

Seminario de ingreso

**EJERCICIOS
EXPLICADOS**

**De Ailen Soledad
Duarte**

Duarte, Ailen Soledad

Ejercicios Explicados, Seminario de Ingreso Modulo B

3º edición, Buenos Aires, Año 2015

Impreso en los talleres de Cooperativa de Trabajo El Zócalo

Editado por: Gudar, Matías; Cristian Gotte

Arte de tapa: Bambi Designs

©Ailen Soledad Duarte

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del autor

"La única lucha que se pierde,
Es la que se abandona"

Prologo

Como estudiantes de la Universidad Tecnológica Nacional e integrantes de la Agrupación Estudiantil 19 DE AGOSTO, queremos darte la bienvenida a la Facultad Regional Buenos Aires.

Imaginamos que esta nueva etapa que comenzás está llena de preguntas e interrogantes. Esperamos que juntos, transitando este camino de convertirnos en profesionales de la ciencia y la tecnología los vayamos resolviendo. Pero hay una pregunta que nosotros nos hacemos constantemente y que consideramos de suma importancia buscarle una respuesta, y es: ¿Cuál es el rol del ingeniero dentro de la sociedad de la cual formo parte?

Para otras profesiones quizás es más claro. Todos sabemos que un médico debe curar a la población. Pero en este caso es un poco más difícil, ¿dónde entramos los ingenieros?

Nos hacemos estas preguntas porque para nosotros es tan importante aprender los contenidos puros de la carrera como también conocer las incidencias que nuestras futuras acciones como profesionales podrán tener en la sociedad en la que vivimos.

La tecnología hace al mundo, y son los científicos y tecnológicos quienes la idean, la aplican y deben cuestionarla para mejorarla.

Creemos que la ingeniería es una disciplina fundamental para relacionar el conocimiento con la innovación productiva, lograr consolidar el desarrollo industrial y disminuir los niveles de dependencia tecnológica extranjera.

Para nosotros un ingeniero debe poner sus valores individuales al servicio de la sociedad futura que desea, arraigado siempre en un fuerte paradigma de solidaridad y compromiso moral.

Por otro lado, estudiamos en una Universidad pública y gratuita, siendo la misma sociedad la que nos brinda la posibilidad de formarnos en ella.

La Universidad Tecnológica Nacional, nuestra universidad, es la única universidad federal de nuestro país, con 29 Facultades Regionales distribuidas en todo el territorio argentino. Se dictan diariamente 15 especialidades de ingeniería distintas, cursadas por más de 70.000 estudiantes que equivalen al 50% del total de estudiantes de ingeniería del país.

El 19 de Agosto de 1948 durante el primer gobierno del General Juan Domingo Perón fue sancionada la Ley 13.229 que dio origen a la Universidad Obrera Nacional, luego Universidad Tecnológica Nacional. En el Artículo 10 de esta ley se establece como finalidad "Formación integral de profesionales de origen obrero destinados a satisfacer las necesidades de la industria nacional".

Por ese día, es que elegimos 19 de Agosto, como nombre de nuestra Agrupación Estudiantil.

Porque nos parece importante siempre reivindicar nuestros orígenes, como Universidad Obrera, que además de formar profesionales altamente calificados de la ciencia y la técnica para servir al desarrollo industrial de la Nación, forme personas bajo un paradigma de solidaridad y compromiso con el otro.

Nuestras banderas son la Independencia Económica, Soberanía Política y Justicia Social. Por ellas trabajamos día a día con los estudiantes, dentro de las aulas y en los consejos. Para hacer de nuestra Universidad, una Universidad con libre acceso al conocimiento y al alcance de todos

19 de Agosto
Agrupación Estudiantil



Índice

Ejercicios Módulo I Página 11

Ejercicios Explicados Modulo I Página 33

Ejercicios Módulo II..... Página 193

Ejercicios Explicados Modulo II..... Página 211

MODULO

I

Conjuntos numéricos

Desigualdades

Modulo

Exponentes y raíces

Propiedades de la potencias

Radicación

Geometría

Polinomios

Factorización

Ecuaciones polinómicas

Ecuaciones fraccionarias

Ecuaciones irracionales

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de eliminación de gauss

Funciones

Propiedades y operaciones de funciones

Variación directa en inversa

Funciones trascendentes

EJERCICIO Nº 1

Sea el polinomio $p(x) = (x - 1)(3x^2 + 24x + 36)$ y la identidad

$$\frac{p(x)}{x^4 + 7x^2 + 10} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{x+C}{x^2+5} \text{ Halle A B y C y factorice a P(x) en factores primos.}$$

Respuesta: A = 2, B = -26, C = 47 y $p(x) = 3 * (x - 1)(x + 2)(x + 6)$.

EJERCICIO Nº 2

Halle los valores de a y b (reales) de forma que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} x + Ay = A \\ -By = B \end{cases}$$

Respuesta: CD: $B \neq 0 \wedge A \in \mathbb{R}$; CI: $B = 0 \wedge A \in \mathbb{R}$ y INCOMPATIBLE: \emptyset .

EJERCICIO Nº 3

Determine los valores reales de k para que la ecuación $x^2 - k(x - 2) = 0$ admita dos raíces reales distintas.

Respuesta: Si $k \in (8; \infty)$ la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.

EJERCICIO Nº 4

Racionalice los denominadores en cada una de las siguientes dos expresiones

$$\frac{y - x^2}{x + \sqrt{y}}, \quad \frac{81x^2 - y}{9x + \sqrt{y}}$$

Luego determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \frac{y-x^2}{x+\sqrt{y}} = 15 \\ \frac{81x^2-y}{9x+\sqrt{y}} = 73 \end{cases}$$

Respuesta: $x = 11$ $y = 676$

EJERCICIO Nº 5

Dados $p(x) = ax^3 + ax^2 + 7x + b$, $q(x) = x - 1$, $r(x) = x + 3$.

Determine los valores reales de a y b para que $p(x)$ sea divisible por $q(x)$ y $r(x)$.

Respuesta: Si $a = -\frac{7}{5}$ y $b = -\frac{21}{5}$ $p(x)$ es divisible por $q(x)$ y $r(x)$.

EJERCICIO Nº 6

El área de un hexágono regular es de $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calcular la medida del lado.

Respuesta: El lado del hexágono de $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$ es de 10cm.

EJERCICIO Nº 7

Determine los valores reales de h y k si se sabe que

$f: (-5, 5) \rightarrow \mathbf{R}/f(x) = (x - h)^2 + k$ es una función par y $f(4) = 7$.

Respuesta: Los valores son $k = -9$ y $h = 0$.

EJERCICIO Nº 8

Determine Dominio y ceros de $f(x) = \log(x - 2) + \log x - \log 8$.

Respuesta: El dominio de la función son los reales positivos ($D_f = \{(0; \infty)\} = \mathbf{R}^+$) y su conjunto de ceros esta en $x = 4$ ($C_{\text{ceros}} = \{4\}$).

EJERCICIO Nº 9

Sea la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + k = 0$. Determine los valores reales de la constante real k tal que la mayor de sus dos raíces reales es menor que 6.

Respuesta: $k \in (-54; \infty)$.

EJERCICIO Nº 10

Determine los valores reales de k tal que el polinomio p(x) tenga dos raíces reales distintas, si sabe que: $d(x) = 2x - 27$, $e(x) = -3x + 9$ y $r(x) = 27k$ son los polinomios divisor, cociente y resto respectivamente de la división entre p(x) y d(x).

Respuesta: Si $k \in (-6.125; \infty)$, p(x) tiene dos raíces reales.

EJERCICIO Nº 11

Determine el conjunto solución de $\left|1 - \frac{2x}{3}\right| < 1$.

Respuesta: $S = (0; 3)$.

EJERCICIO Nº 12

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 2cm mas de largo que un cateto y 4 cm más que el otro cateto, determine el área del triángulo

Respuesta: El area es de 24cm^2

EJERCICIO Nº 13

Halle el conjunto solución de la ecuación $\left|\frac{2}{x} + 1\right| > 2$

Respuesta: $\left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (0; 2)$.

EJERCICIO N° 14

Dadas las funciones: $f: D_f \rightarrow R/f(x) = C * a^x$ donde $a > 0$ y $f(0) = 3$ y $f(2) = 12$, y **g es una funcion lineal tal que** $g(1) = -1$ y $g(-1) = 2$, **defina las funciones.**

Respuesta: $f(x) = 3 \cdot 2^x$ y $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

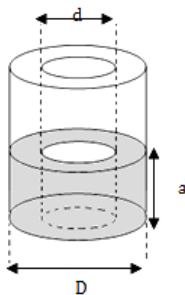
EJERCICIO N° 15

Encuentre, si existen, los ceros de la función

$h: D_h \rightarrow R/h(x) = 16^{(x^2-4)} - 32^{(2x-2)}$.

Respuesta: Los ceros de la función están en $x = 3 \wedge x = -\frac{1}{2}$.

EJERCICIO N° 16



Sea un recipiente de forma cilíndrica hueca de diámetro menor $d = 64\text{cm}$, como muestra el dibujo. Este contiene el 40% del total de un líquido que alcanza la altura $a = 123\text{cm}$, con un volumen de $915120 \pi \text{ cm}^3$ ¿Cuál es el diámetro D mayor?.

Si un kilogramo de líquido ocupa 738cm^3 de volumen ¿Cuántos kg faltan para llenar recipiente?.

Respuesta: $D = 184 \text{ cm}$ y Para llenar el recipiente faltan $1860 \pi \text{ kg}$

EJERCICIO N° 17

Determine la altura de un cono si se sabe que el área total es $125\pi\text{cm}^2$ y el radio de la base es 5 cm .

Respuesta: altura = $5\sqrt{15}$

EJERCICIO N° 18

Determine el perímetro de un cuadrado si sabe que el área del cuadrado que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados del primero es 64m^2 .

Respuesta: El perímetro del cuadrado grande es de $32\sqrt{2} \text{ cm}$.

EJERCICIO N° 19

En un campeonato de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas, ¿cuántos jugadores son? .

Respuesta: En el campeonato participaron 10 maestros.

EJERCICIO N° 20

Se sabe que la población de una ciudad era de 385 000 habitantes en 1960 y 510 000 habitantes en 1970 .Si el crecimiento poblacional puede aproximarse por $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$, donde N_0 es la población inicial, k es constante y t es el número de años después de 1960. ¿Cuántos habitantes tuvo esta ciudad en el año 2000?.

Respuesta: La población en el año 2000 fue aproximadamente de 1185172 personas.

EJERCICIO N° 21

A un cuadro al oleo de 1.5m de largo por 90cm de alto se le pone un marco rectangular. El area total del marco y el cuadro es de 1.6 m^2 ¿Cuál es el ancho del marco?.

Respuesta: El ancho del marco es de 0.05m o lo que es lo mismo 5cm.

EJERCICIO N° 22

Un hombre al morir deja una herencia de 60.000\$ para repartir entre cierto número de herederos, pero 2 de éstos no reclaman su parte entonces la herencia de cada uno de los demás resulta aumentada en 1000\$. ¿Cuántos herederos había originalmente?.

Respuesta: Originalmente había 12 herederos.

EJERCICIO N° 23

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{(X^{-2}) - (Y^{-2})}{(X^{-1}) + (Y^{-1})}$$

Respuesta: La expresión factorizada resulta $\frac{(Y-X)}{XY}$.

EJERCICIO N° 24

Hallar A B y C tal que: $\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

Respuesta: A = 4, B= -1, C = 2.

EJERCICIO N° 25

Para hacer una caja de base rectangular y sin tapa se utiliza una lamina de material de 12 cm por 18 cm cortando un cuadrado de lado "x" de cada esquina y doblando los lados. Expresé el volumen $V(x)$ de la caja y encuentre el dominio de V.

Respuesta: V: (0; 6) → R/ $V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x$.

EJERCICIO N° 26

El cociente entre los enteros a y b es 35 y el producto de los enteros consecutivos (correspondientes a a y b) es 1477. Obtenga dichos números enteros.

Respuesta: A = 210 y B = 6.

EJERCICIO N° 27

Resuelva la siguiente ecuación: $\text{Log}8 + (x^2 - 5x + 7)\text{Log}3 = \text{Log}24$

Respuesta: x=2 y x = 3.

EJERCICIO N° 28

En un pueblo de 6000 habitantes se casaron el 15% de las mujeres con el 10% de los hombres. ¿Cuántos matrimonios se formaron?.

Respuesta: Se formaron 360 matrimonios.

EJERCICIO N° 29

Hallar A B y C tal que: $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$

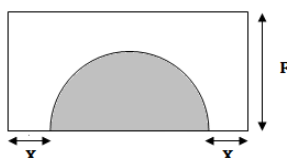
Respuesta: A = $-\frac{1}{2}$ B = $\frac{1}{2}$ y C = $\frac{1}{2}$.

EJERCICIO N° 30

Factorice el polinomio Mónico $p(x)$, de tercer grado, si se sabe que dos de sus ceros son los del polinomio: $q(x) = 6x^2 + x - 1$. y $p(1) = 3$.

Respuesta: $p(x) = (x - \frac{1}{3}) * (x + \frac{1}{2}) * (x + 2)$.

EJERCICIO N° 31



En un terreno rectangular, de 92 m de frente y $F = 18\pi$ m de fondo se emplea una zona semicircular para instalar puestos de comidas. El área de la parte restante es 774π m². Calcule la longitud de x.

Luego se compra a \$108 el metro cuadrado de un tipo de baldosas ¿Cuál es el costo de embaldosar la zona semicircular de comidas si además se debe comprar un 14% más de la zona a cobrar?.

Respuesta: x = 4m y el costo de embaldosar es de \$341151.33.

EJERCICIO N° 32

En el centro de una fogata la temperatura es de $C^{\circ}400$. A una distancia x del centro, la temperatura es $T(x) = \frac{32400}{x^2+c}$. ¿En qué intervalo de distancias desde el centro la temperatura es menor a 144° ?

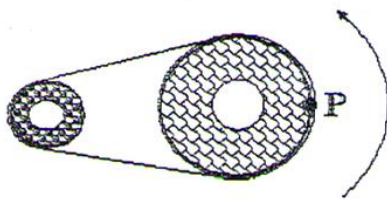
Respuesta: La temperatura es menor a los 144° cuando la distancia supera los 12m o lo que es lo mismo, cuando pertenece al intervalo $(12; \infty)$.

EJERCICIO N° 33

Un círculo tiene 26cm de diámetro ¿En qué porcentaje debe disminuir el radio para que el área disminuya en $101,76\pi\text{cm}^2$?

Respuesta: El radio debe disminuir un 36,92%

EJERCICIO N° 34



Una correa conecta dos poleas de radio 15 cm y 38 cm respectivamente; si la de menor área da un giro completo, ¿Qué ángulo expresado en grados minutos y segundos giró el punto P de la polea mayor respecto del centro?

Respuesta: El punto P giro $142^{\circ} 6' 18.95''$ respecto de su centro.

EJERCICIO N° 35

Dadas las funciones: $h: D_h \rightarrow R/h(x) = \sqrt{|5-x| - |x+2|}$ y $t: D_t \rightarrow R/t(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$. Determinar $D_h \cap D_t$.

Respuesta: $D_h \cap D_t = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

EJERCICIO N° 36

Sean: $h: D_h \rightarrow I_h/h(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $t: D_t \rightarrow I_t/t(x) = \frac{1}{|x-4|-4}$. Obtenga $D_h \cap D_t$.

Respuesta: $D_h \cap D_t = (-1; 0) \cup (0; 1)$.

EJERCICIO N° 37

Dada $g: R \rightarrow R/g(x) = e^{2x+3} - e^{4x+3} + 2e^3$ Obtenga si existen los ceros de dicha función.

Respuesta: El único 0 de la función se encuentra en $\frac{\ln(2)}{2}$.

EJERCICIO N° 38

Hallar el polinomio $P(x)$ de grado mínimo y tal que:

- a) es reducido, tiene raíces simples en -1 y 3, y tiene una raíz doble 6
- b) tiene raíces simples en 2 y -2, $P(-1)=3$

Respuesta: a) $P(x) = x^4 - 14x^3 + 57x^2 - 36x - 108$ b) $P(x) = -3x^2 + 6$

EJERCICIO N° 39

Determine el dominio de la función $g: Dg \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = \frac{2^x}{\sqrt{|\ln|x(x-3)+1|}}$

Respuesta: $Dg = (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$.

EJERCICIO N° 40

Determine la ecuación de la asíntota vertical de la función $f: Df \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \frac{ax+2}{bx-5}$

Si se sabe que su gráfica contiene al punto (1,6) y la ecuación de su asíntota horizontal es $y=3$.

Respuesta: La ecuación de la asíntota vertical es $x = \frac{15}{32}$.

EJERCICIO N° 41

Hallar $(f \circ g)^{-1}(x)$ si se conoce: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 2x - 3$ y
 $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}/g(x) = \frac{x}{x+2}$.

Respuesta: $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-2x-6}{(x+1)}$.

EJERCICIO N° 42

Los biólogos han observado la frecuencia de los cantos de los grillos de una cierta especie, está relacionada en forma lineal con la temperatura. Un grillo produce 120 sonidos por minuto a 21°C y 168 sonidos a 23°C.

- a- Hallar la ecuación lineal que relaciona la temperatura y el número de sonidos por minuto.
- b- Indicar que representa la pendiente en la ordenada de la recta.
- c- Estimar la temperatura para 150 sonidos por minuto.

Respuesta: La ecuación que relaciona frecuencia con temperatura es $\text{Frecuencia} = 24 * \text{Temperatura} - 384$. La pendiente es 24 y simboliza cuantas unidades varia la temperatura con respecto a la una unidad de frecuencia y la frecuencia a 22.25° es de 150 sonidos por minuto.

EJERCICIO N° 43

Para una pequeña empresa de manufacturas el costo unitario expresado en pesos para producir x unidades, se expresa como: $C(x) = x^2 - 120x + 400$

- a- Cuántos artículos hay que producir para reducir al mínimo al costo unitario.
b- Cuál es ese costo mínimo.
c- Qué representa la ordenada al origen.

Respuesta: El costo mínimo se produce al fabricar 60 productos y es de \$3280
La ordenada al origen simboliza cuánto vale la función cuando la variable x es cero, en este caso representa el costo de no producir ningún producto. Es decir que la fábrica sin funcionar tiene un gasto de \$400.

EJERCICIO N° 44

Las rectas de ecuación $y = P(x) = 2x - 20$ e $y = q(x)$ se cortan en un punto de abscisa 4 y una de ellas tiene pendiente 6.

Determine la función inversa de $f: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{m\} / f(x) = p(x)/q(x)$.

$$\text{Respuesta: } f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{6\} / f^{-1}(x) = \frac{-10+18x}{3x-1}$$

EJERCICIO N° 45

Sea una función cuadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 + Bx + C$, se sabe que la suma de los ceros es 4 y el producto de ceros es 1. Determine el conjunto imagen de f .

Respuesta: Imagen de $f = (-3; \infty)$.

EJERCICIO N° 46

Sea $y = 3x^2 - Kx - 1$ la ecuación de una curva parábola e $y = Kx - 2$ la de una recta. Deduzca K (constante real) Tal que la parábola y la recta no se intersequen.

Respuesta si $K \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ La recta y la parábola no se cortan.

EJERCICIO N° 47

Halle $f(x)$ sabiendo que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x+1) = x^2 - 3x + a$ y $f(0) = 6$,

luego exprese por extensión el conjunto $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge \log(x-2 |f(x)|) = 2\}$.

Respuesta: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 5x + 6$ y $A = \{x = 9.25 \vee x = -4.75\}$.

EJERCICIO N° 48

Un hexágono regular tiene un lado de longitud igual a 20 cm ¿En cuántos cm disminuye su lado si su área disminuye en $216\sqrt{3}\text{cm}^2$?.

Respuesta: Si el área desciende en $216\sqrt{3}\text{cm}^2$ El lado desciende en 4cm.

EJERCICIO N° 49

Un alambre de 100cm de longitud se corta en dos partes. Cada una de estas partes se dobla formando dos cuadrados tales que la suma de las áreas de ambos cuadrados es 325 cm². ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes en las que se cortó el alambre?.

Respuesta: Uno de los trozos mide 60cm y el otro 40cm.

EJERCICIO N° 50

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, a diferente de 0, alcanza en $x = -2$ y en $x = 4$ el valor 10. Si la ordenada al origen es 2, determine la fórmula de f .

Respuesta: $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

EJERCICIO N° 51

El coeficiente principal de un polinomio de grado 3 es 4, el término independiente es -16, si $x_1 = 2$ es raíz doble, encuentre el polinomio.

Respuesta: $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 32x - 16$.

EJERCICIO N° 52

Un químico tiene 2 soluciones, cada una contiene un cierto porcentaje de ácido. Si una solución tiene 40% de ácido y la otra 70%. ¿qué cantidad de cada una debe mezclarse para obtener 75 mililitros de una solución que contenga 60% de ácido?.

Respuesta: Debemos mezclar 25 mililitros de solución 1 y 50 de la solución 2 para obtener 75 mililitros de solución con 60% de ácido.

EJERCICIO N° 53

Determine el Dominio A de f siendo $f: A \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{\left|\frac{1}{x} + 3\right| - 4}$.

Respuesta: $Df = \left\{x/x \in \left(\left[-\frac{1}{7}; 0\right) \cup (0; 1] \right)\right\}$.

EJERCICIO N° 54

Sea un rectángulo cuya área es $(-7x^3 + 4x^2 - 63x + 36)$ y su base mide $(x^2 + 9)$, determine los números x tal que su altura sea menor a 100 unidades.

Respuesta: Para que la altura sea menor a 100 unidades la x debe ser mayor a $-\frac{96}{7}$ unidades.

EJERCICIO N°55

Un cuerpo a 90°C se coloca en un cuarto que esta a una temperatura de 30°C . A la media hora la temperatura del cuerpo descendio a 55°C . La ley de enfriamiento del cuerpo responde a $T(t) = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt}$, donde T_a es la temperatura ambiente, T_o es la temperatura inicial del cuerpo y t se mide en horas. Cuanto tiempo habra de transcurrir para que el cuerpo este a una temperatura de 40°C ?

Respuesta: A la 1.023 horas el cuerpo se halla a 40°C .

EJERCICIO N° 56

Determine los valores reales de k para que la ecuacion $x^2 + 8x + k = 0$, sea tal que la suma de los cuadrados de sus raices sea 34.

Respuesta: Si $k = 15$ la suma de los cuadrados de las raices es 34.

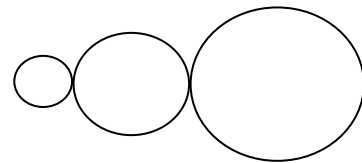
EJERCICIO N° 57

Calcule el radio de un recipiente cilindrico, si se sabe que dicho radio es la cuarta parte de la altura, y que si se llena hasta el 25% cabe aun $32 \pi \text{ cm}^3$.

Respuesta: El radio del cilindro mide aproximadamente 2.2 cm.

EJERCICIO N° 58

Los radios de las tres circunferencias son enteros consecutivos y el area total (del poligono unión de los tres círculos) es de $434 \pi \text{ cm}^2$. Deduzca la longitud de la circunferencia de mayor diámetro.



Respuesta: La longitud de la circunferencia de mayor diámetro es de 26π .

EJERCICIO N° 59

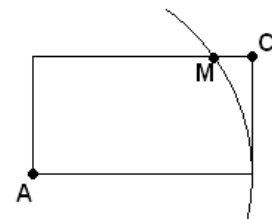
Determine el polinomio monico de tercer grado $p(x)$, de tres raíces reales distintas si se sabe que es divisible por $q(x) = x+4$, la suma de sus tres raíces es 18 y el producto de solo dos de ellas es 117.

Respuesta: $p(x) = x^3 - 18x^2 + 29x + 468$

EJERCICIO N° 60

Aumentando la base de un rectángulo en 6m y la altura en 4m, el area aumenta en 240m^2 , en cambio, aumentando la base en 2m y la altura en 9m, el area aumenta en 320m^2 .

Calcule la longitud de la base y la altura del rectángulo.



Luego si se traza un arco de circunferencia (con centro en A) u se tiene el punto M, determine la distancia de este al punto C.

Respuesta: La distancia de M a C es de 4.623m.

EJERCICIO N° 61

Dadas f y h en cada caso determine $f \circ h(x)$ y $h \circ f(x)$, indicando el dominio correspondiente.

$$f(x) = |x|$$

$$h(x) = \log x$$

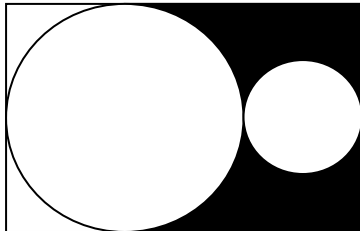
Respuesta: $f \circ h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f \circ h(x) = |\log x|$ y $h \circ f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} / h \circ f(x) = \log|x|$.

EJERCICIO N° 62

Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación $\frac{65}{x^2} - \frac{14}{x} \geq -1$.

Respuesta: La solución es el conjunto de los números Reales menos el cero.

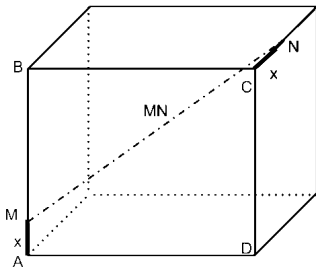
EJERCICIO N° 63



Las circunferencias son tangentes entre si y a los lados del rectángulo; además, un diámetro es el doble del otro, calcule el porcentaje del área de la región sombreada con respecto a la del rectángulo.

Respuesta: El área sombreada es aproximadamente el 27.4 % del área total.

EJERCICIO N° 64



Sea un cubo de 216dm^3 de volumen

Determine la función: $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = MN$

La longitud del segmento MN en función de x - longitud de $CM=AN$.

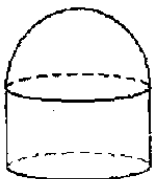
No olvide indicar el conjunto dominio \mathbb{D} con $x > 0$

M y N representan cualquier punto en las aristas CD y AB

Luego halle los x tal que $f(x) \leq \sqrt{\frac{117}{2}}$.

Respuesta: $MN = f: (0, 6] \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 72}$ y $f(x) \leq \sqrt{\frac{117}{2}}$ si $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

EJERCICIO N° 65



$2880\pi \text{ cm}^3$ es el volumen del sólido constituido por una semiesfera y un cilindro cuya altura coincide con el radio de la semiesfera.

Determine el radio de la semiesfera y el área total del cuerpo, incluida la base.

Respuesta: El radio de la semiesfera mide 12 cm y el área total del cuerpo es $720\pi \text{ cm}^2$.

EJERCICIO Nº 66

Determine el conjunto solución de $|x + 1|^2 < |x + 1| + 2$

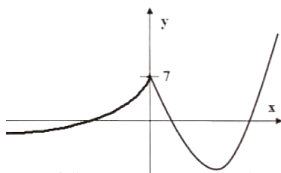
Respuesta: S = (-3; 1).

EJERCICIO Nº 67

Sea la función sobreyectiva $h: \mathbf{R} \rightarrow (-\infty; 726] / h(x) = -6(x + 5)^2 + d$ Exprese el conjunto $\{x/x \in \mathbf{R} \wedge h(x) < 0\}$

Respuesta: S = (-∞;-16) U (6;∞).

EJERCICIO Nº 68



Se represento la curva grafica $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{x-1} & , x < 0 \\ x^2 - 8x + c & , x \geq 0 \end{cases}$

Deduzca las coordenadas del vértice del tramo parabolico de la curva representativa. Luego halle las constantes a y b si se sabe que el tramo hiperbolico ($x < 0$) Posee una recta asíntota en $y = -2$. Por ultimo determine los ceros de f

Respuesta: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = \begin{cases} \frac{-2x-7}{x-1} & , x < 0 \\ x^2 - 8x + 7 & , x \geq 0 \end{cases}$ Y sus ceros están en $x = -\frac{7}{2}$, $x = 1$ y $x = 7$.

EJERCICIO Nº 69

Sea la función biyectiva $f: \mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{B} / f(x) = \frac{2^x-9}{2^x-k}$ determine $f^{-1}(x)$

Respuesta: $f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{4x-9}{x-1} \right)$.

EJERCICIO Nº 70

Determine el conjunto solución de $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} = -1$

Respuesta: Como la única solución encontrada no verifica, la ecuación no tiene solución.

EJERCICIO Nº 71

Encuentre el conjunto solución de $\sqrt{2x+11} - x - 4 = 0$

Respuesta: x = -1.

EJERCICIO Nº 72

Encuentre el conjunto solución de $\frac{1}{x+3} > -(x+1)$

Respuesta: S = (-3; -2) U (-2 ; ∞).

EJERCICIO N° 73

Cuando dos personas hacen un trabajo de forma independiente a una de ellas le toma 3 hs menos que a la otra. Cuando ambas trabajan juntas les toma dos horas completar la tarea. ¿Cuánto tiempo le toma a cada una hacer el trabajo sola?

Respuesta: La primera persona tarda 6 horas y la segunda tres horas menos, es decir tres horas en hacer un trabajo completo.

EJERCICIO N° 74

Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación: $e^{\ln x} - 3e^{-\ln x} = 2$

Respuesta: $x = 3$.

EJERCICIO N° 75

Determine p y q si sabe que $3/2$ y $-1/2$ son raíces de la ecuación: $3px^2 - (5q + 1)x + 1 = 0$

Respuesta: $p = -\frac{4}{9}$ y $q = -\frac{7}{15}$.

EJERCICIO N° 76

Halle el conjunto solución de: $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} \geq 1$

Respuesta: $\{0\} + (1;2)$.

EJERCICIO N° 77

Halle el conjunto solución de: $\frac{x^2+9}{x^2-9} - \frac{x}{x-3} = \frac{3}{x+3}$

Respuesta: \emptyset .

EJERCICIO N° 78

Determine la longitud de la diagonal menor de un rombo si su área es $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$ y el lado mide $\sqrt{3} \text{ cm}$

Respuesta: La diagonal menor mide 2cm y la mayor mide $2\sqrt{2} \text{ cm}$.

EJERCICIO N° 79

Halle el conjunto solución de $|9 - x^2| > 10$

Respuesta: $(-\infty; -\sqrt{19}) \cup (\sqrt{19}; \infty)$.

EJERCICIO N° 80

Encuentra el conjunto solución de $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4} = 2$

Respuesta: $x = 5$ v $x = 13$.

EJERCICIO Nº 81

Simplifique y exprese conjunto de existencia $\frac{\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}}$

Respuesta: la expresión resulta -1 y las condiciones de existencia son $a \neq 0$ y $b \neq 0$

EJERCICIO Nº 82

Determine los ceros de $f: D_f \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = |\log(3x - 1)| - 1$.

Respuesta: $x = \frac{11}{3}$ \vee $x = \frac{11}{30}$.

EJERCICIO Nº 83

Se sabe que 2 y -2 son raíces de $x^3 + 3x^2 + hx + k = 0$, encuentre h y k y determine la tercera raíz.

Respuesta: $h = -4$, $k = -12$ y la tercera raíz es $x = -3$.

EJERCICIO Nº 84

Determine la cantidad de aluminio necesaria para construir una lata cilíndrica sin tapa, cuya capacidad es $128\pi \text{ cm}^3$, si sabe que el diámetro de la lata coincide con la altura.

Respuesta: Se necesitan $80\pi \text{ cm}^2$ de aluminio.

EJERCICIO Nº 85

Sean $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = -x^2 - (k + 2)x + 1$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = 3x - k$ determine los valores reales de k si se sabe que $h \circ g(-1) = 2$.

Respuesta: $k = -4$.

EJERCICIO Nº 86

El resto de dividir $p(x) = 2x^5 + 7x^3 - 10x + 2$ por $x + a$ es 6. ¿Cuál es el resto de dividir a $p(x)$ por $x - a$.

Respuesta: El resto de dividir a $p(x)$ por $(x - a)$ es -2.

EJERCICIO Nº 87

Halle el conjunto solución de $\log(16 - 3 \log |2x - 4|) = \ln e$.

Respuesta: $x = 52$ \vee $x = -48$

EJERCICIO Nº 88

4 es el resto de dividir el polinomio $p(x) = 3x^2 - kx - 32$ por el polinomio monico $x + 3$. Factorice en factores primos el polinomio $q(x) = p(x) - 4$.

Respuesta: $q(x) = 3 * (x - 4) (x + 3)$.

EJERCICIO N° 89

Sea la función biyectiva $h: D_h \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = 5 + \log_3(x + 9)$ Deduzca el dominio de h y el conjunto de ceros de h^{-1} .

Respuesta: El cero de $h^{-1}(x)$ es $x = 7$.

EJERCICIO N° 90

Determine el dominio D_h si sabemos que $h(x)$ tiene dos ceros reales y uno es raíz doble negativa del polinomio $p(x)$.

$$h: D_h \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = \sqrt{p(x)}$$

$$p: D_p \rightarrow \mathbb{R}/p(x) = x^3 - 147x - 686$$

Respuesta: $D_h: [14; \infty) + \{-7\}$.

EJERCICIO N° 91

Factorice en factores primos $p(x)$ si sabemos que es divisible por $(x-5)$ y $(x-8)$ siendo $p(x) = x^4 - 14x^3 + 41x^2 + ax + b$

Respuesta: $p(x) = (x - 4)(x + 3)(x - 5)(x - 8)$.

EJERCICIO N° 92



Sea un recipiente cilíndrico con hoyo semiesférico. Se conoce que el volumen del material es $1125\pi \text{ cm}^3$. Determine el radio de la base. La semiesfera se llena con líquido que tiene una masa de $52/\pi \text{ g}$ cada dm^3 . ¿Cuál es la masa de líquido?

Respuesta: El radio de la base es 15cm y la masa 117g .

EJERCICIO N° 93

Reduzca a la mínima expresión $\sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$

Respuesta: la expresión factorizada resulta $x^3 + \frac{1}{4x^3}$.

EJERCICIO N° 94

Dada la función polinómica de segundo grado $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = -3ax^2 + 4a^2x - 169a$

Se sabe que el número a es cero negativo de g . Halle las coordenadas del punto del vértice de $g(x)$.

Respuesta: Vértice = $(x_{\text{vertice}}; y_{\text{vertice}}) = \left(-\frac{26}{3}; -\frac{2197}{3}\right)$.

EJERCICIO N° 95

Sean las funciones $f: \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{5\}$ / $f(x) = \frac{ax+18}{3x+b}$ y g polinómica de primer grado de dominio $D_g = \mathbb{R} - \{k\}$ tal que existe $f \circ g(x)$ y que $g(3) = -1$, $g(-4) = 20$.

Halle $g(x)$, el cero de $f \circ g(x)$ y las asíntotas de la función compuesta.

Respuesta: La raíz de $f \circ g(x)$ esta en $x = 46/15$.

EJERCICIO N° 96

Se tienen 5 botellas alineadas con líquido dentro. La primera contiene un volumen V de líquido y las demás contienen $\frac{4}{5}$ del volumen del líquido de la botella de su izquierda.. El volumen total de líquido entre todas las botellas es de $\frac{151}{64} \text{ dm}^3$ ¿Cuál es el volumen V de la primera botella?

Respuesta: El volumen aproximado de la primera botella es de 0.7 dm^3 .

EJERCICIO N° 97

El polinomio $p(x) = 5x^2 + (k^2 - 6k - 91)x + (18k + 80)$ con k real, tiene dos raíces reales y opuestas. Determine k .

Respuesta: $k = 7$.

EJERCICIO N° 98

Las raíces reales del polinomio $p(x) = (k^2 - 2k - 8)x^2 - (k^2 - 9)x - 175$ son opuestas. Determine el polinomio diferencia $p(x) - (6x^2 + x)$.

Respuesta: Si $K = -3$ el polinomio tiene raíces reales y opuestas y el polinomio diferencia $p(x) - (6x^2 + x) = x^2 - x - 175$.

EJERCICIO N° 99

Dado el polinomio $p(x) = 8x^4 - 12x^3 + (h + k)x^2 + 23x + h + 7k$, determine h y k si se sabe que 2 y $-3/2$ son raíces simples de $p(x)$

Respuesta: $k = 2$ y $h = -20$.

EJERCICIO N° 100

Dadas las funciones $f: \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{Log}(3x)$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(-1) = 1$ y $g(1) = 5$.

Siendo $g(x)$ una función lineal, determine el conjunto de solución de la inecuación.

$$10^{f(x)} \leq -g^{-1}(x)$$

Respuesta: $S = (-\infty; \frac{3}{7}]$.

EJERCICIO N° 101

Sea la función exponencial $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}g/g(x) = a \cdot b^x + 3$ con $g(1) = 98$ y $g(2) = 478$.
determinar las constantes a y b reales positivos y los conjuntos: Ig y

$$A = \left\{ x/x \in Dg^{-1} \text{ y } 2g^{-1}(x) = \log_b \left(\frac{x+39}{a^2} \right) \right\}$$

Respuesta: $a = 19, b = 5, Ig = (3; \infty), A = \{10\}$.

EJERCICIO N° 102

Sean las funciones biyectivas: $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}/f(x) = \frac{ax+24}{8x+b}$ y g polinómica de primer grado de dominio $\mathbb{R} - \{k\}$ con coeficiente independiente 5 y la correspondiente función compuesta: $f \circ g: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}/f \circ g(x) = \frac{24x+18}{8x+7}$

Determine la función g (con su respectivo dominio). Justifique su respuesta.

Respuesta: $g: \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{8}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-3\}/g(x) = 8x + 5$.

EJERCICIO N° 103

Sean los polinomios $P(x) = x^5 - x^4 - x^2 - x - 4$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$
(Polinomio que tiene una sola raíz real positiva menor a 2), al realizar la DIVISION POLINOMICA de $p(x)$ por $Q(x)$ se tiene resto $r(x)$.

Determine x tal que $\log_x r(x) = 1$.

Respuesta: $x = 3$.

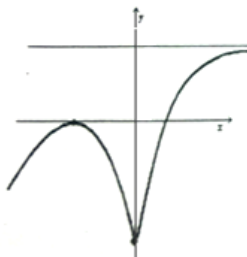
EJERCICIO N° 104

Sea la función cuadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = ax^2 + bx + c$. Halle los coeficientes a, b, c , empleando el método de eliminación de Gauss si se conocen las siguientes imágenes; $f(2)=2$, $f(-3)=57$ y $f(-1)=29$. Luego exprese como intervalo el conjunto A , si

$$A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge g \circ f(x) \leq 13\} \text{ y } g: [-7; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \sqrt[2]{(x+7)}$$

Respuesta: $a = 1, b = -10 \text{ y } c = 18 \quad \wedge \quad A = [-8; 18]$.

EJERCICIO N° 105



Determine las constantes reales k y c , el conjunto imagen y los ceros de g

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{k}x + 3k - 64 & \text{si } x < 0 \\ \frac{16x + c}{x + 2} & \end{cases}$$

A la izquierda se representa la curva grafica de g y la recta asíntota. El tramo de la parábola tiene vértice sobre el eje x

Respuesta: $k = 16, c = -32$, el conjunto imagen es $(-\infty; 16)$ y el conjunto de ceros esta en $x = 2$ y $x = -8$.

EJERCICIO N° 106

Dada $g: [-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = (x + 1)^2 + 1$, determine para que valores de su dominio se cumple que: $2 \leq g(x) \leq 10$.

Respuesta: Para los valores del dominio pertenecientes al intervalo $(-3; -2] \cup [0; 2]$, $2 \leq g(x) \leq 10$.

EJERCICIO N° 107

Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 4 \cdot 3^{2x+1} + 17 \cdot 3^x$, determine $\{x \in \text{Df}/f(x) = 7\}$.

Respuesta: $x = -1$.

EJERCICIO N° 108

Determine dominio de $f: \text{Df} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \text{Ln} \left(\frac{x^3 - 7x^2}{|x^2 - 225|} \right)$.

Respuesta: $\text{Df} = \{ (7; 15) \cup (15; \infty) \}$.

EJERCICIO N° 109

La harina de soja contiene 20% de proteínas y la de maíz 10%. ¿Cuántos kilogramos de cada una de estas se debe mezclar para obtener una mezcla de 400 kilogramos con 14% de proteínas?

Respuesta: Debemos mezclar 240 kg de maíz y 160 kg de soja.

EJERCICIO N° 110

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 2x^2 - 1$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = 4x^3 + cx$ determine la constante c tal que $f \circ g = g \circ f$.

Respuesta: $c = -3$.

EJERCICIO N° 111

Sea $p(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ divisible por $q(x) = x^2 + 4$. Factorice $p(x)$ previa determinación de a y b .

Respuesta: $p(x) = (x^2 + 4)(x + 3)$.

EJERCICIO N° 112

Halle el conjunto solución de:
$$\begin{cases} X - 2Y = 1 \\ -2X + 4Y = -2 \end{cases}$$

Respuesta: $S = \left\{ (X; Y) / (X; Y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (X, Y) = \left(0; -\frac{1}{2} \right) + \alpha \left(1; \frac{1}{2} \right) \wedge \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

EJERCICIO N° 113

El coeficiente principal de un polinomio de grado 3 es 4, el termino independiente es -16, si $X_1 = 2$ es raíz doble, encuentre el polinomio.

Respuesta: $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 32x - 16$

EJERCICIO N° 114

Dadas $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / (g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x + \frac{13}{4}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x^2 + 3$, con f funcion lineal con pendiente positiva, obtenga la formula de f.

Respuesta: $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$.

EJERCICIO N° 115

Hallar para que números reales se verifica que la suma del numero y su reciproco es mayor que 2

Respuesta: La suma de cualquier número real positivo y su reciproco es mayor a 2

EJERCICIO N° 116

El numero de Km(M), que cierto automóvil puede recorrer con un litro de nafta, a una velocidad escalar V km/h, esta dado por $M(v) = \frac{av^2 + 80v}{32}$ con $10 < v < 70$. Indique la velocidad mas económica para un viaje si se sabe que $M(11) = 759/32$. Justifique.

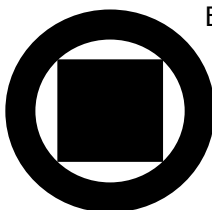
Respuesta: La velocidad más económica es 40 km/h.

EJERCICIO N° 117

Dos magnitudes son directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad $k=3$. Si una de ellas disminuye en 18 unidades. Como debe variar la otra para mantener la proporcionalidad?.

Respuesta: Si B disminuye 18, A disminuye 54, y si A disminuye 18, B disminuye 6.

EJERCICIO N° 118

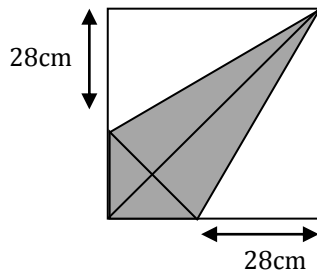


El área de la corona circular es $71\pi \text{ cm}^2$ y la longitud de la circunferencia de radio menor es de $10\sqrt{2} \text{ n cm}$.

Deduzca el radio de cada una de las circunferencias concéntricas. Luego calcule el área de la región sombreada si el polígono inscrito es un cuadrado.

Respuesta: $r = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ $R = 11\text{cm}$ y Región sombreada = $71\pi \text{ cm}^2 + 100\text{cm}^2$.

EJERCICIO N° 119



Calcule la longitud de un lado del cuadrado si se sabe que el área del romboide sombreado es 893cm^2 .
Luego calcule el perímetro del romboide sombreado.

Respuesta: Lado del cuadrado = 47cm y Perimetro del romboide = 147.4 cm.

EJERCICIO N° 120

Se conoce $f : \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \frac{25x+46}{3x+8}$ y $g : \mathbb{R} - \{c\} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = \frac{8x+16}{ax+32}$

Las curvas graficas de ambas funciones poseen la misma recta asíntota vertical.

Determine el conjunto de solución de la ecuación. $g(x) - f(x) + x = 0$.

Respuesta: $x = -2$ v $x = 7$.

EJERCICIO N° 121

La Intensidad de iluminación sobre una superficie varía inversamente con el cuadrado de su distancia a la fuente de luz. Como se modifica la intensidad de iluminación sobre la superficie si la distancia entre la misma y la fuente de luz se reduce a la mitad?.

Respuesta: Si la distancia se reduce a la mitad, la intensidad se cuadruplica .

**EJERCICIOS
EXPLICADOS
MODULO I**

EJERCICIO N° 1

Sea el polinomio $p(x) = (x - 1)(3x^2 + 24x + 36)$ y la identidad

$$\frac{p(x)}{x^4 + 7x^2 + 10} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{x+C}{x^2+5} \quad \text{Halle A B y C y factorice a P(x) en factores primos.}$$

Solución:

Tenemos la identidad:

$$\frac{p(x)}{x^4 + 7x^2 + 10} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{x + C}{x^2 + 5}$$

Realizo común denominador y sumo

$$\frac{p(x)}{x^4 + 7x^2 + 10} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 5) + (x + C)(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)(x^2 + 5)}$$

Realizo las distributivas en la fracción de la derecha

$$\frac{p(x)}{x^4 + 7x^2 + 10} = \frac{Ax^3 + 5Ax + Bx^2 + 5B + x^3 + 2x + Cx^2 + 2C}{x^4 + 7x^2 + 10}$$

Como los denominadores son iguales se cancelan

$$p(x) = Ax^3 + 5Ax + Bx^2 + 5B + x^3 + 2x + Cx^2 + 2C$$

Reemplazo por $p(x) = (x - 1)(3x^2 + 24x + 36)$

$$(x - 1)(3x^2 + 24x + 36) = Ax^3 + 5Ax + Bx^2 + 5B + x^3 + 2x + Cx^2 + 2C$$

$$3x^3 + 24x^2 + 36x - 3x^2 - 24x - 36 = Ax^3 + 5Ax + Bx^2 + 5B + x^3 + 2x + Cx^2 + 2C$$

Agrupo las x con igual exponente:

$$3x^3 + (24-3)x^2 + (36-24)x - 36 = (A+1)x^3 + (B+C)x^2 + (2+5A)x + (2C+5B)$$

Para que dos polinomios sean iguales tengo que igualar sus coeficientes, entonces:

Con las x de tercer grado

$$\begin{aligned} 3x^3 &= (A+1)x^3 \\ 3 &= A+1 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Con las x de segundo grado

$$\begin{aligned} (24-3)x^2 &= (B+C)x^2 \\ 21 &= B+C \\ B &= 21 - C \end{aligned}$$

Con las x de primer grado

$$\begin{aligned}(36 - 24)x &= (2 + 5A)x \\ (12)x &= (2 + 5 * 2)x \\ 12x &= 12x\end{aligned}$$

Con los términos independientes

$$-36 = 2C + 5B$$

Pero sabíamos que $B = 21 - C$ reemplazamos

$$\begin{aligned}-36 &= 2C + 5 * (21 - C) \\ -36 &= 2C + 105 - 5C \\ -141 &= -3C \\ C &= 47\end{aligned}$$

Nuevamente sabíamos que $B = 21 - C$ entonces

$$\begin{aligned}B &= 21 - 47 \\ B &= -26\end{aligned}$$

Ahora que hallamos A B y C tenemos que factorizar $p(x)$, sabemos que

Todo polinomio podemos escribirlo de la siguiente forma

$$p(x) = A * (x - R_1) * (x - R_2) * (x - R_3) \dots (x - R_n)$$

Donde A es el coeficiente principal, (es decir el numero que acompaña a la x con mayor exponente) y $R_1, R_2 \dots R_n$ Las n raíces del polinomio

Teniamos

$$p(x) = (x - 1)(3x^2 + 24x + 36)$$

Con la formula resolvente hallamos que las raíces de la cuadrática $(3x^2 + 24x + 36)$ son -2 y -6 y como podemos ver el termino independiente es 3 por lo tanto

$$p(x) = 3 * (x - 1)(x + 2)(x + 6)$$

Respuesta: A = 2, B = -26, C = 47 y la factorización de $p(x)$ resulta

$$p(x) = 3 * (x - 1)(x + 2)(x + 6)$$

EJERCICIO N° 2

Halle los valores de a y b (reales) de forma que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} x + Ay = A \\ -By = B \end{cases}$$

Solución:

Realicemos gauss:

$$\begin{array}{cc|c} x & y & - \\ \hline 1 & A & A \\ 0 & -B & B \end{array}$$

Cuando tengo dos variables (x e y) lo que tengo que lograr con gauss es tener en la última fila un cero en el primer lugar. En este caso no es necesario hacer ninguna cuenta ya que lo tenemos así por definición.

Ahora recordemos (Tener en cuenta que cuando digo N°, me refiero a un numero del conjunto de los Reales menos el cero).

Para que un sistema sea:

COMPATIBLE DETERMINADO en la última fila debe quedar 0 N° | 0 o N°

COMPATIBLE INDETERMINADO en la última fila debe quedar 0 0 | 0

INCOMPATIBLE en la última fila debe quedar 0 0 | N°

O sea que tenemos que ver cuando se hacen cero las últimas dos componentes. Podemos ver que:

-B = 0 Solo cuando B es cero
B = 0 Solo cuando B es cero

Entonces puedo decir que este sistema resulta:

COMPATIBLE DETERMINADO

cuando $B \neq 0 \wedge A \in \mathbb{R}$ (porque A puede ser cualquier cosa)

COMPATIBLE INDETERMINADO

cuando $B = 0 \wedge A \in \mathbb{R}$ (porque A puede ser cualquier cosa)

INCOMPATIBLE Nunca porque no podemos hacer que $-B = 0 \wedge B \neq 0$ a la vez

Respuesta:

COMPATIBLE DETERMINADO: $B \neq 0 \wedge A \in R$

COMPATIBLE INDETERMINADO: $B = 0 \wedge A \in R$

INCOMPATIBLE: \emptyset

EJERCICIO N° 3

Determine los valores reales de k para que la ecuación $x^2 - k(x - 2) = 0$ admita dos raíces reales distintas

Solución:

En primer lugar hay que tener en cuenta lo siguiente:

En una función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

El discriminante es lo que está adentro de la raíz de la fórmula resolvente, es decir, $b^2 - 4ac$.

Además:

Discriminante > 0 Tiene raíces reales y distintas;

Discriminante < 0 No tiene raíces;

Discriminante $= 0$ Raíces iguales (única solución o raíz doble)

En este caso en particular tenemos:

$$x^2 - k(x - 2) = 0$$

$$x^2 - kx + 2k = 0$$

$$\text{Es decir } a = 1 \quad b = -k \quad y \quad c = 2k$$

Si planteo el discriminante sea mayor a cero, sería lo mismo que plantear que tenga raíces reales y distintas:

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$(-k)^2 - 4 * 1 * 2k > 0$$

$$k^2 - 8k > 0$$

$$k * (k - 8) > 0$$

Tenemos una multiplicación de dos términos y para que una multiplicación sea positiva (o mayor a cero) deben tener los dos el mismo signo. Entonces

$$(k > 0 \wedge k - 8 > 0) \vee (k < 0 \wedge k - 8 < 0)$$

$$(k > 0 \wedge k > 8) \vee (k < 0 \wedge k < 8)$$

$$(8; \infty) \cup (-\infty; 0)$$

Respuesta: Si k pertenece al intervalo $(-\infty; 0) \cup (8; \infty)$ la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.

EJERCICIO N° 4

Racionalice los denominadores en cada una de las siguientes dos expresiones

$$\frac{y - x^2}{x + \sqrt{y}}, \quad \frac{81x^2 - y}{9x + \sqrt{y}}$$

Luego determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{y - x^2}{x + \sqrt{y}} = 15 \\ \frac{81x^2 - y}{9x + \sqrt{y}} = 73 \end{cases}$$

Solución:

Racionalizamos multiplicando por el conjugado en el numerador y el denominador

$$\frac{y - x^2}{x + \sqrt{y}} * \frac{x - \sqrt{y}}{x - \sqrt{y}} = \frac{(y - x^2)(x - \sqrt{y})}{x^2 - x\sqrt{y} + x\sqrt{y} - y} = \frac{-(x^2 - y)(x - \sqrt{y})}{x^2 - y} = -(x - \sqrt{y}) = \sqrt{y} - x$$

$$\frac{81x^2 - y}{9x + \sqrt{y}} * \frac{9x - \sqrt{y}}{9x - \sqrt{y}} = \frac{(81x^2 - y)(9x - \sqrt{y})}{81x^2 - 9x\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} - y} = \frac{(81x^2 - y)(9x - \sqrt{y})}{81x^2 - y} = 9x - \sqrt{y}$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} \sqrt{y} - x = 15 \\ 9x - \sqrt{y} = 73 \end{cases}$$

Despejo x de la primera

$$\sqrt{y} - x = 15$$

$$-x = 15 - \sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{y} - 15$$

Reemplazo en la segunda

$$9 * (\sqrt{y} - 15) - \sqrt{y} = 73$$

$$9\sqrt{y} - 135 - \sqrt{y} = 73$$

$$8\sqrt{y} = 208$$

$$\sqrt{y} = \frac{208}{8} \sqrt{y} = 26$$

$$y = 676$$

Reemplazo en la primera

$$x = \sqrt{y} - 15$$

$$x = \sqrt{676} - 15$$

$$x = 11$$

Respuesta: $x = 11$ $y = 676$

EJERCICIO N° 5

Dados $p(x) = ax^3 + ax^2 + 7x + b$, $q(x) = x - 1$, $r(x) = x + 3$.

Determine los valores reales de a y b para que p(x) sea divisible por q(x) y r(x)

Solución:

El teorema del resto establece que si divido p(x) por x-a, p(a) será el resto de dicha división

Como $r(x) = x + 3$. es divisor de $p(x)$, puedo decir que el resto de su division es cero, por lo tanto $p(-3) = 0$

Como $q(x) = x - 1$. es divisor de $p(x)$, puedo decir que el resto de su division es cero, por lo tanto $p(1) = 0$

Reemplazo con $p(1)$

$$\begin{aligned} P(1) &= a * 1^3 + a * 1^2 + 7 * 1 + b \\ 0 &= a + a + 7 + b \\ 0 &= 2a + 7 + b \\ b &= -2a - 7 \end{aligned}$$

De esta ecuacion podemos decir que $b = -2a - 7$

$$\begin{aligned} P(-3) &= a * (-3)^3 + a * (-3)^2 + 7 * (-3) + b \\ 0 &= a * (-27) + a * 9 + 7 * (-3) + b \\ 0 &= -27a + 9a - 21 + b \\ 0 &= -18a - 21 + b \\ b &= 18a + 21 \end{aligned}$$

De esta ecuacion podemos decir que $b = 18a + 21$

Al igualar

$$\begin{aligned} -2a - 7 &= 18a + 21 \\ -2a - 18a &= 21 + 7 \\ -20a &= 28 \\ a &= -\frac{28}{20} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = -\frac{7}{5}$

Si reemplazo en $b = -2a - 7$

$$\begin{aligned} b &= -2 * -\frac{7}{5} - 7 \\ b &= \frac{14}{5} - 7 \\ b &= -\frac{21}{5} \end{aligned}$$

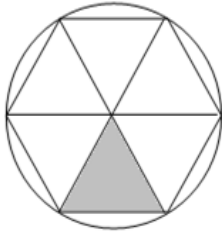
Por lo tanto $b = -\frac{21}{5}$

Respuesta: Si $a = -\frac{7}{5}$ y $b = -\frac{21}{5}$ $p(x)$ es divisible por $q(x)$ y $r(x)$

EJERCICIO Nº 6

El area de un hexagono regular es de $150\sqrt{3}$ cm². Calcular la medida del lado.

Solución:



Un Hexagono regular esta formado por 6 triangulos iguales e inscripto en una circunferencia. Por lo tanto si divido los 360° de un giro completo, en 6 triangulos iguales, puedo decir que el angulo superior del triangulo sombreado vale 60°. También como sus dos lados son radios del circulo, puedo decir que son iguales entre si, por lo tanto es un triangulo isósceles.

En todo triangulo isósceles los angulos que forman los lados iguales con el lado desigual, son iguales entre ellos entonces como la suma de los angulos interiores de un triangulo es 180°

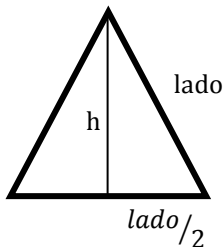
$$\text{Angulo derecho} + \text{angulo izquierdo} + \text{angulo superior} = 180$$

Pero angulo derecho es igual al izquierdo por triangulo isósceles y el superior vale 60° entonces

$$2 * \text{Angulo} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\text{Angulo} = 60$$

Entonces nos quedo que todos los angulos del triangulo sombreado (y lo mismo sucede con todos los del hexágono) son iguales, entonces puedo decir que el hexágono esta formado por 6 triangulos equiláteros (OJO esto solo vale para los hexagonos)



Voy a dibujar el triangulo sombreado

Por pitágoras puedo sacar la altura de ese triangulo

$$\text{Lado}^2 = \left(\frac{\text{lado}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = \text{lado}^2 - \left(\frac{\text{lado}}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{\text{lado}^2 - \left(\frac{\text{lado}}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\text{lado}^2 - \frac{\text{lado}^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{(4\text{lado}^2 - \text{lado}^2)}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\text{lado}^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3\text{lado}^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\text{lado}^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\text{lado}}{2}$$

La altura de ese triangulo es la apotema del hexágono, entonces escribimos la formula del area

$$\text{Area hexagono} = \frac{\text{N}^\circ \text{ de lados} * \text{lado} * \text{apotema}}{2}$$

$$150\sqrt{3}\text{cm}^2 = \frac{6 * \text{lado} * \frac{\sqrt{3}\text{lado}}{2}}{2}$$

$$150\sqrt{3}\text{cm}^2 = \frac{6\sqrt{3}\text{lado}^2}{2}$$

$$150\sqrt{3}\text{cm}^2 = \frac{6\sqrt{3}\text{lado}^2}{4}$$

$$600\sqrt{3}\text{cm}^2 = 6\sqrt{3}\text{lado}^2$$

$$\frac{600\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \text{cm}^2 = \text{lado}^2$$

$$100\text{cm}^2 = \text{lado}^2$$

$$10\text{cm} = \text{lado}$$

Respuesta: El lado del hexágono de $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$ es de 10cm

EJERCICIO N° 7

Determine los valores reales de h y k si se sabe que

f: $(-5, 5) \rightarrow R/f(x) = (x - h)^2 + k$ es una funcion par y $f(4) = 7$.

Solución:

Una funcion es par cuando
 $f(x) = f(-x)$

Una funcion es impar cuando
 $f(x) = -f(-x)$

Osea que en este caso

$$f(4) = f(-4) = 7$$

Calculemos $f(4)$

$$f(4) = (4 - h)^2 + k$$

$$7 = (4 - h)^2 + k$$

$$k = 7 - (4 - h)^2$$

Ahora calculemos $f(-4)$

$$f(-4) = (-4 - h)^2 + k$$

$$7 = (-4 - h)^2 + k$$

Reemplazamos con $k = 7 - (4 - h)^2$

$$7 = (-4 - h)^2 + 7 - (4 - h)^2$$

$$0 = (-4 - h)^2 - (4 - h)^2$$

$$0 = (16 + 8h + h^2) - (16 - 8h + h^2)$$

$$0 = 16 + 8h + h^2 - 16 + 8h - h^2$$

$$0 = 16h$$

$$h = 0$$

Si volvemos a reemplazar con $k = 7 - (4 - h)^2$

$$k = 7 - (4 - h)^2$$

$$k = 7 - (4 - 0)^2$$

$$k = 7 - 16$$

$$k = -9$$

Respuesta: Los valores son $k = -9$ y $h = 0$

EJERCICIO N° 8

Determine Dominio y ceros de $f(x) = \log(x - 2) + \log x - \log 8$

Solución

Para establecer el dominio de la función debemos realizar la intersección de los dominios de todas las funciones que aparecen, el dominio de un logaritmo es igual a el conjunto de las x que hacen que su argumento (lo de adentro del log) sea mayor a cero.

Como tenemos $f(x) = \log(x - 2) + \log x - \log 8$ quedaría

$$\begin{aligned} Df &= \{ (x + 2 > 0) \wedge (x > 0) \wedge (8 > 0) \} \\ Df &= \{ (x > -2) \wedge (x > 0) \wedge (8 > 0) \} \\ Df &= \{ (-2; \infty) \cap (0; \infty) \wedge (\mathbf{R}) \} \\ Df &= \{ (0; \infty) \} = \mathbf{R}^+ \end{aligned}$$

Ahora debemos encontrar el conjunto de ceros, para esto igualamos a cero la función

$$0 = \log(x - 2) + \log x - \log 8$$

La suma de logaritmos es el logaritmo de la multiplicacion de los argumentos, es decir que
 $\log(a) + \log(b) = \log(a * b)$

Entonces

$$0 = \log((x - 2) * x) - \log 8$$

La resta de logaritmos es el logaritmo de la division de los argumentos, es decir que

$$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

Entonces

$$0 = \log\left(\frac{(x - 2) * x}{8}\right)$$

$$0 = \log\left(\frac{x^2 - 2x}{8}\right)$$

$$10^0 = 10^{\log\left(\frac{x^2 - 2x}{8}\right)}$$

$$1 = \frac{x^2 - 2x}{8}$$

$$8 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Esta es una cuadrática con ceros en $x=4$ y $x = -2$ pero como el 2 no es un real positivo, no esta en el dominio de la función, por lo que no puede ser solución.

Respuesta: El dominio de la función son los reales positivos ($Df = \{(0; \infty)\} = R^+$)
y su conjunto de ceros esta en $x = 4$ ($C_{ceros} = \{4\}$)

EJERCICIO N° 9

Sea la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + k = 0$. Determine los valores reales de la constante real k tal que la mayor de sus dos raíces reales es menor que 6.

Solución:

Veamos cuales son las raíces de $x^2 + 3x + k = 0$

$$R1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad R2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como la raíz es siempre positiva, podemos afirmar que será mayor aquella que la suma

$$\text{Raiz mayor} = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 * 1 * k}}{2 * 1}$$

$$\text{Raiz mayor} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4k}}{2 * 1}$$

Ahora debemos hallar los valores de k para que ella sea menor a 6

$$\begin{aligned} \text{Raiz mayor} &< 6 \\ \frac{-3 + \sqrt{9 - 4k}}{2} &< 6 \\ -3 + \sqrt{9 - 4k} &< 12 \\ \sqrt{9 - 4k} &< 15 \\ 9 - 4k &< 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4k &< 216 \\ k &> -54 \end{aligned}$$

Respuesta: $k \in (-54; \infty)$

EJERCICIO N° 10

Determine los valores reales de k tal que el polinomio $p(x)$ tenga dos raíces reales distintas, si sabe que: $d(x) = 2x - 27$, $e(x) = -3x + 9$ y $r(x) = 27k$ son los polinomios divisor, cociente y resto respectivamente de la división entre $p(x)$ y $d(x)$

Solución

El Algoritmo de la división establece que el dividendo (el número que quiero dividir, $D(x)$) es igual a el resultado o cociente ($C(x)$) por el divisor (el que está dentro de la cajita, $d(x)$) más el resto ($r(x)$).

$$D(x) = C(x) * d(x) + r(x)$$

Por lo tanto como sabemos que esos polinomios surgen de dividir $P(x)$ por $d(x)$ puedo plantear

$$\begin{aligned} P(x) &= e(x) * d(x) + r(x) \\ P(x) &= (-3x + 9) * (2x - 27) + 27k \\ P(x) &= (-6x^2 + 81x + 18x - 243) + 27k \\ P(x) &= -6x^2 + 99x + (-243 + 27k) \end{aligned}$$

Para que un polinomio de grado dos tenga dos raíces reales distintas el discriminante, o sea lo que está dentro de la raíz en la resolvente, $b^2 - 4ac$, debe ser mayor que cero

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &> 0 \\ 99^2 - 4 * (-6) * (-243 + 27k) &> 0 \\ 9801 + 24 * (-243 + 27k) &> 0 \\ -5832 + 648k &> -9801 \\ 648k &> -3969 \\ k &> -6.125 \end{aligned}$$

Respuesta: Si $k \in (-6.125; \infty)$, $p(x)$ tiene dos raíces reales

EJERCICIO N° 11

Determine el conjunto solución de $\left|1 - \frac{2x}{3}\right| < 1$

Solución

Para abrir un módulo, primero debemos hacer que quede el modulo de un término y todo lo demás del otro lado.

Al abrir un modulo quedaran dos términos, irán separados por:

Un \wedge si en la ecuación original aparece un $<$ o un \neq

Un \vee si en la ecuación original aparece un $>$ o un $=$

Para escribir correctamente cada término será:

El primero será igual a la ecuación pero sin las barras de modulo.

El segundo será igual a la ecuación pero sin las barras de modulo, con el piquito cambiado de sentido y con un (-1) que multiplica todo el termino que no tenia modulo.

Ejemplo

$$|a - b| > c - d$$

$$[a - b > c - d] \quad \vee \quad [a - b < (-1) * (c - d)]$$

Veamos que sucede en este caso, ya tenemos el modulo de un lado y el numero del otro

$$\left|1 - \frac{2x}{3}\right| < 1$$

$$\left[1 - \frac{2x}{3} < 1\right] \quad \wedge \quad \left[1 - \frac{2x}{3} > -1\right]$$

Hago común denominador y sumo

$$\frac{3 - 2x}{3} < 1 \quad \wedge \quad \frac{3 - 2x}{3} > -1$$

Paso multiplicando el 3

$$3 - 2x < 3 \quad \wedge \quad 3 - 2x > -3$$

$$-2x < 0 \quad \wedge \quad -2x > -6$$

En una inecuación, siempre que pasemos multiplicando o dividiendo un número negativo el piquito se debe dar vuelta

En este caso pasamos dividiendo el (-2) entonces

$$x > 0 \quad \wedge \quad x < 3$$

$$(0; \infty) \cap (-\infty; 3)$$

Respuesta: S= (0;3)

EJERCICIO Nº 12

Si la hipotenusa de un triangulo rectángulo tiene 2cm mas de largo que un cateto y 4 cm mas que el otro cateto, determine el área del triangulo

Solución:

Por un lado tenemos que

$$H = c1 + 2$$

$$c1 = H - 2$$

Por otro

$$H = c2 + 4$$

$$c2 = H - 4$$

Si aplico pitagoras

$$c1^2 + c2^2 = H^2$$

$$(H - 2)^2 + (H - 4)^2 = H^2$$

$$(H^2 - 4H + 4) + (H^2 - 8H + 16) = H^2$$

$$2H^2 - 12H + 20 = H^2$$

$$H^2 - 12H + 20 = 0$$

Esta resolvente tiene dos raíces, H=2 y H =10, pero si H fuera 2, uno de los catetos seria cero, y el otro tendría una medida negativa, por lo tanto descarto esta opción y quedaría

$$H = 10cm$$

$$c1 = H - 2cm = 10cm - 2cm = 8cm$$

$$c2 = H - 4cm = 10cm - 4cm = 6cm$$

Calculamos el área

$$area = \frac{b * h}{2} = \frac{c1 * c2}{2} = \frac{8cm * 6cm}{2} = 24cm^2$$

Respuesta: *El area es de 24cm²*

EJERCICIO N° 13

Halle el conjunto solución de la ecuacion $\left| \frac{2}{x} + 1 \right| > 2$

Solución:

$$\left| \frac{2}{x} + 1 \right| > 2$$

Hago común denominador x

$$\left| \frac{2+x}{x} \right| > 2$$

Abro el modulo

$$\frac{2+x}{x} > 2 \quad \vee \quad \frac{2+x}{x} < -2$$

Paso el 2 y el menos dos hacia el termino de la izquierda

$$\frac{2+x}{x} - 2 > 0 \quad \vee \quad \frac{2+x}{x} + 2 < 0$$

Vuelvo a sumar haciendo común denominador x

$$\frac{2+x-2x}{x} > 0 \quad \vee \quad \frac{2+x+2x}{x} < 0$$

$$\frac{2-x}{x} > 0 \quad \vee \quad \frac{2+3x}{x} < 0$$

Para que una división (o fracción) sea menor a cero los dos términos a dividir (o numerador y denominador) deben tener distinto signo, mientras que para que el resultado sea mayor a cero, los dos deben tener el mismo signo.

$$[(2-x > 0 \wedge x > 0) \vee (2-x < 0 \wedge x < 0)] \vee [(2+3x > 0 \wedge x < 0) \vee (2+3x < 0 \wedge x > 0)]$$

$$[(x < 2 \wedge x > 0) \vee (x > 2 \wedge x < 0)] \vee \left[\left(x > -\frac{2}{3} \wedge x < 0 \right) \vee \left(x < -\frac{2}{3} \wedge x > 0 \right) \right]$$

$$[(0; 2) \cup (\emptyset)] \vee \left[\left(-\frac{2}{3}; 0 \right) \vee (\emptyset) \right]$$

$$(0; 2) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0 \right)$$

Respuesta: $\left(-\frac{2}{3}; 0 \right) \cup (0; 2)$

EJERCICIO Nº 14

Dadas las funciones: $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = C * a^x$ donde $a > 0$ **y** $f(0) = 3$ **y**

$f(2) = 12$, **y g es una funcion lineal tal que** $g(1) = -1$ **y** $g(-1) = 2$, **defina las funciones.**

Solución:

Tenemos

$$f(x) = C a^x$$

Pero como $f(0)=3$

$$\begin{aligned} f(0) &= C a^0 \\ 3 &= C * 1 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

Entonces

$$f(x) = 3 a^x$$

Pero como $f(2)=12$

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 a^2 \\ 12 &= 3 * a^2 \end{aligned}$$

$$4 = a^2$$

$$|a| = 2$$

$$a = 2 \quad \vee \quad a = -2$$

Pero como $a > 0$

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$

Y sabemos que $g(x)$ es lineal, por lo tanto tendrá la forma

$$g(x) = ax + b$$

Pero como $g(1) = -1$

$$g(1) = a \cdot 1 + b$$

$$-1 = a + b$$

$$b = -1 - a$$

Entonces

$$g(x) = ax + (-1 - a)$$

Pero como $g(-1) = 2$

$$g(-1) = a \cdot (-1) + (-1 - a)$$

$$2 = -a - 1 - a$$

$$3 = -2a$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Osea que $g(x)$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \left(-1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)$$

Respuesta: $f(x) = 3 \cdot 2^x$ y $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

EJERCICIO Nº 15

Encuentre, si existen, los ceros de la función

$$h: Dh \rightarrow R/h(x) = 16^{(x^2-4)} - 32^{(2x-2)}$$

Solución:

Tenemos

$$h(x) = 16^{(x^2-4)} - 32^{(2x-2)}$$

Tenemos que encontrar para que x se anula la ecuacion entonces

$$\begin{aligned} 16^{x^2-4} - 32^{2x-2} &= 0 \\ (2^4)^{x^2-4} - (2^5)^{2x-2} &= 0 \end{aligned}$$

Por la propiedad de los exponentes que dice que $(a^b)^c = a^{b*c}$ puedo decir que

$$\begin{aligned} (2^4)^{x^2-4} - (2^5)^{2x-2} &= 0 \\ (2)^{4*(x^2-4)} - (2)^{5*(2x-2)} &= 0 \\ (2)^{4x^2-16} - (2)^{10x-10} &= 0 \\ (2)^{4x^2-16} &= (2)^{10x-10} \end{aligned}$$

Aplico Log en base dos de los dos lados

$$\mathbf{\text{Log}_2 (2)^{4x^2-16} = \text{Log}_2(2)^{10x-10}}$$

Por la propiedad que establece que $\text{Log}_a B^c = c * \text{Log}_a B$ puedo decir que

$$\mathbf{(4x^2 - 16) * \text{Log}_2 (2) = (10x - 10) * \text{Log}_2(2)}$$

Los $\text{Log}_2 (2)$ se cancelan

$$\mathbf{4x^2 - 16 = 10x - 10}$$

$$\mathbf{4x^2 - 6 - 10x = 0}$$

Los ceros de esta cuadrática son $x = 3$ y $x = -1/2$. Verifiquemos que sean ceros de la función

$$h(3) = 16^{(3^2-4)} - 32^{2*3-2} = 16^{(9-4)} - 32^{6-2} = 16^5 - 32^4 = 0$$

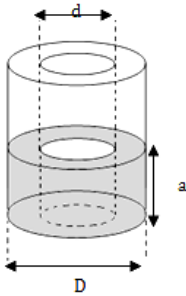
X = 3 es cero de la función

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 16^{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\right)} - 32^{2*\left(\frac{1}{2}\right)-2} = 16^{\left(\frac{1}{4}-4\right)} - 32^{-1-2} = 16^{-\frac{17}{4}} - 32^{-3} = 0$$

X = -1/2 es cero de la función

Respuesta: Los ceros de la función están en $x = 3 \wedge x = -\frac{1}{2}$

EJERCICIO N° 16



Sea un recipiente de forma cilíndrica hueca de diámetro menor $d = 64\text{cm}$, como muestra el dibujo. Este contiene el 40% del total de un líquido que alcanza la altura $a = 123\text{cm}$, con un volumen de $915120 \pi \text{ cm}^3$ ¿Cuál es el diámetro D mayor?.

Si un kilogramo de líquido ocupa 738cm^3 de volumen ¿Cuántos kg faltan para llenar recipiente?.

Solución:

Calculemos la capacidad (o sea el líquido que entra) en el recipiente (capacidad es lo mismo que el volumen). Este, va a ser lo que entraría en el cilindro de diámetro D menos lo que entraría en el de diámetro d entonces:

Capacidad del recipiente = Volumen de diámetro D – Volumen de diámetro d

$$\text{Capacidad del recipiente} = \pi * \left(\frac{D}{2}\right)^2 * h - \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2 * h$$

$$\text{Capacidad del recipiente} = \pi * h \left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)$$

Ahora sabemos que el líquido llega a una altura $a = 123\text{cm}$ y que ocupa un volumen de $915120 \pi \text{ cm}^3$ entonces:

$$\text{Capacidad del recipiente} = \pi * h \left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)$$

$$915120 \pi \text{ cm}^3 = \pi * 123\text{cm} * \left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{64\text{cm}}{2}\right)^2 \right)$$

$$915120 \text{ cm}^3 = 123\text{cm} * \left(\frac{D^2}{4} - \frac{4096\text{cm}^2}{4} \right)$$

$$7440 \text{ cm}^2 = \frac{D^2 - 4096\text{cm}^2}{4}$$

$$29760 \text{ cm}^2 = D^2 - 4096\text{cm}^2$$

$$33856 \text{ cm}^2 = D^2$$

$$D = 184 \text{ cm}$$

También sabemos que los $915120 \pi \text{ cm}^3$ representan un 40% de la capacidad del recipiente entonces:

$$40\% \text{-----} 915120 \pi \text{ cm}^3$$

$$100\% \text{-----} 2287800 \pi \text{ cm}^3$$

O sea que para llenar el recipiente faltan:

$$2287800 \pi \text{ cm}^3 - 915120 \pi \text{ cm}^3 = 1372680 \pi \text{ cm}^3$$

Si cada kilo ocupa 738 cm^3 podemos decir:

$$738 \text{ cm}^3 \text{-----} 1 \text{ kilo}$$

$$1372680 \pi \text{ cm}^3 \text{-----} 1860 \pi \text{ kg}$$

Respuesta: D = 184 cm y Para llenar el recipiente faltan $1860 \pi \text{ kg}$

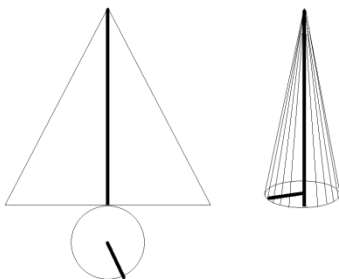
EJERCICIO Nº 17

Determine la altura de un cono si se sabe que el área total es $125\pi \text{ cm}^2$ y el radio de la base es 5 cm.

Solución:

Nos dicen que el área del cono es $125\pi \text{ cm}^2$, veamos de donde proviene la formula del área del cono.

Imagínense que tenemos un cono de cartulina, si lo desarmamos quedaría algo así



Las dos medidas resaltadas son las importantes. Como las podemos ver mejor en el cono armado, son el radio de la base del cono y su generatriz (la línea medida desde el borde de la circunferencia hasta la punta.)

Ahora calcular el área de un círculo y un triángulo resulta mucho más fácil.

$$\text{Area cono} = \text{area circulo} + \text{area triangulo}$$

$$\text{Area cono} = \pi R^2 + \frac{b * h}{2}$$

La altura del triangulo dijimos que era la generatriz, y la base, tiene que dar toda la vuelta al circulo, asi que tiene que ser el perimetro del circulo, osea $2\pi R$

$$\text{Area cono} = \pi R^2 + \frac{2\pi R * g}{2}$$

Esta es la formula a utilizar, voy a aplicar operaciones para llegar a la formula que suelen encontrar en los resueltos

$$\text{Area cono} = \pi R^2 + \frac{2\pi R * g}{2}$$

$$\text{Area cono} = \pi R^2 + \pi Rg$$

$$\text{Area cono} = \pi R * (R + g)$$

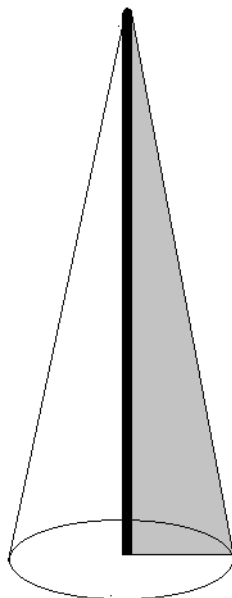
Ahora reemplazo con los datos de este ejercicio

$$125\pi = \pi * 5 * (5 + g)$$

$$25 = (5 + g)$$

$$g = 20$$

Ahora si miramos al cono de costado quedaría un triangulo, donde la línea gruesa seria su altura, por lo tanto con pitagoras, el radio y la generatriz ya podemos calcularla.



$$c_1^2 + c_2^2 = h^2$$

$$\text{altura}^2 + R^2 = g^2$$

$$\text{altura}^2 = g^2 - R^2$$

$$\text{altura} = \sqrt{g^2 - R^2}$$

$$\text{altura} = \sqrt{20^2 - 5^2}$$

$$\text{altura} = \sqrt{400 - 25}$$

$$\text{altura} = \sqrt{375}$$

$$\text{altura} = \sqrt{25 * 15}$$

$$\text{altura} = \sqrt{25} * \sqrt{15}$$

$$\text{altura} = 5\sqrt{15}$$

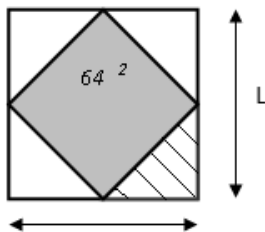
Respuesta: $altura = 5\sqrt{15}$

EJERCICIO N° 18

Determine el perímetro de un cuadrado si sabe q el área del cuadrado que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados del primero es $64m^2$.

Solución:

Dibujemos:



En primer lugar podemos determinar lo que miden los lados del cuadrado inscripto (el de $64m^2$ de área)

$$l^2 = 64m^2$$

$$l = 8m$$

Como el cuadrado sombreado está inscripto en el mayor, podemos decir que el triángulo rayado es un triángulo rectángulo isósceles donde la hipotenusa es el lado del cuadrado inscripto ($l = 8m$) y sus catetos la mitad del lado del cuadrado grande $\left(\frac{L}{2}\right)$

$$(8cm)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$64cm^2 = 2 * \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$32cm^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\frac{L}{2} = \sqrt{32}cm$$

$$L = 2\sqrt{32}cm$$

El perímetro de un cuadrado es $4 * lado$ entonces:

$$\text{Perímetro de cuadrado grande} = 4 * L$$

$$\text{Perímetro de cuadrado grande} = 4 * 2\sqrt{32}cm$$

$$\text{Perimetro de cuadrado grande} = 8\sqrt{32}\text{cm}$$

$$\text{Perimetro de cuadrado grande} = 8\sqrt{2^4 * 2}\text{cm}$$

$$\text{Perimetro de cuadrado grande} = 8 * \sqrt{2^4} * \sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{Perimetro de cuadrado grande} = 8 * 2^2 * \sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{Perimetro de cuadrado grande} = 32\sqrt{2}\text{cm}$$

Respuesta: El perímetro del cuadrado grande es de $32\sqrt{2}$ cm

EJERCICIO N° 19

En un campeonato de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas, ¿cuántos jugadores son? .

Solución:

Nosotros tenemos una cantidad de maestros N. Cada uno de ellos juega tantas partidas como jugadores halla menos uno (no juega con sí mismo).

$$\text{cantidad de partidas} = N * (N - 1)$$

Pero si solo realizamos esta multiplicación, estaríamos contando tanto la partida que el maestro 1 juega con el 2, como la que el 2 juega con el 1, por lo tanto esta cantidad de partidas antes calculada la tenemos que dividir por dos quedando.

$$\text{cantidad de partidas} = \frac{N * (N - 1)}{2}$$

Sabemos que en total se juegan 45 partidas, entonces:

$$\frac{N * (N - 1)}{2} = 45$$

$$N * (N - 1) = 90$$

$$N^2 - N - 90 = 0$$

Esta cuadrática tiene raíces en $N=10$ y $N = -9$

Como no puede haber cantidad de jugadores negativos, podemos descartar al -9 como solución.

Respuesta: En el campeonato participaron 10 maestros

EJERCICIO N° 20

Se sabe que la población de una ciudad era de 385 000 habitantes en 1960 y 510 000 habitantes en 1970 .Si el crecimiento poblacional puede aproximarse por $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$, donde N_0 es la población inicial, k es constante y t es el número de años después de 1960.

¿Cuántos habitantes tuvo esta ciudad en el año 2000?

Solución:

Como en 1960 la población era de 385000, y la función toma a t como años transcurridos LUEGO de 1960, podemos decir que 385000 es la población inicial, denominada N_0 , quedando:

$$N(t) = 385000 * e^{k \cdot t}$$

Tambien sabemos que la poblacion en 1970 era de 510000, por lo tanto

$$N(10) = 510000$$

(tomo 10 por ser la cantidad de años transcurridos desde 1960 a 1970).

$$\begin{aligned} N(10) &= 510000 \\ 510000 &= 385000 * e^{k \cdot 10} \end{aligned}$$

$$e^{k \cdot 10} = \frac{510000}{385000}$$

$$e^{k \cdot 10} = \frac{102}{77}$$

$$\ln(e^{k \cdot 10}) = \ln\left(\frac{102}{77}\right)$$

$$k * 10 = \ln\left(\frac{102}{77}\right)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{102}{77}\right)}{10}$$

$$k \cong 0.02811$$

Por lo tanto k es aprox. 0.02811 quedando:

$$N(t) = 385000 * e^{0.02811 \cdot t}$$

Ahora para calcular la poblacion en el año 2000 debemos calcular $N(40)$ (es 40 porque son los años que pasaron desde 1960 al 2000)

$$\begin{aligned} N(40) &= 385000 * e^{0.02811 \cdot 40} \\ N(40) &= 1185172 \end{aligned}$$

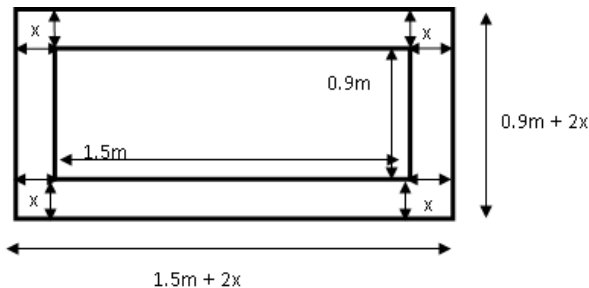
Respuesta: La población en el año 2000 fue aproximadamente de 1185172 personas

EJERCICIO Nº 21

A un cuadro al oleo de 1.5m de largo por 90cm de alto se le pone un marco rectangular. El area total del marco y el cuadro es de 1.6 m² ¿Cuál es el ancho del marco?.

Solución:

Dibujemos:



Como podemos ver el alto del marco con el cuadro es de $(0.9m + 2x)$ y el largo es de $(1.5m + 2x)$ y el área de todo es $1.6m^2$.

Area de cuadro y marco = alto de marco y cuadro * largo de marco y cuadro

$$1.6m^2 = (0.9m + 2x) * (1.5m + 2x)$$

$$1.6m^2 = 1.35m^2 + 3cmx + 1.8cmx + 4x^2$$

$$0 = -0.25m^2 + 4.8cmx + 4x^2$$

Esta es una cuadrática con raíces en $x = -1.25m$ y $x = 0.05m$. Como una medida no puede ser negativa puedo eliminar la primera Solución.

Respuesta: El ancho del marco es de 0.05m o lo que es lo mismo 5cm

EJERCICIO Nº 22

Un hombre al morir deja una herencia de 60.000\$ para repartir entre cierto número de herederos, pero 2 de éstos no reclaman su parte entonces la herencia de cada uno de los demás resulta aumentada en 1000\$. ¿Cuántos herederos había originalmente?

Solución:

Vamos a plantearlo como dos casos distintos a igualar luego.

Llamaremos **N** a la cantidad de herederos y **D** a la cantidad de dinero recibido por cada uno en el primer caso:

PRIMER CASO

$$\text{cantidad de herederos} * \text{dinero que recibe cada uno} = 60000$$

$$N * D = 60000$$

SEGUNDO CASO

La cantidad de herederos disminuye en 2, y el dinero que recibe cada uno aumenta en 1000

$$(\text{cantidad de herederos} - 2) * (\text{dinero que recibe cada uno} + 1000) = 60000$$

$$(N - 2) * (D + 1000) = 60000$$

Del primer caso podemos deducir que:

$$N = \frac{60000}{D}$$

Al reemplazar en el segundo caso:

$$\left(\frac{60000}{D} - 2\right) * (D + 1000) = 60000$$

Realizo distributiva

$$60000 - 2D + \frac{60000000}{D} - 2000 = 60000$$

Saco factor comun D a la izquierda del igual

$$\frac{(6000D - 2D^2 + 60000000 - 2000D)}{D} = 60000$$

Paso la D multiplicando

$$6000D - 2D^2 + 60000000 - 2000D = 60000D$$

cancelo de ambos lados el 6000D

$$-2D^2 + 6000000 - 2000D = 0$$

Esta es una cuadratica con raices en $D = -6000$ y $D = 5000$

Como no pueden tener una cantidad de dinero negativo decimos que la cantidad de dinero recibida originalmente era de 5000

Reemplazando en $N = 60000 / D$

$$N = \frac{60000}{5000}$$

$$N = 12$$

Respuesta: Originalmente había 12 herederos

EJERCICIO Nº 23

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{(X^{-2}) - (Y^{-2})}{(X^{-1}) + (Y^{-1})}$$

Solución:

Tenemos: $\frac{(X^{-2}) - (Y^{-2})}{(X^{-1}) + (Y^{-1})}$

Efectuamos los negativos de las potencias (dan vuelta el numero $(\frac{a}{b})^{-1} = (\frac{b}{a})^1$)

$$\frac{\left(\frac{1}{X^2}\right) - \left(\frac{1}{Y^2}\right)}{\left(\frac{1}{X^1}\right) + \left(\frac{1}{Y^1}\right)}$$

Realizamos las sumas de las fracciones tanto en el numerador como en el denominador:

$$\frac{\left(\frac{Y^2 - X^2}{X^2Y^2}\right)}{\left(\frac{Y + X}{XY}\right)}$$

Esto resulta una division entre dos fracciones, por lo tanto seria similar a escribirlo de esta forma:

$$\frac{Y^2 - X^2}{X^2Y^2} : \frac{Y + X}{XY}$$

La division de fracciones es lo mismo que dar vuelta la segunda fracción y multiplicar:

$$\frac{Y^2 - X^2}{X^2Y^2} * \frac{XY}{X + Y}$$

Realizo diferencia de cuadrados en el numerador de la izquierda:

$$\frac{(Y + X)(Y - X)}{X^2Y^2} * \frac{XY}{X + Y}$$

Los X + Y se cancelan:

$$\frac{(Y - X)}{X^2Y^2} * \frac{XY}{1}$$

X^2Y^2 es lo mismo que decir $(XY)^2$ entonces:

$$\frac{(Y - X)}{(XY)^2} * \frac{XY}{1}$$

El cuadrado se cancela con el numerador de la fraccion de la derecha resultando como solución:

$$\frac{(Y - X)}{XY}$$

Respuesta: La expresión factorizada resulta $\frac{(Y-X)}{XY}$

EJERCICIO N° 24

Hallar A B y C tal que:

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

Solución:

Tenemos

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

Realizo comun denominador

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 1)(x + 3) + C(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)^2}$$

Se cancelan los denominadores, porque son iguales, pero al encontrar la solución debemos ver que no los anule

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x - 1)^2 + B(x - 1)(x + 3) + C(x + 3)$$

Distribuyo los parentesis

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x + 3)$$

Distribuyo las letras

$$3x^2 - 8x + 13 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx + 3C$$

Para que un polinomio sea igual al otro, sus coeficientes de igual grado deben ser iguales, entonces:

$$3x^2 = Ax^2 + Bx^2$$

$$3x^2 = (A + B)x^2$$

$$3 = A + B$$

$$A = 3 - B$$

$$-8x = -2Ax + 2Bx + Cx$$

$$3x^2 = (-2A + 2B + C)x^2$$

$$3 = -2A + 2B + C$$

Pero sabemos que $A = 3 - B$ entonces

$$-8 = -2(3 - B) + 2B + C$$

$$-8 = -6 + 2B + 2B + C$$

$$C = -8 + 6 - 4B$$

$$C = -2 - 4B$$

$$13 = A - 3B + 3C$$

Pero sabemos que $A = 3 - B$ y $C = -2 - 4B$ entonces

$$13 = (3 - B) - 3B + 3(-2 - 4B)$$

$$13 = 3 - B - 3B - 6 - 12B$$

$$16B = 3 - 6 - 13$$

$$16B = -16$$

$$B = -1$$

Pero sabemos que $A = 3 - B$ y $C = -2 - 4B$ entonces

$$A = 3 - B = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$$

$$C = -2 - 4B = -2 - 4 * (-1) = -2 + 4 = 2$$

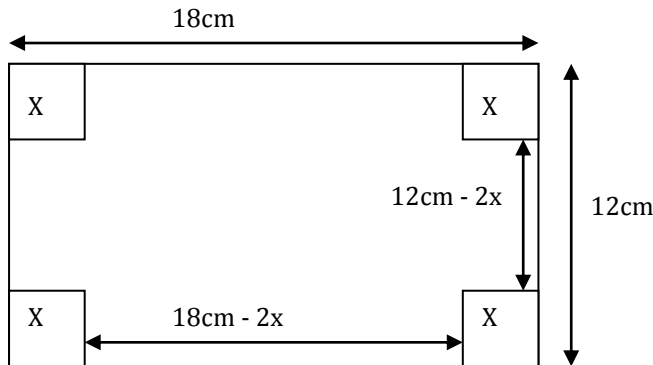
Respuesta: A = 4, B = -1, C = 2

EJERCICIO N° 25

Para hacer una caja de base rectangular y sin tapa se utiliza una lamina de material de 12 cm por 18 cm cortando un cuadrado de lado "x" de cada esquina y doblando los lados. Exprese el volumen $V(x)$ de la caja y encuentre el dominio de V .

Solución:

Dibujemos:



Si nos imaginamos esa caja armada, podemos observar que su largo mide $(18\text{ cm} - 2x)$ tiene $(12\text{ cm} - 2x)$ de ancho y x de alto. Por lo tanto su volumen va a ser:

$$V(x) = \text{largo} * \text{ancho} * \text{alto}$$

$$V(x) = (12 - 2x)(18 - 2x) * x$$

$$V(x) = (216 - 24x - 36x + 4x^2) * x$$

$$V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x$$

Para hallar el dominio, no hay formulas hay que deducirlo, por un lado decimos que x tiene que ser mayor que cero (porque es una medida) y por el otro $2x$ (que es lo que recortamos) tiene que ser menor a 12, que es el lado del cartón (porque sino no se podría armar). Entonces en dominio queda desde el cero al 6

Respuesta: $V: (0; 6) \rightarrow R / V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x$

EJERCICIO N° 26

El cociente entre los enteros a y b es 35 y el producto de los enteros consecutivos (correspondientes a a y b) es 1477 . Obtenga dichos números enteros.

Solución:

El cociente entre los enteros A y B es 35:

$$\frac{A}{B} = 35$$

$$A = 35B$$

Luego dice que el producto de los enteros consecutivos (correspondientes a A y B) es 1477, Dicho de otra forma, el numero que le sigue a A por el numero que le sigue a B es 1477.

$$(A + 1)(B + 1) = 1477$$

Reemplazamos con $A = 35B$

$$(35B + 1)(B + 1) = 1477$$

$$35B^2 + 36B - 1476 = 0$$

Esta es una cuadrática con ceros en $B = 6$ y $B = -246/35$ Pero como decia que B era entero me quedo solo con la solución $B = 6$ y puedo decir que:

$$B = 6 \quad y \quad A = 210$$

Si quieres comprobar, puedes ver que el cociente entre los enteros A y B es 35 ($210 / 6 = 35$) y el que le sigue a A Por el que le sigue a B es 1477 ($7 * 211 = 1477$)

Respuesta: A = 210 y B = 6

EJERCICIO N° 27

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\text{Log}8 + (x^2 - 5x + 7)\text{Log}3 = \text{Log}24$$

Solución:

$$\text{Log}8 + (x^2 - 5x + 7)\text{Log}3 = \text{Log}24$$

Las propiedades de los logaritmos establecen que $\text{Log}(a^b) = b * \text{Log}(a)$, entonces si hacemos el caso de atrás para adelante puedo poner el $(x^2 - 5x + 7)$ como exponente

$$\text{Log}8 + \text{Log}3^{(x^2-5x+7)} - \text{Log}24 = 0$$

Las propiedades de los logaritmos establecen que $\text{Log}(a) + \text{Log}(b) = \text{Log}(a * b)$, Entonces

$$\text{Log}(8 * 3^{(x^2-5x+7)}) - \text{Log}24 = 0$$

Las propiedades de los logaritmos establecen que $\text{Log}(a) - \text{Log}(b) = \text{Log}\left(\frac{a}{b}\right)$, Entonces

$$\text{Log}\left(\frac{8 * 3^{(x^2-5x+7)}}{24}\right) = 0$$

Para eliminar un logaritmo debo aplicar base^{Log} de ambos lados para que el logaritmo se cancele, y como la base no esta explicita, puedo decir que la misma es igual a 10

$$10^{\text{Log}\left(\frac{8 * 3^{(x^2-5x+7)}}{24}\right)} = 10^0$$

Cancelo el 10^{Log} y realizo el 10^0

$$\frac{8 * 3^{(x^2-5x+7)}}{8 * 3} = 1$$

Cancelo los 8

$$\frac{3^{(x^2-5x+7)}}{3} = 1$$

Paso el 3 multiplicando

$$3^{(x^2-5x+7)} = 3^1$$

Como de ambos lados tengo 3 elevado a un exponente, estos exponentes deben ser iguales para que se verifique la igualdad

$$x^2 - 5x + 7 = 1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Esta es una cuadrática con raíces en $x=2$ y $x=3$ y podemos observar que ambas verifican.

Respuesta: $x=2$ y $x=3$

EJERCICIO Nº 28

En un pueblo de 6000 habitantes se casaron el 15% de las mujeres con el 10% de los hombres. ¿Cuántos matrimonios se formaron?.

Solución:

Vamos a llamar al total de mujeres **X**.

Vamos a llamar al total de hombres **Y**.

Por lo tanto:

$$X + Y = 6000$$

Como se casaron el 15% de las mujeres con el 10% de los hombres, podemos decir que el 15% de las mujeres es la misma cantidad que el 10% de los hombres:

$$10\% X = 15\% Y$$

De la primera ecuación despejamos X y podemos decir que:

$$X = 6000 - Y$$

Si reemplazamos en la segunda ecuación:

$$10\% (6000 - Y) = 15\% Y$$

$$\frac{10 * (6000 - Y)}{100} = \frac{15 * Y}{100}$$

$$10 * (6000 - Y) = 15 * Y$$

$$60000 - 10Y = 15Y$$

$$60000 = 25Y$$

$$Y = 2400$$

Pero como $X = 6000 - Y$

$$X = 6000 - 2400 = 3600$$

Por lo tanto en el pueblo hay 2400 hombres y 3600 mujeres.

Sabemos que se casaron el 15% de las mujeres y el 10% de los hombres por lo tanto podemos calcular la cantidad de matrimonios con cualquiera de esos dos datos:

$$15\% \text{ de } 2400 = \frac{(15 * 2400)}{100} = 360$$

$$10\% \text{ de } 3600 = \frac{(10 * 3600)}{100} = 360$$

Respuesta: Por lo tanto en el pueblo hay 2400 hombres y 3600 mujeres y se formaron 360 matrimonios

EJERCICIO N° 29

Hallar A B y C tal que:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1}$$

Solución:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1}$$

Realizo comun denominador

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)}$$

Se cancelan los denominadores, porque son iguales, pero al encontrar la solución debemos ver que no los anule

$$1 = (Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 1)$$

Distribuyo los parentesis

$$1 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 + C$$

Para que un polinomio sea igual al otro, sus coeficientes de igual grado deben ser iguales, entonces:

$$\begin{aligned} 0x^2 &= Ax^2 + Cx^2 \\ 0x^2 &= (A + C)x^2 \\ 0 &= A + C \\ C &= -A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x &= (A + B)x \\ 0 &= A + B \\ B &= -A \end{aligned}$$

$$1 = B + C$$

Pero sabemos que $B = -A$ y $C = -A$ entonces

$$\begin{aligned} 1 &= -A - A \\ 1 &= -2A \\ A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pero sabemos que $B = -A$ y $C = -A$ entonces

$$B = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$C = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Respuesta: $A = -\frac{1}{2}$ $B = \frac{1}{2}$ y $C = \frac{1}{2}$

EJERCICIO Nº 30

Factorice el polinomio Mónico $p(x)$, de tercer grado, si se sabe que dos de sus ceros son los del polinomio: $q(x) = 6x^2 + x - 1$. y $p(1) = 3$

Solución:

Sabemos que $p(x)$ es un polinomio de tercer grado entonces tendrá la forma:

$$p(x) = A * (x - R1) * (x - R2) * (x - R3)$$

Como es mónico, podemos decir que $A=1$

$$p(x) = 1 * (x - R1) * (x - R2) * (x - R3)$$

$$p(x) = (x - R1) * (x - R2) * (x - R3)$$

Sabemos que dos de sus raíces son las del polinomio $q(x)$ entonces encontrémoslas:

$$q(x) = 0$$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

Por la cuadrática sacamos las raíces $R1=1/3$ y $R2=-1/2$, reemplazamos en $p(x)$

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) * \left(x - \frac{1}{2}\right) * (x - R3)$$

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) * \left(x + \frac{1}{2}\right) * (x - R3)$$

También sabemos que:

$$p(1) = 3$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) * \left(1 + \frac{1}{2}\right) * (1 - R3) = 3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right) * \left(\frac{3}{2}\right) * (1 - R3) = 3$$

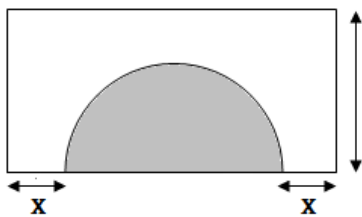
$$1 * (1 - R3) = 3$$

$$1 - R3 = 3$$

$$R3 = -2$$

Respuesta: $p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) * \left(x + \frac{1}{2}\right) * (x + 2)$

EJERCICIO N° 31



En un terreno rectangular, de 92 m de frente y $F = 18\pi$ m de fondo se emplea una zona semicircular para instalar puestos de comidas. El área de la parte restante es $774\pi \text{ m}^2$. Calcule la longitud de x.

Luego se compra a \$108 el metro cuadrado de un tipo de baldosas ¿Cuál es el costo de embaldosar la zona semicircular de comidas si además se debe comprar un 14% más de la zona a cubrir?

Solución:

Como podemos ver, el diámetro de la zona circular es el largo del frente menos las dos x entonces:

$$\text{Diametro del circulo} = \text{Frente} - 2x$$

$$\text{Diametro del circulo} = 92 - 2x$$

Si lo dividimos por dos tendremos el radio del círculo:

$$\text{Radio} = \frac{\text{Diametro del circulo}}{2}$$

$$\text{Radio} = \frac{92\text{m} - 2x}{2}$$

$$\text{Radio} = 46\text{m} - x$$

Ahora podemos calcular la superficie del terreno sin la zona de comidas sacando el área total del rectángulo del terreno y restándole la de la zona circular:

Superficie restante = Superficie rectangulo – Superficie semicirculo

$$774\pi \text{ m}^2 = \text{Frente} * \text{Fondo} - \frac{\pi * \text{Radio}^2}{2}$$

$$774\pi \text{ m}^2 = 92\text{m} * 18\pi \text{ m} - \frac{\pi * (46\text{m} - x)^2}{2}$$

$$-882 \text{ m}^2 = - \frac{2116\text{m}^2 + x^2 - 92x \text{ m}}{2}$$

$$1764 = 2116\text{m}^2 + x^2 - 92x \text{ m}$$

$$0 = 352\text{m}^2 + x^2 - 92x \text{ m}$$

Las raíces de esta cuadrática son $x = 4$ y $x = 88$, pero x no puede ser 88m porque no tendría lógica el esquema (se pasaría de los 92m de frente) por lo tanto:

$$x = 4\text{m}$$

Ahora calculemos la superficie del patio de comidas:

$$\text{Superficie semicirculo} = \frac{\pi * (46\text{m} - 4\text{m})^2}{2}$$

$$\text{Superficie semicirculo} = \frac{\pi * (42\text{m})^2}{2}$$

$$\text{Superficie semicirculo} = 882 \pi \text{ m}^2$$

Sabemos que vamos a necesitar un 14% más de m^2 de baldosas, o sea

$$\frac{14 * 882\pi}{100} = 123.48 \pi \text{ m}^2 \text{ de mas .}$$

$$\text{Total de baldosas necesarias} = 882 \pi \text{ m}^2 + 123.48 \pi \text{ m}^2 = 1005.48 \pi \text{ m}^2$$

Ahora debemos calcular cual va a ser el costo de estos 1005.48 m^2 de baldosas, por lo tanto, por regla de tres:

$$\begin{array}{l} 1\text{m}^2 \text{-----} \$108 \\ 1005.48 \pi \text{ m}^2 \text{-----} \$108591.84 \pi \end{array}$$

Multiplico por π

$$\$108591.84 \pi \cong \$341151.33$$

Respuesta: $x = 4\text{m}$ y el costo de embaldosar es de $\$341151.33$

EJERCICIO N° 32

En el centro de una fogata la temperatura es de $C^{\circ}400$. A una distancia x del centro, la temperatura es $T(x) = \frac{32400}{x^2+c}$. ¿En qué intervalo de distancias desde el centro la temperatura es menor a 144° ?

Solución:

Sabemos que la temperatura en la fogata, es decir, a distancia $0m$ es 400 , entonces:

$$T(0) = 400^{\circ}$$

$$\frac{32400^{\circ}}{0^2 + c} = 400^{\circ}$$

$$c = \frac{32400^{\circ}}{400^{\circ}}$$

$$c = 81^{\circ}$$

Entonces $t(x)$ queda

$$T(x) = \frac{32400^{\circ}}{x^2 + 81^{\circ}}$$

Tenemos que hallar para que intervalos la distancia es menor a 144 entonces:

$$T(x) < 144^{\circ}$$

$$\frac{32400^{\circ}}{x^2 + 81^{\circ}} < 144^{\circ}$$

$$x^2 + 81^{\circ} > 225^{\circ}$$

$$x^2 > 144^{\circ}$$

Como la distancia es siempre positiva no es necesario poner modulo, por lo tanto

$$x > 12 \quad \Rightarrow \quad x \in (12; \infty)$$

Respuesta: La temperatura es menor a los 144° cuando la distancia supera los $12m$ o lo que es lo mismo, cuando pertenece al intervalo $(12; \infty)$

EJERCICIO N° 33

Un círculo tiene $26cm$ de diámetro ¿En que porcentaje debe disminuir el radio para que el área disminuya en $101,76ncm^2$?

Solución:

Nos dicen que el círculo tiene 26 cm de diámetro, por lo tanto tiene 13cm de radio.

$$R = \frac{26}{2} = 13$$

Calculamos el área actual

$$Area\ actual = \pi * R^2 = \pi * 13^2 \cong 169\pi cm^2$$

Tenemos que calcular el R' para que el área sea 101,76cm² menor que el área actual.

$$Area' = \pi R'^2$$

$$169\pi cm^2 - 101,76\pi cm^2 = \pi R'^2$$

$$67,24\pi cm^2 = \pi R'^2$$

$$R'^2 = 67,24 cm^2$$

$$R' = 8,2 cm$$

O sea que el radio disminuye en $13 cm - 8,2 cm = 4,8 cm$

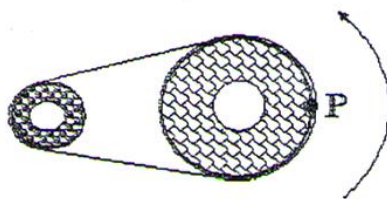
Veamos que porcentaje del radio total representan los 4,8cm

13cm ----- 100%

4,8cm ----- 36,92%

Respuesta: *El radio debe disminuir un 36,92%*

EJERCICIO N° 34



Una correa conecta dos poleas de radio 15 cm y 38 cm respectivamente; si la de menor área da un giro completo, ¿Qué ángulo expresado en grados minutos y segundos giró el punto P de la polea mayor respecto del centro?

Solución:

Sabemos que cuando está en movimiento la cantidad de correa que pasa por una polea es la misma que pasa por la otra.

También sabemos que en un giro completo por la polea chiquita pasa un perímetro completo de correa.

$$\text{Cantidad de correa que circula en un giro de la polea chica} = 2\pi * \text{radiochico}$$

$$\text{Cantidad de correa que circula en un giro de la polea chica} = 2\pi * 15\text{cm}$$

$$\text{Cantidad de correa que circula en un giro de la polea chica} = 30\pi\text{cm}$$

Ahora tenemos que hallar que ángulo α corresponde a un recorrido de 30π en la polea grande, o sea que sector de perímetro (es como el sector circular, pero para el perímetro en vez de para el área).

$$\text{Cantidad de correa que circula en un giro de la polea grande} = \frac{2\pi * \text{radiogrande} * \alpha}{360^\circ}$$

$$30\pi\text{cm} = \frac{2\pi * \text{radiogrande} * \alpha}{360^\circ}$$

$$30\pi\text{cm} = \frac{2\pi * 38\text{cm} * \alpha}{360^\circ}$$

$$15\text{cm} = \frac{38\text{cm} * \alpha}{360^\circ}$$

$$\frac{15}{38} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$\left(\frac{2700}{19}\right)^\circ = \alpha$$

Para pasarlo a grados minutos y segundos solo hay que escribir el numero y tocar el simbolito de grados en la calculadora.

$$142^\circ 6' 18.95'' = \alpha$$

Respuesta: El punto P giro $142^\circ 6' 18.95''$ respecto de su centro

EJERCICIO N° 35

Dadas las funciones:

$$h: Dh \rightarrow R/h(x) = \sqrt{|5-x| - |x+2|}$$

$$t: Dt \rightarrow R/t(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Determinar $Dh \cap Dt$

Solución:

Primero determinemos el dominio de h como la interseccion de los dominios de todas las funciones con restricciones:

En h, $|5-x| - |x+2|$ Debe ser mayor o igual a 0 por estar dentro de una raiz

$$|5-x| - |x+2| \geq 0$$

$$|5-x| \geq |x+2|$$

Suprimo uno de los dos modulos por propiedades de resolución de ecuaciones con modulos

$$|5-x| \geq x+2$$

Abro el modulo:

$$\begin{array}{l} 5-x \geq x+2 \quad \vee \quad 5-x \leq -(x+2) \\ 5-2 \geq x+x \quad \vee \quad 5+2 \leq -x+x \\ 3 \geq 2x \quad \vee \quad 7 \leq 0 \\ x \leq \frac{3}{2} \quad \vee \quad \emptyset \end{array}$$

Por lo que el dominio de h:

$$Dh : \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

En t, $(x^2 - 4x + 5)$ Debe ser distinto de 0 por ser denominador

$$x^2 - 4x + 5 \neq 0$$

Como es una cuadratica, hallamos los ceros y vemos que no posee raices reales, por lo tanto no posee restricciones y el dominio de t

$$Dt = R$$

Por ultimo:

$$Dh \cap Dt = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cap \mathbf{R}$$

$$Dh \cap Dt = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Respuesta: $Dh \cap Dt = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

EJERCICIO N° 36

Sean $h: Dh \rightarrow Ih/h(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $t: Dt \rightarrow It/t(x) = \frac{1}{|x-4|-4}$

Obtenga $Dh \cap Dt$

Solución:

Establezcamos el Dh como la interseccion de los dominios de todas las funciones limitantes (en este caso el logaritmo y el denominador).

Dominio de h:

$\frac{1+x}{1-x}$ debe ser mayor que 0 por ser argumento de logaritmo

$1-x$ debe ser distinto de 0 por ser denominador

Entonces

$$\left(\frac{1+x}{1-x} > 0\right) \wedge (1-x \neq 0)$$

Para que una fracción sea mayor a cero, numerador y denominador deben tener el mismo signo, por lo tanto

$$\begin{aligned} & \{[(1+x > 0) \wedge (1-x > 0)] \vee [(1+x < 0) \wedge (1-x < 0)]\} \wedge [1-x \neq 0] \\ & [(x > -1 \wedge 1 > x) \vee (x < -1 \wedge 1 < x)] \wedge x \neq 1 \\ & [(-1; 1) \vee \emptyset] \wedge x \neq 1 \\ & (-1; 1) \wedge x \neq 1 \\ & Dh = (-1; 1) \end{aligned}$$

Establezcamos ahora el Dt como la interseccion de los dominios de todas las funciones limitantes (en este caso el denominador)

Dominio de t:

$(|x - 4| - 4)$ debe ser distinto de 0 por hallarse en un denominador:

$$\begin{aligned} |x - 4| - 4 &\neq 0 \\ |x - 4| &\neq 4 \\ (x - 4 \neq 4) \wedge (x - 4 \neq -4) \\ x &\neq 8 \wedge x \neq 0 \\ Dt &= \mathbb{R} - \{0\} - \{8\} \end{aligned}$$

$$Dh \cap Dt = (-1; 1) \cap (\mathbb{R} - \{0\} - \{8\})$$

$$Dh \cap Dt = (-1; 0) \cup (0; 1)$$

Respuesta: $Dh \cap Dt = (-1; 0) \cup (0; 1)$

EJERCICIO N° 37

Dada $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = e^{2x+3} - e^{4x+3} + 2e^3$ **Obtenga si existen los ceros de dicha funcion.**

Solución:

Debemos hallar los ceros de $g(x)$ por lo tanto igualmos la función a cero:

$$e^{2x+3} - e^{4x+3} + 2e^3 = 0$$

Por propiedades de la potenciación sabemos que $a^{b+c} = a^b * a^c$ entonces

$$[e^{2x} * e^3] - [e^{4x} * e^3] + 2e^3 = 0$$

Saco factor comun e^3

$$e^3 * [e^{2x} - e^{4x} + 2] = 0$$

Paso el e^3 dividiendo

$$[e^{2x} - e^{4x} + 2] = 0$$

Por propiedades de la potenciación sabemos que $(a^b)^c = a^{b*c}$ entonces

$$[e^{2x} - (e^{2x})^2 + 2] = 0$$

Realizo el reemplazo $Z = e^{2x}$

$$[Z - Z^2 + 2] = 0$$

Esta es una cuadratica con ceros en $Z = -1$ y $Z = 2$ Por lo tanto:

$$e^{2x} = 2 \quad \vee \quad e^{2x} = -1$$

$$\ln(e^{2x}) = \ln 2 \quad \vee \quad \emptyset$$

(e elevado a ningun numero Real da un numero negativo)

$$2x = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$g\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) = 0$$

Respuesta: El unico 0 de la funcion se encuentra en $\frac{\ln(2)}{2}$

EJERCICIO N° 38

Hallar el polinomio $P(x)$ de grado mínimo y tal que:

- a) es reducido, tiene raíces simples en -1 y 3, y tiene una raíz doble 6
- b) tiene raices simples en 2 y -2, $P(-1)=3$

Solución:

Nos pide que el polinomio tenga raíces simples en -1 y 3 y una raíz doble 6, no nos dice nada del coeficiente principal así que voy a elegir que sea uno para que las cuentas queden más fácil.

Un polinomio en función de sus raíces tiene la forma

$$P(x) = \text{Coeficiente principal} * [(x - \text{Raiz1})^{\text{orden1}} * (x - \text{Raiz2})^{\text{orden2}} * (x - \text{Raiz3})^{\text{orden3}} \dots]$$

Teniendo en cuenta que una raíz simple tiene orden 1 y una raíz doble orden 2, reemplazo

$$P(x) = 1 * [(x - (-1))^1 * (x - 3)^1 * (x - 6)^2]$$

Opero

$$P(x) = 1 * [(x - (-1))^1 * (x - 3)^1 * (x - 6)^2]$$

$$P(x) = (x + 1) * (x - 3)(x - 6)^2$$

$$P(x) = (x^2 + x - 3x - 3) * (x^2 - 12x + 36)$$

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3) * (x^2 - 12x + 36)$$

$$P(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 2x^3 + 24x^2 - 72x - 3x^2 + 36x - 108$$

Un polinomio es reducido cuando todos sus términos de igual coeficiente se encuentran sumados entre si.

$$P(x) = x^4 - 14x^3 + 57x^2 - 36x - 108$$

Para el caso b comenzamos con la misma fórmula, pero al coeficiente principal lo voy a llamar A

$$P(x) = \text{Coeficiente principal} * [(x - \text{Raiz1})^{\text{orden1}} * (x - \text{Raiz2})^{\text{orden2}} * (x - \text{Raiz3})^{\text{orden3}} \dots]$$

$$P(x) = A * [(x - 2)^1 * (x - (-2))^1]$$

$$P(x) = A * (x - 2) * (x + 2)$$

$$P(x) = A * (x^2 + 2x - 2x - 2)$$

$$P(x) = A * (x^2 - 2)$$

$$P(x) = Ax^2 - 2A$$

Por otro lado nos dice que $P(-1)=3$ osea que cuando reemplazo la x por -1 debe dar 3 como resultado

$$P(-1) = 3$$

$$A(-1)^2 - 2A = 3$$

$$A - 2A = 3$$

$$-A = 3$$

$$A = -3$$

Osea que nuestro polinomio queda

$$P(x) = Ax^2 - 2A$$

$$P(x) = (-3)x^2 - 2 * (-3)$$

$$P(x) = -3x^2 + 6$$

Respuesta: a) $P(x) = x^4 - 14x^3 + 57x^2 - 36x - 108$ b) $P(x) = -3x^2 + 6$

EJERCICIO Nº 39

Determine el dominio de la funcion

$$g: Dg \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = \frac{2^x}{\sqrt{\ln|x(x-3)+1|}}$$

Solución:

El dominio de la funcion lo tenemos que sacar con la interseccion de los dominios de todas las funciones limitantes

$$|x(x-3)+1| > 0 \text{ por encontrarse dentro de un logaritmo}$$

$$\ln|x(x-3)+1| \geq 0 \text{ por encontrarse dentro de una raiz}$$

$$\sqrt{\ln|x(x-3)+1|} \neq 0 \text{ por ser denominador}$$

Hagamos de a una

$$|x(x-3)+1| > 0 \text{ por encontrarse dentro de un logaritmo}$$

Como es un modulo, siempre es mayor a cero exepcto cuando vale cero entonces

$$\begin{aligned} x(x-3)+1 &\neq 0 \\ x^2-3x+1 &\neq 0 \end{aligned}$$

Las raices de esta cuadratica son $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Por lo tanto para que $|x(x-3)+1| > 0$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\} - \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$\ln|x(x-3)+1| \geq 0$ por encontrarse dentro de una raiz

$$e^{\ln|x(x-3)+1|} \geq e^0$$

Como las bases son la misma, igualo exponentes

$$|x(x-3)+1| \geq 1$$

abro el modulo

$$\begin{aligned} x(x-3) + 1 &\geq 1 & \vee & & x(x-3) + 1 &\leq -1 \\ x^2 - 3x &\geq 0 & \vee & & x^2 - 3x + 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Las raíces de la primera cuadrática son 0 y 3 y como el coeficiente principal es positivo, la cuadrática es positiva en el intervalo $(-\infty; 0] \cup [3; \infty)$

Las raíces de la segunda cuadrática son 2 y 1 y como el coeficiente principal es positivo, la cuadrática es negativa en el intervalo $[1; 2]$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &\geq 0 & \vee & & x^2 - 3x + 2 &\leq 0 \\ (-\infty; 0] \cup [3; \infty) & \cup & & & [1; 2] & \\ (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; \infty) & & & & & \end{aligned}$$

Osea que para que $\text{Ln}|x(x-3) + 1| \geq 0$
 $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; \infty)$

$\sqrt{\text{Ln}|x(x-3) + 1|} \neq 0$ por ser denominador

$$\text{Ln}|x(x-3) + 1| \neq 0$$

$$e^{\text{Ln}|x(x-3)+1|} \neq e^0$$

$$|x(x-3) + 1| \neq 1$$

abro el modulo

$$\begin{aligned} x(x-3) + 1 &\neq 1 & \vee & & x(x-3) + 1 &\neq -1 \\ x^2 - 3x &\neq 0 & \vee & & x^2 - 3x + 2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Las raíces de la primera cuadrática son 0 y 3 y las raíces de la segunda cuadrática son 2 y 1.
Entonces

$$\begin{aligned} (x \neq 0 \wedge x \neq 3) & \vee & & & (x \neq 1 \wedge x \neq 2) & \\ (\mathbb{R} - \{0\} - \{3\}) & \cup & & & (\mathbb{R} - \{1\} - \{2\}) & \\ (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty) & & & & & \end{aligned}$$

Osea que para que $\sqrt{\text{Ln}|x(x-3) + 1|} \neq 0$
 $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$

Ahora hacemos la interseccion de los tres para sacar el dominio

$$Dg = \left(\mathbb{R} - \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\} - \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\} \right) \cap ((-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)) \cap ((-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; \infty))$$

Respuesta: $Dg = (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$

EJERCICIO N° 40

Determine la ecuacion de la asintota vertical de la funcion $f: Df \rightarrow If/f(x) = \frac{ax+2}{bx-5}$

Si se sabe que su grafica contiene al punto(1,6) y la ecuacion de su asintota horizontal es $y=3$.

Solución:

Como la función contiene al punto (1; 6), sabemos que

$$f(1) = 6$$

Entonces

$$f(1) = \frac{a * 1 + 2}{b * 1 - 5}$$

$$6 = \frac{a + 2}{b - 5}$$

$$6 * (b - 5) = a + 2$$

$$6b - 30 = a + 2$$

$$6b - 30 - 2 = a$$

$$6b - 32 = a$$

Y también sabemos que su asíntota horizontal es $y = 3$, la asíntota horizontal se calcula dividiendo la x de arriba por la de abajo entonces

$$AH = \frac{ax}{bx}$$

$$3 = \frac{a}{b}$$

Pero $a = 6b - 32$ entonces

$$3 = \frac{6b - 32}{b}$$

$$3b = 6b - 32$$

$$-3b = -32$$

$$b = \frac{32}{3}$$

Y $a = 6b - 32$ entonces

$$a = 6 * \frac{32}{3} - 32 = 32$$

Entonces $f(x)$ queda

$$f(x) = \frac{32x + 2}{\frac{32}{3}x - 5}$$

$$f(x) = \frac{32x + 2}{\frac{32x - 15}{3}}$$

$$f(x) = \frac{(32x + 2) * 3}{32x - 15}$$

$$f(x) = \frac{96x + 6}{32x - 15}$$

La asíntota vertical se saca igualando a cero el denominador, entonces

$$32x - 15 = 0$$

$$32x = 15$$

$$x = \frac{15}{32}$$

Respuesta: La ecuación de la asíntota vertical es $x = \frac{15}{32}$

EJERCICIO N° 41

Hallar $(f \circ g)^{-1}(x)$ si se conoce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2x - 3$ y
 $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = \frac{x}{x+2}$

Solución:

Para que $f \circ g$ pueda hacerse, la imagen de g debe estar incluida en el dominio de f . Como $\mathbb{R} - \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ puedo componer sin tener que hacer restricciones de dominio

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$f \circ g(x) = 2 * \frac{x}{x+2} - 3$$

$$f \circ g(x) = \frac{2x}{x+2} - 3$$

$$f \circ g(x) = \frac{2x - 3(x+2)}{x+2}$$

$$f \circ g(x) = \frac{2x - 3x - 6}{x+2}$$

$$f \circ g(x) = \frac{-x - 6}{x+2}$$

Ahora hallaremos $(f \circ g)^{-1}(x)$

Para esto debemos despejar x de $f \circ g(x)$

$$f \circ g(x) = \frac{-x - 6}{x+2}$$

$$f \circ g(x) * (x+2) = -x - 6$$

$$f \circ g(x) * x + 2 * f \circ g(x) = -x - 6$$

$$f \circ g(x) * x + x = -2 * f \circ g(x) - 6$$

$$x * (f \circ g(x) + 1) = -2f \circ g(x) - 6$$

$$x = \frac{-2f \circ g(x) - 6}{(f \circ g(x) + 1)}$$

Ahora cambio $f \circ g(x)$ por x y x por $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-2x - 6}{(x + 1)}$$

Respuesta: $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-2x-6}{(x+1)}$

EJERCICIO N° 42

Los biólogos han observado la frecuencia de los cantos de los grillos de una cierta especie, está relacionada en forma lineal con la temperatura. Un grillo produce 120 sonidos por minuto a 21°C y 168 sonidos a 23°C.

- a- Hallar la ecuación lineal que relaciona la temperatura y el numero de sonidos por minuto.
- b- Indicar que representa la pendiente en la ordenada de la recta
- c- Estimar la temperatura para 150 sonidos por minuto

Solución:

Sabemos que la frecuencia con respecto a la temperatura tiene forma de función lineal.

$$\text{Frecuencia} = A * \text{temperatura} + B$$

Nos dice que la frecuencia es 120 a los 21° entonces

$$\begin{aligned} 120 &= A * 21 + B \\ 120 - 21A &= B \end{aligned}$$

Tambien me dice que frecuencia es 168 a los 23° entonces

$$168 = A * 23 + B$$

Pero reemplazo con lo que es B

$$\begin{aligned} 168 &= A * 23 + (120 - 21A) \\ 168 &= 23A + 120 - 21A \\ 168 - 120 &= 23A - 21A \\ 48 &= 2A \\ A &= 24 \end{aligned}$$

Vuelvo a reemplazar con lo que es B

$$\begin{aligned} B &= 120 - 21 * 24 \\ B &= 120 - 504 \\ B &= -384 \end{aligned}$$

Osea que la función lineal queda

$$\text{Frecuencia} = 24 * \text{Temperatura} - 384$$

La pendiente de una función lineal representa cuanto crece la variable y por cada una que se modifica en x. En este caso significa que cada un grado de temperatura mas, la frecuencia aumentara en 24 sonidos.

Tenemos que hallar a que temperatura, la frecuencia es de 150 sonidos, entonces

$$\begin{aligned}\text{Frecuencia} &= 150 \\ 24 * \text{Temperatura} - 384 &= 150 \\ 24 * \text{Temperatura} &= 534 \\ \text{Temperatura} &= 22.25^\circ\end{aligned}$$

Respuesta: La ecuación que relaciona frecuencia con temperatura es $\text{Frecuencia} = 24 * \text{Temperatura} - 384$. La pendiente es 24 y simboliza cuantas unidades varia la temperatura con respecto a la una unidad de frecuencia y la frecuencia a 22.25° es de 150 sonidos por minuto

EJERCICIO N° 43

Para una pequeña empresa de manufacturas el costo unitario expresado en pesos para producir x unidades, se expresa como: $C(x) = x^2 - 120x + 400$

- a- Cuántos artículos hay que producir para reducir al mínimo al costo unitario
- b-Cuál es ese costo mínimo
- c- Qué representa la ordenada al origen

Solución:

Sabemos que el costo varia según

$$C(x) = x^2 - 120x + 400$$

Tenemos que hallar para que cantidad de artículos el costo es minimo, osea para que x, c(x) es minimo, o diciéndolo de otra manera, el minimo de la parabola $x^2 - 120x + 400$

El minimo de una parábola con coeficiente principal positivo se encuentra en su vértice, calculemoslo

$$X_{\text{Vertice}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-120)}{2 * 1} = \frac{120}{2} = 60$$

Osea que al fabricar 60 productos el costo es minimo.

Para sacar ese costo minimo solo tenemos que reemplazar con $x = 60$ en la ecuacion de costo

$$\begin{aligned} \text{Costo minimo} &= C(60) \\ \text{Costo minimo} &= 60^2 - 12 * 60 + 400 \\ \text{Costo minimo} &= 3600 - 720 + 400 \\ \text{Costo minimo} &= 3280 \end{aligned}$$

Respuesta: El costo mínimo se produce al fabricar 60 productos y es de \$3280
 La ordenada al origen simboliza cuánto vale la función cuando la variable x es cero, en este caso representa el costo de no producir ningún producto. Es decir que la fábrica sin funcionar tiene un gasto de \$400

EJERCICIO N° 44

Las rectas de ecuación $y = P(x) = 2x - 20$ e $y = q(x)$ se cortan en un punto de abscisa 4 y una de ellas tiene pendiente 6.

Determine la funcion inversa de $f: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{m\} / f(x) = p(x)/q(x)$

Solución:

Sabemos que $q(x)$ es una recta, entonces tiene forma de función lineal

$$q(x) = ax + b$$

Dicen que una de las funciones $p(x)$ y $q(x)$ tiene pendiente 6, y como vemos que $P(x)$ tiene pendiente dos (la pendiente es el numero que multiplica a la x), podemos decir que la que tiene pendiente 6 es $q(x)$

$$q(x) = 6x + b$$

$P(x)$ y $q(x)$ se cortan en la abscisa 4, osea en $x = 4$ entonces

$$P(4) = q(4)$$

$$2 * 4 - 20 = 6 * 4 + b$$

$$8 - 20 = 24 + b$$

$$b = -12 - 24$$

$$q(x) = 6x - 36$$

Por lo tanto $P(x)$ y $q(x)$ quedan

$$P(x) = 2x - 20$$

$$q(x) = 6x - 36$$

Ahora hallemos $f(x) = p(x)/q(x)$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$f(x) = \frac{2x - 20}{6x - 36}$$

$$f(x) = \frac{2 * (x - 10)}{2 * (3x - 18)}$$

$$f(x) = \frac{(x - 10)}{(3x - 18)}$$

Osea que $f(x)$ queda

$$f: \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} / f(x) = \frac{(x - 10)}{(3x - 18)}$$

Hallemos ahora la inversa

$$f(x) = \frac{(x - 10)}{(3x - 18)}$$

Despejamos x

$$f(x) * (3x - 18) = x - 10$$

$$f(x) * 3x - 18f(x) = x - 10$$

$$f(x) * 3x - x = -10 + 18f(x)$$

$$x = \frac{-10 + 18f(x)}{3f(x) - 1}$$

Reemplazamos $f(x)$ por x y x por $f^{-1}(x)$

$$f(x)^{-1} = \frac{-10 + 18x}{3x - 1}$$

Cuando hacemos la inversa el dominio y la imagen se invierten

$$\text{Respuesta: } f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{6\} / f^{-1}(x) = \frac{-10+18x}{3x-1}$$

EJERCICIO N° 45

Sea una función cuadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2 + Bx + C$,
se sabe que la suma de los ceros es 4 y el producto de ceros es 1. Determine el conjunto imagen de f

Solución:

Tenemos

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2 + Bx + C,$$

Sus raíces son

$$Raiz1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 * 1 * C}}{2 * 1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$Raiz2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 * 1 * C}}{2 * 1} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

Sumemos, sabemos que $Raiz1 + Raiz2 = 4$

$$Raiz1 + Raiz2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} + \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$4 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C} - B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$8 = -2B$$

$$B = -4$$

Multipliquemos, sabemos que $Raiz1 * Raiz2 = 1$

$$Raiz1 * Raiz2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} * \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$1 = \frac{(-B + \sqrt{B^2 - 4C}) * (-B - \sqrt{B^2 - 4C})}{2 * 2}$$

$$1 = \frac{(-B)^2 - B * \sqrt{B^2 - 4C} + B * \sqrt{B^2 - 4C} - (\sqrt{B^2 - 4C})^2}{4}$$

$$4 = (-B)^2 - (\sqrt{B^2 - 4C})^2$$

$$4 = B^2 - B^2 + 4C$$

$$4 = 4C$$

$$C = 1$$

Entonces queda

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 4x + 1$$

Para sacar el conjunto imagen debemos hallar la Y_{Vertice} y como su coeficiente principal es positivo, su imagen será $(Y_{\text{Vertice}}; \infty)$

$$X_{\text{Vertice}} = -\frac{B}{2a} = -\frac{-4}{2 * 1} = 2$$

$$Y_{\text{Vertice}} = f(X_{\text{Vertice}}) = 2^2 - 4 * 2 + 1 = -3$$

Como $f(x)$ es una parábola con coeficiente principal positivo, tiene forma de sonrisa contenta, por lo tanto su imagen será desde la Y_{Vertice} en adelante

Respuesta: Imagen de $f = (-3; \infty)$

EJERCICIO Nº 46

Sea $y = 3x^2 - Kx - 1$ la ecuación de una curva parábola e $y = Kx - 2$ la de una recta. Deduzca K (constante real) Tal que la parábola y la recta no se intersequen

Solución:

Si las rectas no se intersectan entonces

$$Kx - 2 \neq 3x^2 - Kx - 1$$

$$0 \neq 3x^2 - Kx - 1 - Kx + 2$$

$$0 \neq 3x^2 - 2Kx + 1$$

Eso es una cuadrática distinta de cero, es decir una cuadrática sin raíces. Una cuadrática no tiene raíces cuando su discriminante (lo que está adentro de la raíz en la fórmula resolvente) es menor a cero. Entonces

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(-2K)^2 - 4 * 3 * 1 < 0$$

$$4K^2 - 12 < 0$$

$$K^2 < \frac{12}{4}$$

$$|K| < \sqrt{3}$$

$$K < \sqrt{3} \quad \vee \quad K > -\sqrt{3}$$

$$K \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

Respuesta si $K \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ La recta y la parábola no se cortan

EJERCICIO Nº 47

Halle $f(x)$ sabiendo que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x+1) = x^2 - 3x + a$ y $f(0) = 6$,

luego exprese por extension el conjunto $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge \log(x-2 |f(x)|) = 2\}$

Solución:

Sabemos que

$$f(x+1) = x^2 - 3x + a$$

Si a todas las x les resto 1 resulta

$$f((x-1)+1) = (x-1)^2 - 3(x-1) + a$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + a$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 + a$$

Ahora sabemos que $f(0) = 6$, entonces

$$f(0) = 0^2 - 5 * 0 + 4 + a$$

$$6 = 4 + a$$

$$a = 2$$

Entonces $f(x)$ queda

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Ahora debemos hallar $A = \{x/x \in \mathbf{R} \wedge \log(x - 2 |f(x)|) = 2\}$

$$\log(x - 2 |f(x)|) = 2$$

Aplico 10 elevado a todo de ambos lados para eliminar el log

$$10^{\log(x - 2 |x^2 - 5x + 6|)} = 10^2$$

$$x - 2 |x^2 - 5x + 6| = 100$$

$$-2 |x^2 - 5x + 6| = 100 - x$$

$$|x^2 - 5x + 6| = -50 + \frac{1}{2}x$$

$$x^2 - 5x + 6 = -50 + \frac{1}{2}x \quad \vee \quad x^2 - 5x + 6 = 50 - \frac{1}{2}x$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 56 = 0 \quad \vee \quad x^2 - \frac{9}{2}x - 44 = 0$$

$$\emptyset \quad \vee \quad x = 9.25 \quad \vee \quad x = -4.75$$

Respuesta: $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = x^2 - 5x + 6$ **y** $A = \{x = 9.25 \vee x = -4.75\}$

EJERCICIO N° 48

Un hexagono regular tiene un lado de longitud igual a 20 cm ¿En cuantos cm disminuye su lado si su area disminuye en $216\sqrt{3}\text{cm}^2$?

Solución:

Sabemos que el area del hexagono es

$$\text{Area hexágono} = \frac{\text{Perimetro} * \text{Apotema}}{2}$$

Y el apotema se puede calcular por pitagoras, ya que al ser un hexagono , el apotema forma un triangulo rectangulo, de hipotenusa = lado y un cateto = lado / 2 . (para comprender mejor visualizar ejercicio numero (el primero de este documento))

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

$$(\text{lado})^2 = \left(\frac{1}{2}\text{lado}\right)^2 + (\text{Apotema})^2$$

$$(\text{lado})^2 - \left(\frac{1}{2}\text{lado}\right)^2 = (\text{Apotema})^2$$

$$\sqrt{(\text{lado})^2 - \left(\frac{1}{2}\text{lado}\right)^2} = \text{Apotema}$$

Calculemos el area original

$$\text{Area hexágono original} = \frac{\text{Perimetro} * \sqrt{(\text{lado})^2 - \left(\frac{1}{2}\text{lado}\right)^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono original} = \frac{6 * 20\text{cm} * \sqrt{(20\text{cm})^2 - \left(\frac{1}{2} * 20\text{cm}\right)^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono original} = \frac{120\text{cm} * \sqrt{300\text{cm}^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono original} = 60 \sqrt{300}\text{cm}$$

$$\text{Area hexágono original} = 60 * 10 \sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{Area hexágono original} = 600 \sqrt{3}\text{cm}$$

Ahora debemos calcular el valor del lado cuando su area disminuye en $216\sqrt{3}\text{cm}^2$, por lo tanto, nuestro nuevo hexagono tendra un area de:

$$\text{Area hexágono modificado} = \text{Area hexagono original} - 216 \sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{Area hexágono modificado} = 600 \sqrt{3}\text{cm}^2 - 216 \sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{Area hexágono modificado} = 384 \sqrt{3}\text{cm}^2$$

Calculemos el area del hexágono modificado

$$\text{Area hexágono} = \frac{\text{Perimetro} * \sqrt{(\text{lado})^2 - \left(\frac{1}{2}\text{lado}\right)^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono modificado} = \frac{6 * (\text{lado modificado}) * \sqrt{(\text{lado modificado})^2 - \left(\frac{1}{2}(\text{lado modificado})\right)^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono modificado} = \frac{6 * \text{lado modificado} * \sqrt{(\text{lado modificado})^2 - \frac{1}{4}(\text{lado modificado})^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono modificado} = \frac{6 * \text{lado modificado} * \sqrt{\frac{3}{4}(\text{lado modificado})^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono modificado} = \frac{6 * \text{lado modificado} * \sqrt{\frac{3}{4} * (\text{lado modificado})^2}}{2}$$

$$\text{Area hexágono modificado} = \frac{6 * \text{lado modificado} * \frac{\sqrt{3}}{2} * \text{lado modificado}}{2}$$

$$\text{Area hexágono modificado} = \frac{3 * \text{lado modificado}^2 * \sqrt{3}}{2}$$

Igualamos lo que tiene que valer el area con la formula

$$\text{Area hexágono modificado} = 384 \sqrt{3} \text{cm}^2$$

$$\frac{3 * \text{lado modificado}^2 * \sqrt{3}}{2} = 384 \sqrt{3} \text{cm}^2$$

$$\frac{3 * \text{lado modificado}^2}{2} = 384 \text{cm}^2$$

$$\text{lado modificado}^2 = 256 \text{cm}^2$$

$$\text{lado modificado} = 16 \text{cm}$$

Como el lado original era de 20cm y el modificado de 16cm podemos decir que desciende en 4cm

Respuesta: Si el área desciende en $216 \sqrt{3} \text{cm}^2$ El lado desciende en 4cm

EJERCICIO N° 49

Un alambre de 100cm de longitud se corta en dos partes. Cada una de estas partes se dobla formando dos cuadrados tales que la suma de las áreas de ambos cuadrados es 325cm^2 . ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes en las que se corto el alambre?

Solución:

Tenemos las variables

$$\text{Longitud alambre 1} = X$$

$$\text{Longitud alambre 2} = 100 \text{cm} - X$$

Como se forman cuadrados, los lados de los cuadrados son

$$\text{Lado del cuadrado 1} = \frac{X}{4}$$

$$\text{Lado del cuadrado 2} = \frac{(100\text{cm} - X)}{4} = 25\text{cm} - \frac{X}{4}$$

Las áreas son

$$\text{Área cuadrado 1} = \text{Lado del cuadrado 1}^2 = \left(\frac{X}{4}\right)^2 = \frac{X^2}{16}$$

$$\text{Área cuadrado 2} = \text{Lado del cuadrado 2}^2 = \left(25\text{cm} - \frac{X}{4}\right)^2 = 625\text{cm}^2 - \frac{25\text{cm}}{2} X + \frac{X^2}{16}$$

Sabemos que la suma de las áreas es 325cm^2 entonces

$$\text{Área cuadrado 1} + \text{Área cuadrado 2} = 325\text{cm}^2$$

$$\frac{X^2}{16} + 625\text{cm}^2 - \frac{25\text{cm}}{2} X + \frac{X^2}{16} = 325\text{cm}^2$$

$$\frac{X^2}{8} + 625\text{cm}^2 - \frac{25\text{cm}}{2} X = 325\text{cm}^2$$

$$\frac{X^2 + 5000\text{cm}^2 - 100\text{cm} X}{8} = 325\text{cm}^2$$

$$X^2 + 5000\text{cm}^2 - 100\text{cm} X = 2600\text{cm}^2$$

$$X^2 + 2400\text{cm}^2 - 100\text{cm} X = 0$$

Aplicamos la formula resolvente y obtenemos

$$X = 60\text{cm} \vee X = 40\text{cm}$$

Fijate que como los dos trozos sumaban 100cm si tomamos la opcion 60cm el otro pedazo queda de 40cm, y si tomo la otra Solución resulta lo mismo pero alreves

Respuesta: Uno de los trozos mide 60cm y el otro 40cm

EJERCICIO Nº 50

La funcion $f(x) = ax^2 + bx + c$, a diferente de 0, alcanza en $x = -2$ y en $x = 4$ el valor 10. Si la ordenada al ordenada al origen es 2, determine la formula de f.

Solución:

Sabemos que la ordenada al origen es 2 La ordenada al origen es $f(0)$ entonces

$$f(0) = 2$$

$$a * 0^2 + b * 0 + c = 2$$

$$c = 2$$

Entonces

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$

Sabemos que $f(-2) = 10$ entonces

$$f(-2) = 10$$

$$a * (-2)^2 + b * (-2) + 2 = 10$$

$$4a - 2b = 8$$

$$-2b = 8 - 4a$$

$$b = -4 + 2a$$

Entonces

$$f(x) = ax^2 + (-4 + 2a)x + 2$$

$$f(x) = ax^2 - 4x + 2ax + 2$$

Además $f(4) = 10$

$$f(4) = 10$$

$$a(4)^2 - 4 * 4 + 2a * 4 + 2 = 10$$

$$16a - 16 + 8a + 2 = 10$$

$$24a = 24$$

$$a = 1$$

Entonces

$$f(x) = 1 * x^2 - 4x + 2 * 1 * x + 2$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

Respuesta: $f(x) = x^2 - 2x + 2$

EJERCICIO N° 51

El coeficiente principal de un polinomio de grado 3 es 4, el termino independiente es -16, si $X_1 = 2$ es raiz doble, encuentre el polinomio.

Solución:

Sabemos que tiene grado 3, entonces tiene la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Como el coeficiente principal es 4

$$f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$$

El termino independiente es -16

$$f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx - 16$$

Y sabemos que $x = 2$ es raiz doble, entonces dividamos $f(x)$ por 2 (ruffini) dos veces

2	4	b	c	-16
		8	$2b + 16$	$4b + 32 + 2c$
2	4	$b + 8$	$2b + 16 + c$	$4b + 2c + 16$
		8	$2b + 32$	
2	4	$b + 16$	$4b + 48 + c$	

Los restos deben ser cero (porque 2 es raiz), entonces

$$4b + 2c + 16 = 0$$

$$2c = -16 - 4b$$

$$c = -8 - 2b$$

El otro resto

$$48 + 4b + c = 0$$

Reemplazo con $c = -8 - 2b$

$$48 + 4b + (-8 - 2b) = 0$$

$$48 + 4b - 8 - 2b = 0$$

$$2b = -40$$

$$b = -20$$

Pero como $c = -8 - 2b$

$$c = -8 - 2 * -20$$

$$c = -8 + 40$$

$$c = 32$$

Respuesta: $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 32x - 16$

EJERCICIO N° 52

Un quimico tiene 2 Soluciones, cada una contiene un cierto porcentaje de acido. Si una Solución tiene 40% de acido y la otra 70%. que cantidad de cada una debe mezclarse para obtener 75 mililitros de una Solución que contenga 60% de acido?

Solución:

Llamemos

X = cantidad de mililitros de solucion 1

Y = cantidad de mililitros de solucion 2

Como la primer solución tiene 40% de ácido y la segunda 70%, calculemos cuantos ml de ácido hay en X e Y mililitros de solución

$$\text{Cantidad de mililitros de acido de la solucion 1} = \frac{40 * X}{100} = 0.4X$$

$$\text{Cantidad de mililitros de acido de la solucion 2} = \frac{70 * Y}{100} = 0.7Y$$

Nosotros queremos tener una Solución de 75 mililitros con un 60% de acido, calculemos cuantos mililitros de acido son ese 60%

100% -----75ml
60%-----45ml

Es decir, queremos 45 mililitros de ácido (60% de 75 mililitros de solución)

Si sumamos la cantidad de mililitros de cada solución, debe darnos 75ml que es el volumen de solución a formar

$$\text{cantidad de ml de solución 1} + \text{cantidad de ml de solución 2} = \text{cantidad de ml de solución total}$$

$$\begin{aligned} X + Y &= 75\text{ml} \\ Y &= 75\text{ml} - X \end{aligned}$$

Si sumamos la cantidad de mililitros de ácido de cada solución, debe darnos 45ml que es el volumen de ácido en la solución a formar

$$\text{Cant de ml de ácido de la sol 1} + \text{Cant de ml de ácido de la sol 2} = \text{cant de ml de ácido de la sol total}$$

$$0.4X + 0.7Y = 45\text{ml}$$

Reemplazo con $Y = 75 - X$

$$0.4X + 0.7(75\text{ml} - X) = 45\text{ml}$$

$$0.4X + 52.5\text{ml} - 0.7X = 45\text{ml}$$

$$-0.3X = -7.5\text{ml}$$

$$X = 25\text{ml}$$

Reemplazo nuevamente con $Y = 75 - X$

$$Y = 75 - X$$

$$Y = 50$$

Respuesta: Debemos mezclar 25 mililitros de solución 1 y 50 de la solución 2 para obtener 75 mililitros de solución con 60% de ácido

EJERCICIO N° 53

Determine el Dominio A de f siendo

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \sqrt{\left|\frac{1}{x} + 3\right|} - 4$$

Solución

En esta función aparecen dos tipos de funciones limitantes, la raíz y la fracción.

La fracción genera que su denominador debe ser distinto de cero entonces

$$x \neq 0$$

Y la raíz genera que lo de adentro debe ser mayor o igual a cero entonces

$$\left| \frac{1}{x} + 3 \right| - 4 \geq 0$$

Por lo tanto el dominio será la intersección de estas dos condiciones

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \quad \wedge \quad \left| \frac{1}{x} + 3 \right| - 4 \geq 0 \right] \right\}$$

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \quad \wedge \quad \left| \frac{1}{x} + 3 \right| \geq 4 \right] \right\}$$

Abrimos el modulo

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{1}{x} + 3 \geq 4 \quad \vee \quad \frac{1}{x} + 3 \leq -4 \right) \right] \right\}$$

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{1}{x} \geq 1 \quad \vee \quad \frac{1}{x} \leq -7 \right) \right] \right\}$$

Ahora debemos pasar multiplicando la x, pero esto es un problema, ya que no sabemos si es positiva o negativa. Si es positiva va a pasar multiplicando como si nada y si es negativa va a dar vuelta el piquito. Entonces debemos plantear las dos opciones

$$Df = \{x/x \in [x \neq 0 \wedge ((x > 0 \wedge 1 \geq x) \vee (x < 0 \wedge 1 \leq x))] \vee [(x > 0 \wedge 1 \geq -7x) \vee (x < 0 \wedge 1 \leq -7x)]\}$$

$$Df = \{x/x \in [x \neq 0 \wedge ((x > 0 \wedge 1 \geq x) \vee (x < 0 \wedge 1 \leq x))] \vee [(x > 0 \wedge -\frac{1}{7} \leq x) \vee (x < 0 \wedge -\frac{1}{7} \geq x)]\}$$

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \wedge \left([(0; 1] \cup (\emptyset)] \cup [(\emptyset) \cup \left[-\frac{1}{7}; 0\right)] \right) \right] \right\}$$

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \wedge \left((0; 1] \cup \left[-\frac{1}{7}; 0\right) \right) \right] \right\}$$

$$Df = \left\{ x/x \in \left[x \neq 0 \cap \left(\left[-\frac{1}{7}; 0\right) \cup (0; 1] \right) \right] \right\}$$

$$Df = \left\{ x/x \in \left(\left[-\frac{1}{7}; 0\right) \cup (0; 1] \right) \right\}$$

Respuesta: $Df = \left\{ x/x \in \left(\left[-\frac{1}{7}; 0\right) \cup (0; 1] \right) \right\}$

EJERCICIO N° 54

Sea un rectángulo cuya area es $(-7x^3 + 4x^2 - 63x + 36)$ y su base mide $(x^2 + 9)$, determine los numeros x tal que su altura sea menor a 100 unidades.

Solución:

Sabemos que el area de un rectángulo es

$$\text{Area rectangulo} = \text{base} * \text{altura}$$

Reemplazamos con los datos de la consigna

$$-7x^3 + 4x^2 - 63x + 36 = (x^2 + 9) * \text{altura}$$

Calculo factor común en grupos a la izquierda de la igualdad siguiendo los siguientes pasos:

Agrupo en dos paréntesis separados por un +

$$(-7x^3 + 4x^2) + (-63x + 36) = (x^2 + 9) * \text{altura}$$

Saco factor común máximo en cada uno de ellos

$$x^2(-7x + 4) + 9(-7x + 4) = (x^2 + 9) * \text{altura}$$

Como los paréntesis son iguales puedo escribirlo como la multiplicación entre ese paréntesis y el formado por la suma de los factores comunes extraídos de los paréntesis

$$(x^2 + 9) * (-7x + 4) = (x^2 + 9) * \text{altura}$$

Ahora sigamos con el ejercicio

Los $x^2 + 9$ se cancelan

$$-7x + 4 = \text{altura}$$

Ahora nos pide que la altura debe ser menor a las 100 unidades, entonces

$$\begin{aligned} \text{altura} &< 100 \\ -7x + 4 &< 100 \\ -7x &< 96 \end{aligned}$$

Ahora voy a pasar el -7 dividiendo y como es negativo hace que el menor se de vuelta y pase a mayor

$$\begin{aligned} x &> -\frac{96}{7} \\ x &\in \left(-\frac{96}{7}; \infty\right) \end{aligned}$$

Respuesta: Para que la altura sea menor a 100 unidades la x debe ser mayor a $-\frac{96}{7}$ unidades

EJERCICIO N°55

Un cuerpo a 90°C se coloca en un cuarto que esta a una temperatura de 30°C. A la media hora la temperatura del cuerpo descendio a 55°C. La ley de enfriamiento del cuerpo responde a $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$, donde T_a es la temperatura ambiente, T_0 es la temperatura inicial del cuerpo y t se mide en horas. Cuanto tiempo habra de transcurrir para que el cuerpo este a una temperatura de 40°C?

Solución:

Bueno tenemos en primera medida la formula

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Sabemos que la T_a es 30°C entonces quedaria

$$T(t) = 30^\circ\text{C} + (T_0 - 30^\circ\text{C})e^{-kt}$$

Tambien sabemos que T_0 es la temperatura inicial del cuerpo que era de 90°C entonces

$$T(t) = 30^\circ\text{C} + (90^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C})e^{-kt}$$

$$T(t) = 30^\circ\text{C} + 60^\circ\text{C} * e^{-kt}$$

Sabemos que a la media hora la temperatura es de 55 °C, entonces como t se mide en horas podemos decir que

$$T(0.5h) = 55^\circ\text{C}$$

Reemplazo

$$30^\circ\text{C} + 60^\circ\text{C} * e^{-0.5h*k} = 55^\circ\text{C}$$

$$60^\circ\text{C} * e^{-0.5h*k} = 25^\circ\text{C}$$

$$e^{-0.5h*k} = \frac{5}{12}$$

$$\ln(e^{-0.5h*k}) = \ln\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$-0.5h * k = -0.87546873$$

$$k = 1.75 \frac{1}{h}$$

Osea que la funcion quedaria

$$T(t) = 30^\circ\text{C} + 60^\circ\text{C} * e^{-1.75\frac{1}{h}t}$$

Ahora debemos hallar t para que la temperatura sea de 40°C es decir

$$40^{\circ}\text{C} = T(t)$$

$$40^{\circ}\text{C} = 30^{\circ}\text{C} + 60^{\circ}\text{C} * e^{-1.75\frac{1}{h} * t}$$

$$10^{\circ}\text{C} = 60^{\circ}\text{C} * e^{-1.75\frac{1}{h} * t}$$

$$\frac{1}{6} = e^{-1.75\frac{1}{h} * t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = \ln\left(e^{-1.75\frac{1}{h} * t}\right)$$

$$-1.791759469 = -1.75\frac{1}{h} * t$$

$$t = 1.023 \text{ h}$$

Respuesta: A la 1.023 horas el cuerpo se halla a 40°C

EJERCICIO N° 56

Determine los valores reales de k para que la ecuacion $x^2 + 8x + k = 0$, sea tal que la suma de los cuadrados de sus raices sea 34

Solución

Calculemos en primer lugar las raíces de la ecuacion (con la formula cuadrática)

$$\text{Raiz1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4 * 1 * k}}{2 * 1} = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4k}}{2}$$

$$\text{Raiz2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4 * 1 * k}}{2 * 1} = \frac{-8 - \sqrt{64 - 4k}}{2}$$

Ahora que conocemos las raíces, vamos a hallar sus cuadrados

Raiz1

$$\text{Raiz1}^2 = \left(\frac{-8 + \sqrt{64 - 4k}}{2}\right)^2$$

$$\text{Raiz1}^2 = \frac{(-8 + \sqrt{64 - 4k})^2}{(2)^2}$$

$$\text{Raiz1}^2 = \frac{64 + (\sqrt{64 - 4k})^2 - 16\sqrt{64 - 4k}}{4}$$

$$\text{Raiz1}^2 = \frac{64 + 64 - 4k - 16\sqrt{64 - 4k}}{4}$$

$$\text{Raiz1}^2 = \frac{128 - 4k - 16\sqrt{64 - 4k}}{4}$$

$$\text{Raiz1}^2 = \frac{4 * (32 - k - 4\sqrt{64 - 4k})}{4}$$

$$\text{Raiz1}^2 = 32 - k - 4\sqrt{64 - 4k}$$

Raiz2

$$\text{Raiz2}^2 = \left(\frac{-8 - \sqrt{64 - 4k}}{2} \right)^2$$

$$\text{Raiz2}^2 = \frac{(-8 - \sqrt{64 - 4k})^2}{(2)^2}$$

$$\text{Raiz2}^2 = \frac{64 + (\sqrt{64 - 4k})^2 + 16\sqrt{64 - 4k}}{4}$$

$$\text{Raiz2}^2 = \frac{64 + 64 - 4k + 16\sqrt{64 - 4k}}{4}$$

$$\text{Raiz2}^2 = \frac{128 - 4k + 16\sqrt{64 - 4k}}{4}$$

$$\text{Raiz2}^2 = \frac{4 * (32 - k + 4\sqrt{64 - 4k})}{4}$$

$$\text{Raiz2}^2 = 32 - k + 4\sqrt{64 - 4k}$$

Ahora la consigna decía que la suma de los cuadrados de sus raíces daba 34, sumemos entonces

$$\text{Raiz1}^2 + \text{Raiz2}^2 = 34$$

$$32 - k - 4\sqrt{64 - 4k} + 32 - k + 4\sqrt{64 - 4k} = 34$$

$$64 - 2k = 34$$

$$-2k = -30$$

$$k = 15$$

Respuesta: Si $k = 15$ la suma de los cuadrados de las raíces es 34

EJERCICIO N° 57

Calcule el radio de un recipiente cilindrico, si se sabe que dicho radio es la cuarta parte de la altura, y que si se llena hasta el 25% cabe aun $32 \pi \text{ cm}^3$

Solución:

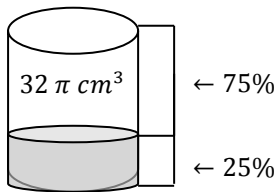
Sabemos que

$$r = \frac{1}{4}h \quad \Rightarrow \quad 4r = h$$

Calculemos el volumen

$$\text{Volumen del cilindro} = \pi r^2 * h = \pi * r^2 * 4r = 4\pi r^3$$

Sabemos que si se llena hasta el 25% cabe aun $32 \pi \text{ cm}^3$, esquematicemos



Entonces podemos ver que los $32 \pi \text{ cm}^3$ son el 75% del cilindro, calculemos el 100%

$$\begin{array}{l} 75\% \text{-----} 32 \pi \text{ cm}^3 \\ 100\% \text{-----} 128/3 \pi \text{ cm}^3 \end{array}$$

Como conocemos el 100% del volumen del cilindro y conocemos la formula podemos calcular el radio

$$\text{Volumen del cilindro} = 4\pi r^3$$

$$\frac{128}{3} \pi \text{ cm}^3 = 4\pi r^3$$

$$\frac{32}{3} \text{ cm}^3 = r^3$$

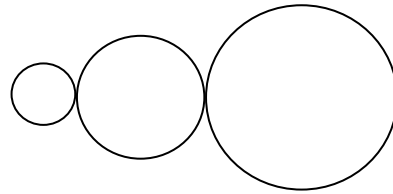
$$r = \sqrt[3]{\frac{32}{3}} \text{ cm}$$

$$r \cong 2.2 \text{ cm}$$

Respuesta: El radio del cilindro mide aproximadamente 2.2 cm

EJERCICIO N° 58

Los radios de las tres circunferencias son enteros consecutivos y el area total (del polígono unión de los tres círculos) es de $434 \pi \text{ cm}^2$. Deduzca la longitud de la circunferencia de mayor diámetro.



Solución:

Llamemos

$$\begin{aligned} R1 &= \text{radio mayor} \\ R2 &= \text{radio intermedio} \\ R3 &= \text{radio menor} \end{aligned}$$

Sabemos que los radios son enteros consecutivos entonces

$$\begin{aligned} R1 &= x \\ R2 &= x - 1\text{cm} \\ R3 &= x - 2\text{cm} \end{aligned}$$

Resto en vez de sumar porque sabemos que R1 tiene que ser mas grande que los demás

Sabemos que el area de los 3 circulos juntos es $434 \pi \text{ cm}^2$ entonces

$$\text{Area circulo menor} + \text{Area circulo intermedio} + \text{Area circulo mayor} = 434 \pi \text{ cm}^2$$

Reemplazo con la formula de area

$$\pi R3^2 + \pi R2^2 + \pi R1^2 = 434 \pi \text{ cm}^2$$

Reemplazo con los diametros

$$\pi(x - 2\text{cm})^2 + \pi(x - 1\text{cm})^2 + \pi(x)^2 = 434 \pi \text{ cm}^2$$

Cancelo los π y hago binomio cuadrado perfecto

$$x^2 - 4\text{cm}x + 4\text{cm}^2 + x^2 - 2\text{cm}x + 1\text{cm}^2 + x^2 = 434 \text{ cm}^2$$

$$3x^2 - 6\text{cm}x + 5\text{cm}^2 = 434 \text{ cm}^2$$

$$3x^2 - 6\text{cm}x - 429\text{cm}^2 = 0$$

Las Soluciones son $x = -11 \text{ cm}$ y $x = 13 \text{ cm}$ pero como una medida no puede ser negativa, puedo afirmar que $x = 11\text{cm} = R1$

Ahora que conocemos R1 podemos calcular la longitud de la circunferencia mayor.

$$\begin{aligned} \text{Longitud de la circunferencia mayor} &= 2 * R1 * \pi \\ \text{Longitud de la circunferencia mayor} &= 2 * 13 * \pi \\ \text{Longitud de la circunferencia mayor} &= 26\pi \end{aligned}$$

Respuesta: La longitud de la circunferencia de mayor diámetro es de 26π

EJERCICIO Nº 59

Determine el polinomio monico de tercer grado $p(x)$, de tres raíces reales distintas si se sabe que es divisible por $q(x) = x+4$, la suma de sus tres raíces es 18 y el producto de solo dos de ellas es 117.

Solución:

Sabemos que $p(x)$ es un polinomio de tercer grado, entonces tendra tres raíces y la forma:

$$p(x) = A(x - R1) * (x - R2) * (x - R3)$$

Pero como es monico, significa que su coeficiente principal A es 1 entonces

$$p(x) = 1(x - R1) * (x - R2) * (x - R3)$$

$$p(x) = (x - R1) * (x - R2) * (x - R3)$$

Sabemos que es divisible por $x+4$ es decir que una de sus raíces (digamos $R1$) es -4 , entonces

$$p(x) = (x + 4) * (x - R2) * (x - R3)$$

Ahora nos dice que la suma de sus raíces es 18 entonces

$$R1 + R2 + R3 = 18$$

$$-4 + R2 + R3 = 18$$

$$R2 + R3 = 22$$

$$R2 = 22 - R3$$

Sabemos que el producto de dos de sus raíces es 117 y como este no es un múltiplo de 4 (porque no es par) podemos deducir que el producto es entre las dos raíces restantes

$$R2 * R3 = 117$$

Reemplazamos con lo que obtuvimos de la suma de las raíces ($R2 = 22-R3$)

$$(22 - R3) * R3 = 117$$

$$22R3 - R3^2 = 117$$

$$22R3 - R3^2 - 117 = 0$$

Esta cuadrática tiene Soluciones en $R3=13$ y $R3 = 9$ Pero como podemos ver tomando cualquiera de las dos sirve ya que si $R3 = 9$ $R2$ (reemplazando en $R2 = 22-R3$) es 13 y si reemplazo con 13 $R2$ da 9 (osea que no modifica el resultado la eleccion del resultado).

El polinomio total resulta

$$p(x) = (x + 4) * (x - 13) * (x - 9)$$

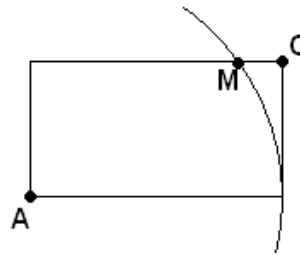
Ahora se puede realizar la distributiva

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + 4) * (x^2 - 22x + 117) \\ p(x) &= x^3 - 22x^2 + 117x + 4x^2 - 88x + 468 \\ p(x) &= x^3 - 18x^2 + 29x + 468 \end{aligned}$$

Respuesta: $p(x) = x^3 - 18x^2 + 29x + 468$

EJERCICIO N° 60

Aumentando la base de un rectángulo en 6m y la altura en 4m, el area aumenta en 240m², en cambio, aumentando la base en 2m y la altura en 9m, el area aumenta en 320m².



Calcule la longitud de la base y la altura del rectángulo.

Luego si se traza un arco de circunferencia (con centro en A) u se tiene el punto M, determine la distancia de este al punto C.

Solución:

Llamemos

B = base del rectangulo
H = altura del rectangulo
A = area del rectangulo

Por lo tanto

$$A = B * H$$

Sabemos que Aumentando la base de un rectángulo en 6m y la altura en 4m, el area aumenta en 240m², entonces

$$(A + 240m^2) = (B + 6m) * (H + 4m)$$

Pero como $A = B * H$

$$B * H + 240m^2 = B * H + 4Bm + 6Hm + 24m^2$$

$$240m^2 = 4Bm + 6Hm + 24m^2$$

$$-4Bm = 4Bm + 6Hm - 216m^2$$

$$B = \frac{6Hm - 216m^2}{-4m}$$

$$B = \frac{-6Hm + 216m^2}{4m}$$

Sabemos que Aumentando la base de un rectángulo en 2m y la altura en 9m, el area aumenta en 320m^2 , entonces

$$(A + 320\text{m}^2) = (B + 2\text{m}) * (H + 9\text{m})$$

$$A + 320\text{m}^2 = B * H + 9B\text{m} + 2H\text{m} + 18\text{m}^2$$

Pero como $A = B * H$

$$-9B\text{m} = B * H - B * H + 2H\text{m} - 302\text{m}^2$$

$$-9B\text{m} = 2H\text{m} - 302\text{m}^2$$

$$B = \frac{2H\text{m} - 302\text{m}^2}{-9\text{m}}$$

$$B = \frac{-2H\text{m} + 302\text{m}^2}{9\text{m}}$$

Si igualo las dos expresiones a la que me quedo igualada B

$$\frac{-6H\text{m} + 216\text{m}^2}{4\text{m}} = \frac{-2H\text{m} + 302\text{m}^2}{9\text{m}}$$

$$(-6H\text{m} + 216\text{m}^2) * 9\text{m} = (-2H\text{m} + 302\text{m}^2) * 4\text{m}$$

$$-54H\text{m}^2 + 1944\text{m}^3 = -8H\text{m}^2 + 1208\text{m}^3$$

$$736H\text{m}^3 = 46\text{m}^2$$

$$H = 16\text{m}$$

Y como $B = \frac{-2H\text{m} + 302\text{m}^2}{9\text{m}}$

$$B = \frac{-2 * (16\text{m}) + 302\text{m}^2}{9\text{m}}$$

$$B = \frac{-32\text{m}^2 + 302\text{m}^2}{9\text{m}}$$

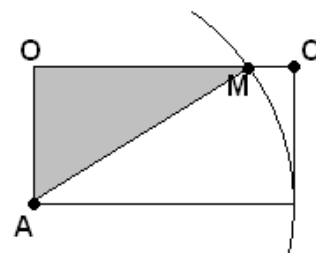
$$B = \frac{270\text{m}^2}{9\text{m}}$$

$$B = 30\text{m}$$

Osea que la base mide 30m y la altura 16m

Ahora tenemos

Podemos decir que el triangulo sombreado es rectángulo (por estar en la esquina del cuadrilátero) que su lado OA mide lo mismo que la altura del rectángulo y que su lado OM mide lo mismo que la base ya que ambos segmentos son radios de la circunferencia de centro A



Por lo tanto por pitagoras

$$\begin{aligned} OA^2 + OM^2 &= AM^2 \\ H^2 + OM^2 &= B^2 \\ (16m)^2 + OM^2 &= (30m)^2 \\ 256 + OM^2 &= 900m^2 \\ OM^2 &= 644m^2 \\ OM &= 25.377 \text{ m} \end{aligned}$$

Como podemos ver en el dibujo

$$OM + MC = OC$$

OC es la base del rectángulo y OM lo calculamos anteriormente, entonces

$$\begin{aligned} 25.377m + MC &= 30m \\ MC &= 4.623m \end{aligned}$$

Respuesta: La altura es de 16m, la base de 30 m y La distancia de M a C es de 4.623m

EJERCICIO Nº 61

Dadas f y h en cada caso determine $f \circ h(x)$ y $h \circ f(x)$, indicando el dominio correspondiente.

$$f(x) = |x|$$

$$h(x) = \log x$$

Solución:

Sabemos que

$$f(x) = |x|$$

$D_f = \mathbb{R}$ (el modulo no tiene restricciones)

$I_f = \mathbb{R}^+ + \{0\}$ (el modulo solo devuelve numeros positivos y cero)

$$h(x) = \log x$$

$D_h = \mathbb{R}^+$ (el logaritmo solo admite numeros positivos)

$$I_h = \mathbb{R}$$

Hallemos $f \circ h(x)$

Para que esto pueda realizarse la imagen de h debe estar incluida en el dominio de f

$$\begin{aligned} I_h &\subseteq D_f \\ \mathbb{R} &\subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por lo tanto no hay problemas para realizar la composición

$$\begin{aligned} f \circ h(x) &= f(h(x)) \\ f \circ h(x) &= f(\log x) \\ f \circ h(x) &= |\log x| \end{aligned}$$

La función compuesta siempre tiene como dominio el dominio de la función de adentro y como imagen la imagen de la de afuera, Quedando

$$f \circ h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f \circ h(x) = |\log x|$$

Hallemos $h \circ f(x)$

Para que esto pueda realizarse la imagen de f debe estar incluida en el dominio de h

$$\begin{aligned} \text{If} &\subseteq \text{Dh} \\ \mathbb{R}^+ + \{0\} &\notin \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Como los reales positivos mas el cero no están incluidos en los reales positivos (sobra el cero) debemos restringir el dominio, forzando a f para que tenga como imagen el dominio de h

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{R}^+ \\ f(x) &> 0 \\ |x| &> 0 \\ x > 0 \quad \vee \quad x < 0 \end{aligned}$$

Osea que nuestro dominio restringido son los reales distintos de cero quedando

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \\ \text{Df} &= \mathbb{R} - \{0\} \quad (\text{Dominio restringido}) \\ \text{If}^* &= \mathbb{R}^+ \quad (\text{imagen incluida en el dominio de } h) \end{aligned}$$

Entonces ahora podemos componer

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= h(f(x)) \\ h \circ f(x) &= f(|x|) \\ h \circ f(x) &= \log|x| \end{aligned}$$

La función compuesta siempre tiene como dominio el dominio de la función de adentro (restringido) y como imagen la imagen de la de afuera, Quedando

$$h \circ f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} / h \circ f(x) = \log|x|$$

Respuesta: $f \circ h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f \circ h(x) = |\log x|$
 $h \circ f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} / h \circ f(x) = \log|x|$

EJERCICIO N° 62

Determine el conjunto Solución de la siguiente ecuacion $\frac{65}{x^2} - \frac{14}{x} \geq -1$

Solución:

$$\frac{65}{x^2} - \frac{14}{x} \geq -1$$

Saco comun denominador x^2

$$\frac{65 - 14x}{x^2} \geq -1$$

Como x^2 es siempre positivo, puedo pasarla multiplicando sin que modifique el sentido del piquito, pero debo descartar el cero de la solucion ya que no podria dividir por cero.

$$\begin{aligned} 65 - 14x &\geq -x^2 \\ 65 - 14x + x^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - 14x + 65 \geq 0$$

Calculemos el discriminante (lo que esta adentro de la raíz de la cuadrática)

$$\frac{b^2 - 4ac}{2a} = \frac{(-14)^2 - 4 * 1 * 65}{2 * 1} = -\frac{64}{2} = -32$$

El discriminante de esta cuadratica es menor a cero, por lo tanto nunca corta el eje de las x, y como su coeficiente principal es positivo, en el dibujo esta contenta la sonrisa del grafico. Para que estas dos cosas sucedan a la vez el grafico debe ser siempre positivo (estar sobre el eje x), por lo tanto, como siempre esta sobre el eje podemos decir que la respuesta es el conjunto de los reales menos el cero que habiamos excluido anteriormente. Otra forma de verlo es sacar el vertice, que esta en

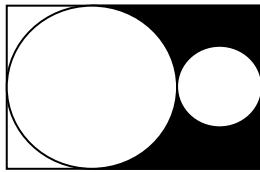
$$\begin{aligned} X_{\text{vertice}} &= -\frac{b}{2a} \\ X_{\text{vertice}} &= \frac{14}{2} \\ X_{\text{vertice}} &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{\text{vertice}} &= F(7) \\ Y_{\text{vertice}} &= 7^2 - 14 * 7 + 65 \\ Y_{\text{vertice}} &= 16 \end{aligned}$$

El vertice esta en el (7;16) y es positiva asi que su menor valor estara en ese punto, nunca sera menor que cero.

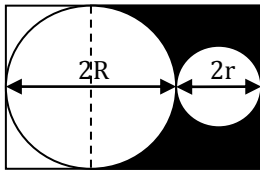
Respuesta: La solución es el conjunto de los números Reales menos el cero

EJERCICIO N° 63



Las circunferencias son tangentes entre si y a los lados del rectángulo; además, un diámetro es el doble del otro, calcule el porcentaje del área de la región sombreada con respecto a la del rectángulo.

Solución:



Tenemos las incógnitas

Radio Chico (r) y Radio grande (R)

La base del rectángulo mide = $2R+2r$

La altura del rectángulo mide $2R$

Dice que un diámetro es el doble del otro, o sea

$$2R = 2 * (2r)$$

$$2R = 4r$$

$$R = 2r$$

Reemplazo en las fórmulas de base y altura

$$\text{La base del rectángulo mide} = 2*(2r)+2r = 4r + 2r = 6r$$

$$\text{La altura del rectángulo mide} = 2*(2r) = 4r$$

Calculemos el área del rectángulo

$$\text{Área rectángulo} = \text{Base} * \text{altura} = 6r * 4r = 24r^2$$

El área sombreada podemos armarla como un rectángulo de base $2r + R$ (porque abarca todo el círculo chico y mitad del grande) y de altura $2R$ (la altura del rectángulo original)

$$\text{Área de ese rectángulo} = \text{base} * \text{altura}$$

$$\text{Área de ese rectángulo} = (2r + R)*(2R)$$

$$\text{Área de ese rectángulo} = (2r + 2r) * (2 * (2r))$$

$$\text{Área de ese rectángulo} = 4r * 4r$$

$$\text{Área de ese rectángulo} = 16r^2$$

Ahora a ese rectángulo le restamos el círculo pequeño y el medio círculo grande y obtenemos el área sombreada

$$\text{Área sombreada} = \text{Área de ese rectángulo} - \text{Área círculo pequeño} - \text{área medio círculo grande}$$

$$\text{Área sombreada} = 16r^2 - \pi * r^2 - 1/2 * (\pi * R^2)$$

$$\text{Área sombreada} = 16r^2 - \pi * r^2 - 1/2 * \pi * (2r)^2$$

$$\text{Área sombreada} = 16r^2 - \pi * r^2 - 1/2 * \pi * 4r^2$$

$$\text{Área sombreada} = 16r^2 - \pi * r^2 - \pi * 2r^2$$

$$\begin{aligned} \text{Área sombreada} &= 16r^2 - \pi * 3r^2 \\ \text{Área sombreada} &= r^2 (16 - 3\pi) \end{aligned}$$

Ahora sabemos que

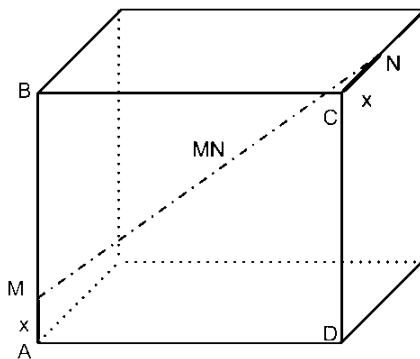
$$\begin{aligned} \text{Área total del cuadrado} &\text{-----}100\% \\ \text{Área sombreada} &\text{-----}x\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24r^2 &\text{-----}100\% \\ r^2 (16 - 3\pi) &\text{-----} [(16-3\pi)*100/24] \%$$

$$\text{Área sombreada} = [(16-3\pi)*100/24] \%$$

Respuesta: El área sombreada es aproximadamente el 27.4 % del área total

EJERCICIO N° 64



Sea un cubo de 216dm^3 de volumen

Determine la función:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = MN$$

La longitud del segmento MN en función de x - longitud de CN=AM.

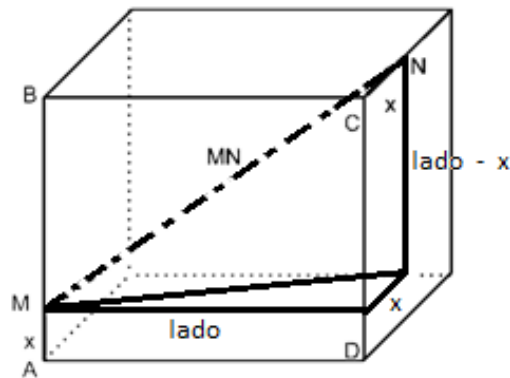
No olvide indicar el conjunto dominio D con $x > 0$

M y N representan cualquier punto en las aristas CD y AB

Luego halle los x tal que $f(x) \leq \sqrt{\frac{117}{2}}$

Solución:

Dibujemos



Nos piden hallar una formula (en funcion de x) que cuando en esta x varie nos vaya dando el valor de la diagonal MN.

Como podemos ver en el dibujo, si dividimos todo en dos triangulos rectangulos quedarian de las medidas indicadas en el dibujo, el triangulo de abajo con catetos igual al lado y a x y el triangulo de arriba con un cateto igual a la hipotenusa del triangulo anterior y el otro cateto de (lado - x) resultando MN la hipotenusa del segundo triangulo

Como conocemos el volumen del cubo, podemos sacar el lado

$$\begin{aligned} \text{lado}^3 &= 216\text{m}^3 \\ \text{Lado} &= 6\text{m} \end{aligned}$$

Ahora , por pitagoras, sacare la hipotenusa del triangulo de abajo

$$\begin{aligned} \text{Hipotenusa triangulo de abajo}^2 &= \text{lado}^2 + x^2 \\ \text{Hipotenusa triangulo de abajo}^2 &= 6^2 + x^2 \\ \text{Hipotenusa triangulo de abajo}^2 &= 36 + x^2 \\ \text{Hipotenusa triangulo de abajo}^2 &= \sqrt{36 + x^2} \end{aligned}$$

Como la hipotenusa del triangulo de abajo coincide con el cateto del triangulo de arriba, por pitagoras sacare la hipotenusa MN

$$\begin{aligned} \text{MN}^2 &= (\text{lado} - x)^2 + \text{Hipotenusa triangulo de abajo}^2 \\ \text{MN}^2 &= \text{lado}^2 - 2\text{Lado} * x + x^2 + \sqrt{36 + x^2}^2 \\ \text{MN} &= \sqrt{\text{lado}^2 - 2\text{lado} * x + x^2 + 36 + x^2} \end{aligned}$$

Como el lado es 6m

$$\begin{aligned} \text{MN} &= \sqrt{6^2 - 2 * 6 x + x^2 + 36 + x^2} \\ \text{MN} &= \sqrt{36 - 12 x + x^2 + 36 + x^2} \\ \text{MN} &= \sqrt{2x^2 - 12x + 72} \end{aligned}$$

En el dibujo, podemos observar que x siempre debe ser menor o igual al lado, y mayor que 0 por ser una medida. por lo tanto el dominio es (0;6]

$$f: (0, 6] \rightarrow \mathbf{R}^+ / f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 72}$$

Ahora debemos hallar los x que hagan que

$$f(x) \leq \sqrt{\frac{117}{2}}$$

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 72} \leq \sqrt{\frac{117}{2}}$$

$$2x^2 - 12x + 72 \leq \frac{117}{2}$$

$$2x^2 - 12x + 72 - \frac{117}{2} \leq 0$$

Esta es una cuadrática con ceros en $3/2$ y $9/2$ y como tiene coeficiente principal positivo tiene forma de sonrisa contenta, es decir, es menor a cero entre sus raíces.

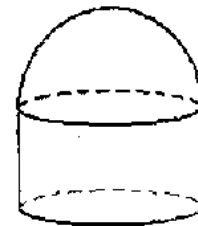
Respuesta: $MN = f: (0, 6] \rightarrow R^+ / f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 72}$

$$f(x) \leq \sqrt{\frac{117}{2}} \text{ si } x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$$

EJERCICIO N° 65

$2880 \pi \text{ cm}^3$ es el volumen del sólido constituido por una semiesfera y un cilindro cuya altura coincide con el radio de la semiesfera.

Determine el radio de la semiesfera y el área total del cuerpo, incluida la base.



Solución:

El cuerpo está formado por la semiesfera y el cilindro, por lo tanto

$$\text{Volumen cilindro} + \text{Volumen esfera} = \text{Volumen del cuerpo}$$

$$\pi \text{ Radio}^2 * h + \pi \text{ Radio}^3 * \frac{2}{3} = 2880\pi \text{ cm}^3$$

Como la altura del cilindro es igual al radio de la esfera

$$\pi \text{ Radio}^2 * \text{Radio} + \pi \text{ Radio}^3 * \frac{2}{3} = 2880\pi \text{ cm}^3$$

$$\pi \text{ Radio}^3 + \pi \text{ Radio}^3 * \frac{2}{3} = 2880\pi \text{ cm}^3$$

Cancelo las π

$$\text{Radio}^3 + \text{Radio}^3 * \frac{2}{3} = 2880 \text{ cm}^3$$

$$\frac{5}{3} \text{ Radio}^3 = 2880 \text{ cm}^3$$

$$\text{Radio}^3 = 1728 \text{ cm}^3$$

$$\text{Radio} = \sqrt[3]{1728} \text{ cm}$$

$$\text{Radio} = 12 \text{ cm}$$

El area total del cuerpo esta formada por el cuerpo del cilindro, mas la base, mas la semiesfera

$$\text{Area cuerpo del cilindro} + \text{Area de la base} + \text{Area de la semiesfera} = \text{Area total}$$

$$2 * \pi * \text{Radio} * \text{altura} + \pi \text{Radio}^2 + 2\pi \text{Radio}^2 = \text{Area total}$$

Como la altura del cilindro es igual al radio

$$2 * \pi * \text{Radio} * \text{Radio} + \pi \text{Radio}^2 + 2\pi \text{Radio}^2 = \text{Area total}$$

$$2 * \pi * \text{Radio}^2 + \pi \text{Radio}^2 + 2\pi \text{Radio}^2 = \text{Area total}$$

$$5\pi * \text{Radio}^2 = \text{Area total}$$

Como el radio es 12

$$5\pi * (12\text{cm})^2 = \text{Area total}$$

$$5\pi * 144\text{cm}^2 = \text{Area total}$$

$$720\pi \text{cm}^2 = \text{Area total}$$

Respuesta: El radio de la semiesfera mide 12 cm y el área total del cuerpo es $720\pi \text{ cm}^2$

EJERCICIO N° 66

Determine el conjunto solución de $|x + 1|^2 < |x + 1| + 2$

Solución:

$$|x + 1|^2 < |x + 1| + 2$$

Paso todo para un solo lado

$$|x + 1|^2 - |x + 1| - 2 < 0$$

Hago el cambio de variable $|x + 1| = A$

$$A^2 - A - 2 < 0$$

Las raices de esta cuadratica las puedo encontrar con la resolvente y son $A = 2$ y $A = -1$

Como la parabola es positiva podemos ver que tiene forma de U. y esta por debajo del eje de las x (osea es menor que 0) entre el (-1;2)

Por lo tanto

$$-1 < A < 2$$

Vuelvo a hacer el cambio de variable $|x + 1| = A$

$$-1 < |x + 1| < 2$$

Abro el modulo

$$[-1 < x + 1 < 2] \vee [1 > x + 1 > -2]$$

Resto 1 a todos los terminos

$$-2 < x < 1 \vee 0 > x > -3$$

$$(-2; 1) \cup (-3; 0)$$

Hago la unión pintando con los dos intervalos en la recta numérica, y la solución será todo lo que aparezca pintado al menos una vez

Respuesta: S = (-3; 1)

EJERCICIO Nº 67

Sea la función sobreyectiva $h: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty; 726]$ / $h(x) = -6(x + 5)^2 + d$ **Expresa el conjunto** $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge h(x) < 0\}$

Solución:

Que una función sea sobreyectiva significa que su imagen coincide con su codominio. En este caso su imagen es $(-\infty; 726]$ (porque nos lo decía en la consigna) veamos cual es su codominio

$$h(x) = -6(x + 5)^2 + d$$

$$h(x) = -6(x^2 + 10x + 25) + d$$

$$h(x) = -6x^2 - 60x - 150 + d$$

Como esta es una cuadrática con coeficiente cuadrático negativo, significa que tendrá forma de sonrisa triste, o de U hacia abajo, por lo tanto su imagen será desde el menos infinito hasta la y del vértice de la parábola. Pero como es sobreyectiva la imagen corresponde con el codominio, por lo tanto la y del vértice vale 726

Sabemos que

$$x_{\text{vertice}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-60)}{2 * (-6)} = \frac{60}{-12} = -5$$

Ahora hallemos la y del vértice

$$\begin{aligned} Y_{\text{vertice}} &= h(X_{\text{vertice}}) \\ Y_{\text{vertice}} &= -6(X_{\text{vertice}} + 5)^2 + d \\ Y_{\text{vertice}} &= -6(-5 + 5)^2 + d \\ Y_{\text{vertice}} &= -6(0)^2 + d \\ Y_{\text{vertice}} &= d \\ 726 &= d \end{aligned}$$

Como conocemos d podemos decir

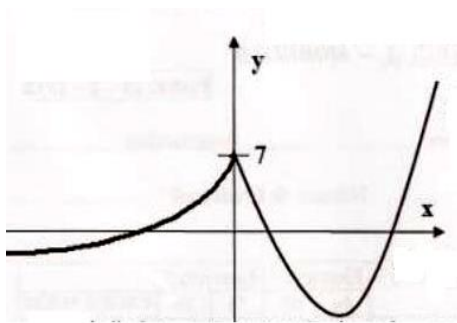
$$h(x) = -6(x + 5)^2 + 726$$

Ahora debemos hallar $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge h(x) < 0\}$

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} \wedge h(x) < 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} \wedge -6(x + 5)^2 + 726 < 0\} \\ &\{x \in \mathbb{R} \wedge -6(x + 5)^2 < -726\} \\ &\{x \in \mathbb{R} \wedge (x + 5)^2 > 121\} \\ &\{x \in \mathbb{R} \wedge |x + 5| > \sqrt{121}\} \\ &\{x \in \mathbb{R} \wedge [x + 5 > 11 \vee x + 5 < -11]\} \\ &\{x \in \mathbb{R} \wedge [x > 6 \vee x < -16]\} \end{aligned}$$

Respuesta: $S = (-\infty; -16) \cup (6; \infty)$

EJERCICIO N° 68



Se represento la curva grafica

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \begin{cases} \frac{ax + b}{x - 1} & , x < 0 \\ x^2 - 8x + c & , x \geq 0 \end{cases}$$

Deduzca las coordenadas del vértice del tramo parabolico de la curva representativa. Luego halle las constantes a y b si se sabe que el tramo hiperbolico ($x < 0$) Posee una recta asíntota en

$y = -2$. Por ultimo determine los ceros de f

Solución:

Por el grafico podemos determinar que los dos tramos comparten un punto en común que es el (0;7), conociendo esto puedo hallar c

$$\begin{aligned} f(0) &= 7 \\ 0^2 - 8 * 0 + c &= 7 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

Y también

$$\begin{aligned} f(0) &= 7 \\ \frac{a * 0 + b}{0 - 1} &= 7 \\ \frac{b}{-1} &= 7 \\ b &= -7 \end{aligned}$$

Entonces

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \begin{cases} \frac{ax + 7}{x - 1} & , x < 0 \\ x^2 - 8x + 7 & , x \geq 0 \end{cases}$$

Ahora debemos sacar el vértice del tramo de la parábola, como sabemos

$$X_{\text{vertice}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 * 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$Y_{\text{vertice}} = f(X_{\text{vertice}}) = f(4) = 4^2 - 8 * 4 + 7 = 16 - 32 + 7 = -9$$

Ahora debemos hallar a, sabemos que la asíntota horizontal esta en y = -2 y que esta se halla dividiendo las x de la hiperbolica, entonces

AH :

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax}{x - 1} \\ -2 &= \frac{a}{1} \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Entonces

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \begin{cases} \frac{-2x - 7}{x - 1} & , x < 0 \\ x^2 - 8x + 7 & , x \geq 0 \end{cases}$$

Ahora debemos hallar las raíces, igualando la función a cero. La función es cero cuando x es menor que cero y la primera parte es cero o cuando x es positiva y la segunda parte da cero

$$\left[\frac{-2x-7}{x-1} = 0 \wedge x < 0 \right] \wedge [x^2 - 8x + 7 = 0 \wedge x \geq 0]$$

$$[-2x - 7 = 0 \wedge x < 0] \wedge [(x = 7 \wedge x = 1) \wedge x \geq 0]$$

$$\left[x = -\frac{7}{2} \wedge x < 0 \right] \wedge [(x = 7 \wedge x = 1) \wedge x \geq 0]$$

$$\left[x = -\frac{7}{2} \right] \wedge [(x = 7 \wedge x = 1)]$$

Respuesta: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \begin{cases} \frac{-2x-7}{x-1} & , x < 0 \\ x^2 - 8x + 7 & , x \geq 0 \end{cases}$ **Y sus ceros están en**
 $x = -\frac{7}{2}, x = 1 \text{ y } x = 7$

EJERCICIO N° 69

Sea la función biyectiva $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{B}/f(x) = \frac{2^x - 9}{2^x - k}$ determine $f^{-1}(x)$

Solución:

Como es biyectiva, sabemos que en $x = 2$ esta su asíntota vertical.

La hallamos igualando a cero el denominador

$$2^x - k = 0$$

Pero como se halla en $x = 2$

$$\begin{aligned} 2^2 - k &= 0 \\ 4 - k &= 0 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Como es biyectiva, podemos hallar la inversa sin problema. El primer paso sería despejar x

$$f(x) = \frac{2^x - 9}{2^x - 4}$$

$$f(x) * (2^x - 4) = 2^x - 9$$

$$f(x) * 2^x - 4f(x) = 2^x - 9$$

$$f(x) * 2^x - 2^x = 4f(x) - 9$$

$$2^x(f(x) - 1) = 4f(x) - 9$$

$$2^x = \frac{4f(x) - 9}{f(x) - 1}$$

$$\log_2 2^x = \log_2 \left(\frac{4f(x) - 9}{f(x) - 1} \right)$$

$$x = \log_2 \left(\frac{4f(x) - 9}{f(x) - 1} \right)$$

Ahora cambiamos x por $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ por x

$$f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{4x - 9}{x - 1} \right)$$

Respuesta: $f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{4x-9}{x-1} \right)$

EJERCICIO N° 70

Detemine el conjunto Solución de $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} = -1$

Solución:

Tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} &= -1 \\ \sqrt{x-3} &= -1 + \sqrt{x-4} \end{aligned}$$

Como las raices nos molestan lo que voy a hacer es elevar al cuadrado de ambos lados

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-3})^2 &= (-1 + \sqrt{x-4})^2 \\ x - 3 &= (-1)^2 + [\sqrt{x-4}]^2 - 2 * 1 * \sqrt{x-4} \quad \text{Binomio cuadrado perfecto} \end{aligned}$$

$$x - 3 = 1 + (x - 4) - 2\sqrt{x-4}$$

$$x - x - 3 + 4 - 1 = -2\sqrt{x-4}$$

$$0 = -2\sqrt{x-4}$$

$$0 = \sqrt{x-4}$$

$$0 = x - 4$$

$$x = 4$$

Pero como elevamos al cuadrado para poder despejar x , debemos verificar la Solución, para ver si esta es correcta

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} &= -1 \\ \sqrt{4-3} - \sqrt{4-4} &= -1 \\ \sqrt{1} - \sqrt{0} &= -1 \\ 1 &\neq -1\end{aligned}$$

Respuesta: Como la única solución encontrada no verifica, la ecuación no tiene solución

EJERCICIO N° 71

Encuentre el conjunto Solución de $\sqrt{2x+11} - x - 4 = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+11} - x - 4 &= 0 \\ \sqrt{2x+11} &= x + 4\end{aligned}$$

Elevo al cuadrado de ambos lados

$$\begin{aligned}(\sqrt{2x+11})^2 &= (x+4)^2 \\ 2x + 11 &= x^2 + 16 + 8x \\ x^2 + 6x + 5 &= 0\end{aligned}$$

Las raíces de esta cuadrática están en $x=-1$ y $x=-5$, pero como elevamos al cuadrado de ambos lados debemos comprobar la Solución

REEMPLAZO CON -1

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+11} - x - 4 &= 0 \\ \sqrt{2 * (-1) + 11} - (-1) - 4 &= 0 \\ \sqrt{-2 + 11} + 1 - 4 &= 0 \\ \sqrt{9} - 3 &= 0 \\ 3 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

VERIFICA, -1 ES SOLUCIÓN

REEMPLAZO CON -5

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+11} - x - 4 &= 0 \\ \sqrt{2 * (-5) + 11} - (-5) - 4 &= 0 \\ \sqrt{-10 + 11} + 5 - 4 &= 0 \\ \sqrt{1} + 1 &= 0 \\ 1 + 1 &= 0 \\ 2 &= 0\end{aligned}$$

NO VERIFICA, -5 NO ES SOLUCIÓN

Respuesta: x = -1

EJERCICIO Nº 72

Encuentre el conjunto solución de $\frac{1}{x+3} > -(x+1)$

Solución:

En primera medida debemos excluir el -3 de las Soluciones, ya que haria 0 el denominador

Con el denominador de la izquierda tenemos un problema para pasarlo multiplicando, NO SABEMOS SI ES POSITIVO O NEGATIVO, por lo tanto planteare las dos opciones

Para que el denominador (x+3) sea positivo, x debe ser mayor a -3

Para que el denominador (x+3) sea negativo, x debe ser menor a -3

Recordemos que al pasar multiplicando un numero negativo se dan vuelta los piquitos

Entonces si $x > -3$ no doy vuelta los picos, pero si $x < -3$ si:

$$\begin{aligned}[(x > -3) \wedge \frac{1}{x+3} > -(x+1)] \vee [(x < -3) \wedge \frac{1}{x+3} > -(x+1)] \\ [(x > -3) \wedge 1 > -(x+1) * (x+3)] \vee [(x < -3) \wedge 1 < -(x+1) * (x+3)] \\ [(x > -3) \wedge 0 > (-x-1) * (x+3) - 1] \vee [(x < -3) \wedge 0 < (-x-1) * (x+3) - 1] \\ [(x > -3) \wedge 0 > -x^2 - 4x - 4] \vee [(x < -3) \wedge 0 < -x^2 - 4x - 4]\end{aligned}$$

La cuadratica $-x^2 - 4x - 4$ Tiene raiz doble en -2, y como el coeficiente principal es negativo, la parabola esta "triste" osea va solo hacia abajo, y nunca da resultado positivo. Y siempre (excepto en el -2 que da cero) es negativa

$$[(x > -3) \wedge R - \{-2\}] \vee [(x < -3) \wedge \emptyset]$$

Cualquier cosa interseccion vacio da vacio, por lo tanto

$$[(x > -3) \wedge R - \{-2\}] \vee \emptyset$$

Cualquier cosa union vacio da esa misma cosa

$$(x > -3) \wedge R - \{-2\}$$

Respuesta: S = (-3; -2) U (-2 ; ∞)

EJERCICIO N° 73

Cuando dos personas hacen un trabajo de forma independiente a una de ellas le toma 3 hs menos que a la otra. Cuando ambas trabajan juntas les toma dos horas completar la tarea. ¿Cuánto tiempo le toma a cada una hacer el trabajo sola?.

Solución:

Digamos que la primer persona, tarda x horas

La segunda tarda 3h menos que la primera. Osea que tarda x - 3 horas

Por regla de tres podemos decir que

Si la primer persona

$$\begin{array}{l} \mathbf{x \text{ horas} \text{ -----} \mathbf{1 \text{ trabajo completo}} \\ \mathbf{1 \text{ hora} \text{ -----} \mathbf{1/x \text{ parte del trabajo}} \end{array}$$

La segunda persona

$$\begin{array}{l} \mathbf{(x-3) \text{ horas} \text{ -----} \mathbf{1 \text{ trabajo completo}} \\ \mathbf{1 \text{ hora} \text{ -----} \mathbf{1/(x-3) \text{ parte del trabajo}} \end{array}$$

Entonces en una hora La primera persona hace 1/x del trabajo y la La segunda 1/(x - 3) del trabajo

En hacer un trabajo completo juntas tardan

$$\mathbf{la \text{ 1}^\circ \text{ en una hs} * \text{ cant de hs trabajadas} + \text{ la 2}^\circ \text{ en una hs} * \text{ cant de hs trabajadas} = \mathbf{1 \text{ trabajo}}$$

osea

$$\frac{1}{x} * \text{ cantidad de horas trabajadas} + \frac{1}{x-3} * \text{ cant de horas trabajadas} = 1$$

Como finalizan el trabajo en 2 horas

$$\frac{1}{x} * 2 + \frac{1}{x-3} * 2 = 1$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{x-3} = 1$$

$$\frac{2 * (x-3) + 2 * x}{x * (x-3)} = 1$$

Hago comun denominador y sumo

$$\frac{2x - 6 + 2x}{x^2 - 3x} = 1$$

$$4x - 6 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

Esta cuadratica tiene raices en $x = 6$ y $x = 1$

Si reemplazo por 1 no tiene sentido ya que la persona dos, tardaria (-2) horas.

Respuesta: La primera persona tarda 6 horas y la segunda tres horas menos, es decir tres horas en hacer un trabajo completo

EJERCICIO N° 74

Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación.

$$e^{\ln x} - 3e^{-\ln x} = 2$$

Solución

$$e^{\ln x} - 3e^{-\ln x} = 2$$

invierto por tener exponente negativo

$$e^{\ln x} - \frac{3}{e^{\ln x}} = 2$$

Sumo las fracciones

$$\frac{(e^{\ln x})^2 - 3}{e^{\ln x}} = 2$$

$$(e^{\ln x})^2 - 3 = 2e^{\ln x}$$

$$(e^{\ln x})^2 - 3 - 2e^{\ln x} = 0$$

$$e^{\ln x} = x \text{ entonces}$$

$$x^2 - 3 - 2x = 0$$

Las Soluciones de esta cuadratica son $x = 3$ y $x = -1$, pero como el logaritmo no acepta numero negativos descarto la segunda opcion.

Respuesta: $x = 3$

EJERCICIO N° 75

Determine p y q si sabe que $3/2$ y $-1/2$ son raíces de la ecuacion

$$3px^2 - (5q + 1)x + 1 = 0$$

Solución

Si $3/2$ y $-1/2$ Son raices, significa que si reemplazo las x por estos numeros tiene que dar 0

$$3p\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (5q + 1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 1 = 0 \quad \wedge \quad 3p\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (5q + 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$3p \cdot \frac{9}{4} - \left(\frac{15}{2}q + \frac{3}{2}\right) + 1 = 0 \quad \wedge \quad 3p \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{5}{2}q - \frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{27}{4}p - \frac{15}{2}q - \frac{3}{2} + 1 = 0 \quad \wedge \quad \frac{3}{4}p + \frac{5}{2}q + \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{27}{4}p - \frac{15}{2}q - \frac{1}{2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{3}{4}p + \frac{5}{2}q + \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{27}{4}p = \frac{1}{2} + \frac{15}{2}q \quad \wedge \quad \frac{3}{4}p + \frac{5}{2}q + \frac{3}{2} = 0$$

De la primera despejo

$$\frac{27}{4}p = \frac{1}{2} + \frac{15}{2}q$$

$$p = \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{2}q\right) \cdot \frac{4}{27}$$

$$p = \left(\frac{2}{27} + \frac{10}{9}q\right)$$

Reemplazo en la segunda

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{27} + \frac{10}{9}q\right) + \frac{5}{2}q + \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{1}{18} + \frac{5}{6}q + \frac{5}{2}q + \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{14}{9} + \frac{10}{3}q = 0$$

$$\frac{10}{3}q = -\frac{14}{9}$$

$$q = -\frac{7}{15}$$

Entonces como $p = \left(\frac{2}{27} + \frac{10}{9}q\right)$

$$p = \frac{2}{27} + \frac{10}{9} * -\frac{7}{15}$$

$$p = \frac{2}{27} - \frac{14}{27}$$

$$p = -\frac{4}{9}$$

Respuesta: $p = -\frac{4}{9}$ y $q = -\frac{7}{15}$

EJERCICIO N° 76

Halle el conjunto solución de

$$\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} \geq 1$$

Solución:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} \geq 1$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1 * (x-2) - 4 * (x-1) - 1 * (x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x-2-4x+4-1 * (x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} \geq 0$$

$$\frac{x-2-4x+4-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} \geq 0$$

$$\frac{-x^2}{x^2-3x+2} \geq 0$$

Como es una division entre dos polinomios para que esta sea mayor que 0, o los dos son positivos o los dos son negativos

$$[-x^2 \geq 0 \wedge (x^2 - 3x + 2) > 0] \vee [-x^2 \leq 0 \wedge (x^2 - 3x + 2) < 0]$$

Como $x^2 - 3x + 2$ tiene raices en $x = 1$ y $x = 2$ y es positiva, es menor que 0 en (1;2) y positiva en el resto.

$-x^2$ es siempre negativo, por lo que nunca es mayor que cero, pero en 0 es igual por lo que satisface la inecuacion

$$[0 \wedge (-\infty; 1) \cup (2; \infty)] \cup [R \wedge (1; 2)]$$

$$[0] \cup [(1; 2)]$$

$$0 \cup (1; 2)$$

Respuesta: {0} + (1;2)

EJERCICIO N° 77

Halle el conjunto solución de

$$\frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} - \frac{x}{x - 3} = \frac{3}{x + 3}$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} - \frac{x}{x - 3} = \frac{3}{x + 3}$$

$$\frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{3}{x + 3} + \frac{x}{x - 3}$$

Saco comun denominador a la derecha $(x+3)(x-3)$

$$\frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{3 * (x - 3) + x * (x + 3)}{(x + 3)(x - 3)}$$

$$\frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{3x - 9 + x^2 + 3x}{x^2 - 9}$$

Como los denominadores son iguales puedo cancelarlos, sacando las 2 posibilidades de x que lo hacen 0, osea que ya sabemos que x es distinto de 3 y -3

$$x^2 + 9 = x^2 + 6x - 9$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

Pero como x tenia que ser distinto de 3 descartamos la Solución

Respuesta: \emptyset

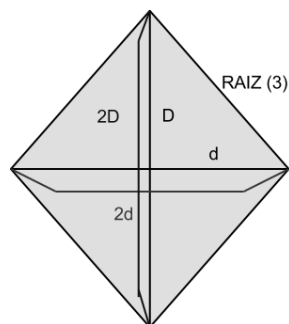
EJERCICIO N° 78

Determine la longitud de la diagonal menor de un rombo si su área es $2\sqrt{2}$ cm² y el lado mide $\sqrt{3}$ cm

Solución:

Dibujemos

Como podemos ver , por ser un rombo, la diagonal menor y la mayor se cortan al medio entre ellas. A partir de ahora llamaremos 2d a la diagonal menor y 2D a la diagonal mayor. tambien podemos observar que forman un triangulo rectangulo.



Si utilizo pitagoras queda

$$d^2 + D^2 = \text{lado}^2$$

Como el lado mide $\sqrt{3}$ cm

$$\begin{aligned} d^2 + D^2 &= (\sqrt{3})^2 \\ d^2 + D^2 &= 3 \\ D^2 &= 3 - d^2 \\ D &= \sqrt{3 - d^2} \end{aligned}$$

Tambien sabemos que el area de un rombo es Diagonal mayor * diagonal menor / 2 osea

$$\frac{2D * 2d}{2} = 2\sqrt{2}$$

Pero como con pitagoras habiamos sacado que $D = \sqrt{3 - d^2}$

$$\frac{2\sqrt{3 - d^2} * 2d}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{3 - d^2} * 2d = 4\sqrt{2}$$

$$4d\sqrt{3 - d^2} = 4\sqrt{2}$$

$$d\sqrt{3 - d^2} = \sqrt{2}$$

Elevo al cuadrado de los dos lados

$$\begin{aligned}(d\sqrt{3-d^2})^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ d^2(\sqrt{3-d^2})^2 &= 2 \\ d^2(3-d^2) &= 2 \\ 3d^2 - d^4 &= 2\end{aligned}$$

Hago el cambio de variable $Z = d^2$

$$\begin{aligned}3Z - Z^2 &= 2 \\ 3Z - Z^2 - 2 &= 0\end{aligned}$$

Esta cuadrática tiene ceros en $Z = 2$ y $Z = 1$

Entonces

$$\begin{array}{ccc} 2 = d^2 & \vee & 1 = d^2 \\ \sqrt{2} = d & \vee & 1 = d \end{array}$$

Como estamos sacando la diagonal menor tomamos la solución menor (la otra solución es la de la diagonal mayor)

$$1\text{cm} = d$$

Como la diagonal menor era $2d$ podemos decir

$$\text{DIAGONAL MENOR} = 2\text{cm}$$

La diagonal mayor media $2D$ entonces

$$2D = 2 * \sqrt{3 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{DIAGONAL MAYOR} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$$

Respuesta: La diagonal menor mide 2cm y la mayor mide $2\sqrt{2}$ cm

EJERCICIO Nº 79

Halle el conjunto solución de $|9 - x^2| > 10$

Solución:

$$|9 - x^2| > 10$$

En primer lugar quitare el modulo

$$\begin{array}{lcl} 9 - x^2 > 10 & \vee & 9 - x^2 < -10 \\ -x^2 + 9 - 10 > 0 & \vee & -x^2 + 9 + 10 < 0 \\ -x^2 - 1 > 0 & \vee & -x^2 + 19 < 0 \end{array}$$

$-x^2 - 1$ es una cuadrática con raíces imaginarias, y como su coeficiente principal es negativo SIEMPRE ES NEGATIVA, por lo tanto nunca es mayor que 0, la Solución de la primera inecuación es vacía.

$$\emptyset \quad \vee \quad -x^2 + 19 < 0$$

$-x^2 + 19$ Es una cuadrática con raíces en $-\sqrt{19}$ y $\sqrt{19}$ y como su coeficiente principal es negativo (tiene forma de sonrisa triste), si haces el dibujo te vas a dar cuenta que es menor que cero en $(-\infty; -\sqrt{19}) \cup (\sqrt{19}; \infty)$

$$\emptyset \quad \vee \quad (-\infty; -\sqrt{19}) \cup (\sqrt{19}; \infty)$$

Respuesta: $(-\infty; -\sqrt{19}) \cup (\sqrt{19}; \infty)$

EJERCICIO N° 80

Encuentra el conjunto solución de $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4} = 2$

Solución:

En primera medida pasare una de las raíces para el otro lado

$$\sqrt{2x-1} = 2 + \sqrt{x-4}$$

Ahora elevare al cuadrado de ambos lados

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x-1})^2 &= (2 + \sqrt{x-4})^2 \\ 2x - 1 &= 2^2 + \sqrt{x-4}^2 + 2 * 2 * \sqrt{x-4} \\ 2x - 1 &= 4 + x - 4 + 4\sqrt{x-4} \\ x - 1 &= 4\sqrt{x-4} \end{aligned}$$

Vuelvo a elevar al cuadrado

$$(x - 1)^2 = (4\sqrt{x-4})^2$$

$$x^2 + (-1)^2 + 2 * x * (-1) = 4^2 * (\sqrt{x-4})^2$$

$$x^2 + 1 - 2x = 16(x - 4)$$

$$x^2 + 1 - 2x = 16x - 64$$

$$x^2 + 65 - 18x = 0$$

Esta cuadratica tiene ceros en $x=5$ y $x=13$, pero como elevamos al cuadrado varias veces debemos comprobar los resultados a ver si verifican

Reemplazo con 5

$$\sqrt{2 * 5 - 1} - \sqrt{5 - 4} = 2$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$$

$$3 - 1 = 2$$

$$2 = 2$$

VERIFICA, 5 es solución

Reemplazo con 13

$$\sqrt{2 * 13 - 1} - \sqrt{13 - 4} = 2$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$$

$$5 - 3 = 2$$

$$2 = 2$$

VERIFICA 13 es solución

Respuesta: $x = 5$ v $x = 13$

EJERCICIO N° 81

Simplifique y exprese conjunto de existencia

$$\frac{\frac{a-b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}}$$

Solución:

En primer lugar hago las restas de fracciones correspondientes a arriba y la suma de abajo

$$\frac{\frac{(a-b) * b - (a+b)a}{ab}}{\frac{(a-b) * a + (a+b) * b}{ab}}$$

Los ab de los denominadores se cancelan

$$\frac{b * (a - b) - a * (a + b)}{a * (a - b) + b * (a + b)}$$

$$\frac{ba - b^2 - ba - a^2}{a^2 - ab + ab + b^2}$$

$$\frac{-b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{-(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

Se cancela numerador con denominador y solo queda -1

Las condiciones de existencia son todos los reales menos los numeros que hacen 0 los denominadores, osea a y b distinto de 0

Respuesta: la expresión simplificada resulta -1 y las condiciones de existencia son $a \neq 0$ y $b \neq 0$

EJERCICIO Nº 82

Determine los ceros de $f: D_f \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = |\log(3x - 1)| - 1$

Solución:

Para encontrar los ceros, debo igualar la función a 0

$$|\log(3x - 1)| - 1 = 0$$

$$|\log(3x - 1)| = 1$$

Abro el modulo

$$\log(3x - 1) = 1 \quad \vee \quad \log(3x - 1) = -1$$

Como el log afecta de los dos lados puedo eliminarlo

$$3x - 1 = 10 \quad \vee \quad 3x - 1 = \frac{1}{10}$$

$$3x = 11 \quad \vee \quad 3x = \frac{11}{10}$$

$$x = \frac{11}{3} \quad \vee \quad x = \frac{11}{30}$$

$$\text{Respuesta: } x = \frac{11}{3} \quad \vee \quad x = \frac{11}{30}$$

EJERCICIO N° 83

Se sabe que 2 y -2 son raíces de $x^3 + 3x^2 + hx + k = 0$, encuentre h y k y determine la tercera raíz

Solución:

Sabemos que 2 y -2 son raíces, por lo tanto si reemplazamos las x por 2 o -2 el resultado debe ser 0

reemplazo por 2

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + hx + k &= 0 \\ 8 + 3 * 4 + 2h + k &= 0 \\ k &= -2h - 8 - 12 \end{aligned}$$

Ahora reemplazo por -2

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + hx + k &= 0 \\ -8 + 3 * 4 - 2h + k &= 0 \\ k &= 2h - 12 + 8 \end{aligned}$$

Si igualo ambas k

$$\begin{aligned} -2h - 8 - 12 &= 2h - 12 + 8 \\ -16 &= 4h \\ h &= -4 \end{aligned}$$

Reemplazo en una de las ecuaciones de k

$$\begin{aligned} k &= 2h - 12 + 8 \\ k &= 2 * -4 - 12 + 8 \\ k &= -8 - 12 + 8 \\ k &= -12 \end{aligned}$$

Entonces ahora sabemos que la ecuación es

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

Para hallar la tercera raíz primero hare rufini por dos y menos 2

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -4 & -12 \\
 2 & & 2 & 10 & 12 \\
 \hline
 & 1 & 5 & 6 & 0 \\
 -2 & 2 & -2 & -6 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 0 &
 \end{array}$$

Osea que el polinomio queda

$$(x - \text{Raiz1}) * (x - \text{Raiz2}) * \text{resultado de rufini}$$

$$(x - 2)(x + 2)(x + 3)$$

Como $(x + 3)$ tambien es un $x - \text{raiz}$, podemos decir que la tercera raíz es -3

Respuesta: $h = -4$, $k = -12$ y la tercera raíz es $x = -3$

EJERCICIO Nº 84

Determine la cantidad de aluminio necesaria para construir una lata cilíndrica sin tapa, cuya capacidad es $128\pi \text{ cm}^3$, si sabe que el diámetro de la lata coincide con la altura

Solución:

La cantidad de aluminio para construirla (como no es maciza) es la formula de area

$$\text{Area} = \pi \text{Radio}^2 + 2\pi \text{Radio} * h$$

Como el diametro de la lata coincide con la altura, y el diametro es 2 Radio

$$h = \text{Diametro}$$

$$h = 2\text{radio}$$

Por otro lado sabemos que la capacidad es $128\pi \text{ cm}^3$, la formula de capacidad (o volumen) es

$$\pi \text{radio}^2 * h = \text{capacidad}$$

Entonces

$$\pi \text{radio}^2 * h = 128\pi \text{ cm}^3$$

Cancelo las n

$$\text{radio}^2 * h = 128 \text{ cm}^3$$

Como $h = 2\text{radio}$

$$\begin{aligned} \text{radio}^2 * 2\text{radio} &= 128\text{cm}^3 \\ \text{radio}^3 &= 64\text{cm}^3 \\ \text{Radio} &= 4\text{cm} \end{aligned}$$

Como $h = 2\text{radio}$

$$\begin{aligned} h &= 2 * 4\text{cm} \\ h &= 8\text{cm} \end{aligned}$$

Si reemplazo en la formula de area

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \pi 4\text{cm}^2 + 2\pi 4\text{cm} * 8\text{cm} \\ \text{Area} &= 16\text{cm}^2 \pi + 64\text{cm}^2 \pi \\ \text{Area} &= 80 \pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: Se necesitan $80 \pi \text{ cm}^2$ de aluminio

EJERCICIO N° 85

Sean $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = -x^2 - (k + 2)x + 1$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = 3x - k$ determine los valores reales de k si se sabe que $h \circ g(-1) = 2$

Solución

Tenemos

$$h(x) = -x^2 - (k + 2)x + 1$$

$$g(x) = 3x - k$$

vamos a hallar $h \circ g(x)$

para realizar las funciones compuestas se debe saber que

$$h \circ g(x) = h(g(x))$$

osea, esto significa que copiare $h(x)$ pero en vez de poner x , pondre $g(x)$

$$h(g(x)) = -g(x)^2 - (k + 2) * g(x) + 1$$

si reemplazo $g(x)$ por $3x - k$

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= -(3x - k)^2 - (k + 2) * (3x - k) + 1 \\ h(g(x)) &= -(9x^2 + k^2 - 6kx) - (3kx - k^2 + 6x - 2k) + 1 \\ h \circ g(x) &= -9x^2 - k^2 + 6kx - 3kx + k^2 - 6x + 2k + 1 \end{aligned}$$

Ahora hallare $h \circ g(-1)$

$$\begin{aligned} h \circ g(-1) &= -9 * (-1)^2 - k^2 + 6k * (-1) - 3k * (-1) + k^2 - 6 * (-1) + 2k + 1 \\ h \circ g(-1) &= -9 - k^2 - 6k + 3k + k^2 + 6 + 2k + 1 \\ h \circ g(-1) &= -2 - k \end{aligned}$$

como $h \circ g(-1) = 2$

$$\begin{aligned} -2 - k &= 2 \\ -k &= 4 \\ k &= -4 \end{aligned}$$

Respuesta: $k = -4$

EJERCICIO N° 86

El resto de dividir $p(x) = 2x^5 + 7x^3 - 10x + 2$ por $x + a$ es 6. ¿Cuál es el resto de dividir a $p(x)$ por $x - a$

Solución:

El teorema del resto establece que:

$$\text{si yo divido } p(x)/(x - a) \Rightarrow p(a) = \text{resto}$$

En este problema en especial:

$$p(x) = 2x^5 + 7x^3 - 10x + 2 / x + a \Rightarrow p(-a) = 6$$

Hallemos $p(-a)$

$$p(-a) = 2(-a)^5 + 7(-a)^3 - 10(-a) + 2$$

$$p(-a) = -2a^5 + -7a^3 + 10a + 2$$

y esto debe ser igual a 6

$$6 = 2(-a)^5 + 7(-a)^3 - 10(-a) + 2$$

paso el 2 restando

$$4 = 2(-a)^5 + 7(-a)^3 - 10(-a)$$

Por otro lado realizare el mismo procedimiento pero ahora para $x - a$

$$p(x) = 2x^5 + 7x^3 - 10x + 2 / x - a \Rightarrow p(a) = \text{RESTO}$$

hallemos $p(a)$

$$p(a) = 2(a)^5 + 7(a)^3 - 10(a) + 2$$

y esto debe ser igual al RESTO

$$2(a)^5 + 7(a)^3 - 10(a) + 2 = \text{RESTO}$$

Por otro lado como los exponentes son impares, no absorben el signo

$$\begin{aligned} (a)^5 &= -(-a)^5 \\ (a)^3 &= -(-a)^3 \\ 10(a) &= -10(-a) \end{aligned}$$

Entonces reemplazo

$$-2(-a)^5 - 7(-a)^3 + 10(-a) + 2 = \text{RESTO}$$

paso el RESTO restando

$$-2(-a)^5 - 7(-a)^3 + 10(-a) + 2 - \text{RESTO} = 0$$

Saco (-1) factor comun

$$-(2(-a)^5 + 7(-a)^3 - 10(-a)) + 2 - \text{RESTO} = 0$$

Pero arriba (subrayado) habíamos dicho que

$$2(-a)^5 + 7(-a)^3 - 10(-a) = 4$$

Entonces

$$\begin{aligned} -(4) + 2 - \text{RESTO} &= 0 \\ -4 + 2 &= \text{RESTO} \\ \text{RESTO} &= -2 \end{aligned}$$

Respuesta: El resto de dividir a $p(x)$ por $(x-a)$ es -2

EJERCICIO Nº 87

Halle el conjunto solución de $\log (16 - 3 \log |2x - 4|) = \ln e$

Solución:

$$\log(16 - 3 \log |2x - 4|) = \ln e$$

como sabemos el ln tiene base e, y cuando lo de adentro de un logaritmo es igual a su base, el resultado es 1 (tambien lo puedes hacer con la calculadora ln (e))

$$\log (16 - 3 \log |2x - 4|) = 1$$

para sacar el log hacemos

$$10^{\log(16 - 3 \log |2x-4|)} = 10^1$$

como el log es base 10 se cancelan

$$16 - 3 \log |2x - 4| = 10$$

$$- 3 \log |2x - 4| = - 6$$

$$3 \log |2x - 4| = 6$$

$$\log |2x - 4| = 2$$

Otra vez sacamos el logaritmo

$$10^{\log|2x - 4|} = 10^2$$

$$| 2x - 4 | = 100$$

abrimos el modulo

$$\begin{array}{lcl} 2x - 4 = 100 & \vee & 2x - 4 = -100 \\ x = 52 & & x = -48 \end{array}$$

Respuesta: $x = 52$ \vee $x = -48$

EJERCICIO Nº 88

4 es el resto de dividir el polinomio $p(x) = 3x^2 - kx - 32$ por el polinomio monico $x+3$. Factorice en factores primos el polnomio $q(x)=p(x)-4$

Solución:

El teorema del resto establece que:

$$\text{si yo divido } \frac{p(x)}{(x-a)} \Rightarrow p(a) = \text{resto}$$

Entonces

$$\frac{p(x)}{(x+3)} \Rightarrow p(-3) = 4$$

$$p(-3) = 4$$

$$3 * (-3)^2 - k * (-3) - 32 = 4$$

$$3 * 9 + 3k - 32 = 4$$

$$27 + 3k - 32 = 4$$

$$3k - 5 = 4$$

$$3k = 9$$

$$k = 3$$

El polinomio $q(x) = p(x) - 4$

$$q(x) = (3x^2 - 3x - 32) - 4$$

$$q(x) = 3x^2 - 3x - 36$$

$$q(x) = 3 * (x^2 - x - 12)$$

Las raices de $(x^2 - x - 12)$ son -3 y 4 por lo tanto como un polinomio monico se puede escribir como $(x - \text{Raiz1}) * (x - \text{Raiz2})$

$$q(x) = 3 * (x - 4) (x + 3)$$

Respuesta: $q(x) = 3 * (x - 4) (x + 3)$

EJERCICIO N° 89

Sea la función biyectiva $h: D_h \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = 5 + \log_3(x + 9)$ Deduzca el dominio de h y el conjunto de ceros de h^{-1}

Solución:

Hallemos el dominio, sabemos que

$$h(x) = 5 + \log_3(x + 9)$$

El dominio de h son todos los reales excepto los que hacen que el argumento del logaritmo sea igual o menor que cero

$$\begin{aligned} x + 9 &> 0 \\ x &> -9 \end{aligned}$$

$$\text{Dominio de } h = (-9; \infty)$$

Hallemos h^{-1} , para esto debemos despejar x de la función h

$$h(x) = 5 + \log_3(x + 9)$$

$$h(x) - 5 = \log_3(x + 9)$$

$$3^{h(x)-5} = 3^{\log_3(x+9)}$$

$$3^{h(x)-5} = x + 9$$

$$3^{h(x)-5} - 9 = x$$

Una vez despejada, reemplazo x con $h^{-1}(x)$ y $h(x)$ por x

$$3^{x-5} - 9 = h^{-1}(x)$$

Para hallar los ceros igualo a 0

$$3^{x-5} - 9 = 0$$

$$3^{x-5} = 9$$

$$\log_3 3^{x-5} = \log_3 9$$

Como la mayoría de las calculadoras no hacen log en base 3 (solo en base 10 o base e) realizare cambio de base, esto está dado por

$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$$

entonces

$$x - 5 = \frac{\log 9}{\log 3}$$

$$x - 5 = 2$$

$$x = 7$$

Respuesta: El Dominio de $h = (-9; \infty)$ Y El cero de $h^{-1}(x)$ es $x = 7$

EJERCICIO N° 90

Determine el dominio Dh si sabemos que $h(x)$ tiene dos ceros reales y uno es raíz doble negativa del polinomio $p(X)$

$$h: Dh \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = \sqrt{p(x)}$$

$$p: Dp \rightarrow \mathbb{R}/p(x) = x^3 - 147x - 686$$

Solución:

Por gauss podemos determinar que las posibles raíces de $p(X)$ están dadas por las diferentes combinaciones de los divisores del Término independiente sobre los divisores de Coeficiente principal. Entonces

$$DTind = \pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14; \pm 49; \pm 98; \pm 343; \pm 686$$

$$DCoef princ = \pm 1$$

Osea que las posibles raíces

$$Posibles raices = DTind/DCoef princ = \pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14; \pm 49; \pm 98; \pm 343; \pm 686$$

Nos decía que la raíz doble era negativa, eso nos limita mas las posibilidades

$$Posibles raices = -1; -2; -7; -14; -49; -98; -343; -686$$

Por teorema del resto puedo decir que

$$p(\text{Raiz}) = 0$$

Entonces voy probando

$$p(-1) = (-1)^3 - 147 * -1 - 686 = -540$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 147 * -2 - 686 = -400$$

$$p(-7) = (-7)^3 - 147 * -2 - 686 = 0$$

Osea que la raíz doble negativa puede ser -7 , realizo Ruffini para dividir el polinomio dos veces y verificar (el resto debe ser cero)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -7 & 1 & 0 & -147 & -686 \\
 & & -7 & 49 & 686 \\
 \hline
 & 1 & -7 & -98 & 0 \\
 -7 & & -7 & 98 & \\
 \hline
 & 1 & -14 & 0 &
 \end{array}$$

Osea que $p(x)$ queda

$$p(x) = (x - 14)(x + 7)^2$$

El dominio de h , como es una raíz, esta determinado por que lo de adentro de la raíz, sea mayor o igual a cero, entonces

$$p(x) \geq 0$$

$$(x - 14)(x + 7)^2 \geq 0$$

Sabemos que -7 y 14 hacen cero la desigualdad, asi que ya sabemos que están dentro de la solución, luego como $(x + 7)^2$ es siempre mayor a cero, la multiplicación será mayor que cero cuando $x-14$ sea mayor a cero

$$x - 14 > 0$$

$$x > 14$$

Osea que el dominio esta dado por la union entre

$$\begin{array}{ccccccc}
 x > 14 & \cup & & \text{Raices} & & & \\
 (14; \infty) & \cup & \{-7\} & \cup & \{14\} & &
 \end{array}$$

Respuesta: $Dh: [14; \infty) + \{-7\}$

EJERCICIO N° 91

Factorice en factores primos $p(x)$ si sabemos que es divisible por $(x-5)$ y $(x-8)$

siendo $p(x) = x^4 - 14x^3 + 41x^2 + ax + b$

Solución:

Como $p(x)$ es divisible por $(x-5)$ y $(x-8)$ al hacer ruffini con 5 y 8 el resto debe ser cero

5	1	-14	41	a	b
		5	-45	-20	$5a - 100$
8	1	-9	-4	$a - 20$	$5a - 100 + b$
		8	-8	-96	
	1	-1	-12	$a - 116$	

Como 5 y 8 eran raíces los restos deben ser cero, entonces

$$a - 116 = 0$$

$$a = 116$$

$$5a - 100 + b = 0$$

$$5 * 116 - 100 + b = 0$$

$$580 - 100 + b = 0$$

$$b = -480$$

Entonces por el resultado de las divisiones por ruffini puedo decir que

$$p(x) = (\text{resultado de ruffini}) * (x - \text{Raiz1}) * (x - \text{Raiz2})$$

$$p(x) = (x^2 - x - 12)(x - 5)(x - 8)$$

Para sacar las raíces de $x^2 - x - 12$ hago la cuadrática y me da que son $4y -3$ entonces $p(x)$ queda

$$p(x) = (x - 4)(x + 3)(x - 5)(x - 8)$$

Respuesta: $p(x) = (x - 4)(x + 3)(x - 5)(x - 8)$

EJERCICIO N° 92



Sea un recipiente cilíndrico con hoyo semiesférico. Se conoce que el volumen del material es $1125 \pi \text{ cm}^3$. Determine el radio de la base. La semiesfera se llena con líquido que tiene una masa de $52/\pi$ g cada dm^3 . ¿Cuál es la masa de líquido?

Solución:

Nosotros conocemos que el volumen del material es $1125 \pi \text{ cm}^3$, pero el recipiente tiene una forma que no conocemos la fórmula de volumen, pero que la podemos calcular fácilmente si al volumen del cilindro original, le restamos el de la semiesfera.

$$\text{Volumen recipiente} = 1125 \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen cilindro} - \text{Volumen semiesfera} = 1125 \pi \text{ cm}^3$$

$$\pi * \text{Radio cilindro}^2 * h - \frac{4}{3} \pi * \frac{\text{Radio esfera}^3}{2} = 1125 \pi \text{ cm}^3$$

Pero como podemos ver en el dibujo, la altura del cilindro, su radio y el radio del cilindro coinciden, por lo que a todos los llamare r , además cancelare las π .

$$r^2 * r - \frac{4}{3} * \frac{r^3}{2} = 1125 \text{ cm}^3$$

$$r^3 - \frac{2}{3} * r^3 = 1125 \text{ cm}^3$$

$$\frac{1}{3} * r^3 = 1125 \text{ cm}^3$$

$$r^3 = 3375 \text{ cm}^3$$

$$r = 15 \text{ cm}$$

Ahora nos pide calcular la masa de líquido que llena la esfera, para esto calculare el volumen de la semiesfera

$$\text{Volumen semiesfera} = \frac{4}{3} \pi * \frac{\text{Radio esfera}^3}{2} = \frac{4}{3} \pi * \frac{(15\text{cm})^3}{2} = 2250 \text{ cm}^3$$

Pero esta en cm^3 y nosotros lo necesitamos en dm^3 entonces si lo dividimos por 1000 queda en dm^3 (porque 1 dm^3 son 1000 cm^3)

$$\text{Volumen semiesfera} = 2,250 \text{ dm}^3$$

La consigna nos dice que 1 dm^3 son $52/\pi$ g entonces

$$\begin{array}{l} 1 \text{ dm}^3 \text{ -----} \frac{52}{\pi} \text{ g} \\ 2,250 \pi \text{ dm}^3 \text{ -----} 117 \text{ g} \end{array}$$

Respuesta: El radio de la base es 15cm y la masa 117g .

EJERCICIO N° 93

Reduzca a la minima expresión $\sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$

Solución:

$$\sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$$

Sumo las fracciones dentro del parentesis

$$\sqrt{1 + \left(\frac{4x^3 * x^3 - 1}{4x^3}\right)^2}$$

Distribuyo exponente y sumo exponentes en multiplicación de igual indice

$$\sqrt{1 + \frac{(4x^6 - 1)^2}{(4x^3)^2}}$$

Realizo el cuadrado del numerador

$$\sqrt{1 + \frac{16x^{12} - 8x^6 + 1}{(4x^3)^2}}$$

Sumo el 1

$$\sqrt{\frac{(4x^3)^2 + 16x^{12} - 8x^6 + 1}{(4x^3)^2}}$$

Realizo propiedades de la potenciacion

$$\sqrt{\frac{16x^6 + 16x^{12} - 8x^6 + 1}{(4x^3)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{16x^{12} + 8x^6 + 1}{(4x^3)^2}}$$

El numerador es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto lo puedo escribir de la forma

$$\sqrt{\frac{(4x^6 + 1)^2}{(4x^3)^2}}$$

Distribuyo la raiz

$$\frac{\sqrt{(4x^6 + 1)^2}}{\sqrt{(4x^3)^2}}$$

Cancelo raíz con exponente

$$\frac{4x^6 + 1}{4x^3}$$

$$\frac{4x^6}{4x^3} + \frac{1}{4x^3}$$

$$x^3 + \frac{1}{4x^3}$$

Respuesta: la expresión factorizada resulta $x^3 + \frac{1}{4x^3}$

EJERCICIO N° 94

Dada la función polinómica de segundo grado $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = -3ax^2 + 4a^2x - 169a$

Se sabe que el numero a es cero negativo de g. Halle las coordenadas del punto del vértice de $g(x)$

Solución:

$$g(x) = -3ax^2 + 4a^2x - 169a$$

Como a es un cero, hallemos $g(a) = 0$

$$g(a) = -3a * a^2 + 4a^2 * a - 169a$$

$$0 = -3a^3 + 4a^3 - 169a$$

$$0 = a^3 - 169a$$

Como a debe ser distinto de cero (porque sino la función polinómica no sería de segundo grado) puedo sacarlo de factor común y pasarla dividiendo

$$0 = a(4a^2 - 169)$$

$$0 = 4a^2 - 169$$

Esta es una cuadratica con ceros en $a = 13$ y $a = -13$, como dice que a es el cero negativo,

$$a = -13$$

Reemplazemos en $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= -3 * (-13)x^2 + 4 * (-13)^2x - 169 * -13 \\ g(x) &= 39x^2 + 4 * 169x + 2197 \\ g(x) &= 39x^2 + 676x + 2197 \end{aligned}$$

La x del vertice se halla en $x_{\text{vertice}} = -\frac{b}{2a}$

$$x_{\text{vertice}} = -\frac{b}{2a}$$

$$x_{\text{vertice}} = -\frac{676}{2 * 39}$$

$$x_{\text{vertice}} = -\frac{676}{78}$$

$$x_{\text{vertice}} = -\frac{26}{3}$$

Ahora hallemos la y del vertice

$$y_{\text{vertice}} = g\left(-\frac{26}{3}\right)$$

$$y_{\text{vertice}} = 39 * -\frac{26^2}{3} + 676 * -\frac{26}{3} + 2197$$

$$y_{\text{vertice}} = -\frac{2197}{3}$$

Respuesta: $Vertice = (x_{\text{vertice}}; y_{\text{vertice}}) = \left(-\frac{26}{3}; -\frac{2197}{3}\right)$

EJERCICIO N° 95

sean las funciones $f: \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{5\}/f(x) = \frac{ax+18}{3x+b}$ y g polinomial de primer grado de dominio $D_g = \mathbb{R} - \{K\}$ tal que existe $f \circ g(x)$ y que $g(3)=-1$, $g(-4)=20$.

Halle $g(x)$, el cero de $f \circ g(x)$ y las asíntotas de la función compuesta

Soluci3n:

Una funci3n homografica siempre tiene la forma

$$f: \mathbb{R} - \{AV\} \rightarrow \mathbb{R} - \{AH\} / f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Osea que nosotros sabemos que

$$AV : x = -3$$

La as3ntota vertical se calcula igualando a cero el denominador de la funci3n homografica, entonces

$$\begin{aligned} 3x + b &= 0 \\ 3 * (-3) + b &= 0 \\ b &= 9 \end{aligned}$$

Tambien sabemos que

$$AH : y = 5$$

La as3ntota vertical se diviendo las x de numerador y denominador

$$y = \frac{ax}{3x}$$

$$5 = \frac{a}{3}$$

$$a = 15$$

Entonces f(x) queda

$$f: \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{5\} / f(x) = \frac{15x + 18}{3x + 9}$$

g(x) sabemos que es una funci3n polinomic de primer grado con dominio $\mathbb{R} - \{K\}$ entonces

$$g: \mathbb{R} - \{K\} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = ax + b$$

Como $g(3) = -1$ y $g(-4) = 20$

$$\begin{aligned} 3a + b &= -1 & \wedge & & -4a + b &= 20 \\ b &= -1 - 3a & \Rightarrow & & -4a + (-1 - 3a) &= 20 \\ & & & & -4a - 3a - 1 &= 20 \\ & & & & -7a &= 21 \\ b &= 8 & & & \wedge & & a &= -3 \end{aligned}$$

Quedando

$$g: \mathbb{R} - \{K\} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = -3x + 8$$

Para que exista $f \circ g$, la imagen de g , debe estar incluida en el dominio de f , por lo tanto, k , sera aquel valor de x que tenga como imagen -3 , que es la asintota de f .

$$\begin{aligned} g(K) &= -3 \\ -3K + 8 &= -3 \\ -3K &= -11 \\ K &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Quedando

$$g: \mathbb{R} - \left\{ \frac{11}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-3\} / g(x) = -3x + 8$$

Ahora hallemos $f \circ g(x)$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ f \circ g(x) &= \frac{15 * (-3x + 8) + 18}{3 * (-3x + 8) + 9} \end{aligned}$$

$$f \circ g(x) = \frac{-45x + 120 + 18}{-9x + 24 + 9}$$

$$f \circ g(x) = \frac{-45x + 138}{-9x + 33}$$

Calculamos las asíntotas

AV:

$$\begin{aligned} -9x + 33 &= 0 \\ -9x &= -33 \\ x &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

AH:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-45x}{-9x} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$f \circ g(x)$ queda

$$f \circ g(x): \mathbb{R} - \left\{ \frac{11}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{5\} / f \circ g(x) = \frac{-45x + 138}{-9x + 33}$$

Ahora para hallar los ceros de la homografica debemos igualar a cero el numerador

$$\begin{aligned} -45x + 138 &= 0 \\ -45x &= -138 \\ x &= \frac{46}{15} \end{aligned}$$

Respuesta: La raíz de $f \circ g(x)$ esta en $x = 46/15$

EJERCICIO N° 96

Se tienen 5 botellas alineadas con liquido dentro. La primera contiene un volumen V de liquido y las demás contienen $\frac{4}{5}$ del volumen del liquido de la botella de su izquierda.. El volumen total de liquido entre todas las botellas es de $\frac{151}{64} \text{ dm}^3$ ¿Cuál es el volumen V de la primera botella?

Solución:

Sabemos que

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \text{ Botella} &= V \\ 2^{\circ} \text{ Botella} &= \frac{4}{5} * 1^{\circ} \text{ Botella} = \frac{4}{5} V \\ 3^{\circ} \text{ Botella} &= \frac{4}{5} 2^{\circ} \text{ Botella} = \frac{4}{5} * \left(\frac{4}{5} V\right) = \frac{16}{25} V \\ 4^{\circ} \text{ Botella} &= \frac{4}{5} 3^{\circ} \text{ Botella} = \frac{4}{5} * \left(\frac{16}{25} V\right) = \frac{64}{125} V \\ 5^{\circ} \text{ Botella} &= \frac{4}{5} 4^{\circ} \text{ Botella} = \frac{4}{5} * \left(\frac{64}{125} V\right) = \frac{256}{625} V \end{aligned}$$

El volumen total de liquido es la suma de todos los volúmenes

1° Botella + 2° Botella + 3° Botella + 4° Botella + 5° Botella = Volumen total

$$V + \frac{4}{5}V + \frac{16}{25}V + \frac{64}{125}V + \frac{256}{625}V = \frac{151}{64} \text{ dm}^3$$

$$\frac{2101}{62} V = \frac{151}{64} \text{ dm}^3$$

$$V = \frac{94375}{134464} \text{ dm}^3$$

Respuesta: El volumen aproximado de la primera botella es de 0.7 dm^3

EJERCICIO N° 97

El polinomio $p(x) = 5x^2 + (k^2 - 6k - 91)x + (18k + 80)$ con k real, tiene dos raíces reales y opuestas. Determine el valor de k .

Solución:

Un polinomio tiene raíces reales y opuestas cuando $b = 0$, pero veamos por que.

Las raíces de un polinomio cuadrático son

$$\text{Raiz1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad \text{Raiz2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si forzamos a que sean opuestas tiene que pasar que

$$\text{Raiz1} = -\text{Raiz2}$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$-b + \sqrt{b^2 - 4ac} = b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$-b = b$$

$$-2b = 0$$

$$b = 0$$

Perfecto ahora que sabemos eso sabemos que para que este polinomio tenga dos raíces reales y opuestas b , que es $(k^2 - 6k - 91)$, debe ser cero, entonces

$$k^2 - 6k - 91 = 0$$

Esta es una cuadrática con ceros en $k = -7$ y $k = 13$

Veamos las dos opciones

Si $k = -7$

$$\begin{aligned} p(x) &= 5x^2 + ((-7)^2 - 6 * (-7) - 91)x + (18 * (-7) + 80) \\ p(x) &= 5x^2 + 0x - 46 \\ p(x) &= 5x^2 - 46 \end{aligned}$$

Hallemos los ceros

$$\begin{aligned}0 &= 5x^2 - 46 \\46 &= 5x^2 \\ \frac{46}{5} &= x^2 \\ \sqrt{\frac{46}{5}} &= |x|\end{aligned}$$

$$x = \sqrt{\frac{46}{5}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{46}{5}}$$

Osea que si k vale -7 las raíces del polinomio son $x = \sqrt{\frac{46}{5}} \wedge x = -\sqrt{\frac{46}{5}}$

Si $k = 13$

$$\begin{aligned}p(x) &= 5x^2 + ((13)^2 - 6 * (13) - 91)x + (18 * (13) + 80) \\p(x) &= 5x^2 + 0x + 314 \\p(x) &= 5x^2 + 314\end{aligned}$$

Hallemos los ceros

$$\begin{aligned}0 &= 5x^2 + 314 \\-314 &= 5x^2 \\ \frac{-314}{5} &= x^2\end{aligned}$$

Esto no tiene Solución en reales así que podemos decir que existe una única Solución y es la de $k = -7$

Respuesta: $k = 7$

EJERCICIO N° 98

Las raíces reales del polinomio $p(x) = (k^2 - 2k - 8)x^2 - (k^2 - 9)x - 175$ son opuestas. Determine el polinomio diferencia $p(x) - (6x^2 + x)$.

Solución:

La consigna establece que las raíces deben ser opuestas.

Calculemos las raíces con la resolvente

$$R1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y la

$$R2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si las raices son opuestas podemos decir que

$$R1 + R2 = 0 \quad (\text{porque } R2 = -R1)$$

Sumemos nuestras R1 y R2 y igualemos a cero:

$$R1 + R2 = 0$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

Sumo

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

Las raíces se cancelan y el 2a pasa multiplicando

$$\begin{aligned} [-b - b] &= 0 \\ -2b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Entonces sabemos que para que las raices sean opuestas b debe ser cero

Nuestro polinomio era:

$$p(x) = (k^2 - 2k - 8)x^2 - (k^2 - 9)x - 175$$

Por lo tanto b es $-(k^2 - 9)$, igualemoslo a cero

$$-(k^2 - 9) = 0$$

$$k^2 - 9 = 0$$

$$k^2 = 9$$

$$|k| = \sqrt[2]{9}$$

$$k = 3 \quad \vee \quad k = -3$$

Verifiquemos que pasa con cada una:

Si $k = 3$

$$p(x) = (k^2 - 2k - 8)x^2 - (k^2 - 9)x - 175$$

$$p(x) = (3^2 - 2 * 3 - 8)x^2 - (3^2 - 9)x - 175$$

$$p(x) = (9 - 6 - 8)x^2 - (9 - 9)x - 175$$

$$p(x) = (-5)x^2 - (0)x - 175$$

$$p(x) = -5x^2 - 175$$

Si le saco las raices, las mismas son imaginarias, por lo que no cumpliría la consigna. Probemos con $k = -3$

Si $k = -3$

$$p(x) = (k^2 - 2k - 8)x^2 - (k^2 - 9)x - 175$$

$$p(x) = ((-3)^2 - 2 * (-3) - 8)x^2 - ((-3)^2 - 9)x - 175$$

$$p(x) = (9 + 6 - 8)x^2 - (9 - 9)x - 175$$

$$p(x) = (7)x^2 - (0)x - 175$$

$$p(x) = 7x^2 - 175$$

Al calcularle las raices son $x = 5$ y $x = -5$ como son reales y opuestas podemos decir que

SI $K = (-3)$ EL POLINOMIO $P(X)$ TIENE RAICES REALES Y OPUESTAS

Hallemos ahora el polinomio: $p(x) - (6x^2 + x)$

$$p(x) - (6x^2 + x) = 7x^2 - 175 - (6x^2 + x)$$

$$p(x) - (6x^2 + x) = x^2 - x - 175$$

Respuesta: Si $K = -3$ el polinomio tiene raíces reales y opuestas y el polinomio diferencia $p(x) - (6x^2 + x) = x^2 - x - 175$

EJERCICIO N° 99

Dado el polinomio $p(x) = 8x^4 - 12x^3 + (h + k)x^2 + 23x + h + 7k$, determine h y k si se sabe que 2 y $-3/2$ son raíces simples de $p(x)$

Solución:

Como 2 y $-3/2$ son raíces de $p(x)$ sabemos que al dividir por Ruffini por esos valores tiene que dar cero el resto. Hagámoslo.

Primero por $-3/2$ y luego por 2

$-3/2$	8	-12	$h + k$	23	$h + 7k$
	-12	36	$(-3/2)(h + k) - 54$	$(9/4)(h + k) + 93/2$	
2	8	-24	$h + k + 36$	$(-3/2)(h + k) - 31$	$13/4h + 37/4k + 93/2$
	5	16	-16	-16	
	8	-8	$h + k + 20$	$1/2h + 1/2k + 9$	

Si igualamos a cero los restos

$$\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + 9 = 0$$

$$\frac{1}{2}k = -9 - \frac{1}{2}h$$

$$k = -18 - h$$

Ahora igualo a cero el otro resto

$$\frac{13}{4}h + \frac{37}{4}k + 93/2 = 0$$

Y reemplazamos con lo que vale k

$$\frac{13}{4}h + \frac{37}{4}(-18 - h) + \frac{93}{2} = 0$$

$$\frac{13}{4}h - \frac{333}{2} - \frac{37}{4}h + \frac{93}{2} = 0$$

$$-6h - 120 = 0$$

$$h = -20$$

Si ahora reemplazo en $k = -18 - h$

$$k = -18 - (-20)$$

$$k = -18 + 20$$

$$h = 2$$

Respuesta: $k = 2$ y $h = -20$

EJERCICIO N° 100

Dadas las funciones $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \text{Log}(3x)$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(-1) = 1$ y $g(1) = 5$.

Siendo $g(x)$ una función lineal, determine el conjunto de solución de la inecuación.

$$10^{f(x)} \leq -g^{-1}(x)$$

Solución:

Primero hallemos $g(x)$, como sabemos que es una lineal tendrá la forma de

$$g(x) = ax + b$$

Si hallamos $g(1)$

$$g(1) = a * 1 + b$$

$$5 = a + b$$

$$a = 5 - b$$

Ahora $g(-1)$

$$g(-1) = -1 * a + b$$

$$g(-1) = -a + b$$

$$1 = -a + b$$

Si reemplazo con lo que me dio a arriba a

$$1 = -(5 - b) + b$$

$$1 = -5 + b + b$$

$$6 = 2b$$

$$b = 3$$

Como a era 5-b

$$a = 2$$

Entonces $g(x) = 2x + 3$

Para hallar $g(x)^{-1}$ tengo que despejar x

$$g(x) = 2x + 3$$

$$g(x) - 3 = 2x$$

$$\frac{g(x) - 3}{2} = x$$

Reemplazo x por $g(x)^{-1}$ y g(x) por x

$$g(x)^{-1} = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

Ahora plantemos la inecuacion

$$10^{f(x)} \leq g^{-1}(x)$$

$$10^{\log(3x)} \leq -\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

Como el log es en base 10 se cancela con el 10 de abajo

$$3x \leq -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$3x + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{6x + x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$7x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{7}$$

Respuesta: S = $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right]$

EJERCICIO N° 101

Sea la función exponencial $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}_g/g(x) = a \cdot b^x + 3$ con $g(1) = 98$ y $g(2) = 478$.
determinar las constantes a y b reales positivos y los conjuntos: \mathbb{I}_g y

$$A = \left\{ x/x \in Dg^{-1} \text{ y } 2g^{-1}(x) = \log_b \left(\frac{x+39}{a^2} \right) \right\}$$

Solución:

Tenemos

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}_g/g(x) = a \cdot b^x + 3 \\ \text{con } g(1) = 98 \text{ y } g(2) = 478.$$

Hallemos a y b

$$g(x) = a \cdot b^x + 3$$

$$g(1) = a \cdot b^1 + 3$$

$$98 = a \cdot b + 3$$

$$a \cdot b = 95$$

$$a = \frac{95}{b}$$

$$g(2) = a \cdot b^2 + 3$$

Reemplazo con $a = \frac{95}{b}$

$$478 = \left(\frac{95}{b} \right) \cdot b^2 + 3$$

$$475 = 95 \cdot b$$

$$b = 5$$

Pero como $a = \frac{95}{b}$

$$a = \frac{95}{5}$$

$$a = 19$$

Ahora la función nos queda

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}_g/g(x) = 19 \cdot 5^x + 3$$

$19 \cdot 5^x$ Es una exponencial con base positiva por lo tanto su imagen van a ser los reales positivos, si a los reales positivos le sumamos el 3 el intervalo resulta del 3 hacia adelante

$$\mathbb{I}_g = (3; \infty)$$

Ahora nos queda

$$g(x) = 19 \cdot 5^x + 3$$

Ahora tenemos que hallar

$$A = \left\{ x/x \in Dg^{-1} \text{ y } 2g^{-1}(x) = \text{Log}_b \left(\frac{x+39}{a^2} \right) \right\}$$

Primero que nada hallemos $g^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= 19 \cdot 5^x + 3 \\ g(x) - 3 &= 19 \cdot 5^x \\ \frac{(g(x) - 3)}{19} &= 5^x \end{aligned}$$

$$\text{Log}_5 \left(\frac{(g(x) - 3)}{19} \right) = \text{Log}_5 (5^x)$$

$$\text{Log}_5 \left(\frac{(g(x) - 3)}{19} \right) = x$$

$$g(x)^{-1} = \text{Log}_5 \left(\frac{(x - 3)}{19} \right)$$

Hallemos el dominio de $g^{-1}(x)$. Como hay un log, tenemos que plantear que su argumento sea mayor a cero, entonces

$$\frac{(x - 3)}{19} > 0$$

$$(x - 3) > 0$$

$$x > 3$$

Osea que $Dg^{-1} = (3; \infty)$

$g(x)^{-1}$ nos quedaria

$$g^{-1} : (3; \infty) \rightarrow \mathbf{R} / g(x)^{-1} = \text{Log}_5 \left(\frac{(x - 3)}{19} \right)$$

Ahora tenemos que hallar las x que cumplan esas dos condiciones es decir

$$x \in Dg^{-1} \text{ y } 2g^{-1}(x) = \text{Log}_b \left(\frac{x+39}{a^2} \right)$$

Reemplazo

$$x \in (3; \infty) \wedge 2 * \text{Log}_5 \left(\frac{(x - 3)}{19} \right) = \text{Log}_5 \left(\frac{x+39}{19^2} \right)$$

Por propiedad del exponente del logaritmo

$$x \in (3; \infty) \wedge \text{Log}_5 \left(\frac{(x-3)^2}{19} \right) = \text{Log}_5 \left(\frac{x+39}{19^2} \right)$$

$$x \in (3; \infty) \wedge \left(\frac{(x-3)^2}{19} \right) = \frac{x+39}{19^2}$$

$$x \in (3; \infty) \wedge \frac{(x-3)^2}{361} = \frac{x+39}{361}$$

$$x \in (3; \infty) \wedge (x-3)^2 = (x+39)$$

$$x \in (3; \infty) \wedge x^2 - 6x + 9 = x + 39$$

$$x \in (3; \infty) \wedge x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$x \in (3; \infty) \wedge (x = -3 \vee x = 10)$$

Como el -3 no pertenece al dominio de g, el resultado es $x = 10$

Respuesta: $a = 19, b = 5, I_g = (3; \infty), A = \{10\}$

EJERCICIO N° 102

Sean las funciones biyectivas: $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f(x) = \frac{ax + 24}{8x + b}$
 y g polinómica de primer grado de dominio $\mathbb{R} - \{k\}$ con coeficiente independiente 5
 y la correspondiente función compuesta: $f \circ g: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f \circ g(x) = \frac{24x + 18}{8x + 7}$
DETERMINE la función g (con su respectivo dominio). Justifique su respuesta.

Solución:

Tenemos

$$f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f(x) = \frac{ax + 24}{8x + b}$$

Como es una homográfica podemos sacar a y b a través de sus asíntotas, la asíntota vertical se halla en $x =$ el número que anula el denominador

$$8x + b = 0$$

Reemplazo x con la asíntota $x = -2$

$$8 * -2 + b = 0$$

$$-16 + b = 0$$

$$b = 16$$

Ahora la asíntota vertical la sacamos haciendo $y =$ división de la x de arriba con la de abajo, y como sabemos que se halla en $y = -3$

AH

$$y = \frac{ax}{8x}$$

$$3 = \frac{a}{8}$$

$$a = 24$$

Reemplazo en $f(x)$

$$f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f(x) = \frac{24x + 24}{8x + 16}$$

$$f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f(x) = \frac{8(3x + 3)}{8(x + 2)}$$

$$f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f(x) = \frac{3x + 3}{x + 2}$$

Ahora que tenemos f podemos analizar $f \circ g$

$$f \circ g = f(g(x))$$

$$f \circ g = \frac{3g(x) + 3}{g(x) + 2}$$

$$\frac{24x + 18}{8x + 7} = \frac{3g(x) + 3}{g(x) + 2}$$

$$(24x + 18) * (g(x) + 2) = (3g(x) + 3) * (8x + 7)$$

$$24xg(x) + 18g(x) + 48x + 36 = 24xg(x) + 21g(x) + 24x + 21$$

$$18g(x) + 48x + 36 = 21g(x) + 24x + 21$$

$$48x + 36 - 24x - 21 = 21g(x) - 18g(x)$$

$$24x + 15 = 3g(x)$$

$$g(x) = 8x + 5$$

Por otro lado la función $f \circ g$ era

$$f \circ g: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / f \circ g(x) = \frac{24x + 18}{8x + 7}$$

Como podemos ver k es la asíntota vertical de $f \circ g$ que se obtiene haciendo cero lo de abajo y reemplazando x por k , entonces

$$8x + 7 = 0$$

$$8k + 7 = 0$$

$$k = -\frac{7}{8}$$

Como las funciones compuestas tienen como dominio el dominio de la de adentro y como imagen la imagen del de afuera podemos decir que el D_g

El motivo de que una lineal tenga ese dominio raro, es que es un dominio acotado para que sea posible la formación de $f \circ g$ y para que además sea biyectiva.

Respuesta: $g: \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{8}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} / g(x) = 8x + 5$

EJERCICIO N° 103

Sean los polinomios $P(x) = x^5 - x^4 - x^2 - x - 4$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$
(Polinomio que tiene una sola raíz real positiva menor a 2), al realizar la **DIVISION POLINOMICA** de $p(x)$ por $Q(x)$ se tiene resto $r(x)$.
Determine X tal que $\text{Log}_x r(x) = 1$.

Solución:

Realicemos la división polinómica.

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad -x^4 \quad +0x^3 \quad -x^2 \quad -x \quad -4 \\
 \underline{-x^5 \quad +2x^4 \quad -x^3 \quad +x^2} \\
 x^4 \quad -x^3 \quad +0x^2 \quad -x \quad -4 \\
 \underline{-x^4 \quad +2x^3 \quad -x^2 \quad +x} \\
 x^3 \quad -x^2 \quad -0x \quad -4 \\
 \underline{-x^3 \quad +2x^2 \quad -x \quad +1} \\
 x^2 \quad -x \quad -3
 \end{array}$$

O sea que la división polinómica tiene como resultado $x^2 + x + 1$ y como resto,
 $r(x) = x^2 - x - 3$

Ahora debemos hallar la ecuación

$$\text{Log}_x r(x) = 1.$$

Tenemos que

$$r(x) = x^2 - x - 3$$

Entonces

$$\text{Log}_x (x^2 - x - 3) = 1.$$

Para sacar el logaritmo en base x, tengo que aplicar "x a la" (x^{\wedge}) de los dos lados

$$x^{\text{Log}_x (x^2 - x - 3)} = x^1$$

Algo a la log en base ese mismo algo se cancela, entonces

$$x^2 - x - 3 = x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Las Soluciones de esta cuadrática son $x = -1$ y $x = 3$

Pero como x es la base del logaritmo no puede ser un numero negativo descarto la primera solución

Respuesta: $x = 3$

EJERCICIO N° 104

Sea la función cuadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = ax^2 + bx + c$. Halle los coeficientes a, b, c, empleando el método de eliminación de Gauss si se conocen las siguientes imágenes; $f(2)=2$, $f(-3)=57$ y $f(-1)=29$. Luego exprese como intervalo el conjunto A, si $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge g \circ f(x) \leq 13\}$ y $g: [-7; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \sqrt[2]{(x+7)}$

Solución:

En primer lugar hallemos los coeficientes a b y c

Sabemos que

$$f(2) = 2$$

$$\begin{aligned} a * 2^2 + 2b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 57 \\ a * (-3)^2 + (-3)b + c &= 57 \\ 9a - 3b + c &= 57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 29 \\ a * (-1)^2 + (-1)b + c &= 29 \\ a - b + c &= 29 \end{aligned}$$

Por lo que podemos armar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 9a - 3b + c = 57 \\ a - b + c = 29 \end{cases}$$

Ubicamos en gauss y resolvemos

a	b	c		
4	2	1	2	f1
9	-3	1	57	f2
1	-1	1	29	f3
4	2	1	2	f1' = f1
0	-30	-5	210	f2' = 4f2 - 9f1
0	-6	3	114	f3' = 4f3 - f1
4	2	1	2	f1'' = f1'
0	-30	-5	210	f2'' = f2'
0	0	-120	-2160	f3'' = -30f3' + 6f2

Entonces

$$\begin{aligned} -120c &= -2160 \\ c &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -30b - 5c &= 210 \\ -30b - 5 * 18 &= 210 \\ -30b &= 300 \\ b &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 2 \\ 4a + 2 * (-10) + 18 &= 2 \\ 4a - 20 &= -16 \\ 4a &= 4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Ahora que ya conocemos los coeficientes podemos escribir f

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = x^2 - 10x + 18$$

Ahora Tenemos que hallar $g \circ f$, como la imagen de f esta incluida en el dominio de g no hay problema para realizar la compuesta y esta tendrá el dominio de f y la imagen de g

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$g \circ f(x) = \sqrt[2]{(f(x) + 7)}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt[2]{(x^2 - 10x + 18 + 7)}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt[2]{(x^2 - 10x + 25)}$$

Escrito correctamente

$$g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ / g \circ f(x) = \sqrt[2]{(x^2 - 10x + 25)}$$

Ahora tenemos que hallar para que valores de x que devuelven un valor menor o igual a 13 (por lo que me decía el intervalo A)

$$g \circ f(x) \leq 13$$

$$\sqrt[2]{(x^2 - 10x + 25)} \leq 13$$

$$x^2 - 10x + 25 \leq 13^2$$

$$x^2 - 10x + 25 \leq 169$$

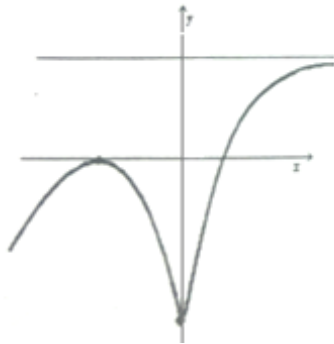
$$x^2 - 10x + 144 \leq 0$$

Esto es una cuadratica con raices en $x = 18$ y $x = -8$

Si dibujas esta cuadrática, como tiene coeficiente principal positivo, tiene forma de sonrisa contenta y como tiene raíces en -8 y 18 va a estar debajo del eje y (o sea con imagen negativa o menor que cero) ente el -8 y el 18.

Respuesta: $a = 1, b = -10$ y $c = 18 \quad \wedge \quad A = [-8; 18]$

EJERCICIO N° 105



Determine las constantes reales k y c , el conjunto imagen y los ceros de g

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{k}x + 3k - 64 & \text{si } x < 0 \\ \frac{16x + c}{x + 2} & \end{cases}$$

A la izquierda se representa la curva grafica de g y la recta asíntota. El tramo de la parábola tiene vértice sobre el eje x

Solución

Tenemos las funciones

$$g_1 = -\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{k}x + 3k - 64$$

$$g_2 = \frac{16x + c}{x + 2}$$

Mirando ese dibujo puedo decir dos cosas.

Primero que la parábola tiene una raíz doble (porque toca el eje x una sola vez, porque el vértice esta en el eje)

y segundo que las dos funciones valen lo mismo en $x = 0$

Para que la parábola tenga una sola raíz el discriminante ($b^2 - 4ac$, lo de adentro de la raíz en la resolvente) debe ser cero entonces

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ \sqrt{k}^2 - 4 * -\frac{1}{4} * (3k - 64) &= 0 \\ k + (3k - 64) &= 0 \\ k + 3k - 64 &= 0 \\ 4k - 64 &= 0 \\ k &= 16 \end{aligned}$$

Entonces la parábola queda

$$g_1 = -\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{16}x + 3 * 16 - 64$$

$$g_1 = -\frac{1}{4}x^2 - 4x + 48 - 64$$

$$g_1 = -\frac{1}{4}x^2 - 4x - 16$$

Ahora sabemos que en $x = 0$ las dos funciones valen lo mismo entonces

$$\begin{aligned} g_1(0) &= g_2(0) \\ -\frac{1}{4} * 0^2 - 4 * 0 - 16 &= \frac{(16 * 0 + c)}{0 + 2} \\ -16 &= \frac{c}{2} \\ c &= -32 \end{aligned}$$

Entonces

$$g_2 = \frac{16x - 32}{x + 2}$$

Del dibujo podemos sacar que la imagen es desde los reales negativos (porque la parabola viene desde el menos infinito) hasta la asíntota horizontal.

Calculemos la asíntota horizontal, esta estará en $y =$ división de las x

AH:

$$Y = \frac{16x}{x} = 16$$

Entonces la imagen es $(-\infty ; 16)$

El conjunto de ceros los saco de la siguiente manera

yo tengo la parabola cuando es menor a cero, saquemos los ceros de la parabola

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{4}x^2 - 4x - 16 \quad \wedge \quad x < 0 \\ 0 &= -\frac{1}{4}x^2 - 4x - 16 \quad \wedge \quad x < 0 \end{aligned}$$

Esta parabola tiene una raiz doble en $x = -8$ entonces

$$\begin{aligned} (x = -8) &\quad \wedge \quad x < 0 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Una raiz esta en $x = -8$

Ahora tenemos la homografica

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{16x - 32}{x + 2} \quad \wedge \quad x > 0 \\ 0 &= \frac{16x - 32}{x + 2} \quad \wedge \quad x > 0 \\ 0 &= (16x - 32) \quad \wedge \quad x > 0 \\ x &= 2 \quad \wedge \quad x > 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La segunda raiz esta en $x = 2$

Respuesta: $k = 16$, $c = -32$, el conjunto imagen es $(-\infty ; 16)$ y el conjunto de ceros esta en $x = 2$ y $x = -8$

EJERCICIO N° 106

Dada $g: [-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = (x + 1)^2 + 1$, determine para que valores de su dominio se cumple que: $2 \leq g(x) \leq 10$.

Solución:

Tenemos que hallar los valores del dominio que hagan que

$$2 \leq g(x) \leq 10$$

O sea tenemos que hallar las x que cumplan

$$x \in \text{Dg} \wedge 2 < g(x) < 10$$

$$[-3, \infty) \wedge 2 \leq (x + 1)^2 + 1 \leq 10$$

Abro los piquitos en dos

$$[-3, \infty) \wedge 1 \leq (x + 1)^2 \wedge (x + 1)^2 \leq 9$$

$$[-3, \infty) \wedge \sqrt{1} \leq |x + 1| \wedge |x + 1| \leq \sqrt{9}$$

Acordate que siempre que pasas un cuadrado del otro lado como raiz, queda como modulo

Abro los módulos

$$[-3, \infty) \wedge [1 \leq x + 1 \cup -1 \geq x + 1] \wedge [x + 1 \leq 3 \wedge x + 1 \geq -3]$$

$$[-3, \infty) \wedge [0 \leq x \cup -2 \geq x] \wedge [x \leq 2 \wedge x \geq -4]$$

$$[-3, \infty) \wedge [(-\infty; -2] \cup [0; \infty)] \wedge [-4; 2]$$

Hago la interseccion entre los primeros dos

$$[[-3; -2] \cup [0; \infty)] \wedge [-4; 2]$$

Y ahora la otra intersección

$$[-3; -2] \cup [0; 2]$$

Respuesta: Para los valores del dominio pertenecientes al intervalo

$$[-3; -2] \cup [0; 2] , 2 \leq g(x) \leq 10$$

EJERCICIO N° 107

Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 4 \cdot 3^{2x+1} + 17 \cdot 3^x$, **determine** $\{x \in \text{Df}/f(x) = 7\}$

Solución:

Tenemos

$$f(x) = 4 \cdot 3^{2x+1} + 17 \cdot 3^x$$

Por propiedades de la potencia

$$3^{2x+1} = 3^{2x} * 3^1 = (3^x)^2 * 3^1 = (3^x)^2 * 3$$

Reemplazo

$$f(x) = 4 * 3 * (3^x)^2 + 17 \cdot 3^x$$

$$f(x) = 12 * (3^x)^2 + 17 \cdot (3^x)$$

Ahora tenemos que hallar las x que hagan que $f(x) = 7$ entonces

$$12 * (3^x)^2 + 17 \cdot (3^x) = 7$$

$$12 * (3^x)^2 + 17 \cdot (3^x) - 7 = 0$$

Hago el cambio de variable $3^x = Z$

$$12 Z^2 + 17 Z - 7 = 0$$

Las Z que satisfacen esta ecuación son $Z = -7/4$ y $Z = 1/3$, pero como $Z = 3^x$

PARA $Z = -7/4$

$$3^x = -7/4$$

$$x = \log_3 \left(-\frac{7}{4} \right)$$

ESTO NO TIENE SOLUCION EN REALES

PARA Z = 1/3

$$3^x = 1/3$$

$$x = \log_3 (1/3)$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log(3)}$$

$$x = -1$$

Respuesta: x = -1

EJERCICIO N° 108

Determine dominio de f : Df → R / f(x) = Ln $\left(\frac{x^3 - 7x^2}{|x^2 - 225|}\right)$

Solución:

Como podemos ver hay dos funciones limitantes

Una es la fracción que establece que su denominador no puede ser 0

Y la otra es el ln que establece que su argumento debe ser mayor a cero

O sea que

$$Df = \left\{ |x^2 - 225| \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{x^3 - 7x^2}{|x^2 - 225|} > 0 \right\}$$

Como en la fracción es una división entre dos cosas, para que su resultado sea mayor que cero (o positivo que es lo mismo) las dos deben tener el mismo signo, pero como lo de abajo es un módulo, es siempre positivo, por lo tanto poner que la fracción sea mayor a cero es lo mismo que poner que su numerador sea mayor a cero

$$Df = \{x^2 - 225 \neq 0 \quad \wedge \quad x^3 - 7x^2 > 0\}$$

$$Df = \{x^2 \neq 225 \quad \wedge \quad x^2(x - 7) > 0\}$$

A la derecha tenemos una multiplicación de dos cosas y para que una multiplicación sea positiva (o mayor a cero) deben tener los dos el mismo signo, Pero como x al cuadrado es siempre positiva, la multiplicación va a ser positiva cuando x-7 o sea

$$Df = \{|x| \neq \sqrt{225} \quad \wedge \quad (x - 7) > 0\}$$

$$Df = \{(x \neq 15 \quad \wedge \quad x \neq -15) \quad \wedge \quad x > 7\}$$

$$Df = \{(7; 15) \cup (15; \infty)\}$$

Respuesta: $Df = \{ (7; 15) \cup (15; \infty) \}$

EJERCICIO N° 109

La harina de soja contiene 20% de proteínas y la de maíz 10%. ¿Cuántos kilogramos de cada una de estas se debe mezclar para obtener una mezcla de 400 kilogramos con 14% de proteínas?

Solución:

Llamemos

S = kilogramos de harina de soja que vamos a mezclar
M = kilogramos de harina de maíz que vamos a mezclar

Por lo tanto como la mezcla tiene que tener 400 kg

$$\begin{aligned} S + M &= 400\text{kg} \\ S &= 400\text{ kg} - M \end{aligned}$$

La harina de soja contiene 20% de proteínas, entonces la cantidad de proteínas en la cantidad a mezclar de harina de soja es

$$\frac{S * 20}{100} = 0.2 S$$

La harina de maíz contiene 10% de proteínas

Entonces la cantidad de proteínas en la cantidad a mezclar de harina de maíz es

$$\frac{M * 10}{100} = 0.1 M$$

La mezcla de 400kg tendrá un 14% de proteínas, veamos cuantos Kg de proteínas son el 14%

$$\begin{aligned} 100\% &-----400\text{kg} \\ 14\% &-----56\text{kg} \end{aligned}$$

Entonces la cantidad de proteínas en la Mezcla es 56 kg

Si sumamos la cantidad de proteínas de cada una de los tipos de harina debe dar la cantidad de proteínas de la mezcla

$$0.1M + 0.2 S = 56\text{kg}$$

Pero ya habíamos obtenido que $S = 400 \text{ kg} - M$ entonces si reemplazamos

$$0.1 M + 0.2 (400 \text{ kg} - M) = 56 \text{ kg}$$

$$0.1 M + 80 \text{ kg} - 0.2 M = 56 \text{ kg}$$

$$-0.1 M = -24 \text{ Kg}$$

$$M = 240 \text{ kg}$$

Entonces como $S = 400 \text{ kg} - M$

$$S = 400 \text{ kg} - 240 \text{ kg}$$

$$S = 160 \text{ kg}$$

Podemos verificar que la suma de las dos da 400 Kg

$$S + M = 240 \text{ kg} + 160 \text{ kg} = 400 \text{ kg}$$

Y que el 20% de la de Soja más el 10% de la de maíz suman el 14% de la mezcla

$$\frac{20 * 160 \text{ kg}}{100} + \frac{10 * 240 \text{ kg}}{100} = \frac{400 \text{ kg} * 14}{100}$$

$$32 \text{ kg} + 24 \text{ kg} = 56 \text{ kg}$$

Respuesta: Debemos mezclar 240 kg de maíz y 160 kg de soja

EJERCICIO N° 110

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 2x^2 - 1$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = 4x^3 + cx$ **determine la constante c tan que**
 $f \circ g = g \circ f$

Solución:

Como las dos son funciones polinómicas con dominio e imagen Real, no hay problemas de restricciones al componer.

Hallemos $f \circ g$

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Es decir, voy a escribir $f(x)$ pero cada vez que aparezca una x voy a reemplazarla por $g(x)$

$$f \circ g(x) = 2 (g(x))^2 - 1$$

Reemplazo con $g(x)$

$$f \circ g(x) = 2 (4x^3 + cx)^2 - 1$$

Hago el cuadrado con binomio cuadrado perfecto

$$f \circ g(x) = 2 (16x^6 + 8cx^4 + c^2x^2) - 1$$

$$f \circ g(x) = 32x^6 + 16cx^4 + 2c^2x^2 - 1$$

Ahora hallemos $g \circ f$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Es decir, voy a escribir $g(x)$ pero cada vez que aparezca una x voy a reemplazarla por $f(x)$

$$g \circ f(x) = 4(f(x))^3 + c(f(x))$$

Reemplazo con $g(x)$

$$g \circ f(x) = 4(2x^2 - 1)^3 + c(2x^2 - 1)$$

Hago el exponente cubico con binomio cubo perfecto

$$g \circ f(x) = 4 (8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1) + 2cx^2 - c$$

$$g \circ f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 24x^2 - 4 + 2cx^2 - c$$

$$g \circ f(x) = 32x^6 - 48x^4 + (24 + 2c)x^2 - 4 - c$$

$$g \circ f(x) = 32x^6 - 48x^4 + (24 + 2c)x^2 - (4 + c)$$

Ahora debemos igualar $f \circ g$ con $g \circ f$

$$f \circ g = g \circ f$$

$$32x^6 + 16cx^4 + 2c^2x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + (24 + 2c)x^2 - (4 + c)$$

$$16cx^4 + 2c^2x^2 - 1 = -48x^4 + (24 + 2c)x^2 - (4 + c)$$

Para que dos polinomios sean iguales deben ser iguales los coeficientes con x de igual grado, es decir

$$16cx^4 = -48x^4$$

$$16c = -48$$

$$c = -3$$

$$2c^2x^2 = (24 + 2c)x^2$$

$$2c^2 = 24 + 2c$$

$$2c^2 - 24 - 2c = 0$$

$$c = 4 \quad \vee \quad c = -3$$

$$-1 = -(4 + c)$$

$$1 = 4 + c$$

$$c = -3$$

Como las c tiene que coincidir en los tres casos podemos decir que si $c = -3$ $f \circ g = g \circ f$, verifiquemos

$$f \circ g = g \circ f$$

$$32x^6 + 16 * (-3)x^4 + 2 * (-3)^2x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + (24 + 2 * (-3))x^2 - (4 - 3)$$

$$-48x^4 + 18x^2 - 1 = -48x^4 + 18x^2 - 1$$

Respuesta: $c = -3$

EJERCICIO N° 111

Sea $p(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ divisible por $q(x) = x^2 + 4$. Factorice $p(x)$ previa determinación de a y b

Solución:

Sabemos que $p(x)$ es divisible por $q(x)$, entonces realicemos la división polinómica

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad + \quad 3x^2 \quad + \quad ax \quad + \quad b \\
 \hline
 -x^3 \quad + \quad 0x^2 \quad - \quad 4x \\
 \hline
 3x^2 \quad + \quad (a-4)x \quad + \quad b \\
 \hline
 -3x^2 \quad + \quad 0x \quad - \quad 12 \\
 \hline
 (a-4)x \quad + \quad b-12
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 0x + 4 \\
 \hline
 x + 3
 \end{array}$$

Como $p(x)$ es divisible por $q(x)$ el resto debe ser cero, es decir

$$(a - 4)x + b - 12 = 0x + 0$$

osea que

$$\begin{array}{l} (a - 4)x = 0x \\ a - 4 = 0 \\ a = 4 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{l} b - 12 = 0 \\ b = 12 \\ b = 12 \end{array}$$

O sea que $p(x)$

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$$

Como sabemos que $p(x)$ es divisible por $x^2 + 4$ y su resultado es $x+3$ puedo decir que

$$p(x) = (x^2 + 4)(x + 3)$$

Como $x^2 + 4$ no tiene raices reales, el polinomio ya se encuentra factorizado

Respuesta: $p(x) = (x^2 + 4)(x + 3)$

EJERCICIO N° 112

halle el conjunto solución de

$$\begin{array}{l} X - 2Y = 1 \\ -2X + 4Y = -2 \end{array}$$

Solución:

Hagamos gauss

X	Y		
1	-2	1	f1
-2	4	-2	f2
1	-2	1	f1` = f1
0	0	0	f2` = f2 + 2f1

Como en el ultimo renglón quedo $0 \ 0 \ | \ 0$ podemos decir que es un sistema compatible indeterminado. Esto significa que tiene infinitas Soluciones, y la forma de escribirlas es la siguiente

En una de las ecuaciones (yo por ejemplo tomare la primera) despejamos una letra (yo voy a despejar la Y)

$$\begin{aligned} X - 2Y &= 1 \\ -2Y &= 1 - X \\ Y &= -\frac{1}{2} + \frac{X}{2} \\ Y &= \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si llamamos α a X, Y queda

$$Y : \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$$

Nuestra Solución, va a ser todas las que cumplan que X es α y Y es $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$ entonces queda esto

$$S = \left\{ (X; Y) / (X; Y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (X, Y) = \left(\alpha; \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \right) \wedge \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Eso es una forma de ponerlo, pero mas adecuado seria ponerlo de la siguiente forma

Tenemos el vector solución que era $\left(\alpha; \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \right)$. Lo vamos a dividir en la suma de dos vectores, en el primero ponemos las cosas sin α y en el segundo las cosas con α

$$\left(\alpha; \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \right) = \left(0; -\frac{1}{2} \right) + \left(\alpha; \frac{1}{2}\alpha \right)$$

Ahora vamos a sacar factor común α del segundo paréntesis

$$\left(\alpha; \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \right) = \left(0; -\frac{1}{2} \right) + \alpha \left(1; \frac{1}{2} \right)$$

Finalmente reemplazo en la solución

$$\text{Respuesta: } S = \left\{ (X; Y) / (X; Y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (X, Y) = \left(0; -\frac{1}{2} \right) + \alpha \left(1; \frac{1}{2} \right) \wedge \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

EJERCICIO N° 113

El coeficiente principal de un polinomio de grado 3 es 4, el termino independiente es -16, si $X=2$ es raíz doble, encuentre el polinomio.

Solución:

Sabemos que tiene grado 3, entonces tendrá la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sabemos que el coeficiente principal es 4 entonces $a=4$

$$f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$$

Sabemos que el termino independiente es -16 entonces el numero sin x, $d = -16$

$$f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx - 16$$

Y sabemos que $x = 2$ es raíz doble, entonces dividamos $f(x)$ por 2 (Ruffini) dos veces y el resto debe ser cero

2	4	b	c	-16
2	8	2b+16	4b + 32 + 2c	
4	8+b	16+2b+c	4b + 2c + 16	
2	8	32+2b		
4	16+b	48+4b + c		

Los restos deben ser cero (porque 2 es raíz), entonces

$$4b + 2c + 16 = 0$$

$$2c = -16 - 4b$$

$$c = -8 - 2b$$

El otro resto

$$48 + 4b + c = 0$$

Si reemplazo con $c = -8 - 2b$

$$48 + 4b + (-8 - 2b) = 0$$

$$48 + 4b - 8 - 2b = 0$$

$$2b = -40$$

$$b = -20$$

Como $c = -8 - 2b$

$$c = -8 - 2 * -20$$

$$c = -8 + 40$$

$$c = 32$$

Entonces $f(x)$ resulta

$$f(x) = 4x^3 + bx^2 + (-8 - 2b)x - 16$$

$$f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 32x - 16$$

Respuesta: $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 32x - 16$

EJERCICIO N° 114

Dadas $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x + \frac{13}{4}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = x^2 + 3$, con f funcion lineal con pendiente positiva, obtenga la formula de f .

Solución:

Tenemos

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x + \frac{13}{4}$$

Y sabemos que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \wedge \quad g(x) = x^2 + 3$$

Entonces hallemos $g(f(x))$

$$g(x) = x^2 + 3$$

$$g(f(x)) = f(x)^2 + 3$$

Como $g \circ f(x) = g(f(x))$ entonces

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$4x^2 - 2x + \frac{13}{4} = f(x)^2 + 3$$

$$4x^2 - 2x + \frac{13}{4} - 3 = f(x)^2$$

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = f(x)^2$$

Como sabemos que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ podemos decir que

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = f(x)^2$$

$$f(x) = \sqrt{\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2}$$

Respuesta: $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$

EJERCICIO N° 115

Hallar para que números reales se verifica que la suma del numero y su reciproco es mayor que 2

Solución:

Llamemos X al número. Entonces su reciproco será $1/X$.

La consigna nos pide que la suma entre ambos sea mayor que 2, entonces

$$X + \frac{1}{X} > 2$$

$$\frac{X^2 + 1}{X} > 2$$

Ahora lo que voy a hacer es multiplicar a ambos lados por X (lo que comúnmente se llama pasar la X multiplicando) pero en las inecuaciones tenemos que tener en cuenta que si el número que multiplica es negativo, se da vuelta el signo, y sino no, entonces voy a plantear las dos opciones

Si X es positiva (X>0)

$$X > 0 \quad \wedge \quad \frac{X^2 + 1}{X} > 2$$

$$X > 0 \quad \wedge \quad X^2 + 1 > 2X$$

$$X > 0 \quad \wedge \quad X^2 - 2x + 1 > 0$$

Si X es negativa (X<0)

$$X < 0 \quad \wedge \quad \frac{X^2 + 1}{X} > 2$$

$$X < 0 \quad \wedge \quad X^2 + 1 < 2X$$

$$X < 0 \quad \wedge \quad X^2 - 2x + 1 < 0$$

El polinomio $X^2 - 2x + 1$ es un binomio cuadrado perfecto de la forma $a^2 + 2ab + b^2$, siendo $a = X$ y $b = -1$, entonces si lo llevo a la forma $(a + b)^2$

$$X > 0 \quad \wedge \quad (X - 1)^2 > 0 \quad \vee \quad X < 0 \quad \wedge \quad (X - 1)^2 < 0$$

Aplico raíz de ambos lados, recordando que $\sqrt{(x^2)} = |x|$, dicho en palabras comunes, siempre que "pasas" un cuadrado para el otro lado como raíz, lo que estaba afectado por el cuadrado queda en modulo.

$$X > 0 \quad \wedge \quad \sqrt{(X - 1)^2} > 0 \quad \vee \quad X < 0 \quad \wedge \quad \sqrt{(X - 1)^2} < 0$$

$$X > 0 \quad \wedge \quad |X - 1| > 0 \quad \vee \quad X < 0 \quad \wedge \quad |X - 1| > 0$$

Teniendo en cuenta que un modulo SIEMPRE da como resultado números mayores a cero puedo decir que

$$X > 0 \quad \wedge \quad R \quad \vee \quad X < 0 \quad \wedge \quad \emptyset$$

Cualquier cosa intersección los reales da como resultado esa cosa y cualquier cosa intersección vacío da como resultado vacío, entonces

$$X > 0 \quad \vee \quad \emptyset$$

Cualquier cosa unión vacío da como resultado esa cosa, entonces

$$X > 0$$

Osea que el resultado son todos los números mayores que cero, o dicho de otra forma, todos los reales positivo

Respuesta: La suma de cualquier número real positivo y su recíproco es mayor a 2

EJERCICIO Nº 116

El numero de Km(M), que cierto automóvil puede recorrer con un litro de nafta, a una

velocidad escalar V km/h, esta dado por $M(v) = \frac{av^2 + 80v}{32}$ con $10 < v < 70$. Indique la velocidad mas económica para un viaje si se sabe que $M(11) = 759/32$. Justifique

Solución:

Sabemos que $M(11) = 759/32$

$$M(11) = \frac{a * 11^2 + 80 * 11}{32}$$

$$\frac{759}{32} = \frac{a * 121 + 880}{32}$$

$$759 = 121a + 880$$

$$\begin{aligned} -121 &= 121a \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Entonces

$$M(v) = \frac{-v^2 + 80v}{32}$$

Ahora debemos hallar con que velocidad recorre más metros con un litro de nafta, es decir cuando se encuentra el máximo

$$M(v) = \frac{-v^2 + 80v}{32} = -\frac{1}{32}v^2 + \frac{5}{2}v$$

El vértice en las parábolas negativas coincide con el máximo, hallemos el vértice

$$V_{\text{vertice}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{5}{2}}{2 * -\frac{1}{32}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{16}} = 40$$

Respuesta: La velocidad más económica es 40 km/h

EJERCICIO N° 117

Dos magnitudes son directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad $k=3$. Si una de ellas disminuye en 18 unidades. Como debe variar la otra para mantener la proporcionalidad?

Solución:

Que dos magnitudes sean proporcionales significa que:

Si son directamente proporcionales cuando una crece la otra también y cumple la siguiente formula, siendo k, la constante de proporcionalidad

$$A = k \cdot B$$

Si son inversamente proporcionales cuando una crece la otra disminuye y cumple la siguiente formula, siendo k, la constante de proporcionalidad

$$A = k / B$$

A veces se mezclan estas proporcionalidades, por ejemplo si me dicen:

La velocidad es directamente proporcional con la distancia recorrida e inversamente proporcional con el tiempo que se mantiene en movimiento. Entonces quedaría

$$V = k \cdot X / T$$

En este caso tenemos dos magnitudes (A y B) que son directamente proporcionales con $k = 3$ entonces

$$A = k \cdot B$$
$$A = 3 B$$

Si B disminuye en 18

Si B disminuye en 18 unidades y A aumenta X unidades veamos cuanto es X

$$A + X = 3 \cdot (B - 18)$$

$$A + X = 3B - 54$$

$$A + X = 3B - 54$$

Pero recordá que $A = 3B$ entonces hago el cambio de variable

$$3B + X = 3B - 54$$

$$X = -54$$

X dio negativa, entonces para que se mantenga la proporcionalidad si B disminuye en 18, A debe disminuir en 54

Si A disminuye en 18

$$A - 18 = 3(B + X)$$

$$A - 18 = 3B + 3X$$

$$\text{Pero } A = 3B$$

$$3B - 18 = 3B$$

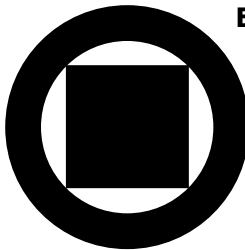
$$-18 = 3X$$

$$X = -6$$

Es decir si A disminuye en 18, B debe disminuir en 6 unidades

Respuesta: Si B disminuye 18, A disminuye 54, y si A disminuye 18, B disminuye 6

EJERCICIO N° 118

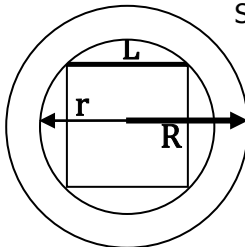


El área de la corona circular es $71\pi \text{ cm}^2$ y la longitud de la circunferencia de radio menor es de $10\sqrt{2} \pi \text{ cm}$.

Deduzca el radio de cada una de las circunferencias concéntricas. Luego calcule el área de la región sombreada si el polígono inscrito es un cuadrado

Solución:

Establezcamos letras para cada parte del dibujo



Sabemos que la longitud de la circunferencia de radio menor (r) es de $10\sqrt{2} \pi \text{ cm}$.

$$\begin{aligned} \text{Long de circunferencia de radio menor} &= 2 * \pi * r \\ 10\sqrt{2}\pi \text{ cm} &= 2 * \pi * r \\ 5\sqrt{2} \text{ cm} &= r \end{aligned}$$

Ahora ya conocemos r , sabemos también que el área de la corona circular es de $71 \pi \text{ cm}^2$, y que el área de una corona se obtiene calculando el área del círculo mayor y restándole la del menor, entonces

$$\text{Area de corona circular} = \text{Area de radio mayor} - \text{Area de radio menor}$$

$$71 \pi \text{ cm}^2 = \pi * R^2 - \pi * r^2$$

$$71 \text{ cm}^2 = R^2 - (5\sqrt{2}\text{cm})^2$$

$$71 \text{ cm}^2 = R^2 - 5^2 * \sqrt{2}^2 \text{ cm}^2$$

$$71 \text{ cm}^2 = R^2 - 25 * 2 \text{ cm}^2$$

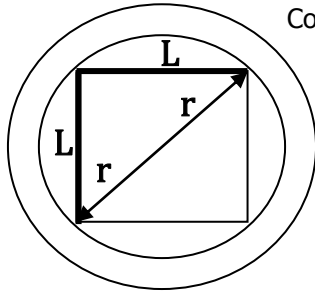
$$71 \text{ cm}^2 = R^2 - 50\text{cm}^2$$

$$121 \text{ cm}^2 = R^2$$

$$R = 11\text{cm}$$

Ya obtuvimos el radio de las dos circunferencias, hallemos el área de la superficie sombreada. Como ya conocemos el área de la corona circular, debemos hallar el área del cuadrado de lado L

Tenemos:



Como podemos ver en el dibujo, es posible armar un triángulo rectángulo con catetos L y hipotenusa $2r$, entonces, por Pitágoras

$$\begin{aligned} L^2 + L^2 &= (2r)^2 \\ 2L^2 &= (2 * 5\sqrt{2}\text{cm})^2 \\ 2L^2 &= 4 * 5^2 * \sqrt{2}^2 \text{cm}^2 \\ 2L^2 &= 4 * 25 * 2\text{cm}^2 \\ L^2 &= 4 * 25\text{cm}^2 \\ L^2 &= 100\text{cm}^2 \\ L &= 10\text{cm} \end{aligned}$$

Ahora calculemos el área de la región sombreada

Area region sombreada = Area corona circular + Area cuadrado

$$\text{Area region sombreada} = 71 \pi \text{cm}^2 + L^2$$

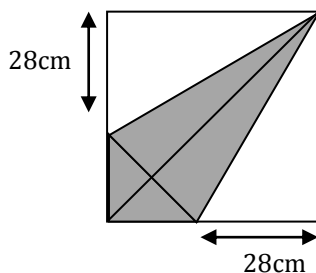
$$\text{Area region sombreada} = 71 \pi \text{cm}^2 + (10\text{cm})^2$$

$$\text{Area region sombreada} = 71 \pi \text{cm}^2 + 100\text{cm}^2$$

$$\text{Area region sombreada} = 171 \text{cm}^2$$

Respuesta: $r = 5\sqrt{2} \text{cm}$ $R = 11\text{cm}$ y Region sombreada = $71 \pi \text{cm}^2 + 100\text{cm}^2$

EJERCICIO N° 119



Calcule la longitud de un lado del cuadrado si se sabe que el área del romboide sombreado es 893cm^2 .

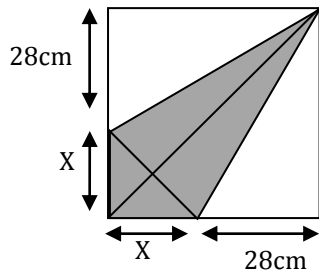
Luego calcule el perímetro del romboide sombreado

Solución:

Sabemos que

$$\text{Area romboide} = \frac{\text{Diagonal Mayor} * \text{Diagonal menor}}{2}$$

Osea que tenemos que calcular la medida de las diagonales



Llamare x al pedazo que le falta para completar los lados del cuadrado (que los dos valen x porque tienen que ser iguales los lados por ser cuadrado)

O sea que

$$\text{Lado del cuadrado} = 28\text{cm} + x$$

Como podemos ver la Diagonal menor es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos x, entonces

$$\begin{aligned} \text{Diagonal menor}^2 &= x^2 + x^2 \\ \text{Diagonal menor} &= \sqrt{x^2 + x^2} \\ \text{Diagonal menor} &= \sqrt{2x^2} \\ \text{Diagonal menor} &= \sqrt{2} * \sqrt{x^2} \\ \text{Diagonal menor} &= \sqrt{2} * x \end{aligned}$$

La Diagonal mayor es la hipotenusa de un triángulo de catetos lado del cuadrado entonces

$$\begin{aligned} \text{Diagonal mayor}^2 &= \text{Lado cuadrado}^2 + \text{lado cuadrado}^2 \\ \text{Diagonal mayor}^2 &= (28\text{cm} + x)^2 + (28\text{cm} + x)^2 \\ \text{Diagonal mayor}^2 &= 2(28\text{cm} + x)^2 \\ \text{Diagonal mayor} &= \sqrt{2(28\text{cm} + x)^2} \\ \text{Diagonal mayor} &= \sqrt{2} * \sqrt{(28\text{cm} + x)^2} \\ \text{Diagonal mayor} &= \sqrt{2} * (28\text{cm} + x) \end{aligned}$$

Ahora que conocemos la medida de las diagonales calculemos el área

$$\text{Area romboide} = \frac{\text{Diagonal Mayor} * \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\begin{aligned} 893 \text{ cm}^2 &= \frac{\sqrt{2} * (28\text{cm} + x) * \sqrt{2} * x}{2} \\ 893 \text{ cm}^2 &= \frac{2 * (28\text{cm} + x) * x}{2} \\ 893 \text{ cm}^2 &= (28\text{cm} + x) * x \\ 893 \text{ cm}^2 &= 28\text{cm} * x + x^2 \\ 0 &= 28\text{cm} * x + x^2 - 893 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Esta cuadrática tiene raíces en $x=19 \text{ cm}$ y $x=-47\text{cm}$, pero como una distancia no puede ser negativa $x = 19\text{cm}$

$$\text{Lado del cuadrado} = 28\text{cm} + 19\text{cm} = 47\text{cm}$$

Ahora nos pide el perímetro del romboide

Ya sabemos que dos lados miden x los otros dos, los sacamos porque es la hipotenusa de un triángulo de cateto 28 y lado del cuadrado

$$\text{lado del romboide}^2 = 28\text{cm}^2 + \text{lado del cuadrado}^2$$

$$\text{lado del romboide}^2 = 784\text{cm}^2 + 47\text{cm}^2$$

$$\text{lado del romboide}^2 = 784\text{cm}^2 + 2209\text{cm}^2$$

$$\text{lado del romboide}^2 = 2993\text{cm}^2$$

$$\text{lado del romboide} = 54.7\text{cm}$$

Osea que el perímetro del romboide

$$\text{Perimetro del romboide} = 2 * \text{lado del romboide} + 2 * x$$

$$\text{Perimetro del romboide} = 2 * 54.7\text{cm} + 2 * 19\text{cm}$$

$$\text{Perimetro del romboide} = 109.4\text{cm} + 38\text{cm}$$

$$\text{Perimetro del romboide} = 147.4\text{cm}$$

Respuesta: Lado del cuadrado = 47cm y Perimetro del romboide = 147.4 cm

EJERCICIO Nº 120

Se conoce $f: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \frac{25x+46}{3x+8}$ y $g: \mathbb{R} - \{c\} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = \frac{8x+16}{ax+32}$

Las curvas graficas de ambas funciones poseen la misma recta asíntota vertical.

Determine el conjunto de solución de la ecuación. $g(x) - f(x) + x = 0$.

Solución:

Sabemos que las dos funciones tiene la misma asíntota vertical, la asíntota vertical se halla igualando a cero lo de abajo y despejando x . hallemos las asíntotas

AV de f

$$3x + 8 = 0$$

$$3x = -8$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

La asíntota vertical de f esta en $x = -8/3$

AV de g

$$ax + 32 = 0$$

$$ax = -32$$

$$x = -32/a$$

La asíntota vertical de g esta en $x = -32/a$

Pero como sabíamos que las asíntotas coincidían

$$-\frac{8}{3} = -\frac{32}{a}$$

$$8a = 96$$

$$a = 12$$

Por lo tanto g queda

$$g : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{8}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{8x + 16}{12x + 32}$$

Hallemos ahora el conjunto solución de $g(x) - f(x) + x = 0$.

$$g(x) - f(x) + x = 0$$

$$\frac{8x + 16}{12x + 32} - \frac{25x + 46}{3x + 8} + x = 0$$

$$\frac{8x + 16}{4 * (3x + 8)} - \frac{25x + 46}{3x + 8} + x = 0$$

$$\frac{8x + 16 - 4 * (25x + 46)}{4 * (3x + 8)} + x = 0$$

$$\frac{8x + 16 - 100x - 184}{4 * (3x + 8)} + x = 0$$

$$\frac{-92x - 168}{4 * (3x + 8)} + x = 0$$

$$\frac{-92x - 168 + x * 4 * (3x + 8)}{4 * (3x + 8)} = 0$$

$$\frac{-92x - 168 + 4x * (3x + 8)}{4 * (3x + 8)} = 0$$

$$\frac{-92x - 168 + 12x^2 + 32x}{4 * (3x + 8)} = 0$$

Para que una fracción sea cero, lo de arriba debe ser cero, entonces

$$-92x - 168 + 12x^2 + 32x = 0$$

$$12x^2 - 60x - 168 = 0$$

Esta cuadrática tiene ceros en $x = 7$ y $x = -2$ y como ninguno de ellos es asíntota los dos son solución

Respuesta: $x = -2$ v $x = 7$

EJERCICIO N° 121

La Intensidad de iluminación sobre una superficie varía inversamente con el cuadrado de su distancia a la fuente de luz. Como se modifica la intensidad de iluminación sobre la superficie si la distancia entre la misma y la fuente de luz se reduce a la mitad?

Solución:

Sabemos que cuando una variable varía inversamente a otra tiene la forma

$$\text{Variable 1} = K * \frac{1}{\text{Variable2}}$$

En este caso la intensidad varía inversamente con el cuadrado de la distancia entonces

$$i = \text{iluminacion} \quad d = \text{distancia}$$

$$i = K * \frac{1}{d^2}$$

De aca voy a despejar K

$$K = i * d^2$$

Si la distancia se reduce a la mitad:

Llamemos

$$i^* = \text{iluminación con distancia reducida} \quad d^* = \text{mitad de la distancia} = 1/2d$$

$$i^* = K * \frac{1}{d^{*2}}$$

Reemplazo con $d^*=1/2d$

$$i^* = K * \frac{1}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2}$$

$$i^* = K * \frac{1}{\frac{1}{4}d^2}$$

$$i^* = K * \frac{4}{d^2}$$

Pero habiamos dicho que $K = i * d^2$, reemplazamos

$$i^* = i * d^2 * \frac{4}{d^2}$$

$$i^* = \frac{4i * d^2}{d^2}$$

$$i^* = 4 i$$

Respuesta: Si la distancia se reduce a la mitad, la intensidad se cuadruplica

MODULO

II

Composición de funciones

Función inversa Trigonometría

Ángulos

Funciones trigonométricas

Identidades y ecuaciones trigonométricas

Funciones trigonométricas inversas

Teorema del seno y del coseno

Magnitudes escalares y vectoriales

Vectores

Operaciones

Producto escalar

Angulo entre vectores

Fuerzas

Composición de fuerzas

Sistemas de fuerzas

Cinemática

Desplazamiento, velocidad y aceleración

Cinemática de algunos movimientos

EJERCICIO N°1

Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x}$ \wedge $g(x) = \text{Sen}(x - \pi)$

Determine:

- a) Los conjuntos Df y Dg con $Dg \in [-2\pi; 2\pi]$
- b) $f \circ g(x)$
- c) $g \circ f(x)$

Respuesta: a) $Df = \mathbb{R}^+ + \{0\}$ \wedge $Dg = [-2\pi; 2\pi]$

b) $f \circ g: [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f \circ g(x) = \sqrt{\text{Sen}(x - \pi)}$

c) $g \circ f: [0; 4\pi^2] \rightarrow [-1; 1] / g \circ f(x) = \text{Sen}(\sqrt{x} - \pi)$

EJERCICIO N° 2

Dados los vectores $\vec{a} = (6, 4K)$ y $\vec{b} = (3; 2)$ determine

- a) El valor de K para que ambos vectores sean ortogonales.
- b) El valor de K para que los vectores sean paralelos (misma dirección).

Respuesta: Si $K = -9/4$ los vectores son ortogonales.
 Si $K = 1$ los vectores son paralelos.

EJERCICIO N° 3

Un móvil A desarrolla un MRUV con vector de velocidad inicial $\mathbf{V}_{0A} = (10, 0) \frac{m}{s}$ y vector aceleración $\mathbf{a}_A = (-2, 0) \frac{m}{s^2}$ desde el vector posición inicial $\mathbf{r}_{0A} = (200, 0)m$. Un segundo móvil parte del reposo, 20 segundos más tarde con un $\mathbf{r}_{0B} = (-500, 0)m$ y vector de aceleración $\mathbf{a}_B = (4, 0) \frac{m}{s^2}$.

Determine

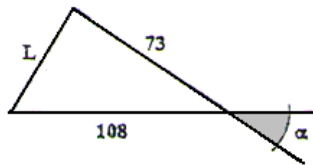
- a) El tiempo que transcurre desde que parte el segundo móvil hasta su encuentro con el primero.
- b) El tiempo que tarda el móvil A en llegar al (0;0)m
- c) El tiempo que tarda el móvil A en alcanzar un vector posición cuya componente positiva sea la máxima posible y el vector posición correspondiente.

Respuesta: a) Los móviles se encuentran a los 8.84 segundos de que salió el segundo móvil.

b) El móvil A tarda 20 segundos en llegar al (0;0) m.

c) El móvil A esta en su máximo alcance a los 5 segundos y 225m.

EJERCICIO N° 4



Calcule la longitud L del segmento opuesto a α si se sabe que:

y además:

$$3^{3-4\cos\alpha} = \sqrt[3]{9}$$

Respuesta: El lado L mide aproximadamente 88,29 cm.

EJERCICIO N° 5

Dado el sistema de fuerzas concurrentes:

$$F_1(0; 0) = (0; -100)N, F_2(0; 0) = (50\sqrt{3}; 50)N, F_3(0; 0) = (50\sqrt{3}; 100)N;$$

$F_4(0; 0) = (100\sqrt{3}; 150)N$ y las direcciones A y B, con ángulos directores $A = 60^\circ$ y $B = 120^\circ$ respectivamente; Determine:

- La fuerza resultante del sistema
- Equilibre esta fuerza con dos fuerzas F_a y F_b según las direcciones A y B dadas.

$$\text{Respuesta: } F_a = \left(\frac{800}{\sqrt{3}}; 240^\circ\right) \wedge F_b = \left(\frac{400}{\sqrt{3}}; 120^\circ\right)$$

EJERCICIO N° 6

Dos móviles A y B desarrollan un MRV, tal que sus vectores posición son: $X_A = (t; 6t - 4)$ y $X_B = (t; 12 - 2t)$ y las ecuaciones de sus trayectorias: $Y_A = 6X_A - 4$ $Y_B = 12 - 2X_B$

Determine:

- El vector posición del encuentro.
- El instante en que se produce el encuentro.

Respuesta: Se encuentran a los dos segundos en la vector posición (2;8).

EJERCICIO N° 7

Determine si es identidad y el conjunto de existencia:

$$\frac{\text{Sen}X}{1 - \text{Cos}X} = \frac{1 + \text{Cos}X}{\text{Sen}X}$$

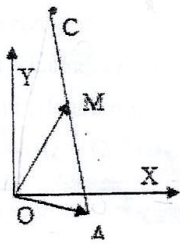
Respuesta: Es identidad con conjunto de existencia $= \mathbb{R} - k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

EJERCICIO N° 8

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 3 \text{ sen}(6x)$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función polinómica de primer grado con $g(2) = 4$ y $g(-8) = -1$. Determine el periodo y la amplitud de la curva sinusoidal grafica de $f \circ g(x)$

Respuesta: $f \circ g(x) = 3 \text{ sen}(3x + 18)$. la Amplitud es 3 y el periodo es $2/3 \pi$

EJERCICIO N° 9



Dados los vectores $\overrightarrow{OA} = (4; -2)$, $\overrightarrow{OM} = (2; 6)$, siendo el punto O el origen de coordenadas, determine el vector \overrightarrow{OC} , tal que el punto C esta sobre la recta de acción de \overrightarrow{OA} y sea simétrico del punto A respecto de la recta de acción de \overrightarrow{OM} .

Respuesta: $\overrightarrow{OC} = (0; 14)$.

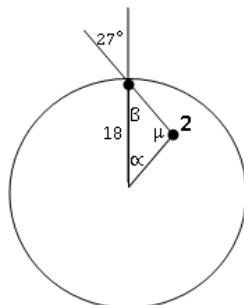
EJERCICIO N° 10

Dada : $h: [1; 3] \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = (x - 2)^2$ Efectúe las restricciones necesarias para obtener $h^{-1}(x)$ y luego defina dicha función.

Respuesta: Hay dos soluciones correctas que varían según el intervalo seleccionado:

$$h_1^{-1}: [1; 0] \rightarrow [1; 2]/h^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x} \quad \text{o} \quad h_2^{-1}: [0; 1] \rightarrow [2; 3]/h^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2.$$

EJERCICIO N° 11



Un reloj marca las 2 horas (en punto) , la aguja de los minutos mide 18cm . ¿Cuánto mide la aguja horaria?.

Respuesta: La aguja horaria mide 8.183 cm

EJERCICIO N° 12

Un automóvil está parado esperando a que el semáforo se ponga en verde, en el instante en que esto ocurre es adelantado por un camión con una velocidad constante de 60km/h ; 2 seg. Más tarde arranca el automóvil con aceleración constante de 2 m/s al cuadrado que después de 15 seg. de estar acelerando mantiene la velocidad adquirida. Calcule:

- ¿A qué distancia del semáforo alcanza el automóvil al camión?
- ¿Que velocidad tiene el automóvil en ese instante?

Respuesta: Se encuentran a 21,375m del semaforo y el auto tiene una velocidad de $30 \frac{m}{s}$

EJERCICIO N° 13

Encuentre el conjunto solución de: $2 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{cos}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$

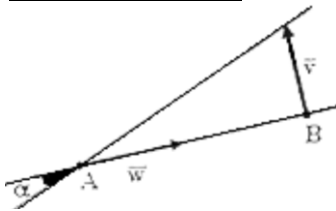
Respuesta: $S: x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

EJERCICIO N° 14

Hallar el conjunto solución en $[0;2\pi)$ de $\frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = 8$

Respuesta: $\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi.$

EJERCICIO N° 15



Los vectores \vec{v} y \vec{w} son ortogonales y las coordenadas de los puntos $A = (-1;7)$ $B = (7;13)$ Determine el vector \vec{v} si la $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Respuesta: $\vec{v} = (-12; 16)$

EJERCICIO N° 16

Encuentre el perímetro del triángulo APB sabiendo el punto $A = (-1,6)$ y el punto $B = (-9,-2)$ y q el punto P esta sobre el eje x y esta equidistante a los otros dos puntos.

Respuesta: *Perimetro del triangulo* $\cong 24\text{cm}.$

EJERCICIO N° 17

Determine el vector de módulo 4 que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v} = -6\hat{i} + 8\hat{j}$

Respuesta: El vector buscado es $\vec{w} = (-2, 4; 3, 2).$

EJERCICIO N° 18

Determinar el conjunto de solución de la siguiente ecuación en $[0,2\pi]$

$$\operatorname{Tg}^2 x - 1 = 0$$

Respuesta: $x \in \left\{ \frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \right\}$

EJERCICIO N° 19

Determine A sabiendo que la curva $f(x) = \operatorname{Log}_A X$ pasa por el punto $B = (3,2)$.

Respuesta: $A = \sqrt{3}$

EJERCICIO N° 20

Sea la función biyectiva f y $f^{-1}: Df^{-1} \rightarrow [-7; \infty) / f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{200-x}{2}} - 7$

Expresé el conjunto $\{x/x \in Df \wedge f(x) < 0\}$ en notación de intervalo.

Solución: $(3; \infty).$

EJERCICIO N° 21

Determinar si es identidad $Tg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Respuesta: Es identidad

EJERCICIO N° 22

Se conoce $I(t) = 30 \text{sen} \left[100 \pi \left(t - \frac{7}{36} \right) \right]$ Donde I(t) es la medida en Amper y t en seg. Hallar el valor positivo más pequeño de t para que la corriente sea de 15 Amper.

Respuesta: El menor valor de t para que la corriente sea de 15 Amper es de aproximadamente 0,196 segundos.

EJERCICIO N° 23

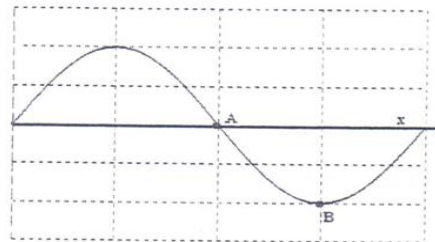
Expresar el vector proyección ortogonal $\overrightarrow{Proy_w v}$, si $\vec{v} = 2\hat{i} + (2x - 6)\hat{j}$, $\vec{w} = (2 - y)\hat{i} + 4\hat{j}$ y además $\vec{v} * \vec{w} = 14$ y $\vec{v} - \vec{w} = y\hat{i} + (2y)\hat{j}$

Respuesta: $\overrightarrow{Proy_w v} = \left(\frac{42}{25}, \frac{56}{25} \right)$

EJERCICIO N° 24

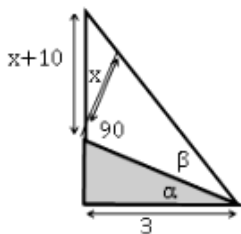
Determine las constantes $T > 0$ y $b > 0$ y c , si la gráfica de la función g se representa a la izquierda y dos puntos tienen coordenadas A(8;0) y B(11;-4)

$$g: Dg \rightarrow R/g(x) = T \text{Sen}(bx + c)$$



Respuesta: $T = 4$; $b = \frac{1}{6} \pi$ y $c = -\frac{1}{3} \pi$

EJERCICIO N° 25



Determine x si se sabe que el área del triángulo sombreado es 6cm^2 .

Respuesta: $x = \frac{5}{2}$

EJERCICIO N° 26

Determine si es identidad $\text{Cos} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \text{Sen} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$

Respuesta: Es identidad con conjunto de existencia = \mathbb{R}

EJERCICIO Nº 27

Desde dos departamentos ubicados en el séptimo y cuarto piso distantes 9 m. Se observa q los ángulos de depresión de un objeto situado en la acera son de 60° y 45° respectivamente. Calcule la distancia entre la base del edificio y el objeto y la medida de altura hasta el punto de observación en el séptimo piso.

Respuesta: La distancia del edificio al objeto es de $\frac{9}{2} * (1 + \sqrt{3})$ m y el piso 7 se encuentra a $\frac{9}{2} (3 + \sqrt{3})$ metros de altura.

EJERCICIO Nº 28

El móvil A desarrolla un MRUV desde el punto situado a una abscisa $X_{O_A} = 100\text{m}$, su $V_{O_A} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $a_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. En el mismo instante el móvil B desarrolla un MRUV con $X_{O_B} = 118,75\text{m}$, $V_{O_B} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $a_B = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Determine a) punto de encuentro b) a que distancia del origen de coordenadas se produjo el encuentro c) velocidades de ambos móviles al producirse el encuentro.

Respuesta: Se encuentran en el $(128,125; 0)$ m es decir a 128,125 metros del origen de coordenadas. El móvil A con una velocidad de 12,5 m/s y el B con una de 2,5m/s.

EJERCICIO Nº 29

Una antena es divisada sobre el nivel del piso por dos personas que se encuentran enfrentadas a 200m entre sí. Si los ángulos de elevación de las personas al extremo superior de la antena son 20° y 25° respectivamente, determine la altura aproximada de la antena. La antena y las personas están ubicadas en un mismo plano normal al piso.

Respuesta: La antena tiene una altura de 40.89m.

EJERCICIO Nº 30

Sea la función biyectiva: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \sqrt[3]{x - 358} + 8$

Expresar el conjunto $\{A: x/x \in \mathbb{R} \wedge f^{-1}(x) > 15\}$ en notación de intervalo.

Respuesta: El conjunto A queda de la forma $A = (1; \infty)$.

EJERCICIO Nº 31

Se lanza desde el suelo y verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 10 m/s. En ese mismo instante se deja caer otro cuerpo, sin velocidad inicial, desde una altura h. ¿Cuál debe ser la altura desde la que cae el segundo cuerpo para que ambos cuerpos lleguen al suelo en el mismo instante?

Respuesta: Si la altura de la que comienza a caer el segundo cuerpo es 20 metros, los dos cuerpos llegan al suelo a los dos segundos.

EJERCICIO Nº 32

Un malabarista lanza desde una altura h sobre el nivel del suelo, verticalmente hacia arriba, una pelota. La pelota recorre 2.8m hasta alcanzar su altura maxima sobre el suelo.

¿cuanto tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura maxima?
 ¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota?

Respuesta: La pelota parte con una velocidad de $7.5 \frac{m}{s}$ y tarda 0.75 segundos en llegar a la altura máxima luego de recorrer 2.8 metros.

EJERCICIO Nº 33

Un estudiante quiere lanzar una pelota por encima de una casa de 40m de altura situada a 20m de distancia. Para ello lanza la pelota con una velocidad de 40m/s y un Angulo de 45° . La pelota abandona la mano del estudiante a una altura de 1.2m del suelo. Pasara por encima del edificio? En caso afirmativo, a qué altura por encima del edificio lo hará? En caso negativo, en qué punto choca la pelota con el edificio.

Respuesta: La pelota golpeará la casa a los 18.7 metros de altura.

EJERCICIO Nº 34

Un movil debe recorrer una distancia de 200m. Parte del reposo y alcanza la max.velocidad permitida, $v_{max}=25m/s$, aplicando una aceleracion a , constante, durante 5 segundos. Mantiene esta velocidad durante 2 segundos y luego disminuye su velocidad hasta anularla con la desaceleracion a , constante. Permanece detenido 3 segundos y arranca nuevamente con una aceleracion de $2 \frac{m}{s^2}$ hasta llegar a destino. Determine:

- a) La aceleracion a para alcanzar la v_{max} ,
- b) La distancia recorrida hasta la detencion,
- c) El tiempo que tarda desde el inicio del movimiento hasta recorrer los 200m y si llega a alcanzar, o no, la v_{max} al momento de completar su recorrido

Respuesta:

- a) *La aceleracion a para alcanzar la v_{max} , $= a = 5 \frac{m}{s^2}$*
- b) *La distancia recorrida hasta la detencion $= X(\text{instante } 3) = 175m$*
- c) *El tiempo que tarda desde el inicio del movimiento hasta recorrer los 200m es el instante $5 = 20s$*
- d) *En el instante 5 su velocidad es menor a los $25 \frac{m}{s}$, por lo tanto no llega a alcanzar la v_{max} al momento de completar su recorrido.*

EJERCICIO Nº 35

La suma de vector \vec{v} y vector $\vec{w} = a^2\vec{i} - 18\vec{j}$ es igual a la diferencia entre vector \vec{w} y vector \vec{u} . Determine el vector suma de los tres vectores si su modulo es 30.

Respuesta: El vector suma es $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = 24\vec{i} - 18\vec{j}$

EJERCICIO N° 36

Calcule el perímetro del pentágono regular inscrito en la circunferencia de longitud 38π cm.

Respuesta: *Perímetro* = 111.68cm.

EJERCICIO N° 37

Un proyectil se lanza desde el suelo con velocidad inicial de $400 \frac{m}{s}$. Se desea conocer el ángulo de elevación que produce el máximo alcance.

Respuesta: El alcance máximo se da a los 45° ($\frac{\pi}{4}$ rad)

EJERCICIO N° 38

15.2 es el módulo del vector proyección de $\vec{u} = x^2\hat{i} + x\hat{j}$ sobre $\vec{v} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$. Determine el vector \vec{u} si sus componentes son positivas y $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es mayor que 0.

Respuesta: $\vec{u} = 16i + 4j$

EJERCICIO N° 39

Dados los vectores $A=(2,-4)$ $B=(3,2)$ y $C=(1,2)$. Determine, si existen, los escalares α y β de modo que vector $A=\alpha * B + \beta * C$.

Respuesta: Si $\alpha = 2$ y $\beta = -4$, se cumple que $A = \alpha * B + \beta * C$

EJERCICIO N° 40

Si se sabe que $g \circ f(2) = -378$ con: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = x^2 + cx$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2 + 2$

Determine el conjunto solución de la función $g \circ f(x) = -918$.

Luego obtenga el polinomio resto de la división de $g \circ f(x)$ con el divisor $x^2 - x + 5$.

Respuesta: El polinomio resto resulto $R(x) = -74x + 211$.

EJERCICIO N° 41

Halle el conjunto solución de $\text{Log}_3(x) + \text{Log}_3(x + 2) = \text{Log}_3(x^2 + 2)$

Respuesta: Hay una única solución en $x = 1$

EJERCICIO N° 42

Dados los vectores $V1 = (4, -2a)$ y $V2 = (3b, 4)$. Determine a y b para que los vectores dados sean ortogonales y $a + b = 4$

Respuesta: $a = \frac{12}{5}$ y $b = \frac{8}{5}$

EJERCICIO N° 43

Resuelva la siguiente ecuación en radianes y expresando todas las soluciones posibles

$$\text{Sen}^2 x = 2\text{Sen} x + 3.$$

$$\text{Respuesta: } X = \left(\frac{3}{2} + 2K\right) \pi \text{ con } K \in \mathbb{Z}$$

EJERCICIO N° 44

Resuelva la siguiente ecuación en radianes y expresando todas las soluciones posibles en

$$[0; 2\pi]. \quad \text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right) + \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right) = 1$$

$$\text{Respuesta: } x = 0 \vee x = \pi$$

EJERCICIO N° 45

Dadas las funciones:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / g(x) = e^{x-3} \quad \text{y} \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \sqrt[3]{x-1}. \text{ Obtenga } g \circ h^{-1}(1).$$

$$\text{Respuesta: } g \circ h^{-1}(1) = \frac{1}{e}.$$

EJERCICIO N° 46

Se dispara un proyectil con vector $\mathbf{Vo} = (40, 30) \frac{m}{s}$, determine: el alcance y verifique que el proyectil supera un muro de altura de 20m ubicado a una distancia horizontal de 200m del sitio de disparo.

Respuesta: El proyectil tiene un alcance máximo de 240m y pasa 5m por sobre la pared (a 25m del piso).

EJERCICIO N° 47

Sea α perteneciente a $[0; 2\pi)$ una constante real, determínela si se sabe que la ecuación polinómica de segundo grado $3x^2 + (\text{tg}\alpha)x + \frac{1}{4} = 0$ tiene única solución.

Respuesta: Los valores de α que hacen que la ecuación tenga única solución son

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad \text{y} \quad \frac{5}{3}\pi.$$

EJERCICIO N° 48

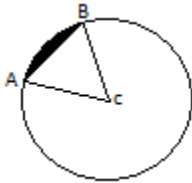
Desde un acantilado cuya altura sobre el nivel del mar es de 60m, se lanza un cuerpo horizontalmente con velocidad $\mathbf{Vo} = (20; 0)$ m/s.

Determine:

- El tiempo que tarda en llegar al agua
- El Alcance máximo en el instante anterior
- El instante que se cumple que $|\mathbf{Vx}| = |\mathbf{Vy}|$

Respuesta: El móvil tarda 3,5 segundos en llegar al agua con un alcance máximo de 70m. Los módulos de las velocidades son iguales a los 2 segundos.

EJERCICIO N° 49



El área del triángulo equilátero ABC es $36\sqrt{3}cm^2$ calcule la longitud de la circunferencia de centro C y luego la región sombreada.

Respuesta: La longitud de la circunferencia es de $24\pi cm$ y el área sombreada de $(24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$

EJERCICIO N° 50

Dadas:

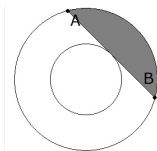
$$g \circ f: \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R} / g \circ f(x) = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$$

$$g: Dg \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \ln x$$

Defina la función $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ indicando el dominio y conjunto imagen de esta última

Respuesta: $g^{-1} \circ f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}^+ / g^{-1} \circ f^{-1}(x) = e^{\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)}$.

EJERCICIO N° 51



Sean dos circunferencias concéntricas de $56n$ cm y $70n$ cm de longitud. Determine el área de la región sombreada.

Respuesta: El área sombreada es aproximadamente de $200 cm^2$

EJERCICIO N° 52

Sean las funciones: $h(x) = \frac{1}{2} tg(x)$ y $g(x) = Sen(2x)$

Hallar x , tal que $h(x) = g(x)$ y $x \in [0; 2\pi)$

Respuesta: $S = \left\{0; \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$

EJERCICIO N° 53

Dado el vector $\vec{a} = K\vec{b}$, tal que la intensidad del vector

$\vec{b} = (b_1; b_1 + 1)$ con $b_1 < 0$ es $|\vec{b}| = 5$ y el vector \vec{c} tal que el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{c} = 60$ y el producto escalar $\vec{b} \cdot \vec{c} = 30$,

determine $K \in \mathbb{R} \wedge K \neq 0$ y los vectores \vec{a} y \vec{b} .

Respuesta: $K = 2$ y los vectores $\vec{a} = (-8; -6) \wedge \vec{b} = (-4; -3)$.

EJERCICIO N° 54

Determine el conjunto solución de la ecuación con $x \in [0; 2\pi)$

$$2 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{cos}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

Respuesta: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

EJERCICIO N° 55

Hallar dominio y función inversa de $f: Df \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = 3^{2x-1}$

Respuesta: $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x - 1}{2}$.

EJERCICIO N° 56

Sobre una embarcación actúan el sistema plano de fuerzas concurrentes formado por la fuerza motriz del barco $F_m(0; 0) = (40; 90)N$, La fuerza de la corriente $F_c(0; 0) = (|F_c|N; 0^\circ)$ y la fuerza del viento $F_v(0; 0) = (10\sqrt{2}N; \alpha)$ con $\pi < \alpha < 3/2\pi$. La fuerza resultante en la embarcación es $R(0; 0) = (60; 80)N$. Determine el modulo de la fuerza de la corriente y el ángulo de inclinación de la fuerza del viento.

Respuesta: El ángulo de inclinación de la fuerza del viento es $\frac{5}{4}\pi$ y el modulo de la fuerza de la corriente es $|F_c| = 30$.

EJERCICIO N° 57

En el instante inicial, dos móviles pasan por A y B respectivamente. Los móviles desarrollan MRUV y la distancia entre los puntos es 600m. El móvil que pasa por B lo hace con una velocidad de $V_{ob} = -42 \frac{m}{s}$ y el que pasa por A con una aceleración $a_A = 45 \frac{m}{s^2}$. Se encuentran en el vector posición $X(t_e) = (400; 0)m$ y la velocidad del móvil B en ese instante es de $V_b(t_e) = -58 \frac{m}{s}$. Determine la velocidad inicial del móvil A y la aceleración del móvil B.

Respuesta: La velocidad inicial del móvil A era de $10 \frac{m}{s}$ y la aceleración del móvil B era de $-4 \frac{m}{s^2}$

EJERCICIO N° 58

Dado el vector $\vec{a} = k * \vec{b}$ Con $k \in \mathbb{R}^+$, el vector $\vec{c} = (2; 6)$ y el producto escalar $\vec{c} * \vec{b} = -36$, con $\vec{b} = (6; b2)$ y $|\vec{a}| = 30$. Determine \vec{a} y \vec{b} .

Respuesta: $\vec{a} = (18; -24) \wedge \vec{b} = (6; -8)$

EJERCICIO Nº 59

Determine el dominio de la función $f+g$ si: $f: Df \rightarrow If/f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x-1}\right)$ y
 $g: Dg \rightarrow Ig/g(x) = \ln(1 - |x^2 - 2|)$

Respuesta si $D(f + g) = (-\sqrt{3}; -1)$

EJERCICIO Nº 60

Dada $f: \mathbb{R}^+ + \{0\} \rightarrow \mathbb{B}/f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} + 1$, determine el conjunto B tal que f resulte biyectiva y luego halle su función inversa.

Respuesta: $f^{-1}: \left[\frac{5}{3}; \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\}/f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1$.

EJERCICIO Nº 61

Dados los vectores a b y c, tales que $\vec{a} = -4\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ y el angulo que determinan \vec{a} y \vec{c} es $\frac{3}{4}\pi$. Calcule módulo de \vec{a} si se sabe que a es ortogonal a $\vec{b} - \vec{c}$.

Respuesta: El modulo del vector \vec{a} es $|\vec{a}| = 4$

EJERCICIO Nº 62

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cdot x + y &= \cos a \\ \operatorname{tg} a + y &= 1 \end{aligned}$$

Determinar Valores de la constante $a \in (0; 2\pi) - \left\{\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

Respuesta: $a = \pi$

EJERCICIO Nº 63

Dadas las Fuerzas F1 y F2 Concurrentes a un punto propio, determine la fuerza resultante del sistema

$$\begin{aligned} F1 &= 3F3 + F4 \quad \text{y} \quad F2 = F3 - 4F4 \quad \text{siendo} \\ F3 + F4 &= (10, 30)N \quad \text{y} \quad F3 - F4 = (20, 10)N \end{aligned}$$

Respuesta: $F_{\text{Resultante}} = (85; 60)$

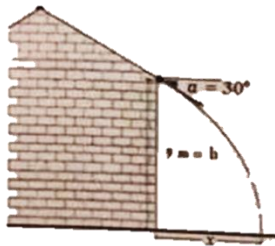
EJERCICIO Nº 64

Determine el conjunto solución de la ecuación con $x \in [0; 2\pi)$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$$

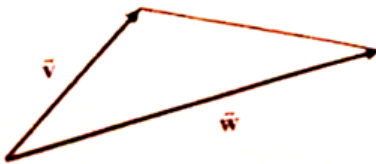
Respuesta: $S = \left\{0; \frac{\pi}{3}\right\}$

EJERCICIO N° 65



Un albañil pierde el control de su herramienta de trabajo en el tejado. La herramienta abandona el techo con una velocidad de 8 m/s. Determine el alcance máximo (X) de la herramienta, si el tejado tiene 9 metros de altura y se desprecia el rozamiento del aire.

EJERCICIO N° 66

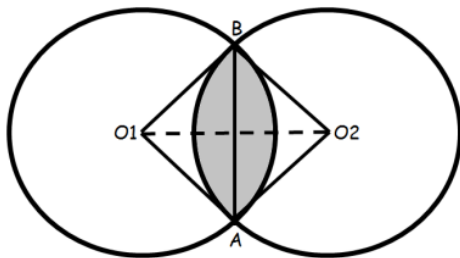


Calcule el perímetro y el área del triángulo representado si se conoce:

$$|\vec{w}| = 12, \quad |\vec{v}| = 9 \quad \text{y} \quad \vec{v} * \vec{w} = 81$$

Respuesta: *El perímetro es de 29.94 y el area de 35.7*

EJERCICIO N° 67



$86 \pi \text{ cm}$ es la misma longitud de ambas circunferencias de centro O_1 y O_2 respectivamente. El ángulo AO_1B mide 72° . Calcule las longitudes de los segmentos O_1O_2 y AB . Luego el área de la región sombreada.

Respuesta: $O_1O_2 = 69.58 \text{ cm}$ $AB = 50.55 \text{ cm}$ *Seccion sombreada $\cong 564.89 \text{ cm}^2$*

EJERCICIO N° 68

Determine el dominio de f, A contenido en $[0; 2\pi)$

$$f: A \subset [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{\text{sen } x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Respuesta: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$

EJERCICIO N° 69

La suma de las longitudes (enteras) de los catetos de un triángulo rectángulo es 895, al dividir la mayor por la menor se obtiene 6 de cociente entero y 6 de resto. Calcule el ángulo interior opuesto al cateto mayor.

Respuesta: $\alpha = 80,61^\circ$

EJERCICIO N° 70

Un cuerpo de peso $p=30N$ se encuentra sobre un plano inclinado como muestra la figura. Determine la fuerza a aplicar sobre el para evitar la caída.

Respuesta: *Fuerza a aplicar* = $(-7,5\sqrt{3}N; 7,5N)$

EJERCICIO N° 71

Dadas $f: D_f \rightarrow I_f/f(x) = 2x$ y $g: D_g \rightarrow I_g/g(x) = \sqrt{1+x}$ determine el dominio y la imagen de f y g tales que exista $g \circ f(x)$, luego defínala.

Respuesta: $g \circ f: [-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\}/g \circ f(x) = \sqrt[2]{1+2x}$.

EJERCICIO N° 72

Un proyectil se dispara desde tierra con una velocidad inicial cuyo módulo es $v_0=50m/s$. Determine:

- El vector velocidad inicial para que el doble de la altura máxima a la cual llegue el proyectil, sea igual al alcance del mismo al llegar a la tierra. Desprecie la resistencia del aire y considere la gravedad $10 m/s^2$.
- El ángulo de inclinación $\alpha < 90^\circ$ del disparo.

Respuesta: El vector velocidad inicial es $V_0 = (22.36; 44.72) \frac{m}{s}$ y el ángulo de inclinación es de $63,44^\circ$.

EJERCICIO N° 73

Si considera: $\cos\beta = \frac{1+2k}{6k-1}$ y $\sec\beta = \frac{2}{4k-5}$

¿Cuál es el mayor valor de k para que se verifiquen las igualdades anteriores sabiendo que β pertenece al primer cuadrante?

Respuesta: $k = 3/2$

EJERCICIO Nº 74

Desde un punto situado a 100 metros de altura se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 50m/s, 2 segundos mas tarde se lanza otro en la misma vertical desde el suelo con una velocidad de 150m/s. Si se desprecia la resistencia del aire calcule.

- a)¿Cuanto tiempo tarda el segundo movil en alcanzar el primero?
 b)¿A que altura lo alcanza?

Respuesta: El segundo móvil tarda 1.5 segundos en alcanzar al primero y lo hace a los 213.75 metros.

EJERCICIO Nº 75

Calcule el valor numerico de $\text{Cos}(\alpha + \beta)$ si $\text{Sen } \alpha = 3/5$ y $\text{Cos } \beta = -8/17$ y $0 < \alpha < 90^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Respuesta: El coseno de la suma resulta -77/85.

EJERCICIO Nº 76

Halle el conjunto solución de: $2\text{Sen}^3x - \text{Cos}^2x - 5\text{Sen}x + 3 = 0$

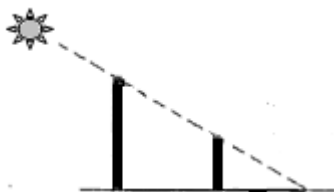
Respuesta: $x = \frac{\pi}{6}$ \vee $x = \frac{5}{6}\pi$ \vee $x = \frac{\pi}{4}$

EJERCICIO Nº 77

Dados $\vec{A} = (3; 4)$, $\vec{B} = (4; 3)$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$.
 Calcule: $\overline{\text{Proy}}_a \vec{C}$ y el angulo β entre \vec{C} y \vec{D}

Respuesta: $\overline{\text{Proy}}_a \vec{C} = (5.88; 7.84)$ y $\beta = \frac{\pi}{2}$

EJERCICIO Nº 78



La distancia entre los pies de dos postes verticales es de 91m, la longitud de la sombra de la sombra mayor es de 819m. y la altura de uno de los postes es 56m mayor a la del otro.

Encuentre la longitud de cada poste.

Respuesta: La altura del poste menor es de 448m y la del mayor 504m.

EJERCICIO N° 79

En un mismo instante se disparan dos proyectiles, uno desde $A = (0, 0)m$ y vector velocidad $V_{O_A} = (V_{O_{Ax}}, \sqrt{3}V_{O_{Ax}}) \frac{m}{s}$ y el otro desde $B = (200, 0)m$. con vector velocidad $V_{O_B} = (-200, 200) \frac{m}{s}$. Determine

- La $V_{O_{Ax}}$ para que ambos proyectiles se encuentren y el tiempo transcurrido hasta el encuentro.
- El vector posición en el instante del encuentro.
- El vector velocidad de cada proyectil en el instante del encuentro.

Respuesta: a) La $V_{O_{Ax}}$ debe ser aproximadamente de $115.47 \frac{m}{s}$
 b) El vector posición de encuentro es $(73.2m; 124.8m)$
 c) Los vectores Velocidad de encuentro son
 Vector Velocidad encuentro $M_a = (115.47 \frac{m}{s}; 193.66 \frac{m}{s})$
 Vector Velocidad encuentro $M_b = (200 \frac{m}{s}; 193.66 \frac{m}{s})$

EJERCICIO N° 80

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 12x + 1$ y $g: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{j\} / g(x) = \frac{6x-11}{8x-96}$. Halle las ecuaciones de las dos rectas asíntotas a la curva grafica de la función compuesta $f \circ g$.

Respuesta: AH: $y = 10$ AV: $x=12$.

**EJERCICIOS
EXPLICADOS
MODULO II**

Escribamos $f(x)$ correctamente:

$$f: \mathbb{R}^+ + \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f(x) = \sqrt{x}$$

Ahora lo mismo con $g(x)$:

$$g(x) = \text{Sen}(x - \pi)$$

$g(x)$, tiene como dominio todos los reales (no aparece ninguna función con restricciones), aunque la consigna nos lo limita a $[-2\pi; 2\pi]$ y como siempre, la imagen de un Seno(x) es $[-1; 1]$

Escribamos $g(x)$ correctamente:

$$g: [-2\pi; 2\pi] \rightarrow [-1; 1] / g(x) = \text{Sen}(x - \pi)$$

b) Para que se pueda formar $f \circ g(x)$ la imagen de g debe estar incluida en el dominio de f . Pero esto no sucede ya que el intervalo $[-1; 0]$ está fuera del dominio de f , debemos restringir el dominio de g para que estos valores no aparezcan en la imagen. Debemos hacer que $g(x)$ tenga como imagen los $\mathbb{R}^+ + \{0\}$, es decir que sea igual o mayor que cero.

$$g(x) \geq 0 \\ \text{Sen}(x - \pi) \geq 0$$

Realizo el cambio de variable $Z = (x - \pi)$

$$\text{Sen}(Z) \geq 0 \\ -2\pi \leq Z \leq -\pi \quad \vee \quad 0 \leq Z \leq \pi$$

Realizo nuevamente el cambio de variable $Z = (x - \pi)$

$$-2\pi \leq x - \pi \leq -\pi \quad \vee \quad 0 \leq x - \pi \leq \pi$$

Sumo π en todos los terminos para mantener la igualdad

$$\begin{aligned} -2\pi + \pi \leq x - \pi + \pi \leq -\pi + \pi \quad \vee \quad 0 + \pi \leq x - \pi + \pi \leq \pi + \pi \\ -\pi \leq x \leq 0 \quad \vee \quad \pi \leq x \leq 2\pi \\ [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi] \end{aligned}$$

O sea que el dominio acotado quedaría:

$$g^*: [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / g(x) = \text{Sen}(x - \pi)$$

Ahora ya podemos componer. Sabemos que:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ f \circ g(x) &= f(\text{Sen}(x - \pi)) \\ f \circ g(x) &= \sqrt{\text{Sen}(x - \pi)} \end{aligned}$$

La funcion compuesta siempre tiene como dominio, el dominio de la funcion de adentro y como imagen la imagen de la funcion de afuera, entonces podemos escribir $f \circ g(x)$ correctamente

$$f \circ g: [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f \circ g(x) = \sqrt{\text{Sen}(x - \pi)}$$

c) De la misma manera procedemos para $g \circ f(x)$

La imagen de f debe estar incluida en el dominio de g. Pero esto no sucede, ya que los reales positivos mayores a 2π no se encuentran en el dominio de g.

Por lo que limitaremos el dominio de f para que su imagen de cómo resultado numeros menores a 2π . Ademas pongo que x debe sser mayor a cero por tratarse de una raiz.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sqrt{x} \leq 2\pi \\ 0^2 &\leq x \leq (2\pi)^2 \\ 0 &\leq x \leq 4\pi^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el dominio de f queda limitado a los reales positivos mas el 0 menores que $4\pi^2$ osea al intervalo que va de cero a $4\pi^2$

$$f: [0; 4\pi^2] \rightarrow [0; 2\pi] / f(x) = \sqrt{x}$$

Ahora ya podemos encontrar $g \circ f(x)$.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ g \circ f(x) &= g(\sqrt{x}) \\ g \circ f(x) &= \text{Sen}(\sqrt{x} - \pi) \end{aligned}$$

Entonces:

$$g \circ f: [0; 4\pi^2] \rightarrow [-1; 1] / g \circ f(x) = \text{Sen}(\sqrt{x} - \pi)$$

Respuesta: a) $Df = \mathbb{R}^+ + \{0\}$ \wedge $Dg = [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi]$

b) $f \circ g: [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / f \circ g(x) = \sqrt{\text{Sen}(x - \pi)}$

c) $g \circ f: [0; 4\pi^2] \rightarrow [-1; 1] / g \circ f(x) = \text{Sen}(\sqrt{x} - \pi)$

EJERCICIO N° 2

Dados los vectores $\vec{a} = (6, 4K)$ y $\vec{b} = (3; 2)$ determine

a) el valor de K para que ambos vectores sean ortogonales.

b) el valor de K para que los vectores sean paralelos (misma dirección)

Solución

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es igual a cero.

El producto escalar se calcula sumando el producto de las componentes x con el de las componentes y, es decir

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (U_x; U_y) \cdot (V_x; V_y) = U_x * V_x + U_y * V_y$$

Por lo tanto para que \vec{a} y \vec{b} sean ortogonales $\vec{a} \cdot \vec{b}$ debe ser cero

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ (6; 4K) \cdot (3; 2) &= 0 \\ 6 * 3 + 4K * 2 &= 0 \\ 18 + 8K &= 0 \\ K &= -18/8 \\ K &= -9/4\end{aligned}$$

Si $K = -9/4$ los vectores son ortogonales

Dos vectores son paralelos cuando existe X tal que

$$\vec{a} = X * \vec{b}$$

Para que \vec{a} y \vec{b} sean paralelos tiene que existir X tal que

$$\begin{aligned}\vec{a} * X &= \vec{b} \\ (6; 4K) * X &= (3; 2) \\ (6X; 4KX) &= (3; 2)\end{aligned}$$

Igualamos componente a componente

Primero con las x

$$\begin{aligned}6X &= 3 \\ X &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora que conocemos X calculemos K igualando las componentes Y

$$\begin{aligned}4K * \frac{1}{2} &= 2 \\ 2K &= 2 \\ K &= 1\end{aligned}$$

Si $K = 1$ los vectores son paralelos

**Respuesta: Si $K = -9/4$ los vectores son ortogonales
Si $K = 1$ los vectores son paralelos**

EJERCICIO N° 3

Un móvil A desarrolla un MRUV con vector de velocidad inicial $V_{oA} = (10, 0) \frac{m}{s}$ y vector aceleración $a_A = (-2, 0) \frac{m}{s^2}$ desde el vector posición inicial $r_{oA} = (200, 0)m$. Un segundo móvil parte del reposo, 20 segundos más tarde con un $r_{oB} = (-500, 0)m$ y vector de aceleración $a_B = (4, 0) \frac{m}{s^2}$.

Determine

- a) El tiempo que transcurre desde que parte el segundo móvil hasta su encuentro con el primero.
- b) El tiempo que tarda el móvil A en llegar al $(0;0)m$
- c) El tiempo que tarda el móvil A en alcanzar un vector posición cuya componente positiva sea la máxima posible y el vector posición correspondiente.

Solución:

Conocemos los siguientes datos

Movil A

$$V_{oA} = (10; 0) \frac{m}{s}$$

$$a_A = (-2; 0) \frac{m}{s^2}$$

$$r_{oA} = (200; 0)m$$

$$t_{oA} = 0 s$$

Pero como podemos ver para las Y es todo cero así que es lo mismo que no tenerlo en cuenta esa parte, ya que no se mueve en Y, y los datos quedarían

Movil A

$$V_{oA} = 10 \frac{m}{s}$$

$$a_A = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$X_{oA} = 200 m$$

$$t_o = 0 s$$

Osea que la ecuacion de posicion quedaria

$$X_A(t) = X_{o_A} + V_{o_A} * (t - t_{o_A}) + \frac{1}{2} * a_A * (t - t_{o_A})^2$$

$$X_A(t) = 200m + 10 \frac{m}{s} * (t - 0s) + \frac{1}{2} * \left(-2 \frac{m}{s^2}\right) * (t - 0s)^2$$

$$X_A(t) = 200m + 10 \frac{m}{s} * t - 1 \frac{m}{s^2} * t^2$$

Con el móvil B sucede lo mismo con el movimiento en Y por lo tanto también se mueve únicamente en X

Movil B

$$V_{o_B} = 0 \frac{m}{s} \text{ (porque parte del reposo)}$$

$$t_{o_B} = 20s \text{ (porque parte 20 segundos mas tarde)}$$

$$X_{o_B} = -500m$$

$$a_B = 4 \frac{m}{s^2}$$

Osea que la ecuacion de posicion quedaria

$$X_B(t) = X_{o_B} + V_{o_B} * (t - t_{o_B}) + \frac{1}{2} * a_B * (t - t_{o_B})^2$$

$$X_B(t) = -500m + 0 \frac{m}{s} * (t - 20s) + \frac{1}{2} * \left(4 \frac{m}{s^2}\right) * (t - 20s)^2$$

$$X_B(t) = -500m + 2 \frac{m}{s^2} * (t^2 - 40s * t + 400s^2)$$

$$X_B(t) = -500m + 2 \frac{m}{s^2} * t^2 - 80 \frac{m}{s} * t + 800m$$

Lo que nos preguntan en el punto a es cuanto tarda en llegar el segundo movil a encontrarse con el primero, para esto debemos igualar las ecuaciones de posicion

$$X_A(t_{encuentro}) = X_B(t_{encuentro})$$

$$200m + 10 \frac{m}{s} * t_{encuentro} - t_{encuentro}^2 \frac{m}{s^2} = -500m + 2 \frac{m}{s^2} * t^2 - 80 \frac{m}{s} * t + 800m$$

$$200 + 10 \frac{m}{s} * t_{encuentro} - t_{encuentro}^2 = -500 + 2 * t_{encuentro}^2 \frac{1}{s^2} - 80 * t_{encuentro} \frac{1}{s} + 800$$

$$-100 + 90 \frac{1}{s} * t_{encuentro} - 3 * t_{encuentro}^2 \frac{1}{s^2} = 0$$

Las soluciones de esta cuadratica son $t_{encuentro} = 28.84s$ y $t_{encuentro} = 1.16seg$

Pero como el movil 2 no sale hasta los 20 seg, seria imposible que se encuentren a los 1.15 segundos, por lo tanto los moviles se encuentran a los 28.84s de que salio el primero

Como el segundo movil salio a los 20 segundos, y se encuentran a los 28.84, podemos decir que se encuentran 8.84 segundos despues de que partio el segundo movil

Ahora nos preguntan cuanto tarda en llegar el movil A al (0;0) pero como sabemos que en y no se mueve, es lo mismo que calcular t para que $X_A(t) = 0m$

$$X_A(t) = 200m + 10 \frac{m}{s} * t - 1 \frac{m}{s^2} t^2$$

$$0m = 200m + 10 \frac{m}{s} * t - 1 \frac{m}{s^2} t^2$$

$$0 = 200 + 10 \frac{1}{s} * t - 1 * \frac{1}{s^2} t^2$$

Las soluciones de esta cuadratica son $t = 20s$ y $t = -10s$, pero como el tiempo no puede ser negativo podemos afirmar que el móvil A tarda 20 segundos en llegar al (0;0)

Para el punto c hay que averiguar cual es el alcance maximo de el movil A, para esto hay que tener en cuenta lo siguiente

Cuando un movil tiene su velocidad inicial con diferente signo al de su aceleracion, ira frenandose hasta detenerse y luego comenzara a dezplazarse en sentido contrario al inicial y con una velocidad de igual signo a la aceleracion.

Por lo tanto en los casos donde la velocidad tenga diferente signo a la aceleración

EL ALCANCE ES MAXIMO CUANDO LA VELOCIDAD SE ANULA

La ecuacion de velocidad para el movil A es la siguiente

$$V_a(t) = Vo_A + a * (t - to_A)$$

$$V_a(t) = 10 \frac{m}{s} - 2 \frac{m}{s^2} * (t - 0s)$$

Como yo quiero que la velocidad final sea cero

$$0 = 10 \frac{m}{s} - 2 \frac{m}{s^2} * t$$

$$- 10 \frac{m}{s} = -2 \frac{m}{s^2} * t$$

$$t = 5 s$$

O sea que el alcance máximo de A se da a los 5 segundos. Para ver donde se produce el mismo solo tenemos que reemplazar en la ecuación de posición

$$X_A(5s) = 200m + 10 \frac{m}{s} * 5s - 1 \frac{m}{s^2} (5s)^2$$

$$X_A(5s) = 200m + 50m - 25m$$

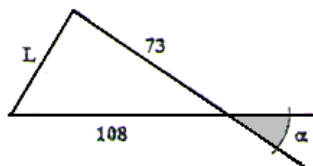
$$X_A(5s) = 225m$$

Respuesta: a) Los móviles se encuentran a los 8.84 segundos de que salió el segundo móvil

b) El móvil A tarda 20 segundos en llegar al (0;0) m

c) El móvil A esta en su máximo alcance a los 5 segundos y 225m

EJERCICIO N° 4



Calcule la longitud L del segmento opuesto a α si se sabe que:

y Además

$$3^{3-4\cos\alpha} = \sqrt[3]{9}$$

Solución:

Sabemos que

$$3^{3-4\cos\alpha} = \sqrt[3]{9}$$

Factorizamos el 9 como 3^2

$$3^{3-4\cos\alpha} = \sqrt[3]{3^2}$$

La raíz se puede escribir como un exponente fraccionario con numerador 1 y denominador igual al índice de la raíz

$$3^{3-4\cos\alpha} = (3^2)^{\frac{1}{3}}$$

Las propiedades de la potenciación establecen que $(a^b)^c = a^{b*c}$ entonces

$$3^{3-4\cos\alpha} = 3^{\frac{2}{3}}$$

Como de los dos lados aparece la misma base elevada a un exponente, estos exponentes deben ser iguales

$$3 - 4\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

$$-4\cos\alpha = -\frac{7}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{12}$$

Ahora que sabemos cuánto vale el coseno de alfa, podemos aplicar el teorema del coseno para calcular el valor de L

El teorema del coseno establece que en un triangulo de lados A B y C y con ángulo α opuesto al lado A se cumple la siguiente igualdad

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 * B * C * \cos \alpha$$

Reemplazemos con los valores de este triangulo donde L es el lado opuesto a α

$$L^2 = (73\text{cm})^2 + (108\text{cm})^2 - 2 * 73\text{cm} * 108\text{cm} * \cos\alpha$$

$$L^2 = 5329\text{cm}^2 + 11664\text{cm}^2 - 2 * 73\text{cm} * 108\text{cm} * \frac{7}{12}$$

$$L^2 = 5329\text{cm}^2 + 11664\text{cm}^2 - 9198\text{cm}^2$$

$$L^2 = 7795\text{cm}^2$$

$$L \cong 88.29\text{cm}$$

Respuesta: El lado L mide aproximadamente 88,29 cm

EJERCICIO N° 5

Dado el sistema de fuerzas concurrentes:

$F_1(0; 0) = (0; -100)N$, $F_2(0; 0) = (50\sqrt{3}; 50)N$, $F_3(0; 0) = (50\sqrt{3}; 100)N$; $F_4(0; 0) = (100\sqrt{3}; 150)N$ y las direcciones A y B, con ángulos directores $A = 60^\circ$ y $B = 120^\circ$ respectivamente; Determine:

- La fuerza resultante del sistema
- Equilibre esta fuerza con dos fuerzas F_a y F_b según las direcciones A y B dadas.

Solución:

Hallemos la resultante sumando todas las fuerzas del sistema:

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$F_R = (0; -100)N + (50\sqrt{3}; 50)N + (50\sqrt{3}; 100)N + (100\sqrt{3}; 150)N$$

$$F_R = (0 + 50\sqrt{3} + 50\sqrt{3} + 100\sqrt{3}; -100 + 50 + 100 + 150)N$$

$$F_R = (200\sqrt{3}; 200)N$$

Ahora hay que equilibrarla con dos fuerzas F_a y F_b con angulos de 60° y 120° .

Hay dos maneras de escribir una misma fuerza:

La polar: $F = (|F|; \text{Angulo de } F)$

La trigonométrica: $F = (F_x; F_y)$

Para pasar de forma polar a trigonométrica tengo que realizar

$$F = (|F|; \alpha) = (|F| * \text{Cos } \alpha; |F| * \text{Sen } \alpha)$$

Para pasar de forma trigonométrica a polar tengo que realizar

$$F = (F_x; F_y) = \left(\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}; \text{Arctg} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) \right)$$

Con los datos que tenemos las podemos escribir de forma polar y pasarlas a forma trigonométrica

$$F_a = (|F_a|; 60^\circ) = (|F_a| * \text{Cos}60^\circ; |F_a| * \text{Sen}60^\circ) = \left(\frac{1}{2}|F_a|; \frac{\sqrt{3}}{2}|F_a| \right)$$

$$F_b = (|F_b|; 120^\circ) = (|F_b| * \text{Cos}120^\circ; |F_b| * \text{Sen}120^\circ) = \left(-\frac{1}{2}|F_b|; \frac{\sqrt{3}}{2}|F_b| \right)$$

Si el sistema entre F_R , F_a y F_b esta en equilibrio las sumatorias tienen que dar cero

$$F_R + F_a + F_b = 0$$

$$(200\sqrt{3}; 200)N + \left(\frac{1}{2}|F_a|; \frac{\sqrt{3}}{2}|F_a| \right) + \left(-\frac{1}{2}|F_a|; \frac{\sqrt{3}}{2}|F_a| \right) = 0$$

Por lo tanto la sumatoria de fuerzas tanto en x como en y también debe dar cero

Sumatoria de fuerzas en x

$$200\sqrt{3} + \frac{1}{2}|F_a| - \frac{1}{2}|F_b| = 0$$

$$\frac{1}{2}|F_a| = \frac{1}{2}|F_b| - 200\sqrt{3}$$

$$|F_a| = |F_b| - 400\sqrt{3}$$

Sumatoria de fuerzas en y

$$200 + \frac{\sqrt{3}}{2}|F_a| + \frac{\sqrt{3}}{2}|F_b| = 0$$

Reemplazo con lo que vale $|F_a|$

$$200 + \frac{\sqrt{3}}{2}(|F_b| - 400\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}|F_b| = 0$$

$$200 + \frac{\sqrt{3}}{2}|F_b| - 600 + \frac{\sqrt{3}}{2}|F_b| = 0$$

$$\sqrt{3}|F_b| = 400$$

$$|F_b| = \frac{400}{\sqrt{3}}$$

Reemplazo nuevamente $|F_a|$

$$|F_a| = \frac{400}{\sqrt{3}} - 400\sqrt{3}$$

$$|F_a| = -\frac{800}{\sqrt{3}}$$

Como dio negativo, y un modulo nunca puede serlo, significa que el sentido de la dirección tomada esta mal, en vez de 60° tiene que ir a $60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$ y el módulo queda positivo (si graficas las fuerzas te vas a dar cuenta que tiene la misma direccion, osea angulo con la horizontal, pero tiene el sentido contrario, osea va para el otro lado).

Respuesta: $F_a = \left(\frac{800}{\sqrt{3}}; 240^\circ\right) \wedge F_b = \left(\frac{400}{\sqrt{3}}; 120^\circ\right)$

EJERCICIO Nº 6

Dos móviles A y B desarrollan un MRV, tal que sus vectores posición son: $X_A = (t; 6t - 4)$ y $X_B = (t; 12 - 2t)$ y las ecuaciones de sus trayectorias: $Y_A = 6X_A - 4$ $Y_B = 12 - 2X_B$

Determine:

- el vector posición del encuentro
- el instante en que se produce el encuentro

Solución:

Si se encuentran, existe una t que hace que la posición de ambos sea la misma, es decir que existe t para que $X_A = X_B$:

$$(t; 6t - 4) = (t; 12 - 2t)$$

O sea que si igualo componente a componente:

$$t = t \quad \wedge \quad 6t - 4 = 12 - 2t$$

$$t = t \quad \wedge \quad 8t = 16$$

$$t = t \quad \wedge \quad t = 2 \text{seg}$$

O sea que si se encuentran a los dos segundos para sacar la posición no queda mas que reemplazar en :

$$X_A = X_B = (2; 6 * 2 - 4) = (2; 8)$$

Respuesta: Se encuentran a los dos segundos en la vector posición (2;8)

EJERCICIO N° 7

Determine si es identidad y el conjunto de existencia

$$\frac{\text{Sen}X}{1 - \text{Cos}X} = \frac{1 + \text{Cos}X}{\text{Sen}X}$$

Solución:

Una expresión es identidad si mediante pasos algebraicos logramos llegar a que a ambos lados del igual quede la misma expresión

En este ejercicio tenemos

$$\frac{\text{Sen}X}{1 - \text{Cos}X} = \frac{1 + \text{Cos}X}{\text{Sen}X}$$

Paso multiplicando los dos denominadores

$$\text{Sen}X * \text{Sen}X = (1 + \text{Cos}X) * (1 - \text{Cos}X)$$

$$\text{Sen}X^2 = 1 + \text{Cos}X - \text{Cos}X - \text{Cos}X^2$$

$$\text{Sen}X^2 = 1 - \text{Cos}X^2$$

Utilizando la identidad de $\text{Sen}X^2 + \text{Cos}X^2 = 1$, que despejando es $1 - \text{Cos}X^2 = \text{Sen}^2$

$$\text{Sen}X^2 = \text{Sen}X^2$$

Es identidad

El conjunto de existencia es donde existe la identidad, por lo tanto, las x que no anulan los denominadores, o sea las x que no son ceros del seno ni que hacen que den 1 el coseno.

$$\text{Ceros del Seno} = k\pi \text{ con } k \text{ perteneciente a los enteros}$$

$$\text{El coseno da 1 en} = 2k\pi \text{ con } k \text{ perteneciente a los enteros}$$

Como los 1 del coseno estan incluidos en los ceros del seno, podemos decir que el conjunto de existencia es el de los reales menos los que hacen cero al seno

Respuesta: Es identidad con conjunto de existencia = $\mathbb{R} - k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

EJERCICIO N° 8

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = 3 \text{ sen}(6x)$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **funcion polinomica de primer grado con $g(2) = 4$ y $g(-8) = -1$. Determine el periodo y la amplitud de la curva sinusoidal grafica de $f \circ g(x)$**

Solución:

En primer lugar sabemos que $g(x)$ es una lineal, por lo que tendrá la forma

$$g(x) = Ax + B$$

Si reemplazamos por $g(2) = 4$

$$\begin{aligned} 4 &= A * 2 + B \\ B &= 4 - 2A \end{aligned}$$

Quedando

$$g(x) = Ax + 4 - 2A$$

Si reemplazamos por $g(-8) = -1$

$$\begin{aligned} -1 &= A * (-8) + 4 - 2A \\ -5 &= -10A \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$B = 4 - 2 * \frac{1}{2} = 3$$

O sea que $g(x)$ quedaría

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

Como el dominio de f contiene a la imagen de g , no hay ningún problema en componer

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ f \circ g(x) &= 3 \text{ sen}(6 * g(x)) \end{aligned}$$

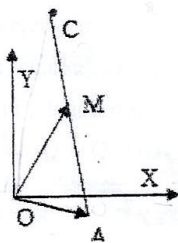
$$f \circ g(x) = 3 \operatorname{sen}\left(6 * \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\right)$$

$$f \circ g(x) = 3 \operatorname{sen}(3x + 18)$$

Como vimos anteriormente en una función de la forma $A * \operatorname{Sen}(Bx + C)$ La amplitud era A y el periodo era $2\pi/B$ por lo tanto la Amplitud es 3 y el periodo es $2/3 \pi$

Respuesta: $f \circ g(x) = 3 \operatorname{sen}(3x + 18)$. la Amplitud es 3 y el periodo es $2/3 \pi$

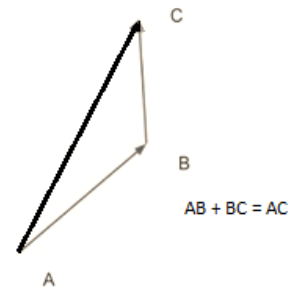
EJERCICIO N° 9



Dados los vectores $\overrightarrow{OA} = (4; -2)$, $\overrightarrow{OM} = (2; 6)$, siendo el punto O el origen de coordenadas, determine el vector \overrightarrow{OC} , tal que el punto C esta sobre la recta de acción de \overrightarrow{AM} y sea simetrico del punto A respecto de la recta de acción de \overrightarrow{OM}

Solución:

En primer lugar tengamos en cuenta un concepto, si un vector termina y empieza otro, la suma de esos dos será el vector formado desde el comienzo del primero hasta el fin del segundo



Otro concepto importante es que un vector es fin menos origen y como en este ejercicio el origen es el (0;0) puedo sacar el punto A y el punto M

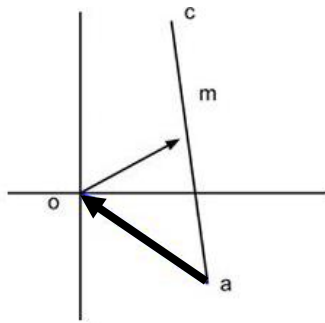
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= A - O \\ (4; -2) &= A - (0; 0) \\ (4; -2) &= A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= M - O \\ (2; 6) &= M - (0; 0) \\ (2; 6) &= M\end{aligned}$$

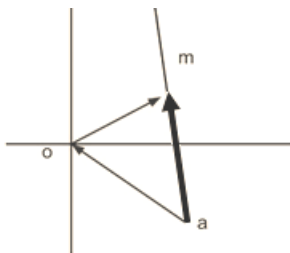
El vector OA mide los mismo que el AO (si lo pensamos como una distancia) asi que no hay problema si el OA lo doy vuelta y lo transformo en el AO,

Para hallar AO debo hacer nuevamente Fin – origen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \mathbf{O} - \mathbf{A} \\ \overrightarrow{AO} &= (0; 0) - (4; -2) \\ \overrightarrow{AO} &= (-4; 2)\end{aligned}$$



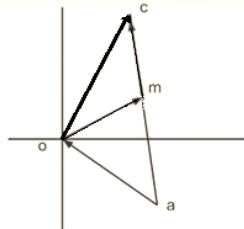
el vector empezaba en o y terminaba en a, lo que hice es darlo vuelta para que empiece en a y termine en o, porque total miden lo mismo y no cambia el ejercicio



Ahora le voy a sumar el OM para que me de de resultado el AM

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} &= (-4; 2) + (2; 6) \\ \overrightarrow{AM} &= (-2; 8)\end{aligned}$$

AM = MC porque A y C para el mismo lado, y si



eran simetricos y los dos apuntan sumo OM con MC voy a obtener OC

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} \quad \wedge \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{OC} &= (2; 6) + (-2; 8) \\ \overrightarrow{OC} &= (0; 14)\end{aligned}$$

Respuesta: $\overrightarrow{OC} = (0; 14)$

EJERCICIO N° 10

Dada : $h: [1; 3] \rightarrow \mathbb{R}/h(x) = (x - 2)^2$ **Efectúe las restricciones necesarias para obtener $h^{-1}(x)$ y luego defina dicha función.**

Solución:

Para que una función tenga inversa ($h^{-1}(x)$), $h(x)$ debe ser biyectiva (osea inyectiva y sobreyectiva a la vez)

Analizemos:

INYECTIVIDAD:

Una función es inyectiva si para cada uno de los valores del dominio le corresponde uno distinto en y.

Osea que esta función no es inyectiva, ya que si la graficamos, podemos ver que es una cuadrática y un contraejemplo sería que $h(1) = h(3)$ (hay infinitos ejemplos)

Si desarrollamos $h(x)$

$$h(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Toda cuadrática tiene vértice en el $(-\frac{b}{2a}; h(-\frac{b}{2a}))$;

$$\left(-\frac{b}{2a}; h\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (2; h(2)) = (2; 0)$$

Graficamos y vemos que para que se pueda realizar la inversa (osea para que sea inyectiva) debemos tomar o desde $[1; 2]$ o $[2; 3]$

SOBREYECTIVIDAD

Una función es sobreyectiva si la imagen corresponde con el codominio

Una función es sobreyectiva si la imagen corresponde con el codominio entonces planteemos las dos opciones posibles, si su dominio es $[1; 2]$ su imagen será $[h(1); h(2)]$ y análogamente con el $[2; 3]$

$$\begin{aligned} h_1: [1; 2] &\rightarrow [1; 0] / h(x) = (x - 2)^2 \\ h_2: [2; 3] &\rightarrow [0; 1] / h(x) = (x - 2)^2 \end{aligned}$$

Realizamos la inversa para el caso 1

$$h(x) = (x - 2)^2$$

$$\sqrt{h(x)} = |x - 2|$$

En la opcion 1, el dominio es $[1;2]$ por lo tanto $(x-2)$ siempre es negativo, la funcion de las barras de modulo es siempre cambiar el signo del resultado, entonces puedo realizar el cambio:

$$\begin{aligned}\sqrt{h(x)} &= -(x-2) \\ \sqrt{h(x)} &= -x+2 \\ \sqrt{h(x)}-2 &= -x \\ x &= 2-\sqrt{h(x)}\end{aligned}$$

Cambio la x por $h^{-1}(x)$ y $h(x)$ por x

$$h^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$$

Entonces ahora el dominio de la inversa es la imagen de la original, y la imagen de la inversa el dominio de la original. Quedando:

$$h_1^{-1}: [1; 0] \rightarrow [1; 2]/h^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$$

Realizamos la inversa para el caso 2

$$h(x) = (x-2)^2$$

$$\sqrt{h(x)} = |x-2|$$

En la opcion 2, el dominio es $[2;3]$ por lo tanto $(x-2)$ siempre es Positivo, el modulo no cumple ninguna funcion asi que lo puedo sacar

$$\begin{aligned}\sqrt{h(x)} &= x-2 \\ \sqrt{h(x)}+2 &= x \\ x &= \sqrt{h(x)}+2\end{aligned}$$

Cambio la x por $h^{-1}(x)$ y $h(x)$ por x

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

Entonces ahora el dominio de la inversa es la imagen de la original, y la imagen de la inversa el dominio de la original. Quedando:

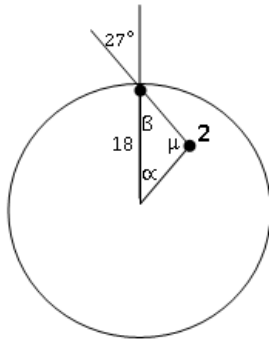
$$h_2^{-1}: [0; 1] \rightarrow [2; 3]/h^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

Respuesta: Hay dos Soluciones correctas que varían según el intervalo

seleccionado: $h_1^{-1}: [1; 0] \rightarrow [1; 2]/h^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

$$h_2^{-1}: [0; 1] \rightarrow [2; 3]/h^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

EJERCICIO N° 11



Un reloj marca las 2 horas (en punto) , la aguja de los minutos mide 18cm . ¿Cuánto mide la aguja horaria?

Solución

El angulo α lo podemos determinar con regla de 3, ya que 12hs es un giro completo al reloj, es decir 360° .

$$\begin{array}{l} 12 \text{ hs} \text{-----} 360^\circ \\ 2 \text{ hs} \text{-----} 60^\circ \end{array}$$

Por lo tanto $\alpha = 60^\circ$

El angulo $\beta = 27^\circ$ por opuesto por el vértice

Como los angulos interiores de un triangulo suman 180°

$$\begin{aligned} 180 - \alpha - \beta &= \mu \\ \mu &= 180 - 27 - 60 \\ \mu &= 93 \end{aligned}$$

El teorema del seno establece que en un triangulo cualquiera, si conocemos un lado (A) y el angulo opuesto a el (α), con solo conocer otro lado (B) u otro angulo (β) podemos conocer la medida de su opuesto de la siguiente manera

$$\frac{A}{\text{Sen}(\alpha)} = \frac{B}{\text{Sen}(\beta)}$$

Entonces por teorema del seno

$$\frac{18\text{cm}}{\text{Sen}(93)} = \frac{\text{Aguja horaria}}{\text{Sen}(27)}$$

$$\text{aguja horaria} = 8.183 \text{ cm}$$

Respuesta: La aguja horaria mide 8.183 cm

EJERCICIO Nº 12

Un automóvil está parado esperando a que el semáforo se ponga en verde, en el instante en que esto ocurre es adelantado por un camión con una velocidad constante de 60km/h ; 2 seg. Más tarde arranca el automóvil con aceleración constante de 2 m/s al cuadrado que después de 15 seg. de estar acelerando mantiene la velocidad adquirida. Calcule:

- a) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el automóvil al camión?
 b) ¿Que velocidad tiene el automóvil en ese instante?

Solución:

En primer lugar unifiquemos unidades, la velocidad del camión no nos sirve en km/h así que debemos pasarla a metros sobre seg

Esto se hace así:

Debemos multiplicar por fracciones que sean equivalentes a 1 ya que si no modificaríamos la velocidad, entonces como 1 km son mil metros y 1 hora 3600 seg

$$60 \frac{km}{h} * \frac{1000m}{1km} * \frac{1h}{3600s} = \frac{60000 km m h}{3600 h km s} = \frac{50 m}{3 s}$$

Planteemos la ecuación de posición para el camión

$$X_{camion}(t) = Xo_{camion} + Vo_{camion} * (t - to_{camion})$$

$$X_{camion}(t) = 0m + \frac{50 m}{3 s} * (t - 0 s)$$

$$X_{camion}(t) = \frac{50 m}{3 s} * t$$

Ahora la del auto. El auto parte del reposo, o sea con velocidad inicial cero, con una aceleración de 2 m/s² y un tiempo inicial de 2 seg por salir 2 seg más tarde que el camión. Su ecuación de velocidad queda:

$$V_{auto}(t) = Vo_{auto} + a_{auto} * (t - to_{auto})$$

$$V_{auto}(t) = 0 \frac{m}{s} + 2 \frac{m}{s^2} * (t - 2 s)$$

$$V_{auto}(t) = 2 \frac{m}{s^2} * t - 4 \frac{m}{s}$$

Y la de posición:

$$X_{auto}(t) = X_{0_{auto}} + V_{0_{auto}} * (t - t_{0_{auto}}) + \frac{1}{2} * a_{auto} * (t - t_{0_{auto}})^2$$

$$X_{auto}(t) = 0m + 0 \frac{m}{s} * (t - 2s) + \frac{1}{2} * 2 \frac{m}{s^2} * (t - 2s)^2$$

$$X_{auto}(t) = 1 \frac{m}{s^2} * (t - 2s)^2$$

Bueno ahora vamos a ver donde y a qué velocidad se encuentra cada móvil después de que el auto acelere 15 segundos (es decir a los 17 segundos ya que estuvo 2 segundos parado)

Camión

$$X_{camion}(17s) = \frac{50 \text{ m}}{3 \frac{s}{s}} * 17s$$

$$X_{camion}(17s) = \frac{850}{3} m$$

En el instante cuando el auto deja de acelerar (segundo 17) el camión se encuentra a los 850/3 metros

Auto

$$V_{auto}(17s) = 2 \frac{m}{s^2} * 17s - 4 \frac{m}{s}$$

$$V_{auto}(17s) = 30 \frac{m}{s}$$

$$X_{auto}(17s) = 1 \frac{m}{s^2} * (17s - 2s)^2$$

$$X_{auto}(17s) = 225m$$

En el instante cuando el auto deja de acelerar (segundo 17) se encuentra a los 225m y a una velocidad de 30 m/s

Luego de acelerar 15s (o sea a los 17s) el auto comienza a moverse con MRU, o sea que ahora su ecuaciones serán

$$V_{auto} = \text{Constante} = 30 \frac{m}{s}$$

$$X_{auto}(t) = X_{auto}(17s) + V_{auto} * (t \text{ final} - 17s)$$

$$X_{auto}(t) = 225m + 30 \frac{m}{s} * (t \text{ final} - 17s)$$

Ahora plantearemos un encuentro donde los dos se mueven con MRU y salen de donde llegaron a los 17 seg

Las nuevas ecuaciones son

$$X_{auto}(t) = 225m + 30 \frac{m}{s} * (t - 17s) \quad \text{y} \quad X_{camion}(t) = \frac{850}{3} m + \frac{50 \text{ m}}{3 \frac{s}{s}} * (t - 17s)$$

Igualamos

$$225m + 30 \frac{m}{s} * (t_{encuentro} - 17s) = \frac{850}{3}m + \frac{50m}{3s} * (t_{encuentro} - 17s)$$

$$225m + 30t_{encuentro} \frac{m}{s} - 510m = \frac{850}{3}m + \frac{50m}{3s}t_{encuentro} - \frac{850}{3}m$$

$$30t_{encuentro} \frac{m}{s} - \frac{50m}{3s} * t_{encuentro} = 285m$$

$$\frac{40m}{3s} * t_{encuentro} = 285m$$

$$t_{encuentro} = 21.375s$$

Se encuentran a los 21.375 segundos, veamos donde:

$$X_{auto}(21.375s) = X_{camion}(21.375s) = X_{encuentro} = 225m + 30 \frac{m}{s} * (21.375s - 17s) = 356.25m$$

La Velocidad del auto en el encuentro es 30 m/s (porque desde los 15 seg que se mueve con esa v constante)

Respuesta: Se encuentran a 21,375m del semaforo y el auto tiene una velocidad de $30 \frac{m}{s}$

EJERCICIO N° 13

Encuentre el conjunto solución de

$$2 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{cos}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

Solución

Tenemos

$$2 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{cos}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

Sabemos que $\operatorname{cos}^2 x = 1 - \operatorname{Sen}^2 x$. Reemplazo

$$2 \operatorname{sen}^3 x - (1 - \operatorname{Sen}^2 x) - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

$$2 \operatorname{sen}^3 x - 1 + \operatorname{Sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

Hago el cambio de variable $\operatorname{sen} x = Z$

$$2Z^3 - 1 + Z^2 - 5Z + 3 = 0$$

$$2Z^3 + Z^2 - 5Z + 2 = 0$$

Por gauss podemos determinar que las posibles raíces de $p(X)$ están dadas por las diferentes combinaciones de los divisores del término independiente sobre los divisores de Coeficiente principal. Entonces

$$DTind = \pm 1; \pm 2$$

$$DCoef\ princ = \pm 1; \pm 2$$

O sea que las posibles raíces

$$Posibles\ raices = \frac{DTind}{DCoef} princ = \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 2$$

Por teorema del resto puedo decir que

$$p(Raiz) = 0$$

Entonces voy probando

$$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 5 \cdot -1 + 2 = 6$$

$$p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot -\frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$$

$$p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5 \cdot -2 + 2 = 0$$

O sea que ya encontré las tres raíces, el polinomio lo puedo escribir como

$$(Z - Raiz)(Z - Raiz)(Z - Raiz) = 0$$

$$(Z - 1)\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z + 2) = 0$$

Vuelvo a hacer el cambio de variable $senx = Z$

$$(senx - 1)\left(senx - \frac{1}{2}\right)(senx + 2) = 0$$

Una multiplicación es cero cuando uno de ellos es cero, entonces

$$senx - 1 = 0 \quad \vee \quad senx - \frac{1}{2} = 0 \quad \vee \quad senx + 2 = 0$$

$$senx = 1 \quad \vee \quad senx = \frac{1}{2} \quad \vee \quad senx = -2$$

El seno da 1 en $\frac{\pi}{2}$, nunca da 2 y da $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ en el primer cuadrante (lo saco con la calculadora) y lo tengo que pasar el segundo cuadrante donde el seno tambien es positivo con la formula $2\text{cuad} = \pi - 1\text{cuad}$ entonces

$$x = \frac{\pi}{2} \vee \left(x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \right) \vee \emptyset$$

Respuesta: $S: x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

EJERCICIO N° 14

Hallar el conjunto solución en $[0; 2\pi)$ de

$$\frac{1}{1 - \text{sen } x} + \frac{1}{1 + \text{sen } x} = 8$$

Solución:

En primera medida hare común denominador y realizare la suma de las dos primeras fracciones.

$$\frac{(1 - \text{sen } x) + (1 + \text{sen } x)}{(1 - \text{sen } x) * (1 + \text{sen } x)} = 8$$

El denominador es diferencia de cuadrados ($(X^2 - Y^2) = (x + y)(x - y)$) si lo llevo a la forma que esta del lado izq del igual

$$\frac{1 - \text{sen } x + 1 + \text{sen } x}{1^2 - \text{Sen}^2 x} = 8$$

Arriba los senos se cancelan y sumo los 1

$$\frac{2}{1 - \text{Sen}^2 x} = 8$$

Utilizo la identidad $1 - \text{sen}^2 x = \text{Cos}^2 x$

$$\frac{2}{\text{Cos}^2 x} = 8$$

$$2 = 8 * \text{Cos}^2 x$$

$$\frac{2}{8} = \text{Cos}^2 x$$

$$\frac{1}{4} = \text{Cos}^2 x$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = |\cos x|$$

$$\frac{1}{2} = |\cos x|$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

El coseno da 1/2 en el primer y cuarto cuadrante

En el primero es en $\pi/3$ (nos lo da la calculadora)

Si lo pasamos al cuarto

$$4^\circ = 2\pi - 1^\circ$$

$$4^\circ = 2\pi - \pi/3$$

$$4^\circ = 5/3\pi$$

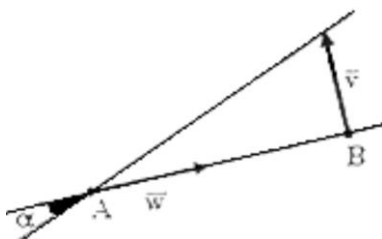
El coseno da -1/2 en el segundo y tercer cuadrante

En el segundo es en $2\pi/3$ (nos lo da la calculadora)

Si lo pasamos al tercero

Respuesta: $\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi$

EJERCICIO N° 15



Los vectores \vec{v} y \vec{w} son ortogonales y las coordenadas de los puntos $A = (-1;7)$ $B = (7;13)$ Determine el vector \vec{v} si la $\text{tg } \alpha = 2$

Solución:

Llamemos a $\vec{v} = (vx; vy)$

Por opuestos por el vértice, sabemos que el ángulo interior del triángulo de vértice A vale lo mismo que α .

Como \vec{v} es ortogonal a \vec{w} , sabemos que forman un ángulo recto entre ellos, por lo tanto el triángulo del dibujo resulta rectángulo.

Si es un triángulo rectángulo puedo asegurar que

$$tg \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Como podemos ver en el dibujo el cateto opuesto es el vector \vec{v} , y el adyacente el \overline{AB} , (el vector que comienza en A y finaliza en B).

Las coordenadas de vector que comienza en A y finaliza en B se obtienen de la siguiente forma

$$\text{Vector AB} = \text{Punto final} - \text{Punto inicial} = \text{PUNTO B} - \text{PUNTO A}$$

Calculemos \overline{AB} :

$$\overline{AB} = (7; 13) - (-1; 7) = (8; 6)$$

La medida de un vector está dada por el valor de su módulo, por lo tanto la fórmula de la tangente quedaría:

$$\begin{aligned} tg \alpha &= \frac{|v|}{|\overline{AB}|} \\ 2 &= \frac{\sqrt{vx^2 + vy^2}}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \\ 2 &= \frac{\sqrt{vx^2 + vy^2}}{\sqrt{100}} \\ 2 &= \frac{\sqrt{vx^2 + vy^2}}{10} \\ 20 &= \sqrt{vx^2 + vy^2} \\ 400 &= vx^2 + vy^2 \\ \sqrt{400 - vx^2} &= vy \end{aligned}$$

Además, como \overline{AB} y \vec{v} son ortogonales puedo asegurar que su producto escalar es cero

$$\begin{aligned} \overline{AB} * v &= 0 \\ (8; 6) * (vx; vy) &= 0 \\ 8vx + 6vy &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazo con $\sqrt{400 - vx^2} = vy$

$$8vx + 6 * \sqrt{400 - vx^2} = 0$$

$$6 * \sqrt{400 - vx^2} = -8vx$$

$$\sqrt{400 - vx^2} = -\frac{8}{6}vx$$

$$\sqrt{400 - vx^2} = -\frac{4}{3}vx$$

$$400 - vx^2 = \left(-\frac{4}{3}vx\right)^2$$

$$400 - vx^2 = \frac{16}{9}vx^2$$

$$-vx^2 - \frac{16}{9}vx^2 = -400$$

$$\frac{25}{9}vx^2 = 400$$

$$vx^2 = 144$$

$$vx = |12|$$

$$vx = 12 \quad \vee \quad vx = -12$$

O sea que tenemos dos resultados posibles para vx , pero si observamos en el dibujo, el vector \vec{v} esta inclinado hacia la izquierda, esto quiere decir que su componente x es negativa, por lo tanto $vx = -12$ y podemos calcular vy

$$\sqrt{400 - (-12)^2} = vy$$

$$\sqrt{400 - 144} = vy$$

$$\sqrt{256} = vy$$

$$16 = vy$$

Respuesta: $\vec{v} = (-12; 16)$

EJERCICIO N° 16

Encuentre el perímetro del triángulo APB sabiendo el punto $A = (-1,6)$ y el punto $B = (-9,-2)$ y q el punto P esta sobre el eje x y esta equidistante a los otros dos puntos

Solución:

Sabemos que:

$$A = (-1; 6)$$

$$B = (-9; -2)$$

$$P = (x; 0)$$

(La componente y es cero por estar sobre el eje x)

Como sabemos que el punto P equidista de los dos puntos sacare las ecuaciones de distancia con ambos puntos y las igualare.

Para sacar la distancia de P hasta A debo hallar el vector que cruza esos dos puntos y luego le calculare su modulo

$$PA = Fin(A) - Origen(P)$$

$$PA = (-1; 6) - (x; 0)$$

$$PA = (-1 - x; 6)$$

$$Distancia P y A = |PA|$$

$$Distancia P y A = \sqrt{(-1-x)^2 + 6^2}$$

$$Distancia P y A = \sqrt{1 + 2x + x^2 + 36}$$

$$Distancia P y A = \sqrt{2x + x^2 + 37}$$

Para sacar la distancia de P hasta B debo hallar el vector que cruza esos dos puntos y luego le calculare su modulo

$$PB = Fin(B) - Origen(P)$$

$$PB = (-9; -2) - (x; 0)$$

$$PB = (-9 - x; -2)$$

$$Distancia P y B = |PB|$$

$$Distancia P y B = \sqrt{(-9-x)^2 + (-2)^2}$$

$$Distancia P y B = \sqrt{81 + x^2 + 18x + 4}$$

$$Distancia P y B = \sqrt{85 + x^2 + 18x}$$

Si igualo ambas distancias

$$Distancia P y B = Distancia P y A$$

$$\sqrt{18x + x^2 + 85} = \sqrt{2x + x^2 + 37}$$

$$18x + x^2 + 85 = 2x + x^2 + 37$$

$$18x + 85 = 2x + 37$$

$$18x - 2x = 37 - 85$$

$$16x = -48$$

$$x = -3$$

O sea que el punto p queda

$$P = (-3; 0)$$

Para sacar el perímetro del triangulo que forman estos tres vectores, no me queda más que sumar sus módulos

$$\text{Perímetro del triángulo} = |AP| + |AB| + |BA|$$

Calculemos BA, PA y PB

$$BA = Fin(A) - Origen(B)$$

$$BA = (-1; 6) - (-9; -2)$$

$$BA = (8; 8)$$

$$AP = (-1 - x; 6) = (-1 - (-3); 6) = (2; 6)$$

$$PB = (-9 - x; -2) = (-9 - (-3); -2) = (-6; -2)$$

Ahora hallemos el perímetro por medio de la suma de sus módulos

$$\begin{aligned} \text{Perimetro del triangulo} &= |AP| + |BA| + |PB| \\ \text{Perimetro del triangulo} &= \sqrt{2^2 + 6^2} + \sqrt{8^2 + 8^2} + \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \\ \text{Perimetro del triangulo} &= \sqrt{40} + \sqrt{128} + \sqrt{40} \\ \text{Perimetro del triangulo} &= \sqrt{2^2 * 2 * 5} + \sqrt{2^6 * 2} + \sqrt{2^2 * 2 * 5} \\ \text{Perimetro del triangulo} &= 2^2\sqrt{5}\sqrt{2} + 2^3\sqrt{2} + 2^2\sqrt{5}\sqrt{2} \\ \text{Perimetro del triangulo} &= 4^2\sqrt{5}\sqrt{2} + 8^2\sqrt{2} \\ \text{Perimetro del triangulo} &= 4^2\sqrt{2}(\sqrt{5} + 2) \\ \text{Perimetro del triangulo} &\cong 24\text{cm} \end{aligned}$$

Respuesta: Perimetro del triangulo $\cong 24\text{cm}$

EJERCICIO N° 17

Determine el vector de módulo 4 que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v} = -6\vec{i} + 8\vec{j}$

Solución:

La dirección y sentido de un vector \vec{v} esta dada por su correspondiente versor \check{v}
Un versor es un vector con la misma dirección y sentido que el original pero con modulo 1.

El versor se halla de la siguiente manera

$$\check{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(v_x; v_y)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Por lo tanto el versor correspondiente a \vec{v} es

$$\check{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-6; 8)}{\sqrt{(-6)^2 + (8)^2}} = \frac{(-6; 8)}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{(-6; 8)}{\sqrt{100}} = \frac{(-6; 8)}{10} = (-0,6; 0,8)$$

El vector buscado, llamémoslo \vec{w} , también debe cumplir la misma regla

$$\vec{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$$

Pero como tiene la misma dirección y sentido que \vec{v} y modulo 4 puedo decir que $\vec{w} = \check{v} = (-0,6; 0,8)$ y $|\vec{w}| = 4$, si reemplazamos

$$(-0,6; 0,8) = \frac{\vec{w}}{4}$$

$$\vec{w} = 4 * (-0,6; 0,8)$$

$$\vec{w} = (-2,4; 3,2)$$

Podemos comprobar que este vector tiene misma dirección y sentido que a, (por tener el mismo versor) y además que tiene módulo 4

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-2.4)^2 + 3.2^2} = \sqrt{5.76 + 10.24} = \sqrt{16} = 4$$

Respuesta: El vector buscado es $\vec{w} = (-2,4; 3,2)$

EJERCICIO N° 18

Determinar el conjunto de solución de la siguiente ecuación en $[0,2\pi]$

$$\text{Tg}^2 x - 1 = 0$$

Solución:

$$\text{Tg}^2 x - 1 = 0$$

$$\text{Tg}^2 x = 1$$

$$\sqrt{\text{Tg}^2 x} = \sqrt{1}$$

Como la definición de modulo establece que $|x| = \sqrt{x^2}$

$$\text{Tg}^2 x = 1$$

$$|\text{Tg} x| = 1$$

Abrimos el modulo colocando en un lado la solución positiva y del otro la negativa separada con un \vee

$$\text{Tg} x = 1 \quad \vee \quad \text{Tg} x = -1$$

La tangente da 1 en $[0; 2\pi]$ en el primer y tercer cuadrante

En el primer cuadrante (nos lo da la calculadora) es $1/4 \pi$, lo pasamos al tercer cuadrante

$$\begin{aligned} 3^{\circ}\text{cuad} &= \pi - 1^{\circ}\text{cuad} \\ 3^{\circ}\text{cuad} &= \pi + \frac{1}{4}\pi \\ 3^{\circ}\text{cuad} &= \frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto la tangente es igual a 1, en $\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{5}{4}\pi$

Cuando hacemos Arco tangente de -1 en la calculadora da $-\frac{1}{4}\pi$, esto está ubicado en el -1° cuadrante, para hallar los valores que están entre $[0; 2\pi]$ debemos pasarlo al segundo y cuarto cuadrante.

$$\begin{aligned} 4^{\circ}\text{cuad} &= -1^{\circ}\text{cuad} + 2\pi \\ 4^{\circ}\text{cuad} &= -\frac{1}{4}\pi + 2\pi \\ 4^{\circ}\text{cuad} &= \frac{7}{4}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ}\text{cuad} &= -1^{\circ}\text{cuad} + \pi \\ 2^{\circ}\text{cuad} &= -\frac{1}{4}\pi + \pi \\ 2^{\circ}\text{cuad} &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Respuesta: $x \in \left\{ \frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \right\}$

EJERCICIO N° 19

Determine A sabiendo que la curva $f(x) = \text{Log}_A X$ pasa por el punto B = (3,2).

Solución:

Tenemos

$$f(x) = \text{Log}_A x$$

Y sabemos que pasa por el punto B =(3;2), o sea que si la x vale 3 la f(x) debe valer 2

$$2 = \text{Log}_A 3$$

$A^{\text{Log}_A X}$ se cancelan entonces

$$A^2 = A^{\text{Log}_A 3}$$

$$A^2 = 3$$

$$|A| = \sqrt[2]{3}$$

$$A = \sqrt[2]{3} \quad \vee \quad A = -\sqrt[2]{3}$$

Pero como A es la base del logaritmo no puede ser negativa, entonces podemos descartar la segunda solución

Respuesta: $A = \sqrt{3}$

EJERCICIO N° 20

Sea la función biyectiva f y $f^{-1}: Df^{-1} \rightarrow [-7; \infty) / f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{200-x}{2}} - 7$

Expresé el conjunto $\{x/x \in Df \wedge f(x) < 0\}$ en notación de intervalo

Solución:

Como la función es biyectiva, sabemos que no posee problemas de dominio ni de imagen para realizar la función inversa. Y que esta función inversa tendrá como dominio la imagen de la original y como imagen el dominio de esta.

Por lo tanto podemos decir que

$$Df^{-1} = If \quad \wedge \quad [-7; \infty) = Df$$

Ahora también sabemos que

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

Hallemos la inversa de la inversa, primero despejamos x

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{200-x}{2}} - 7$$

$$f^{-1}(x) + 7 = \sqrt{\frac{200-x}{2}}$$

$$(f^{-1}(x) + 7)^2 = \frac{200-x}{2}$$

$$2 * (f^{-1}(x) + 7)^2 = 200 - x$$

$$2 * (f^{-1}(x) + 7)^2 - 200 = -x$$

$$-2 * (f^{-1}(x) + 7)^2 + 200 = x$$

Ahora cambio x por f(x) y $f^{-1}(x)$ por x

$$-2 * (x + 7)^2 + 200 = f(x)$$

Por lo tanto f(x) queda

$$f: (-7; \infty) \rightarrow If/f(x) = -2 * (x + 7)^2 + 200$$

Hallemos ahora el conjunto $\{x/x \in Df \wedge f(x) < 0\}$ en notación de intervalo

$$\{ \quad x \in Df \quad \wedge \quad f(x) < 0 \quad \}$$

$$\{ \quad [-7; \infty) \quad \wedge \quad -2 * (x + 7)^2 + 200 < 0 \quad \}$$

$$\{ [-7; \infty) \wedge -2 * (x + 7)^2 < -200 \}$$

$$\{ [-7; \infty) \wedge (x + 7)^2 > 100 \}$$

$$\{ [-7; \infty) \wedge |x + 7| > \sqrt{100} \}$$

$$\{ [-7; \infty) \wedge [x + 7 > 10 \vee x + 7 < -10] \}$$

$$\{ [-7; \infty) \wedge [x > 3 \vee x < -17] \}$$

$$\{ [-7; \infty) \cap \{ (-\infty; -17) \cup (3; \infty) \}$$

Para calcular intersecciones y uniones es conveniente dibujar la recta numérica, pintar con diferentes colores cada intervalo y tener en cuenta que la intersección es cuando todo lo que tocan LOS DOS A LA VEZ y la unión es todo lo que toca AL MENOS UNA VEZ

Solución: (3; ∞)

EJERCICIO N° 21

Determinar si es identidad $Tg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución:

$$Tg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

El arccos es la inversa del seno, o sea que podemos ponerlo como $\text{Sen}^{-1}x$

$$Tg(\text{Sen}^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

La tangente es seno dividido coseno entonces

$$\frac{\text{Sen}(\text{Sen}^{-1}x)}{\text{Cos}(\text{Sen}^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

El sen y el $\text{Sen}^{-1}x$ son inversas entonces se cancelan

(pensa que es como sumarle 1 hacerle el sen^{-1} y después restárle el mismo 1 con el sen

$$\frac{x}{\text{Cos}(\text{Sen}^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Excluimos del dominio los valores que anulan los denominadores
($x \neq 1$, $x \neq -1$, y $\text{Cos}(\text{sen}^{-1}(x)) \neq 0$) e invierto las fracciones

$$\frac{\text{Cos}(\text{Sen}^{-1}x)}{x} = \frac{\sqrt[2]{1-x^2}}{x}$$

Elevo ambos al cuadrado

$$\frac{\text{Cos}(\text{Sen}^{-1}x)^2}{x^2} = \frac{(\sqrt[2]{1-x^2})^2}{x^2}$$

$$\frac{\text{Cos}(\text{Sen}^{-1}x)^2}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

$\text{Cos}(\text{Sen}^{-1}x)^2$ es igual a $1 - (\text{Sen}^{-1}x)^2$

$$\frac{1 - \text{Sen}(\text{Sen}^{-1}x)^2}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

$(\text{Sen}^{-1}x)^2$ Es igual a $(\text{Sen}^{-1}x^2)$

$$\frac{1 - \text{Sen}(\text{Sen}^{-1}x^2)}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

El sen y el Sen^{-1} son inversas entonces se cancelan

$$\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

Respuesta: Es identidad

EJERCICIO N° 22

Se conoce $I(t) = 30\text{sen}\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right]$ Donde **I(t)** es la medida en Amper y **t** en seg.
Hallar el valor positivo más pequeño de **t** para que la corriente sea de 15 Amper.

Solución:

Hay que hallar **t** para que $I(t) = 15$

$$\begin{aligned} I(t) &= 30\text{sen}\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \\ 15 &= 30\text{sen}\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \\ \frac{15}{30} &= \text{sen}\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \\ \frac{1}{2} &= \text{sen}\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \end{aligned}$$

Hago el cambio de variable $100 \pi \left(t - \frac{7}{36} \right) = Z$

$$\frac{1}{2} = \text{sen}[Z]$$

Para que Z sea el menor, debe ser la solución del primer cuadrante, es decir

$$Z = \frac{1}{6} \pi$$

Hago el cambio de variable $100 \pi \left(t - \frac{7}{36} \right) = Z$

$$100 \pi \left(t - \frac{7}{36} \right) = \frac{1}{6} \pi$$

$$t - \frac{7}{36} = \frac{1}{600}$$

$$t = \frac{1}{600} + \frac{7}{36}$$

$$t = \frac{353}{1800}$$

$$t \cong 0.196 \text{ seg}$$

Respuesta: El menor valor de t para que la corriente sea de 15 Amper es de aproximadamente 0,196 segundos

EJERCICIO N° 23

Expresar el vector proyección ortogonal $\overrightarrow{Proj_w v}$, si $\vec{v} = 2\vec{i} + (2x - 6)\vec{j}$, $\vec{w} = (2 - y)\vec{i} + 4\vec{j}$ y además $\vec{v} * \vec{w} = 14$ y $\vec{v} - \vec{w} = y\vec{i} + (2y)\vec{j}$

Solución:

Tenemos

$$\vec{v} = 2\vec{i} + (2x - 6)\vec{j} = (2; 2x - 6)$$

$$\vec{w} = (2 - y)\vec{i} + 4\vec{j} = (2 - y; 4)$$

Calcularemos $\vec{v} - \vec{w}$

$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{w} &= (2; 2x - 6) - (2 - y; 4) \\ \vec{v} - \vec{w} &= (2 - (2 - y); (2x - 6) - 4) \\ \vec{v} - \vec{w} &= (2 - 2 + y; 2x - 10) \\ \vec{v} - \vec{w} &= (y; 2x - 10) \end{aligned}$$

Pero sabíamos que $\vec{v} - \vec{w} = y\vec{i} + (2y)\vec{j} = (y; 2y)$ Entonces igualando componente a componente

$$y = y \quad 2x - 10 = 2y \\ x - 5 = y$$

Además la consigna establecía que:

$$\vec{v} * \vec{w} = 14 \\ (2; 2x - 6) * (2 - y; 4) = 14 \\ 2 * (2 - y) + (2x - 6) * 4 = 14 \\ 4 - 2y + 8x - 24 = 14$$

Reemplazo con $x - 5 = y$

$$4 - 2 * (x - 5) + 8x - 24 = 14 \\ 4 - 2x + 10 + 8x - 24 = 14 \\ 6x = 24 \\ x = 4$$

Pero como $x - 5 = y$

$$4 - 5 = y \\ y = -1$$

Por lo tanto

$$\vec{v} = (2; 2 * 4 - 6) = (2; 2)$$

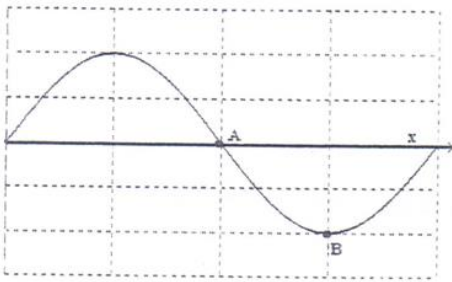
$$\vec{w} = (2 - (-1); 4) = (3; 4)$$

El vector proyección es

$$\overrightarrow{Proy_w v} = \frac{\vec{v} * \vec{w}}{|\vec{w}|} * \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \\ \overrightarrow{Proy_w v} = \frac{14}{\sqrt{3^2 + 4^2}} * \frac{(3; 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ \overrightarrow{Proy_w v} = \frac{14}{5} * \frac{(3; 4)}{5} \\ \overrightarrow{Proy_w v} = \frac{14}{25} * (3; 4) \\ \overrightarrow{Proy_w v} = \left(\frac{42}{25}; \frac{56}{25}\right)$$

Respuesta: $\overrightarrow{Proy_w v} = \left(\frac{42}{25}; \frac{56}{25}\right)$

EJERCICIO N° 24



Determine las constantes $T > 0$ y $b > 0$ y c , si la gráfica de la función g se representa a la izquierda y dos puntos tienen coordenadas $A(8;0)$ y $B(11;-4)$

$$g: Dg \rightarrow R/g(x) = T \text{ Sen}(bx + c)$$

Solución:

Sabemos que la amplitud es la distancia en y del eje de la curva con el máximo o el mínimo de la función por lo tanto la amplitud será la distancia en y entre el punto A y el B

$$\text{Amplitud} = |A_y - B_y|$$

$$\text{Amplitud} = |0 - (-4)|$$

$$\text{Amplitud} = 4$$

La amplitud esta determinada por el coeficiente que multiplica al Sen, en este caso T , por lo tanto

$$T = 4$$

Ahora que conocemos T nos queda

$$g: Dg \rightarrow R/g(x) = 4 \text{ Sen}(bx + c)$$

Saquemos el periodo de esta función

El argumento (lo de adentro) del seno siempre está entre 0 y 2π , por lo tanto:

$$0 < bx + c < 2\pi$$

$$-c < bx + c - c < 2\pi - c$$

$$-\frac{c}{b} < \frac{bx}{b} < \frac{2\pi - c}{b}$$

$$-\frac{c}{b} < x < \frac{2\pi - c}{b}$$

Desde el medio de la curva hasta un máximo siempre se recorre $\frac{1}{4}$ del periodo entonces podemos decir que el periodo es 4 veces la distancia entre las x de A y B

$$\text{Periodo} = 4 * \text{Distancia entre } A_x \text{ y } B_x$$

$$\text{Periodo} = 4 * |A_x - B_x|$$

$$\text{Periodo} = 4 * |8 - 11|$$

$$\text{Periodo} = 12$$

Y como su centro está en el $x = 8$ podemos decir que su origen está en el centro menos medio periodo ($8 - 6$) y su fin en el centro más medio periodo ($8 + 6$)

$$\begin{aligned} 8 - 6 < x < 8 + 6 \\ 2 < x < 14 \end{aligned}$$

O sea que

$$\begin{aligned} -\frac{c}{b} = 2 \quad \wedge \quad \frac{2\pi - c}{b} = 14 \\ c = -2b \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi - (-2b)}{b} = 14 \\ 2\pi + 2b = 14b \\ 2\pi = 12b \\ b = \frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

Pero como $c = -2b$

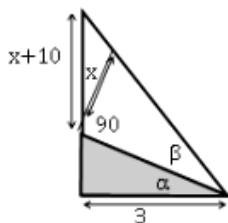
$$\begin{aligned} c &= -2 * \frac{1}{6}\pi \\ c &= -\frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

O sea que $g(x)$ queda

$$g: Dg \rightarrow R/g(x) = 4 \operatorname{Sen} \left(\frac{1}{6}\pi x - \frac{1}{3}\pi \right)$$

Respuesta: $T = 4$; $b = \frac{1}{6}\pi$ y $c = -\frac{1}{3}\pi$

EJERCICIO Nº 25



Determine x si se sabe que el área del triángulo sombreado es 6cm^2

Solución:

Sabemos que el área del triángulo sombreado es 6cm^2 y que su base es 3cm entonces podemos sacar su altura

$$\text{Area triangulo sombreado} = \frac{\text{base} * \text{Altura}}{2}$$

$$6\text{cm}^2 = \frac{3\text{cm} * \text{Altura}}{2}$$

$$\text{Altura} = 4\text{cm}$$

Ahora que conocemos las medidas de la base y la altura, que son los catetos de este triángulo rectángulo puedo sacar la hipotenusa por Pitágoras

$$\text{Hipotenusa triangulo sombreado}^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\text{Hipotenusa triangulo sombreado}^2 = 16 + 9$$

$$\text{Hipotenusa triangulo sombreado}^2 = 25$$

$$\text{Hipotenusa triangulo sombreado} = 5$$

Como podemos ver en el dibujo la hipotenusa del triángulo sombreado es la base del triángulo rectángulo de ángulo β , entonces si le calculo la Tangente de ese triángulo

$$\text{Tg } \beta = \frac{x}{\text{hipotenusa triangulo sombreado}}$$

$$\text{Tg } \beta = \frac{x}{5}$$

Ahora si le calcula la tg a α en el triángulo sombreado

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Altura}}{3}$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{4}{3}$$

Ahora voy a calcular la Tg de $(\alpha + \beta)$ es decir como si fueran un solo ángulo del triángulo total

$$\text{Tg } (\alpha + \beta) = \frac{(x + 10) + 4}{3}$$

La identidad trigonométrica establece que $\text{Tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{Tg}(\alpha) + \text{Tg}(\beta)}{1 - \text{Tg}(\alpha) * \text{Tg}(\beta)}$ reemplazo

$$\frac{\text{Tg}(\alpha) + \text{Tg}(\beta)}{1 - \text{Tg}(\alpha) * \text{Tg}(\beta)} = \frac{(x + 10) + 4}{3}$$

Reemplazo con lo que me dio $\text{Tg}(\alpha)$ y $\text{Tg}(\beta)$

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{x}{5}}{1 - \frac{4}{3} * \frac{x}{5}} = \frac{(x + 10) + 4}{3}$$

$$\frac{\frac{20 + 3x}{15}}{1 - \frac{4x}{15}} = \frac{x + 14}{3}$$

$$\frac{20 + 3x}{15} = \frac{x + 14}{3}$$

$$\frac{20 + 3x}{15 - 4x} = \frac{x + 14}{3}$$

$$3 * (20 + 3x) = (x + 14) * (15 - 4x)$$

$$60 + 9x = 15x + 210 - 4x^2 - 56x$$

$$4x^2 + 50x - 150 = 0$$

Esta cuadrática tiene raíces en $5/2$ y -15 pero como una distancia no puede ser negativa descarto la segunda solución

Respuesta: $x = \frac{5}{2}$

EJERCICIO N° 26

Determine si es identidad $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Solución:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Como el seno es una función impar, puedo decir que $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

Como $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

Como el Coseno es una función impar, $\cos(x) = \cos(-x)$ o $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(-\left(-\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

$$0 = 0$$

Es identidad

El conjunto de existencia es donde existe la identidad, por lo tanto, las x que Pueden ponerse dentro del seno y el coseno, pero como el dominio de estas funciones son todos los reales podemos decir que no posee restricciones.

Este ejercicio sale en mucho menos pasos por la identidad del coseno y del seno de la suma, pero se explica de esta manera para explicar conceptos y demostrar que no hace falta saberse todas las fórmulas de memoria.

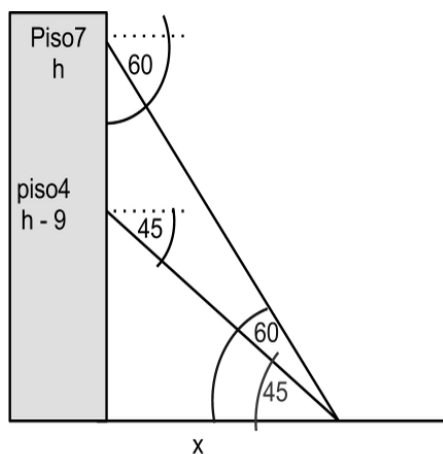
Respuesta: Es identidad. conjunto de existencia = \mathbb{R}

EJERCICIO Nº 27

Desde dos departamentos ubicados en el séptimo y cuarto piso distantes 9 m. Se observa q los ángulos de depresión de un objeto situado en la acera son de 60° y 45° respectivamente. Calcule la distancia entre la base del edificio y el objeto y la medida de altura hasta el punto de observación en el séptimo piso

Solución:

Dibujemos



Llamaremos h a la altura del edificio, en el piso 7.

Como dice que los pisos distan 9m, la altura en el piso 4 es de h-9

La distancia del objeto al edificio la llamaremos x.

La consigna decía que los ángulos de depresión eran de 60 y 45 grados, pero por alternos internos entre paralelas (línea punteada y suelo) puedo decir que los de la base miden lo mismo. (Si te cuesta entenderlo de esta manera puedes sacarlo también como que los ángulos interiores de un triángulo suman 180)

Si planteamos las tangentes de cada uno de los ángulos desde el objeto sobre el piso:

Para el piso 7

$$Tg(60^\circ) = \frac{h}{x}$$

Para el piso 4

$$Tg(45^\circ) = \frac{h-9}{x}$$

Si de la segunda ecuacion despejamos x

$$Tg(45^\circ) = \frac{h-9}{x}$$

$$\frac{h-9}{Tg(45^\circ)} = x$$

$$\frac{h-9}{1} = x$$

$$h-9 = x$$

Si reemplazamos en la segunda

$$Tg(60^\circ) = \frac{h}{x}$$

$$Tg(60^\circ) = \frac{h}{h-9}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{h-9}$$

$$\sqrt{3}(h-9) = h$$

$$\sqrt{3}h - 9\sqrt{3} = h$$

$$\sqrt{3}h - h = 9\sqrt{3}$$

$$h(\sqrt{3}-1) = 9\sqrt{3}$$

$$h = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

Ahí tenemos la altura del edificio, pero como tiene raíces en el denominador y eso no es "correcto" (no quiere decir que el resultado está mal, sino mal expresado) debemos racionalizar.

Para racionalizar una fracción que debajo tiene dos términos, debemos multiplicar por otra fracción que su numerador y su denominador sea el conjugado del denominador de la fracción original. (El conjugado es lo mismo pero cambiándole el signo en medio)

$$h = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} * \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)9\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)*(\sqrt{3}+1)} = \frac{9*\sqrt{3}^2 + 9\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1^2} = \frac{9*3 + 9\sqrt{3}}{3-1} = \frac{9*(3+\sqrt{3})}{2} = \frac{9}{2}(3+\sqrt{3})$$

$$h = \frac{9}{2} (3 + \sqrt{3})$$

Como $x = h - 9$

$$x = \frac{9}{2} (3 + \sqrt{3}) - 9$$

$$x = \frac{9}{2} (3 + \sqrt{3}) - \frac{18}{2}$$

$$x = \frac{9(3 + \sqrt{3}) - 18}{2}$$

$$x = \frac{27 + 9\sqrt{3} - 18}{2}$$

$$x = \frac{9 + 9\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{9*(1 + \sqrt{3})}{2}$$

$$x = \frac{9}{2} * (1 + \sqrt{3})$$

Respuesta: La distancia del edificio al objeto es de $\frac{9}{2} * (1 + \sqrt{3})$ m y el piso 7 se encuentra a $\frac{9}{2} (3 + \sqrt{3})$ metros de altura

EJERCICIO N° 28

El móvil A desarrolla un MRUV desde el punto situado a una abscisa $X_{oA} = 100\text{m}$, su $V_{oA} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $a_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. En el mismo instante el móvil B desarrolla un MRUV con $X_{oB} = 118,75\text{m}$, $V_{oB} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $a_B = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Determine a) punto de encuentro b) a que distancia del origen de coordenadas se produjo el encuentro c) velocidades de ambos móviles al producirse el encuentro.

Solución

Planteemos las ecuaciones de posición de cada uno de los móviles

$$X(t) = X_o + V_o(T - t_o) + \frac{1}{2} a (Tf - Ti)^2$$

Para el móvil A

$$X_A(t) = X_{oA} + V_{oA}(t - t_{oA}) + \frac{1}{2}a_A(t - t_{oA})^2$$

$$X_A(t) = 100m + 10 \frac{m}{s} t + \frac{1}{2} \left(1 \frac{m}{s^2}\right) t^2$$

$$X_A(t) = 100m + 10 \frac{m}{s} t + \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} t^2$$

Para el móvil B

$$X_B(t) = X_{oB} + V_{oB}(t - t_{oB}) + \frac{1}{2}a_B(t - t_{oB})^2$$

$$X_B(t) = 118,75m + 5 \frac{m}{s} t + \frac{1}{2} \left(-1 \frac{m}{s^2}\right) t^2$$

$$X_B(t) = 118,75m + 5 \frac{m}{s} t - \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} t^2$$

Si igualamos ambas ecuaciones encontraremos en tiempo de encuentro

$$X_A(t_{\text{encuentro}}) = X_B(t_{\text{encuentro}})$$

$$100m + 10 \frac{m}{\text{seg}} t_{\text{encuentro}} + \frac{1}{2} \frac{m}{\text{seg}^2} t_{\text{encuentro}}^2 = 118,75m + 5 \frac{m}{\text{seg}} t_{\text{encuentro}} - \frac{1}{2} \frac{m}{\text{seg}^2} t_{\text{encuentro}}^2$$

$$0 = 18,75m - 5 \frac{m}{\text{seg}} t - 1 \frac{m}{\text{seg}^2} t^2$$

Esta ecuación tiene ceros en $t = 2,5$ s y $t = -7,5$ s pero como el tiempo no puede ser negativo sabemos que se encontraran a los $t = 2,5$ seg

Para encontrar el punto de encuentro, solo debemos reemplazar en alguna de las dos ecuaciones de posición.

$$X_A(2,5\text{seg}) = 100m + 10 \frac{m}{s} * 2,5 \text{seg} + \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} (2,5\text{seg})^2$$

$$X_A(2,5\text{seg}) = 100m + 25m + 3,125m$$

$$X_A(2,5\text{seg}) = 128,125m$$

$$X_B(2,5\text{seg}) = 118,75m + 5 \frac{m}{\text{seg}} 2,5\text{seg} - \frac{1}{2} \frac{m}{\text{seg}^2} (2,5\text{seg})^2$$

$$X_B(2,5\text{seg}) = 118,75m + 12,5m - 3,125m$$

$$X_B(2,5\text{seg}) = 128,125m$$

$$X_{\text{encuentro}} = X_A(2,5\text{seg}) = X_B(2,5\text{seg}) = 128,125m$$

Su encuentro se produce en el punto (128,125; 0)m o sea a 128, 125 m del origen de coordenadas.

La fórmula para determinar la velocidad es

$$V(t) = V_o + at$$

Para A

$$\begin{aligned}
 VA(2,5seg) &= VoA + aA * (2,5seg) \\
 VA(2,5seg) &= 10 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s^2} * (2,5seg) \\
 VA(2,5seg) &= 10 \frac{m}{s} + 2,5 \frac{m}{s^2} \\
 VA(2,5seg) &= 12,5 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

Para B

$$\begin{aligned}
 VB(2,5seg) &= VoB + aB * (2,5seg) \\
 VB(2,5seg) &= 5 \frac{m}{s} - 1 \frac{m}{s^2} * (2,5seg) \\
 VB(2,5seg) &= 5 \frac{m}{s} - 2,5 \frac{m}{s^2} \\
 VB(2,5seg) &= 2,5 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

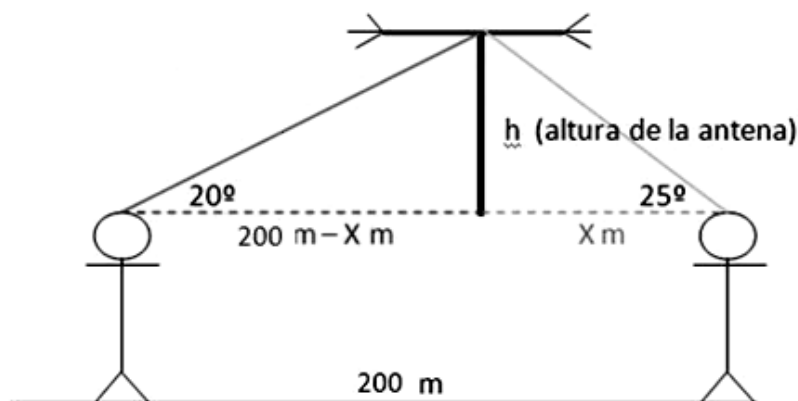
Respuesta: Se encuentran en el (128,125; 0) m es decir a 128,125 metros del origen de coordenadas. El m3vil A con una velocidad de 12,5 m/s y el B con una de 2,5m/s

EJERCICIO N3 29

Una antena es dividada sobre el nivel del piso por dos personas que se encuentran enfrentadas a 200m entre s3. Si los 3ngulos de elevaci3n de las personas al extremo superior de la antena son 203 y 253 respectivamente, determine la altura aproximada de la antena. La antena y las personas est3n ubicadas en un mismo plano normal al piso.

Soluci3n

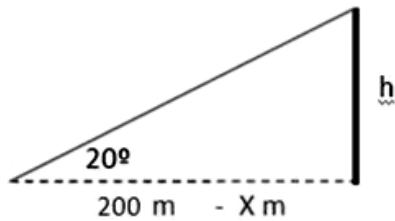
Realicemos un esquema



Ahora podemos distinguir dos triangulos

El triangulo izquierdo

Como es un triangulo rectángulo puedo decir que :



Despejo x

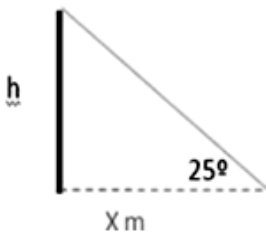
$$\text{Tg } 20^\circ = \frac{h}{200m - x}$$

$$\frac{h}{\text{Tg}20^\circ} = 200m - x$$

$$x = 200m - \frac{h}{\text{Tg}20^\circ}$$

El triángulo Derecho

Como es un triángulo rectángulo puedo decir que :



Despejo x

$$\text{Tg } 25^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\frac{h}{\text{Tg}25^\circ} = x$$

Si igualo las dos x despejadas

$$200m - \frac{h}{\text{Tg}20^\circ} = \frac{h}{\text{Tg}25^\circ}$$

Calculo las Tg con la calculadora (aproximado quedaría)

$$200m - \frac{h}{0.364} = \frac{h}{0.4663}$$

$$200m = \frac{h}{0.4663} + \frac{h}{0.364}$$

$$200m = h \left(\frac{1}{0.4663} + \frac{1}{0.364} \right)$$

$$200m = h * (4.89)$$

$$h = \frac{200m}{4.89}$$

$$h = 40.89 m$$

Respuesta: La antena tiene una altura de 40.89m

EJERCICIO N° 30

Sea la función biyectiva: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \sqrt[3]{x-358} + 8$

Expresa el conjunto $\{A: x/x \in \mathbb{R} \wedge f^{-1}(x) > 15\}$ en notación de intervalo

Solución:

Hallemos $f^{-1}(x)$

En primer lugar despejemos x:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-358} + 8$$

$$f(x) - 8 = \sqrt[3]{x-358}$$

$$(f(x) - 8)^3 = x - 358$$

$$(f(x) - 8)^3 + 358 = x$$

Ahora reemplacemos $f(x)$ por x y x por $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = (x - 8)^3 + 358$$

Ahora debemos hallar el conjunto a que establece que $f^{-1}(x)$ debe ser mayor a 15:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &> 15 \\ (x - 8)^3 + 358 &> 15 \\ (x - 8)^3 &> -343 \\ x - 8 &> -7 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

Expresado en notación de intervalo $A = (1; \infty)$

Respuesta: El conjunto A queda de la forma $A = (1; \infty)$

EJERCICIO N° 31

Se lanza desde el suelo y verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 10 m/s. En ese mismo instante se deja caer otro cuerpo, sin velocidad inicial, desde una altura h. ¿Cuál debe ser la altura desde la que cae el segundo cuerpo para que ambos cuerpos lleguen al suelo en el mismo instante?

SoluciónPARA EL CUERPO 1

Como se lanza desde el suelo y hacia arriba y vuelve a caer al suelo

$$Y_0 = 0 \text{ m} \quad V_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad a = g = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad Y(\text{tsuelo}) = 0 \text{ m}$$

osea que la formula de posicion queda

$$Y(\text{tsuelo}) = Y_0 + V_0 * \text{tsuelo} + 1/2 * a * \text{tsuelo}^2$$

$$Y(\text{tsuelo}) - Y_0 = V_0 * \text{tsuelo} + 1/2 * a * \text{tsuelo}^2$$

$$0\text{m} - 0\text{m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \text{tsuelo} + \frac{1}{2} * -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tsuelo}^2$$

$$0\text{m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \text{tsuelo} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tsuelo}^2$$

$$0\text{m} = \text{tsuelo} * (10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \text{m/s}^2 * \text{tsuelo})$$

Como el tiempo es distinto de cero (porque en el instante cero los dos no estan en el suelo) puedo pasar tsuelo dividiendo

$$\frac{0\text{m}}{\text{tsuelo}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * t$$

$$0\text{m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * t - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * t^2$$

$$\frac{0\text{m}}{\text{tsuelo}} = (10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tsuelo})$$

$$\frac{0\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tsuelo}$$

$$-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tsuelo}$$

$$\text{tsuelo} = 2\text{s}$$

PARA EL CUERPO 2

Como se deja caer desde altura h

$$Y_0 = h$$

$$V_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = g = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$Y(t_{\text{suelo}}) = 0m$$

Pero como llega al suelo en el mismo momento que el cuerpo 1

$$Y(2s) = 0m$$

$$Y_0 + V_0 * 2s + \frac{1}{2} * a * (2s)^2 = 0m$$

$$h + 0 \frac{m}{s} * 2s + \frac{1}{2} * \left(-10 \frac{m}{s^2}\right) * (2s)^2 = 0m$$

$$h - 5 \frac{m}{s^2} * 4s^2 = 0m$$

$$h = 20m$$

Respuesta: Si la altura de la que comienza a caer el segundo cuerpo es 20 metros, los dos cuerpos llegan al suelo a los dos segundos

EJERCICIO Nº 32

Un malabarista lanza desde una altura h sobre el nivel del suelo, verticalmente hacia arriba, una pelota. La pelota recorre 2.8m hasta alcanzar su altura máxima sobre el suelo.

¿Cuanto tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?

¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota?

Solución

Vamos a calcular que pasa hasta el segundo exacto en que llega a la altura máxima

$$Y_0 = h \quad Y_{\text{alt max}} = h + 2.8m \quad a = g = -10 \frac{m}{s^2}$$

Y por ser un tiro vertical sabemos que en la altura máxima

$$V_{\text{alt max}} = 0 \frac{m}{s}$$

Tenemos las dos ecuaciones para tiro vertical

$$V(t) = V_0 + a * t \quad y \quad Y(t) = Y_0 + V_0 * t + \frac{1}{2} g * t^2$$

Reemplazo en la ecuación de velocidad con los datos que conozco de la alt max

$$V(t_{altmax}) = V_0 + a * t_{altmax}$$

$$0 \frac{m}{s} = V_0 - 10 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}$$

$$V_0 = 10 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}$$

Si reemplazamos con esto y con los datos en la ecuacion de posicion

$$Y(t_{altmax}) = Y_0 + V_0 * t_{altmax} + \frac{1}{2} g * t_{altmax}^2$$

$$Y(t_{altmax}) = Y_0 + (10 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}) * t_{altmax} + \frac{1}{2} g * t_{altmax}^2$$

$$h + 2.8 m = h + 10 \frac{m}{s^2} t_{altmax} * t_{altmax} + \frac{1}{2} * (-10 \frac{m}{s^2}) * t_{altmax}^2$$

$$2.8 m = 10 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}^2 - 5 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}^2$$

$$2.8 m = 5 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}^2$$

$$t_{altmax}^2 = 0.56 s^2$$

$$t_{altmax} = 0.75 s$$

Y si reemplazo en $V_0 = 10 \frac{m}{s^2} * t_{altmax}$

$$V_0 = 10 \frac{m}{s^2} * 0.75 s$$

$$V_0 = 7.5 \frac{m}{s}$$

Respuesta: La pelota parte con una velocidad de $7.5 \frac{m}{s}$ y tarda 0.75 segundos en llegar a la altura máxima luego de recorrer 2.8 metros

EJERCICIO N° 33

Un estudiante quiere lanzar una pelota por encima de una casa de 40m de altura situada a 20m de distancia. Para ello lanza la pelota con una velocidad de 40m/s y un ángulo de 45°. La pelota abandona la mano del estudiante a una altura de 1.2m del suelo. Pasará por encima del edificio? En caso afirmativo, a qué altura por encima del edificio lo hará? En caso negativo, en qué punto choca la pelota con el edificio.

Solución

Tenemos los valores

$$X_o = 0m \quad X_{casa} = 20m$$

$$T_o = 0s$$

$$Y_o = 1.2m$$

$$V_o = 40 \frac{m}{s} \text{ a un angulo de } 45^\circ \text{ esto quiere decir que}$$

$$V_{ox} = 40 * \cos 45 = 20\sqrt{2} \frac{m}{s} \quad y \quad V_{oy} = 40 * \sin 45 = 20\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

$$a = g = -10 \frac{m}{s^2}$$

Sabemos que en X se mueve con MRU, es decir sin aceleracion, por lo tanto las formulas son

$$X(t) = X_o + V_o t \quad V_{ox} = V_x = \text{constante}$$

Si reemplazamos con los valores en la ecuacion de posicion, podemos ver cuanto tarda en llegar a la casa

$$\begin{aligned} X(tcasa) &= X_o + V_o (t \text{ casa}) \\ 20m &= 0m + 20\sqrt{2} \frac{m}{s} * (t \text{ casa}) \\ \frac{20m}{20\sqrt{2} \frac{m}{s}} &= t \text{ casa} \\ t \text{ casa} &= \frac{1}{\sqrt{2}}s \end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos cuanto tarda en llegar a la casa veamos las formulas para Y

Sabemos que en Y se mueve con MRUV entonces las formulas son

$$Y(t) = Y_o + V_o * t + \frac{1}{2} * a * t^2 \quad V(t) = V_o + a * t$$

si reemplazo por los valores y con el tiempo que tarda en llegar a la casa en la ecuacion de posicion, tendre a la altura con la que golpea a la casa

$$\begin{aligned} Y(tcasa) &= Y_o + V_o * (t \text{ casa}) + \frac{1}{2} * g * (t \text{ casa})^2 \\ Y(tcasa) &= 1.2m + 20\sqrt{2} \frac{m}{s} * \frac{1}{\sqrt{2}}s - 5 \frac{m}{seg^2} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ Y(tcasa) &= 1.2m + 20m - 2.5m \\ Y(tcasa) &= 18.7m \end{aligned}$$

Como esta distancia es menor a los 40m, podemos afirmar que golpea a la casa

Respuesta: La pelota golpeará la casa a los 18.7 metros de altura

EJERCICIO N° 34

Un movil debe recorrer una distancia de 200m. Parte del reposo y alcanza la max.velocidad permitida, $v_{max}=25m/s$, aplicando una aceleracion a , constante, durante 5 segundos. Mantiene esta velocidad durante 2 segundos y luego disminuye su velocidad hasta anularla con la desaceleracion a , constante. Permanece detenido 3 segundos y arranca nuevamente con una aceleracion de $2m/s^2$ hasta llegar a destino. Determine

- a) la aceleracion a para alcanzar la v_{max} ,
- b) la distancia recorrida hasta la detencion,
- c) el tiempo que tarda desde el inicio del movimiento hasta recorrer los 200m y si llega a alcanzar, o no, la v_{max} al momento de completar su recorrido

Solución

Sabemos que las formulas son

$$X(t) = X_0 + V_0 * (t - t_0) + \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2 \quad y \quad V(t) = V_0 + a * (t - t_0)$$

Vamos a separar el ejercicio en partes, llamaremos

- Instante0 = Cuando parte del reposo**
- Instante1 = Cuando llega a la velocidad máxima constante**
- Instante2 = Cuando comienza a detenerse**
- Instante3 = Cuando está detenido totalmente**
- Instante4 = Cuando vuelve a arrancar**
- Instante5 = Cuando llega a destino**

Tramo1 = Desde que parte del reposo hasta que llega a la velocidad max

Datos:

$$X_0 = X(\text{instante0}) = 0m$$

$$V_0 = V(\text{instante0}) = 0 \frac{m}{s}$$

$$V(\text{instante1}) = 25 \frac{m}{s}$$

$$t_0 = \text{instante0} = 0s$$

$$\text{Instante1} = 5seg$$

$$\text{Aceleracion entre inst 0 y 1} = a_{01} = a$$

Formulas

La de velocidad

$$V(\text{instante1}) = V(\text{instante0}) + a * (\text{instante1} - \text{instante0})$$

$$25 \frac{m}{s} = 0 \frac{m}{s} + a * (5s - 0s)$$

$$25 \frac{m}{s} = a * 5s$$

$$a = 5 m/s^2$$

La de posición

$$X(\text{instante1}) = X(\text{instante0}) + V(\text{instante0}) * (\text{instante1} - \text{instante0}) + \frac{1}{2} * a_{01} * (\text{instante1} - \text{instante0})^2$$

$$X(\text{instante1}) = 0m + 0 \frac{m}{s} * (5s - 0s) + \frac{1}{2} * 5 \frac{m}{s^2} * (5s - 0s)^2$$

$$X(\text{instante1}) = 62,5m$$

Tramo2 = Desde que llega a la velocidad constante hasta que comienza a detenerse

Datos

$$X_0 = X(\text{instante1}) = 62,5m$$

$$V_0 = V(\text{instante1}) = 25 \frac{m}{s}$$

$$V(\text{instante2}) = 25 \frac{m}{s}$$

$$t_0 = \text{instante1} = 5s$$

$$\text{Instante2} = 5s + 2s = 7s$$

$$\text{Aceleracion entre inst 0 y 1} = a_{12} = 0$$

Formulas

La de posición

$$X(\text{instante2}) = X(\text{instante1}) + V(\text{instante1}) * (\text{instante2} - \text{instante1}) + \frac{1}{2} * a_{01} * (\text{instante2} - \text{instante1})^2$$

$$X(\text{instante2}) = 62,5m + 25 \frac{m}{s} * (7s - 5s) + \frac{1}{2} * 0 \frac{m}{s^2} * (7s - 5s)^2$$

$$X(\text{instante2}) = 62,5m + 25 \frac{m}{s} * 2s$$

$$X(\text{instante2}) = 62,5m + 50m$$

$$X(\text{instante2}) = 112,5 m$$

Tramo3 = Desde que comienza a detenerse hasta que se detiene por completo

Datos

$$X_0 = X(\text{instante2}) = 112,5m$$

$$V_0 = V(\text{instante2}) = 25 \frac{m}{s}$$

$$V(\text{instante3}) = 0 \frac{m}{s}$$

$$t_0 = \text{instante2} = 7s$$

$$\text{Aceleracion entre inst 0 y 1} = a_{23} = -a = -5 m/s^2$$

Formulas

La de velocidad:

$$V(\text{instante3}) = V(\text{instante2}) - a * (\text{instante3} - 7s)$$

$$0 \frac{m}{s} = 25 \frac{m}{s} - 5 \frac{m}{s^2} * (\text{instante3} - 7s)$$

$$-25 \frac{m}{s} = -5 \frac{m}{s^2} * (\text{instante3} - 7s)$$

$$5s = \text{instante3} - 7s$$

$$\text{instante3} = 12s$$

La de posición en la que reemplazo con lo que saque de la de velocidad

$$X(\text{instante3}) = X(\text{instante2}) + V(\text{instante2}) * (\text{instante3} - \text{instante2}) + \frac{1}{2} * a_{23} * (\text{instante3} - \text{instante2})^2$$

$$X(\text{instante3}) = 112,5m + 25 \frac{m}{s} * (12s - 7s) + \frac{1}{2} * -5 \frac{m}{s^2} * (12s - 7s)^2$$

$$X(\text{instante3}) = 112,5m + 25 \frac{m}{s} * 5s + \frac{1}{2} * -5 \frac{m}{s^2} * 25s^2$$

$$X(\text{instante3}) = 112,5m + 125m - 62,5m$$

$$X(\text{instante3}) = 175m$$

Tramo4 = Desde que se detiene por completo hasta que vuelve a arrancar

Datos

$$X_o = X(\text{instante3}) = X(\text{instante4}) = 175m \text{ (porque no se mueve)}$$

$$V_o = V(\text{instante3}) = V(\text{instante4}) = 0 \frac{m}{s} \text{ (porque no se mueve)}$$

$$t_o = \text{instante3} = 12s$$

$$\text{instante4} = 12s + 3s = 15s$$

$$\text{Aceleracion entre inst 3 y 4} = a_{34} = 0 \text{ m/s}^2$$

Tramo5 = Desde que se vuelve a arrancar hasta que llega a destino

Datos

$$X_o = X(\text{instante4}) = 175m$$

$$X_f = X(\text{instante5}) = 200m$$

$$V_o = V(\text{instante4}) = 0 \frac{m}{s}$$

$$t_o = \text{instante4} = 15s$$

$$\text{Aceleracion entre inst 4 y 5} = a_{45} = -a = 2 \text{ m/s}^2$$

Formulas

La fórmula de posición

$$X(\text{instante5}) = X(\text{instante4}) + V(\text{instante4}) * (\text{instante5} - \text{instante4}) + \frac{1}{2} * a_{45} * (\text{instante5} - \text{instante4})^2$$

$$200m = 175m + 0 \frac{m}{s} * (\text{instante5} - 15s) + \frac{1}{2} * 2 \frac{m}{s^2} * (\text{instante5} - 15s)^2$$

$$200m = 175m + 1 \frac{m}{s} * (\text{instante5} - 15s)^2$$

$$25s = (\text{instante5} - 15s)^2$$

$$5s = \text{instante5} - 15s$$

$$\text{instante5} = 20s$$

La de velocidad

$$V(\text{instante5}) = V(\text{instante4}) + 2 \frac{m}{s^2} * (\text{instante5} - \text{instante4})$$

$$V(\text{instante5}) = \frac{0m}{s} + 2 \frac{m}{s^2} * (20s - 15s)$$

$$V(\text{instante5}) = \frac{0m}{s} + 2 \frac{m}{s^2} * 5s$$

$$V(\text{instante5}) = 10 \frac{m}{s}$$

Con todo esto ya calculamos todo lo pedido.

Respuesta:

a) la aceleracion a para alcanzar la v_{max} , $= a = 5 \text{ m/s}^2$

b) la distancia recorrida hasta la detencion $= X(\text{instante3}) = 175m$

c) El tiempo que tarda desde el inicio del movimiento hasta recorrer los $= \text{instante5} = 20s$

d) En el instante 5 su velocidad es menor a los $25 \frac{m}{s}$, por lo tanto no llega a alcanzar la v_{max} al momento de completar su recorrido

EJERCICIO N° 35

La suma de vector \vec{v} y vector $\vec{w} = a^2\vec{i} - 18\vec{j}$ es igual a la diferencia entre vector \vec{w} y vector \vec{u} . Determine el vector suma de los tres vectores si su modulo es 30

Solución

tenemos

$$\vec{v} = V1 i + V2 j \quad \vec{w} = a^2 i - 18 j \quad \vec{u} = U1 i + U2 j$$

La suma del vector \vec{v} y el \vec{w} quedaria

$$\vec{v} + \vec{w} = (V1 + a^2) i + (V2 - 18) j$$

La diferencia entre el vector \vec{w} y el \vec{u} quedaria

$$\vec{w} - \vec{u} = (a^2 - U1) i + (-18 - U2) j$$

Nos dice que la suma del vector \vec{v} y \vec{w} es igual a la resta del vector \vec{w} y \vec{u} , entonces

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= \vec{w} - \vec{u} \\ (V1 + a^2) i + (V2 - 18) j &= (a^2 - U1) i + (-18 - U2) j \end{aligned}$$

Entonces podemos decir que

$$\begin{aligned} V1 + a^2 &= a^2 - U1 & \wedge & & V2 - 18 &= -18 - U2 \\ V1 &= -U1 & \wedge & & V2 &= -U2 \end{aligned}$$

Con esto podemos decir que el vector \vec{v} es el opuesto del vector \vec{u}

$$\vec{v} = -\vec{u}$$

Hallemos ahora la suma de los tres vectores

$$\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = (V1 + a^2 + U1) i + (V2 - 18 + U2) j$$

Pero como $V1 = -U1$ y $V2 = -U2$

$$\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = (V1 + a^2 - V1) i + (V2 - 18 - V2) j$$

$$\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = a^2 i - 18 j$$

Calculemos ahora el modulo de este vector

$$|\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{(a^2)^2 + (-18)^2}$$

$$|\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}| = \sqrt{(a^2)^2 + 324}$$

Como nos decia que el modulo era 30

$$|\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}| = 30$$

$$\sqrt{(a^2)^2 + 324} = 30$$

$$(a^2)^2 + 324 = 30^2$$

$$(a^2)^2 + 324 = 900$$

$$(a^2)^2 = 900 - 324$$

$$(a^2)^2 = 576$$

$$a^2 = 24$$

Por lo tanto el vector suma

$$\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = a^2 i - 18 j$$

$$\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = 24 i - 18 j$$

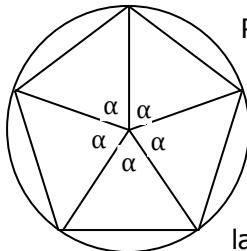
Respuesta: El vector suma es $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = 24 i - 18 j$

EJERCICIO N° 36

Calcule el perimetro del pentagono regular inscripto en la circunferencia de longitud 38π cm

Solución:

Un pentagono regular esta formado por 5 triangulos isosceles.



Podemos verificarlo de la siguiente manera, Para construir cualquier polígono regular en primer lugar se traza un círculo dentro del cual quedara inscripto el mismo.

Como los triangulos estan formados por los radios del círculo, podemos decir que estos lados son iguales entre si. Y como es regular todos los lados del poligono son iguales, por lo tanto todos los triangulos son isosceles e iguales entre si.

Ademas todos los angulos superiores sumados forman un giro, es decir 360° y como son iguales podemos decir que cada angulo α mide $360^\circ/5 = 72^\circ$

Sabemos que los angulos interiores de un triangulo suman 180° Como los triangulos son isosceles los 108° restantes ($180^\circ - 72^\circ$) se dividen de igual manera para los otros dos angulos quedandonos un triangulo isosceles con dos lados iguales al radio que forman un angulo de 72° y dos angulos de 54° entre ellos y la base. (lado del pentagono)

Como el perimetro de la circunferencia es 38π

$$\text{Longitud de la circunferencia} = 38\pi$$

$$2\pi R = 38\pi$$

$$R = 19$$

Utilizando teorema del seno, donde el radio se opone a uno de los angulos de 54° y el lado del pentágono al central de 72°

$$\frac{19}{\text{Sen}54^\circ} = \frac{\text{lado}}{\text{Sen}72^\circ}$$

$$23.485 \cong \frac{\text{lado}}{0.951}$$

$$\text{lado} \cong 22.33$$

El perimetro es $5 * \text{lado}$

$$\text{Perimetro} = 5 * \text{lado}$$

$$\text{Perimetro} = 5 * 22.33$$

$$\text{Perimetro} = 111.68$$

EJERCICIO N° 37

Un proyectil se lanza desde el suelo con velocidad inicial de $400 \frac{m}{s}$. Se desea conocer el angulo de elevacion que produce el maximo alcance

Solución

En el Tiro oblicuo debemos dividir el movimiento en X y en Y, como sabemos, en X se mueve con MRU y en Y con MRUV, si el piso no existiera, el movil se encontraria en movimiento eternamente para X, por lo tanto lo que condiciona el fin del movimiento es la formula de posicion en Y.

La formula de posicion para Y es la siguiente

$$Y(t) = Y_0 + V_{oy} * (t - t_0) + \frac{1}{2} g * (t - t_0)^2$$

Sabemos que

$\alpha = \text{angulo de elevación}$

$Y_0 = 0m$ (porque parte del suelo)

$Y(t_{final}) = 0m$ (porque llega al suelo nuevamente)

$g = -10 \frac{m}{s^2}$

$t_0 = 0s$

$V_{oy} = V_0 * \text{Sen}\alpha = 400 \frac{m}{s} * \text{Sen}\alpha$

Si reemplazo

$$Y(t_{final}) = Y_0 + V_{oy} * (t_{final} - t_0) + \frac{1}{2} g * (t_{final} - t_0)^2$$

$$0m = 0m + 400 * \text{Sen}\alpha * (t_{final} - 0s) + \frac{1}{2} * -10 m/s^2 * (t_{final} - 0s)^2$$

$$0m = 400 * Sen\alpha * t_{final} - 5 m/s^2 * (t_{final})^2$$

$$0m = t_{final} * (400 * Sen\alpha - 5 m/s^2 * t_{final})$$

Como lo que quiero sacar es el tiempo que tarda en caer al suelo, puedo decir que t_{final} es distinto de cero y los puedo pasar dividiendo

$$0 \frac{m}{s} = 400 * Sen\alpha - 5 m/s^2 * t_{final}$$

$$-400 * Sen\alpha = -5 m/s^2 * t_{final}$$

Osea que el tiempo que tarda en llegar al suelo es

$$t_{final} = \frac{(400 * Sen\alpha)}{5}$$

$$t_{final} = 80 * Sen\alpha$$

Ahora calculemos el alcance. El alcance es lo que se desplaza en x.
 La formula de posicion para X es la siguiente:

$$X(t) = X_0 + V_{ox} * (t - t_0)$$

La posicion inicial en X la suponemos 0, la velocidad sabemos que es $400 * \cos \alpha$ y el tiempo lo voy a reemplazar por el tiempo que tarda en llegar al piso ($t = 80 * \sin \alpha$), asi $X(t)$ pasa a ser el alcance maximo del tiro oblicuo ($X(t_{final}) = \text{alcance max}$)

$$X(t_{final}) = 0m + 400 * \cos\alpha * (t_{final} - 0s)$$

$$\text{Alcance max} = 400 * \cos\alpha * (80 * Sen\alpha)$$

$$\text{Alcance max} = 32000 * \cos\alpha * Sen\alpha$$

$$\text{Alcance max} = 16000 * 2 * \cos\alpha * Sen\alpha$$

Ahora por la identidad trigonometrica $Sen(2\alpha) = 2 * \cos\alpha * Sen\alpha$

$$\text{Alcance max} = 16000 * Sen(2\alpha)$$

Como el $Sen(2\alpha)$ es la variable, podemos decir que el alcance máximo será máximo, cuando lo sea. Como sabemos el Sen tiene como imagen el (-1;1) es decir que el valor máximo esta en 1, Entonces

$$Sen(2\alpha) = 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Respuesta: El alcance máximo se da a los 45° ($\frac{\pi}{4}$ rad)

EJERCICIO N° 38

15.2 es el modulo del vector proyeccion de $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j}$ sobre $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Determine el vector \vec{u} si sus componentes son positivas y $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es mayor que 0

Solución

Hallemos $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x^2 ; x) \cdot (4; 3) = 4x^2 + 3x$$

Ahora calculemos el vector proyeccion $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$.

$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Necesitamos calcular el $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Calulemos entonces la $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$

$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{4x^2 + 3x}{5} \cdot \frac{(4; 3)}{5}$$

$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{16x^2 + 12x}{25}; \frac{12x^2 + 9x}{25} \right)$$

Ahora nos dice que el modulo de la $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ es 15.2, entonces

$$|Proy_{\vec{v}}\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{16x^2 + 12x}{25}\right)^2 + \left(\frac{12x^2 + 9x}{25}\right)^2}$$

$$|Proy_{\vec{v}}\vec{u}| = \sqrt{\frac{256x^4 + 144x^2 + 384x^3}{625} + \frac{144x^4 + 81x^2 + 216x^3}{625}}$$

$$15,2 = \sqrt{\frac{256x^4 + 144x^2 + 384x^3 + 144x^4 + 81x^2 + 216x^3}{625}}$$

$$15,2 = \sqrt{\frac{400x^4 + 225x^2 + 600x^3}{625}}$$

$$15,2 = \frac{\sqrt{400x^4 + 225x^2 + 600x^3}}{\sqrt{625}}$$

$400x^4 + 225x^2 + 600x^3$ es un binomio cuadrado perfecto entonces

$$15,2 = \frac{\sqrt{(20x^2 + 15x)^2}}{25}$$

$$380 = 20x^2 + 15x$$

$$20x^2 + 15x - 380 = 0$$

Esta cuadratica tiene dos soluciones, $x = -4.75$ y $x = 4$ pero al reemplazar en U.V

Si $x = -4.75$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 * (-4.75)^2 + 3 * (-4.75) = -\frac{209}{2}$$

Como el producto escalar es negativo no es solución

Si $x = 4$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 * (4)^2 + 3 * (4) = 76$$

Como el producto escalar es Positivo es solución, por lo tanto, $\vec{u} = x^2\vec{i} + x\vec{j}$ resulta

$$\vec{u} = 4^2\vec{i} + 4\vec{j} = 16\vec{i} + 4\vec{j}$$

Respuesta: $\vec{u} = 16\vec{i} + 4\vec{j}$

EJERCICIO N° 39

Dados los vectores $A=(2,-4)$ $B=(3,2)$ y $C=(1,2)$. Determine, si existen, los escalares α y β de modo que vector $A=\alpha * B + \beta * C$

Solución

Nos pide es ver si existen α y β que cumplan

$$A = \alpha * B + \beta * C$$

Reemplazo con los vectores

$$(2; -4) = \alpha * (3; 2) + \beta * (1; 2)$$

Realizo distributiva

$$(2; -4) = (3\alpha ; 2\alpha) + (\beta ; 2\beta)$$

Sumo componente a componente

$$(2; -4) = (3\alpha + \beta ; 2\alpha + 2\beta)$$

Igualo las componentes X y las Y de la derecha con las de la izquierda de la igualdad

$$3\alpha + \beta = 2 \quad \wedge \quad 2\alpha + 2\beta = -4$$

De la primera despejo β

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 2 \\ \beta &= 2 - 3\alpha \end{aligned}$$

Reemplazo con $\beta = 2 - 3\alpha$ en la otra

$$2\alpha + 2 * (2 - 3\alpha) = -4$$

$$2\alpha + 4 - 6\alpha = -4$$

$$4 - 4\alpha = -4$$

$$-4\alpha = -8$$

$$\alpha = 2$$

Pero como $\beta = 2 - 3\alpha$

$$\beta = 2 - 3\alpha$$

$$\beta = 2 - 3 * 2 = -4$$

Podemos ver que esto verifica

$$A = \alpha * B + \beta * C$$

$$(2; -4) = 2 * (3; 2) + -4 * (1; 2)$$

$$(2; -4) = (6; 4) + (-4; -8)$$

$$(2; -4) = (2; -4)$$

Respuesta: Si $\alpha = 2$ y $\beta = -4$, se cumple que $A = \alpha * B + \beta * C$

EJERCICIO N° 40

Si se sabe que $g \circ f(2) = -378$ con: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = x^2 + cx$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2 + 2$

Determine el conjunto solución de la función $g \circ f(x) = -918$

Luego obtenga el polinomio resto de la división de $g \circ f(x)$ con el divisor $x^2 - x + 5$

Solución:

Sabemos que:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$g \circ f(x) = g(x^2 + 2)$$

$$g \circ f(x) = (x^2 + 2)^2 + c * (x^2 + 2)$$

Y también que:

$$g \circ f(2) = -378$$

$$(2^2 + 2)^2 + c * (2^2 + 2) = -378$$

$$(6)^2 + c * (6) = -378$$

$$36 + 6c = -378$$

$$6c = -414$$

$$c = -69$$

Entonces:

$$g \circ f(x) = (x^2 + 2)^2 - 69 * (x^2 + 2)$$

Ahora debemos hallar:

$$g \circ f(x) = -918$$

$$g(f(x)) = -918$$

$$f(x)^2 - 69f(x) = -918$$

$$f(x)^2 - 69f(x) + 918 = 0$$

Esta cuadrática tiene raíces en $f(x) = 51$ y $f(x) = 18$, entonces:

$f(x) = 51$	v	$f(x) = 18$
$x^2 + 2 = 51$	v	$x^2 + 2 = 18$
$x^2 = 49$	v	$x^2 = 16$
$x = \pm 7$	v	$x = \pm 4$

O sea que el conjunto solución queda:

$$S = \{-7; -4; 4; 7\}$$

Sabíamos que:

$$g \circ f(x) = (x^2 + 2)^2 - 69 * (x^2 + 2)$$

$$g \circ f(x) = x^4 + 4x^2 + 4 - 69x^2 - 138$$

$$g \circ f(x) = x^4 - 65x^2 - 134$$

Respuesta: Hay una única solución en $x = 1$

EJERCICIO N° 42

Dados los vectores $V1 = (4, -2a)$ y $V2 = (3b, 4)$. Determine a y b para que los vectores dados sean ortogonales y $a + b = 4$

Solución:

$$V1 = (4; -2a)$$

$$V2 = (3b; 4)$$

Para que dos vectores sean ortogonales su producto escalar debe ser 0

$$\begin{aligned} V1 * V2 &= 0 \\ (4; -2a) * (3b; 4) &= 0 \\ 4 * 3b - 2a * 4 &= 0 \\ 12b - 8a &= 0 \\ a &= \frac{3}{2}b \end{aligned}$$

Y como por consigna decía que $a + b = 4$, si reemplazo con $a = \frac{3}{2}b$

$$a + b = 4$$

$$\frac{3}{2}b + b = 4$$

$$\frac{5}{2}b = 4$$

$$b = \frac{8}{5}$$

Reemplazo con $a = \frac{3}{2}b$

$$a = \frac{3}{2} * \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$$

Respuesta: $a = \frac{12}{5}$ y $b = \frac{8}{5}$

EJERCICIO N° 43

Resuelva la siguiente ecuación en radianes y expresando todas las soluciones posibles : $\text{Sen}^2x = 2\text{Sen}x + 3$

Solución

$$\text{Sen}^2 x = 2\text{Sen} x + 3$$

$$\text{Sen}^2 x - 2\text{Sen} x - 3 = 0$$

Realizo el cambio de variable $\text{Sen} x = J$

$$J^2 - 2J - 3 = 0$$

Esta cuadrática tiene ceros en $J = -1$ y $J = 3$ por lo tanto

$$\text{Sen} x = -1 \vee \text{Sen} x = 3$$

El seno de x no puede dar nunca 3 (por tener imagen entre -1 y 1) y da -1 en $\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi \dots$ e infinitas soluciones que puestas de manera genérica resulta

$$X = \left(\frac{3}{2} + 2K\right) \pi \text{ con } K \in \mathbb{Z}$$

Respuesta: $X = \left(\frac{3}{2} + 2K\right) \pi \text{ con } K \in \mathbb{Z}$

EJERCICIO N° 44

Resuelva la siguiente ecuación en radianes y expresando todas las soluciones posibles en $[0; 2\pi]$

$$\text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right) + \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right) = 1$$

Solucion

$$\text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right) + \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right) = 1$$

Elevo al cuadrado de ambos lados y después verifico soluciones

$$\left(\text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right) + \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right)\right)^2 = 1^2$$

$$\text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right)^2 + \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right)^2 + 2 * \text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right) * \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right) = 1^2$$

Como $\text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \text{Cos}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 1$

$$1 + 2 * \text{SEN}\left(\frac{1}{2} X\right) * \text{COS}\left(\frac{1}{2} X\right) = 1$$

$$2 * \text{SEN} \left(\frac{1}{2} X \right) * \text{COS} \left(\frac{1}{2} X \right) = 0$$

Como $2\text{Sen}(x) * \text{Cos}(x) = \text{Sen}(2x)$

$$\text{SEN} \left(2 * \frac{1}{2} X \right) = 0$$

$$\text{SEN}(X) = 0$$

El sen da cero en los enteros de π , pero como al principio elevamos al cuadrado, debemos verificar soluciones, de esta manera podemos ver que:

En $x = 0$ y $x = \pi$ da 1 VERIFICA

$$\text{SEN} \left(\frac{1}{2} * 0 \right) + \text{COS} \left(\frac{1}{2} * 0 \right) = 1$$

$$\text{SEN} \left(\frac{1}{2} * 1 \right) + \text{COS} \left(\frac{1}{2} * 1 \right) = 1$$

En x igual 2π NO VERIFICA

$$\text{SEN} \left(\frac{1}{2} * 2\pi \right) + \text{COS} \left(\frac{1}{2} * 2\pi \right) = -1$$

Respuesta: $x = 0 \vee x = \pi$

EJERCICIO N° 45

Dadas las funciones: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / g(x) = e^{x-3}$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \sqrt[3]{x-1}$
Obtenga $g \circ h^{-1}(1)$

Solución:

Hallemos primero $h^{-1}(x)$

Despejamos x

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt[3]{x-1} \\ h(x)^3 &= x-1 \\ h(x)^3 + 1 &= x \end{aligned}$$

Reemplazamos x por $h^{-1}(x)$ y $h(x)$ por x

$$x^3 + 1 = h^{-1}(x)$$

Por lo tanto $h(x)^{-1}(x) = x^3 + 1$

hallemos $g \circ h^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} g \circ h^{-1}(x) &= g(h^{-1}(x)) \\ g \circ h^{-1}(x) &= e^{(x^3+1)-3} \\ g \circ h^{-1}(x) &= e^{x^3-2} \end{aligned}$$

Ahora hallemos $g \circ h^{-1}(1)$

$$\begin{aligned} g \circ h^{-1}(1) &= e^{1^3-2} \\ g \circ h^{-1}(1) &= e^{-1} \\ g \circ h^{-1}(1) &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Respuesta: $g \circ h^{-1}(1) = \frac{1}{e}$

EJERCICIO N° 46

Se dispara un proyectil con vector $V_0 = (40, 30) \frac{m}{s}$, determine: el alcance y verifique que el proyectil supera un muro de altura de 20m ubicado a una distancia horizontal de 200m del sitio de disparo.

Solución:

Separemos los valores para y y para x

Para X

$$X_0 = 0m \quad V_{0x} = 40 \frac{m}{s} \quad t_{0x} = 0s$$

Osea que la ecuacion de movimiento queda

$$X(t) = X_0 + V_{0x} * (t - t_{0x})$$

$$Xt = 40 \frac{m}{s} * t$$

Para Y

$$Y_0 = 0m \quad V_{0y} = 30 \frac{m}{s} \quad t_{0y} = 0s \quad g = -10 \frac{m}{s^2}$$

Osea que la ecuacion de movimiento queda

$$Y(t) = Y_0 + V_{0y} * (t - t_{0y}) + \frac{1}{2} * g * (t - t_{0y})^2$$

$$Y(t) = 30 \frac{m}{s} t - 5 \frac{m}{s^2} * t^2$$

Y la de velocidad en funcion del tiempo

$$V(t) = V_{0y} + g * (t - t_{0y})$$

$$V(t) = 30 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} * t$$

Ahora ya sabemos todas las ecuaciones, Como en todo tiro oblicuo el alcance maximo se da cuando el proyectil vuelve al piso, es decir cuando $Y(t) = 0m$ (con t distinto de cero), entonces teniamos

$$Y(t) = 30 \frac{m}{s} t - 5 \frac{m}{s^2} * t^2$$

$$0 m = 30 \frac{m}{s} t - 5 \frac{m}{s^2} * t^2$$

Las soluciones de esta cuadratica son $t = 0\text{seg}$ y $t = 6 \text{ seg}$, y como t es distinto de cero, el alcance maximo se da a los 6 segundos.

Hallemos donde esta en x a los 6 segundos

$$X(6s) = 40 \frac{m}{s} * 6 s$$

$$X(6 s) = \text{alcance maximo} = 240m$$

Ahora tenemos que comprobar que no se choca con la pared de 20m ubicada a 200m de donde salio el disparo

veamos cuanto tarda en llegar a los 200m de distancia ($X(t) = 200m$)

$$X(t) = 40 \frac{m}{s} * t$$

$$200m = \frac{40m}{s} * t$$

$$t = 5 s$$

Osea que a los 5 segundos llego a la altura de la pared

Veamos a que altura ($Y(t)$) se hallaba ($Y(5s)$)

$$Y(5 s) = 30 m/s * 5 s - 5 m/s^2 (5s)^2$$

$$Y(5 s) = 150m - 125m$$

$$Y(5 s) = 25 m$$

Respuesta: El proyectil tiene un alcance máximo de 240m y pasa 5m por sobre la pared (a 25m del piso)

EJERCICIO N° 47

Sea α perteneciente a $[0; 2\pi)$ una constante real, determínala si se sabe que la ecuación polinómica de segundo grado $3x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)x + \frac{1}{4} = 0$ tiene única solución

Solución

Cuando nos encontramos con una ecuación cuadrática para resolverla, usamos la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo que se encuentra dentro de la raíz $(b^2 - 4ac)$ se llama discriminante

Si el determinante:

- a) Es mayor a cero la ecuación tiene dos soluciones reales
- b) Es cero tiene una única solución real
- c) Es menor a cero no tiene soluciones reales

En este caso queremos que tenga una sola solución real, por lo tanto debemos igualar el discriminante a cero

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (\operatorname{Tg}\alpha)^2 - 4 * 3 * \frac{1}{4} &= 0 \\ (\operatorname{Tg}\alpha)^2 - 3 &= 0 \\ (\operatorname{Tg}\alpha)^2 &= 3 \\ |\operatorname{Tg}\alpha| &= \sqrt{3} \\ \operatorname{Tg}\alpha &= \sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{Tg}\alpha = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

La tangente da $\sqrt{3}$ en $\alpha = \pi/3$ pero como queremos hallar todos los valores positivos y negativos de $\sqrt{3}$ debemos pasarlo a el segundo, tercer y cuarto cuadrante

$$\begin{aligned} 2 \text{ cuadrante} &= n - 1 \text{ cuadrante} = n - n / 3 = 2/3 n \\ 3 \text{ cuadrante} &= n + 1 \text{ cuadrante} = n + n / 3 = 4/3 n \\ 4 \text{ cuadrante} &= 2n - 1 \text{ cuadrante} = 2n - n / 3 = 5/3 n \end{aligned}$$

Respuesta: Los valores de α que hacen que la ecuación tenga única solución son

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \text{ y } \frac{5}{3}\pi$$

EJERCICIO N° 48

Desde un acantilado cuya altura sobre el nivel del mar es de 60m, se lanza un cuerpo horizontalmente con velocidad $V_0 = (20; 0)$ m/s.

Determine:

- El tiempo que tarda en llegar al agua
- El Alcance máximo en el instante anterior
- El instante que se cumple que $|V_x| = |V_y|$

Solución

Escribamos los datos

$$\begin{aligned} X_0 &= 0m \\ Y_0 &= 60m \\ V_{0x} &= 20 \frac{m}{s} \\ V_{0y} &= 0 \frac{m}{s} \\ g &= -10 \frac{m}{s^2} \\ t_0 &= 0s \end{aligned}$$

Planteamos las ecuaciones de movimiento

Para X

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + V_{0x} * t \\ X(t) &= 0m + 20 \frac{m}{s} * t \\ X(t) &= 20 \frac{m}{s} * t \end{aligned}$$

Para Y

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + V_{0y} * t + \frac{1}{2} g * t^2 \\ Y(t) &= 60m + 0 \frac{m}{s} * t + \frac{1}{2} * 10 \frac{m}{s^2} * t^2 \\ Y(t) &= 60m - 5 \frac{m}{s^2} * t^2 \end{aligned}$$

Nos pide saber cuánto tarda en llegar al agua, o sea a la altura $y(\text{tagua}) = 0$

$$\begin{aligned}
 Y(\text{tagua}) &= 60\text{m} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tagua}^2 \\
 0 &= 60\text{m} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tagua}^2 \\
 -60\text{m} &= -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * \text{tagua}^2 \\
 12 \text{ s}^2 &= \text{tagua}^2 \\
 \text{tagua} &= \sqrt{12\text{s}} \\
 \text{tagua} &\cong 3.5\text{s}
 \end{aligned}$$

El tiempo que tarda en llegar al agua es aproximadamente 3.5 seg

Calculemos las velocidades

$$\begin{aligned}
 \text{Velocidad } X &= \text{Constante} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \text{Velocidad } Y(\text{tagua}) &= V_{oy} + g\text{tagua} \\
 \text{Velocidad } Y(\text{tagua}) &= 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\text{tagua} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 \text{Velocidad } Y(\text{tagua}) &= -10\text{tagua} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 \text{Velocidad } Y(3,5\text{s}) &= -10 * 3,5\text{s} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 \text{Velocidad } Y(3,5\text{s}) &= -35 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Que de negativo está bien, porque está dirigiéndose hacia abajo

La velocidad al tocar el agua es $(20; -35) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

El alcance maximo ocurre a los 3.5 seg, osea cuando toca el agua, si reemplazamos en la ecuacion de posicion en x

$$\begin{aligned}
 X(3,5) &= 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 3,5\text{s} \\
 X(3,5) &= 70\text{m}
 \end{aligned}$$

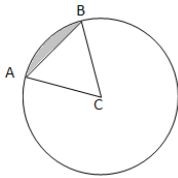
Como sabemos que la velocidad en x es constante y es igual a 20 hallaremos el instante en que el módulo de la velocidad en $y = 20 \text{ m/s}$

$$\begin{aligned}
 |\text{Velocidad } Y(t)| &= \left| -10t \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right| \\
 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} &= 10 t \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 t &= 2\text{s}
 \end{aligned}$$

Los módulos de las velocidades son iguales a los 2 seg

Respuesta: El móvil tarda 3,5 segundos en llegar al agua con un alcance máximo de 70m. Los módulos de las velocidades son iguales a los 2 segundos.

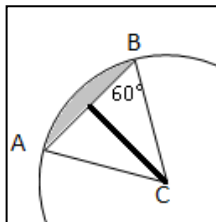
EJERCICIO N° 49



El área del triángulo equilátero ABC es $36\sqrt{3}cm^2$ calcule la longitud de la circunferencia de centro C y luego la region sombreada.

Solución

Sabemos que el triángulo ABC es equilátero, por lo tanto, todos sus lados son iguales y sus ángulos también siendo cada uno de 60° (180° de ángulo interior / 3 ángulos).



Si dividimos el triángulo en dos triángulos rectángulos dibujando su altura podemos ver que la misma la podemos sacar con funciones trigonométricas, ya que la altura sería el lado opuesto, la hipotenusa el lado del triángulo y el ángulo 60°

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{Altura}}{\text{lado}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{lado} = \text{Altura}$$

Sabemos que el área del triángulo es $\frac{\text{base} * \text{altura}}{2}$ Pero la base del triángulo mide lo mismo que el lado, porque es equilátero entonces

$$\frac{\text{lado} * \text{altura}}{2} = \text{Area}$$

$$\frac{\text{lado} * \frac{\sqrt{3}}{2} \text{lado}}{2} = 36\sqrt{3}cm^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{lado}^2 = 72\sqrt{3}cm^2$$

$$\text{lado}^2 = 144cm^2$$

$$\text{lado} = 12cm$$

Como podemos ver en el dibujo el lado corresponde al radio de la circunferencia. Por lo tanto la longitud de esta será

$$\text{Longitud de circ} = 2\pi \text{ radio}$$

$$\text{Longitud de circ} = 2\pi * 12cm$$

$$\text{Longitud de circ} = 24\pi cm$$

El area de la region sombreada es el area del sector circular de angulo 60° (porque el triangulo tenia todos sus angulos de 60°) y radio igual al lado del triangulo menos el área del triangulo

$$\text{Area somb} = \text{area del sector circular} - \text{area del triangulo}$$

$$\text{Area somb} = \frac{\pi \text{radio}^2 * 60^\circ}{360^\circ} - 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Area somb} = \frac{\pi (12\text{cm})^2 * 60^\circ}{360^\circ} - 36\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{Area somb} = \frac{\pi 144 \text{ cm}^2}{60} - 36\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{Area somb} = (24\pi - 36\sqrt{3})\text{cm}^2$$

Respuesta: La longitud de la circunferencia es de $24\pi\text{cm}$ y el área sombreada de $(24\pi - 36\sqrt{3})\text{cm}^2$

EJERCICIO N° 50

Dadas $g \circ f: \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R} / g \circ f(x) = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$ y $g: \mathbb{D}g \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \ln x$.

Defina la funcion $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ **indicando el dominio y conjunto imagen de esta ultima**

Solución

$$g \circ f(x) = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$$

Sabemos que la resta de logaritmos es el log de la division de los argumentos.

$$g \circ f(x) = \ln \frac{(x+1)}{(2x-3)}$$

Como sabemos, $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$\ln \left(\frac{x+1}{2x-3} \right) = \ln(f(x))$$

Los ln se cancelan

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$$

Ahora que conocemos $g(x)$ y $f(x)$ hallaremos sus inversas, como ambas son inyectivas no tendremos problemas

Primero la inversa de $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x) \\ e^{g(x)} &= e^{\ln(x)} \\ e^{g(x)} &= x \\ e^x &= g^{-1}(x) \end{aligned}$$

La función $e^x = g^{-1}(x)$ tiene dominio los reales y como imagen los reales positivos.

$$g^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ / g^{-1}(x) = e^x$$

Ahora la inversa de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$$

$$f(x) * (2x - 3) = (x + 1)$$

$$2f(x)x - 3f(x) = x + 1$$

$$2f(x)x - x = 3f(x) + 1$$

$$x(2f(x) - 1) = 3f(x) + 1$$

$$x = \frac{3f(x) + 1}{2f(x) - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{2x - 1}$$

$f^{-1}(x)$ es una función homográfica de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$, por lo tanto, tendrá asíntota horizontal en a/b ($3/2$), por lo cual la extraemos de la imagen, y asíntota vertical en $-d/c$ ($1/2$), por lo cual lo extraemos del dominio.

$$f^{-1} : \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbf{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} / f(x)^{-1} = \frac{3x + 1}{2x - 1}$$

Ahora debemos hallar $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ f^{-1}(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\ g^{-1} \circ f^{-1}(x) &= g^{-1}\left(\frac{3x + 1}{2x - 1}\right) \\ g^{-1} \circ f^{-1}(x) &= e^{\left(\frac{3x + 1}{2x - 1}\right)} \end{aligned}$$

Como en toda compuesta el dominio es el de la función de adentro,

$$D_{g^{-1} \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

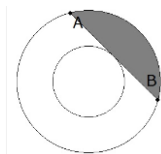
Y la imagen es la de la función de afuera

$$I_{g^{-1} \circ f^{-1}} = I_{f^{-1}} = \mathbf{R}^+$$

Respuesta: $g^{-1} \circ f^{-1}: R - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow R^+ / g^{-1} \circ f^{-1}(x) = e^{\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)}$

EJERCICIO N° 51

Sean dos circunferencias concéntricas de 56π cm y 70π cm de longitud. Determine el área de la región sombreada.



Solución

Llamemos

$r =$ radio de la circunferencia pequeña

$R =$ radio de la circunferencia grande

La longitud de la circunferencia pequeña es 56π cm entonces

$$\text{Longitud de circunferencia pequeña} = 2 * \pi * r$$

$$56\pi \text{ cm} = 2 * \pi * r$$

$$56 \text{ cm} = 2 * r$$

$$r = 28 \text{ cm}$$

La longitud de la circunferencia grande es 70π cm entonces

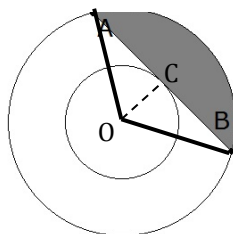
$$\text{Longitud de circunferencia grande} = 2 * \pi * R$$

$$70\pi \text{ cm} = 2 * \pi * R$$

$$70 \text{ cm} = 2 * R$$

$$R = 35 \text{ cm}$$

Ahora dibujemos un triángulo de esta manera



Como podemos ver, los dos triángulos formados por la línea gruesa y la punteada son iguales, rectángulos, y tienen un cateto igual al radio chico (28 cm) y la hipotenusa igual al radio grande (35 cm), (El OCB y el ACO)

Calculemos cuánto mide la base (AC y CB) de estos triángulos rectángulos

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{Cateto}^2$$

$$R^2 = r^2 + \text{Base}^2$$

$$(35 \text{ cm})^2 = (28 \text{ cm})^2 + \text{base}^2$$

$$\text{base} = \sqrt{1225 \text{ cm}^2 - 784 \text{ cm}^2}$$

$$\text{base} = 21 \text{ cm}$$

El segmento AB mide como la suma de las dos bases, entonces

$$AB = 2 * 21 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$$

Ahora calcule el ángulo AOB, por teorema del coseno aplicado al triángulo formado por AB y las dos líneas gruesas (El AOB) puedo decir que

$$\begin{aligned} AB^2 &= OB^2 + AO^2 - 2 * OB * AO * \cos(AOB) \\ (42 \text{ cm})^2 &= R^2 + R^2 - 2 * R * R * \cos(AOB) \\ 1764 \text{ cm}^2 &= (35 \text{ cm})^2 + (35 \text{ cm})^2 - 2 * 35 \text{ cm} * 35 \text{ cm} * \cos(AOB) \\ 1764 \text{ cm}^2 &= 1225 \text{ cm}^2 + 1225 \text{ cm}^2 - 2450 \text{ cm}^2 * \cos(AOB) \\ -686 \text{ cm}^2 &= -2450 \text{ cm}^2 * \cos(AOB) \\ \cos(AOB) &= \frac{7}{25} \\ AOB &= 73.74^\circ \end{aligned}$$

Ahora que conozco el ángulo AOB puedo calcular el área sombreada como la resta entre el sector circular de ángulo AOB y el triángulo AOB que tiene como base a AB y como altura a r

Area sombreada = sector circular de angulo AOB - Area del triangulo AOB

$$Area \text{ sombreada} = \frac{\pi * R^2 * AOB}{360^\circ} - \frac{AB * r}{2}$$

$$Area \text{ sombreada} = \frac{\pi * (35 \text{ cm})^2 * 73.74^\circ}{360^\circ} - \frac{42 \text{ cm} * 28 \text{ cm}}{2}$$

$$Area \text{ sombreada} = \frac{\pi * 1225 \text{ cm}^2 * 73.74^\circ}{360^\circ} - \frac{1176 \text{ cm}^2}{2}$$

$$Area \text{ sombreada} = 250.9\pi - 588 \text{ cm}^2$$

$$Area \text{ sombreada} \cong 200 \text{ cm}^2$$

Respuesta: El área sombreada es aproximadamente de 200 cm²

EJERCICIO N° 52

Sean las funciones: $h(x) = \frac{1}{2} \text{tg}(x)$ $g(x) = \text{Sen}(2x)$

Hallar x, tal que $h(x) = g(x)$ y $x \in [0; 2\pi)$

Solución:

Nos piden que $h(x) = g(x)$

$$\frac{1}{2} \text{tg}(x) = \text{Sen}(2x)$$

Utilizando las identidades trigonometricas: $\text{Sen}(2x) = 2 \text{Sen}(x)\text{Cos}(x)$ y $\text{tg} = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$

$$\frac{1}{2} \frac{\text{Sen}(x)}{\text{Cos}(x)} = 2 \text{Sen}(x) \text{Cos}(x)$$

$$\frac{\text{Sen}(x)}{\text{Cos}(x)} = 4 \text{Sen}(x) \text{Cos}(x)$$

$$\text{Sen}(x) = 4 \text{Sen}(x)\text{Cos}(x)^2$$

Utilizando la identidad $\text{Cos}(x)^2 = 1 - \text{Sen}(x)^2$

$$\text{Sen}(x) = 4 \text{Sen}(x)(1 - \text{Sen}(x)^2)$$

$$\text{Sen}(x) = 4 \text{Sen}(x) - 4\text{Sen}(x)^3$$

$$0 = 4 \text{Sen}(x) - 4\text{Sen}(x)^3 - \text{Sen}(x)$$

$$0 = 3 \text{Sen}(x) - 4\text{Sen}(x)^3$$

$$0 = \text{Sen}(x)(3 - 4\text{Sen}(x)^2)$$

Para que una multiplicacion de 0, uno de los dos terminos debe ser cero, entonces:

$$\text{Sen}(x) = 0 \quad \vee \quad 3 - 4\text{Sen}(x)^2 = 0$$

$$(x = 0 \vee x = \pi) \quad \vee \quad 4\text{Sen}(x)^2 = 3$$

$$(x = 0 \vee x = \pi) \quad \vee \quad \text{Sen}(x)^2 = \frac{3}{4}$$

$$(x = 0 \vee x = \pi) \quad \vee \quad \sqrt{\text{Sen}(x)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$(x = 0 \vee x = \pi) \quad \vee \quad |\text{Sen}(x)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(x = 0 \vee x = \pi) \quad \vee \quad \left[\text{Sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \text{Sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$(x = 0 \vee x = \pi) \quad \vee \quad \left[\left(x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2}{3}\pi \right) \vee \left(x = \frac{4}{3}\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi \right) \right]$$

$$S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\}$$

Respuesta: $S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\}$

EJERCICIO N° 53

Dado el vector $\vec{a} = K\vec{b}$, tal que la intensidad del vector $\vec{b} = (b_1; b_1 + 1)$ con $b_1 < 0$ es $|\vec{b}| = 5$ y el vector \vec{c} tal que el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{c} = 60$ y el producto escalar $\vec{b} \cdot \vec{c} = 30$, determine $K \in \mathbb{R} \wedge K \neq 0$ y los vectores \vec{a} y \vec{b}

Solución:

Otra forma de escribir el producto escalar es:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 60$$

$$|\vec{a}| * |\vec{c}| * \text{Cos}\alpha = 60$$

$$|\vec{c}| * \text{Cos}\alpha = \frac{60}{|\vec{a}|}$$

También:

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 30$$

$$|\vec{b}| * |\vec{c}| * \text{Cos}\alpha = 30$$

$$|\vec{c}| * \text{Cos}\alpha = \frac{30}{|\vec{b}|}$$

Sabemos que $\vec{a} = K\vec{b}$ o sea que tienen la misma dirección, por lo tanto el ángulo que forman con \vec{c} (a) es el mismo entre los dos. Entonces si igualamos los $|\vec{c}| * \text{Cos}\alpha$

$$\frac{60}{|\vec{a}|} = \frac{30}{|\vec{b}|}$$

Pero como:

$$\vec{a} = K\vec{b}$$

$$|\vec{a}| = K|\vec{b}|$$

Reemplazo:

$$\frac{60}{K|\vec{b}|} = \frac{30}{|\vec{b}|}$$

$$60 = 30K$$

$$K = 2$$

Por otro lado sabemos que:

$$|\vec{b}| = 5$$

$$\sqrt{b_1^2 + (b_1 + 1)^2} = 5$$

$$b_1^2 + b_1^2 + 2b_1 + 1 = 25$$

$$2b_1^2 + 2b_1 - 24 = 0$$

Las raíces de esta cuadrática son $b_1=3$ y $b_1 = -4$ pero como nos decían que $b_1 < 0$, $b_1 = -4$.

Reemplazo en \vec{a} y \vec{b}

$$\vec{b} = (-4; -4 + 1) = (-4; -3)$$

$$\vec{a} = K\vec{b} = 2 * (-4; -3) = (-8; -6)$$

Respuesta: $K = 2$ y los vectores $\vec{a} = (-8; -6)$ \wedge $\vec{b} = (-4; -3)$

EJERCICIO N° 54

Determine el conjunto solución de la ecuación con $x \in [0; 2\pi)$

$$2 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{cos}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

Solución:

Tenemos:

$$2 \operatorname{Sen}^3 x - \operatorname{Cos}^2 x - 5 \operatorname{Sen} x + 3 = 0$$

Reemplazo con la identidad $\operatorname{Cos}^2 x = 1 - \operatorname{Sen}^2 x$

$$2 \operatorname{Sen}^3 x - (1 - \operatorname{Sen}^2 x) - 5 \operatorname{Sen} x + 3 = 0$$

$$2 \operatorname{Sen}^3 x - 1 + \operatorname{Sen}^2 x - 5 \operatorname{Sen} x + 3 = 0$$

Hago el cambio de variable $\operatorname{Sen} x = Z$

$$2 Z^3 - 1 + Z^2 - 5 Z + 3 = 0$$

$$2 Z^3 + Z^2 - 5 Z + 2 = 0$$

Por gauss podemos determinar que las posibles raíces de $p(X)$ están dadas por las diferentes combinaciones de los divisores del Término independiente sobre los divisores de Coeficiente principal. Entonces:

$$DTind = \pm 1; \pm 2$$

$$DCoef princ = \pm 1; \pm 2$$

O sea que las posibles raíces:

$$Posibles raices = \frac{DTind}{DCoef} princ = \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 2$$

Por teorema del resto puedo decir que:

$$p(Raiz) = 0$$

Entonces voy probando:

$$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 5 * -1 + 2 = 6$$

$$p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5 * 1 + 2 = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 * -\frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 * \frac{1}{2} + 2 = 0$$

$$p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5 * -2 + 2 = 0$$

O sea que ya encontré las tres raíces, el polinomio lo puedo escribir como:

$$(Z - Raiz)(Z - Raiz)(Z - Raiz) = 0$$

$$(Z - 1)\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z + 2) = 0$$

Vuelvo a hacer el cambio de variable $senx = Z$

$$(senx - 1)\left(senx - \frac{1}{2}\right)(senx + 2) = 0$$

Una multiplicación es cero cuando uno de ellos es cero, entonces:

$$senx - 1 = 0 \quad \vee \quad senx - \frac{1}{2} = 0 \quad \vee \quad senx + 2 = 0$$

$$senx = 1 \quad \vee \quad senx = \frac{1}{2} \quad \vee \quad senx = -2$$

El seno da 1 en $\frac{\pi}{2}$, nunca da -2 y da 1/2 en $\frac{\pi}{6}$ en el primer cuadrante (lo saco con la calculadora) y lo tengo que pasar el segundo Cuadrante donde el sen también es positivo con la formula $2do cuadrante = \pi - 1er cuadrante$ entonces:

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad \left(x = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6}\right) \quad \vee \quad \emptyset$$

Respuesta: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

EJERCICIO N° 55

Hallar dominio y función inversa de $f: Df \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = 3^{2x-1}$

Solución:

$$f: Df \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = 3^{2x-1}$$

$f(x)$ es una función exponencial, por lo tanto su dominio son todos los reales

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = 3^{2x-1}$$

Para hallar la inversa, en primer lugar despejo x

$$\begin{aligned} \log_3 f(x) &= \log_3 3^{2x-1} \\ \log_3 f(x) &= 2x + 1 \\ \log_3 f(x) - 1 &= 2x \\ \frac{\log_3 f(x) - 1}{2} &= x \end{aligned}$$

Luego de despejar x , debo reemplazar x con $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ con x

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x - 1}{2}$$

Determinaremos su dominio

Como es un logaritmo, su dominio será todas aquellas x mayores que cero. que si nos fijamos coincide con la imagen de la función original

$$Df^{-1} = \mathbb{R}^+$$

Respuesta: $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x - 1}{2}$

EJERCICIO N° 56

Sobre una embarcación actúan el sistema plano de fuerzas concurrentes formado por la fuerza motriz del barco $F_m(0;0) = (40; 90)N$, La fuerza de la corriente $F_c(0;0) = (|F_c|N; 0^\circ)$ y la fuerza del viento $F_v(0;0) = (10\sqrt{2}N; \alpha)$ con $\pi < \alpha < 3/2\pi$. La fuerza resultante en la embarcación es $R(0;0) = (60; 80)N$. Determine el módulo de la fuerza de la corriente y el ángulo de inclinación de la fuerza del viento.

Solución:

Expresemos todas las fuerzas en forma trigonométrica:

$$F_m(0; 0) = (40; 90)N$$

$$F_c(0; 0) = (|F_c|N; 0^\circ) = (|F_c| * \cos 0^\circ; |F_c| * \sin 0^\circ) = (|F_c|; 0)N$$

$$F_v(0; 0) = (10\sqrt{2} N; \alpha) = (10\sqrt{2} N * \cos \alpha; 10\sqrt{2} N * \sin \alpha) N$$

$$R(0; 0) = (60; 80)N$$

Ahora podemos decir que:

$$F_{m_x} + F_{c_x} + F_{v_x} = R_x \quad Y \quad F_{m_y} + F_{c_y} + F_{v_y} = R_y$$

Comencemos con la sumatoria de fuerzas en y:

$$\begin{aligned} F_{m_y} + F_{c_y} + F_{v_y} &= R_y \\ 90N + 0N + 10\sqrt{2}N * \sin \alpha &= 80N \\ 10\sqrt{2}N * \sin \alpha &= -10N \\ \sin \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha &= 5/4 \pi \end{aligned}$$

Ahora que sabemos el ángulo de inclinación de F_v hallemos $|F_c|$ con la sumatoria de fuerzas en X:

$$\begin{aligned} F_{m_x} + F_{c_x} + F_{v_x} &= R_x \\ 40 + |F_c| + 10\sqrt{2}N * \cos \frac{5}{4}\pi &= 60 \\ 40 + |F_c| - 10N &= 60 \\ |F_c| &= 30 \end{aligned}$$

Respuesta: El ángulo de inclinación de la fuerza del viento es $\frac{5}{4}\pi$ y el modulo de la fuerza de la corriente es $|F_c| = 30$

EJERCICIO N°57

En el instante inicial, dos móviles pasan por A y B respectivamente. Los móviles desarrollan MRUV y la distancia entre los puntos es 600m. El móvil que pasa por B lo hace con una velocidad de $v_{ob} = -42 \frac{m}{s}$ y el que pasa por A con una aceleración $a_A = 45 \frac{m}{s^2}$. Se encuentran en el vector posición $X(t_e) = (400; 0)m$ y la velocidad del móvil B en ese instante es de $v_b(t_e) = -58 \frac{m}{s}$. Determine la velocidad inicial del móvil A y la aceleración del móvil B.

Solución:

Sabemos que el móvil B comienza con una $V_{0b} = -42 \frac{m}{s}$ y se encuentra con A con una $V_b(t_e) = -58 \frac{m}{s}$ entonces si escribimos la formula para la velocidad en funcion del tiempo:

$$\begin{aligned} V(t_e) &= V_{0b} + a_B * t_e \\ -58 \frac{m}{s} &= -42 \frac{m}{s} + a_B * t_e \\ -16 \frac{m}{s} &= a_B * t_e \\ -\frac{16 \frac{m}{s}}{t_e} &= a_B \end{aligned}$$

También sabemos que el móvil B sale de la posición inicial 600m y que se encuentra con A en el instante t_e en el km 400, si escribimos la ecuacion de posicion para el movil B .

$$X(t_e) = X_{0b} + V_{0b} * t_e + \frac{1}{2} a_B * t_e^2$$

Reemplazo con los valores y lo que me dio a_B

$$400m = 600m - 42 \frac{m}{s} * t_e + \frac{1}{2} * \left(-\frac{16 \frac{m}{s}}{t_e} \right) * t_e^2$$

$$400m = 600m - 42 \frac{m}{s} * t_e - 8t_e$$

$$-200m = -50 \frac{m}{s} * t_e$$

$$t_e = 4s$$

Vuelvo a reemplazar en la aceleración:

$$-\frac{16 \frac{m}{s}}{4s} = a_B$$

$$a_B = -4 \frac{m}{s^2}$$

Ahora que se el tiempo y lugar de encuentro puedo plantear la ecuación de movimiento para A:

$$X(t_e) = X_{0A} + V_{0A} * t_e + \frac{1}{2} a_A * t_e^2$$

$$400m = 0m + V_{0A} * 4s + \frac{1}{2} 45 \frac{m}{s} * 4^2s^2$$

$$400m = V_{0A} * 4s + 360m$$

$$40m = V_{0A} * 4s$$

$$10 \frac{m}{s} = v_{oA}$$

Respuesta: La velocidad inicial del móvil A era de $10 \frac{m}{s}$ y la aceleración del móvil B era de $-4 \frac{m}{s^2}$

EJERCICIO N° 58

Dado el vector $\vec{a} = K * \vec{b}$ Con $K \in R^+$, el vector $\vec{c} = (2; 6)$ y el producto escalar $\vec{c} * \vec{b} = -36$, con $\vec{b} = (6; b_2)$ y $|\vec{a}| = 30$. Determine \vec{a} y \vec{b} .

Solución:

Sabemos que:

$$\vec{c} * \vec{b} = -36$$

$$(2; 6) * (6; b_2) = -36$$

$$12 + 6b_2 = -36$$

$$6b_2 = -48$$

$$b_2 = -8$$

Entonces:

$$\vec{b} = (6; -8)$$

También sabemos que:

$$\vec{a} = K * \vec{b}$$

Entonces:

$$|\vec{a}| = K * |\vec{b}|$$

$$30 = K * \sqrt{6^2 + (-8)^2}$$

$$30 = K * 10$$

$$K = 3$$

Entonces:

$$\vec{a} = 3 * (6; -8)$$

$$\vec{a} = (18; -24)$$

Respuesta: $\vec{a} = (18; -24) \wedge \vec{b} = (6; -8)$

EJERCICIO Nº 59

Determine el dominio de la función f+g si:

$$f: Df \rightarrow If/f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$g: Dg \rightarrow Ig/g(x) = \ln(1 - |x^2 - 2|)$$

Solución:

Hallemos f+g

$$f + g(x) = f(x) + g(x)$$

$$f + g(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x-1}\right) + \ln(1 - |x^2 - 2|)$$

Ahora tenemos que hallar el dominio. El dominio se determina como la intersección de todas las limitaciones que aparecen en la función.

En f + g(x) aparecen tres limitaciones

$$x - 1 \neq 0 \text{ Por ser denominador}$$

$$-1 < \frac{1}{x-1} < 1 \text{ o lo que es lo mismo } \left| \frac{1}{x-1} \right| < 1 \text{ por estar dentro del arc sen}$$

$$1 - |x^2 - 2| > 0 \text{ por estar dentro de un logaritmo}$$

Calculemos de a una

$$x - 1 \neq 0 \text{ Por ser denominador}$$

$$x \neq 1$$

$$R - \{1\} \text{ por ser denominador}$$

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| < 1 \text{ por estar dentro del arc sen}$$

Abro el modulo

$$\frac{1}{x-1} < 1 \vee \frac{1}{x-1} > -1$$

Ahora, en ambas tendría que pasar multiplicando el $x-1$ hacia la derecha, pero como no se si es positivo o negativo tengo que plantear las dos soluciones, si es positivo (osea $x-1 > 0$, $x > 1$) el piquito queda igual, pero si es negativo, (osea $x-1 < 0$, $x < 1$) el piquito se da vuelta.

$$\begin{aligned} & [(1 < x - 1 \wedge x > 1) \vee (1 > x - 1 \wedge x < 1)] \vee [(1 < -x + 1 \wedge x > 1) \vee (1 > -x + 1 \wedge x < 1)] \\ & [(2 < x \wedge x > 1) \vee (2 > x \wedge x < 1)] \vee [(0 > x \wedge x > 1) \vee (0 < x \wedge x < 1)] \\ & [(2; \infty) \cup (-\infty; 1)] \cup [(\emptyset) \cup (0; 1)] \\ & [(-\infty; 1) \cup (2; \infty)] \cup [(0; 1)] \\ & x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty) \text{ por estar dentro del arc sen} \end{aligned}$$

$$1 - |x^2 - 2| > 0 \text{ por estar dentro de un logaritmo}$$

$$-|x^2 - 2| > -1$$

Cambio los signos y doy vuelta el piquito

$$|x^2 - 2| < 1$$

Abro el modulo

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2 < 1) \wedge (x^2 - 2 > -1) \\ & (x^2 < 3) \wedge (x^2 > 1) \\ & (|x| < \sqrt{3}) \wedge (|x| > 1) \end{aligned}$$

Abro los módulos nuevamente

$$\begin{aligned} & [(x < \sqrt{3}) \wedge (x > -\sqrt{3})] \vee [(x > 1) \vee (x < -1)] \\ & (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cap [(-\infty; -1) \cup (1; \infty)] \\ & (-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ahora debo hacer la intersección de estas tres partes para hallar el dominio de $f+g(x)$

$$D(f + g) = [R - \{1\}] \cap [(-\infty; 1) \cup (2; \infty)] \cap [(-\sqrt{3}; 1) \cup (1; \sqrt{3})]$$

$$D(f + g) = (-\sqrt{3}; -1)$$

Respuesta si $D(f + g) = (-\sqrt{3}; -1)$

EJERCICIO N° 60

Dada $f: R^+ + \{0\} \rightarrow B/f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} + 1$, determine el conjunto B tal que f resulte biyectiva y luego halle su funcion inversa.

Solución:

Tenemos

$$f: \mathbf{R}^+ + \{0\} \rightarrow \mathbf{B}/f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} + 1,$$

Sabemos que es biyectiva. Para que sea biyectiva tiene que ser inyectiva y sobreyectiva a la vez,

En este caso es una función exponencial entonces (por definición) siempre es una función inyectiva

Ahora veamos si es sobreyectiva

Una función es sobreyectiva cuando la imagen es la misma que el codominio, como en este caso la imagen es B tenemos que hacer que B sea igual al codominio

Hallemos la imagen

Tenemos que $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} + 1$ y su dominio son los reales positivos mas el cero, osea que puesto en modo de intervalo su dominio es $[0; \infty)$ y el numero mas pequeño que toma la x es cero

Hallemos la imagen para cero

$$f(0) = 2 \cdot 3^{0-1} + 1 = \frac{5}{3}$$

Como la función exponencial es una función estrictamente creciente, entonces su imagen queda

$$If = [5/3 ; \infty)$$

Entonces f es biyectiva cuando $B = If$

$$f: \mathbf{R}^+ + \{0\} \rightarrow \left[\frac{5}{3}; \infty \right) / f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} + 1,$$

Ahora hallemos la función inversa, para ello tenemos que despejar x de f(x)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot 3^{x-1} + 1 \\ f(x) - 1 &= 2 \cdot 3^{x-1} \\ \frac{f(x) - 1}{2} &= 3^{x-1} \\ \log_3 \left(\frac{f(x) - 1}{2} \right) &= x - 1 \\ \log_3 \left(\frac{f(x) - 1}{2} \right) + 1 &= x \end{aligned}$$

Ahora debemos cambiar f(x) por x y x por $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}: \left[\frac{5}{3}; \infty\right) \rightarrow \mathbf{R}^+ + \{0\} / f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{x-1}{2}\right) + 1,$$

Respuesta: $B = \left[\frac{5}{3}; \infty\right)$ y $f^{-1}: \left[\frac{5}{3}; \infty\right) \rightarrow \mathbf{R}^+ + \{0\} / f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{x-1}{2}\right) + 1$

EJERCICIO N° 61

Dados los vectores \vec{a} y \vec{c} , tales que $\vec{a} = -4\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ y el angulo que determinan \vec{a} y \vec{c} es $\frac{3}{4}\pi$. calcule modulo de \vec{a} si se sabe que \vec{a} es ortogonal a $\vec{b} - \vec{c}$.

Solución:

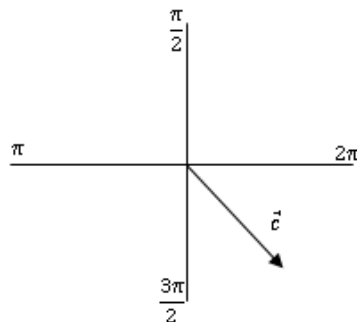
Tenemos

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -4\vec{b} \\ \vec{c} &= \vec{i} - \vec{j} = (1; -1)\end{aligned}$$

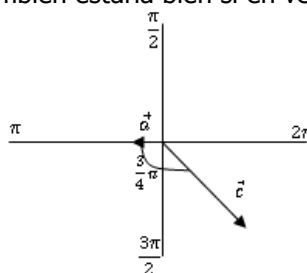
Si escribo \vec{c} en forma polar me queda

$$c = \left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}; \arctg\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = (\sqrt{2}; 315^\circ) = \left(\sqrt{2}; \frac{7}{4}\pi\right)$$

Dibujó \vec{c} a los $\frac{7}{4}\pi$



Sabemos que \vec{a} forma $\frac{3}{4}\pi$ con \vec{c} entonces \vec{a} tiene un angulo de $\frac{7}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi$ (el angulo de c menos la distancia entre ellos, el ejercicio tambien estaria bien si en vez de restar la distancia la sumas), dibujemos para comprender mejor:



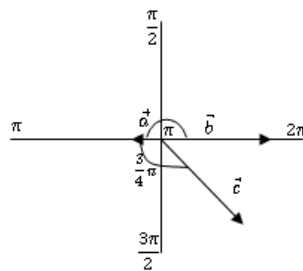
Entonces \vec{a} en forma polar

$$\vec{a} = \left(|\vec{a}|; \frac{7}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi \right) = (|\vec{a}|; \pi)$$

Si lo paso a forma cartesiana

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (|\vec{a}| * \cos \pi; |\vec{a}| * \sin \pi) \\ \vec{a} &= (|\vec{a}| * -1; |\vec{a}| * 0) \\ \vec{a} &= (-|\vec{a}|; 0)\end{aligned}$$

Sabemos que $a = -4b$ entonces b tiene la misma dirección que a , pero con el sentido contrario, por lo tanto el ángulo será el de $a - \pi$, dibujemos para comprender mejor:



Además $|a| = 4|b|$ o sea que $|b| = \frac{1}{4}|a|$. Entonces b

$$\vec{b} = \left(\frac{1}{4}|\vec{a}|; \pi - \pi \right) = \left(\frac{1}{4}|\vec{a}|; 0 \right)$$

Si lo paso a forma cartesiana

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \left(\frac{1}{4}|\vec{a}| * \cos(0); \frac{1}{4}|\vec{a}| * \sin(0) \right) \\ \vec{b} &= \left(\frac{1}{4}|\vec{a}| * 1; \frac{1}{4}|\vec{a}| * 0 \right) \\ \vec{b} &= \left(\frac{1}{4}|\vec{a}|; 0 \right)\end{aligned}$$

Ahora voy a hallar $\overrightarrow{b - c}$

$$\overrightarrow{b - c} = \left(\frac{1}{4}|\vec{a}|; 0 \right) - (1; -1)$$

$$\overrightarrow{b - c} = \left(\frac{1}{4}|\vec{a}| - 1; 1 \right)$$

Ahora sabemos que \vec{a} es perpendicular a $\overrightarrow{b - c}$ Entonces

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\overrightarrow{b - c}) &= 0 \\ (-|\vec{a}|; 0) \cdot \left(\frac{1}{4}|\vec{a}| - 1; 1 \right) &= 0\end{aligned}$$

$$-|\vec{a}| * \left(\frac{1}{4}|\vec{a}| - 1\right) + 0 * 1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| = 0$$

Esta cuadrática tiene raíces en $|\vec{a}| = 0 \wedge |\vec{a}| = 4$ como el modulo de un vector no puede ser cero (Porque sino seria el vector nulo) puedo decir que

$$|\vec{a}| = 4$$

Respuesta: El modulo del vector \vec{a} es $|\vec{a}| = 4$

EJERCICIO 62

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\text{sen } a \cdot x + y = \text{cos } a$$

$$\text{tg } a + y = 1$$

Determinar Valores de la constante $a \in (0; 2\pi) - \left\{ \pi; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\}$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución:

hagamos gauss para resolver el sistema

$\text{Sen } a$	1	$\text{Cos } a$	$F1$
$\text{Tg } a$	1	1	$F2$
$\text{Sen } a$	1	$\text{Cos } a$	$F1' = F1$
$\text{Tg } a$	$\text{Sen } a - \text{Tg } a$	$\text{Sen } a - \text{Tg } a * \text{Cos } a$	$F2' = \text{Sen } a F2 - \text{Tg } a F1$

Para que sea sistema compatible determinado, la última fila tiene que quedar

$$0 \quad 0 \quad | \quad 0$$

O sea que la condición es que el $\text{Sen } a - \text{Tg } a$ y el $\text{Sen } a - \text{Tg } a * \text{Cos } a$ sean iguales a cero a la vez.

$$\text{Sen } a - \text{Tg } a = 0 \quad \wedge \quad \text{Sen } a - \text{Tg } a * \text{Cos } a = 0$$

Sabemos que la $\text{Tg } a$ es $\frac{\text{Sen } a}{\text{Cos } a}$ entonces

$$\text{Sen } a - \frac{\text{Sen } a}{\text{Cos } a} = 0 \quad \wedge \quad \text{Sen } a - \frac{\text{Sen } a}{\text{Cos } a} * \text{Cos } a = 0$$

hago común denominador $\cos a$ en el primero y cancelo los $\cos a$ en el segundo

$$\frac{\cos a * \operatorname{Sen} a - \operatorname{Sen} a}{\cos a} = 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Sen} a - \operatorname{Sen} a = 0$$

Como por consigna x era distinto de $\pi/2$ y el $3/2\pi$ el coseno nunca se hace cero entonces lo paso multiplicando y queda

$$\cos a * \operatorname{Sen} a - \operatorname{Sen} a = 0 \quad \wedge \quad 0 = 0$$

Saco factor común $\operatorname{Sen} a$

$$\operatorname{Sen} a (\cos a - 1) = 0 \quad \wedge \quad \mathbb{R}$$

Como es una multiplicación de dos términos, basta con que uno de ellos sea cero para que la multiplicación lo sea. Además cualquier cosa intersección Reales, da como solución esa cosa, por lo tanto

En $\operatorname{Sen} a$, En el intervalo $(0; 2\pi)$ se anula solamente en $a = \pi$
 $\cos a - 1$ nunca es cero en el intervalo $(0; 2\pi)$

Por lo tanto podemos decir que el sistema resulta compatible indeterminado (los dos cero a la vez) si $a = \pi$

Respuesta: $a = \pi$

EJERCICIO N° 63

Dadas las Fuerzas F_1 y F_2 Concurrentes a un punto propio, determine la fuerza resultante del sistema

$$F_1 = 3F_3 + F_4 \quad y \quad F_2 = F_3 - 4F_4 \quad \text{siendo}$$

$$F_3 + F_4 = (10, 30)N \quad y \quad F_3 - F_4 = (20, 10)N$$

Solución:

Sabemos que

$$F_3 + F_4 = (10, 30)N \quad \text{entonces} \quad F_3 = (10, 30)N - F_4$$

$$F_3 - F_4 = (20, 10)N \quad \text{entonces} \quad F_3 = (20, 10)N + F_4$$

Igualamos

$$F_3 = F_3$$

$$(10, 30)N - F_4 = (20, 10)N + F_4$$

$$(10, 30)N - (20, 10)N = 2 * F_4$$

$$(-10, 20)N = 2 * F_4$$

$$F_4 = (-5, 10)N$$

Reemplazo en $F3 = (10, 30)N - F4$

$$F3 = (10, 30)N - (-5, 10)N$$

$$F3 = (15, 20)N$$

Ahora ya puedo calcular $F1 = 3F3 + F4$

$$F1 = (45, 60)N + (-5, 10)N$$

$$F1 = (40, 70)N$$

Y $F2 = F3 - 4F4$

$$F2 = (15, 20)N - (-20, 40)N$$

$$F2 = (35, -20)N$$

Ahora hallemos la resultante del sistema

$$F_{\text{Resultante}} = F1 + F2 + F3 + F4$$

$$F_{\text{Resultante}} = (40; 70) + (35; -20) + (15; 20) + (-5; 10)$$

$$F_{\text{Resultante}} = (40 + 35 + 15 - 5; 70 - 20 + 20 - 10)$$

$$F_{\text{Resultante}} = (85; 60)$$

Respuesta: $F_{\text{Resultante}} = (85; 60)$

EJERCICIO N° 64

Determine el conjunto solución de la ecuación con $x \in [0; 2\pi)$

$$\text{Sen } x + \cos x = \sqrt{1 + \text{sen } x}$$

Solución:

Tenemos

$$\text{Sen } x + \cos x = \sqrt{1 + \text{sen } x}$$

Elevo al cuadrado de ambos lados

$$(\text{Sen } x + \cos x)^2 = (\sqrt{1 + \text{sen } x})^2$$

$$\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x + 2\text{Sen} x * \text{Cos} x = 1 + \text{Sen} x$$

Utilizo la identidad $\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sen}^2 x$

$$\text{Sen}^2 x + 1 - \text{Sen}^2 x + 2\text{Sen} x * \text{Cos} x = 1 + \text{Sen} x$$

$$\begin{aligned} 2\text{Sen}x * \text{Cos}x &= \text{Sen}x \\ 2\text{Sen}x * \text{Cos}x - \text{Sen}x &= 0 \\ \text{Sen}x * (2\text{Cos}x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Para que una multiplicación sea cero, basta con que uno de los dos términos lo sea, por lo tanto

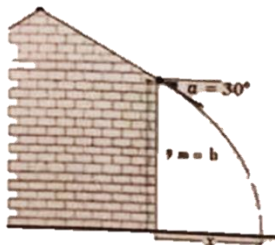
$$\begin{aligned} \text{Sen}x = 0 \quad \vee \quad (2\text{Cos}x - 1) = 0 \\ \text{Sen}x = 0 \quad \vee \quad \text{Cos}x = \frac{1}{2} \\ (x = 0 \quad \vee \quad x = \pi) \quad \vee \quad \left(x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{5}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

Pero como habíamos elevado al cuadrado (nunca te olvide de esto!) debemos verificar las soluciones, y al reemplazar las x por los valores 0 y $\frac{\pi}{3}$ la ecuación verifica, mientras que los otros dos valores no lo hace, por lo tanto

$$S = \left\{0; \frac{\pi}{3}\right\}$$

Respuesta: $S = \left\{0; \frac{\pi}{3}\right\}$

EJERCICIO N° 65



Un albañil pierde el control de su herramienta de trabajo en el tejado. La herramienta abandona el techo con una velocidad de 8 m/s. Determine el alcance máximo (X) de la herramienta, si el tejado tiene 9 metros de altura y se desprecia el rozamiento del aire.

Solución:

Como está cayendo del tejado, se va a mover tanto en x como en y, podemos ver que sale desde los nueve metros de altura, a 8 m/s con un ángulo de salida de -30° (-30 porque son 30 hacia abajo desde la horizontal que sale). O sea que los datos que tenemos son

En Y

$$\begin{aligned} Y_o &= 9m \\ V_{oy} &= 8 \frac{m}{s} * \text{Sen}(-30) = -4 \frac{m}{s} \\ a_y &= g = -10 \frac{m}{s^2} \\ Y_{suelo} &= 0m \end{aligned}$$

Por la ecuación de posición:

$$Y_{suelo}(t_{suelo}) = Y_o + V_{oY} * t_{suelo} + \frac{1}{2} a_Y * t_{suelo}^2$$

$$0 \text{ m} = 9 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} * t_{suelo} + \frac{1}{2} * \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) * t_{suelo}^2$$

$$0 \text{ m} = 9 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} * t_{suelo} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * t_{suelo}^2$$

Esta cuadrática tiene como resultados $t_{suelo} = -1.8 \text{ s}$ y $t_{suelo} = 1 \text{ s}$. Como el tiempo no puede ser negativo, digo que llega al suelo al segundo de comenzar a caer.
Veamos cuanto alcanza en X

En Y

$$V_{o_x} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \text{Cos}(-30) = 4\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por la ecuación de posición:

$$X_{suelo}(t_{suelo}) = X_o + V_{o_x} * t_{suelo}$$

$$X_{suelo}(t_{suelo}) = 0 \text{ m} + 4\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} * 1 \text{ s}$$

$$X_{suelo}(t_{suelo}) = 4\sqrt{3} \text{ m}$$

Respuesta: El alcance maximo es de $4\sqrt{3} \text{ m}$

EJERCICIO N° 66



Calcule el perímetro y el área del triángulo representado si se conoce:

$$|\vec{w}| = 12, \quad |\vec{v}| = 9 \quad \text{y} \quad \vec{v} * \vec{w} = 81$$

Solución:

Como conocemos el módulo de los dos vectores y además su producto escalar, podemos hallar el coseno del ángulo que forman (β)

$$\vec{v} * \vec{w} = |\vec{w}| * |\vec{v}| * \text{Cos } \beta$$

$$81 = 12 * 9 * \text{Cos } \beta$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{3}{4}$$

$$\beta = 41.4^\circ$$

Por otro lado, sabemos que el módulo de un vector, es lo que mide dicho vector, por lo tanto conocemos la medida de dos lados del triángulo y el coseno del ángulo que forman, por lo que por el teorema del coseno puedo hallar la medida del lado restante, lo llamare vector \vec{r} .

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{w}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 * |\vec{w}| * |\vec{v}| * \cos \beta$$

$$|\vec{u}|^2 = 12^2 + 9^2 - 2 * 12 * 9 * \frac{3}{4}$$

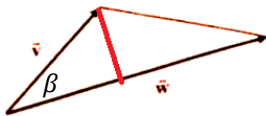
$$|\vec{u}|^2 = 63$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{63} \cong 7.94$$

Por lo tanto el perímetro queda

$$\text{Perimetro} = |\vec{w}| + |\vec{v}| + |\vec{u}| = 12 + 9 + 7.94 = 28.94$$

Para sacar el área, trazamos la altura y vemos que se forma un triángulo rectángulo, por lo tanto:



$$\text{Sen}(\beta) = \frac{h}{|\vec{v}|}$$

$$\text{Sen}(41.4) = \frac{h}{9}$$

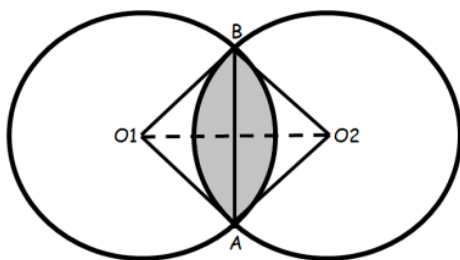
$$h = 5.95$$

Por lo tanto el área

$$\text{Area} = \frac{b * h}{2} = \frac{|\vec{w}| * h}{2} = \frac{12 * 5.95}{2} = 35.7$$

Respuesta: El perímetro es de 29.94 y el área de 35.7

EJERCICIO N° 67



86 π cm es la misma longitud de ambas circunferencias de centro O1 y O2 respectivamente. El ángulo AO1B mide 72°. Calcule las longitudes de los segmentos O1O2 y AB. Luego el área de la región sombreada.

Solución:

Si ambas circunferencias tienen la misma longitud, entonces significa que son iguales, por lo tanto también sus radios, que llamare R.

La fórmula de la longitud de la circunferencia es

$$\text{Longitud de circunferencia} = 2 \pi \text{ Radio}$$

O sea que en este caso

$$\text{Longitud de circunferencia} = 2 \pi \text{ Radio}$$

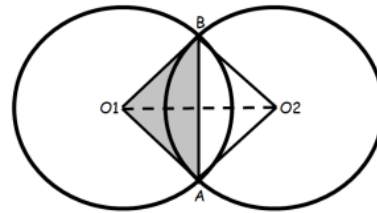
$$86 \pi \text{ cm} = 2 \pi R$$

$$\frac{86}{2} \pi \text{ cm} = \pi R$$

$$R = 43 \text{ cm}$$

Podemos ver que los 4 segmentos, O2B , BO1 , O1A y AO2 también son radios, o sea que todos miden 43cm.

El ángulo AO1B es el que comienza en A, tiene vértice el O1 y termina en B, por lo tanto si tenemos en cuenta el triángulo sombreado, el mismo es isósceles y tiene ángulo AO1B=72°



Por teorema del coseno

$$AB^2 = BO1^2 + O1A^2 - 2 * BO1 * O1A * \text{Cos } AO1B$$

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2 * R * R * \text{Cos } AO1B$$

$$AB^2 = 2 * R^2 - 2 * R^2 * \text{Cos } AO1B$$

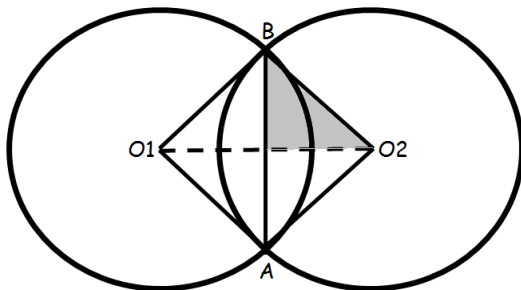
$$AB^2 = 2 * (43\text{cm})^2 - 2 * (43\text{cm})^2 * \text{Cos } (72^\circ)$$

$$AB^2 = 2 * 1849\text{cm}^2 - 2 * 1849\text{cm}^2 * 0,3$$

$$AB^2 = 2555,255 \text{ cm}^2$$

$$AB = 50,55\text{cm}$$

Sabiendo esto, tomo el triángulo rectángulo sombreado y utilizando Pitágoras



$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}O1O2\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{1}{2}50,55\text{cm}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}O1O2\right)^2 = (43\text{cm})^2$$

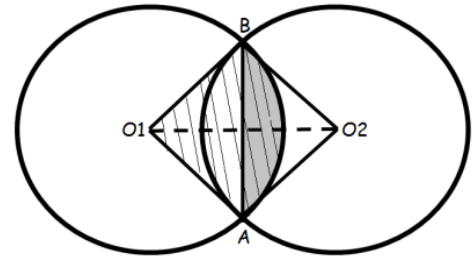
$$638,8 \text{ cm}^2 + \left(\frac{1}{2}O1O2\right)^2 = 1849\text{cm}^2$$

$$\left(\frac{1}{2}O1O2\right)^2 = 1210,1744\text{cm}^2$$

$$\left(\frac{1}{2}O1O2\right) = 34,79\text{cm}$$

$$O1O2 = 69,58\text{cm}$$

Para calcular el área de la región sombreada, voy a dividirla en dos partes iguales. Teniendo en cuenta el triángulo que habíamos tomado anteriormente, la sección sombreada es el resultado de la sección circular rayada en el dibujo, menos el triángulo ya dicho.



Lo paso a formulas

$$\frac{1}{2} \text{Seccion sombreada}$$

$$= \text{area sector circular} - \text{area triangulo}$$

$$\frac{1}{2} \text{Seccion sombreada} = \frac{\pi * (43\text{cm})^2 * 72^\circ}{360^\circ} - \frac{\text{Base} * \text{altura}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{Seccion sombreada} = \frac{\pi * 1849\text{cm}^2 * 72^\circ}{360^\circ} - \frac{AB * \left(\frac{1}{2} O1O2\right)}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{Seccion sombreada} = \frac{\pi * 1849\text{cm}^2 * 72^\circ}{360^\circ} - \frac{50,55\text{cm} * \left(\frac{1}{2} * 69.58\text{cm}\right)}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{Seccion sombreada} = 369.8\pi\text{cm}^2 - 879.32\text{cm}^2$$

$$\frac{1}{2} \text{Seccion sombreada} \cong 282.44\text{cm}^2$$

$$\text{Seccion sombreada} \cong 564.89\text{cm}^2$$

Respuesta: $O1O2 = 69.58\text{cm}$ $AB = 50,55\text{cm}$ $\text{Seccion sombreada} \cong 564.89\text{cm}^2$

EJERCICIO N° 68

Determine el dominio de f, A contenido en $[0; 2\pi)$

$$f: A \subset [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{\text{sen } x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Solución:

Tenemos como única función limitante a la raíz, ya que el dominio del seno de x son todos los reales. La raíz debe tener argumento igual a mayor que cero, entonces

$$\text{sen } x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$$

$$\text{sen } x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

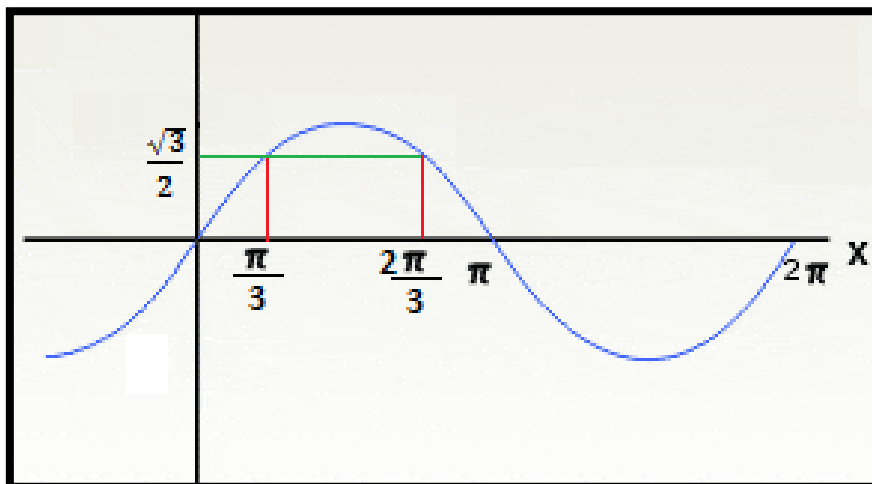
Como el seno es una función oscilante, voy a trabajar con una igualdad y ver cuando la función vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y después evaluaremos la desigualdad

$$x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

(pasandolo al segundo cuadrante donde tambien es positivo)

Dibujamos el Sen(x) y podemos ver que es mayor que cero entre estos dos valores



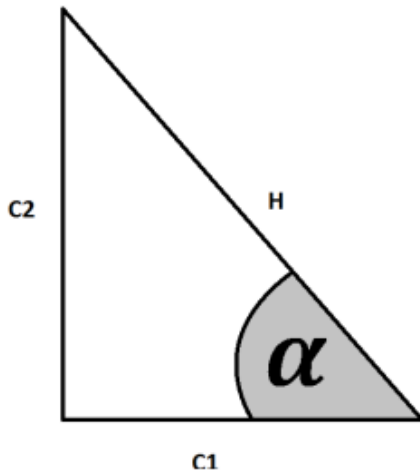
Respuesta: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$

EJERCICIO N° 69

La suma de las longitudes (enteras) de los catetos de un triángulo rectángulo es 895, al dividir la mayor por la menor se obtiene 6 de cociente entero y 6 de resto. Calcule el ángulo interior opuesto al cateto mayor.

Solución:

Tenemos que



$$c1 + c2 = 895$$

$$c2 = 895 - c1$$

Por otro lado

$$\text{cociente} * \text{divisor} + \text{resto} = \text{dividendo}$$

$$6 * c1 + 6 = c2$$

Vuelvo a reemplazar con c2

$$6c1 + 6 = 895 - c1$$

$$7c1 = 889$$

$$c1 = 127$$

Por lo tanto

$$c2 = 895 - c1 = 895 - 127 = 768$$

Por trigonometría

$$Tg(\alpha) = \frac{c2}{c1}$$

$$Tg(\alpha) = \frac{768}{127}$$

$$\alpha = \text{arcTg}\left(\frac{768}{127}\right)$$

$$\alpha = 80,61^\circ$$

Respuesta: $\alpha = 80,61^\circ$

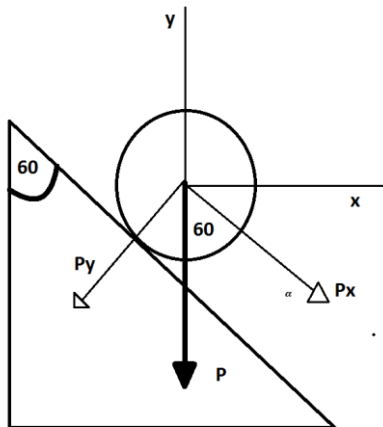
EJERCICIO N° 70

Un cuerpo de peso $p=30N$ se encuentra sobre un plano inclinado como muestra la figura. Determine la fuerza a aplicar sobre el para evitar la caída.

Solución:

Dibujemos los ejes, y queda más claro que la fuerza P tiene un ángulo de 270° y como decía la consigna un modulo de 30N

$$P = (30N; 270^\circ) = (30N * \text{Cos}(270); 30N * \text{Sen}(270)) = (0; -30)N$$



Pero como esta sobre un plano inclinado, las fuerzas se descomponen en dos, la que lo empuja hacia adelante en el plano, y la normal al piso.

Si traslado el ángulo del plano inclinado, puedo ver que Px tiene un ángulo de $270^\circ + 60^\circ = 330^\circ$ y como Py es perpendicular, tiene 90° menos, es decir 240° , por lo tanto

$$Px = (Px; 330^\circ) = (Px * \cos(330); Px * \sin(330)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Px; -\frac{1}{2}Px\right)$$

$$Py = (Py; 240^\circ) = (Py * \cos(240); Py * \sin(240)) = \left(-\frac{1}{2}Py; -\frac{\sqrt{3}}{2}Py\right)$$

La suma de Px y Py, deben dar P, entonces si sumo componente a componente

$$P = Px + Py$$

$$(0; -30)N = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Px; -\frac{1}{2}Px\right) + \left(-\frac{1}{2}Py; -\frac{\sqrt{3}}{2}Py\right)$$

$$(0; -30)N = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Px - \frac{1}{2}Py; -\frac{1}{2}Px - \frac{\sqrt{3}}{2}Py\right)$$

Igualo la primera componente

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}Px - \frac{1}{2}Py$$

$$\frac{1}{2}Py = \frac{\sqrt{3}}{2}Px$$

$$Py = \sqrt{3}Px$$

Igualo la segunda y reemplazo

$$-30N = -\frac{1}{2}Px - \frac{\sqrt{3}}{2}Py$$

$$-30N = -\frac{1}{2}Px - \frac{\sqrt{3}}{2} * \sqrt{3}Px$$

$$-30N = -\frac{1}{2}Px - \frac{3}{2}Px$$

$$-30N = -2Px$$

$$Px = 15N$$

Y si vuelvo a reemplazar

$$Py = \sqrt{3}Px = 15\sqrt{3}$$

Como podemos ver en el dibujo, la fuerza que impulsa hacia abajo a la pelota es Px , por lo tanto la fuerza a aplicar para que no se caiga es una opuesta a esa

$$\text{Fuerza a aplicar} = -Px$$

$$\text{Fuerza a aplicar} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Px; -\frac{1}{2}Px\right)$$

$$\text{Fuerza a aplicar} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} * 15N; -\frac{1}{2} * 15N\right)$$

$$\text{Fuerza a aplicar} = (-7,5\sqrt{3}N; 7,5N)$$

Respuesta: $\text{Fuerza a aplicar} = (-7,5\sqrt{3}N; 7,5N)$

EJERCICIO N° 71

Dadas $f: Df \rightarrow If/f(x) = 2x$ y $g: Dg \rightarrow Ig/g(x) = \sqrt{1+x}$ **determine el dominio y la imagen de f y g tales que exista $g \circ f(x)$, luego defínala**

Solución:

Tenemos

$$f: Df \rightarrow If/f(x) = 2x$$

Como es una lineal podemos decir que va de reales en reales

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/f(x) = 2x$$

También

$$g: Dg \rightarrow Ig/g(x) = \sqrt{1+x}$$

Como es una raíz la condición de su dominio es que lo de adentro de la raíz sea mayor o igual a cero entonces

$$1 + x \geq 0$$

$$x \geq -1$$

Entonces el dominio de g es $[-1; \infty)$ y como es una raíz tiene imagen a los reales positivos más el cero

$$g: [-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / g(x) = \sqrt[2]{1+x}$$

Para que exista $g \circ f$, la imagen de f debe estar incluida en el dominio de g . esto no pasa ya que los Reales no están dentro de $[-1; \infty)$. Entonces forcemos a f para que solo de cómo resultado valores mayores o iguales a -1

$$\begin{aligned} f(x) &\geq -1 \\ 2x &\geq -1 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Osea que para que exista $g \circ f$ el dominio de f debe ser $[-\frac{1}{2}; \infty)$ y su imagen $[-1; \infty)$

Redefino

$$f^*: \left[-\frac{1}{2}; \infty\right) \rightarrow [-1; \infty) / f(x) = 2x$$

Hallo $g \circ f(x)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= G(f(x)) \\ g \circ f(x) &= G(2x) \\ g \circ f(x) &= \sqrt[2]{1+2x} \end{aligned}$$

La compuesta va siempre desde el dominio de la de adentro a la imagen de la de afuera.

Respuesta: $g \circ f : \left[-\frac{1}{2}; \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\} / g \circ f(x) = \sqrt[2]{1+2x}$

EJERCICIO N° 72

Un proyectil se dispara desde tierra con una velocidad inicial cuyo módulo es $v_0=50\text{m/s}$. Determine:

a) el vector velocidad inicial para que el doble de la altura máxima a la cual llegue el proyectil, sea igual al alcance del mismo al llegar a la tierra. Desprecie la resistencia del aire y considere la gravedad 10 m/s^2

b) el ángulo de inclinación $\alpha < 90^\circ$ del disparo

Solución:

Como es tiro oblicuo, dividamos el movimiento para X y para Y.

Para X Sabiamos que

$$X_0 = 0m$$

$$V_{ox} = 50 \frac{m}{s} * \cos \alpha$$

Entonces la ecuacion de movimiento queda

$$X(t) = X_0 + V_{ox} * t$$

$$X(t) = 0m + 50 \frac{m}{s} * \cos \alpha * t$$

Para Y

$$Y_0 = 0m$$

$$V_{oy} = 50 \frac{m}{s} * \sin \alpha$$

Entonces la ecuacion de movimiento queda

$$Y(t) = Y_0 + V_{oy} * t + 1/2 * g * t^2$$

$$Y(t) = 0m + 50 \frac{m}{s} \sin \alpha * t + \frac{1}{2} * \left(-10 \frac{m}{s^2}\right) * t^2$$

$$Y(t) = 50 \frac{m}{s} \sin \alpha * t - 5 \frac{m}{s^2} t^2$$

$$V(t) = V_{oy} + g * t$$

$$V(t) = 50 \frac{m}{s} \sin \alpha - 10 \frac{m}{s^2} * t$$

Ahora nos pide el vector velocidad inicial. Este lo sacamos de la siguiente manera

$$V_0 = \left(50 \frac{m}{s} \cos \alpha ; 50 \frac{m}{s} \sin \alpha\right)$$

Osea que tenemos que sacar α . Sabemos que el doble de la altura máxima es igual al alcance en la tierra. Calculemos en que momento se produce la altura máxima.

La altura máxima se produce cuando la velocidad en Y se anula, osea cuando $V(t \text{ alt max}) = 0m/s$

$$V(t \text{ alt max}) = 50 \frac{m}{s} \sin \alpha - 10 \frac{m}{s^2} * t \text{ alt max}$$

$$0 = 50 \frac{m}{s} \sin \alpha - 10 \frac{m}{s^2} * t \text{ alt max}$$

$$-50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha = -10 \frac{m}{s^2} * t \text{ alt max}$$

$$5s \text{Sen } \alpha = t \text{ alt max}$$

Ahora que sabemos el tiempo en que llega a la altura máxima, veamos a que altura se produce, es decir $Y(t \text{ alt max}) = \text{altura max}$

$$Y(t \text{ alt max}) = 50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha * t \text{ alt max} - 5 \frac{m}{s^2} t \text{ alt max}^2$$

$$\text{Altura max} = 50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha * 5s \text{Sen } \alpha - 5 \frac{m}{s^2} (5s \text{Sen } \alpha)^2$$

$$\text{Altura max} = 250m \text{Sen } \alpha^2 - 125m \text{Sen } \alpha^2$$

$$\text{Altura max} = 125m \text{Sen } \alpha^2$$

Ahora calculemos el tiempo en que se genera el alcance máximo, esto es en el tiempo en que el proyectil llega al suelo es decir que $Y(t \text{ alc max}) = 0m$

$$Y(t \text{ alc max}) = 50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha * t \text{ alc max} - 5 \frac{m}{s^2} t \text{ alc max}^2$$

$$0m = 50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha * t \text{ alc max} - 5 \frac{m}{s^2} t \text{ alc max}^2$$

$$0m = t \text{ alc max} (50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha - 5 \frac{m}{s^2} t \text{ alc max})$$

Como el tiempo es distinto de cero lo puedo pasar dividiendo

$$0m = 50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha - 5 \frac{m}{s^2} t \text{ alc max}$$

$$-50 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha = -5 \frac{m}{s^2} t \text{ alc max}$$

$$t \text{ alc max} = 10s \text{Sen } \alpha$$

Ahora calculemos cuanto es el alcance máximo, es decir, $X(t \text{ alc max})$

$$X(t \text{ alc max}) = V_{ox} * t \text{ alc max}$$

$$\text{alcance maximo} = V_{ox} * 10s \text{Sen } \alpha$$

Ademas nos decía que el doble de la altura máxima era igual al alcance máximo, entonces

$$\text{alcance maximo} = 2 * \text{Altura max}$$

$$V_{ox} * 10s \text{Sen } \alpha = 2 * 125m \text{Sen } \alpha^2$$

$$V_{ox} * 10s \text{Sen } \alpha = 250m \text{Sen } \alpha^2$$

$$V_{ox} = 25 \frac{m}{s} \text{Sen } \alpha$$

Pero sabíamos que $V_{ox} = 50 * \cos \alpha$ reemplazo:

$$50 \frac{m}{s} \cos \alpha = 25 \frac{m}{s} \sin \alpha$$

$$50 \frac{m}{s} \cos \alpha = 25 \frac{m}{s} \sin \alpha$$

$$50 \frac{m}{s} = 25 \frac{m \sin \alpha}{s \cos \alpha}$$

$$2 = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\alpha = 63,44^\circ$$

Para sacar la velocidad no queda mas que reemplazar

$$V_o = \left(50 \frac{m}{s} \cos(63,44^\circ) ; 50 \frac{m}{s} \sin(63,44^\circ) \right)$$

$$V_o = (22.36 ; 44.72) \frac{m}{s}$$

Respuesta: El vector velocidad inicial es $V_o = (22.36 ; 44.72) \frac{m}{s}$ y el angulo de inclinación es de 63.44°

EJERCICIO N° 73

Si considera

$$\cos \beta = \frac{1+2k}{6k-1} \quad y \quad \operatorname{secante} \beta = \frac{2}{4k-5}$$

¿Cuál es el mayor valor de k para que se verifiquen las igualdades anteriores sabiendo que beta pertenece al primer cuadrante?

Solución:

Sabemos que la secante, es la inversa multiplicativa del coseno entonces

$$\operatorname{secante} \beta = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$\frac{2}{4k-5} = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$2 \cos \beta = 4k - 5$$

$$\cos \beta = \frac{4k-5}{2}$$

Ahora igualo los dos cosenos

$$\frac{4k - 5}{2} = \frac{1 + 2k}{6k - 1}$$

Paso multiplicando los denominadores

$$(4k - 5) * (6k - 1) = (1 + 2k) * 2$$

Distributiva

$$\begin{aligned} 24k^2 - 30k - 4k + 5 &= 2 + 4k \\ 24k^2 - 38k + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Esta cuadrática tiene ceros en $k = 1/12$ y $k = 3/2$ Veamos que pasa en cada caso

Si $k = 1/12$

$$\cos\beta = \frac{4 * \frac{1}{12} - 5}{2} = -\frac{7}{3}$$

Sabemos que el coseno es positivo en el primer cuadrante así que descartamos esta solución

Si $k = 3/2$

$$\cos\beta = \frac{4 * \frac{3}{2} - 5}{2} = \frac{1}{2}$$

Esta solución verifica por ser positiva como el coseno en el primer cuadrante.

Respuesta: $k = 3/2$

EJERCICIO N° 74

Desde un punto situado a 100metros de altura se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 50m/s, 2segundos mas tarde se lanza otro en la misma vertical desde el suelo con una velocidad de 150m/s. Si se desprecia la resistencia del aire calcule

- a)¿Cuanto tiempo tarda el segundo movil en alcanzar el primero?
 b)¿A que altura lo alcanza?**

Solución

Escribamos los datos:

Sabemos que $a = g = -10 \frac{m}{s^2}$

Luego Tenemos

Cuerpo 1

$$Y_o \text{ cuerpo 1} = 100 \text{ m} \quad V_o \text{ Cuerpo 1} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad T_o \text{ Cuerpo 1} = 0 \text{ s}$$

CUERPO 2

$$Y_o \text{ cuerpo 2} = 0 \text{ m} \quad V_o \text{ Cuerpo 2} = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad T_o \text{ Cuerpo 2} = 2 \text{ s}$$

Y como las formulas son

$$Y(T) = Y_o + V_o * (T - T_o) + \frac{1}{2} * g * (T - T_o)^2 \quad y \quad V(T) = V_o + a * (T - T_o)$$

Para cada cuerpo quedan

ECUACIONES CUERPO 1

$$Y(T) \text{ cuerpo 1} = 100 \text{ m} + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} * T - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * T^2$$

$$V(T) = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * T$$

ECUACIONES CUERPO 2

$$Y(T) \text{ cuerpo 2} = 0 \text{ m} + 150 \frac{\text{m}}{\text{s}} * (T - 2\text{s}) - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (T - 2\text{s})^2$$

$$V(T) = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (T - 2\text{s})$$

Cuando el segundo alcanza al primero $Y(T) \text{ cuerpo 1} = Y(T) \text{ cuerpo 2}$ entonces igualemos las ecuaciones

$$Y(T) \text{ cuerpo 1} = Y(T) \text{ cuerpo 2}$$

$$100 \text{ m} + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} * T - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * T^2 = 0 \text{ m} + 150 \frac{\text{m}}{\text{s}} * (T - 2\text{s}) - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (T - 2\text{s})^2$$

$$100 \text{ m} + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} T - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} T^2 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}} T - 300 \text{ m} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (T^2 - 4\text{s}T + 4\text{s}^2)$$

$$100 \text{ m} + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} T - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} T^2 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}} T - 300 \text{ m} - 5 T^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} T - 20 \text{ m}$$

$$(100 + 300 + 20) \text{ m} + (50 - 150 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}} T + (-5 + 5) T^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0$$

$$420 \text{ m} - 120 \frac{\text{m}}{\text{s}} T = 0$$

$$T = 3.5 \text{ s}$$

Siempre que me pidan "lo que tarda" un movil me estan pidiendo el ΔT

$$\Delta T \text{ 2 movil} = (T - T_o) = (3.5 \text{ s} - 2\text{s}) = 1.5 \text{ s}$$

Para saber a que altura sucede esto solo nos queda reemplazar en $Y(t)$ para cualquiera de los dos moviles (tiene que dar lo mismo sino esta mal)

$$Y(3.5)\text{cuerpo 1} = 100m + 50 \frac{m}{s} * 3.5s - 5 \frac{m}{s^2} * (3.5)^2 s^2 = 213.75 m$$

$$Y(T)\text{cuerpo 2} = 0m + 150 \frac{m}{s} * (3.5s - 2s) - 5 \frac{m}{s^2} * (3.5s - 2s)^2 = 213.75 m$$

Respuesta: El segundo móvil tarda 1.5 segundos en alcanzar al primero y lo hace a los 213.75 metros

EJERCICIO N° 75

Calcule el valor numerico de $\text{Cos}(\alpha + \beta)$ si $\text{Sen } \alpha = 3/5$ y $\text{Cos } \beta = -8/17$ y $0 < \alpha < 90^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$

Solución

Sabemos que

$$90^\circ < \beta < 180^\circ$$

Entonces

Ocupa el segundo cuadrante

Además

$$\text{Cos}(\beta) = -8/17$$

$$\beta = \text{Arco Cos } -8/17$$

$$\beta = 118^\circ 4' 20.95''$$

Tambien sabemos que

$$0 < \alpha < 90^\circ$$

Entonces ocupa el primer cuadrante

Como sabemos que

$$\text{Sen } \alpha = 3/5$$

$$\alpha = \text{Arco Sen } 3/5$$

$$\alpha = 36^\circ 52' 11.63''$$

Ahora sabemos que por el Cos de la suma

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Reemplazamos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(36^\circ 52' 11.63'')\cos(118^\circ 4' 20.95'') - \sin(36^\circ 52' 11.63'')\sin(118^\circ 4' 20.95'')$$

$$\cos(\alpha + \beta) = (4/5)(-8/17) - (3/5)(15/17)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -32/85 - 9/17$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -77/85$$

Respuesta: El coseno de la suma resulta -77/85

EJERCICIO N° 76

Halle el conjunto solución de

$$2\sin^3 x - \cos^2 x - 5\sin x + 3 = 0$$

Solución

$$2\sin^3 x - \cos^2 x - 5\sin x + 3 = 0$$

Sabemos que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ entonces

$$2\sin^3 x - (1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 3 = 0$$

$$2\sin^3 x - 1 + \sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$$

Hago el cambio de variable $\sin x = Z$

$$2Z^3 + Z^2 - 5Z + 2 = 0$$

Los divisores del coeficiente principal son 1 y 2, al igual que los del termino independiente, entonces como las posibles raíces son todas las combinaciones posibles entre:

$$\text{Posibles raíces} = \frac{\text{Div TI}}{\text{Div CP}} = \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 2$$

Al probar reemplazar esos valores puedo ver que las raíces (cuando se hace cero) son 1/2, 1 y -2 entonces si escribimos el polinomio de la forma factorizada.

$$2 * \left(Z - \frac{1}{2} \right) (Z - 1)(Z + 2) = 0$$

Vuelvo a hacer el cambio de variable $\sin x = Z$

$$2 * \left(\text{Sen}x - \frac{1}{2}\right)(\text{Sen}x - 1)(\text{Sen}x + 2) = 0$$

Para que una multiplicacion sea cero, uno de sus terminos debe serlo, y como el 2 nunca es cero puedo decir que se verifica la igualdad cuando:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\text{Sen}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \right] \vee [(\text{Sen}x - 1) = 0] \vee [(\text{Sen}x + 2) = 0] \\ & \left(\text{Sen}x = \frac{1}{2}\right) \vee (\text{Sen}x = 1) \vee (\text{Sen}x = -2) \\ & (x = 30^\circ \vee x = 150^\circ) \vee (x = 90^\circ) \vee (\emptyset) \end{aligned}$$

Respuesta: $x = 30^\circ \vee x = 150^\circ \vee x = 90^\circ$

O

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{\pi}{2}$$

EJERCICIO N° 77

Dados $\vec{A} = (3; 4)$, $\vec{B} = (4; 3)$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$.

Calcule: $\overrightarrow{\text{Proy}}_a \vec{C}$ y el ángulo β entre \vec{C} y \vec{D}

Solución

$$\vec{A} = (3; 4),$$

$$\vec{B} = (4; 3)$$

Calculemos \vec{C} y \vec{D}

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} = (3; 4) + (4; 3)$$

$$\vec{C} = (3 + 4; 4 + 3)$$

$$\vec{C} = (7; 7)$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{D} = (3; 4) - (4; 3)$$

$$\vec{D} = (3 - 4; 4 - 3)$$

$$\vec{D} = (-1; 1)$$

Ahora ya podemos calcular la proyección mediante la formula

$$\overrightarrow{\text{Proy}}_a \vec{C} = \frac{\vec{A} * \vec{C}}{|\vec{A}|} * \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\overrightarrow{\text{Proy}}_a \vec{C} = \frac{(3; 4) * (7; 7)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} * \frac{(3; 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\overrightarrow{Proy_a C} = \frac{3 * 7 + 4 * 7}{\sqrt{25}} * \frac{(3; 4)}{\sqrt{25}}$$

$$\overrightarrow{Proy_a C} = \frac{49}{5} * \frac{(3; 4)}{5}$$

$$\overrightarrow{Proy_a C} = \frac{49}{25} * (3; 4)$$

$$\overrightarrow{Proy_a C} = 1.96 * (3; 4)$$

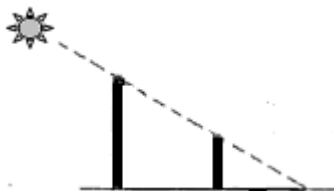
$$\overrightarrow{Proy_a C} = (5.88; 7.84)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} |\vec{C} \cdot \vec{D}| &= |\vec{C}| * |\vec{D}| * \cos \beta \\ |(7; 7) \cdot (-1; 1)| &= |(7; 7)| * |(-1; 1)| * \cos \beta \\ |7 * -1 + 7 * 1| &= \sqrt{7^2 + 7^2} * \sqrt{1^2 + 1^2} * \cos \beta \\ 0 &= \sqrt{98} * \sqrt{2} * \cos \beta \\ 0 &= \cos \beta \\ \beta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Respuesta: $\overrightarrow{Proy_a C} = (5.88; 7.84)$ y $\beta = \frac{\pi}{2}$

EJERCICIO N° 78

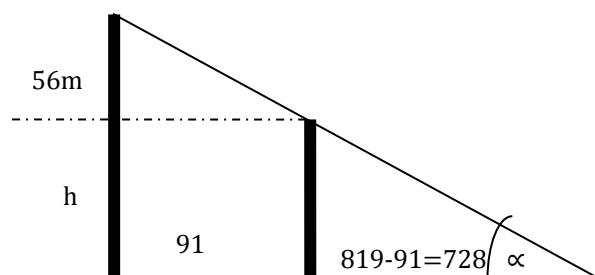


La distancia entre los pies de dos postes verticales es de 91m, la longitud de la sombra mayor es de 819m, y la altura de uno de los postes es 56m mayor a la del otro.

Encuentre la longitud de cada poste.

Solución:

Redibujemos:



En este esquema puedo ver dos triángulos rectángulos que comparten el ángulo alfa, el formado por el poste menor y su sombra, y el que forma el mayor con la suya.

Del triangulo del poste menor puedo decir que:

$$Tg \propto = \frac{h}{728}$$

Del triangulo del poste mayor puedo decir que:

$$Tg \propto = \frac{h + 56}{819}$$

Si igualo las $Tg \propto$:

$$\frac{h}{728} = \frac{h + 56}{819}$$

$$819h = (h + 56) * 728$$

$$819h = 728h + 40768$$

$$91h = 40768$$

$$h = 448m$$

Entonces resulta que:

$$\text{Altura poste menor} = 448m$$

$$\text{Altura poste mayor} = 448m + 56m = 504m$$

Respuesta: La altura del poste menor es de 448m y la del mayor 504m

EJERCICIO N° 79

En un mismo instante se disparan dos proyectiles, uno desde $A = (0, 0)m$ y vector velocidad $V_{0A} = (V_{0Ax}, \sqrt{3}V_{0Ax}) \frac{m}{s}$ y el otro desde $B = (200, 0)m$. con vector velocidad $V_{0B} = (-200, 200) \frac{m}{s}$. Determine

- a) la V_{0Ax} para que ambos proyectiles se encuentren y el tiempo transcurrido hasta el encuentro.
- b) el vector posición en el instante del encuentro.
- c) el vector velocidad de cada proyectil en el instante del encuentro.

Solución

Escribamos los datos para A

En X

$$X_0 = 0m$$

$$V_{oax} = V_{oax}$$

Por lo tanto la ecuacion de posicion queda

$$Xa(t) = X_0 + V_{oax} * t$$

$$Xa(t) = 0m + V_{oax} * t$$

$$Xa(t) = V_{oax} * t$$

En Y

$$Y_0 = 0m$$

$$V_{oay} = \sqrt{3}V_{oax}$$

Por lo tanto la ecuacion de posicion queda

$$Ya(t) = Y_0 + \sqrt{3}V_{oax} * t + \frac{1}{2}g * t^2$$

$$Ya(t) = 0m + \sqrt{3}V_{oax} * t + \frac{1}{2} * \left(-\frac{10m}{s^2}\right) * t^2$$

$$Ya(t) = \sqrt{3}V_{oax} * t - 5\frac{m}{s^2} * t^2$$

Y la ecuacion de velocidad en funcion del tiempo

$$Va(t) = V_{oay} + g * t$$

$$Va(t) = \sqrt{3}V_{oax} - 10\frac{m}{s^2} * t$$

Escribamos los datos para B

En X

$$X_0 = 200m$$

$$V_{obx} = -200\frac{m}{s}$$

Por lo tanto la ecuacion de posicion queda

$$Xb(t) = X_0 + V_{obx} * t$$

$$Xb(t) = 200m - 200\frac{m}{s} * t$$

En Y

$$Y_0 = 0m$$

$$V_{oby} = 200\frac{m}{s}$$

Por lo tanto la ecuacion de posicion queda

$$Yb(t) = Yo + 200 \frac{m}{s} * t + \frac{1}{2} g * t^2$$

$$Yb(t) = 0m + 200 \frac{m}{s} * t + \frac{1}{2} * \left(-\frac{10m}{s^2}\right) * t^2$$

$$Yb(t) = 200 \frac{m}{s} * t - 5 \frac{m}{s^2} * t^2$$

Y la ecuacion de velocidad en funcion del tiempo

$$Vb(t) = 200 \frac{m}{s} + g * t$$

$$Vb(t) = 200 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} * t$$

Sabemos que se encuentran, entonces voy a igualar las ecuaciones de posición

Primero en X

$$Xa(t \text{ encuentro}) = Xb(t \text{ encuentro})$$

$$Voax * t \text{ encuentro} = 200m - 200 \frac{m}{s} * t \text{ encuentro}$$

$$Voax * t \text{ encuentro} + 200 \frac{m}{s} * t \text{ encuentro} = 200m$$

$$t \text{ encuentro} * \left(Voax + 200 \frac{m}{s}\right) = 200m$$

$$t \text{ encuentro} = \frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}}$$

Y ahora en Y

$$Ya(t \text{ encuentro}) = Yb(t \text{ encuentro})$$

$$\sqrt{3}Voax * t \text{ encuentro} - 5 \frac{m}{s^2} * (t \text{ encuentro})^2 = 200 \frac{m}{s} * t \text{ encuentro} - 5 \frac{m}{s^2} * t \text{ encuentro}^2$$

$$\text{Reemplazo con } t \text{ encuentro} = \frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}}$$

$$\sqrt{3}Voax * \frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}} - 5 \frac{m}{s^2} * \left(\frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}}\right)^2 = 200 \frac{m}{s} * \frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}} - 5 \frac{m}{s^2} * \frac{200m^2}{Voax + 200 \frac{m}{s}}$$

Los términos $\left(-5 \frac{m}{s^2} * \left(\frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}}\right)^2\right)$ se cancelan

$$\frac{200m \sqrt{3}Voax}{Voax + 200 \frac{m}{s}} = \frac{40000 \frac{m^2}{s}}{Voax + 200 \frac{m}{s}}$$

$$(200m \sqrt{3}Voax) = \left(40000 \frac{m^2}{s}\right)$$

$$Voax = \frac{\left(40000 \frac{m^2}{s}\right)}{200m\sqrt{3}}$$

$$Voax = \frac{200 m}{\sqrt{3} s} \cong 115.47 \frac{m}{s}$$

Reemplazo para sacar $t_{encuentro} = \frac{200m}{Voax + 200 \frac{m}{s}}$

$$t_{encuentro} = \frac{200m}{\frac{200 m}{\sqrt{3} s} + 200 \frac{m}{s}} = 0.634 \text{ seg}$$

Para sacar el vector posición en el momento de encuentro no nos queda más que reemplazar el $t_{encuentro}$ en la ecuación de movimiento

$$\text{Vector encuentro} = (X(t_{encuentro}); Y(t_{encuentro}))$$

$$\text{Vector encuentro} = \left(200m - 200 \frac{m}{s} * 0.634s; 200 \frac{m}{s} * 0.634 - 5 \frac{m}{s^2} * 0.6434s^2\right)$$

$$\text{Vector encuentro} = (73.2m; 124.8m)$$

Para sacar el vector velocidad en el momento de encuentro no nos queda más que reemplazar el $t_{encuentro}$ en la ecuación de velocidad

Para el Móvil A

$$\text{Vector Velocidad encuentro } Ma = (Va(t_{encuentro}); Va(t_{encuentro}))$$

$$\text{Vector Velocidad encuentro } Ma = \left(Voax; \sqrt{3}Voax - 10 \frac{m}{s^2} * 0.634\right)$$

$$\text{Vector Velocidad encuentro } Ma = \left(115.47 \frac{m}{s}; 193.66 \frac{m}{s}\right)$$

Para el móvil B

$$\text{Vector Velocidad encuentro } Mb = (Vb(t_{encuentro}); Vb(t_{encuentro}))$$

$$\text{Vector Velocidad encuentro } Mb = \left(-200 \frac{m}{s}; 200 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} * 0.634\right)$$

$$\text{Vector Velocidad encuentro } Mb = \left(200 \frac{m}{s}; 193.66 \frac{m}{s}\right)$$

Respuesta: a) La Vo_{Ax} debe ser aproximadamente de $115.47 \frac{m}{s}$
 b) El vector posición de encuentro es $(73.2m; 124.8m)$
 c) Los vectores Velocidad de encuentro son
 $\text{Vector Velocidad encuentro } Ma = \left(115.47 \frac{m}{s}; 193.66 \frac{m}{s}\right)$
 $\text{Vector Velocidad encuentro } Mb = \left(200 \frac{m}{s}; 193.66 \frac{m}{s}\right)$

EJERCICIO N° 80

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 12x + 1$ y $g : \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R} - \{j\} / g(x) = \frac{6x-11}{8x-96}$

Halle las ecuaciones de las dos rectas asíntotas a la curva grafica de la función compuesta.

$f \circ g$

Solución:

Para poder componer debemos ver que la imagen de la de adentro este incluida en el dominio del de adentro

$$\begin{aligned} & \text{Ig} \subseteq \text{Df} \\ \mathbb{R} - \{j\} \subseteq \mathbb{R} & \text{ Por lo tanto puedo componer} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ f \circ g(x) &= 12 * (g(x)) + 1 \end{aligned}$$

$$f \circ g(x) = 12 * \left(\frac{6x - 11}{8x - 96} \right) + 1$$

$$f \circ g(x) = \left(\frac{72x - 132}{8x - 96} \right) + 1$$

$$f \circ g(x) = \frac{72x - 132 + 1 * (8x - 96)}{8x - 96}$$

$$f \circ g(x) = \frac{72x - 132 + 8x - 96}{8x - 96}$$

$$f \circ g(x) = \frac{80x - 228}{8x - 96}$$

Ahora debemos hallar las asíntotas AV: $x = k$ y AH: $y = j$

La asíntota vertical se obtiene igualando a cero lo de abajo, entonces

$$\begin{aligned} 8x - 96 &= 0 \\ 8x &= 96 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

O sea que la asíntota se encuentra en $x = 12$, $k = 12$

La asíntota horizontal se halla haciendo $y =$ división entre las x o sea

$$Y = \frac{80x}{8x}$$

$$Y = 10$$

Osea que la asíntota se encuentra en $y = 10$, $x = 12$

Respuesta: AH: $y = 10$ AV: $x=12$

