Parcial ①

TEMA 1

UCA
Ingeniería Industrial
Investigación Operativa
Cátedra: Ing. Carlevari, Ricardo.
Parcial 13/10/04

ALUMNO:

1) Dadas las tablas inicial y parcial óptima del directo para un problema de P.L., en que se debe determinar la cantidad a producir de piezas (A, B y C) sujeta a restricciones de producción mínima (PM), disponibilidad de mano de obra (MO) y disponibilidad de materia prima (MP). Se pide:

a) Completar la tabla óptima indicando cómo procedió.
b) Interpretar los resultados del vector A_3 de la tabla óptima.
c) Indicar si conviene introducir un nuevo producto (x_7) con \$ 13 de contribución y que insume 4 hs. de mano de obra, 3 kg de materia prima y no participa en la restricción de producción mínima conjunta. En caso afirmativo calcular qué cantidad debería producirse.

Inicial

				2	8	6	0	0	0
	Ck	Xk	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
PM	-M	μ	4	1	1	1			
MO		X_5	24	1	4	2			
MP		X_6	10	1	2	4			
	Z=								

Optima

	Ck	Xk	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Y_3	8	X_2	5	0.5	1	2	0	0	0.5
Y_2	0	X_5	4	-1	0	-6	0	1	-2
Y_1	0	X_4	1	-0,5	0	1	1	0	0.5
		Z=40		2	0	10	0	0	4
				X_4	X_5	X_6	Y_1	Y_2	Y_3

2) Una empresa fabrica dos tipos de productos, P1 y P2. Para la elaboración de una unidad de cualquiera de ellos se precisa una hora de trabajo. La empresa dispone de 80 horas de trabajo semanales en producción normal, pudiendo utilizar también horas extras. El departamento de ventas estimó que podrán venderse un máximo de 75 unidades de P1 y 45 unidades de P2. Los beneficios asociados a los productos son de \$5 y \$3 por unidad, respectivamente. La empresa ha fijado las siguientes metas en orden de importancia:

1. Evitar la subutilización de la capacidad de producción → UTILIZAR TODO.
2. No emplear más de 10 horas extras semanales
3. Producir el máximo estimado para cada producto por el departamento de ventas (priorizar según el beneficio de cada producto)

Determinar cómo debe planificarse la producción semanal.

80 (HE)

x1 (d1) d1+ -75

3) Un grupo de inversores está estudiando invertir en un país en desarrollo. Puede elegir entre 10 proyectos que difieren entre sí en el rendimiento neto y en la inversión de capital que necesitan, según se muestra en la tabla:

Proyecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento neto ($)	4	6	5	8	7	6	3	5	4	2
Invers. en año 1 ($)	6	6	4	7	5	6	3	5	3	2
Invers. en año 2 ($)	20	10	10	30	10	40	20	30	25	5

El capital total disponible es de $40 en el primer año y $150 en el segundo. Además, se ha decidido que sólo se realizarán inversiones en ese país si se puede garantizar un rendimiento de, al menos, $25.

Finalmente existen un conjunto de restricciones impuestas por las autoridades del país, según las cuales, los proyectos 3, 4 y 7 son incompatibles; el proyecto 6 debe elegirse si se elige el 3; el proyecto 8 debe elegirse si se eligen el 1 o el 2 y el proyecto 4 es complementario del 10 (se aceptan o rechazan conjuntamente).

Determinar las inversiones que deben realizarse para maximizar el rendimiento.

PARCIAL 13/10/04 (Tema 1)

1)

a) Completar la tabla óptima:

		C_j	2	8	6	0	0	0
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
8	X_2	5	0,5	1	2	0	0	0,5
0	X_5	4	-1	0	-6	0	1	-2
0	X_4	1	-0,5	0	1	1	0	0,5
Z =	40		2	0	10	0	0	4

Matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

en la columna del X4 en la inicial el vector es (-1, 0, 0).

I) $\begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ II) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ IV) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$

(*) puntos b y c hechos atrás.

2) METAS

Producto	hs de trabajo	Unidades máx	beneficio
P1	1h	75	$5
P2	1h	45	$3
	80 hs		

Xi = variable entera. Representa la cantidad de producto i fabricado.

Horas ociosas) $X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 1 + O_1^- - O_1^+ = 80$

Horas extras) $O^+ + E_1^- - E_1^+ = 10$

Producción) P1) $X_1 + P_1^- - P_1^+ = 75$

P2) $X_2 + P_2^- - P_2^+ = 45$

$Z(MIN) = P_1 \cdot O_1^- + P_2 \cdot E^+ + P_3 \cdot P_1^- + P_4 \cdot P_2^- =$

$P_1 >> P_2 >> P_3 >> P_4$

1) b) Vector A3 $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$: Por cada unidad de piezas C que se produzca:

- La producción de piezas B disminuirá en 2 u.
- El sobrante de mano de obra aumentará en 6 hs
- El sobrante de producción mínima disminuirá en 1 unidad.
- El funcional disminuirá en $10 (Costo de oportunidad

¿Conviene o no introducir un nuevo producto X_7 con $13 de contribución; 4hs = MO ; 3 kg = MP ; RH = 0. En caso afirmativo indicar cantidad.

$$Z = 2X_1 + 8X_2 + 6X_3 + 13X_7$$

C.N:
$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$
$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 4X_7 \geq 24$$
$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_7 \leq 10$$

A través de la tabla óptima del dual evalúo si me conviene.

		Cj	-4	24	10	0	0	0
Bk	Yk	Ck	A1	A2	A3	A4	A5	A6
0	Y4	2	1/2	1	0	0	-1/2	0
0	Y6	10	-1	6	0	0	-2	0
10	Y3	4	-0,5	2	0	0	-0,5	0
Z =	40		-1	-4	0	0	-5	0
			X_4	X_5	X_6	X_1	X_2	X_3

R: X_1 – Y_4; X_2 – Y_5; X_3 – Y_6

S: X_4 – Y_1; X_5 – Y_2; X_6 – Y_3

$$Z_{(MIN)} = -4Y_1 + 24Y_2 + 10Y_3$$

Entonces:
$$0 \cdot Y_1 + 4 \cdot Y_2 + 3 \cdot Y_3 =$$
$$0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

El beneficio mínimo para que me sirva es de 12 y como 13 > 12 lo produzco.

		Cj	2	8	6	0	0	0	13		
CK	XK	bK	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7		
8	X2	5	1/2	1	2	0	0	0,5	1,5	10/3	
0	X5	4	-1	0	-6	0	1	-2	-2	-	
0	X4		-1/2	0	1	1	0	0,5	1,5	2/3	← out
Z = 40			2	0	10	0	0	4	-1		
									↑ in		

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

8	X2	4	1	1	1	-1	0	0	0
0	X5	16/3	-5/3	0	-11/3	4/3	1	-4/3	0
13	X7	2/3	-1/3	0	2/3	2/3	0	1/3	1
Z =	40,66		5/3	0	32/3	2/3	0	13/3	0

tabla óptima.

3) $$Z_{(MAX)} = 4I_1 + 6I_2 + 5I_3 + 8I_4 + 7I_5 + 6I_6 + 3I_7 + 5I_8 + 4I_9 + 10I_{10}$$

C.N:
$$I_3 + I_4 + I_7 \leq 1$$
$$I_3 - I_6 \leq 0$$
$$I_2 - I_8 \leq 0$$
$$I_1 - I_8 \leq 0$$
$$I_4 - I_{10} = 0$$

$$6I_1 + 6I_2 + 4I_3 + 7I_4 + 5I_5 + 6I_6 + 3I_7 + 5I_8 + 3I_9 + 2I_{10} \leq$$

$$20I_1 + 10I_2 + 10I_3 + 30I_4 + 10I_5 + 40I_6 + 20I_7 + 30I_8 + 25I_9 + 5I_{10} \leq 150$$

$$4I_1 + 6I_2 + 5I_3 + 8I_4 + 7I_5 + 6I_6 + 3I_7 + 5I_8 + 4I_9 + 10I_{10} \geq 25$$

I_i = se acepta o no el proyecto i

TEMA 2

1) $Z(MAX) = 4 \cdot X_1 + 2{,}5 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 1{,}5 \cdot X_4$

C.V: $5 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + 2 X_4 \leq 2000$

$4 \cdot X_1 + 3 X_2 + 2 X_4 \leq 3000$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 700$

X_i = cant. a producir del producto i

		C_j	4	2,5	3	1,5	0	0	0	
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
0	X_7	300	1,5	0	1	0	0,5	0	1	
0	X_6	0	-3,5	0	-6	-1	-1,5	1	0	
2,5	X_2	1000	2,5	1	2	1	0,5	0	0	
Z =		2500	2,25	0	2	1	1,25	0	0	
				Y_4	Y_5	Y_6	Y_1	Y_2	Y_3	

a) Aplicando la matriz inversa.

$5 X_1 + 2 X_2 + 4 X_3 + 2 X_4 + X_5 = 2000$

$4 X_1 + 3 X_2 + 2 X_4 + X_6 = 3000$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_7 + \mu_1 = 700$

Busco la matriz inversa en la t. óptima abajo de los vectores canónicos de la 1° los cuales están en:

$$\begin{array}{cccc} A_5 & A_6 & A_7 & \mu_1 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cambio de signo el vector de A_7 después.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & -1 \\ -1{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• $B_K = \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 700 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$ • $A_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -3{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$

• $A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ • $A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$

• $A_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Contribución unitaria mínima de un producto nuevo E, para que sea conveniente producido

$$5 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 = 5 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot 0 = 6{,}25$$

Al colocarlo en la tabla óp. A_8 será menor o igual a 0 y así el producto E entra a la base.

c) Límites sup. e inferior del beneficio unitario de B dentro de los cuales se mantiene sin modif. la óptima.

	MAX	MIN
Sup		
Inf		

$B_{lim\ sup}$ = no existe, no hay ningún d_i $\ominus$

$B_{lim\ inf} = 2,5 - \frac{2,25}{2,5} = 1,6$

d) Determinar si se altera la estructura de la solución óptima del dual si se introduce una R de 300 l/mes de carburante.

$1 \cdot X_1 + 7 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + 3 \cdot X_4 =$
$1 \cdot 0 + 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 7000$

Como $7000 > 300$ se modifica la estructura óptima del dual porq. es restrictiva

3)

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	
A	5	3	0	1	1	1	2	1			≥ 30
B		1		2	1			1			≥ 25
C			1		1	2					≥ 10
D							1	1	1	2	≥ 20
Desilado	1	3	1	5	3	1	5	8	5	1	

total de rol = 51

Desecho $\leq$ 51 $\quad$ $Z_{MIN} \rightarrow N_1 + N_2 + N_3 \ldots + N_9$