$5,85$ Pialbella

Matías Ostario

(93)

3/11/15 (A)

UCA
Ingeniería Industrial (5° año)
Investigación Operativa
Cátedra: Ing. Ricardo Carlevari
Lic. Liliana Radice

ALUMNO: ALEJO CABEZAT

TEMA 4
Parcial: 03/06/09

50

1. (50 PUNTOS). La empresa CARTRON puede fabricar cuatro productos A, B, C y D que utilizan respectivamente 5, 2, 4 y 2 horas de mano de obra y 4, 3, 0 y 2 kg. de materia prima. La disponibilidad semanal de mano de obra es de 2.000 hs. y de materia prima 3.000 kg. La producción mínima (entre todos los productos) es de 700 unidades por semana. Las contribuciones marginales son \$ 4; \$ 2,5; \$3 y \$ 1,5 para A, B, C y D respectivamente.
Se dan los datos indicados para la tabla óptima del Simplex. Se pide:

a) Completar la última tabla **(sin usar Simplex)**, indicando como se procedió.
b) Indicar cuál debería ser la contribución unitaria mínima que debería tener un producto E para que sea conveniente producirlo, sabiendo que por unidad insume 5 hs. de mano de obra, 2 kg del materia prima y no participa en la restricción de producción mínima.
c) Calcular los límites superior e inferior del beneficio unitario de B dentro de los cuales se mantiene sin modificar la estructura de la solución óptima actual.
d) Determinar si se altera la estructura de la solución óptima del dual hallada si se introduce una restricción de combustible del que se disponen 300 litros/mes, si se sabe que cada unidad de producto A, B, C y D requiere, 1, 7, 4 y 3 litros respectivamente. En caso de alterarse, hallar la nueva solución óptima.

			4	2,5	3	1,5	0	0	0	
C_k	X_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A7	
0	X_7	300	1,5	0	1	0	0.5	0	1	25
0	X_6	0	-3,5	0	-6	-1	-1.5	1	0	-5,8
2,5	X_2	1000	2,5	1	2	1	0.5	0	0	25
Z= 2500			2,25	0	2	1	1,25	0	0	
			y_4	y_5	y_6	y_7	z_1	y_2	y_3	

menor o igual a cero

10

2. (10 PUNTOS). Considerando los datos del problema anterior, formular las siguientes restricciones de metas: minimizar las horas extras y tratar de que las horas ociosas no sean superiores a 10 horas. Formular el correspondiente funcional, priorizando la meta 1 por encima de la 2.

como se hace

33

3. (40 PUNTOS). Una empresa de transporte debe transportar cuatro tipos de grandes productos en camiones que tienen una capacidad de 51m3. Los productos a transportar se detallan en la tabla adjunta, en la cual se ha consignado el volumen ocupado por cada unidad de ellos, así como la cantidad mínima requerida de unidades a transportar.

PRODUCTOS	Volumen ocupado (m3)	Cantidad a transportar (unidades)
A	10	30
B	18	25
C	20	10
D	25	20

Formular un modelo de P.L. que permita minimizar el número de camiones a utilizar.

	X_1	X_2	X_3	X_4 ...	X_n	
A	5	1				$\geq$
B		2				$\geq$
C						$\geq$
D						$\geq$
Desperdicio	1	5				

$Z_{min} = 1.X_1 +$

Parcial

1	A	5 h MO	4 Kg MP	4 $
	B	2 h MO	3 Kg MP	2,5 $
	C	4 h MO	0 Kg MP	3 $
	D	2 h MO	2 Kg MP	1,5 $

X_i = Variable continua, mayor igual a cero.
Cantidad Producida de Productos "i"

$$Z_{MAX} \rightarrow 4X_1 + 2{,}5X_2 + 3X_3 + 1{,}5X_4$$

sujeto a

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 \leq 2000 & \text{MO} \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_4 \leq 3000 & \text{MP} \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 700 & \text{PM} \end{cases}$$

$$Z_{MAX} \rightarrow 4X_1 + 2{,}5X_2 + 3X_3 + 1{,}5X_4 - M\mu_1$$

sujeto a

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_5 = 2000 \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_4 + X_6 = 3000 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_7 + \mu_1 = 700 \end{cases}$$

Tabla inicial

			4	2,5	3	1,5	0	0	0	-M	
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	μ_1	Θ
0	X_5	2000	5	2	4	2	1	0	0	0	
0	X_6	3000	4	3	0	2	0	1	0	0	
-M	μ_1	700	1	1	1	1	0	0	-1	1	
$Z = -700M$			-M-4	-M-2,5	-M-3	-M-1,5	0	0	M	0	

NOTA

Datos enunciado

a) Tabla óptima

			4	2,5	3	1,5	0	0	0	
C_K	X_K	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
0	X_7	300	1,5	0	1	0	0,5	0	1	y_3
0	X_6	0	-3,5	0	-6	-1	-1,5	1	0	y_2
2,5	X_2	1000	2,5	1	2	1	0,5	0	0	y_5
Z = 2500			2,25	0	2	1	1,25	0	0	
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3	

- En 1^er lugar completamos los vectores canónicos (los de aquellas variables que están en la base)
- Completamos los C_j y los C_K guiándonos por la función objetivo
- En la tabla inicial tenemos $A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cuando queremos obtener la matriz inversa observando la tabla óptima tenemos que utilizar el opuesto a A_7, o sea, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Entonces la matriz inversa será $\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -1 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Ahora estamos en condiciones de saber los vectores B, A_1, A_3, A_4 haciendo:

$$B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \qquad A_1 = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NOTA

Calculamos por último el valor Z y los $(Z_j - C_j)$

b) E 5h MO 2Kg MP No participa en la restricción de producción mínima

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 + 5X_8 \leq 2000 & MO \\ 4X_1 + 3X_3 + 2X_4 + 2X_8 \leq 3000 & MP \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 700 & PM \end{cases}$$

Construimos el vector A_8 quedando en la tabla directa de esta manera:

$$A_8 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y ahora para agregarla en la tabla óptima hacemos:

$$A^{-1} \cdot A_8 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -1 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -5,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Luego para que sea conveniente producirlo, se tiene que cumplir que:

$$\boxed{\text{Beneficio unitario} \geq} \begin{array}{c} V.M \\ \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A_8 \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} = 6,25 \ \$/u$$

De esta manera el $(Z_j - C_j)$ correspondiente a A_8 en la tabla óptima será menor o igual a 0 y así el producto E entrará a la base que formará la solución óptima.

c) límites SUP e INF del Beneficio unitario de B dentro de los cuales se permite sin modificar la estructura de la solución óptima actual

Como la variable (X_2) es una variable básica, tenemos en cuenta la sig tabla

	a_{ij} MAX	a_{ij} MIN
Lim SUP	−	+
Lim inf	+	−

Como es un Problema de MAX, luego

$$\boxed{C_{2_{SUP}} = \text{NO EXISTE}} \Rightarrow \text{No hay ningún } a_{ij} \ominus$$

$$\boxed{C_{2_{INF}} = 2{,}5 - \frac{2{,}25}{2{,}5} = 1{,}6}$$

d) Determinar si se altera la estructura de la solución óptima dual hallada si se introduce una restricción de combustible del que se disponen 300 litros/mes si se requiere de A B C y D 1, 2, 4 y 3 litros respectivamente. En caso de alterarse, hallar la nueva solución óptima.

NOTA

Directo

$$Z_{MAX} \rightarrow 4X_1 + 2{,}5X_2 + 3X_3 + 1{,}5X_4$$

MO $\quad 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 \leq 2000$

MP $\quad 4X_1 + 3X_2 + 2X_4 \leq 3000$

PM $\quad X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 700 \Rightarrow -X_1 - X_2 - X_3 - X_4 \leq -700$

Combustible $\quad X_1 + 7X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 300$

Dual

$$5y_1 + 4y_2 - y_3 + y_8 \geq 4$$

$$2y_1 + 3y_2 - y_3 + 7y_8 \geq 2{,}5$$

$$4y_1 - y_3 + 4y_8 \geq 3$$

$$2y_1 + 2y_2 - y_3 + 3y_8 \geq 1{,}5$$

X_1 —— y_4
X_2 —— y_5
X_3 —— y_6
X_4 —— y_7
X_5 —— y_1
X_6 —— y_2
X_7 —— y_3

$$Z_{MIN} \rightarrow 2000y_1 + 3000y_2 - 700y_3 + 300y_8$$

Tabla Dual optima

			2000	3000	-700	0	0	0	0	300	
B_K	Y_K	C_K	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'	A_5'	A_6	A_7	A_8	Θ
2000	y_1	1,25	1	1,5	-0,5	0	-0,5	0	0	3,5	0,357
0	y_4	2,25	0	3,5	-1,5	1	-2,5	0	0	16,5	0,136 ←
0	y_6	2	0	6	-1	0	-2	1	0	10	0,2
0	y_7	1	0	1	0	0	-1	0	1	4	0,25
$Z = 2500$			0	0*	-300	0	-1000	0	0	6700	

(2000 · 3,5) − 300

NOTA

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ -1 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para hallar A'_8 hacemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ -1 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 16{,}5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}}_{A'_8}$$

			2000	3000	-700	0	0	0	0	300
B_K	Y_K	C_K	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A_6	A'_7	A'_8
2000	y_1	0,77	1	0,75	-0,18	-0,21	0,03	0	0	0
300	y_8	0,137	0	0,21	-0,09	0,06	-0,15	0	0	1
0	y_6	0,63	0	3,87	-0,09	-0,60	-0,18	1	0	0
0	y_7	0,45	0	0,15	0,36	-0,24	-0,39	0	1	0
$Z = 1581$			0	-1437	313	-402	15	0	0	0

No hemos llegado al óptimo, pero se verifica que la solución se verá alterada por la nueva restricción $\Rightarrow$

NOTA

Vemos que:

$$x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 300$$ es Restrictiva

ya que

$$\underbrace{7.(1000) \leq 300}_{B_k \text{ de la tabla óptima!!}}$$ NO SE CUMPLE

2) Considerando los datos del problema anterior formular las sig. restricciones de metas: minimizar las horas extras y tratar de que las horas ociosas no sean superiores a 10 hs. Formular el correspondiente funcional priorizando la meta 1 por encima de la 2.

$$Z_{MIN} \rightarrow P_1\, d_{HE}^{+} + P_2\, d_{HO}^{+}$$

HE = Horas Extras
HO = Horas ociosas

Chequear

HO) $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - HE + d_{HE}^{-} - d_{HE}^{+} = 2000$

MP) $4x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 3000$

PM) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 700$

HO) $HO + d_{HO}^{-} - d_{HO}^{+} = 10$

Como priorizamos la meta 1 por sobre la 2, los afectamos en el funcional con $P_1 >> P_2$, por ej podemos hacer $P_1 = 10000$ y $P_2 = 100$

NOTA

(3) Formular un modelo de PL que permita minimizar el número de camiones a utilizar.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
A	5	3	1	3	1	1	0	2	0	≥ 30
B	0	1	2	0	0	1	0	0	0	≥ 25
C	0	0	0	1	2	1	1	0	0	≥ 10
D	0	0	0	0	0	0	1	1	2	≥ 20

$\leq 51\ m^3$

X_i : Cantidad de camiones i

$$Z_{MIN} \rightarrow X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9$$

$X_i \geq 0$, variables enteras

NOTA