MONTENEGRO

Matías Osório

98

10 (D 58)

UCA
IngenieríaIndustrial (5° año)
Investigación Operativa
Cátedra: Ing. Ricardo Carlevari
Lic. Liliana Radice

ALUMNO: MAGDALENA, URIBURU

TEMA 2
Parcial: 03/06/09

40

1. (40 PUNTOS). Una compañía cortadora de cartón recibió 3 órdenes para cortar rollos a lo ancho según se indica a continuación:

Orden	Ancho (metros)	Cantidad de rollos
A	0.50	1000
B	0.70	3000
C	0.90	2000

Esta empresa compra el cartón a ser cortado en dos anchos estándar: 1 y 2 metros, y posteriormente lo corta de acuerdo a lo especificado por cada orden. Formular el problema de determinar los patrones óptimos de corte que minimicen el desperdicio como un modelo de PL (todo sobrante menor de 0.50 metros de ancho es considerado desperdicio).

2. (50 PUNTOS). La empresa PORTA puede fabricar cuatro productos A, B, C y D que utilizan respectivamente 5, 2, 4 y 2 horas de mano de obra y 4, 3, 0 y 2 kg. de materia prima. La disponibilidad semanal de mano de obra es de 2.000 hs. y de materia prima 3.000 kg. La producción mínima (entre todos los productos) es de 700 unidades por semana. Las contribuciones marginales son $ 4; $ 2,5; $3 y $ 1,5 para A, B, C y D respectivamente.
Se dan los datos indicados para la tabla óptima del Simplex. Se pide:

10 a) Completar la última tabla (sin usar Simplex), indicando como se procedió
10 b) Indicar cual debería ser la contribución unitaria mínima que debería tener un producto E para que sea conveniente producirlo, sabiendo que por unidad insume 3 hs. de mano de obra, 1 kg del materia prima y que participa en la restricción de producción mínima.
10 c) Calcular los límites superior e inferior de la disponibilidad de mano de obra dentro de los cuales se mantiene sin modificar la estructura dual de la solución óptima actual.
18 d) Determinar si se altera la estructura de la solución óptima del dual hallada si se introduce una restricción de combustible del que se disponen 3000 litros/mes, si se sabe que cada unidad de producto A, B, C y D requiere, 1, 7, 4 y 3 litros respectivamente. En caso de alterarse, hallar la nueva solución óptima.

ÚLTIMA TABLA DIR.

			4	2,5	3	1,5	0 ↓MO	0 ↓MP	0 ↓(-1)	-M
C_k	X_k	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A7	M1
0	X_7	300	1,5	0	1	0	0.5	0	1	-1
0	X_6	0	-3,5	0	-6	-1	-1.5	1	0	0
1,5	X_2	1000	2,5	1	2	1	0.5	0	0	0
	Z=	2500	2,25	0	2	2,5	1,25	0	0	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3	

y_3 y_2 y_5

10

3. (10 PUNTOS). Considerando los datos del problema anterior, formular las siguientes restricciones de metas: minimizar las horas extras y tratar de que las horas ociosas no sean superiores a 20 horas. Formular el funcional, priorizando la meta 1 por encima de la 2.

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - HE + d_{HE}^- - d_{HE}^+ = 2000$

$HO + d_{HO}^- - d_{HO}^+ = 20$

$Z_{MIN} = P_1 d_{HE}^+ + P_2 d_{HO}^+ \quad P_1 >> P_2$

$X_7 - Y_3$

$X_6 - Y_2$

$X_2 - Y_5$

prod. min. exigida

Σ de los productos

Rollos(1) - R_1 + A + B +

R_1: cant de rollos de 1m a cortar

R_2: " " " " 2m " "

Desp: desperdicio

A, B, C

Σ A, Σ B, Σ C

Parcial - 3/6/9 - TEMA 2

(2)

	MO	MP	
A	5 hh	4 Kg	4 $
B	2 hh	3 Kg	2,5 $
C	4 hh	0 Kg	3 $
D	2 hh	2 Kg	1,5 $

X_i = Variable continua, mayor igual a cero, cantidad producida del producto "i"

$Z_{MAX} \rightarrow 4X_1 + 2{,}5X_2 + 3X_3 + 1{,}5X_4$

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 \leq 2000 \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_4 \leq 3000 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 700 \end{cases}$$

para el dual hago $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq -700$

$Z_{MAX} \rightarrow 4X_1 + 2{,}5X_2 + 3X_3 + 1{,}5X_4 - M\mu_1$

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_5 = 2000 \\ 4X_1 + 3X_2 + 2X_4 + X_6 = 3000 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_7 + \mu_1 = 700 \end{cases}$$

a) Completar la sig tabla (optima) sin usar simplex, indicando como se procede

			4	2,5	3	1,5	0	0	0	
C_K	X_K	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
0	X_7	300	1,5	0	1	0	0,5	0	1	y_3
0	X_6	0	-3,5	0	-6	-1	-1,5	1	0	y_2
2,5	X_2	1000	2,5	1	2	1	0,5	0	0	y_5
Z = 2500			2,25	0	2	1	1,25	0	0	
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3	

1° Completamos los vectores canónicos (los de aquellas variables que están en la base)

2° completamos los c_j y los c_K guiandonos por la función objetivo

3° Cuando obtenemos la matriz inversa observando la tabla óptima. Tenemos que utilizar el opuesto a A_7 o sea $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

NOTA

Por lo tanto, la Matriz Inversa será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -1 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hallar los vectores B, A_1, A_3, A_4

$$B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \qquad A_1 = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

	MO	MP
E	3h	1Kg

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 + 3X_8 \leq 2000 \\ 4X_1 + 3X_2 \quad + 2X_4 + X_8 \leq 3000 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_8 \geq 700 \end{cases}$$

$3y_1 + y_2 + y_3 =$ Contribución unitaria mínima

X_1	Y_4
X_2	Y_5
X_3	Y_6
X_4	Y_7
X_5	Y_1
X_6	Y_2
X_{7}	Y_3

$\Rightarrow$

$y_1 = X_5 = 1,25$

$y_2 = X_6 = 0 \Rightarrow$ Cont. Unit. Mínima $= 3.(1,25) + 1.(0) + 1.(0)$

$y_3 = X_7 = 0$ $\boxed{\text{Cont. Unit. Mínima} = 3,75}$

y_i = valores marginales de $\begin{cases} y_1 = \text{VM de hs de MO} \\ y_2 = \text{VM de kg de MP} \\ y_3 = \text{VM de restricción al mínimo compuesto de producción} \end{cases}$

otra forma de calcular la Contribución Unitaria Mínima:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & -1 \\ -1{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Contribución Unitaria Mínima} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = 3{,}75$$

c) Calcular lím sup e inf de la disponibilidad de mano de obra sin modificar la estructura Dual de la solución óptima actual.

$$\begin{cases} 5y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 2{,}5 \\ 4y_1 - y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1{,}5 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 5y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 + \mu_1 &= 4 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 - y_5 + \mu_2 &= 2{,}5 \\ 4y_1 - y_3 - y_6 + \mu_3 &= 3 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_7 + \mu_4 &= 1{,}5 \end{aligned}$$

$$Z_{MIN} \rightarrow 2000y_1 + 3000y_2 - 700y_3 \qquad Z_{MIN} \rightarrow 2000y_1 + 3000y_2 - 700y_3 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3 + M\mu_4$$

NOTA

C_K	Y_K	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
			2000	3000	-700	0	0	0	0	3000
2000	Y_1	1,25	1	1,5	-0,5	0	-0,5	0	0	3,5
0	Y_4	2,25	0	3,5	-1,5	1	-2,5	0	0	16,5
0	Y_6	2	0	6	-1	0	-2	1	0	10
0	Y_7	1	0	1	0	0	-1	0	1	4
			0	0^*	-300	0	-1000	0	0	-4000

x_1	Y_4
x_2	Y_5
x_3	Y_6
x_4	Y_7
x_5	Y_1
x_6	Y_2
x_7	Y_3

Entonces, calculo los lím sup e INF de la variable Y_1 (X_5)
Es una variable básica y el problema es de MIN
Entonces, hago:

	MAX	MIN
SUP	−	+
INF	+	−

$$b_{1_{sup}} \text{ ó } C_{5_{sup}} = 2000 + \left(\frac{0}{1,5}\right) = \boxed{2000}$$

$$b_{1_{INF}} \text{ ó } C_{5_{INF}} = 2000 - \left(\frac{-300}{0,5}\right) = \boxed{1400}$$

d)

$$X_1 + 7X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 3000 \Rightarrow \text{Nueva Restricción}$$

En nuestra solución óptima $\Rightarrow X_1 = 0;\ X_2 = 1000,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0$
Entonces,

$$1.(0) + 7.(1000) + 4.(0) + 3.(0) = 7000$$

$$7000 \not\leq 3000 \text{ (NO SE CUMPLE)}$$

por lo tanto se altera la solución óptima !!

NOTA

Hallo el valor del vector y_B en la tabla óptima dual:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{Valor de } y_B \text{ en la tabla óptima dual}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ -1 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Saco los valores ya que se que:

μ_1 es la inversa de Y_4
μ_2 " " " " Y_5
μ_3 " " " " Y_6
μ_4 " " " " Y_7

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 16{,}5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \circledast_1$$

Vemos que el $Z_j - C_j$ es igual a 4000, al estar minimizando este debería ser negativo, por lo que se procede a calcular la tabla óptima nueva al incluir esta restricción. Entonces con el pivote 16,5 busco hasta llegar a la tabla óptima.

NOTA

(1)

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}		
A) 0,5	2			4		2	2		1	≥ 1000	$(*)_A$
B) 0,7		1				1		1	2	≥ 3000	$(*)_B$
C) 0,9			1		2		1	1		≥ 2000	$(*)_C$
DESPERDICIO < 0,5	0	0,3	0,1	0	0,2	0,3	0,1	0,4	0,1	$Z_{MÍN}$	

X_{ij} = Variables Enteras

X_{1j} = Cantidad de cortes de rollos de 1 m de la forma j

X_{2j} = " " " " " de 2 M " " " j

$(*)_A$ $2X_{11} + 4X_{21} + 2X_{23} + 2X_{24} + X_{26} \geq 1000$

$(*)_B$ $X_{12} + X_{23} + X_{25} + X_{26} \geq 3000$

$(*)_C$ $X_{13} + 2X_{22} + X_{24} + X_{25} \geq 2000$

$Z_{MÍN} \rightarrow 0X_{11} + 0{,}3X_{12} + 0{,}1X_{13} + 0X_{21} + 0{,}2X_{22} + 0{,}3X_{23} + 0{,}1X_{24} + 0{,}4X_{25} + 0{,}1X_{26}$

(3)

$Z_{MÍN} \rightarrow P_1\, d_{HE}^{+} + P_2\, d_{HO}^{+}$

$\begin{cases} HE = \text{horas extras} \\ HO = \text{horas ociosas} \end{cases}$

MO) $5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 2X_4 - HE + d_{HE}^{-} - d_{HE}^{+} = 2000$

HO) $HO + d_{HO}^{-} - d_{HO}^{+} = 20$

$P_1 \gg P_2$

NOTA