

10/25  
Parcial ①

UCA  
Ingeniería Industrial  
Investigación Operativa  
Cátedra: Ing. Carlevari, Ricardo  
Parcial 13/10/04

ALUMNO:

TEMA 1

- 1) Dadas las tablas inicial y parcial óptima del directo para un problema de P.L., en que se debe determinar la cantidad a producir de piezas (A, B y C) sujeta a restricciones de producción mínima (PM), disponibilidad de mano de obra (MO) y disponibilidad de materia prima (MP). Se pide:
- ✓ a) Completar la tabla óptima indicando cómo procedió.
  - ✓ b) Interpretar los resultados del vector  $A_3$  de la tabla óptima.
  - ✓ c) Indicar si conviene introducir un nuevo producto ( $x_7$ ) con \$ 13 de contribución y que insume 4 hs. de mano de obra, 3 kg de materia prima y no participa en la restricción de producción mínima conjunta. En caso afirmativo calcular qué cantidad debería producirse.

Inicial

			2	8	6	6	0	0	
	$C_k$	$X_k$	B	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
PM	-M	$x_1$	4	1	1	1	-1	0	0
MO		$x_2$	24	1	4	2	0	1	0
MP		$x_3$	10	1	2	4	0	0	1
Z=									

$3y_1 + 4y_2 =$

$3 \cdot 4 = 12 < 13 \rightarrow \text{CONVIENE}$

Optima

	$C_k$	$X_k$	B	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
$y_1$	0	$x_2$	5	0.5	1	2	0	0	0.5
$y_2$	0	$x_3$	4	-1	0	-6	0	1	-2
$y_3$	0	$x_4$	1	-0.5	0	4	1	0	0.5
Z=			2	0	13	6	0	0	4

- 2) Una empresa fabrica dos tipos de productos, P1 y P2. Para la elaboración de una unidad de cualquiera de ellos se precisa una hora de trabajo. La empresa dispone de 80 horas de trabajo semanales en producción normal, pudiendo utilizar también horas extras. El departamento de ventas estimó que podrán venderse un máximo de 75 unidades de P1 y 45 unidades de P2. Los beneficios asociados a los productos son de \$5 y \$3 por unidad, respectivamente. La empresa ha fijado las siguientes metas en orden de importancia:

1. Evitar la subutilización de la capacidad de producción  $\rightarrow$  UTILIZAR TODO.
2. No emplear más de 10 horas extras semanales
3. Producir el máximo estimado para cada producto por el departamento de ventas (priorizar según el beneficio de cada producto)

Determinar cómo debe planificarse la producción semanal.

horas extras)  $x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$

horas extras)  $d_1^+ + d_2^- - d_2^+ = 10$

Producción)  $x_1 + p_1^- - p_1^+ = 75$

$x_2 + p_2^- - p_2^+ = 45$

$Z = p_1 \cdot d_1^- + p_2 \cdot d_2^+ + p_3 \cdot p_1^- + p_4 \cdot p_2^-$

$p_1 \gg p_2 \gg p_3 \gg p_4$

✓ Yes

3) Un grupo de inversores está estudiando invertir en un país en desarrollo. Puede elegir entre 10 proyectos que difieren entre sí en el rendimiento neto y en la inversión de capital que necesitan, según se muestra en la tabla:

Proyecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento neto (\$)	4	6	5	8	7	6	3	5	4	10
Invers. en año 1 (\$)	6	6	4	7	5	6	3	5	3	2
Invers. en año 2 (\$)	20	10	10	30	10	40	20	30	25	5

El capital total disponible es de \$40 en el primer año y \$150 en el segundo. Además, se ha decidido que sólo se realizarán inversiones en ese país si se puede garantizar un rendimiento de, al menos, \$25.

Finalmente existen un conjunto de restricciones impuestas por las autoridades del país, según las cuales, los proyectos 3, 4 y 7 son incompatibles; el proyecto 6 debe elegirse si se elige el 3; el proyecto 8 debe elegirse si se eligen el 1 o el 2 y el proyecto 4 es complementario del 10 (se aceptan o rechazan conjuntamente).

Determinar las inversiones que deben realizarse para maximizar el rendimiento.

$$4I_1 + 6I_2 + 5I_3 \dots \geq 25$$

$$6I_1 + 6I_2 + 4I_3 + \dots \leq 40$$

$$20I_1 + 10I_2 + 10I_3 \dots \leq 150$$

$$I_3 + I_4 + I_7 \leq 1$$

$$I_3 - I_6 \leq 0$$

$$I_1 + I_2 - I_8 \leq 2$$

$$I_4 - I_{10} = 0$$

1) a) Completar la tabla óptima:

		$Q_i$	$Z$	$S$	$\theta$	$0$	$0$	$0$
$Ox$	$X_1$	$B_{1k}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
$S$	$X_2$	$E$	$0.5$	$1$	$2$	$0$	$0$	$0.5$
$\theta$	$X_3$	$F$	$-$	$0$	$-1/2$	$0$	$1$	$-2$
$\theta$	$X_4$	$F$	$-0.5$	$0$	$1$	$1$	$0$	$0.5$
$Z =$	$40$	$Z$	$0$	$10$	$0$	$0$	$0$	$4$

Matriz Inversa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

en la columna del  $X_4$  en la inicial el vector es  $(-1, 0, 0)$ .

I)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

II)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

⊗ Rutas b/c. Ocasos a otras.

2) MIPRE

Producto	hrs de trabajo	Unidades por hora	beneficio
$P_1$	$4h$	$75$	$\$5$
$P_2$	$1h$	$45$	$\$3$
	$20hs$	$-$	$-$

$X_i =$  cantidad de productos i fabricados.  
 $X_i =$  variable entera. Resulta en cantidad de productos i fabricados.

Horas ociosas)  $X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 4 + 0 \cdot (-0.5) = 80$   
 Horas extras)  $0 \cdot 1 + E_1 \cdot 1 - E_2 \cdot 1 = 10$   
 Producción) P)  $X_1 + P_1 - P_1^+ = 75$   
 P2)  $X_2 + P_2 - P_2^+ = 45$

$Z(MIN) = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot E^+ + P_3 \cdot P_1^- + P_4 \cdot P_2^- =$

$P_1 >> P_2 >> P_3 >> P_4$

1) el Vector  $A_3$

2
-5
1
10

- Por cada unidad de piezas C. que se produce:
- La producción de piezas B disminuirá en 2 u.
  - El salario de mano de obra aumentará en 5 ks
  - El salario de producción mínima disminuirá en 1 unidad
  - El funcional disminuirá en \$10. (Costo de oportunidad)

¿ Cuántos o no introducir un nuevo producto  $X_7$  con  $3B$  de contribución;  $4M = MQ$ ;  $3K = MP$ ;  $RH = 0$   
 En caso afirmativo indicar cantidad.

$$Z = 2X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 13X_7$$

C.N:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$

$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 4X_7 \leq 24$$

$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_7 \leq 10$$

a través de la tabla optima del valor empuja si lo conviene.

$b_k$	$X_k$	$C_k$	$A_{1k}$	$A_{2k}$	$A_{3k}$	$A_{4k}$	$A_{5k}$	$A_{6k}$
0	$X_4$	2	1/2	1	0	0	-1/2	0
0	$X_6$	10	-1	6	0	0	-2	0
10	$X_8$	4	-0.5	2	0	0	-0.5	0
$Z = 40$			-1	-1	0	0	-5	0

R	$X_1$	$Y_4$
	$X_2$	$Y_5$
	$X_3$	$Y_6$
S	$X_4$	$Y_1$
	$X_5$	$Y_2$
	$X_6$	$Y_3$

$$Z(\text{MAX}) = -4Y_1 + 24Y_2 + 10Y_3$$

Restricciones:

$$0 \cdot Y_1 + 1 \cdot Y_2 + 3 \cdot Y_3 =$$

$$0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

El beneficio mínimo para  $A$  me sirve es de 12 y como  $13 > 12$  lo práctico.

$C_k$	$X_k$	$b_k$	$A_{1k}$	$A_{2k}$	$A_{3k}$	$A_{4k}$	$A_{5k}$	$A_{6k}$	$A_{7k}$
8	$X_2$	5	1/2	1	2	0	0	0.5	1.5
0	$X_5$	7	-1	0	-6	0	1	-2	-2
0	$X_4$	1	-1/2	0	1	1	0	0.5	0.5
$Z = 40$			2	0	10	0	0	4	-1

$A^{-1}$	0	1.5
	7	-2
	3	1.5

8	$X_2$	4	1	1	1	-1	0	0	0
0	$X_5$	16/3	-5/3	0	-1/3	4/3	1	-4/3	0
13	$X_7$	2/3	-1/3	0	2/3	2/3	0	1/3	1
$Z = 40.66$			5/3	0	32/3	7/3	0	0/3	0

tabla optima.

3)  $Z = 4I_1 + 6I_2 + 5I_3 + 8I_4 + 7I_5 + 6I_6 + 3I_7 + 5I_8 + 4I_9 + 10I_{10}$   
 (MAX)

C.N:

$$I_3 + I_4 + I_7 \leq 1$$

$$I_3 - I_6 \geq 0$$

$$I_2 - I_8 \leq 0$$

$$I_{11} - I_3 \leq 0$$

$$I_4 - I_{10} = 0$$

$$6I_1 + 6I_2 + 4I_3 + 7I_4 + 5I_5 + 6I_6 + 3I_7 + 5I_8 + 8I_9 + 12I_{10} \leq 120$$

$$20I_1 + 10I_2 + 10I_3 + 30I_4 + 10I_5 + 10I_6 + 30I_7 + 30I_8 + 25I_9 + 5I_{10} \leq 150$$

$$4I_1 + 6I_2 + 5I_3 + 8I_4 + 7I_5 + 6I_6 + 3I_7 + 5I_8 + 4I_9 + 10I_{10} \geq 25$$

$I_i =$  se acepta o no se proyecta

Inscribes

TEMA 2

$Z \text{ (MAX)} = 4 \cdot X_1 + 2,5 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 1,5 \cdot X_4$

C.V:  $5 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + 2 \cdot X_4 \leq 2000$   
 $4 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 2 \cdot X_4 \leq 3000$   
 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 700$

$X_i = \text{cant. a producir del producto } i$

		b	1	2,5	3	1,5	0	0	0	
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$\theta$
0	$X_4$	300	1,5	0	1	0	0,5	0	1	
0	$X_6$	0	-3,5	0	-6	-1	-1,5	1	0	
2,5	$X_2$	1000	0,5	1	2	1	0,5	0	0	
$Z = 2500$			2,25	0	2	1	1,25	0	0	

a) determinando la matriz inversa.

$5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_5 = 2000$   
 $4X_1 + 3X_2 + 2X_4 + X_6 = 3000$   
 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_7 + 41 = 700$

Busco la matriz inversa en la 1ª columna abajo de los factores constantes de la 1ª los cuales están en:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -1 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A_5$	$A_6$	$A_7$	$41$
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	-1	1

Cambio de signo el sector de  $A_7$  después.

$\cdot B_1 = \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 700 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 2000 \end{bmatrix}$

$\cdot A_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$

$\cdot A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\cdot A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\cdot A_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Contribución unitaria mínima de un producto nuevo E, para que sea convenientemente producido

$5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 = 5 \cdot 1,25 + 2 \cdot 0 \geq 6,25$

Al calcular en la tabla  $A_5$  será menor o igual a 0 y así el producto E entra a la línea.

húsares

c) Límites sup. e inferior del beneficio auxiliar de B dentro de los cuales se mantiene sin modif. la optima.

$B_{lim}^{sup} =$  no existe, no hay máx. ni mín. al  $\emptyset$

$B_{lim}^{inf} = 2,5 - 2,25 = 1,6$   
 $inf = 2,5$

MAX	MIN
Sup	
Inf	

d) Determinar si se altera la estructura de la solución óptima del dual si se introduce una R de 300 €/mes de capacidad.

$$1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + 3 \cdot X_4 = 7000$$

$$1 \cdot 0 + 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 7000$$

Cada  $7000 > 300$   $\Rightarrow$  modifica la  $\neq$  optima del dual, porq' es restrictiva

	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	
A	5	3	3	1	1	1	2	1			$\geq 30$
B		1		2	1			1			$\geq 25$
C			1		1	2					$\geq 10$
D							1	1	1	2	$\geq 20$
Datos	1	3	1	5	3	1	5	8	5	1	

total de  
 $401 = 51$

Indicador  $\leq 51$   $Z_{MIN} \rightarrow N_1 + N_2 + N_3 \dots + N_9$

1) Tablo jicid

$C_k$	$X_k$	$B_k$	Z	B	G	0	0	0
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
-M	$x_1$	4	1	1	1	-1	0	0
0	$x_5$	24	1	4	2	0	1	0
0	$x_6$	10	1	2	4	0	0	1
$Z = -4M$								

2)

Tablo optima

$C_k$	$X_k$	$B_k$	Z	B	G	0	0	0
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
8	$x_2$	5	0,5	1	2	0	0	0,5
0	$x_3$	4	-1	0	-1/2	0	1	-2
0	$x_4$	1	-0,5	0	1	1	0	0,5
$Z = 40$								
			$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_1$	$y_2$	$y_3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Por cada unidad de piezas C que se produzcan:

- La producción de piezas B disminuirá en 2 u
- El sobrante de MO aumentará en 6 hrs
- El sobrante de PM disminuirá en 1 u
- El funcional disminuirá en 10 \$

c) conviene introducir un producto  $X_7$   $(0 \ 4 \ 3)$  13 \$

$$0 \cdot \frac{4}{4} + 4 \cdot \frac{4}{2} + 3 \cdot \frac{4}{3} < 13$$

$$0 \cdot (0) + 4 \cdot (0) + 3 \cdot (4) < 13$$

12 < 13 / conviene !!

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$C_k$	$X_k$	$B_k$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$\Theta$
8	$X_2$	5	0,5	1	2	0	0	0,5	1,5	3/5
0	$X_5$	4	-1	0	-6	0	1	-2	-2	-
0	$X_4$	1	-0,5	0	1	1	0	0,5	1,5	0,67

$$Z = 40 \quad Z \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad -1$$

$$2 \quad 8 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \uparrow$$

$C_k$   $X_k$   $B_k$   $A_1$   $A_2$   $A_3$   $A_4$   $A_5$   $A_6$   $A_7$

$$8 \quad X_2 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad X_5 \quad 10/5 \quad -5/5 \quad 0 \quad -11/5 \quad 4/5 \quad 1 \quad -4/5 \quad 0$$

$$13 \quad X_7 \quad 2/3 \quad -1/3 \quad 0 \quad 2/3 \quad 2/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 1$$

$$Z = 40,67 \quad 5/3 \quad 0 \quad 32/3 \quad 2/3 \quad 0 \quad 13/3 \quad 0$$

NOTA

la cantidad de  $X_7$  a producir es  $2/3$  u

# Estudiar $\rightarrow$ "Curvas de Oferta" (teoría)

(Hors ouverts)  $X_1 + X_2 + HO^- - HO^+ = 80$

(Hors extras)  $HE^- - HE^+ = 10$

$d_1^+ = \text{hors extras}$      $d_1^- = \text{hors ouverts}$

(Hors ouverts)  $X_1 + X_2 + d_1^- - d_1^+ = 80$

(Hors Extras)  $d_1^+ + d_2^- - d_2^+ = 10$

(Producción)  $P_I$ )  $X_1 + P_1^- - P_1^+ = 75$

$P_{II}$ )  $X_2 + P_2^- - P_2^+ = 45$

$Z(\text{max}) = P_1 \cdot d_1^- + P_2 \cdot d_2^+ + P_3 \cdot P_1^- + P_4 \cdot P_2^-$

$P_1 \gg P_2 \gg P_3 \gg P_4$

I: Variable. Bilanz

③

$$Z_{\text{MAX}} = 4I_{11} + 6I_{21} + 5I_{31} + \dots$$

$$4I_{11} + 6I_{21} + 5I_{31} + 8I_{41} + 7I_{51} + 6I_{61} + 3I_{71} + 5I_{81} + 4I_{91} + 2I_{101} \geq 25$$

$$6I_{12} + 6I_{22} + 4I_{32} + 7I_{42} + 5I_{52} + 6I_{62} + 3I_{72} + 5I_{82} + 3I_{92} + 2I_{102} \leq 40$$

$$20I_{13} + 10I_{23} + 10I_{33} + 30I_{43} + 10I_{53} + 40I_{63} + 20I_{73} + 30I_{83} + 25I_{93} + 5I_{103} \leq 150$$

$$I_3 + I_4 + I_7 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$-I_3 + I_{31} + I_{32} + I_{33} = 0$$

$$-I_4 + I_{41} + I_{42} + I_{43} = 0$$

$$-I_7 + I_{71} + I_{72} + I_{73} = 0$$

~~$$I_3 + I_6 \leq 0$$~~

$$I_3 + I_6 \leq 0$$

$$-I_6 + I_{61} + I_{62} + I_{63} = 0$$

$$I_4 - I_8 \leq 0$$

$$I_2 - I_8 \leq 0$$

$$I_4 - I_{10} = 0$$

$$-I_8 + I_{81} + I_{82} + I_{83} = 0 \quad I$$

$$-I_1 + I_{11} + I_{12} + I_{13} = 0$$

$$-I_2 + I_{21} + I_{22} + I_{23} = 0$$