

Villar

# IX REPRESENTACIÓN FASORIAL E IMPEDANCIA COMPLEJA

## 1. FASOR Y CIRCUITOS CON FUENTES COMPLEJAS

La figura 9.1 muestra que una función sinusoidal (o función armónica) puede ser representada por la proyección vertical de un vector que gira con velocidad " $\omega$ " constante y una función cosenoidal por la proyección horizontal del mismo.

Sea un vector " $R$ " de amplitud " $R_{max}$ " que gira con  $\omega = cte$ , a partir de un ángulo " $\delta$ " de referencia (o de fase). Este vector puede ser representado en el plano complejo por

$$r(t) = r_x(t) + j \cdot r_y(t) \quad \delta \quad (9.1)$$

$$r(t) = R_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) + j \cdot R_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) \quad (9.2)$$

De acuerdo con Euler la expresión (9.2) puede ser expresada en forma exponencial por:

$$r(t) = R_{max} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta)} = R_{max} \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\omega \cdot t} \quad (9.3)$$

Si en la expresión (9.3) se agrupa la parte que no depende del tiempo, en un nuevo vector " $R$ " (constante por definición), denominado fasor, queda:

$$r(t) = \bar{R} \cdot e^{j\omega \cdot t} \quad (9.4)$$

donde  $R_{max} \cdot e^{j\delta}$  con

$R_{max}$ : Amplitud o módulo y

$\delta$ : ángulo de referencia o de fase respecto al eje real

De acuerdo a lo dicho el vector " $R$ " (independiente del tiempo), representado en el plano complejo, se denomina fasor.

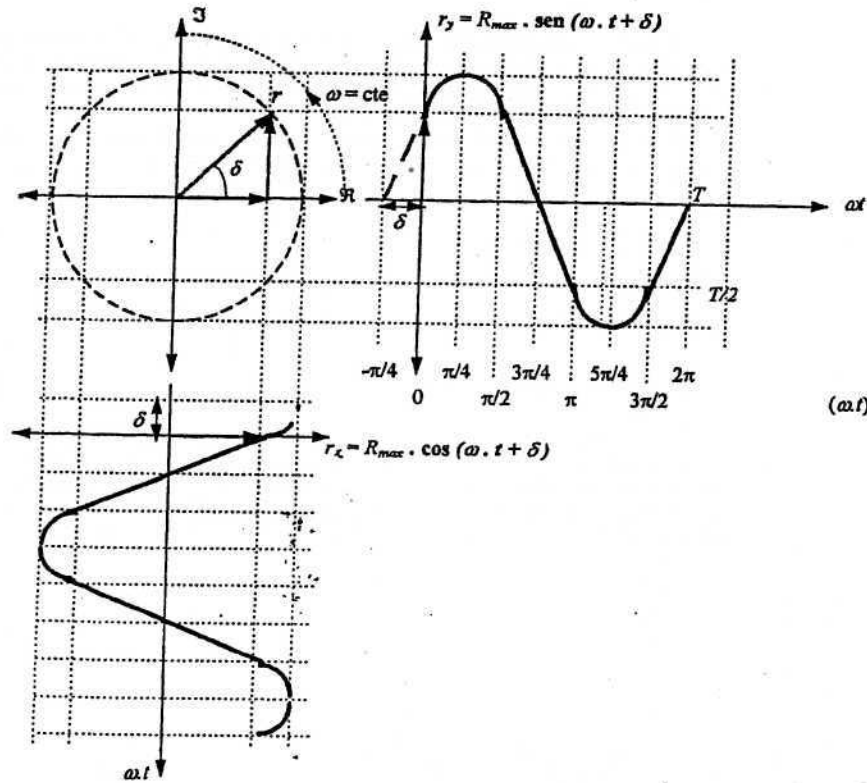


Figura 9.1

Como en todo circuito formado por elementos lineales y bilaterales excitado con fuentes de fuerza electro-motriz complejas, expresión (9.4) anterior, en condición de régimen permanente las corrientes y consecuentemente las caídas de tensión también tendrán la forma funcional de la expresión (9.4). En términos generales un circuito cualquiera de "r" ramas, alimentado con "f" fuentes complejas dará como solución:

$$\begin{matrix} i_1 = I_{max1} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta_1)} \\ i_2 = I_{max2} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta_2)} \\ \vdots \\ i_r = I_{maxr} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta_r)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ \text{linealmente proporcional a} \\ (9.5) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ e_1 = E_{max1} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta_1)} \\ e_2 = E_{max2} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta_2)} \\ \vdots \\ e_f = E_{maxf} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \delta_f)} \end{matrix}$$

O también

$$\begin{matrix} i_1 = I_{max1} \cdot e^{j\delta_1} \\ i_2 = I_{max2} \cdot e^{j\delta_2} \\ \vdots \\ i_r = I_{maxr} \cdot e^{j\delta_r} \end{matrix} \cdot e^{j\omega t} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ \text{linealmente proporcional a} \\ (9.6) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ e_1 = E_{max1} \cdot e^{j\delta_1} \\ e_2 = E_{max2} \cdot e^{j\delta_2} \\ \vdots \\ e_f = E_{maxf} \cdot e^{j\delta_f} \end{matrix} \cdot e^{j\omega t}$$

Si de la proporcionalidad lineal expresada en (9.6) se simplifica "e<sup>jωt</sup>", se obtiene un sistema de ecuaciones lineales equivalentes, definidas sólo en el dominio de la frecuencia. Esto quiere decir que las variables originales:

$$e_f = E_{maxf} \cdot e^{j(\omega t + \delta_f)} \quad \text{e} \quad i_r = I_{maxr} \cdot e^{j(\omega t + \delta_r)} \quad (9.7)$$

representadas por vectores de amplitud constante que giran con velocidad "ω" (también constante), en el plano complejo figura 9.2(a), quedan reducidas como se indica en la figura 9.2(b) a "fasores" (vectores en el plano complejo, funciones sólo de la frecuencia) y cuya expresión analítica es:

$$\bar{E} = E_{max} \cdot e^{j\delta} \quad \text{e} \quad \bar{I} = I_{max} \cdot e^{j\delta} \quad (9.8)$$

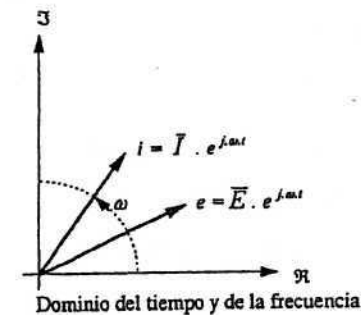


Figura 9.2(a)

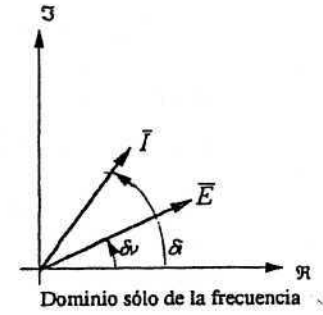


Figura 9.2(b)

Conviene reiterar la diferencia entre las figuras 9.2(a) y b):

- 1) En la 9.2(a) "E" y "I" son vectores que giran con "ω = cte", son f(t).
- 2) Figura 9.2(b) los fasores "E" e "I" son vectores que están fijos, son cte.

Esta transformación no cambia el coeficiente de proporcionalidad entre las variables "e" e "i", no altera la amplitud de los fasores, ni el desfase entre ellos. El resultado es equiva lente aún cuando no se esté en el dominio del tiempo.

2. GENERADOR DE FEM COMPLEJA MÁS CARGA

2.1 Generador con resistencia

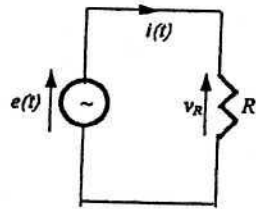


Figura 9.3

Para que se cumpla el 2º lema Kirchhoff

$$e(t) = v_R(t) \tag{9.10}$$

Según lo visto si

$$e(t) = \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \tag{9.11}$$

de acuerdo con (9.4)

$$\bar{E} = E_{max} \cdot e^{j\delta_0} \tag{9.12}$$

$\delta_0$ : ángulo inicial, de fase o de referencia de la tensión.

Si se aplica ley de Ohm

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\bar{E} \cdot e^{j\omega t}}{R} = \frac{\bar{E}}{R} \cdot e^{j\omega t} = \bar{I} \cdot e^{j\omega t} \tag{9.13}$$

$$\bar{I} = \frac{E_{max} \cdot e^{j\delta_0}}{R} = \frac{E_{max}}{R} \cdot e^{j\delta_0} = I_{max} \cdot e^{j\delta_0} \tag{9.14}$$

Donde se ve que " $\delta_i = \delta_0$ "

Si las variables " $e(t)$ " e " $i(t)$ " se expresan en forma binomial

$$e(t) = \bar{E} \cdot e^{j\omega t} = E_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta_0) + j \cdot E_{max} \cdot \sen(\omega \cdot t + \delta_0) \tag{9.15}$$

$$i(t) = \bar{I} \cdot e^{j\omega t} = I_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta_0) + j \cdot I_{max} \cdot \sen(\omega \cdot t + \delta_0) \tag{9.16}$$

Y se consideran los coeficientes de las partes imaginarias

$$e_y(t) = E_{max} \cdot \sen(\omega \cdot t + \delta_0) \tag{9.17}$$

$$i_y(t) = I_{max} \cdot \sen(\omega \cdot t + \delta_0) \tag{9.18}$$

Se llega al mismo resultado encontrado, para un circuito igual pero excitado con una fem sinusoidal, expresión (6.3) del punto 2.1 del capítulo 6.

O sea utilizando fuentes complejas y considerando para las variables " $e(t)$ " e " $i(t)$ ", sólo los coeficientes de las partes imaginarias, se consigue idéntica solución que trabajando con las propias funciones trigonométricas. El hecho de considerar, para las variables " $e(t)$ " e " $i(t)$ ", sólo los coeficientes de las partes imaginarias es el motivo por el que se le da al método el apelativo de simbólico.

Cuando se trabaja con fuentes complejas estas variables " $e(t)$ " e " $i(t)$ " pueden ser representadas según se vió en punto 1 anterior, por vectores de amplitud constante que giran con velocidad angular " $\omega$ " constante en un plano complejo, tal como se muestra en figura 9.4(a).

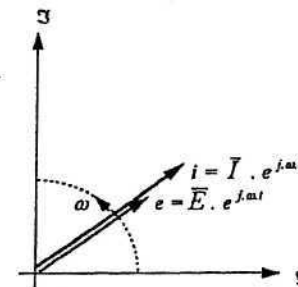
Según lo visto en punto 1 anterior existe una proporcionalidad lineal entre " $i(t)$ " y " $e(t)$ " que para este caso, de acuerdo con (9.13), se puede expresar:

$$\bar{I} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{R} \cdot \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \tag{9.19}$$

Simplificando " $e^{j\omega t}$ " queda

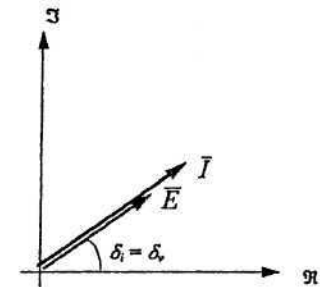
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R} \quad \text{Ley de Ohm} \tag{9.20}$$

Se obtiene una ecuación lineal equivalente, definida sólo en el dominio de la frecuencia y cuya representación gráfica viene dada en figura 9.4(b) y en la que tanto las amplitudes " $I_{max}$ ", " $E_{max}$ " como los correspondientes ángulos de fase " $\delta_i$ " y " $\delta_0$ " siguen teniendo el mismo valor e igual que para la solución trigonométrica del punto 2.1 del capítulo 6.



Dominio del tiempo y frecuencia

Figura 9.4(a)



Dominio sólo de la frecuencia

Figura 9.4(b)

2.2 Generador más inductancia

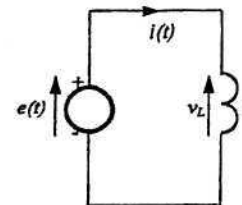


Figura 9.5

Por 2º lema de Kirchhoff debe ser

$$e(t) = v_L(t) \tag{9.21}$$

Según lo visto, si

$$e(t) = \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{y} \tag{9.22}$$

$$\bar{E} = E_{max} \cdot e^{j\delta_0} \quad \text{con} \tag{9.23}$$

$\delta_0$ : ángulo inicial, de fase o de referencia de " $e$ ".

Para determinar " $i(t)$ " es necesario despejarla de la expresión (5.36):

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int e(t) \cdot dt = \frac{1}{L} \cdot \int \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \cdot dt \quad (9.24)$$

$$i = \frac{\bar{E}}{j \cdot \omega \cdot L} \cdot \int j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} \cdot dt \quad (9.25)$$

Si como en punto 2.2 del capítulo 6, al denominador de (9.25) se lo hace

$$j \cdot \omega L = j X_L = \bar{X}_L \quad (9.26)$$

La corriente puede ahora obtenerse directamente por:

$$i = \frac{\bar{E}}{\bar{X}_L} \cdot e^{j\omega t} = \bar{I} \cdot e^{j\omega t} \quad (9.27)$$

Nuevamente para " $\omega = \text{cte}$ ", como se vio en punto 1 anterior, existe una proporcionalidad lineal entre " $i(t)$ " y " $e(t)$ " que para este caso de acuerdo con (9.27) resultará:

$$\bar{I} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{\bar{X}_L} \cdot \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \quad (9.28)$$

Simplificando " $e^{j\omega t}$ "

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{X}_L} \quad \text{simil a Ley de Ohm pero en el método fasorial} \quad (9.29)$$

Esto resulta matemáticamente ser lo mismo que se hace con la Ley de Ohm en corriente continua o alterna, para obtener el valor de la corriente a través de una resistencia. Aquí también la analogía matemática permite hacer una analogía circuital, comparando el efecto limitador que la inductancia ejerce sobre la corriente con el de la resistencia. En consecuencia por analogía " $\bar{X}$ " es denominada *reactancia inductiva compleja*.

Hay que decir nuevamente que la analogía efectuada es sólo desde un punto de vista matemático, recuérdese que la resistencia disipa energía, mientras que la inductancia la almacena en su campo magnético.

Ahora, como la unidad imaginaria " $j$ " expresada en forma binomial es " $0 + j$ " y ésta según Euler puede ser:

$$j = e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \quad (9.30)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{X}_L &= j \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot L \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \\ \bar{X}_L &= X_L \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (9.31)$$

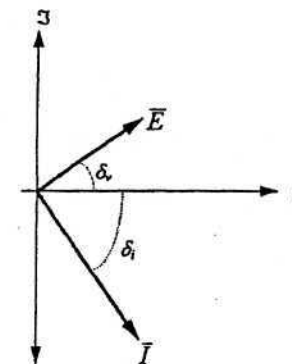
Como resultado se ve que esta *reactancia compleja* por ser un número imaginario cuando se expresa en forma polar tendrá módulo " $X_L$ ", argumento " $\pi/2$ " y de cualquier manera que sea expresada, para su representación gráfica, es necesario recurrir al plano complejo. El módulo " $X_L$ " tiene el mismo valor que el encontrado para la inductancia con fem alternada senoidal estudiada en punto 2.2 capítulo 6.

Reemplazando (9.31) y (9.23) en (9.29) queda:

$$\bar{I} = \frac{E_{\max} \cdot e^{j\delta}}{X_L \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}} = \frac{E_{\max}}{X_L} \cdot e^{j(\delta - \frac{\pi}{2})} \quad (9.32)$$

$$I_{\max} = \frac{E_{\max}}{X_L} \quad \text{y} \quad \delta_i = \delta - \pi/2 \quad (9.33)$$

A diferencia de la aplicación de la "ley de Ohm para valores máximos o de pico en corriente alternada sinusoidal", expresión (6.11) del punto 2.2 del capítulo 6; en la nueva expresión (9.29), llamada ahora ley de Ohm para el método fasorial, no sólo se determina la amplitud de la corriente " $I_{\max}$ ", sino que también se obtiene el ángulo de fase " $\delta_i$ " o sea todo lo que se necesita saber para una solución completa.



Dominio sólo de la frecuencia  
Figura 9.6

Otra ventaja que ofrece este método es la representación fasorial, figura 9.6. Esta permite una fácil verificación del desfase entre las variables en juego. Si se quiere conocer el desfase " $\varphi$ " de " $I$ " en relación con " $E$ ":

$$\varphi = \delta_i - \delta_v = -\pi/2 \quad (9.34)$$

Se ve, como ya se había demostrado, un desfase en atraso de la corriente con relación a la tensión de " $-\pi/2$ ". Este desfase resulta ser, con signo negativo, el ángulo o argumento introducido por la reactancia compleja, expresión (9.31) anterior.

### 2.3 Generador más capacitancia

Todo lo dicho para la inductancia del punto 2.3 anterior, puede ser aplicado con las diferencias del caso, para un capacitor con fuente compleja como se muestra en figura 9.7.

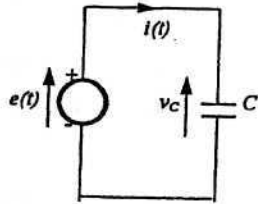


Figura 9.7

Por 2º lema Kirchhoff debe ser

$$e(t) = v_c(t) \quad (9.35)$$

Y como

$$e(t) = \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{y} \quad (9.36)$$

$$v_c = \bar{E}_{max} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{con} \quad (9.37)$$

$\delta_v$ : ángulo inicial, de fase o de referencia de "e".

Para determinar " $i(t)$ ", es necesario recurrir al concepto de capacitancia. Por Física II se sabe que:

$$v_c = \frac{q}{C} = \frac{\int i \cdot dt}{C} + V_0 \quad (9.38)$$

Donde " $V_0$ " es una constante de integración que representa la diferencia de potencial que hay en el capacitor en el instante " $t_0=0$ " en que se conecta la fuente. La consideración de este valor " $V_0$ " carece de sentido en condición de régimen permanente, por lo que para la determinación de " $i$ " en régimen estacionario o permanente no será considerado. Luego de (9.38) y (9.35):

$$i(t) = C \cdot \frac{de}{dt} = C \cdot \frac{d(\bar{E} \cdot e^{j\omega t})}{dt} \quad (9.39)$$

$$i(t) = C \cdot \bar{E} \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \quad (9.40)$$

Si esta última se expresa:

$$i(t) = \frac{\bar{E}}{-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} \cdot e^{j\omega t} \quad (9.41)$$

También aquí si al denominador de (9.41) se lo hace:

$$-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot X_C = \bar{X}_C \quad (9.42)$$

La corriente puede ahora obtenerse directamente por:

$$i = \frac{\bar{E}}{\bar{X}_C} \cdot e^{j\omega t} = \bar{I} \cdot e^{j\omega t} \quad (9.43)$$

De (9.43), como se vio en punto 1, existe una proporcionalidad lineal entre " $i(t)$ " y " $e(t)$ " que para este caso resulta:

$$\bar{I} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{\bar{X}_C} \cdot \bar{E} \cdot e^{j\omega t} \quad (9.44)$$

Simplificando " $e^{j\omega t}$ " queda una vez más lo que se ha llamado "simil de la Ley de Ohm para el método fasorial"

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{X}_C} \quad (9.45)$$

Como se ve, este resultado es matemáticamente igual a la Ley de Ohm en corriente continua o alterna. También aquí la analogía matemática permite entonces hacer una analogía circuital comparando el efecto limitador que según (9.45), la capacitancia ejerce sobre la corriente, con el de la resistencia en corriente continua o alterna. Por analogía " $\bar{X}_C$ " se denomina entonces *reactancia capacitiva compleja*. Otra vez se recuerda que esta analogía es sólo matemática, ya que una resistencia disipa energía, mientras que la capacitancia la almacena en su campo eléctrico.

La unidad imaginaria " $-j$ " expresada en forma binomial es " $0 - j$ " resulta según Euler:

$$-j = e^{j(-\frac{\pi}{2})} \quad (9.46)$$

Entonces

$$\bar{X}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{2})} \quad (9.47)$$

$$\bar{X}_C = X_C \cdot e^{j(-\frac{\pi}{2})}$$

Esta nueva *reactancia compleja* es también un número imaginario negativo que expresado en forma polar, tendrá un módulo " $X_C$ " y un argumento " $-\pi/2$ " y su representación gráfica deberá hacerse en el plano complejo. El módulo " $X_C$ " tiene el mismo valor que el encontrado para la capacitancia conectada a fem alternada senoidal estudiada en punto 2.3 del capítulo 6.

Reemplazando (9.47) y (9.37) en (9.45) la solución queda:

$$\bar{I} = \frac{E_{\max} \cdot e^{j \cdot \delta_v}}{X_C \cdot e^{j \cdot (\frac{\pi}{2})}} = \frac{E_{\max}}{X_C} \cdot e^{j \cdot (\delta_v + \frac{\pi}{2})} \quad (9.48)$$

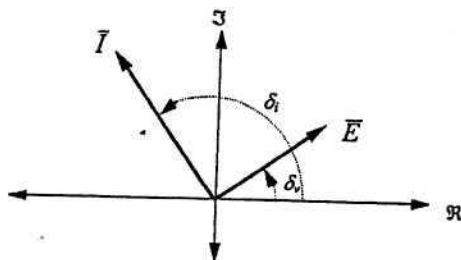
Donde  $I_{\max} = \frac{E_{\max}}{X_C}$  y  $\delta_i = \delta_v + \pi/2$  (9.49)

A diferencia de lo que sucede con la "ley de Ohm para valores máximos o de pico en corriente alternada senoidal", expresión (6.19) del punto 2.3 del capítulo 6, con la nueva expresión (9.45), llamada ley de Ohm para el método fasorial, se determina la amplitud de la corriente " $I_{\max}$ " y el ángulo de fase " $\delta_i$ ", que es todo lo que se necesita saber para la solución completa del circuito.

En el gráfico de la figura 9.8, se ve con toda claridad el desfase " $\varphi$ " en adelante de la " $\bar{I}$ " con relación a " $\bar{E}$ ", ventaja ya mencionada de la representación fasorial.

$$\varphi = \delta_i - \delta_v = +\pi/2 \quad (9.50)$$

Este ángulo corresponde, con signo cambiado, al ángulo o argumento introducido por la reactancia compleja, expresión (9.47).



Dominio sólo de la frecuencia  
Figura 9.8

### 2.4 Circuito RLC serie con FEM compleja

Para generalizar conceptos se pretende resolver un circuito real cualquiera alimentado por una fuente compleja. La figura 9.9 muestra tal circuito en el que la combinación de elementos pasivos lineales y bilaterales, ya ha sido reducida al equivalente serie de los tres elementos pasivos básicos: resistencia, inductancia y capacitancia, conectados a dicha fuente.

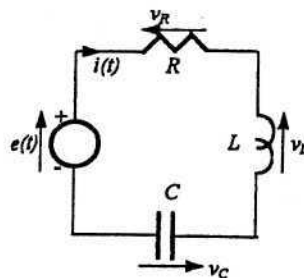


Figura 9.9

Aplicando Kirchoff

$$e(t) = v_R + v_L + v_C \quad (9.51)$$

Reemplazando cada caída de tensión por su igual

$$e(t) = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{Q_c}{C} + \int i \cdot dt \quad \text{derivando}$$

$$L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt} \quad (9.52)$$

y considerando que

$$e(t) = \bar{E} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad \text{e} \quad i(t) = \bar{I} e^{j \omega t} \quad (9.53)$$

Si en la expresión (9.52) se reemplazan las variables " $e(t)$ " e " $i(t)$ " por " $e(t) = \bar{E}_{\max} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \delta_v)}$ " e " $i(t) = \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \delta_i)}$ " y se deriva respecto de " $t$ " se obtiene una ecuación exponencial del tiempo:

$$-\omega^2 \cdot L \cdot \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \delta_i)} + j \cdot \omega \cdot R \cdot \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \delta_i)} + \frac{1}{C} \cdot \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \delta_i)} = j \cdot \omega \cdot \bar{E}_{\max} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \delta_v)} \quad (9.54)$$

Si ahora se simplifica " $e^{j \cdot \omega t}$ " y se dividen ambos miembros por " $j \omega$ " queda una ecuación algebraica donde la incógnita (el fasor corriente), es una variable compleja " $\bar{I} = \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot \delta_i}$ " independiente del tiempo. Se pone así de manifiesto la ventaja más importante del método fasorial y ésta consiste en que la resolución del problema a quedado reducida, para este caso, a encontrar la solución de la siguiente ecuación con variable compleja e independiente del tiempo:

$$\frac{-\omega^2 \cdot L}{j \omega} \cdot \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot \delta_i} + \frac{j \omega \cdot R}{j \omega} \cdot \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot \delta_i} + \frac{1}{j \omega \cdot C} \cdot \bar{I}_{\max} \cdot e^{j \cdot \delta_i} = \frac{j \omega}{j \omega} \cdot \bar{E}_{\max} \cdot e^{j \cdot \delta_v} \quad (9.55)$$

Simplificando y reemplazando los fasores correspondientes

$$j \omega \cdot L \cdot \bar{I} + R \cdot \bar{I} + \frac{1}{j \omega \cdot C} \cdot \bar{I} = \bar{E} \quad (9.56)$$

Como las variables " $\bar{E}$ " e " $\bar{I}$ " son constantes por definición equivale a haber transformado el problema de alterna como si fuera de continua pero con la particularidad de que se trabaja con complejos. Despejando la corriente

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (9.57)$$

Donde

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (9.58)$$

Para expresar la (9.58) en forma polar

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{módulo y} \quad (9.59)$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad \text{argumento} \quad (9.60)$$

Las expresiones (9.59) y (9.60) son equivalentes a las (6.27) y (6.28) obtenidas en el capítulo 6. El denominador de la expresión (9.57) entonces es equivalente al módulo de la impedancia definida en el punto (2.5) del capítulo 6. Aquí por resultar ser un número complejo se denomina *impedancia compleja*.

Reemplazando " $\bar{E} = E_{\max} \cdot e^{j\delta t}$ ", (9.58), (9.59) y (9.60) en (9.57)

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{E_{\max} \cdot e^{j\delta t}}{Z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{E_{\max}}{Z} e^{j(\delta t - \varphi)} = I_{\max} e^{j\delta t} \quad (9.61)$$

Como se ve el resultado es matemáticamente igual al que se obtiene de aplicar la Ley de Ohm en corriente continua o en alterna para resistencias. También aquí, la analogía matemática permite entonces hacer una analogía circuital comparando el efecto limitador que según (9.61), la impedancia compleja " $\bar{Z}$ " ejerce sobre la corriente, con el mismo efecto de la resistencia en corriente continua o alterna. Recuérdese que la analogía es sólo formal, ya que una resistencia disipa energía, mientras que la impedancia disipará y/o almacenará dependiendo de los valores de " $R, L$  y  $C$ ".

La impedancia compleja puede ser expresada según Euler por:

$$\bar{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot \cos \varphi + j \cdot Z \cdot \operatorname{sen} \varphi \quad (9.62)$$

**2.5 Circuito RLC paralelo con fuente de corriente compleja**

Igual que como se hizo en el punto (2.7) del capítulo 6, el circuito mostrado en la figura 9.9 corresponde al equivalente serie de un circuito real. También un circuito real puede ser representado por fuentes de corriente y un equivalente en paralelo, tal como se muestra en figura 9.10.

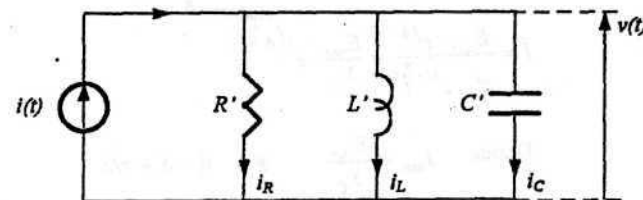


Figura 9.10

Por primer lema de Kirchhoff:  $i(t) = i_R + i_L + i_C \quad (9.63)$

Reemplazando cada corriente de rama por su igual

$$i(t) = \frac{v}{R'} + \int \frac{v \cdot dt}{L'} + C' \cdot \frac{dv}{dt} \quad (9.64)$$

La (9.64) es una ecuación integro-diferencial, donde el procedimiento de solución es similar al ya expresado en el punto 2.4 anterior. La solución para este caso será:

$$v(t) = \bar{V} \cdot e^{j\omega t} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R'}\right)^2 + \left(\omega C' - \frac{1}{\omega L'}\right)^2}} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega C' - \frac{1}{\omega L'}}{1/R'}\right)} \quad (9.65)$$

Si se hace

$$\bar{Y} = \sqrt{\left(\frac{1}{R'}\right)^2 + \left(\omega C' - \frac{1}{\omega L'}\right)^2} \cdot e^{-j \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega C' - \frac{1}{\omega L'}}{1/R'}\right)} = \sqrt{G'^2 + (B'_C - B'_L)^2} \cdot e^{-j \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{B'_C - B'_L}{G'}\right)} \quad (9.66)$$

De donde

$$\bar{Y} = \sqrt{G'^2 + B'^2} \cdot e^{-j \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{B'}{G'}\right)} = Y \cdot e^{-j\varphi} \quad (9.67)$$

Si en la (9.65) se simplifica " $e^{j\omega t}$ ":

$$\bar{V} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{G'^2 + B'^2} \cdot e^{-j \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{B'}{G'}\right)}} \quad (9.68)$$

El denominador de (9.68) resulta ser un complejo " $\bar{Y}$ " y se denomina admitancia compleja. Se ha obtenido así una expresión generalizada que es la "ley de Ohm para el método fasorial expresada en términos de la admitancia":

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \tag{9.69}$$

**2.6 Resumen de aplicación del método complejo**

Dado un circuito cualquiera de corriente alterna senoidal, si se emplea el método fasorial simbólico, el circuito puede ser resuelto (salvo por la operatoria matemática), como si fuera de corriente continua. Los pasos a seguir son:

1) Reemplazar el circuito real por su equivalente complejo

| Dispositivo         | Circuito real  | Equivalente complejo              |
|---------------------|--|-----------------------------------|
| Fuente de tensión   | $e(t) = E_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_e)$ | $E = E_{max} \cdot e^{j\delta_e}$ |
| Fuente de corriente | $i(t) = I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta_i)$ | $I = I_{max} \cdot e^{j\delta_i}$ |
| Resistencia         | $R$ (según sea el caso)                                | $\bar{R}$ ó $\bar{G}$ (*)         |
| Inductancia         | $L$ (según sea el caso)                                | $\bar{X}_L$ ó $\bar{B}_L$         |
| Capacitancia        | $C$ (según sea el caso)                                | $\bar{X}_C$ ó $\bar{B}_C$         |

\*) Para generalización se hace  $\bar{R} = R \cdot e^{j0}$  y  $\bar{G} = G \cdot e^{j0}$

2) Reemplazar por la impedancia equivalente, la suma de resistencias y reactivas en serie de cada rama, se obtiene así una impedancia por rama; ó reemplazar por la admitancia equivalente la suma de conductancias y susceptancias en paralelo entre dos nodos adyacentes. En cualquier otro caso se deberá efectuar la combinación de resistencias y reactivas o de conductancias o susceptancias que corresponda, trabajando como si fueran resistencias o conductancias.

3) Resolver el circuito como si fuera de continua.

4) Si se desean los resultados en forma de la función trigonométrica seno original, se deberán tomar de los valores fasoriales obtenidos sólo los coeficientes de las partes imaginarias.

Por último es importante aclarar que el método fasorial puede ser aplicado en todos los teoremas de circuitos visto en corriente continua.

**3. TRIÁNGULO DE IMPEDANCIA Y DE ADMITANCIA**

Ejercicio 9.1 (de apoyo a teoría)

Sea el circuito de la figura 6.7, en el que ya se efectuó el primer paso de resolución por el método fasorial, o sea la transformación a su equivalente complejo que se muestra en figura 9.11.

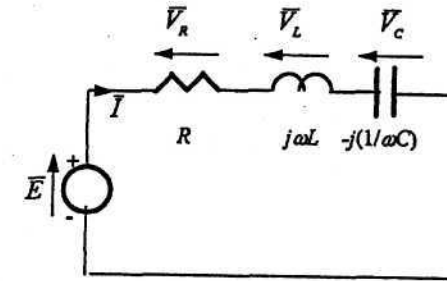


Figura 9.11

El segundo paso consiste en obtener la impedancia compleja equivalente, agrupan los elementos resistivos y reactivos conectados en serie como si fueran resistencias.

$$\bar{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{9.70}$$

$$\bar{Z} = R + j \cdot X \tag{9.71}$$

O en forma polar

$$\bar{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)} \tag{9.72}$$

$$\bar{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} \tag{9.73}$$

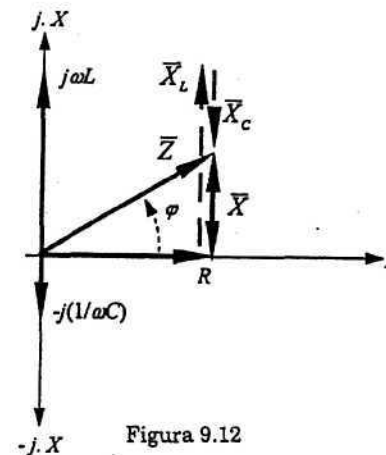


Figura 9.12

Si se quiere representar gráficamente la expresión (9.70/71) ó (9.72/73), no queda más remedio que recurrir a un plano complejo llamado en este caso plano de impedancias o plano "R-X".

Como se muestra en figura 9.12, la resistencia es un número real positivo y las reactivas inductiva y capacitiva son números imaginarios positivo y negativo respectivamente.

La composición (suma) de estos números da un complejo cuya representación polar viene dada por el vector " $\bar{Z}$ ".

Como se ve en la figura el módulo del complejo " $Z$ " es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, la resistencia " $R$ " el cateto adyacente y la reactancia " $X$ " el cateto opuesto, razón por la que se lo llama triángulo de impedancia.

Si se aplica Pitágoras y tangente trigonométrica se encontrará que esta impedancia es la que se había obtenido siguiendo paso a paso con todo rigor la resolución del circuito, expresiones (9.58), (9.59) y (9.60).

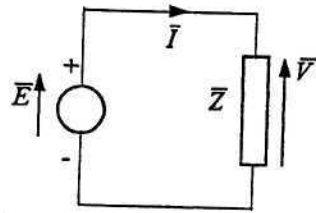


Figura 9.13

Luego el circuito de la figura 9.11 puede ser redibujado como el de la figura 9.13 y a partir de éste, salvo por la operatoria matemática (operaciones con números complejos), se procede como si fuera de corriente continua.

Por Kirchhoff

$$\bar{E} = \bar{V} \quad (9.74)$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \quad (9.75)$$

Sustituyendo (9.73) en (9.75)

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{Z \cdot e^{j\varphi}} \quad (9.76)$$

Como  $\bar{E} = E_{max} \cdot e^{j\delta}$  entonces

$$\bar{I} = \frac{E_{max}}{Z} \cdot e^{j\delta} \cdot e^{-j\varphi} = I_{max} \cdot e^{j(\delta - \varphi)} \quad (9.77)$$

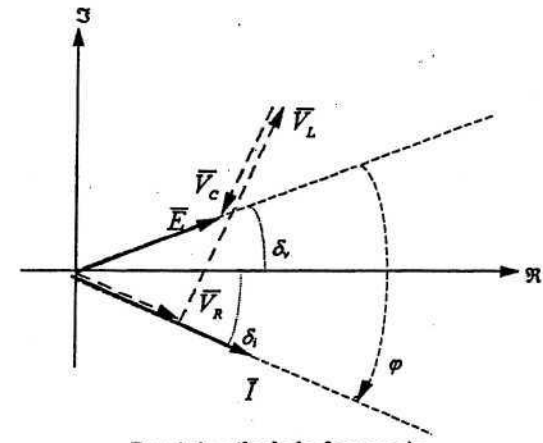
Se quiere determinar ahora la caída de tensión en cada componente pasivo:

$$\bar{V}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I_{max} \cdot e^{j\delta} = V_{Rmax} \cdot e^{j\delta} \quad (9.78)$$

$$\bar{V}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = X_L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot I_{max} \cdot e^{j\delta} = V_{Lmax} \cdot e^{j(\delta + \frac{\pi}{2})} \quad (9.79)$$

$$\bar{V}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = X_C \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot I_{max} \cdot e^{j\delta} = V_{Cmax} \cdot e^{j(\delta - \frac{\pi}{2})} \quad (9.80)$$

La representación fasorial resulta:



Dominio sólo de la frecuencia  
Figura 9.14

En la figura se pone de manifiesto la ventaja de la representación fasorial. Por su inspección visual se comprueba que " $\bar{V}_R$ " está en fase con la corriente, " $\bar{V}_L$ " adelantada y " $\bar{V}_C$ " retrasada 90° con respecto a la corriente.

Ejercicio 9.2 (de apoyo a teoría)

Sea ahora el circuito de la figura 6.9, transformado a su equivalente complejo que muestra en figura 9.15.

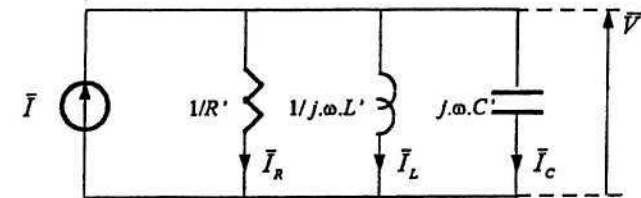


Figura 9.15

La admitancia conectada a la fuente de corriente se obtiene sumando las conductan y susceptancias del circuito de la figura 9.15.

$$\bar{Y} = \frac{1}{R'} + j \cdot \omega \cdot C' - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L'} = \frac{1}{R'} + j \cdot \left( \omega \cdot C' - \frac{1}{\omega \cdot L'} \right) \quad (9.81)$$

$$\bar{Y} = G + j \cdot B \quad (9.82)$$

O en forma polar

$$\bar{Y} = \sqrt{G^2 + \left(\omega \cdot C' - \frac{1}{\omega \cdot L'}\right)^2} \cdot e^{-j \left(\frac{\omega \cdot C' - \frac{1}{\omega \cdot L'}}{G}\right)} \quad (9.83)$$

$$\bar{Y} = Y \cdot e^{-j\varphi} \quad (9.84)$$

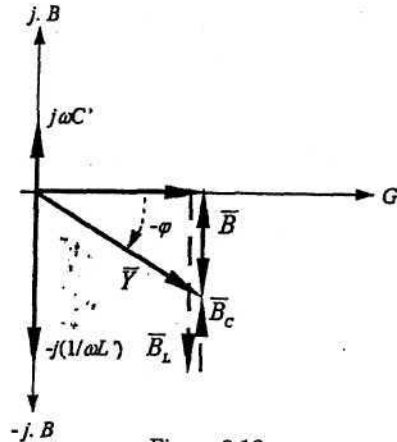


Figura 9.16

Igual que con la impedancia, la admitancia compleja admite ser representada en un plano complejo llamado plano de admitancias o "G - B".

Aquí la conductancia es un número real positivo y las susceptancias capacitiva e inductiva son números imaginarios positivo y negativo respectivamente y la composición (suma) de estos números da un complejo cuya representación polar es el vector "Y".

Se tiene un triángulo de admitancias con "Y" como hipotenusa y donde "G" y "B" son los catetos.

Igual que en el caso del triángulo de impedancias, la admitancia "Y" es también la que se había obtenido con las expresiones (9.66) y (9.67).

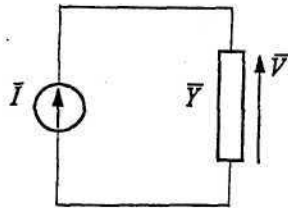


Figura 9.17

El circuito puede ser redibujado como el de la figura 9.17, a partir del cual, salvo por la operatoria matemática (operaciones con números complejos), se procede como si fuera de corriente continua. Por Kirchhoff

$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V} \quad (9.85)$$

$$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \quad (9.86)$$

Sustituyendo (9.84) en (9.86)  $\bar{V} = \frac{\bar{I}}{Y \cdot e^{-j\varphi}} \quad (9.87)$

Como  $I_{max} \cdot e^{j\delta}$  entonces

$$\bar{V} = \frac{I_{max}}{Y} \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\varphi} = V_{max} \cdot e^{j(\delta+\varphi)} \quad (9.88)$$

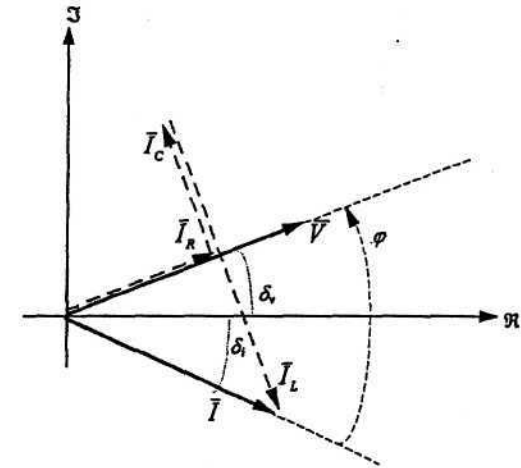
Y la corriente por cada rama será:

$$\bar{I}_R = G \cdot \bar{V} = G \cdot V_{max} \cdot e^{j\delta+\varphi} = I_{Rmax} \cdot e^{j\delta+\varphi} \quad (9.89)$$

$$\bar{I}_L = \bar{B}_L \cdot \bar{V} = B_L \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot V_{max} \cdot e^{j\delta+\varphi} = I_{Lmax} \cdot e^{j(\delta+\varphi-\frac{\pi}{2})} \quad (9.90)$$

$$\bar{I}_C = \bar{B}_C \cdot \bar{V} = B_C \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}} \cdot V_{max} \cdot e^{j\delta+\varphi} = I_{Cmax} \cdot e^{j(\delta+\varphi+\frac{\pi}{2})} \quad (9.91)$$

La representación fasorial ahora resulta:



Dominio sólo de la frecuencia  
Figura 9.18

Como fue estudiado se ve en el diagrama fasorial que "I<sub>R</sub>" está en fase con la caída de potencial "V", "I<sub>L</sub>" retrasada 90° e "I<sub>C</sub>" adelantada 90° con respecto a "V".

**Nota aclaratoria**

Haber asociado el circuito serie a la fem de tensión y el paralelo a la fem de corriente no es obligatorio, sólo responde a un modo de encarar el tema de manera que también se puede dar que el circuito de la figura 9.11 se encuentre conectado a una fuente de corriente en cuyo caso la corriente es dato y para la resolución completa, habrá que determinar la caída " $\bar{V}$ " en la impedancia.

Del mismo modo el circuito de la figura 9.15 puede tener conectada una fuente de tensión con lo que se conoce la caída en cada elemento pasivo y en consecuencia se puede determinar la corriente en cada uno de ellos.

**4. RESONANCIA SERIE Y PARALELO**

La resonancia es un fenómeno que se produce como consecuencia de que las reactancias inductivas y capacitivas en circuito de corriente alterna o excitados con fuentes complejas (en el método fasorial), para determinada frecuencia " $\omega_0$ ", toman el mismo valor pero de signo contrario y en consecuencia mutuamente se anulan.

Si las reactancias capacitivas e inductivas correspondientes a la impedancia del circuito de la figura 9.11 tienen el mismo valor

$$\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{Z} = R \quad (9.92)$$

resulta entonces impedancia total mínima y por el circuito circulará máxima corriente.

En cambio si lo que ocurre es que son del mismo valor las susceptancias del circuito de la figura 9.15

$$\omega \cdot C' - \frac{1}{\omega \cdot L'} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{Y} = \frac{1}{R'} \quad (9.93)$$

ahora lo que resulta ser máxima es la impedancia total del circuito y mínima la corriente, o lo que es lo mismo admitancia mínima y máxima caída de potencial " $\bar{V}$ ".

Cualquiera de los dos casos de resonancia expuestos se producen para una frecuencia determinada denominada frecuencia de resonancia y resultan ser despejando de (9.92) ó (9.93):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (9.94)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C' \cdot L'}} \quad (9.95)$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS  
CAPITULO 9****OBJETIVO PRINCIPAL:**

Aplicando el método fasorial asociado a las leyes de Kirchhoff y a la analogía de la Ohm para corriente alterna, resolver los circuitos propuestos utilizando cualquiera de los métodos y teoremas vistos en los capítulos 2, 3 y 4. Obtener condiciones de resonancia en los circuitos, hacer diagramas fasoriales, de impedancia y admitancia.

**PROBLEMA 9.1**

Dado el circuito de corriente alternada sinusoidal de la figura P9.1, encontrar: 1) la impedancia equivalente fasorial o complejo, 2) la impedancia vista por la fuente, 3) hacer el triángulo de impedancias, determinar la frecuencia angular de resonancia " $\omega_0$ " y efectuar el triángulo de impedancias para " $\omega_0$ ". Expresar todos los resultados en forma polar tangular.

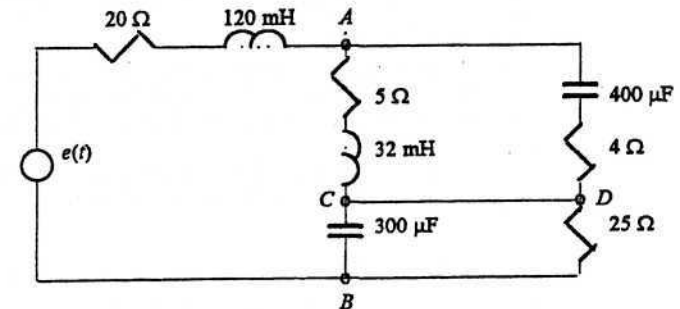


Figura P9.1

$$e(t) = 200 \text{ sen } (\omega \cdot t + 30^\circ)$$

PROBLEMA 9.2

La carga de una acería alimentada con 13.2 kV<sub>ef</sub> y 50 Hz está formada:

- a) por hornos de inducción cuya carga de funcionamiento normal está representada por una inductancia  $L = 3 \text{ H}$ , con 10% de la reactancia como resistencia ohmica de pérdida,
- b) por motores que estando en paralelo con la carga absorben una corriente de 7 A<sub>ef</sub> con un desfase en atraso de 36°,
- c) por un sistema de iluminación formado por 500 tubos fluorescentes de 40 W, reactancia con una pérdida de 8 W y con un atraso de la corriente de 53°.

Se quiere determinar:

- 1) El equivalente fasorial o complejo del circuito que modela el sistema.
- 2) La impedancia total vista por la acometida (punto de alimentación de una instalación)
- 3) El circuito de acometida para que la caída de tensión no supere el 3%. La longitud del circuito de acometida es de 100m.
- 4) la potencia que se disipa por efecto Joule en el circuito de acometida.
- 5) Qué capacitor habrá que conectar en paralelo en el extremo carga de la acometida para que la tensión de la fuente esté en fase con la corriente que suministra.
- 6) Obtenga la potencia disipada por la acometida luego de efectuado el paso anterior.

PROBLEMA 9.3

Se quiere determinar la frecuencia de la fuente para que " $v(t)$ " esté en fase con " $i(t)$ ". Si el valor eficaz de la corriente de la fuente es de 250 mA, ¿Cuánto vale el valor eficaz de la tensión en bornes de la fuente?

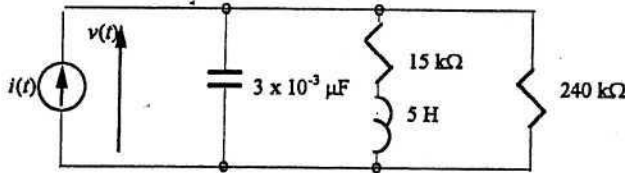


Figura P9.2

PROBLEMA 9.4

Resolver por el método fasorial los problemas 6.1 a 6.5 dados en capítulo 6:

- a) Dibujar primero el circuito equivalente fasorial.
- b) Obtener la impedancia compleja equivalente.
- c) Determine el fasor de la corriente entregada por la fuente.
- d) Analice y compare los resultados y escriba alguna conclusión.

PROBLEMA 9.5

Si el valor eficaz de la tensión de la fuente es de 20 V y la frecuencia es de 159.155 Hz, se requiere determinar los valores medidos por los instrumentos, su expresión fasorial y el diagrama fasorial.

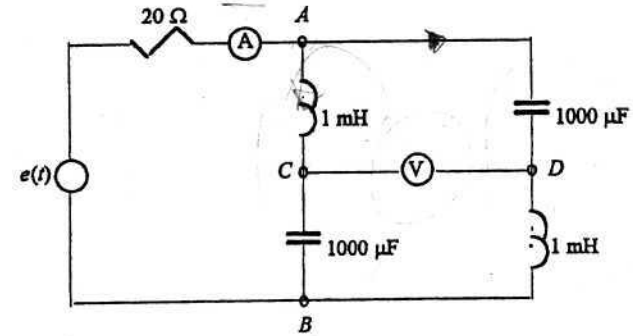


Figura P9.3

PROBLEMA 9.6

La figura P9.4 muestra lo que se conoce como modelo "π" de cualquier circuito de interconexión formado por dos conductores (cables o línea aérea) que interconectan una fuente y una carga monofásica.

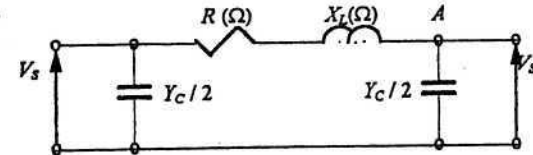


Figura P9.4

Aún cuando todos los componentes mostrados tienen una función específica en la representación del circuito real, según las características particulares de cada circuito, el modelo puede ser simplificado, según se explica a continuación:

- a) Para circuitos formado por cables, como los conductores son aislados con aislantes sólidos de alta rigidez dieléctrica, se encuentran instalados muy próximos uno del otro (baja reactancia inductiva). Estos circuitos por su costo se usan mayormente en longitudes escasas, menores que 300 m y según el caso pueden hacerse algunas de las siguientes simplificaciones: 1) si la tensión es menor que 1000 V se puede despreciar la capacitancia, 2) si la sección es inferior a los 10 mm<sup>2</sup>, se puede despreciar incluso la reactancia inductiva, ya que para esta sección o menores la reactancia inductiva a 50 Hz es menor que el 10% de la resistencia ohmica.

- b) Para circuitos formados por cables utilizados con tensión superior a 1000 V, dependiendo del objetivo de cálculo del modelo, puede ser necesario representar las capacitancias.
- c) Para circuitos formados por cables de sección mayor que 10 mm<sup>2</sup> no es conveniente despreciar la reactancia inductiva. Cabe aclarar que en circuitos de tensiones mayores a 1000 V, en donde los espesores de aislación pueden ser importantes, por la mayor separación de los conductores se aumenta la reactancia inductiva, por lo que se deberá analizar más detenidamente su eliminación.
- d) Para circuitos formados por conductores desnudos montados con aisladores de porcelana o vidrio en postes (denominados líneas aéreas), por razones de su aislamiento, dado por el espacio en aire entre conductores, éstos se encuentran muy separados, lo que incrementa la reactancia inductiva. Como por otro lado las líneas aéreas por su bajo costo, en relación a los circuitos de cable, en general se utilizan para transportar altos niveles de potencias a través de grandes distancias, se encuentran normalmente asociadas a tensiones superiores a 1000 V. Por lo anteriormente dicho suelen ser de sección superior a 10 mm<sup>2</sup> y en consecuencia la resistencia ohmica suele tener un valor muy bajo comparado con la reactancia inductiva, por lo que esta última puede ser despreciada.

Con apoyo en las simplificaciones enunciadas anteriormente y utilizando como modelo básico el circuito "π" de la figura P9.4, resolver los siguientes casos.

|    | $V_s$<br>(Voltios) | Tipo de<br>circ. | $r$ (Ω/km) | Circuito<br>$x_L$ (Ω/km) | $x_C$ (Ωxkm) | $S$<br>(mm <sup>2</sup> ) | $l$<br>(km) |
|----|--------------------|------------------|------------|--------------------------|--------------|---------------------------|-------------|
| 1) | 220                | CB (Cu)          | 9.000      | 0.099                    | -            | 2.5                       | 0.030       |
| 2) | 220                | CB (Cu)          | 0.898      | 0.079                    | -            | 25                        | 0.030       |
| 3) | 7621.02            | CB (Cu)          | 0.828      | 0.165                    | 12012        | 25                        | 30.00       |
| 4) | 7621.02            | LT (Cu)          | 0.6060     | 0.3485                   | 307575       | 25                        | 30.00       |
| 5) | 76210.24           | LT (AlAc)        | 0.1298     | 0.3893                   | 343970       | 240/50                    | 100.00      |

Para los circuitos propuestos calcule la caída de tensión y la corriente en cada rama del modelo simplificado seleccionado considerando, en el extremo receptor para cada caso, la siguiente impedancia de carga:

| Circuito | $ Z $ (Ω) | arg. (grd) |
|----------|-----------|------------|
| 1)       | 8         | 36.8699    |
| 2)       | 1.6       | 36.8699    |
| 3)       | 150       | 36.8699    |
| 4)       | 150       | 36.8699    |
| 5)       | 1500      | 36.8699    |

**PROBLEMA 9.7**

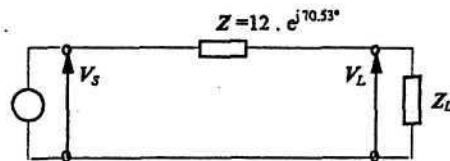


Figura P9.5

En el circuito de la figura P9.5, con " $Z_L = 100 \cdot e^{j16.26^\circ}$ " hay una " $I = 8 A_e$ ". Se determina la tensión en bornes de la impedancia de carga, del generador y la caída en la línea.

**PROBLEMA 9.8**

Para una fuente de 10 V y frecuencia de 159.155 Hz, se requiere determinar el circuito de la figura, los valores medidos por los instrumentos. Se quiere también su signo fasorial y el diagrama correspondiente.

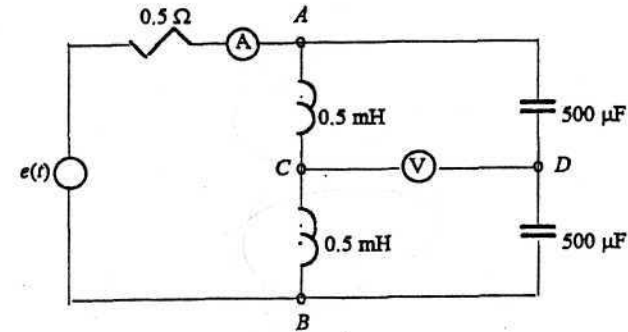


Figura P9.6

**PROBLEMA 9.9**

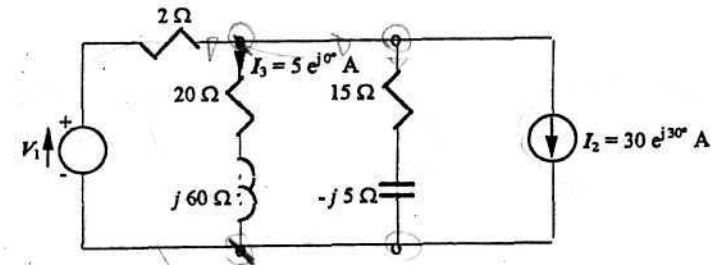
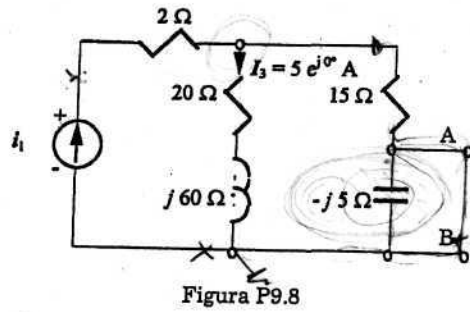


Figura P9.7

Aplicando ley de Ohm para corriente alterna, ecuaciones de nodo y de trayecto contrar la corriente en cada rama y el valor fasorial en bornes de la fuente de tensión.

PROBLEMA 9.10



Reemplace el circuito de la figura P9.8, entre los bornes "A-B", por los equivalentes de Thevenin y de Norton. Demuestre que

$$Z_{TH} = Z_N = E_{TH} / I_N$$

PROBLEMA 9.11

Aplicando la transformación de fuentes ideales a reales vista en punto 6.2 del capítulo 3, resolver el circuito de la figura P9.9 utilizando el método sistemático de mallas.

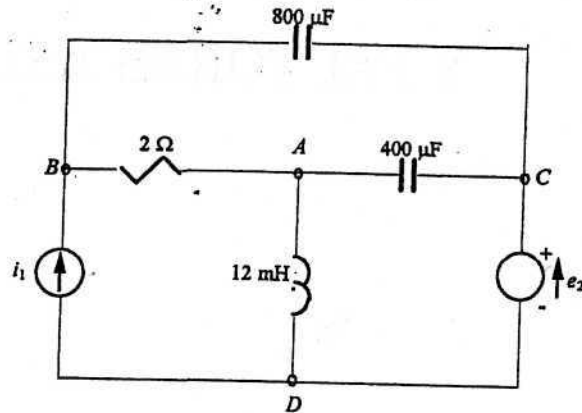


Figura P9.9

Considerar:  $i_1 = 5 \cdot \text{sen}(314.1593 \cdot t + 0^\circ)$  A  
 $e_2 = 20 \cdot \text{sen}(314.1593 \cdot t + 90^\circ)$  V

PROBLEMA 9.12

Idem que el problema 9.11 pero por el método sistemático de los nodos.

PROBLEMA 9.13

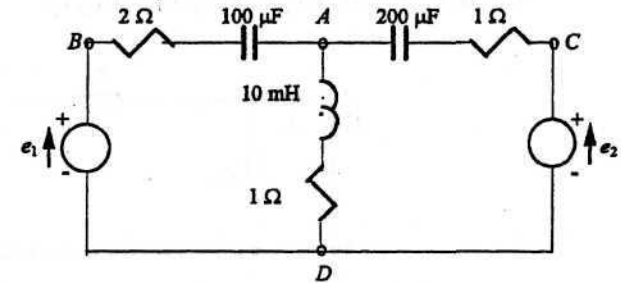


Figura P9.10

Resolver por el método de mallas y nodos considerando:

$$e_1 = 120 \cdot \text{sen}(1000 \cdot t + 0^\circ) \text{ V}$$

$$e_2 = 240 \cdot \text{sen}(1000 \cdot t - 90^\circ) \text{ V}$$

PROBLEMA 9.14

El circuito de la figura P9.11 representa una configuración de cuadripolo "T" pasivo que desde el punto de vista de impedancia compleja resulta similar a lo estudiado en punto 7.4 del capítulo 4. Se quiere, usando el método de las corrientes ficticias de mallas, obtener la relación  $V_1 = f(V_2, I_2)$  e  $I_1 = f(V_2, I_2)$

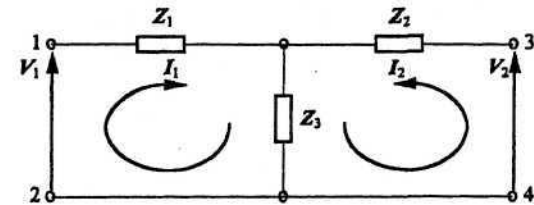


Figura P9.11

## PROBLEMA 9.15

El circuito de la figura P9.12 representa un cuadripolo pasivo "π" que también en este caso para impedancias complejas es similar a lo visto en punto 7.1 del capítulo 4. Utilizando el método de potenciales de nodos más conveniente para esta configuración, obtener también la relación de  $V_1 = f(V_2, I_2)$  e  $I_1 = f(V_2, I_2)$

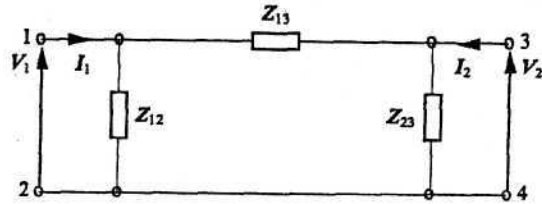


Figura P9.12

# X

## POTENCIA COMPLEJA Y FACTORES ASOCIADOS