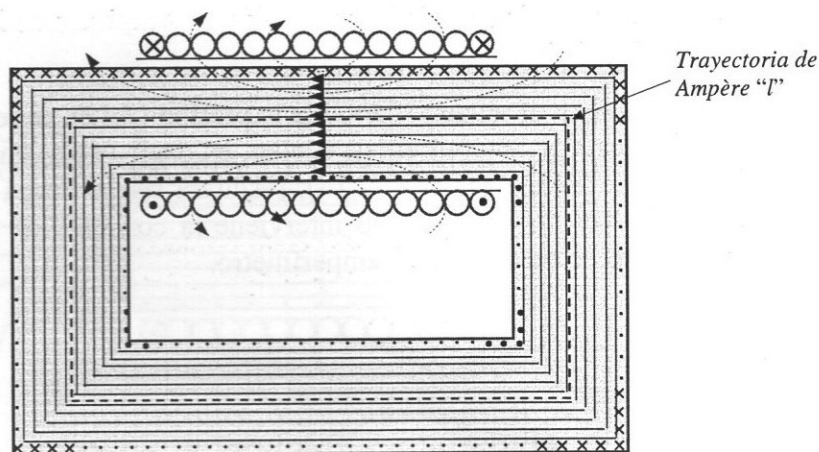


Figura 7.6

Observando lo anteriormente expresado, resultaría obvio pensar que la mejor condición de funcionamiento se lograría si el flujo creado en el núcleo encontrara

camino ferromagnético en todo su recorrido y esto se lograría, como se muestra en la figura 7.6, con un núcleo ferromagnético cerrado que concatene a la bobina.

En tal caso la orientación de los dipolos se propagará a lo largo del núcleo ferromagnético cerrado, con dos consecuencias importantísimas:

- 1) el aporte de la corriente superficial involucrada en la producción del flujo se extenderá a lo largo de todo el circuito ferromagnético y por lo tanto el flujo será ahora mucho mayor, enorme aumento del poder multiplicador y
- 2) por otro lado, dicho flujo, al estar obligado a concatenar la corriente superficial que lo produce, se encontrará "íntegramente" confinado dentro del núcleo. De manera que el núcleo actuara ahora como un verdadero circuito para el flujo, denominado circuito magnético.

En tal caso si se quiere ahora calcular el " $B$ " producido, la trayectoria de Ampère, deberá ser ahora la indicada en línea de trazos de la figura 7.6 y deberá involucrar toda la corriente que produce el flujo, considerando que la corriente superficial involucrada ahora será:

$$\sum I_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = M \cdot l \quad (7.18)$$

y que la de conducción

$$\sum I_c = NI_c \quad (7.19)$$

La ley de Ampère aplicada al caso será entonces:

$$B \cdot l = \mu_o NI_c + \mu_o M \cdot l \quad (7.20)$$

La diferencia de la (7.20) con la (7.16) es que ahora " $B$ " y " $M$ " son uniformes a lo largo de toda el núcleo, es decir de toda la trayectoria de Ampère o de integración y por lo tanto, se pudo resolver la integral.

Dada la uniformidad de " $B$ " y " $M$ ", a lo largo y ancho de la sección transversal del núcleo, lo que implica que " $H$ " también lo sea y considerando que la longitud del circuito magnético, sea mucho mayor que su dimensión transversal, aspecto que en la práctica puede asumirse sin cometer un error importante, entonces se puede hacer coincidir la variable de integración " $l$ ", con la longitud media del circuito magnético, con lo que la (7.20) puede expresarse como:

$$H \cdot l = NI_c \quad (7.21)$$

$$\text{De (7.20)} \quad \left( \frac{B}{\mu_o} - M \right) \cdot l = NI_c \quad (7.22)$$

Considerando (7.21/22) y expresando en forma vectorial, se obtiene como en (7.15)

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \vec{M} \quad (7.23)$$

### 3.5 Susceptibilidad y permeabilidad magnética

La susceptibilidad magnética es el grado de magnetización de un material, en respuesta a un campo magnético " $H$ ". Se puede comprobar experimentalmente que el vector imantación " $M$ " y la intensidad magnética " $H$ ", en el caso de sustancias para y diamagnéticas, son linealmente proporcionales. Dicha proporcionalidad se establece a través de una constante " $\chi_m$ " llamada susceptibilidad que por la definición dada podría entenderse como la predisposición de un material a la magnetización.

$$\bar{M} = \chi_m \cdot \bar{H} \quad (7.24)$$

**Tabla 7.1**  
(Susceptibilidad de algunas sustancias a 20° C)

Sustancia	$\chi_m$	Propiedad
Aluminio	$2.3 \times 10^{-5}$	Paramagnética
Cobre	$-0.98 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Oro	$-3.6 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$	Paramagnética
Mercurio	$-3.2 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Plata	$-2.6 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Sodio	$-0.24 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Hidrógeno (1 atm)	$-9.9 \times 10^{-9}$	Diamagnética
Dióxido de carbono (1 atm)	$-2.3 \times 10^{-9}$	Diamagnética
Nitrógeno (1 atm)	$-5.0 \times 10^{-9}$	Diamagnética
Oxígeno (1 atm)	$2090 \times 10^{-9}$	Paramagnética

Como " $M$ " y " $H$ " tienen la misma dimensión entonces " $\chi_m$ " resulta adimensional, positiva para los materiales paramagnéticos y negativa para los diamagnéticos.

Suponga ahora que el núcleo cerrado de la figura 7.6, sea de material para o diamagnético, de manera que de acuerdo con la tabla 7.1 " $\chi_m$ " sería constante, Reemplazando (7.24) en (7.23), se obtiene:

$$\bar{B} = \mu_o \cdot \bar{H} + \mu_o \cdot \chi_m \cdot \bar{H} \quad \text{de donde} \quad (7.25)$$

$$\bar{B} = \mu_o \cdot (1 + \chi_m) \cdot \bar{H} \quad (7.26)$$

De la (7.26) se define lo que se conoce como permeabilidad del material.

$$\mu = \mu_o \cdot \left( \overset{\mu_r}{\overbrace{1 + \chi_m}} \right) \quad (7.27)$$

Donde " $\mu_r = \mu / \mu_o$ " adimensional es la permeabilidad relativa del material.

Como resulta de los valores mostrados en la tabla 7.1, al ser la susceptibilidad de los materiales para y diamagnéticos tan pequeña, su permeabilidad relativa resultará prácticamente igual a la unidad.

Reemplazando 7.27 en 7.26, se obtiene la importante relación:

$$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H} \quad (7.28)$$

### 3.6 La permeabilidad magnética en materiales ferromagnéticos.

Para los materiales ferromagnéticos, también se adopta la expresión (7.26). El problema que surge es que " $\mu$ ", para el caso, no sólo depende de " $H$ ", sino también del estado previo de magnetización del material que se conoce como historia del material. En términos prácticos lo anterior significa que no sólo " $B$ " es función de " $H$ ", sino que ahora también lo será " $M$ " y en conjunto originan una función multiforme de " $H$ " que se expresa:

$$\bar{B} = \mu_o \cdot \mu_r(H) \cdot \bar{H} = \mu(H) \cdot \bar{H} \quad (7.29)$$

Donde " $\mu$ " se conoce como permeabilidad magnética del material.

Con el objeto de ser usados como núcleos magnéticos, resultan de particular interés los materiales ferromagnéticos tales como: hierro puro, níquel, cobalto y distintas aleaciones de éstos. Como fue dicho, la importancia de algunos de estos materiales es por su utilización en la fabricación de máquinas eléctricas: generadores, motores, transformadores, inductores, etc.

## 4. CIRCUITOS MAGNETICOS

### 4.1 Introducción.

Como fue dicho los núcleos magnéticos tienen entre otras bondades la de canalizar el flujo magnético. De manera que son verdaderos caminos para éste, de la misma manera que los conductores para la corriente en los circuitos eléctricos. Sin embargo en el punto (3.6) anterior, expresión (7.29), se puso de manifiesto el problema de la dependencia con " $H$ " que tiene la permeabilidad relativa de los materiales ferromagnéticos. De acuerdo con (7.25) se puede expresar como:

$$\bar{B} = \mu_o \cdot \bar{H} + \mu_o \cdot \chi_m(H) \cdot \bar{H} \quad (7.30)$$

Para el caso de los materiales ferromagnéticos se puede afirmar que el aporte al campo " $B$ " del término " $\mu_o \cdot \chi_m(H) \cdot H$ " de (7.30), debido a la corriente superficial (representado en la figura 7.6, por LF rectas, paralelas, cerradas sobre si mismas que recorren el núcleo confinadas a este), siempre será mucho mayor que el del término " $\mu_o \cdot H$ " (representado en la figura 7.6, por LF curvas y de trazos), de manera que este último podrá ser despreciado.

Ahora bien, como el término " $\mu_o \cdot \chi_m(H) \cdot H$ " de (7.30), es originado por la corriente superficial y ésta como fue visto, por la geometría de los circuitos magnéticos, podría asumirse como la de un solenoide ideal estrechamente arrollado y cerrado sobre si mismo, entonces dicho flujo estaría casi completamente confinado al núcleo, con lo que se disminuye enormemente la dispersión y es lo que didácticamente se había llamado "capacidad de confinamiento".

En resumen de acuerdo con lo dicho se podría afirmar que el flujo total podría estar calculado con el campo " $H$ " dado por:

$$\bar{B} \equiv \mu_o \cdot \chi_m(H) \cdot \bar{H} \quad (7.31)$$

Un ejercicio ayudará a comprender el fenómeno, con mayor naturalidad.

**Ejercicio 7.1** (de apoyo a teoría)

En el cálculo de parámetros de una línea aérea de transmisión de energía, cuyo conductor sea cable de Aluminio-Acero, para el acero que obra como alma del conductor (mejora las condiciones mecánicas y disminuye las consecuencias del efecto skin), y sin considerar su dependencia con " $H$ ", se toma como permeabilidad relativa " $\mu_r=50$ ". Se quiere determinar 1) que valor específico de susceptibilidad " $\chi_m$ " corresponderá a dicho valor de permeabilidad relativa y 2) que relación entre " $B$ " en el alma del conductor y el " $H$ " que lo origina, para el valor de susceptibilidad obtenido.

- 1) Despejando " $\mu_r$ ", de acuerdo con (7.27)

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 49 \quad (7.32)$$

- 2) Dividiendo m.a.m. (5.26) por " $\mu_o \cdot H$ "

$$\frac{\bar{B}}{\mu_o H} = 1 + \chi_m = 1 + 49 \quad (7.33)$$

De lo expuesto se podría asegurar que la corriente superficial aportaría "49" veces el " $B$ " que habría si el material del alma del conductor fuera para o diamagnético, en cuyo caso " $B = \mu_o H$ ".

**4.2 Cálculo del flujo en circuitos magnéticos o Ley de Hopkinson.**

Para facilitar la comprensión se completará el tema introducido en el punto 3.4, mediante el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 7.2** (de apoyo a teoría)

Considere que una bobina con núcleo ferromagnético cerrado de " $N$ " espiras, como la de la figura 7.26, se encuentra recorrida por una corriente de conducción " $I_c$ " y para la que se quiere determinar el flujo que se desarrolla en su núcleo.

De acuerdo con lo estudiado en el punto 3.4 conviene aplicar ley de Ampère para el vector " $H$ ". Si se elige la trayectoria de Ampère, de manera que coincida con una línea que recorra el núcleo por su longitud media " $l$ ", se obtendrá una expresión similar a la (7.21), de la que despejando:

$$H = \frac{NI_c}{l} \quad (7.34)$$

De acuerdo con la (7.30), desarrollada en el punto 3.6

$$B = \mu(H) \cdot \frac{NI_c}{l} \quad (7.35)$$

Tomando en cuenta de acuerdo con lo visto que para el caso "B" puede ser considerado uniforme en toda la sección transversal, que para la bobina de la figura 7.26 se simboliza con "S", entonces el flujo será:

$$\phi = \iint_S \overline{B} d\overline{S} = B \iint_S dS = \mu(H) \cdot \frac{NI_c}{l} \cdot S \quad (7.36)$$

La expresión (7.36) se conoce como ley de Hopkinson y aplica para calcular el flujo en circuitos magnéticos cerrados, a partir de la determinación de la intensidad magnética "H" de dicho circuito magnético.

### 4.3 Ley de Ohm para circuitos magnéticos.

No existe como tal, se suele referir de esta manera al uso que se hace como regla nemotécnica, de la ley de Ohm, para recordar con mayor facilidad la ley de Hopkinson. Esta ley de Ohm para circuitos magnéticos surge de cambiar formalmente la ley de Hopkinson expresión (7.36), de acuerdo como se indica a continuación:

$$\phi = \frac{NI_c}{\frac{l}{\mu(H)} \cdot S} \quad (7.37)$$

Como el denominador formalmente se parece a la expresión de la resistencia dada por la ley de Ohm para circuitos eléctricos. Es decir es un "factor" que establece una proporcionalidad (no lineal para el caso), entre "NI<sub>c</sub>" y el flujo "φ" y lo hace de la misma manera que lo establece la ley de Ohm, es decir el factor constante "R" (resistencia del conductor), establece una proporcionalidad lineal, entre la diferencia de potencial "V" a la que está sometido y la corriente "I" que lo recorre. Entonces hay una analogía formal que se verifica comparando (7.37) y ley de Ohm dada en (7.38).

$$I = \frac{V}{\rho \cdot \frac{l}{S}} \quad (7.38)$$

Por tal motivo, entre la ley de Hopkinson y la ley de Ohm, se puede hacer la siguiente semblanza circuital.

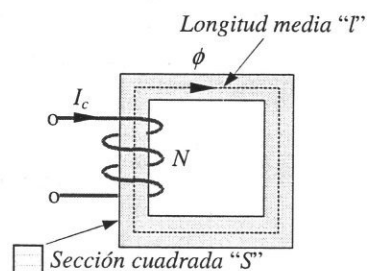


Figura 7.7

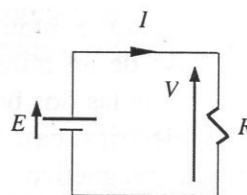


Figura 7.8

Dado que en la comparación formal, la resistividad " $\rho$ " del material del alambre de la resistencia " $R$ " del circuito eléctrico, su longitud " $l$ " y su sección " $S$ ", se corresponden respectivamente con " $1/\mu(H)$ ", la inversa de la permeabilidad del material del núcleo ferromagnético, " $l$ " la longitud del camino medio del circuito magnético y " $S$ " la sección transversal del mismo, se puede establecer una semejanza matemática formal entre ambos denominadores de (7.37) y (7.38).

Si en tal sentido se propone que el flujo " $\phi$ " es para los circuitos magnéticos, lo que " $V$ ", es para los circuitos eléctricos y " $NI_c$ ", lo que es " $V$ " para los circuitos eléctricos, entonces, el denominador de (7.38) será lo que la resistencia es para los circuitos magnéticos, es decir se opondrá al " $\phi$ " y en consecuencia se comporta como una resistencia magnética que se denomina reluctancia, se la designa con la misma letra que a la resistencia, pero para evitar confusión con otro tipo de letra, es decir con " $\mathfrak{R}$ ". En resumen queda:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu(H)} \cdot \frac{l}{S} \quad (7.39)$$

Dado la semejanza formal entre " $V$ " y " $NI_c$ " y como se sabe por ley de Kirchhoff que " $V=E$ " fuerza electromotriz de la fuente (fem) que mueve las cargas, entonces " $NI_c$ " podrá ser llamada fuerza magnetomotriz (fmm). De acuerdo con (7.21), esta "fmm" se corresponderá con la integral de la intensidad de campo magnético " $H$ " a lo largo de una vuelta completa del circuito magnético, lo que resulta semejante a la fuerza electromotriz que es la integral del campo eléctrico resultante en una circuitación completa a lo largo de todo el circuito eléctrico. En síntesis la ley de ohm para circuitos magnéticos puede adoptar la siguiente expresión.

$$\phi = \frac{fmm}{\mathfrak{R}} \quad \text{similar a} \quad I = \frac{fem}{R} \quad (7.40)$$

#### 4.4 Necesidad de entrehierros en los circuitos magnéticos.

Si bien por lo hasta aquí visto lo ideal es que los circuitos magnéticos sean completamente cerrados e isótropos con relación a la dirección del flujo, existen diferentes motivos que en algunos casos obligan a romper la isotropía del mismo. Un ejemplo lo constituyen las máquinas rotantes que si se remite al caso más simple, consiste en el acoplamiento entre una bobina, llamada inductor por que provee la inducción magnética " $B$ " que origina el flujo a concatenar, por otra bobina, llamada inducido, por que actúa como asiento de una fem inducida (generador), o es asiento de una cupla mecánica para el caso de un motor.

Estas bobinas inductor e inducido deben constituir un acoplamiento magnético fuerte, como en el caso de un transformador. A diferencia de este para el caso de las máquinas rotantes una de las dos bobinas debe girar para permitir la transformación de energía mecánica en eléctrica, caso del generador y viceversa para el motor. Para tal fin una parte del circuito magnético, la parte que sostiene a la bobina que gira (rotor), deberá estar mecánicamente separada de la parte que sostiene a la bobina fija (estator). Lo anterior se muestra simplíficadamente en la figura 7.9. El hecho que la bobina de inducido esté en el rotor y la del inductor en el estator, o viceversa, depende del tipo de máquina que se trate aspecto que excede la temática aquí abordada.

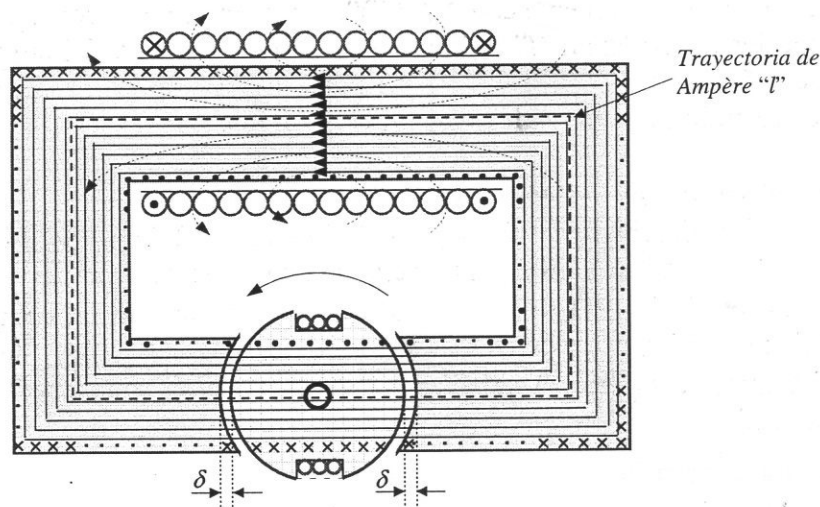


Figura 7.9

La posibilidad de que la bobina del rotor pueda girar, se da por los pequeños espacios en aire " $\delta$ " que por hallarse comprendidos entre el hierro del estator y del rotor, se denominan entrehierro y por lo hasta aquí estudiado deben ser lo más pequeños posibles. Como puede verse en la figura para lograr esto la bobina del rotor se aloja en una ranura, por lo que el espacio " $\delta$ " queda determinado por la necesidad de absorber algún juego mecánico a devenir por el desgaste de los cojinetes o rulemanes.

Se hace notar que el dibujo de la figura 7.9, si bien representa la realidad, obedece a algunas simplificaciones que son:

- 1) El flujo que atraviesa los entrehierro, lo hace en forma radial de manera de recorrer el camino de menor reluctancia.
- 2) Por simplicidad las corrientes superficiales del rotor se representaron siguiendo la línea de las del estator. En realidad como fue explicado se localizan en la superficie adoptando la configuración que sea necesaria para que las líneas de fuerza cumplan con la condición anterior de entrada o salida perpendicular a la superficie de hierro.
- 3) A los efectos de poder asumir que la sección del circuito seguido por las líneas de fuerza es la misma en el entrehierro que la parte que recorre por el hierro, se ha despreciado el efecto de borde.

Para poder abordar el cálculo de los circuitos magnéticos con entre hierro es decir en casos de anisotropía en la dirección del flujo, es necesario estudiar lo que acontece con la inducción magnética " $B$ " y la intensidad de campo " $H$ " que la produce, cuando el flujo llega a una superficie límite que separa dos medios soporte de flujo, distintos.

#### 4.5 Condiciones de borde en circuitos magnéticos.

Sea un campo " $H$ " y la correspondiente inducción " $B$ " que atraviesan una superficie límite que separa dos medios de distinta permeabilidad relativa " $\mu_r$ ", tal como se muestra en la figura siguiente:

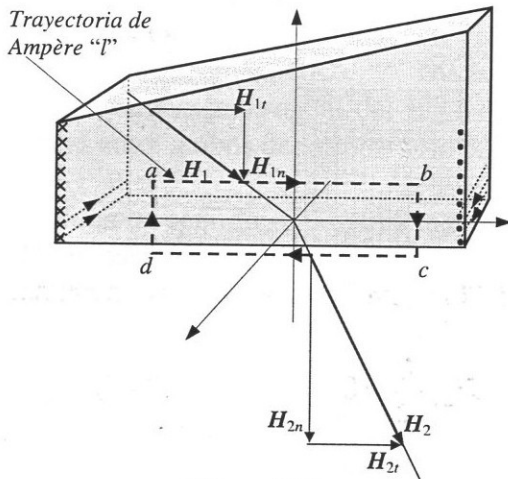


Figura 7.10

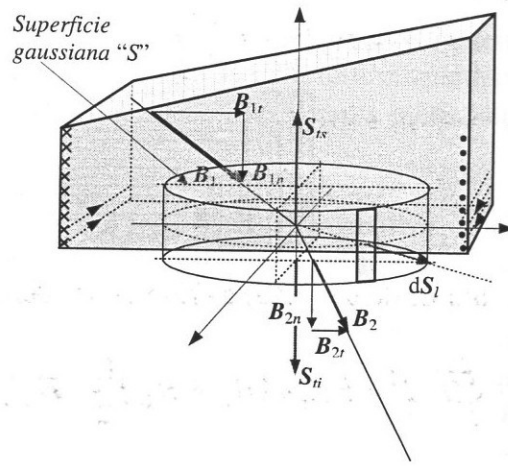


Figura 7.11

Suponga que las figuras 10/11 corresponden al extremo izquierdo de un arreglo similar al de la figura 7.5, que para el caso se ve en posición vertical. Suponga también que la existencia de una corriente de conducción localizada en algún sector del arreglo que no se muestra, es el origen de la corriente superficial, dibujada en el tramo próximo al extremo del núcleo.

En las figuras 7.10/11, se muestra la misma línea de fuerza que para mayor generalidad ha sido dibujada inclinada y formando un quiebre debida a la refracción que sufre, la que para mayor claridad ha sido dibujada desdoblada en la figura 7.10 para el campo " $H$ " y en la figura 7.11 para el campo de inducción " $B$ ".

La figura 7.10 corresponde la aplicación de la ley de Ampère referida al vector " $H$ ", a la superficie límite de ambos medios, o sea:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_c \quad (7.41)$$

Dada la trayectoria de Ampère elegida como se muestra en la figura y considerando que los lados " $b-c$ " y " $d-a$ ", son de dimensión infinitesimal, pero que atraviesan la superficie límite de los dos materiales, entonces se podrá asegurar que no podrá encerrar corriente de conducción, es decir " $\sum I_c = 0$ ". En consecuencia la (7.41), aplicada a dicha trayectoria de Ampère, deberá ser nula, tal como se muestra a continuación.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7.42)$$

Según el tramo de trayectoria representado por los cuatro términos de la expresión (7.41), una de las componentes del campo será normal a la trayectoria y la otra tangencial y de la dirección según corresponda al tramo del que se trate, en resumen dichos términos resultarán en:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} l_{ab} \quad (7.43)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} l_{ab} \quad (7.43)$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1n} \frac{l_{bc}}{2} + H_{2n} \frac{l_{bc}}{2} \quad (7.44)$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = -H_{2t} l_{cd} \quad (7.45)$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = -H_{2n} \frac{l_{da}}{2} - H_{1n} \frac{l_{da}}{2} \quad (7.46)$$

Sumando de (7.43) a (7.46), considerando que " $l_{ab}=l_{cd}=l_t$ ", " $l_{bc}=l_{da}=l_n$ " y agrupando.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} l_t + (H_{1n} + H_{2n}) \frac{l_n}{2} - H_{2t} l_t - (H_{1n} + H_{2n}) \frac{l_n}{2} = 0 \quad (7.47)$$

Como el segundo y el tercer término del segundo miembro son iguales y de signo contrario, se cancelan mutuamente, lo que implica que la (7.47) queda:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} l_t - H_{2t} l_t = 0 \quad (7.48)$$

Para que se cumpla la (7.48) implica que: " $H_{1t}$ " debe ser igual a " $H_{2t}$ ", o sea que en el borde la componente tangencial de " $H$ " debe permanecer invariable. Sin embargo no surge condición para la componente normal que en caso de medios de distinto material, serán distintas. Es decir para " $H$ " se debe cumplir que:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (7.49)$$

$$H_{1n} \neq H_{2n} \quad (7.50)$$

La figura 7.11 corresponde a la ley de Gauss referida al vector " $B$ ", aplicada a la superficie límite de ambos medios, o sea:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.51)$$

Dado que como se sabe las líneas de fuerza del campo de inducción " $B$ " nunca se cortan, si se aplica la ley de Gauss a una superficie cerrada cilíndrica de altura infinitesimal, pero que atraviese la superficie límite de los dos materiales, figura 7.11, se debe cumplir que sea nula, tal como se muestra a continuación. Desarrollando la integral según la superficie gaussiana de la figura 7.11, se tendrá:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{ts}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{ti}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.52)$$

Los términos de la integración anterior, resultarán según la superficie del cilindro que se integre:

$$\iint_{S_{ts}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B_{1n} S_{ts} \quad (7.53)$$

$$\int_{Sl} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B_{1t} \frac{S_l}{2} - B_{2t} \frac{S_l}{2} + B_{1t} \frac{S_l}{2} + B_{2t} \frac{S_l}{2} = 0 \quad (7.54)$$

$$\int_{Sii} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{2n} S_{ii} \quad (7.55)$$

El término (7.54) resulta nulo porque el flujo que entra por la izquierda, contrario a la dirección del vector superficie lateral, es negativo y es igual al que sale por la superficie lateral derecha que es positivo. Sumando de (7.53) a (7.55), considerando que " $S_{1s}=S_{ii}$ " y agrupando.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B_{1n} S_{1s} + B_{2n} S_{ii} = 0 \quad (7.56)$$

Para que la (7.56) se verifique, implica que: " $B_{1n}$ " deberá ser igual a " $B_{2n}$ ", o sea que en el borde la componente normal de " $B$ " permanezca invariable. Sin embargo no es necesaria condición para la componente tangencial. Es decir para " $B$ " se deberá cumplir que:

$$B_{1t} \neq B_{2t} \quad (7.57)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (7.58)$$

### Ejercicio 7.3 (de apoyo a teoría)

Considere el acoplamiento magnético de la figura 7.9 que como lo muestra dicha figura, cuenta con dos entrehierros " $\delta$ ". Para tal fin suponga que la sección transversal " $S$ ", la longitud total del camino medio " $l$ ", el número de espiras " $N$ " de la bobina estática y la corriente de conducción " $I_c$ " que la recorre, son todos datos conocidos. Se quiere determinar el flujo máximo " $\phi_{max}$ " que concatenara la bobina rotórica.

Según la aplicación de la ley de Ampère para el vector " $H$ " que sólo depende de la corriente de conducción que es dato. Es decir

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l-2\delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{2\delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{Fe} \cdot (l-2\delta) + H_o \cdot 2\delta = NI_c \quad (7.59)$$

Dada la restricción establecida para " $B$ " en (7.58) que la componente normal debe permanecer constante y dado que según (7.29) " $B$ " es proporcional a " $H$ ", a través de la permeabilidad " $\mu$ ", entonces según lo autoriza la (7.50), se deberá cumplir que:

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_{Fe}} \quad (7.60)$$

$$H_o = \frac{B}{\mu_o} \quad (7.61)$$

Reemplazando e (7.59)

$$\frac{B}{\mu_{Fe}} \cdot (l-2\delta) + \frac{B}{\mu_o} \cdot 2\delta = NI_c \quad (7.62)$$

Despejando "B"

$$B = \frac{NI_c}{\left( \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot (l - 2\delta) + \frac{1}{\mu_o} \cdot 2\delta \right)} \quad (7.63)$$

Tomando en cuenta que si el entrehierro es pequeño, la sección del circuito magnético, puede considerarse constante, el flujo buscado será:

$$\phi = B \cdot S = \frac{NI_c}{\left( \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{(l - 2\delta)}{S} + \frac{1}{\mu_o} \cdot \frac{2\delta}{S} \right)} \quad (7.64)$$

De acuerdo a lo estudiado el denominador de (7.64) corresponde a la suma de la reluctancia del camino " $l - 2\delta$ " que el flujo recorre por hierro y la del camino " $2\delta$ " que recorre por aire.

#### Conexión serie de reluctancias

Volviendo a la comparación con los circuitos eléctricos, según lo indica la expresión (7.64), el flujo que es lo que se asemeja a la corriente de un circuito es común en la conexión de resistencias en serie que se suman y resulta ser precisamente lo que muestra el denominador de (7.64), con lo que se concluye cuando el flujo en un circuito magnético es común a distintos tramos, estos se deberán considerar conectados en serie.

Con lo que la expresión (7.64) se puede expresar como:

$$\phi = \frac{NI_c}{\mathcal{R}_{Fe} + \mathcal{R}_o} \quad (7.65)$$

Las reluctancias en serie tienen como parámetro común el flujo y se suman.

#### Conexión paralelo de reluctancias

De una manera similar se puede demostrar que en un circuito magnético con ramas en paralelo, sus reluctancias como se muestra a continuación se asocian como las resistencias en paralelo.

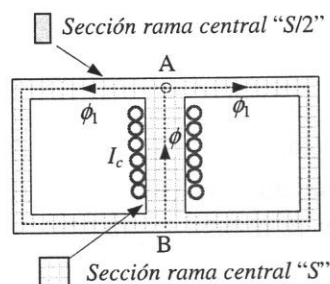


Figura 7.12

El circuito de la figura 7.12, muestra dos nodos magnéticos y tres ramas:

- 1) una central donde se encuentra localizada la fuerza magnetomotriz " $NI_c$ ", de longitud " $l/4$ " y sección " $S$ " y
- 2) dos laterales de longitudes iguales " $3l/4$ " y sección " $S/2$ ", también iguales.

Por lo dicho resulta fácil inferir que sería lo mismo si en vez de ser un núcleo de tres columnas de las dimensiones dadas, lo mismo sería un núcleo de dos columnas, de longitud total " $l$ " y la misma sección " $S$ ", a lo largo de todo el circuito. Considerando la similitud propuesta el cálculo sería bastante sencillo, tal como se muestra a continuación:

$$\phi = \frac{NI_c}{\frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{l}{S}} \quad (7.66)$$

Donde  $\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{l}{S}$  (Reluctancia equivalente) (7.67)

Desagregando la (7.67) según el arreglo del circuito magnético, con una columna central y dos laterales de las dimensiones dadas en la figura 7.12.

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{\frac{1}{4}l}{S} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{\frac{3}{4}l}{\frac{S}{2}} \right) \quad (7.68)$$

Considerando que el flujo total " $\phi$ " recorre la rama o columna central que de acuerdo a lo estudiado, su reluctancia " $\mathfrak{R}_c$ ", deberá ser la dada por el primer término de (7.68), es decir:

$$\mathfrak{R}_c = \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{\frac{1}{4}l}{S} \quad (7.69)$$

En tal caso el segundo término corresponderá a la reluctancia equivalente de las ramas laterales que por estar en paralelo, podría reescribirse según se indica:

$$\mathfrak{R}_p = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{\frac{3}{4}l}{\frac{S}{2}} \right) = \frac{\mathfrak{R}_l}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{R}_l} + \frac{1}{\mathfrak{R}_l}} \quad (7.70)$$

La (7.70) se corresponde con la misma expresión de asociación de resistencias en paralelo.

En resumen la reluctancia equivalente se halla de la misma manera que la resistencia equivalente, con lo que la (7.68), puede ser expresada directamente como:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_c + \frac{\mathfrak{R}_l}{2} \quad (7.71)$$

## 5. FERROMAGNETISMO E HISTERESIS

En los materiales ferromagnéticos un campo externo débil produce un alto grado de alineamiento de los momentos dipolares magnéticos atómicos. Esto sucede porque cuando algunos " $m$ " se alinean, ejercen intensas fuerzas sobre sus vecinos inmediatos. El resultado es la aparición de una región microscópica del material llamada dominio. Como ya se dijo este tipo de alineamiento fuerte se da incluso, en algunos casos particulares de materiales (imanes), aún con ausencia de campo externo.

Dentro de cada dominio, el alineamiento de los " $m$ " es estricto, pero la dirección puede variar de un dominio a otro, de modo que el momento magnético neto de un trozo macroscópico de material, en un estado normal, puede ser cero. Cuando a un trozo de material se le aplica un campo externo los dominios que tienen igual orientación que el campo se agrandan y los que tienen distinta orientación tienden a alinearse con éste. El resultado es una fuerte imantación del material, miles de veces mayor que el campo externo que le dio origen.

Considere nuevamente el arreglo de la bobina de la figura 7.6 que como allí se muestra, se encuentra dotada de un núcleo ferromagnético cerrado, por la uniformidad de dicho arreglo la intensidad de campo magnético o intensidad magnética, a lo largo de todo el camino magnético, será uniforme y por lo tanto de la (7.21) que aplica perfectamente, se puede despejar " $H$ ":

$$H = \frac{NI_c}{l} \quad (7.72)$$

En la expresión (7.29) del punto 3.6, quedó establecida la relación que deberá haber entre los módulos de " $B$ " y " $H$ ". Se puede agregar ahora que para un material virgen, es decir no sometido previamente a magnetización alguna, cuando se lo magnetiza mediante una corriente de conducción " $I_c$ ", la relación funcional antes dicha resulta en una función multiforme que le introduce al comportamiento del material una alinealidad no deseada.

Cuando en la primera magnetización se lleva la corriente " $I_c$ " de "0" a " $I_{cmax}$ ", " $H$ " va de "0" a un " $H_{max}(I_{cmax})$ ", la función que se establece con " $B$ ", está dada por una curva " $oab$ ", como se muestra en la figura 7.13, llamada curva de primera imantación.

Si a partir de " $b$ " se disminuye gradualmente " $I_c$ " hasta "0", de manera que " $H$ " se reduzca a "0", no ocurre lo mismo con " $B$ " que adopta un valor permanente " $B_r$ ", es decir queda imantado, esto se debe a que la función que caracteriza el regreso, no vuelve por la misma curva de ida. La curva " $bc$ " de regreso, como se ve en la figura es distinta a la de ida. El material queda así con una inducción magnética " $B_r$ " denominada magnetismo remanente.

Para anular este magnetismo remanente es necesario aplicar una intensidad de campo " $-H_{fc}$ " representado por el segmento (od) a la que se le da el nombre fuerza coercitiva y que se logra haciendo circular en sentido contrario la corriente " $I_c$ " que sea necesaria para lograrlo.

Si a partir de este punto se sigue incrementando la corriente “ $I_c$ ”, hasta que la intensidad de campo “ $H$ ” se adquiere el máximo negativo “ $-H_{max}$ ”, se obtiene la curva de magnetización “ $de$ ”.

Si por último se hace variar la corriente de manera que “ $H$ ” vaya de “ $-H_{max}$ ” a “ $H_{max}$ ”, se obtiene la curva “ $efgb$ ”.

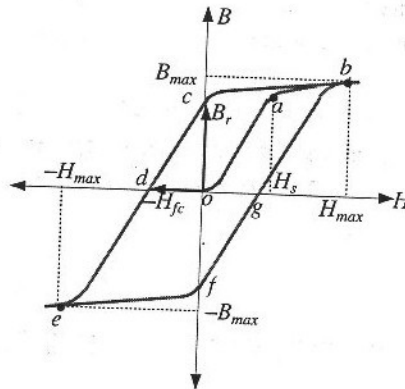


Figura 7.13

Como se observa en la figura resulta así un lazo cerrado denominado curva o lazo de histéresis. La palabra histéresis viene del griego hysteron que significa posterior o retraso.

Los puntos “ $b$ ” y “ $e$ ”, si “ $\pm H_{max}$ ” es suficientemente grande, corresponden a puntos de saturation del material. Esto significa que la imantación llegó al máximo valor que puede aportar el material. Es decir equivale a que todos los dipolos magnéticos disponibles ya han sido alineados. El campo “ $H_s$ ” necesario para producir la saturación identificada con el punto “ $a$ ” sobre la curva, se denomina intensidad de saturación “ $H_s$ ” y en consecuencia dicho punto se conoce como codo de saturación.

Si a partir de “ $H_s$ ” se continúa incrementando la intensidad magnética, el aumento del campo de inducción “ $B$ ” será proporcional a “ $\mu_0$ ”. Esto significa que la curva de permeabilidad  $B = f(H)$ , se hace lineal y de permeabilidad “ $\mu = \mu_0$ ”, igual a la del espacio libre o sea se haría  $B = \mu_0 \cdot H$ .

A pesar de la alinealidad que manifiestan los materiales ferromagnéticos ya mencionada, se generaliza también a efectos de la metodología de cálculo, el concepto de susceptibilidad “ $\chi_m$ ”, como ya fue explicado, con las (7.24), (7.26) y (7.29) que se resumen ahora considerando que “ $\chi_m(H)$ ”.

$$\bar{B} = \mu_0 \cdot \bar{H} + \mu_0 \cdot \bar{M} \quad \text{considerando que} \quad \bar{M} = \chi_m(H) \cdot \bar{H} \quad (7.73)$$

Reemplazando

$$\bar{B} = \mu_0 \cdot [1 + \chi_m(H)] \cdot \bar{H} = \mu_0 \cdot \mu_r(H) \cdot \bar{H} = \mu(H) \cdot \bar{H} \quad (7.74)$$

Dada la variabilidad antes expresada, la tabla 7.2 da los valores de " $\mu_o M$ " correspondientes a los valores de imantación de saturación es decir " $B_s$ " y el correspondiente a la máxima pendiente para el caso de " $\mu_r$ ".

Tabla 7.2

Sustancia	$\mu_o M$	$\mu_r$
Hierro (recocido)	2.16	5500
Hierro-silicio (96% Fe, 4% Si)	1.95	7000
Permalloy (55% Fe, 45% Ni)	1.60	25000
Metal-mu (77% Ni, 16% Fe, 5% Cu, 2% Cr)	0.65	100000

Es interesante observar que dado los valores " $\mu_r$ " de la tabla anterior, entonces en la zona de linealidad de la curva de magnetización tramo "oa", resulta " $\mu_o H \ll \mu_o M$ " y aunque no es usual hacerlo, la (7.73) puede ser escrita en forma más simple:

$$\bar{B} \cong \mu_o \bar{M} \quad (7.75)$$

## 6. PERDIDA DE ENERGIA DEBIDO A LA HISTERESIS

Supóngase una bobina con núcleo ferromagnético cerrado como se muestra en la figura 7.14, por lo que el volumen del núcleo resulta "S.l". La bobina se encuentra conectada a una fem alternada sinusoidal " $e(t)$ " que varía en forma senoidal con el tiempo, originando una corriente " $i(t)$ " alternada sinusoidal cuya amplitud provoca un rango de variación dado por " $-H_{max} < H < H_{max}$ ", todo lo cual se representa en las figuras 7.14/15.

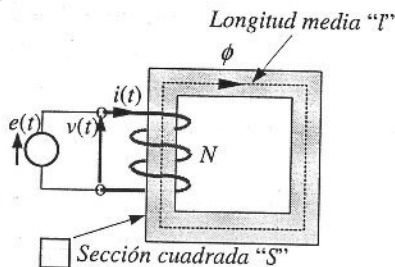


Figura 7.14

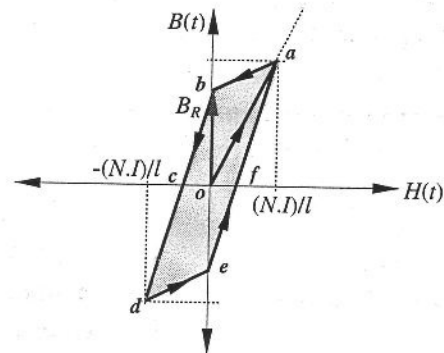


Figura P7.15

La curva de magnetización y el lazo de histéresis a sido simplificada dibujándola mediante tramos de trazos rectos, lo que no le quita generalidad al tema que se trata.

La energía absorbida por la bobina y su núcleo, cuando " $H$ " va de "0" a " $H_{max}$ ", es sabido se almacena en forma de energía electrocinética en su campo de inducción magnética. Sin embargo cuando el campo " $H$ ", vuelve de " $H_{max}$ " a "0" como se quiere demostrar, por la histéresis, no devuelve toda la energía absorbida en el proceso de ida. Parte de la potencia absorbida es transformada en calor por culpa de la histéresis. Lo

mismo ocurre con el semiciclo negativo de la corriente de conducción y el "H" negativo que origina. La potencia total absorbida en cada ciclo es el objeto del tema.

Se sabe que la potencia absorbida por la bobina vendrá dada por:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (7.76)$$

De acuerdo con lo estudiado, la caída inductiva "v(t)" y la corriente "i(t)" que recorre la bobina, en parámetros magnéticos vendrán dadas por:

$$v(t) = \frac{d[N\phi(t)]}{dt} = NS \frac{dB(t)}{dt} \quad (7.77)$$

$$i(t) = \frac{H(t)l}{N} \quad (7.78)$$

Reemplazando en (7.76), se obtiene la potencia absorbida en función de parámetros magnéticos.

$$p(t) = NS \frac{dB(t)}{dt} \cdot \frac{H(t)l}{N} = SlH(t) \frac{dB(t)}{dt} \quad (7.79)$$

Como "Sl=vol" es el volumen de hierro del núcleo la (7.79) queda:

$$p(t) = vol \cdot H(t) \frac{dB(t)}{dt} \quad (7.80)$$

El diferencial de energía almacenada será:

$$dE_L = p(t) \cdot dt = vol \cdot H(t) \cdot dB(t) \quad (7.81)$$

La energía resultante de la absorbida y devuelta en un ciclo completo de "B", será la energía perdida por histéresis y se obtiene con la integración que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} E_L &= \int_0^{B_{\max}} p(t) dt + \int_{B_{\max}}^{-B_{\max}} p(t) dt + \int_{-B_{\max}}^0 p(t) dt = \\ &= vol \left( \int_0^{B_{\max}} H(t) dB(t) + \int_{B_{\max}}^{-B_{\max}} H(t) dB(t) + \int_{-B_{\max}}^0 H(t) dB(t) \right) \quad (7.82) \end{aligned}$$

## 7. BONDADES Y DEFECTOS DE LOS NUCLEOS FERROMAGNETICOS

### 7.1 Bondades.

Como bondades se pueden distinguir 2:

- 1) El "poder multiplicador" aumenta con la disminución de la reluctancia "R".

- 2) La "capacidad de confinamiento" es mayor cuanto menor sea la dispersión que disminuye cuando lo hace la reluctancia.

## 7.2 Defectos.

Se pueden distinguir 3 que se describen a continuación:

- 1) La reluctancia " $\mathcal{R}$ " dependiendo del material puede ser muy pequeña pero nunca será nula.
- 2) La alinealidad que limita el uso de la curva de magnetización en el tramo comprendido entre "0" y el codo de saturación "a", como fue visto es una consecuencia de la relación no lineal que la permeabilidad, establece entre "B" y "H".
- 3) Las pérdidas que se disipan en forma de calor, debidas a las corrientes parásitas de Foucault y a la histéresis debida a los ciclos de magnetización.

## 8. NUCLEO FERROMAGNETICO IDEAL

### 8.1 Definición.

Es obvio que en la realidad no existen, desde un punto de vista teórico, para que un núcleo magnético sea ideal, debe cumplir con:

- 1) que la reluctancia sea nula " $\mathcal{R}=0$ ", en consecuencia tiene "poder multiplicador" infinito y dispersión nula, "capacidad de confinamiento" absoluta.
- 2) " $\mathcal{R}=0$ " implica " $\mu=\infty$ ", es decir la pendiente de la curva de magnetización es infinita y "90°" el ángulo de la pendiente de la tangente a la curva.
- 3) La linealidad debe extenderse a lo largo de todo el dominio "H", lo que implica que la disponibilidad de dominios magnéticos debe ser infinita.
- 4) Deberá ser nula el área encerrada por el "lazo de histéresis", significa que la "curva" de magnetización es única con independencia de la dirección y sentido de la magnetización.
- 5) La resistividad " $\rho$ " del material del núcleo debe ser nula lo que implica que las corrientes de Foucault, no producirán pérdidas.

### 8.2 Análisis de la consecuencia de la reluctancia nula.

#### 8.2.1 Efecto con relación al poder multiplicador

Los principios de la naturaleza que deben cumplirse siempre, en cualquier circuito, son las leyes de Kirchhoff y de Faraday-Lenz. De manera que cuando una bobina con núcleo ferromagnético se conecta a una fuente de tensión alternada sinusoidal " $e(t)=\sqrt{2}E.\text{sen}(\omega t + \delta_e)$ ", para que se cumpla la segunda ley de Kirchhoff

$$v_L(t) = e(t) \quad (7.83)$$

$$\text{Si } "v_L(t) = \sqrt{2}.V_L \text{sen}(\omega t + \delta_v)" \Rightarrow "V_L = E" \text{ y } "\delta_v = \delta_e" \quad (7.84)$$

Por ley de F-L

$$v_L(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (7.85)$$

Para que a través de (7.85) se cumpla (7.83) implica que el flujo concatenado estará obligado a adoptar la forma funcional que se indica en (7.86) y los valores de amplitud y ángulo de fase de manera que al mismo tiempo se verifique (7.83). Lo que significa que:

$$\phi(t) = -\sqrt{2} \cdot \phi \cos(\omega t + \delta_v) \quad (7.86)$$

Para verificar lo dicho, derivando " $\phi(t)$ " respecto de " $t$ " y reemplazando en (7.85):

$$v_1(t) = \omega N \sqrt{2} \phi \sin(\omega t + \delta_v) = \sqrt{2} V_L \sin(\omega t + \delta_v) \quad (7.87)$$

Por lo estudiado en el presente capítulo para verificar que condición deberá cumplir el flujo concatenado " $\phi(t)$ " necesario en una bobina con circuito magnético, se debe recurrir a la ley de Hopkinson que en su analogía formal con la ley de Ohm, para el caso se expresa como:

$$\phi(t) = \frac{N \cdot i(t)}{\mathfrak{R}} = \frac{N \sqrt{2} I}{\mathfrak{R}} \cos(\omega t + \delta_v) \quad (7.88)$$

En resumen de acuerdo con (7.88), el valor de " $I$ ", deberá ser tal que se cumpla la (7.83) y si como se dijo para el caso la reluctancia es nula y consecuentemente se toma límite de (7.88) cuando la " $\mathfrak{R} \rightarrow 0$ ", guardando la relación constante para no violar la ley de Kirchhoff, también deberá " $i(t) \rightarrow 0$ ". Lo que permite afirmar que con reluctancia cero, el núcleo no requiere corriente magnetizante, el flujo aparece solo como consecuencia de la " $e(t)$ " conectada en los terminales de la bobina.

Si bien lo anterior no es directamente comprobable, si puede visualizarse con bastante aproximación con los núcleos ferromagnéticos reales que si bien su reluctancia no es nula, es muy pequeña, por lo que la corriente necesaria para la magnetización resulta también muy pequeña, casi despreciable comparando la que necesitaría la bobina con núcleo de aire.

### 8.2.2 Efecto con relación a la capacidad de confinamiento

Si la capacidad de confinamiento es absoluta, no habrá dispersión lo que en caso de tratarse del acoplamiento entre dos bobinas, suponga el caso de un transformador, recurriendo al modelo eléctrico estudiado en punto 7.4.2 del capítulo 5 y si además se desprecia la resistencia de los arrollamientos primario y secundario, se estaría en condiciones de afirmar que el transformador será ideal.

Como se muestra en la figura 7.16, suponga un transformador ideal con una fuente de tensión conectada al primario y una resistencia al secundario, dependiendo de la posición de la llave " $s$ ". interesa analizar los siguientes casos:

- 1) con la resistencia desconectada, llave " $s$ " abierta,

- 2) con la resistencia en servicio, llave "s" cerrada y
- 3) reemplazando la resistencia por un cortocircuito.

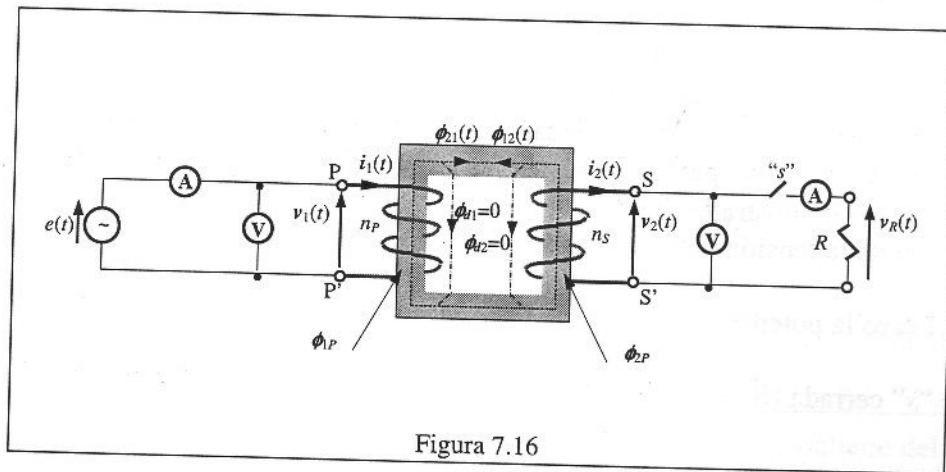


Figura 7.16

Por tratarse de un acoplamiento ideal se deberá considerar que

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_p}{n_s} \quad (7.89)$$

Como el circuito magnético es común a ambas bobinas del transformador, se cumplirá que el flujo resultante, según la ley de Hopkinson, deberá estar dado por:

$$\phi(t) = \phi_{21}(t) - \phi_{12}(t) = \frac{n_p i_1(t)}{\mathfrak{R}} - \frac{n_s i_2(t)}{\mathfrak{R}} \quad (7.90)$$

Si bien la propuesta es que la " $\mathfrak{R}=0$ " y en tal caso se dijo que la corriente magnetizante debe ser nula, por tratarse ahora del caso acoplamiento entre bobinas, entonces no necesariamente lo serán " $i_1(t)$ " e " $i_2(t)$ " que por ser la reluctancia nula si deberán verificar que:

$$n_p i_1(t) - n_s i_2(t) = \phi(t) \cdot \mathfrak{R} = 0 \quad (7.91)$$

Lo que implica que

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{n_s}{n_p} \quad (7.92)$$

Multiplicando m.a.m (7.89) con (7.92) se obtiene que

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} \cdot \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{n_p}{n_s} \cdot \frac{n_s}{n_p} \quad \text{que implica} \quad \frac{p_1(t)}{p_2(t)} = 1 \quad (7.93)$$

Llave "s" abierta (transformador en vacío)

Si "s" esta abierta  $\Rightarrow$  " $i_2(t)=0$ "

Por la relación (7.92)

$$i_1(t) = \frac{n_s}{n_p} i_2(t) \quad (7.92)$$

y dado que al ser " $\mathfrak{R}=0$ ", no se requiere corriente magnetizante, la corriente primaria estará dada solo por la demandada a través del acoplamiento que para el caso será " $i_1(t)=0$ ". En tal caso, para que existan las tensiones " $v_1(t)$ " y " $v_2(t)$ ", deberá existir " $\phi(t)$ ", como fue demostrado en el punto 8.2.1 anterior, el " $\phi(t)$ " aparecerá sólo como consecuencia de la tensión " $e(t)$ " aplicada con la fuente.

Para el caso la potencia transferida y demandada de la fuente será nula.

Llave "s" cerrada (R en servicio)

Si "s" esta cerrada => " $i_2(t) \neq 0$ "

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R} = \frac{\sqrt{2}V_2}{R} \sin(\omega t + \delta_{v_2}) = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \delta_{i_2}) \quad (7.93)$$

Por la relación (7.92)

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{n_s}{n_p} = \frac{\sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \delta_{i_1})}{\sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \delta_{i_2})} \quad (7.94)$$

Como la relación de espiras es un número real, no puede introducir desfasaje, lo que implica que se deberá cumplir que

$$\delta_{i_1} = \delta_{i_2} \quad (7.95)$$

Lo que en definitiva permite asegurar que

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{n_s}{n_p} = \frac{I_1}{I_2} \quad (7.96)$$

Donde se comprueba que la relación inversa, se corresponde con el cociente de los valores eficaces medidos por sendos amperímetros conectados en primario y secundario. Como por otro lado por ser la carga resistiva pura de acuerdo con (7.93) el ángulo de fase " $\delta_{i_2} = \delta_{v_2}$ ", entonces la corriente del primario será:

$$i_1(t) = \frac{n_s}{n_p} i_2(t) = \frac{n_s}{n_p} \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \delta_{v_2}) = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \delta_{v_1}) \quad (7.97)$$

Dado que al ser " $\mathfrak{R}=0$ ", no requiere corriente magnetizante, la corriente primaria será consecuencia sólo por la demandada a través del acoplamiento, dada por (7.97).

La tensión primaria, de acuerdo con (7.89), es:

$$v_1(t) = \frac{n_p}{n_s} v_2(t) = \frac{n_p}{n_s} \sqrt{2} V_2 \sin(\omega t + \delta_{v_2}) = \sqrt{2} V_1 \sin(\omega t + \delta_{v_1}) \quad (7.99)$$

Según fue dicho, como la relación de espiras es un número real, no puede introducir desfase, lo que implica también que se deberá cumplir que

$$\delta_{v_1} = \delta_{v_2} \quad (7.100)$$

Y en consecuencia que

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_p}{n_s} = \frac{V_1}{V_2} \quad (7.101)$$

Con la que se comprueba que la relación de transformación, se obtiene del cociente de los valores eficaces medidos con sendos voltímetros conectados en primario y secundario.

Finalmente observando (7.93), (7.95) y (7.100), se puede comprobar que los desfases entre tensiones y corrientes debidas al acoplamiento magnético será función del factor de potencia de la carga que para el caso es nulo.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

### CAPITULO 7

### MATERIALES Y CIRCUITOS MAGNETICOS

#### OBJETIVO PRINCIPAL

Practicar resolución de circuitos magnéticos, encontrar a partir de valores medidos o conocidos, distintos tipos de parámetros magnéticos y entender ciertas particularidades como por ejemplo ¿qué se puede destacar de un circuito magnético si su reluctancia es nula? O ¿qué desfase deberá haber entre la tensión y la corriente suministrada por una fuente de CA que alimenta una impedancia de factor de potencia " $\cos \varphi$ ", a través de un acoplamiento ideal entre dos bobinas?

#### ✓ Problema 7.1

En el laboratorio se dispone de un dispositivo, llamado aparato de Epstein, usado para evaluar las pérdidas por histéresis y Foucault de materiales magnéticos. El material a ensayar es previamente cortado en láminas de espesor determinado en el diseño de la máquina en la que será usado como núcleo magnético. Estas láminas se apilan formando un circuito magnético cuadrado de 50 cm de lado y 2.5 cm x 2.5 cm de sección también cuadrada, figura P7.1.

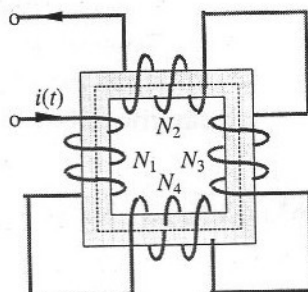


Figura P7.1

Sobre cada lado del circuito formado por el material a medir, hay enrolladas 150 espiras, simbólicamente representadas en la figura anterior, conformando sendas bobinas de sección rectangular, conectadas en serie. Vale decir que

" $N_1=N_2=N_3=N_4=150$  espiras" y " $N = 600$  espiras". Si al aplicarle al dispositivo así conformado una tensión alternada sinusoidal " $e(t) = 110 \text{ sen}(314.159 t + \delta_v)$  [V]", con " $\delta_v = 0$ ", el dispositivo es recorrido por una " $i(t) = 1.384 \text{ sen}(314.159 t + \delta_i)$  [A]", con " $\delta_i = \delta_v - 90^\circ$ " y si se sabe que el material tiene para la corriente que lo recorre una permeabilidad relativa " $\mu_r = 1750$ ". Se quiere que determine:

- La  $fmm_{\text{max}}$  en el circuito.
- La reluctancia " $\mathfrak{R}$ ".
- El flujo " $\phi$ ".
- La inducción " $B$ ".
- El campo " $H$ ".

### Problema 7.2

Se dispone de un circuito magnético con entrehierro como el mostrado en la figura P7.2. Se quiere determinar: a) la corriente que debe circular para obtener en el entrehierro un " $B = 5000$  Gauss" y b) cuanto vale " $H_a$ " y " $H_{Fe}$ ".

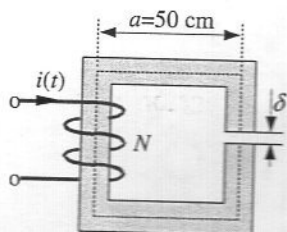


Figura P7.2

Considerar para el circuito magnético que:

" $N=500$  vtas"

" $\mu_r = 800$ "

Configuración cuadrada de lado " $a$ "

" $S = 4 \text{ cm}^2$ "

" $\delta = 2 \text{ mm}$ "

### Problema 7.3

En el laboratorio se dispone de un núcleo magnético en forma de "U", que tiene la posibilidad de ser cerrado con una barra llamada culata del mismo material que la "U" y de la misma sección de "40 mm x 38 mm". Con la culata colocada el núcleo constituye un circuito cerrado y en caso que se desee entrehierro, tal como se muestra en la figura P7.3, se puede, implementar separando convenientemente la culata de la U. Dicho dispositivo está preparado para que se le puedan insertar en sus columnas laterales bobinas de diferentes números de espiras.

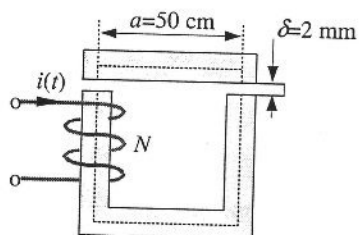


Figura P7.3

Si con el circuito magnético cerrado (sin entrehierro), se inserta en la columna izquierda una bobina de " $N=1000$  vtas" y se le aplica una " $e(t)$ " alternada sinusoidal de " $f = 50 \text{ Hz}$ ", de manera que al circular una corriente " $I = 0.5 \text{ A}$ ", a se mide una " $V = 104 \text{ V}$ ", ambos valores eficaces. Despreciando las pérdidas en el núcleo y en el cobre, se quiere que determine:

- Reactancia inductiva " $X_L$ ".
- Inductancia de la bobina insertada.
- Flujo valor eficaz " $\phi$ ".

d) Permeabilidad " $\mu$ " y permeabilidad relativa " $\mu_r$ " del material.

### Problema 7.4

Repetir los cálculos del problema anterior pero considerando que ahora el entrehierro es " $\delta = 1 \text{ mm}$ ". Recordar cuando se monte la experiencia para medir la " $V$ " que no se deberán superar " $1.25 \text{ A}$ ".

### Problema 7.5

Sea el dispositivo del problema 7.1, alimentado con una fuente de tensión alternada sinusoidal de magnitud variable (llamada variac). Si se eliminan por cálculo las pérdidas en el hierro y en el cobre y se determina también por cálculo, a través de las medidas efectuadas, los valores " $E_{Lmax}$ " de la fem de autoinducción y los valores " $I_{max}$ " de la corriente que recorre las bobinas conectadas en serie, tal como si fuera un dispositivo ideal, los valores que se obtienen según se muestran en la tabla siguiente son:

$E_{max}$ (V)	$I_{max}$ (A)
27.58	0.303
53.88	0.574
83.72	0.961
111.16	1.384
139.30	2.019
166.31	3.517

Se quiere que determine la curva de magnetización del material ensayado, es decir  $B = f(H)$ .

### Problema 7.6

Considere una bobina con núcleo magnético ideal (de permeabilidad infinita y sin pérdidas), formando un circuito magnético cerrado como el que se muestra en la figura P7.4. Tal como se muestra en la figura, la bobina es alimentada por una fuente de tensión alternada sinusoidal " $e(t) = \sqrt{2} 220 \sin(\omega t + \delta_e) \text{ V}$ ". Se quiere que demuestre ¿por qué?, para el caso, la corriente suministrada será nula.

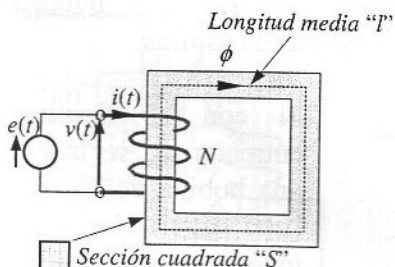


Figura P7.4

### Problema 7.7

Se cuenta con un transformador de " $220/110 \text{ V}$ ", construido con núcleo magnético ideal, como el del problema 7.6 y cuyas bobinas son de conductores de resistividad

nula. Como lo muestra la figura P7.5, mediante el mismo se quiere alimentar una resistencia " $R=220 \Omega$ " y " $V_n=220 \text{ V}$ " de tensión nominal, Se quiere que demuestre que las corrientes primarias, secundarias y la tensión " $e(t)$ ", se encontrarán en fase.

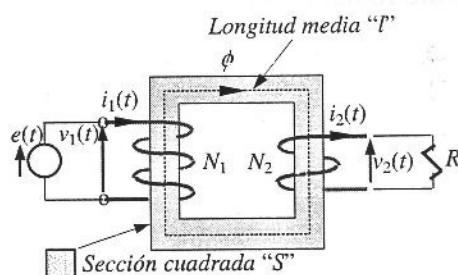


Figura P7.5

### Problema 7.8

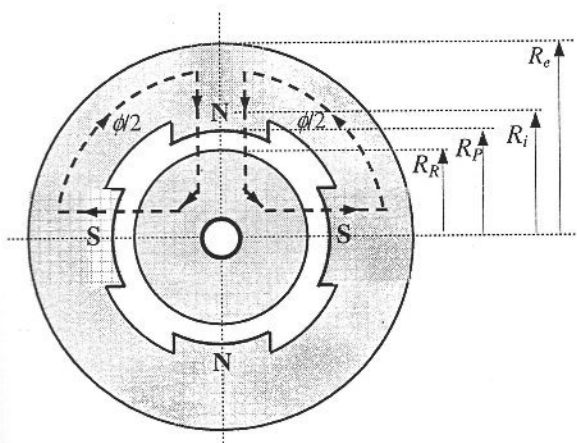


Figura P7.6

Aberturas angulares:

De cada polo:  $\theta_p = 60^\circ$

De entre polos:  $\theta_e = 30^\circ$

Del camino medio perimetral:  $\theta_c = 60^\circ$

Longitud del camino medio perimetral en el estator " $l_{cme}$ "

$$l_{cme} = \theta_{cmp} \frac{R_i + R_e}{2} \quad (\text{P7.2})$$

Longitud del camino medio perimetral en el rotor " $l_{cmr}$ "

$$l_{cmr} = \theta_{cmp} \frac{R_R}{2} \quad (\text{P7.3})$$

Longitud del camino medio radial " $l_{rad}$ "

Se quiere calcular la reluctancia del circuito magnético de una máquina rotante de cuatro polos que se muestra en la figura P7.6. Adopte la letra " $l_R$ ", para designar la longitud del rotor y de los polos. La línea de trazos que forma un trapecio de base mayor circular, indica el camino seguido por la mitad del flujo que produce cada polo. Suponga conocida la permeabilidad " $\mu$ " y que el entrehierro está definido por

$$\delta = R_P - R_R \quad (\text{P7.1})$$

$$l_{rad} = \frac{R_i + R_e}{2} - \frac{R_R}{2} \quad (P7.4)$$

Longitud del camino medio radial típico " $l_{cm}$ "

$$l_{rad} = l_{cme} + l_{cmr} + 2l_{rad} \quad (P7.5)$$