1

Parcial (2)

INVESTIGACIÓN OPERATIVA - REPASO PARCIAL

Una persona debe realizar una dieta balanceada compuesta por dos alimentos A y B que debe cumplir ciertas especificaciones vitamínicas.
El costo de los alimentos A y B es de 5$/kg y 2,5$/kg respectivamente.
La dieta requerida debe contener como mínimo 8 unidades de vitamina A, 19 Unidades de proteínas y 7 unidades de vitamina B12.
El contenido de estos elementos en los alimentos es el indicado en la tabla siguiente:

	Alimento A	Alimento B
Cantidad de vitamina A/kg	0,1	0,3
Cantidad de proteína por Kg	0,3	0,4
Cantidad de vitamina B12/kg	0,3	0,1

$X_1 \to y_4$
$X_2 \to y_5$
$X_3 \to y_1$
$X_4 \to y_2$
$X_5 \to y_3$
$X_6 \to y_6$

La tabla óptima del problema en cuestión es la siguiente:

	Ck	Xk	B	X1 (y_4)	X2 (y_5)	X3 (y_1)	X4 (y_2)	X5 (y_3)	µ1	µ2	µ3 (X_6)
y_4	5	X1	10	1	0	0	1,11	-4,44	0	-1,11	4,44
y_5	2,5	X2	40	0	1	0	-3,33	3,33	0	3,33	-3,33
y_1	0	X3	5	0	0	1	-0,888	0,55	-1	0,888	-0,555
	Z =	150		0	0	0	-2,775	13,875	-M	2,775-M	[illegible]-M

-10

1. Plantear el sistema de ecuaciones del enunciado dado tal que se minimice el costo total.
2. Completar la tabla óptima.
3. Interpretar la tabla óptima.
4. Plantear el sistema dual y su tabla óptima.
5. ¿Cuántas unidades aumentaría el funcional de la solución óptima si aumentáramos el requerimiento mínimo de la vitamina A en una unidad?
6. ¿Sería una unidad adicional de requerimiento mínimo de vitamina B12 de algún valor para el problema?
7. ¿Cuánto puede aumentar el costo unitario del producto B sin movernos de la solución óptima? Límite superior
8. En el mercado se encuentra un nuevo alimento C con las siguientes características: el precio de venta es de 10$/kg, contiene 0,27 unidades de proteína por Kg y 0,10 unidades de vitamina A por Kg. ¿Conviene incorporarlo a la dieta?
9. El médico determinó que esta persona debe incorporar calcio en su dieta diaria, este componente se encuentra en el alimento A en 0,2 unidades por kg y en el alimento B en 0,4 unidades por kg. Siendo la cantidad máxima 16 unidades, determinar las consecuencias de esta decisión. Analizar que sucede en el funcional.
10. En el enunciado original se incorpora la siguiente restricción: la cantidad máxima requerida de alimento B es de 3kg. La tabla óptima es la siguiente:

Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	X6
5	X1	71	1	0	-3	0	0	-0,5
2,5	X2	3	0	1	-3	0	0	-0,8
0	X4	3,5	0	0	-10	1	0	-3
0	X5	14,6	0	0	0	0	1	1
Z =	362,5		0	0	-22,5	0	0	-4,6

a) Completar la tabla óptima.
b) Interpretar el vector del recurso X6.

y_1 = valor marginal VA

y_2 = valor marginal P

y_3 = valor marginal B12

RESOLUCION

1. Z min. = 5 X1+ 2,5 X2

CV
VIT A) 0,1 X1 + 0,3 X2 > 8
PROT) 0,3 X1 + 0,4 X2 > 19
VIT B12) 0,3 X1 + 0,1 X2 > 7

Variables no negativas y continuas :
X1 = cantidad de kg de alimento tipo A a adquirir
X2 = cantidad de kg de alimento tipo B a adquirir

Pasando el sistema de inecuaciones a un sistema de ecuaciones:

Z fin = 5 X1+ 2,5 X2 + Mμ1 + Mμ2 + Mμ3

CV
VIT A) 0,1 X1 + 0,3 X2 - X3 + μ1 = 8
PROT) 0,3 X1 + 0,4 X2 - X4 + μ2 = 19
VIT B12) 0,3 X1 + 0,1 X2 - X5 + μ3 = 7

Planteando la tabla original:

		Cj	5	2,5	0	0	0	M	M	M
Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	μ1	μ2	μ3
M	μ1	8	0,1	0,3	-1	0	0	1	0	0
M	μ2	19	0,3	0,4	0	-1	0	0	1	0
M	μ3	7	0,3	0,1	0	0	-1	0	0	1
Z = 34M		Zj-Cj	0,7M-5	0,8M-2,5	-M	-M	-M	0	0	0

2. Tabla optima

		Cj	5	2,5	0	0	0	M	M	M
Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	μ1	μ2	μ3
5	X1	10	1	0	0	1,11	-4,44	0	-1,11	4,44
2,5	X2	40	0	1	0	-3,33	3,33	0	3,33	-3,33
0	X3	5	0	0	1	-0,88	0,55	-1	0,88	-0,55
Z = 150		Zj-Cj	0	0	0	-2,77	-13,88			

Los vectores X4 y X5 son los opuestos a μ2 y μ3.

3. Interpretación tabla optima

Costo total = 150 $.

Adquirir: 10 kg de Alimento A
40 kg de Alimento B

Hay un excedente de vitamina A por sobre el mínimo impuesto de 5 unidades

Para las proteínas y la vitamina B12 existen valores marginales de 2,77$/unidad y 13,88$/unidad respectivamente.

4. Sistema Dual

Z máx. = 8 y1 + 19 y2 + 7 y3

CV

0,1 y1 + 0,3 y2 + 0,3 y3 < 5
0,3 y1 + 0,4 y2 + 0,1 y3 < 2,5

Pasando el sistema de inecuaciones a un sistema de ecuaciones:

Z.máx. = 8 y1 + 19 y2 + 7 y3 + 0y4 + 0 y5

CV

0,1 y1 + 0,3 y2 + 0,3 y3 + y4 = 5
0,3 y1 + 0,4 y2 + 0,1 y3 + y5 = 2,5

Relaciones entre las variables directas y las del dual:

X1	Y4
X2	Y5
X3	Y1
X4	Y2
X5	Y3

Tabla optima

		Cj	8	19	7	0	0
Ck	Yk	B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
19	Y2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33
7	Y3	13,88	-0,55	0	1	4,44	-3,33
Z = 150		Zj-Cj	5	0	0	10	40

5. El funcional no se vería modificado si se aumentara el requerimiento mínimo de vitamina A en una unidad.

		Cj	~~8~~ 9	19	7	0	0
Ck	Yk	B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
19	Y2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33
7	Y3	13,88	-0,55	0	1	4,44	-3,33
Z = 150		Zj-Cj	~~5~~ 4	0	0	10	40

6. Trabajamos en la tabla óptima del sistema dual para no modificar así el recinto de soluciones factibles. Se observa entonces que sólo se ve modificada la pendiente del funcional.

		Cj	8	19	~~7~~ 8	0	0
Ck	Yk	B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
19	Y2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33
~~7~~ 8	Y3	13,88	-0,55	0	1	4,44	-3,33
Z = 163,88		Zj-Cj	4,44	0	0	14,44	36,66

		Cj	5	2,5	0	0	0	M	M	M
Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	µ1	µ2	µ3
5	X1	14,44	1	0	0	1,11	-4,44	0	-1,11	4,44
2,5	X2	36,66	0	1	0	-3,33	3,33	0	3,33	-3,33
0	X3	4,44	0	0	1	-0,88	0,55	-1	0,88	-0,55
Z = 163,88		Zj-Cj	0	0	0	-2,77	-13,88			

Costo total = 163,88 $

Adquirir: 14,44 kg de Alimento A
36,66 kg de Alimento B

Hay un excedente de vitamina A por sobre el mínimo impuesto de 4,44 unidades

Para las proteínas y la vitamina B12 existen valores marginales de 2,77$/unidad y 13,88$/unidad respectivamente, ya que tan sólo se consumen los mínimos impuestos de las mismas.

7. Para no movernos de la solución óptima debemos hallar el límite superior del producto B. Como la variable X2 se encuentra en la base en la solución óptima se tiene que buscar un aij que sea positivo.

C2 sup = Ci + [(zj-cj)/aij] = 2,5 + [13,88/3,33]
C2 sup = 6,66

8. Nuevo alimento C
- Costo unitario 10$/kg
- Aporta 0,27 unidades de proteínas / kg
- Aporta 0,10 unidades de vitamina A / kg

Primero hay que evaluar si no convendría adquirir las unidades de proteínas y vitamina A que aporta el alimento C por otro lado, es decir no adquirirlas a través de la compra del alimento C.

~~0,27 y2 representa el precio que debería pagarse por las unidades de proteínas que proporciona el alimento C.~~
~~0,10 y1 representa el precio que debería pagarse por las unidades de vitamina A que aporta el alimento C.~~
Si la *suma de estos dos cálculos es menor que* el costo *unitario* del alimento C no conviene incorporar el alimento C a la dieta.
0,27 y2 + 0,10 y1 = 0,27 * 2,77 = 0,75 < 10

En consecuencia no conviene incorporar el alimento C a la dieta.

Si utilizamos las tablas del Simplex para resolver esta pregunta deberíamos utilizar las tablas del sistema directo. Mediante el uso de la matriz inversa se puede hallar el vector transformado para la solución óptima y analizar a través del zj-cj correspondiente si conviene incorporar el alimento C a la dieta o no.

Matriz inversa de la tabla óptima (es la que se halla en la tabla óptima por debajo de la matriz identidad de la tabla original).

$$\begin{bmatrix} 0 & -1,11 & 4,44 \\ 0 & 3,33 & -3,33 \\ -1 & 0,88 & -0,55 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,27 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0,9 \\ 0,14 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la tabla óptima

		Cj	5	2,5	0	0	0	M	M	M	10
Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	µ1	µ2	µ3	X6
5	X1	10	1	0	0	1,11	-4,44	0	-1,11	4,44	-0,3
2,5	X2	40	0	1	0	-3,33	3,33	0	3,33	-3,33	0,9
0	X3	5	0	0	1	-0,88	0,55	-1	0,88	-0,55	0,14
Z = 150		Zj-Cj	0	0	0	-2,77	-13,88				-9,25

Como el zj-cj del vector X6 es negativo la solución no puede mejorar, por lo que se comprueba que no conviene incorporar el alimento C a la dieta.

9. Incorporar calcio en la dieta. Como mínimo 16 unidades.

Alimento A = 0,2 unidades de calcio /kg alimento A
Alimento B = 0,4 unidades de calcio / kg de alimento B

Esto significa que se debe agregar una nueva restricción al problema. En consecuencia, lo primero a analizar es si la restricción es restrictiva para el problema o no.

0,2 X1 + 0,4 X2 <= 16

0,2 * 10 + 0,4 * 40 = 18 ~~<=~~ 16

Siendo la nueva restricción limitativa se debe analizar que sucede con la solución óptima actual.

La restricción que se agrega al problema directo es

0,2 X1 + 0,4 X2 <= 16

Como se trata de un problema directo de minimización para pasar al problema dual la restricción debe formularse como de >= por lo que la misma se escribe:

-0,2 X1 - 0,4 X2 >= -16

Trabajando ahora con las tablas duales para no modificar el recinto de soluciones:

		Cj	8	19	7	0	0	-16
Ck	Yk	B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
0	Y4	5	0,1	0,3	0,3	1	0	-0,2
0	Y5	2,5	0,3	0,4	0,1	0	1	-0,4
Z = 0		Zj-Cj	-8	-19	-7	0	0	16

Mediante el uso de la matriz inversa se puede hallar el vector transformado para la solución óptima actual y así analizar la nueva solución del problema tras el agregado de la restricción de requerimiento máximo de calcio en la dieta.

Matriz inversa de la tabla óptima (es la que se halla en la tabla óptima por debajo de la matriz identidad de la tabla original)

$$\begin{vmatrix} -1,11 & 3,33 \\ 4,44 & -3,33 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0,2 \\ -0,4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1,11 \\ 0,44 \end{vmatrix}$$

Reemplazando en la tabla óptima

		Cj	8	19	7	0	0	-16	
Ck	Yk	B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	?
19	Y2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33	-1,11	-
7	Y3	13,88	-0,55	0	1	4,44	-3,33	0,44	31,25
Z = 150		Zj-Cj	5	0	0	10	40	-2	

Como el valor de Zj-Cj del vector y6 es negativo, siendo un problema de maximización la solución puede mejorar. Entonces ingresa y6 a la base y sale de la base y2.

La nueva tabla óptima será:

		Cj	8	19	7	0	0	-16
Ck	Yk	B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
19	Y2	37,5	-0,5	1	2,5	10	-5	0
-16	Y6	31,25	-1,25	0	2,25	10	-7,5	1
Z =212,5		Zj-Cj	2,5	0	4,5	30	25	0

Finalmente, el nuevo funcional tendrá un valor de Z = 212,5 $ (Costo total)

10. Nueva restricción: X2 <= 3

Pasando la inecuación a una ecuación: X2 + X6 = 3

a) Tabla óptima

			5	2,5	0	0	0	0
Ck	Xk	B	X1	X2	X3	X4	X5	X6
5	X1	71	1	0	-3	0	0	-0,5
2,5	X2	3	0	1	-3	0	0	-0,8
0	X4	3,5	0	0	-10	1	0	-3
0	X5	14,6	0	0	0	0	1	1
Z = 362,5		Zj-Cj	0	0	-22,5	0	0	-4,5

b) Interpretación X6.

Por cada unidad que se relaje la restricción de requerimiento máximo de alimento B el funcional mejorará en 4,5 $, es decir que el mismo disminuirá por tratarse de un problema de minimización.
La cantidad de alimento A a adquirir disminuirá en 0,5. La cantidad de alimento B a adquirir aumentará en 0,8. El excedente de proteínas aumentará en 3 y el excedente de vitamina B12 aumentará en 1.

Reposo Parcial

X_i = Variable Continua, No Negativa cantidad de Kg de Alimento "i"

1) $Z_{MIN} \to 5X_1 + 2{,}5X_2$

vitamina A) $0{,}1X_1 + 0{,}3X_2 \geq 8$

Proteínas) $0{,}3X_1 + 0{,}4X_2 \geq 19$

vitamina B12) $0{,}3X_1 + 0{,}1X_2 \geq 7$

$$\begin{cases} 0{,}1X_1 + 0{,}3X_2 - X_3 + \mu_1 = 8 \\ 0{,}3X_1 + 0{,}4X_2 - X_4 + \mu_2 = 19 \\ 0{,}3X_1 + 0{,}1X_2 - X_5 + \mu_3 = 7 \end{cases}$$

$Z_{MIN} \to 5X_1 + 2{,}5X_2 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3$

Tabla Inicial

			5	2,5	0	0	0	M	M	M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	μ_2	μ_3
M	μ_1	8	0,1	0,3	-1	0	0	1	0	0
M	μ_2	19	0,3	0,4	0	-1	0	0	1	0
M	μ_3	7	0,3	0,1	0	0	-1	0	0	1
$Z = 34M$			(0,7M-5)	0,8M-2,5	-M	-M	-M	0	0	0

2)

			5	2,5	0	0	0	M	M	M	
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	μ_2	μ_3	
5	X_1	-10	1	0	0	1,11	-4,44	0	-1,11	4,44	y_4
2,5	X_2	-40	0	1	0	-3,33	3,33	0	3,33	-3,33	y_5
0	X_3	-5	0	0	1	-0,888	0,555	-1	0,888	-0,555	y_1
$Z = 150$			0	0	0	-2,77	-13,88	0	2,775-M	13,875-M	
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3				

NOTA: A_3; A_4 y A_5 son los opuestos a μ_1, μ_2 y μ_3

3) Interpretar la tabla óptima

X_1: Cantidad de Kg Alimento A

X_2: " " " " B

X_3: Sobrante de vitamina A

- Alimento A 10 Kg
- Alimento B 40 Kg
- Sobrante de vitamina A de 5 Kg
- Costo total = 150 $ (valor de Z)
- Para las Proteínas y las vitamina B12 existen valores marginales de 2,77 $/u y 13,888 $/u respectivamente.

4) Sistema Dual y su tabla óptima

$$\begin{cases} 0{,}1y_1 + 0{,}3y_2 + 0{,}3y_3 \leq 5 \\ 0{,}3y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}1y_3 \leq 2{,}5 \end{cases}$$

$$Z_{MAX} \to 8y_1 + 19y_2 + 7y_3$$

$$\begin{cases} 0{,}1y_1 + 0{,}3y_2 + 0{,}3y_3 + y_4 = 5 \\ 0{,}3y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}1y_3 + y_5 = 2{,}5 \end{cases}$$

X_1	y_4
X_2	y_5
X_3	y_1
X_4	y_2
X_5	y_3

NOTA

tabla óptima Dual

C_K	Y_K	B_K	8 A_1'	19 A_2'	7 A_3'	0 A_4'	0 A_5'
19	y_2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33
7	y_3	13,88	-0,555	0	1	4,44	-3,33
Z = 150			5	0	0	10	40

5)

Vitamina $A_1 = X_3 = Y_1$

C_K	Y_K	B_K	9 A_1'	19 A_2'	7 A_3'	A_4'	A_5'
19	y_2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33
7	y_3	13,88	-0,555	0	1	4,44	-3,33
Z = 150			3,835	0	0	10	40

ni funcional dis minuye en 3,835 ¿Puede ser?

6) Vitamina B12 = $X_5 = Y_3$

C_K	Y_K	B_K	8 A_1'	19 A_2'	8 A_3'	A_4'	A_5'
19	y_2	2,77	0,88	1	0	-1,11	3,33
8	y_3	13,88	0,555	0	1	4,44	-3,33
Z = 163,7			4,33	0	0	14,44	36,66

⇒

⇒ Vuelvo a la óptima directa

C_K	X_K	B_K	5 A_1	2,5 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5
5	X_1	-14,44	1	0	0	1,11	-1,44
2,5	X_2	-36,66	0	1	0	-3,33	3,33
0	X_3	-4,33	0	0	1	-0,88	0,555
Z = 163,7			0	0	0	-2,77	-13,875

Costo total = 163,7 $

Alimento A = 14,44 Kg

Alimento B = 36,66 Kg

sobrante de vitamina A de 4,33 Kg

Valores Marginales de X_4 y X_5 2,77 y 13,875

7) Producto B = X_2 → variable Básica
Problema de MIN

	MAX	MIN
SUP	−	+
INF	+	−

$$C_{2_{SUP}} = 2,5 + \left(\frac{13,88}{3,33}\right) = \boxed{6,67}$$

NOTA

8) ¿Conviene incorporar el producto C?

C $(0{,}10 \quad 0{,}27 \quad 0)$ $10\ \$/kg$

$$0{,}10\, y_1 + 0{,}27\, y_2 + 0 \cdot y_3 < 10$$

$$0{,}10 \cdot (0) + 0{,}27 \cdot (2{,}77) + 0 \cdot (13{,}88) < 10$$

$$0{,}75 \leq 10$$ ✓ Conviene!!

9)

$$0{,}2\, x_1 + 0{,}4\, x_2 \leq 16$$

$$0{,}2\,(10) + 0{,}4\,(40) = 18 \not\leq 16$$

Como se dispone solamente de 16 u, la solución óptima se va a ver modificada!

NOTA