

APENDICE DE MATEMATICA

El propósito de este Apéndice es presentar algunas herramientas matemáticas que se utilizan en las explicaciones teóricas o en la resolución de problemas de ejercitación y ejemplos. Debe ser considerado un repaso de nociones conocidas que serán vistas simultáneamente en cursos de matemática.

CAPITULO 1

ALGEBRA

1.1 NOCIONES ELEMENTALES

El álgebra es el conjunto de técnicas que usamos al realizar algún cálculo con números o para manejar operaciones del tipo suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etc., con números o con símbolos (letras) constantes o variables.

Dentro de las nociones elementales deseamos repasar algunas técnicas que han sido objeto de estudio en las escuelas medias, pero que tienen todavía dificultades serias para la mayor parte de los estudiantes que ingresan a la Universidad.

Comenzamos con las operaciones usuales con números, por ejemplo:

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16/5}{12} = ?$$

Aquí es necesario ante todo conocer el **orden** en que deben efectuarse los cálculos parciales. Para ello se han colocado los paréntesis en la operación parcial:

$$5 \cdot (7 - 9)$$

donde primero debe efectuarse la resta encerrada por los paréntesis y multiplicar el resultado obtenido por 5.

O sea:

$$5 \cdot (7 - 9) = 5 \cdot (-2) = -10$$

Aquí tenemos un ejemplo del producto (o multiplicación) de números de distinto signo: 5, que es positivo (lo que indicaremos en forma simbólica como $5 > 0$) y (-2) , que es negativo (o sea, $-2 < 0$). Para conocer el signo del resultado, hay que usar la siguiente

convención, en la cual suponemos que el "número simbólico" $a > 0$:

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot (-a) = -a^2$$

$$(-a) \cdot a = -a^2$$

$$(-a) \cdot (-a) = a^2$$

y lo mismo ocurre cuando se multiplican dos números a y b cualesquiera.

En realidad, la restricción $a > 0$ no es necesaria. Verifique que estas relaciones también son válidas si $a < 0$ y si $a = 0$.

Observe que es conveniente mantener el número negativo encerrado entre paréntesis para no confundir el tipo de operación.

$$5 \cdot (-2) \text{ correcto} \quad 5 \cdot -2 \text{ incorrecto}$$

Resuelta esta operación parcial nos queda:

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16/5}{12} = \frac{3-10-16/5}{12}$$

El numerador (la expresión que está sobre la barra horizontal) se puede interpretar de dos maneras ahora:

$$(3 - 10 - 16) / 5 \quad \text{ó} \quad 3 - 10 - (16/5)$$

Asumimos la siguiente convención para decidir en este tipo de casos: **de las operaciones indicadas se deben efectuar primero las potencias, luego los productos y/o divisiones y por último las sumas y restas, cuando no haya paréntesis que indiquen la prioridad de las operaciones.**

Así:

$$3 - 10 - 16/5 = 3 - 10 - (16/5) = \\ = 3 - 10 - 3,2 = -7 - 3,2 = -10,2$$

Finalmente nos queda:

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16,5}{12} = \frac{-10,2}{12}$$

Observe que hemos calculado el valor del numerador sin tocar para nada el denominador (la expresión -en este caso el número 12- que está bajo la barra horizontal).

Esto es nuevamente una aplicación de un orden de prioridad de las operaciones, que podemos indicar también así:

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16,5}{12} = [3+5 \cdot (7-9) - 16,5]/12$$

Realizando esta operación nos queda finalmente:

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16,5}{12} = 10,2/12 = -0,85$$

Note el signo del resultado y vincúlelo con la **regla de los signos** para el producto mencionado más arriba.

¿Qué pasa cuando el denominador consiste en una expresión numérica en lugar de ser un único número? Por ejemplo:

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16,5}{4-2 \cdot (5/2+4) + 8 \cdot 3} = ?$$

que podemos escribir:

$$[3+5 \cdot (7-9) - 16,5] / [4-2 \cdot (5/2+4) + 8 \cdot 3]$$

y calcular numerador y denominador por separado. El numerador es el mismo que en el ejemplo anterior, o sea, (-10,2), y el denominador es (observe el orden del cálculo):

$$4 - 2 \cdot (5/2 + 4) + 8 \cdot 3 = \\ = 4 - 2 \cdot (2,5 + 4) + 8 \cdot 3 = \\ = 4 - 2 \cdot 6,5 + 8 \cdot 3 = 4 - 13 + 8 \cdot 3 = \\ = 4 - 13 + 24 = 15$$

y entonces

$$\frac{3+5 \cdot (7-9) - 16,5}{4-2 \cdot (5/2+4) + 8 \cdot 3} = -10,2/15 = -0,68$$

A continuación resolvemos a modo de ejemplo el siguiente ejercicio 1.1.a:

$$\frac{16 \cdot (3 - 1,8 \cdot 2 + 0,5 \cdot 4) + 16 \cdot (3,4 - 4)}{8 \cdot (12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - 8 \cdot (4,2 - 1,6 \cdot 2 + 2,6)} = \\ = \frac{56}{-46} = -\frac{28}{23} \cong -1,2174$$

Este último ejemplo nos da ocasión para hablar sobre la simplificación:

$$\text{¿por qué } (-56/46) = (-28/23)?$$

Obsérvese que

$$56 = 28 \cdot 2 \quad \text{y} \quad 46 = 23 \cdot 2,$$

de modo que:

$$\frac{-56}{46} = \frac{-28 \cdot 2}{23 \cdot 2}$$

y simplificamos el **factor común** 2 en el numerador y denominador. Sólo cuando **ambos**, numerador y denominador, tienen un factor común, la simplificación es lícita. Así, por ejemplo:

$$\frac{32}{16} = 2 \quad \text{se puede representar como}$$

$$\frac{32}{16} = \frac{16 \cdot 2}{16 \cdot 1} \quad \text{y eliminamos el factor común 16}$$

o también:

$$\frac{32}{16} = \frac{16 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{16}{8} = \frac{8 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{8}{4} = \\ = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{4}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{2}{1} = 2$$

es una "simplificación" más larga, pero que lleva (como debe ser) al mismo resultado.

ALGEBRA

F Volvamos ahora al ejercicio 1.1.a. ¿Hay
I posibilidades de simplificación antes de la
S simplificación final, que se realizó luego de
I calcular por separado numerador y deno-
C minador?
A

Para contestar esta pregunta debemos observar si es posible extraer **factores comunes**, comunes a denominador y numerador, como en el caso anterior, o comunes a los términos que constituyen numerador o denominador como veremos ahora:

Tomemos el numerador:

$$16 \cdot (3 - 1,8/2 + 0,5 \cdot 4) + 16 \cdot (3,4 - 4) = 56$$

que podemos escribir:

$$16 \cdot (...) + 16 \cdot (...),$$

enfaticando que **sí** hay un factor común a los dos sumandos, 16, de modo que podemos escribir:

$$16 \cdot () + 16 \cdot () = 16 \cdot [() + ()]$$

o sea

$$16 \cdot (3 - 1,8/2 + 0,5 \cdot 4) + 16 \cdot (3,4 - 4) = \\ = 16 \cdot (3 - 1,8/2 + 0,5 \cdot 4 + 3,4 - 4)$$

Observe que hemos quitado los paréntesis interiores que, para sumas y restas, no hacen falta.

Veamos si podemos proceder en forma similar con el denominador:

$$8/(12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - 8 \cdot (4,2 - 1,6/2 + 2,6) = -46$$

que podemos escribir:

$$8/() - 8 \cdot ().$$

Acá puede haber duda, porque el primer 8 está dividido por algo en lugar de multiplicar algo como en el caso del numerador. Pero

$$8/(...) = 8 \cdot [1/(...)]$$

(Ej.: $8/3,2 = 8 \cdot (1/3,2)$ ¡verifíquelo!)

y entonces 8 es factor común y podemos escribir

$$8/(12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - 8 \cdot (4,2 - 1,6/2 + 2,6) = \\ = 8 \cdot [1/(12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - (4,2 - 1,6/2 + 2,6)]$$

¿Podemos simplificar más esta expresión? Observe el paréntesis precedido de un signo menos. Podemos quitarlo, y al signo, cambiando todos los signos de los números dentro de él, es decir

$$- (4,2 - 1,6/2 + 2,6) = -4,2 + 1,6/2 - 2,6$$

(¡verifíquelo!)

¿Por qué podemos hacer esto? Porque:

$$- (...) = (-1) \cdot (...)$$

y entonces

$$- (4,2 - 1,6/2 + 2,6) = (-1) \cdot (4,2 - 1,6/2 + 2,6)$$

Observe que (-1) es factor común de los términos interiores al paréntesis. Entonces podemos hacer la **operación inversa** a extraer factor común y tener:

$$- (4,2 - 1,6/2 + 2,6) = \\ = (-1) \cdot (4,2 - 1,6 + 2,6) = \\ = (-1) \cdot 4,2 - (-1) \cdot 1,6/2 + (-1) \cdot 2,6 = \\ = -4,2 + 1,6/2 - 2,6$$

Observe con cuidado el segundo término, donde hemos reemplazado a (-(-1)) por +1, y asocie esta operación con la "regla de los signos" que dimos con anterioridad.

En realidad esta última "simplificación" no simplifica demasiado la operatoria. Cuando hablamos de simplificar queremos decir obtener una expresión de más fácil cálculo. Como vimos, esto no siempre ocurre, y queda a su criterio decidir si en un caso dado se le facilitan las operaciones "simplificando" los términos comunes.

Veamos como quedó hasta ahora la expresión del ejercicio:

$$\frac{16(3 - 1,8/2 + 0,5 \cdot 4) + 16(3,4 - 4)}{8/(12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - 8(4,2 - 1,6/2 - 2,6)} = \\ = \frac{16(3 - 1,8/2 + 0,5 \cdot 4 + 3,4 - 4)}{8[1/(12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - 4,2 + 1,6/2 - 2,6]}$$

y ahora podemos simplificar entre numerador y denominador el factor común 8 (ya que $8 \cdot 2 = 16$) y nos queda:

$$\frac{2 \cdot (3 - 1,8 \cdot 2 + 0,5 \cdot 4 + 3,4 - 4)}{1 \cdot (12 - 7 \cdot 1,5 + 2,5) - 4 \cdot 2 + 1,6 \cdot 2 - 2 \cdot 6} =$$

$$\frac{7}{(-5,75)} \cong -1,2174$$

igual que antes. Observe el resultado: Tiene muchas cifras (es igual a $-1,217391304\dots$) y lo hemos **truncado y redondeado**, de modo que es un resultado **aproximado** al real y por esa razón usamos el signo \cong . ¿Qué quiere decir truncar y redondear? **Truncar** significa eliminar cifras que son significativas pero que podemos considerar despreciables para la precisión de nuestros cálculos en algunos problemas de Física. En nuestro ejemplo hemos truncado las cifras 1304 del final. Y **redondear** significa que aproximamos las últimas dos cifras del número truncado a la decena más próxima. En nuestro caso



Si hubiéramos truncado a la **cuarta** cifra decimal tendríamos

$$-1,217391304\dots \rightarrow -1,2173$$

Practique truncando y redondeando el número π :

$$\pi = 3,14159265358979\dots$$

(que ya ha sido truncado y redondeado ... π es un número irracional, lo que significa que no puede expresarse como una fracción o cociente de enteros, en consecuencia tendrá infinitas cifras decimales no periódicas). Le damos algunos ejemplos:

$$\pi \cong 3,14$$

$$\pi \cong 3,1416$$

$$\pi \cong 3,141593$$

$$\pi \cong 3,1$$

$$\pi \cong 3$$

Recuerde que para simplificar entre **F** numerador y denominador es necesario que **I** haya un factor común, y al llamarlo **factor** **I** queremos decir que es un número -o una **C** expresión numérica- que multiplica a otro **A** número o a otra expresión numérica; **común** significa que afecta a ambos.

Por ejemplo, si se tiene:

$$\frac{16+24}{8} = 26 \quad \text{es incorrecto}$$

El procedimiento correcto es

$$\frac{16+24}{8} = \frac{8 \cdot (2+3)}{8} = 2+3 = 5$$

A pesar de ser una buena práctica, recuerde que no es necesario simplificar para llegar a un resultado correcto. Si Ud. dispone de una calculadora, tal vez pierda menos tiempo y tenga menor probabilidad de error si usa la expresión original. Si no comete errores operativos, los cálculos deben dar el mismo resultado simplificando o no. Sin embargo, cuando se trata de expresiones simbólicas (con letras en vez de números), la simplificación permite obtener una comprensión más cabal de los resultados.

Vamos a extender estas operaciones al caso de expresiones simbólicas o literales, donde simbolizaremos a un número o a una expresión numérica mediante letras. Por ejemplo:

$$\frac{3a + b}{15c} = 7 \quad \text{donde:}$$

1) "a", "b", y "c" simbolizan a tres números, por ejemplo:

$$a = 4; b = 12; c = 2$$

2) "3 a" significa "3 · a", entonces

$$3 a = 3 \cdot a = 3 \cdot 4 = 12 \quad \text{ya que } a = 4$$

Luego,

$$\frac{3a + b}{15c} = \frac{3 \cdot 4 + 12}{15 \cdot 2} = 0,8$$

ALGEBRA

F ¿Cuál es el uso de estos símbolos? Primero, en el caso de números de muchas cifras es más cómodo, al tener que operar algebraicamente con una expresión, escribir "a" en lugar del número mismo, y reemplazarlo al final de la operación cuando se desea realizar el cálculo propiamente dicho. Segundo, en la física hay constantes universales, o sea números (medidas) que aparecen muy seguido en las expresiones matemáticas, como por ejemplo la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y generalmente hablamos de "g" al referirnos a este número. Y tercero y acaso más fundamental, porque la forma matemática de una expresión es más clara y permite obtener una comprensión más acabada de qué se está calculando, cuando se trabaja con símbolos literales. Cuarto, hay expresiones que son siempre las mismas, aunque los datos numéricos a veces cambien.

Hasta aquí hemos visto símbolos de números dados y conocidos, como en el ejemplo anterior, es decir que a, b, y c son datos del problema. Hay otros casos en que el objetivo del cálculo es obtener el valor numérico de un símbolo literal, como por ejemplo:

$$x = \frac{2-3}{6-4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Esto es lo que denominamos una **ecuación**. La idea es saber cuál es el número representado por el símbolo "x" que satisface la igualdad. En el ejemplo anterior podemos confirmar, por ejemplo el valor de "b", conociendo "a", "c" y la relación $(3a + b)/15c = 0,8$. Para hacer esto, despejamos b:

$$\begin{aligned} \frac{3a + b}{15c} = 0,8 &\Rightarrow 3a + b = \\ &= 0,8 \cdot 15c \Rightarrow b = 0,8 \cdot 15c - 3a \end{aligned}$$

Reemplazando c y a por sus valores numéricos:

$$b = 0,8 \cdot 15 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 12$$

que es el valor asignado a **b** en el ejemplo. En la jerga matemática, el obtener el valor numérico de un símbolo a partir de una ecuación que involucra números y/u otros

símbolos, se denomina "despejar la incógnita". Así, deseamos calcular la incógnita x de la ecuación:

$$x = \frac{3+2}{6-4} \text{ y el valor de la incógnita es}$$

$$x = 2,5$$

Vamos a ver otros ejemplos de ecuaciones como ejercitación. La idea en todos ellos es despejar la incógnita x:

a) $x - 1 = 3x - 21$

b) $2(x - 1) = 3(x + 2)$

Pasando de miembro (observe que todos los términos que pasamos son sumandos o sustraendos de la expresión)

a) $x - 1 = 3x - 21 \Rightarrow 3x - 21 = x - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x - 21 - x = -1 \Rightarrow 3x - x = -1 + 21$
 $\Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 20/2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 10$

b) $2(x - 1) - 3(x + 2) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(x - 1) = 3(x + 2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x - 2 = 3x + 6 \Rightarrow$
 $-2 - 6 = 3x - 2x \Rightarrow -8 = x \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -8$

Tal vez todo hasta aquí sea claro, salvo los **pasajes de miembro**. Suelen producirse dificultades al pasar un término de un miembro de una igualdad al otro. Son errores típicos y frecuentes en los exámenes. En el ejemplo parece claro que:

* Si 21 está restando en el primer miembro de

$$3x - 21 - x = -1$$

pasa sumando al segundo miembro:

$$3x - x = -1 + 21$$

* Si 2 está multiplicando en el primer miembro de

$2x = 20$, pasa dividiendo al segundo miembro:

$$x = 20/2$$

pero ¿cómo pasamos de miembro a x en la siguiente expresión?

$$2x + 5 = 12 + 3ax$$

Para hacerlo, recordemos el orden en que realizamos las operaciones: suponiendo que conocemos "a" y "x", para calcular el segundo miembro tenemos primero que multiplicar $3 \cdot a \cdot x$, y **después** sumar este resultado a 12. Si queremos conservar la misma expresión al realizar el pasaje de miembro, debemos respetar este orden. Así, explicitando la prioridad de la operación con paréntesis, podemos escribir:

$$(2x) + 5 = 12 + (3ax)$$

Cada paréntesis (o número) es ahora un sumando, y podemos hacer el pasaje de miembro como en el ejemplo anterior:

$$(2x) + 5 - (3ax) = 12$$

y eliminando los paréntesis y sacando factor común "x" en el primer miembro:

$$x(2 - 3a) + 5 = 12$$

y podemos despejar x (observe los pasajes de miembro)

$$x(2 - 3a) = 12 - 5 = 7$$

Hay quienes prefieren hacer los despejes mediante el artificio equivalente, pero más fácilmente comprensible, de **hacer la misma operación** a los dos miembros:

$$2x + 5 = 12 + 3ax$$

resto $3ax$, a ambos:

$$\begin{array}{l} \underline{2x - 3ax} + 5 = 12 + \underline{3ax - 3ax} \\ \text{esto es:} \qquad \qquad \qquad \text{esto se va} \\ x(2 - 3a) \end{array}$$

resto 5 a ambos miembros:

$$x(2 - 3a) + 5 = 12$$

$$x(2 - 3a) = 7$$

divido a ambos miembros por $(2 - 3a)$:

$$x = \frac{7}{2 - 3a}$$

—... y llegamos, como era de esperar, a lo mismo.

Ejercítense -especialmente en los pasajes de términos- resolviendo los ejercicios propuestos al final del Capítulo, serie 1.1.

Las ecuaciones que te propusimos resolver en el párrafo anterior, tienen un sólo símbolo literal, la incógnita x, pero puede haber (y los hay) casos en que existan otros símbolos literales de valor conocido. Volviendo al primer ejemplo, podríamos escribir:

$$x = \frac{3a + b}{15c}$$

donde, como antes, $a = 4$; $b = 12$ y $c = 2$. Entonces, como antes,

$$x = \frac{3 \cdot 4 + 12}{15 \cdot 2} = 0,8$$

Veamos otro ejemplo:

$$ax + b = cx + d$$

donde deseamos despejar x en función de a, b, c y d, cuyos valores numéricos suponemos conocidos.

$$ax + b = cx + d \Rightarrow ax - cx + b = d \Rightarrow$$

$$ax - cx = d - b \Rightarrow x(a - c) = d - b \Rightarrow$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

¿Es este resultado el mismo que $x = \frac{b - d}{c - a}$?

(Respuesta: Sí)

Reemplazando los valores numéricos de a, b, c y d obtendríamos el valor numérico de x.

Estas ecuaciones que hemos visto plantean el cálculo del valor numérico de **una** incógnita que hemos llamado x. ¿Podemos con **una única ecuación** despejar más de **una** incógnita? La respuesta es que **no** podemos hacerlo. Veamos el ejemplo anterior:

$$ax + b = cx + y$$

donde hemos escrito "y" en lugar de "d", y supongamos $a = 6$; $b = 2$; $c = 4$. En esta ecuación no conocemos los valores numéricos

ALGEBRA

F de **x** ni de **y**. Al despejar **x** obtenemos, como antes:

$$x = \frac{y - b}{a - c} \quad \text{y reemplazando los valores}$$

conocidos:

$$x = \frac{y - 2}{6 - 4} = \frac{y - 2}{2} = \frac{1}{2}y - 1$$

O sea que no podemos obtener un valor numérico para **x** al no conocer el valor numérico de **y**. Análogamente, si ahora intentamos despejar **y**:

$$a x + b = c x + y \Rightarrow a x + b - c x = y \Rightarrow y = b + (a - c) x$$

y reemplazando los valores numéricos disponibles: $y = 2 + 2x$ (verifique que esta relación es la misma que la que encontramos anteriormente al despejar **x**). Nuevamente, al no conocer el valor numérico de **x**, no podemos obtener el valor numérico de **y**. Aparentemente el problema de hallar los valores numéricos de dos incógnitas con una ecuación no tiene generalmente solución única. Pero esta ecuación sí tiene solución, en el sentido que podemos encontrar pares de valores numéricos para **x** e **y** que la satisfacen, por ejemplo:

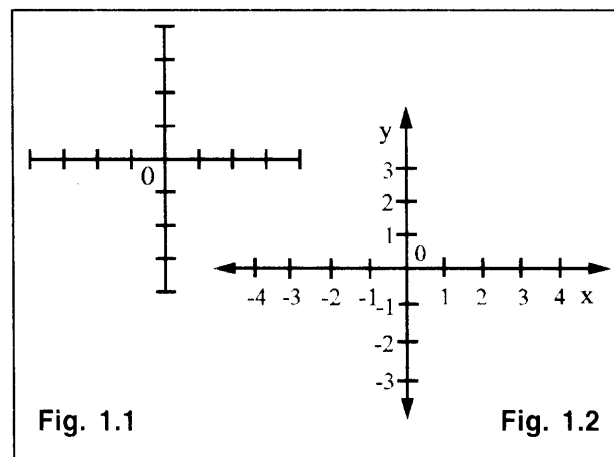
- $x = 1: \quad y = 4$
- $x = 0: \quad y = 2$
- $x = 2: \quad y = 6$
- $x = -4: \quad y = 0$
- etc. etc

Cada uno de estos pares de valores es solución y entonces nos encontramos con que en lugar de tener **una** solución, como ocurrió hasta ahora con la ecuación con una incógnita, tenemos muchas soluciones, en realidad infinitas soluciones. Esto siempre ocurre con una ecuación con **dos** incógnitas (*1). Naturalmente es imposible escribir las infinitas soluciones, pero existe un método de **representar** estas soluciones que es cómodo y útil para visualizarlas rápidamente. Este caso es el de las ...

1.2 INTERPRETACIONES GRAFICAS

Supongamos que trazamos un par de líneas rectas y perpendiculares entre sí, como en la **Fig.1.1**, y las subdividimos en partes iguales como las marcas de una regla. Es más, como las vamos a utilizar como reglas, una horizontal y otra vertical, adjudicamos números a las divisiones, con la elección (convencional) de poner el número **0** para ambas reglas en el punto de cruce.

También para saber de qué lado del **0** estamos, si a la derecha o a la izquierda en el caso de la recta horizontal, o si hacia arriba o hacia abajo en el caso de la recta vertical, le asignamos **signo** a los números que colocamos sobre las divisiones.



La forma más común de hacerlo es dando (arbitrariamente) signo negativo a las divisiones de la recta horizontal que están a la izquierda del cero y a las divisiones de la recta vertical que están por debajo del cero. Pueden cambiarse estas convenciones por la que resulte más cómoda ante cada problema físico.

Nos queda entonces algo así, que llamamos "ejes cartesianos":

¿Para qué nos sirve esto? Supongamos además que tenemos una ecuación con dos incógnitas como en el último ejemplo:

$$y = 2x + 2$$

* 1. Un ejemplo de una sola ecuación con dos incógnitas que tienen solución única es $x^2 + y^2 = 0$. Solución: $x = 0$ e $y = 0$.

Vamos a obtener una **representación gráfica** de esta ecuación suponiendo que los valores de **x** están representados por la regla horizontal (que en la jerga matemática se llama **eje de abscisas**) y que los valores de **y** están representados por la regla vertical (el llamado **eje de ordenadas**). Para señalar esta identificación, escribimos "x" sobre la regla horizontal e "y" sobre la vertical, como indicamos en la figura. Las flechas sobre los ejes indican los sentidos A positivos. Consideremos ahora qué pasa con nuestra ecuación si, por ejemplo, $x = 1$.

En tal caso:

$$y = 2x + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

Esto significa que al valor $x = 1$ corresponde, a través de la ecuación, el valor $y = 4$.

La representación gráfica de esta correspondencia consiste en marcar en el plano que determinan nuestros ejes cartesianos un punto, correspondiente a las divisiones que simbolizan $x = 1$ e $y = 4$ como se ha hecho en la **Fig. 1.3** (punto A).

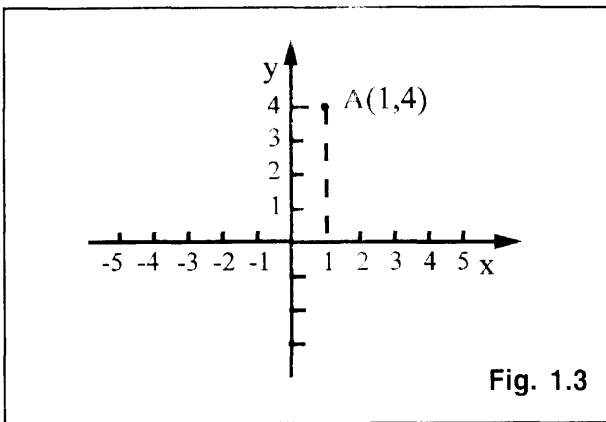


Fig. 1.3

Podemos marcar todos los otros "puntos" que correspondan a pares (x,y) que satisfacen la ecuación, como las que habíamos señalado antes:

$$x = 0; \quad y = 2 \quad (\text{punto B})$$

$$x = -1; \quad y = 0 \quad (\text{punto C})$$

Si tuviéramos el tiempo y la posibilidad de marcar todos los puntos de este plano que representan la ecuación:

$$y = 2x + 2,$$

observaríamos que se forma una **línea recta** como gráfica de la ecuación. Como resulta una recta, decimos que nuestra ecuación es la ecuación de una recta. En realidad toda ecuación del tipo:

$$y = mx + b$$

donde **m** y **b** representan números dados, tiene como representación una línea recta en el gráfico cartesiano.

La recíproca no es cierta: no toda línea recta en el plano cartesiano puede representarse por la ecuación $y = mx + b$.

La excepción está dada por las rectas **verticales**, para cuyos puntos, **y** puede ser cualquiera, mientras que **x** está fija, y la ecuación que las representa es:

$$x = x_1$$

$$x = x_2$$

$$x = x_3$$

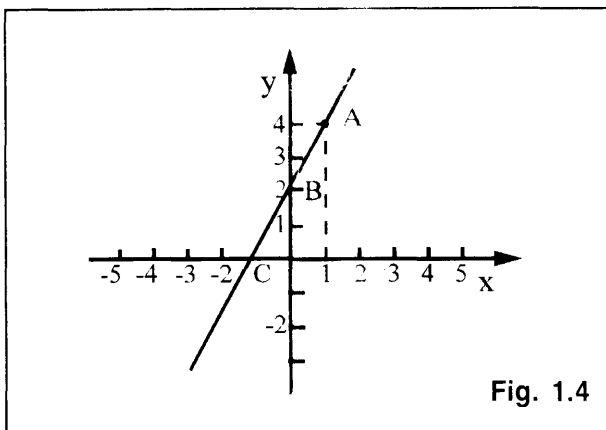


Fig. 1.4

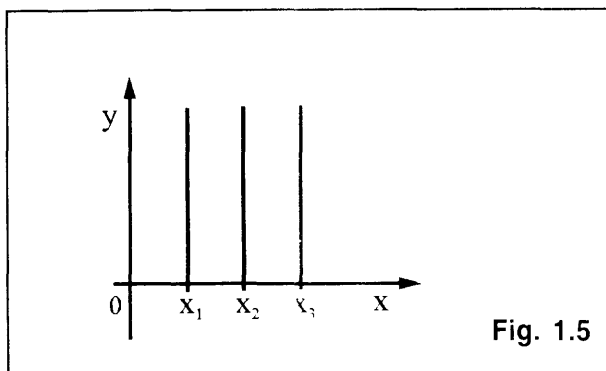


Fig. 1.5

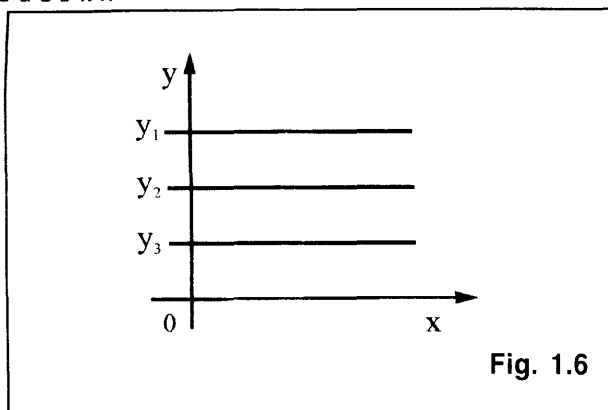


Fig. 1.6

En las rectas **horizontales**, del mismo modo, **y** está fija mientras que **x** puede ser cualquiera:

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y &= y_2 \\ y &= y_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pero estas ecuaciones corresponden, en la ecuación general:

$$y = mx + b. \quad \text{a tener } m = 0;$$

$$b = y_1, \text{ ó } b = y_2, \text{ etc.}$$

Diremos que la ecuación general de la recta $y = mx + b$ (con la excepción dada) es una **ecuación lineal**, para diferenciarla de otras ecuaciones, por ejemplo, $y = ax^3 + cx^2$, donde al menos una de las dos incógnitas aparece elevada a una potencia que no es 1, y que veremos en el caso más sencillo, más adelante.

En ésta expresión la palabra lineal debe entenderse como relacionada con la línea recta, y no otras líneas curvas.

Por supuesto, nadie va a tomar los infinitos puntos que representan los pares (x,y) que satisfacen la ecuación. Como sabemos que se trata de una recta, basta conocer dos puntos de la misma para determinarla, por ejemplo, los puntos A y B (ó A y C ó B y C) de la **Fig. 1.4** y viceversa, a partir de la representación es posible obtener la ecuación correspondiente. Para ver este procedimiento, vamos a analizar el significado de las dos cantidades **m** y **b** que figuran en la ecuación general de la recta

$$y = mx + b$$

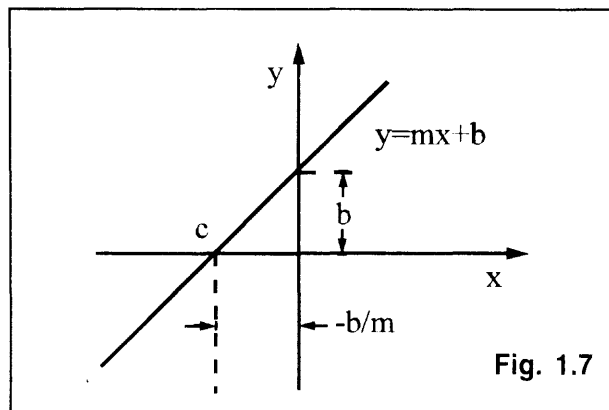


Fig. 1.7

Podemos observar, primero, que para $x = 0$, el valor correspondiente de **y** es $y = b$. Este punto $(x = 0; y = b)$ corresponde al punto B de nuestra representación anterior y es el punto en que la recta corta al eje de ordenadas. La distancia medida sobre la regla vertical entre tal punto y el cero es justamente **b**. Como al punto cero de cruce de los ejes cartesianos también se denomina origen de los ejes, a esta distancia suele llamársele **ordenada al origen**. La situación se ilustra en la **Fig.1.7**, donde no hemos colocado números por estar trabajando con un ejemplo con cantidades simbólicas.

¿Qué pasa cuando $y = 0$? De la ecuación de la recta,

$$y = 0 \Rightarrow mx + b = 0 \Rightarrow x = -b/m$$

lo que quiere decir que el punto $(x = -b/m, y = 0)$ pertenece a la recta (o satisface la ecuación). Este punto es el llamado C en la **Fig.1.4**, la **abscisa al origen**, el punto donde la recta corta al eje de abscisas.

Entonces, para representar una recta de ecuación $y = mx + b$ podemos determinar dos puntos:

$$\text{ordenada al origen } (x = 0; y = b)$$

$$\text{abscisa al origen } (x = -b/m; y = 0)$$

sobre el plano cartesiano y trazar la recta uniéndolos. ¿Qué pasa si $b = 0$, o sea $y = mx$?

Si $y = mx$, para cada valor de **m** tenemos una recta que pasa por el origen de los ejes cartesianos y de este modo definimos todas las rectas (excepto la vertical) que pasan por el punto $(x = 0; y = 0)$, de las que se han representado dos en la **Fig. 1.8**. Observe que hemos puesto m_1 y m_2 para distinguirlas.

Observe que en el caso general (consideremos por ahora positivas a m_1 y m_2)

$$y_1 = m_1 x \qquad y_2 = m_2 x$$

para un x dado, los valores correspondientes de y_1 e y_2 satisfacen la relación:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

y por lo tanto, si

$$m_2 > m_1 \Rightarrow y_2 > y_1$$

Como la cantidad m da información acerca de cuán empinada es la recta, se la denomina **pendiente** de la recta. O sea que visualmente, en **una misma** representación gráfica, podemos distinguir que una recta tiene mayor pendiente que otra. ¿Y por qué en **una misma** representación gráfica? Observe las siguientes figuras:

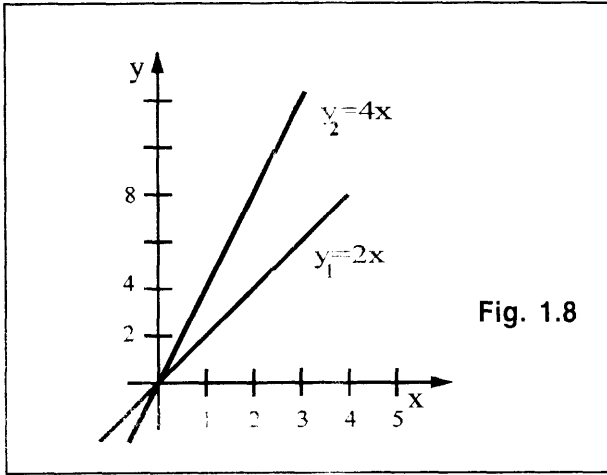


Fig. 1.8

Para saber cómo puede hacerse esta distinción y qué consecuencias tiene en la representación gráfica, vamos a usar un ejemplo numérico:

Sean $y_1 = 2x$ e $y_2 = 4x$ las dos rectas de la Fig. 1.9. Ambas responden a la forma general: $y = mx$, y pasan por el origen cero.

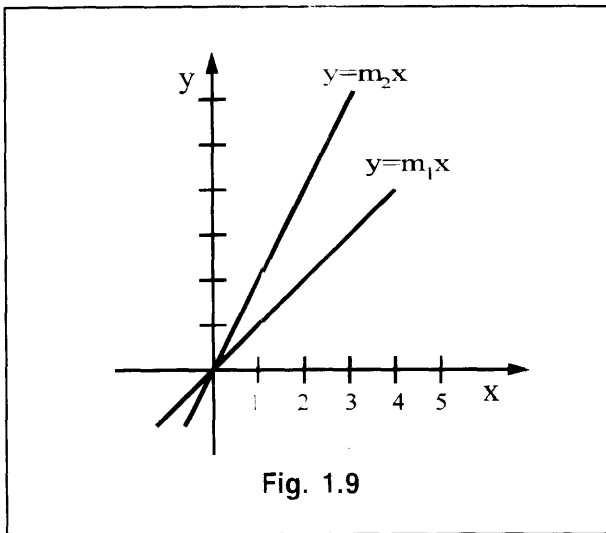


Fig. 1.9

Para

$$x = 1 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow y_1 = 4; y_2 = 8$$

y se ve que para todo valor $x > 0$ (positivo) el correspondiente valor de y_1 es menor que el correspondiente valor de y_2 . Pero de las ecuaciones respectivas, observamos que esta relación también se cumple con los m , 2 y 4. O sea que cuanto mayor sea m , más empinada es la recta.

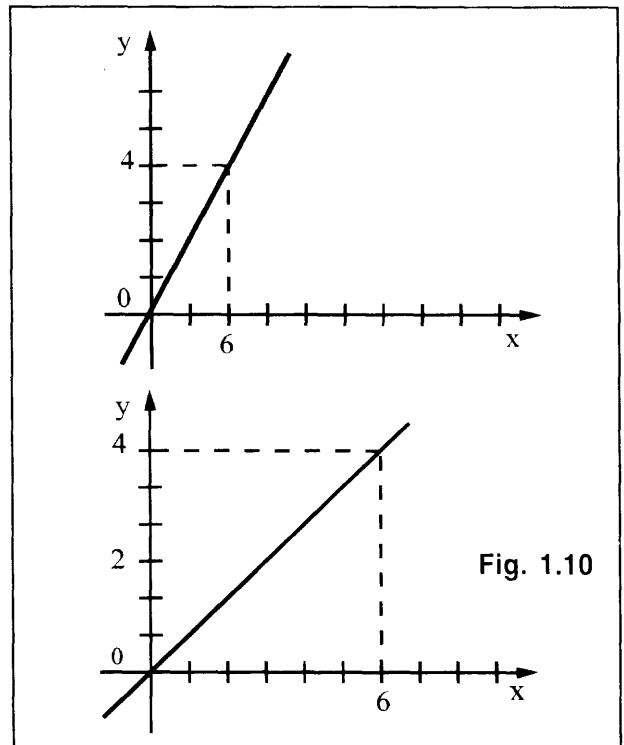


Fig. 1.10

A primera vista se diría que la recta del gráfico superior tiene mayor pendiente que la del inferior. Sin embargo ambas son representaciones gráficas de la **misma** recta, $y = 2/3 x$; observe que ambas pasan por el origen y por el punto $(x = 4, y = 6)$. Lo que pasa es que la regla de la gráfica de la izquierda tiene divisiones más pequeñas que la otra. Decimos que la **escala** de los gráficos es diferente.

Lo mismo ocurriría si hubiésemos cambiado la escala del eje de ordenadas. Entonces la comparación visual **sólo** tiene sentido si los ejes de ambas representaciones tienen la misma escala, o sea la misma unidad de medida. A esto nos referimos antes al hablar de **una misma** representación gráfica.

Tenemos así que las cantidades m (pendiente) y b (ordenada al origen) de la ecuación de la recta $y = m x + b$ caracterizan completamente a la recta: la pendiente da (en la escala de la representación) la inclinación de la recta respecto del eje horizontal o de abscisas y la ordenada al origen es la distancia al origen con que la recta corta al eje vertical o de ordenadas.

Sería conveniente que realice los ejercicios de la serie 1.2, antes de seguir el desarrollo de estos temas.

Veamos por ejemplo, el 1.2.b)

$$\begin{aligned} x/3 - y_2/5 &= 1 \Rightarrow x/3 - 1 = y_2/5 \Rightarrow \\ y_2 &= 5/3 x - 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow b &= -5; \quad m = 5/3 \end{aligned}$$

de donde la ordenada al origen es $b=-5$ y la abscisa al origen es $(-b/m)=3$, y la representación gráfica de la recta se muestra en la **Fig. 1.11**.

Otra forma posible de representar rectas en el plano cartesiano es usar directamente la ordenada al origen y la **pendiente** que, como hemos dicho, está relacionada con la inclinación de la recta respecto del eje horizontal.

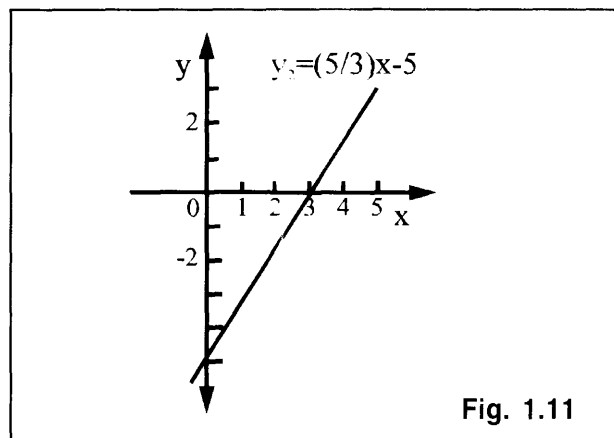


Fig. 1.11

Para expresar esta relación debemos hacer una incursión en el terreno de la ...

1.3 TRIGONOMETRIA ELEMENTAL

La **trigonometría** es una rama de la matemática asociada al estudio de las propiedades de los triángulos (tri: tres, gono: ángulo, metro: medir). Consideremos, para ejemplificar la situación, la representación gráfica de dos rectas con la misma ordenada al origen:

$$y_1 = m_1 x + b ; y_2 = m_2 x + b$$

Sabemos que la recta será más empinada (mayor inclinación respecto del eje x) cuanto mayor sea su pendiente, de modo que en la **Fig.1.12** se cumple que

$$m_2 > m_1, \text{ ambas positivas}$$

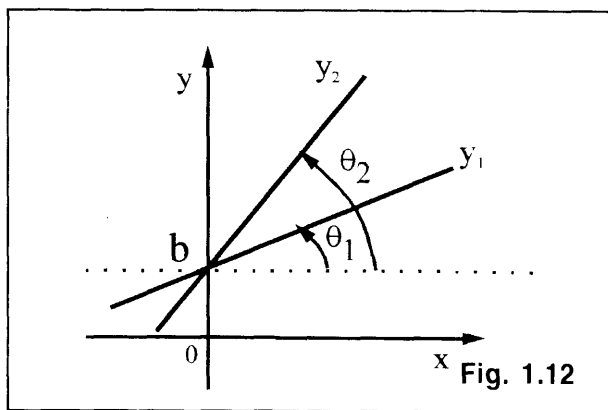


Fig. 1.12

También podemos medir esa inclinación con el **ángulo** θ que la recta forma con el eje x . Observe la convención con que se mide θ : a partir de la parte positiva del eje x y en sentido antihorario, **Fig. 1.13**.

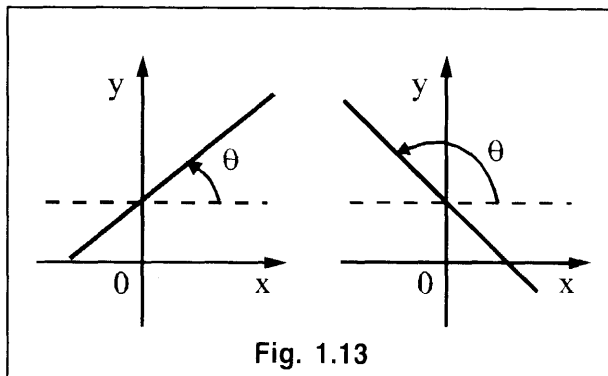


Fig. 1.13

En nuestro ejemplo para las dos rectas de la **Fig.1.12**

$$\theta_2 > \theta_1$$

Ahora deseamos establecer una relación matemática entre m y θ para cualquier recta. Consideramos entonces dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecientes a la recta, **Fig. 1.14**. Para ahorrar escritura simbolizaremos los **incrementos** (aumentos) en las variables coordenadas con:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

y usando la ecuación de la recta

$$y = mx + b$$

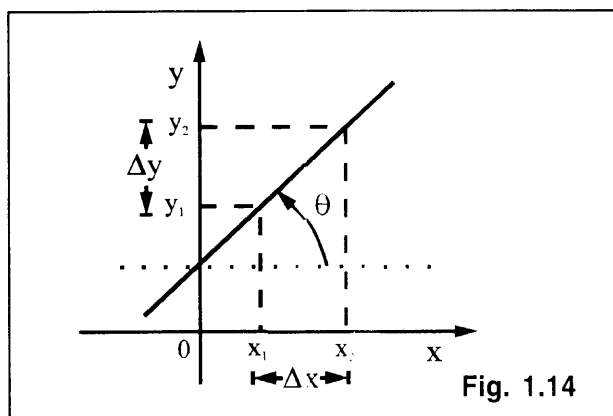


Fig. 1.14

podemos escribir:

$$y_2 = mx_2 + b$$

$$y_1 = mx_1 + b$$

Restando miembro a miembro estas dos ecuaciones tenemos:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b) = m(x_2 - x_1)$$

o sea:

$$\Delta y = m\Delta x \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir que la pendiente de la recta es igual al cociente de incrementos, y observe que, como los puntos tomados para definirlos son cualesquiera, esta relación es independiente de los valores (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y es una propiedad de la recta misma.

Dado que los ejes x , y (y por lo tanto también los segmentos Δx y Δy) son perpendiculares entre sí resulta un triángulo rectángulo de catetos de longitud igual a Δx y Δy , respectivamente, e hipotenusa dada por el tramo de la recta entre los dos puntos considerados, **Fig. 1.15**.

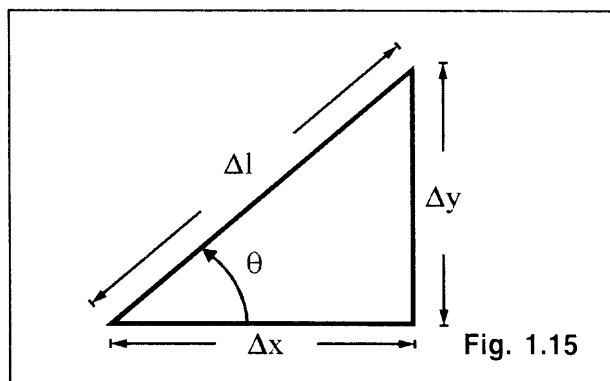


Fig. 1.15

La longitud Δl de esta hipotenusa se puede obtener mediante el **Teorema de Pitágoras**:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Por otra parte, Δx y Δy están relacionados entre sí por la pendiente de la recta:

$$\Delta y = m \Delta x.$$

Estas dos relaciones entre las longitudes Δx , Δy , y Δl han surgido hasta ahora en forma geométrica. Podemos obtener otras relaciones **definiendo** las **funciones trigonométricas** asociadas al ángulo θ :

$$\text{seno } \theta = \text{sen } \theta = \frac{\Delta y}{\Delta l}$$

$$\text{coseno } \theta = \text{cos } \theta = \frac{\Delta x}{\Delta l}$$

$$\text{tangente } \theta = \text{tg } \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \text{tg } \theta$$

Repetimos: estas son definiciones. Hay otras funciones trigonométricas que pueden derivarse de estas fundamentales, pero que no son imprescindibles para nuestro curso.

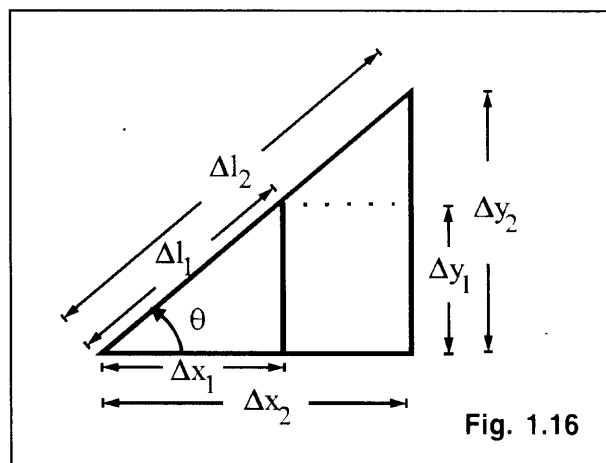


Fig. 1.16

ALGEBRA

F Las funciones trigonométricas dependen
I exclusivamente del ángulo considerado. Para
S demostrarlo consideremos los dos triángulos
I de la **Fig 1.16**, que comparten el ángulo θ : el
C triángulo mayor definido por Δx_2 , Δy_2 y Δl_2
A y el triángulo menor definido por Δx_1 , Δy_1 y Δl_1 . Puede observar que estos triángulos se extraen de la misma recta, $y = mx + b$, tomando incrementos diferentes en las variables x e y .

Entonces

$$m = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$$

y se ve que la relación $\Delta y/\Delta x$, que da la tangente del ángulo θ es la misma para cualquier Δy y cualquier Δx , es una relación que depende únicamente de la pendiente de la recta o, lo que es lo mismo, del ángulo θ . Así la función $\text{tg}\theta$ calculada con cualquier triángulo rectángulo que deseemos construir, da siempre el mismo valor.

Veamos qué pasa con las otras funciones trigonométricas:

tenemos: $\cos \theta = \frac{\Delta x_1}{\Delta l_1}$

pero

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x_1^2 + (m \Delta x_1)^2} = \Delta x_1 \sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\Delta y_1 = m \Delta x_1$.

Análogamente

$$\Delta l_2 = \Delta x_2 \sqrt{1 + m^2}$$

y entonces

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta l_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta l_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = \cos \theta$$

y nuevamente la función trigonométrica coseno no depende de los valores particulares de Δx y Δy . Finalmente, notemos que:

$$\sin \theta = \frac{\Delta y}{\Delta l} = \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \left(\frac{\Delta x}{\Delta l} \right) \right] = \text{tg } \theta \cos \theta$$

$$\left(\Rightarrow \sin \theta = m \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \right)$$

y como $\text{tg } \theta$ y $\cos \theta$ son funciones independientes de los valores de Δx y Δy , $\sin \theta$ también lo será. Las funciones trigonométricas dependen exclusivamente del ángulo θ al que están asociadas.

Del procedimiento anterior podemos resumir las siguientes relaciones de las funciones trigonométricas con la pendiente de la recta:

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= m \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \\ \sin \theta &= \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \end{aligned}$$

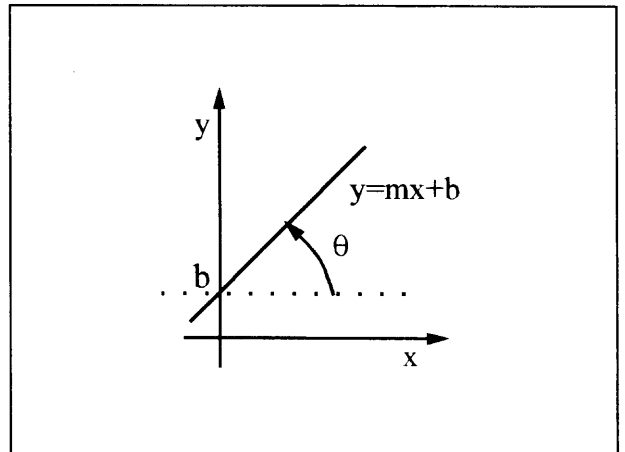


Fig. 1.17

y las siguientes relaciones entre las mismas funciones trigonométricas (¡dedúzcalas!)

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \\ \sin \theta &= \frac{\text{tg } \theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \right) \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \theta} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta} - 1}$$

NOTAS:

A) Hemos identificado la pendiente **m** de la recta con la tangente trigonométrica del ángulo θ que forma con el eje horizontal. En rigor, esto no siempre es correcto y es una fuente habitual de confusión por dos motivos:

i) Las magnitudes asociadas a los ejes cartesianos. La función $\operatorname{tg} \theta$ no tiene dimensiones (o unidades) porque se trata de un cociente entre longitudes, $\Delta y / \Delta x$. Por otra parte, en Física graficamos funciones que sí tienen unidades. Por ejemplo, la velocidad de una partícula con aceleración constante varía en el tiempo según la expresión:

$$v(t) = v_0 + a t$$

donde v_0 es la velocidad inicial $v_0 = v(0)$, "a" la aceleración y **t** el tiempo. Si graficamos esta relación en un diagrama cartesiano, llevando **t** en abscisas y **v** en ordenadas, la gráfica resulta una línea recta. La pendiente de esta recta es la aceleración del movimiento.

$$m = a$$

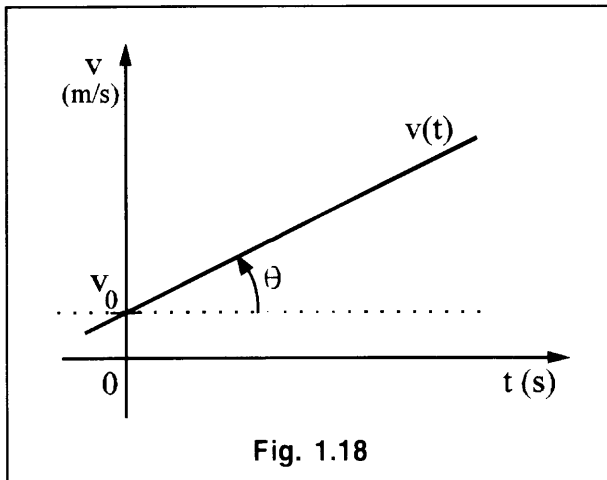


Fig. 1.18

y por tanto, está medida en unidades de aceleración, es decir, en, por ejemplo, m/s^2 . Por otra parte, la función tg no tiene unidades.

Entonces, hablamos más rigurosamente si decimos que la pendiente de la recta es **proporcional** a $\operatorname{tg} \theta$, en lugar de decir que son **iguales**. Por ejemplo sabemos que el ángulo cuya tangente es 1 es de 45° .

¿Pero qué ángulo tendrá como tangente a 1 m/s^2 ? No lo hay. En todos los casos de interés para la Física, los ejes cartesianos representan magnitudes físicas y tienen unidades, de modo que hay que tener cuidado de no confundir la pendiente como relación de cantidades geométricas. Además, tenemos un segundo problema, que es

ii) la **escala** del dibujo, sobre la cual ya hemos hablado. Los dos gráficos de la figura representan el mismo movimiento, pero las escalas (es decir, la longitud que representa a la unidad de medida) de los ejes horizontales correspondientes al tiempo son distintas, y por lo tanto, son distintos los ángulos de inclinación θ de las rectas y sus tangentes trigonométricas respectivas.

Sin embargo las pendientes, que dan la aceleración del movimiento, son iguales por tratarse del mismo movimiento: 10 m/s^2 .

Este problema también se salva considerando a la pendiente como **proporcional** a la

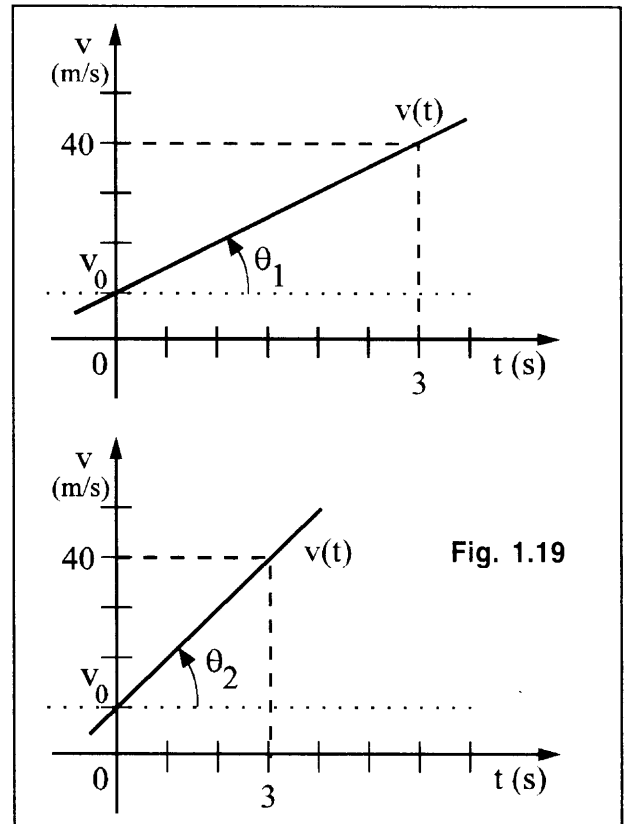


Fig. 1.19

F tangente trigonométrica del ángulo de inclinación en la representación gráfica.

Para una gráfica dada, entonces, hay una constante de proporcionalidad entre m y $\text{tg}\theta$: $m = C \text{tg}\theta$. Esta constante C depende de:

- las unidades dimensionales de las magnitudes representadas sobre los ejes cartesianos.
- la escala del grafico.

B) Sobre la medida de los ángulos:

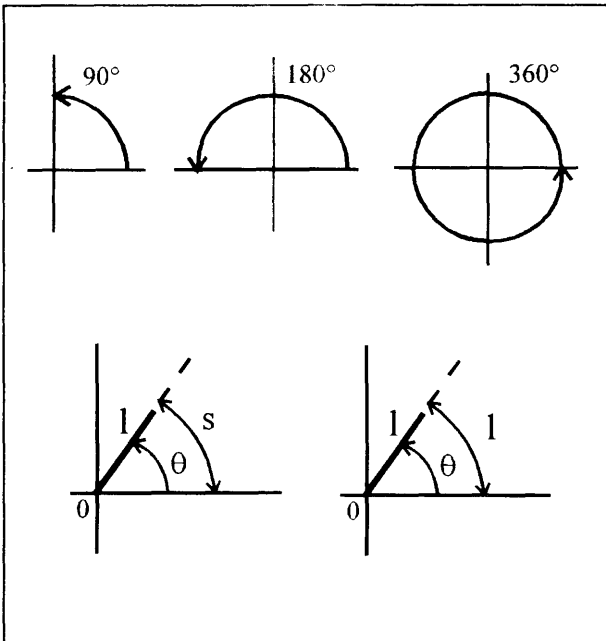


Fig. 1.20

EL uso corriente es medir los ángulos en grados, de modo que un ángulo recto corresponde a 90° y una vuelta completa a 360° . En cálculos científicos a menudo es conveniente usar otra unidad de medida que es el **radián**. Supongamos una barra de longitud l que gira alrededor de uno de sus extremos O . Se define al **radián** como el ángulo que gira la barra cuando la longitud del arco de circunferencia recorrido por el extremo libre es igual a la longitud de la barra, como se indica en la figura. Para cualquier ángulo barrido, su valor en radianes es igual al cociente entre la longitud del arco de circunferencia recorrido por el extremo libre y la longitud de la barra, o sea:

$$\theta \text{ (radianes)} = s / l$$

Para relacionar esta unidad de medida con los grados usuales, podemos notar que, cuando la barra gira una vuelta completa el ángulo barrido es de 360° , y la longitud recorrida por el extremo libre es $2 \pi l$, la longitud de la circunferencia de radio l .

Entonces:

$$\theta \text{ (grados)} = 360^\circ$$

$$2 \pi \text{ radianes} = 360^\circ$$

$$\theta \text{ (radianes)} = 2 \pi l / l = 2 \pi$$

y se tiene que:

$$1 \text{ radián} = 360/2\pi \text{ grados} \cong 57^\circ 17' 45''$$

$$1 \text{ grado} = 2\pi/360 \text{ radianes} \cong 0,017453 \text{ radianes}$$

Generalmente, el símbolo "rad" que indica la medición en radianes, se suprime en la escritura. Existen tablas de las funciones trigonométricas para ángulos en grados y en radianes, y todas las calculadoras que incluyen funciones trigonométricas pueden obtenerlas para ambas unidades de medida, y a veces una tercera unidad, llamada gradientes (grad).

Es conveniente que recuerde el valor en radianes de algunos ángulos de uso común:

$$0^\circ = 0 \text{ rad} \quad 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$$

$$30^\circ = \pi/6 \text{ rad} \quad 120^\circ = 2/3 \pi \text{ rad}$$

$$45^\circ = \pi/4 \text{ rad} \quad 135^\circ = 3/4 \pi \text{ rad}$$

$$60^\circ = \pi/3 \text{ rad} \quad 150^\circ = 5/6 \pi \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

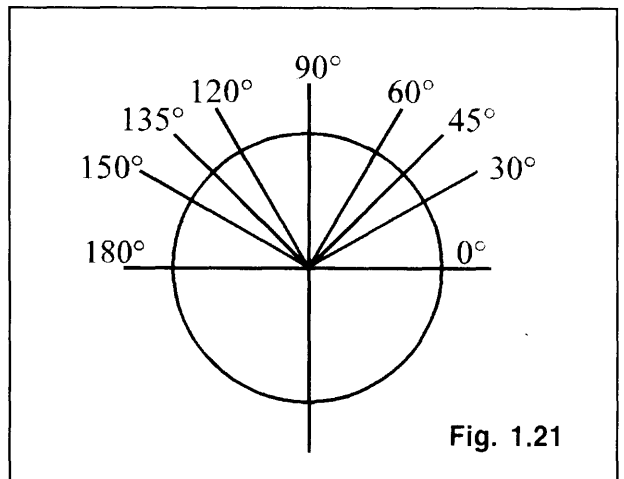


Fig. 1.21

Agunas propiedades de las funciones trigonométricas

Además de las propiedades anteriormente mencionadas, daremos sin demostración las siguientes (ver cualquier libro de matemáticas de 4º ó 5º año del secundario)

Si $\theta = \theta_1 + \theta_2$

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \text{sen } (\theta_1 + \theta_2) = \\ &= \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2 ; \\ \text{cos } \theta &= \text{cos } (\theta_1 + \theta_2) = \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 ; \\ \text{tg } \theta &= \text{tg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\text{tg } \theta_1 + \text{tg } \theta_2}{1 - \text{tg } \theta_1 \text{tg } \theta_2} \end{aligned}$$

Si $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \text{sen } (\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2 ; \\ \text{cos } \theta &= \text{cos } (\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 ; \\ \text{tg } \theta &= \text{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\text{tg } \theta_1 - \text{tg } \theta_2}{1 + \text{tg } \theta_1 \text{tg } \theta_2} \end{aligned}$$

Si $\theta_1 = \theta_2$ en estas fórmulas, obtenga las siguientes para el ángulo doble:

$$\begin{aligned} \text{sen } (2\theta) &= 2 \text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{cos } (2\theta) &= \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \\ &= 1 - 2 \text{sen}^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \text{tg} (2\theta) &= \frac{2 \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta} \end{aligned}$$

Si $\theta_1 = \theta_2$ en estas fórmulas, obtenga las siguientes para el ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \text{cos} \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \end{aligned}$$

Si:

Si:

Si*: $\theta_1 + \theta_2 = 0^\circ = 360^\circ \Rightarrow$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_1 = \cos \theta_2 \\ \text{cos } \theta_1 = \text{sen } \theta_2 \\ \text{tg } \theta_1 = 1/\text{tg } \theta_2 \end{cases}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2 \\ \text{cos } \theta_1 = -\cos \theta_2 \\ \text{tg } \theta_1 = -\text{tg } \theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_1 = -\text{sen } \theta_2 \\ \text{cos } \theta_1 = \cos \theta_2 \\ \text{tg } \theta_1 = -\text{tg } \theta_2 \end{cases}$$

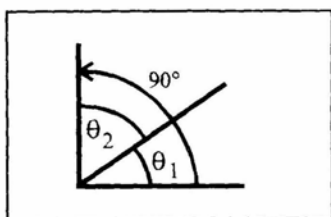


Fig. 1.22 a

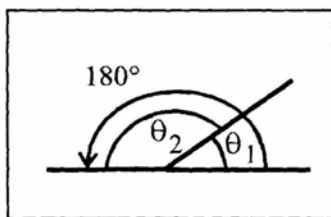


Fig. 1.22 b

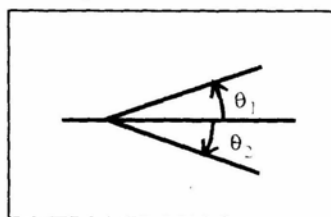


Fig. 1.22 c.

**Valores
especiales**

θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tag } \theta$
$0^\circ = 0 \text{ rad}$	0	1	0
$30^\circ = \pi/6 \text{ rad}$	1/2	$\sqrt{3}/2 \approx 0.866$	$\sqrt{3}/3 \approx 0.577$
$45^\circ = \pi/4 \text{ rad}$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.707$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.707$	1
$60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.866$	1/2	$\sqrt{3} \approx 1.732$
$90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$	1	0	∞

*Estas relaciones pueden obtenerse de las fórmulas para $\theta_1 - \theta_2$, en este caso suele decirse que $\theta_1 = -\theta_2$.

1.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Cuando tenemos una ecuación lineal, o sea aquellas en las que la incógnita aparece elevada solamente a la potencia cero o uno, con una incógnita siempre es posible, álgebra mediante, hallar la solución, es decir, el valor de la incógnita que satisface a la ecuación. Cuando se trata de una ecuación con dos incógnitas no existe en general solución única, sino infinitos pares de valores para las incógnitas que satisfacen la ecuación y podemos representar tal conjunto de soluciones mediante una recta en un diagrama cartesiano.

¿Qué pasa ahora si tenemos **dos** ecuaciones con **dos** incógnitas?

Cada una de ellas puede representarse en un diagrama cartesiano mediante una recta, y expresarse en la forma

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Veamos si este sistema tiene solución. Para ello tiene que haber (al menos) un par de valores (x, y) que satisfaga simultáneamente a ambas ecuaciones. Desde el punto de vista de la representación gráfica, como un par (x, y) que satisfaga a una de las ecuaciones es un punto de la recta que la representa, al tener que satisfacer a ambas ecuaciones debe ser un punto perteneciente a **ambas rectas**, es decir, es el punto de cruce de ambas rectas en la gráfica, si es que las rectas se cruzan.

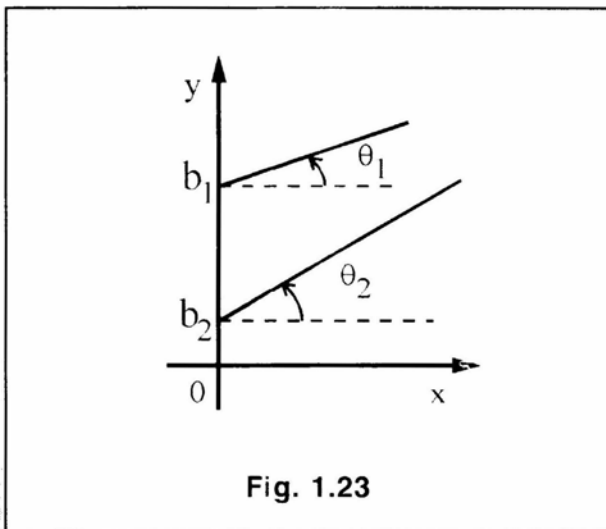


Fig. 1.23

A esta primera solución la llamaremos "solución analítica" y para hallarla procederemos con el denominado "método de sustitución" que quiere decir: despejar **y** en función de **x** en una de las ecuaciones (o al revés, **x** en función de **y** si resulta más fácil) y reemplazar la expresión obtenida en la otra ecuación, que queda entonces únicamente en términos de **x** (o de **y** en la otra versión) y entonces puede despejarse **x**.

Veamos cómo funciona el sistema :

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Por ejemplo, despejemos **y** en función de **x** de la primera ecuación: esto ya está hecho por la forma que tiene. Ahora reemplazamos esta expresión para **y** en la segunda ecuación

$$m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$$

Despejamos **x**:

$$m_1 x - m_2 x = b_2 - b_1 \Rightarrow$$

$$x = (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2)$$

Obsérvese que **x** es igual a una expresión que no contiene incógnitas: m_1, m_2, b_1 y b_2 son datos simbólicos conocidos.

Con este valor (que existirá y será único sólo en el caso en que $m_1 \neq m_2$) para **x** despejamos **y** en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$y = m_1 x + b_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = m_1 (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2) + b_1 =$$

$$= \frac{m_1 (b_2 - b_1) + b_1 (m_1 - m_2)}{m_1 - m_2}$$

Entonces:

$$y = (m_1 b_2 - m_1 b_1 + m_1 b_1 - m_2 b_1) / (m_1 - m_2)$$

y simplificando:

$$y = (m_1 b_2 - m_2 b_1) / (m_1 - m_2)$$

que es el valor de **y**.

Luego el par

$$x = (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2)$$

$$y = (m_1 b_2 - m_2 b_1) / (m_1 - m_2)$$

es la solución del problema, es única sólo en el caso ya mencionado en que las rectas se cruzan y no son paralelas o superpuestas.

La resolución gráfica consiste simplemente en dibujar las rectas representadas por las ecuaciones y determinar el punto de corte:

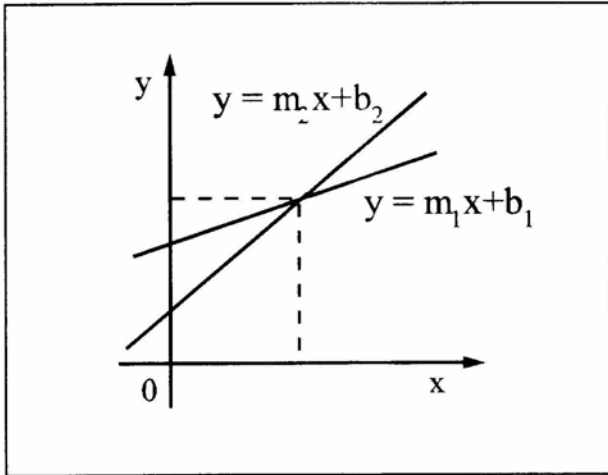


Fig. 1.24

De las ecuaciones que dan la solución al problema puede verse que hay un caso problemático: ¿qué pasa si $m_1 = m_2$? La diferencia $(m_1 - m_2)$ aparece en el denominador tanto para el valor solución de x como para el valor solución de y , y sabemos que no es posible dividir por cero. Lleno hacia atrás en nuestra álgebra volvemos al paso inicial donde:

$$m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$$

simplificando:

$$b_1 = b_2$$

pero esto no es generalmente cierto. Si originalmente $b_1 = b_2$, las dos ecuaciones representan la misma recta y entonces no tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas sino **una** ecuación con **dos** incógnitas escrita dos veces y hay infinitas soluciones (todos los puntos de la recta). Si originalmente $b_1 \neq b_2$ esta relación que obtuvimos es falsa y por lo tanto

$$m_1 x + b_1 \neq m_2 x + b_2$$

de modo que **no hay** solución.

Para verlo en la representación gráfica, observemos que

$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2 \quad (b_1 \neq b_2)$$

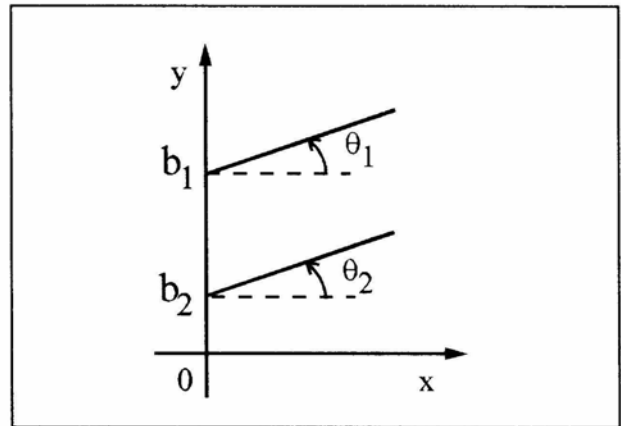


Fig 1.25

representan dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada al origen, o sea, dos rectas paralelas, y las rectas paralelas no se cortan, lo que es otra forma de decir que el sistema no tiene solución, o sea, que no existe ningún par (x, y) que simultáneamente pertenezca a ambas rectas.

Cuando tenemos escritas las ecuaciones en la forma de ecuaciones de rectas, es fácil por inspección observar si las pendientes son iguales entre sí y decidir, antes de realizar el cálculo, si el sistema tiene o no solución.

En general, el problema de dos ecuaciones con dos incógnitas viene formulado de la siguiente manera:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son símbolos de valores numéricos conocidos. Le dejamos como ejercicio demostrar, usando el método de sustitución, que la solución de este sistema es:

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} \quad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}$$

y que la condición de solución inexistente (rectas paralelas) está dada por

$$a_1/b_1 = a_2/b_2$$

F En la serie de ejercicios 1.4, al final del
I Capítulo 1, puedes practicar con valores
S numéricos.
I
C

A Así como para despejar **una** incógnita necesitamos **una** ecuación, para despejar **dos** incógnitas necesitamos **dos** ecuaciones, en general, si existe solución, para despejar un número cualquiera **N** de incógnitas se necesita disponer de **N** ecuaciones que las vinculen.

La rama de las matemáticas que estudia la resolución de estos sistemas complicados de **N** ecuaciones con **N** incógnitas se denomina **álgebra lineal**.

Dispone de poderosos métodos de cálculo basados en una sistematización del método de sustitución que hemos planteado para el caso $N = 2$. Desde ya que la cosa se complica a medida que aumentamos **N**, pero la filosofía del procedimiento es siempre la misma: despejar una incógnita en términos de las otras, sustituir en las ecuaciones originales y simplificar, con lo que se obtiene un sistema de $(N - 1)$ ecuaciones con $(N - 1)$ incógnitas. Repitiendo el procedimiento se obtiene un sistema con, sucesivamente, $(N - 2)$, $(N - 3)$, ... ecuaciones con $(N - 2)$, $(N - 3)$, ... incógnitas, hasta que se llega a una última ecuación con una única incógnita (que resultará en general muy compleja si previamente no se realizan simplificaciones numéricas). Se obtiene el valor de esta incógnita y se la reemplaza en el **par** de ecuaciones con **dos** incógnitas obtenidas en el paso anterior, calculando así el valor de la otra incógnita. Pasos sucesivos permiten obtener los valores de las incógnitas restantes hasta completar el cálculo. Por supuesto, el sistema tiene una única solución o no tiene solución o tiene infinitas soluciones. Para que no haya solución basta que cualquier par de ecuaciones del sistema no la tenga.

Si quiere practicar, use el método de sustitución para el sistema (modesto) de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$5x - 2y + 3z = 21$$

$$2x + y - 2z = -3$$

$$x - y + z = 6$$

Respuesta: $(x = 2; y = -1; z = 3)$

1.5 ECUACION CUADRÁTICA

Hasta aquí hemos visto ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) en que las incógnitas aparecían elevadas a la primera potencia o a la potencia cero)

$$x^1 = x \quad ; \quad y^1 = y$$

llamadas ecuaciones **lineales**. ¿Qué pasa si tenemos ecuaciones con incógnitas elevadas a cualquier potencia? Por ejemplo:

$$x^2 = xx; \quad y^3 = yyy; \quad x^{1/2} = \sqrt{x}; \quad y^{2/3} = \sqrt[3]{y^2}; \quad \text{etc}$$

La primera respuesta es que la cosa se complica mucho. Por esa razón vamos a estudiar, ya que es de uso común la llamada **ecuación cuadrática** o **ecuación parabólica** en que únicamente una de las "variables" está elevada al cuadrado; la forma general que trataremos es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Esta es una ecuación con dos incógnitas, y entonces, al igual que en el caso anterior, no tiene solución única sino un conjunto infinito de soluciones. Para ecuaciones **lineales**, la gráfica cartesiana representa este conjunto como una **recta**. Si la ecuación **no** es lineal, la gráfica resultará generalmente una **curva**. La curva que representa a la ecuación cuadrática en un diagrama cartesiano se denomina **parábola**, de donde el nombre de ecuación parabólica.

Para observar la forma de una parábola en la representación cartesiana, haremos una **tabla de valores** que consiste en encolumnar pares (x, y) que satisfacen la ecuación cuadrática y llevarlos a los ejes cartesianos.

Para ello asignaremos valores a **x** y con la ecuación calcularemos los correspondientes valores de **y**.

Supongamos la ecuación:

$$y = 2x^2 - 4x - 3$$

A continuación damos la tabla de valores (¡compruébelos!) y la gráfica de la curva:

x	y
-2	13
-1	3
0	-3
1	-5
2	-3
3	3
4	13
.	.
.	.

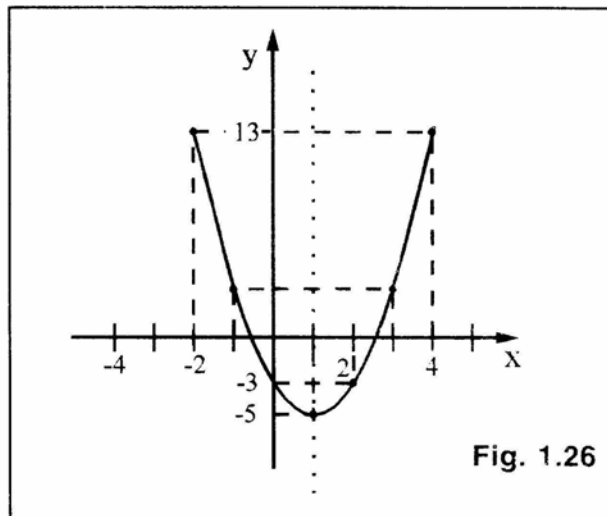


Fig. 1.26

Observe que la parábola tiene un **vértice** ($x = 1$; $y = -5$) por el cual podemos trazar un **eje vertical de simetría** (dibujado en línea de rayas en la figura): la parábola se ramifica en forma simétrica a ambos lados de este eje. Observe además que la parábola corta al eje de ordenadas en ($x = 0$; $y = -3$). De la ecuación general:

$$y = a x^2 + b x + c$$

la **ordenada al origen** resulta de hacer $x = 0 \Rightarrow y = c$ y éste es justamente el valor de cruce de la parábola con eje y .

Es más difícil conocer el cruce de la parábola con el eje x , que en realidad pueden ser:

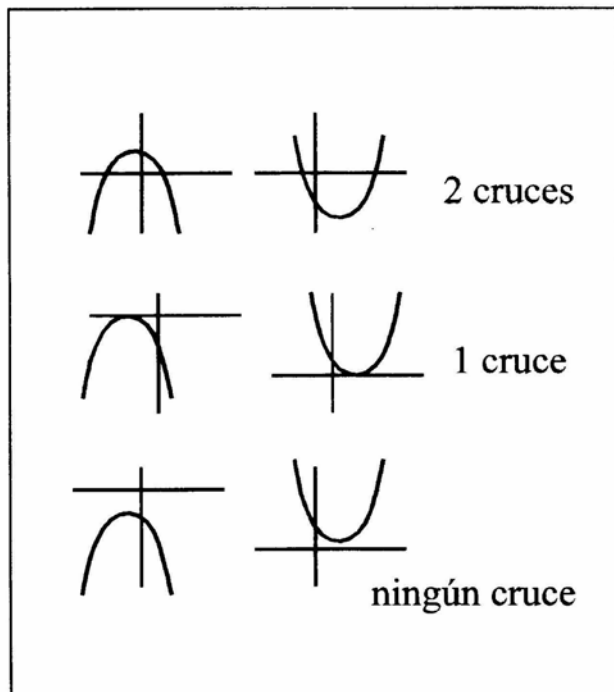


Fig. 1.27

- Dos puntos de cruce (como en la figura).
- Un punto de cruce (cuando el vértice se produce exactamente sobre el eje x).
- Ningún punto de cruce (cuando el vértice y todo el resto de la parábola están por encima o por debajo del eje x). Estas situaciones se ilustran en la **Fig. 1.27**. Note que la parábola puede apuntar hacia abajo o hacia arriba, y el vértice estar en cualquier posición del gráfico x, y . Volveremos sobre esto.

El cruce con el eje x implica hallar la solución de la ecuación cuadrática bajo la condición $y = 0$, o sea

$$a x^2 + b x + c = 0$$

La solución de esta ecuación cuadrática puede obtenerse mediante una *triquiñuela* matemática, que suele denominarse

“**completar cuadrados**”, sabemos que:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2 a b + b^2$$

F
I
S
I
C
A
Entonces:

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$$

y si tenemos una expresión como "a² + m a" donde m es una constante cualquiera, podemos suponer m = 2 b y escribir:

$$\begin{aligned} a^2 + ma &= a^2 + 2ab = \\ &= (a+b)^2 - b^2 = (a+m/2)^2 - m^2/4 \end{aligned}$$

Esta es la "triquiñuela" que usaremos para resolver la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primero dividimos toda la ecuación por a. Como 0/a = 0 cualquiera sea a (distinto de cero, por supuesto) tenemos:

$$x^2 + b/a x + c/a = 0 \Rightarrow x^2 + b/a x = -c/a$$

Completamos cuadrados en el primer miembro:

$$x^2 + b/a x = (x + b/2a)^2 - b^2/4a^2$$

y, entonces,

$$(x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 = -c/a \Rightarrow$$

$$(x + b/2a)^2 = b^2/4a^2 - c/a = (b^2 - 4ac)/4a^2$$

y, observando que la raíz cuadrada del segundo miembro puede ser positiva o negativa, ya que (+b)² = (-b)², obtenemos:

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

¿Qué representa el doble signo?.

Que tenemos dos soluciones posibles:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

lo que es otra forma de decir que la parábola corta al eje x en **dos** puntos. Pero hemos dicho que no siempre ocurre esto.

Por ejemplo si

$$b^2 = 4ac$$

el radicando se anula y tenemos que x₁ = x₂ = -b/2a. Los dos puntos de cruce se confunden en uno, que es el vértice de la parábola.

Y de paso observamos que, sin quererlo, hemos hallado la **abscisa del vértice de la parábola**:

$$x_v = -b/2a$$

y de la ecuación cuadrática hallamos la ordenada de ese vértice.

$$\begin{aligned} y_v &= ax_v^2 + bx_v + c = \\ &= a(-b/2a)^2 + b(-b/2a) + c = \\ &= b^2/4a = b^2/2a + c = \\ &= -b^2/4a + c = \\ &= -1/4a (b^2 - 4ac) \end{aligned}$$

tal que, resultó:

$$y_v = -1/4a (b^2 - 4ac)$$

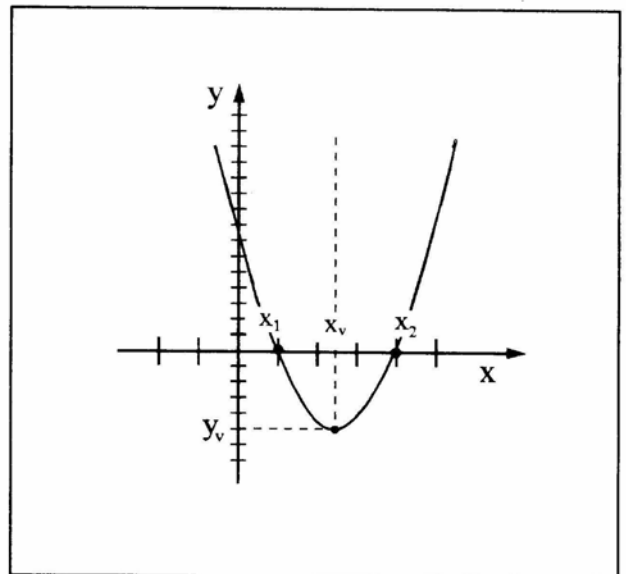


Fig. 1.28

¡Observe que el paréntesis es justamente el radicando del que veníamos hablando! Si la parábola tiene su vértice sobre el eje x, entonces lógicamente y_v = 0.

Hay un tercer caso, en que el radicando

$$b^2 - 4ac$$

es negativo. En tal caso la raíz no tiene solución real (su solución es un número complejo) y no hay cruce de parábola con el eje x. Sin embargo puede verse que la expresiones ya mencionadas para x_v , y_v valen también en ese caso. Al radicando se lo suele denominar **discriminante** [Δ] de la ecuación cuadrática.

Calculemos los puntos de cruce de la parábola del ejemplo con el eje x.

Aquí, $a = 2$, $b = -4$, $c = -3$. Entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{40}}{4} \cong 2,581$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{40}}{4} \cong -0,581$$

que coinciden con los valores que podíamos obtener (idealmente) de la gráfica.

Calculemos las coordenadas del vértice:

$$x_v = -b/2a = -(-4)/(2 \cdot 2) = 1$$

$$x_v = 1$$

$$y_v = -1/4a (b^2 - 4ac) =$$

$$= -1/4 \cdot 2 [16 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)] = -40/8$$

$$y_v = -5$$

que también coinciden con los valores obtenidos del gráfico.

Otras relaciones que podemos obtener ligan la posición del vértice con los puntos de cruce con el eje de abscisas.

Sean

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces (¡compruébelo!):

$$x_2 + x_1 = 2 x_v$$

además,

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Para completar este análisis de la ecuación cuadrática debemos mencionar un criterio para decidir sin graficar si la parábola apunta hacia arriba o hacia abajo, o dicho en términos más técnicos, si la **concauidad** se halla hacia abajo o hacia arriba (relea esto mirando la gráfica del ejemplo, por favor).

Lamentablemente no hemos hallado una forma simple de establecer este resultado, por damos sin demostración:

$a > 0 \Rightarrow$ concauidad hacia arriba

$a < 0 \Rightarrow$ concauidad hacia abajo

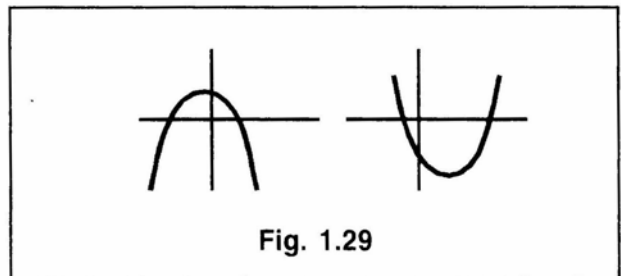


Fig. 1.29

Y resumimos ahora las propiedades de la parábola, siendo:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Coordenadas del vértice:

$$x_v = -b/2a ; y_v = -\Delta/4a$$

- Intersección con el eje y: $x = 0$: $y = c$ (ordenada al origen)

- Intersección con el eje x:

$$x_{1,2} = 1/2a (-b \pm \sqrt{\Delta}); y = 0$$

. dos cruces si $\Delta > 0$

. un cruce (vértice) si $\Delta = 0$

. ningún cruce si $\Delta < 0$

¿Cómo operar con números con esta notación?

Para ello es necesario recordar que:

$$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$$

(se suman las potencias en el producto)

$$a^x/a^y = a^x \cdot a^{-y} = a^{(x-y)}$$

(se restan las potencias en la división)

$$1/a^x = a^{-x} ; 1/a^{-x} = a^x$$

(se pasa de numerador a denominador y viceversa cambiando el signo de la potencia)

Por ejemplo:

$$a^5 \cdot a^3 = a^{(5+3)} = a^8$$

$$a^5/a^3 = a^{(5-3)} = a^2$$

$$1/a^{(3-5)} = 1/a^{-2}$$

$$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{(3+3+3)} = a^9$$

$$a^3/a^3 = a^{(3-3)} = a^0 = 1$$

**todo número elevado a la cero da 1
(menos el cero)**

$$a^3/a^2 = a^{(3-2)} = a^1 = a$$

todo número elevado a la 1 da el mismo número

$$a^2/a^3 = a^{(2-3)} = a^{-1} = 1/a$$

todo número elevado a la (-1) da la inversa del número.

Si se marea con estas sumas y restas de exponentes, intente expresar las operaciones escribiendo las potencias como productos repetidos, como:

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

5 veces

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

3 veces

Entonces:

$$a^5 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$$

$$a^5/a^3 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$$

$$a^3 \times a^3 \times a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9$$

9 veces

Como este procedimiento es eficaz hasta cierto punto, por ejemplo, considere la operación

$$a^{98} \cdot a^{65} / a^{44} = a^{119},$$

trate de volver al esquema anterior una vez que comprendió la operatoria.

Aclaremos estas reglas con otro ejemplo:

Calcular la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el Sol, usando la Ley de la gravitación de Newton :

$$F = G \frac{M_T M_S}{d^2}$$

donde:

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ (cte. de gravitación universal)

$M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ (masa de la Tierra)

$M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ (masa del Sol)

$d = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ (distancia Tierra - Sol)

No nos preocupemos por el momento por las unidades de estas magnitudes. Están todas en el llamado Sistema Internacional y son compatibles entre sí. Vamos al álgebra de la operación:

$$F = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} (1,5 \cdot 10^{11})^2 &= (1,5 \cdot 10^{11}) \cdot (1,5 \cdot 10^{11}) = \\ &= 1,5 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \cdot 10^{11} = \\ &(1,5)^2 \cdot 10^{11+11} = 2,25 \cdot 10^{22} \end{aligned}$$

F Luego

S
I
C
A

$$F = \frac{6,67 \cdot 5,98 \cdot 2 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{30}}{2,25 \cdot 10^{22}} =$$

$$= \frac{6,67 \cdot 5,98 \cdot 2}{2,25} 10^{-11+24+30-22} =$$

$$= \frac{6,67 \cdot 5,98 \cdot 2}{2,25} 10^{21} = 35,5 \cdot 10^{21}$$

Ejercítense calculando la fuerza que la Tierra ejerce sobre un hombre de 70 kg parado sobre el Ecuador. aquí:

$$F = G \frac{M_T M_h}{R_T^2}$$

G y M_T tienen los mismos valores que en el ejemplo,

$m_h = 70$ kg (masa del hombre)

$R_T = 6,37 \times 10^6$ (radio de la Tierra en metros)

La respuesta es $F = 688$ N = $6,88 \times 10^2$ N

(En las unidades del Sistema Internacional:

688 N \approx 65 kgf).

1.7 EJERCICIOS DE APLICACION

SERIE 1.1 A

Verifique los siguientes resultados:

1.1.a

$$\frac{3 \cdot (5 - 2,2) + \frac{12}{(4 - 3,5)} \cdot 12,5^{-9}}{42 - \frac{8}{3} \cdot (7 - 1) + 12 \cdot \left(9 - \frac{4}{5}\right) - 7,52} = 2,5$$

1.1.b

$$\frac{1650 / [24 / (3 - 4) \cdot 12 - 7 \cdot 6] + 4,4}{1 - 12 \cdot (6 - 5/2) (9 - 3) + 7 - 2 \cdot 3,5} = 0,1$$

1.1.c

$$\frac{3,5 \cdot \left(12 - \frac{9}{3} - 5\right) - 5,6 \cdot 2,5}{4,7 + (8 - 1,8) \cdot \frac{(6 + 4,3)}{9}} = 0$$

SERIE 1.1 B

Hallar x en las siguientes ecuaciones:

1.1.d

$$3x - 10x = 8x - 30 \quad x = 2$$

1.1.e

$$-2x + 3 = -30 + 4x + 27 \quad x = 0$$

1.1.f

$$4x + 0,6(x - 1) = 10(0,4x - 1 + x) \quad x = 1$$

1.1.g

$$x/2 + x/3 - 2 = 13 \quad x = 18$$

1.1.h

$$(2x + 1)/4 + x/2 = 9/4 \quad x = 2$$

1.1.i

$$(10 - 5x)/2 - (8 - 2x)/2 - 11/2 = 0 \quad x = -3$$

SERIE 1.2

Se desea representar en un gráfico cartesiano las rectas cuyas ecuaciones se dan:

1.2.a

$$-2x + 3y_1 = 6 \quad (m = 2/3; b = 2)$$

1.2.b

$$x/3 - y_2/5 = 1 \quad (m = 5/3; b = -5)$$

1.2.c

$$0,3x - y_3 + 1,3 = 0 \quad (m = 0,3; b = 1,3)$$

1.2.d

$$y_4 + x + 1 = 0 \quad (m = -1; b = -1)$$

1.2.e

$$y_5 + 4x - 5 = 0 \quad (m = -4; b = 5)$$

SERIE 1.4

Verifique estos resultados y grafique las rectas en un plano cartesiano

1.4.a

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ -x + y &= 6 \end{aligned} \quad (x = -2; y = 6)$$

1.4.b

$$\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned} \quad (x = -1; y = -1)$$

1.4.c

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 6x - 4y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{inexistente})$$

1.4.d

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2,2 \\ 3x - 2y &= 5,8 \end{aligned} \quad (x = 2; y = 0,1)$$

1.4.e

$$\begin{aligned} 4y - 3x + 1 &= 0 \\ 3 + 2x + y &= 0 \end{aligned} \quad (x = -1; y = -1)$$

SERIE 1.5

Halle en las siguientes parábolas: las coordenadas del vértice, los puntos de intersección con los ejes e indique hacia donde apuntan.

1.5.a

$$y = 3x^2 + 2x + 3$$

1.5.b

$$y = -2x^2 + x - 1$$

1.5.c

$$y = 1/2 x^2 - 2$$

1.5.d

$$y = -2x^2 + 3x - 5$$

1.5.e

$$y = x^2 - 2x + 2$$

1.8 PROBLEMAS DE APLICACION

SERIE 1.1

1 - Resolver:

- a) $2x + 4 = 0$
- b) $3 : (x - 2) = 1/2$
- c) $-2x + 1 = -x + 2$
- d) $5 + 3(x - 2) = (x + 21) : 3 + 8$
- e) $2 + 3(x - 1) = (x + 23) : 2$

2 - Dado $v = (2v_1v_2)/(v_1 + v_2)$ obtener la expresión de v_2 .

3 - Dado $mgh_0 = (1/2)mv^2 + mgh$ y $r = v/\omega$, obtener la expresión de ω en función de g y h .

4 - Dado

$$y = y_0 + \text{tg}\alpha x + (1/2) g x^2/(v_0^2 \cos^2\alpha)$$

a) Hallar y , sabiendo que

$$y_0 = 5; \alpha = 0^\circ; g = -10; x = 16; v_0 = 40$$

b) Hallar v_0 , sabiendo que

$$\begin{aligned} g &= -10; \alpha = 30^\circ; x = 100; y_0 = 10; \\ y &= 70. \end{aligned}$$

5 - Por medio de una calculadora se obtuvieron los siguientes resultados:

- a) $\text{sen } 60^\circ = 0.866025404$
- b) $\text{sen } 37^\circ = 0.601815023$
- c) $\text{sen } 53^\circ = 0.79863551$

Redondear los valores con 5; 4; 3; 2 y 1 cifra decimal.

6 - Al resolver una serie de problemas, se obtuvieron, usando calculadora, los siguientes resultados

$$\begin{aligned} x_1 &= 24.73863375 \\ x_2 &= 3.208366141 \\ x_3 &= 0.324822783 \end{aligned}$$

Redondear al segundo decimal.

7 - Utilizando las tablas de unidades, verificar las siguientes ecuaciones.

- a) $a_c = v^2/r$
- b) $v = \sqrt{(2E/m)}$
- c) $E_c = p^2/2m$
- d) $v = \omega/f$
- e) $y = y_0 + x \text{ tg}\alpha + (1/2) g x^2/(v_0^2 \cos^2\alpha)$
- f) $F t = m v$

8 - A partir de la ley de gravitación universal: $F = -G (m_1 m_2)/r^2$ obtener las unidades de la constante G.

SERIE 1.2

1 - Representar en los ejes cartesianos los siguientes puntos:

A: (6; 2) B: (-2; 3/2) C: (1; 0) D: (0; -1)

Hallar la distancia entre A y D; C y D

2 - Graficar las rectas dadas por las siguientes ecuaciones.

- | | |
|--------------------|---------------|
| $L_1: y = -2x + 3$ | $L_4: y = 1$ |
| $L_2: y = 2x - 3$ | $L_5: x = 3$ |
| $L_3: y = -2$ | $L_6: x = -1$ |

3 - Hallar la ecuación de la recta tal que:

- a) Pase por A: (0; 5) y B: (-2; 1)
- b) Tenga pendiente $m = -3$ y pase por (2; 0)
- c) Tenga ordenada al origen $b = 2,5$ y pase por (-0,5; 2)

4 - Obtener la ecuación de cada una de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos

- a) $P_1: (2; 1)$ y $P_2: (-3; -1)$
- b) $P_1: (1; 4)$ y $P_2: (-2; 4)$
- c) $P_1: (-2; 6)$ y $P_2: (-2; -1)$
- d) $P_1: (6; 0)$ y $P_2: (0; 3)$

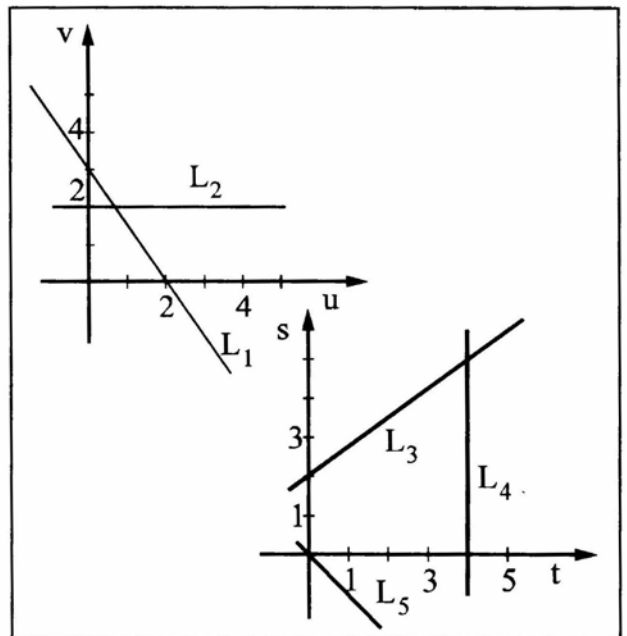
5 - Obtener las ecuaciones de las rectas que pasan por A y cumplen con las condiciones indicadas

- a) A: (1; 4) y tiene abscisa al origen $q = 8$
- b) A: (5; 2) y tiene ordenada al origen $b = 7$

6 - Determinar la ecuación de la recta paralela a

- a) $y = 2x + 3$ que pasa por B: (5; 1)
- b) $y = -x + 4$ que pasa por C: (0; -2)
- c) $y = -2x + 3$ que pasa por el origen

7 - Hallar las ecuaciones de las rectas graficadas



8 - ¿Qué caracteriza el conjunto de rectas de ecuación $y = mx + b$ si

- a) se hace variar m manteniendo b constante?
- b) se hace variar b manteniendo m constante?

SERIE 1.3

1 - Efectuar

- a) $28' 53'' \cdot 11 =$
- b) $180^\circ / 8 =$
- c) $(48^\circ \cdot 3 / 5) =$
- d) $3/7$ de cuadrante =

2 - Expresar en grados y minutos el ángulo α (una de las respuestas es la correcta)

I) $\alpha = 12,5^\circ$

R: a) $12^\circ 5'$; b) $12^\circ 50'$; c) $12^\circ 30'$; d) $12^\circ 25'$

II) $\alpha = 48,5^\circ$

R: a) $48^\circ 30'$; b) $48^\circ 20'$; c) $48^\circ 18'$; d) $48^\circ 2'$

3 - Expresar en forma decimal el ángulo α (una de las respuestas es la correcta)

I) $\alpha = 15^\circ 30'$

R: a) $15,50^\circ$; b) $15,30^\circ$; c) $15,33^\circ$; d) $15,20^\circ$

II) $\alpha = 23^\circ 20'$

R: a) $23,2^\circ$; b) $23,33^\circ$; c) $23,30^\circ$; d) $23,25^\circ$

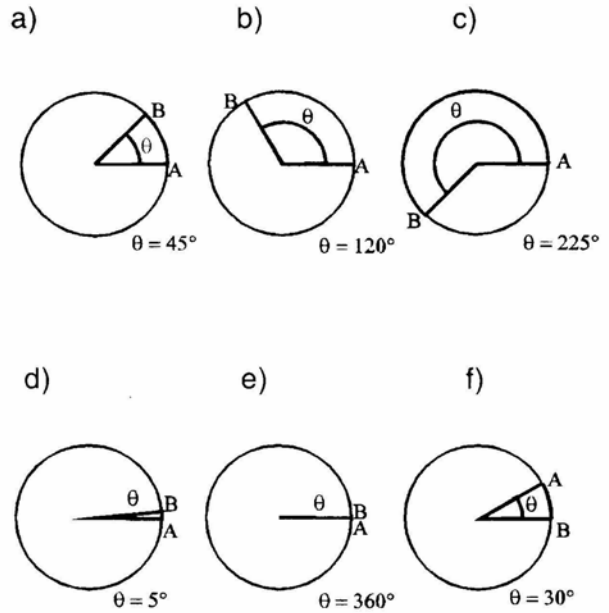
4 - Expresar en grados, minutos y segundos los siguientes ángulos expresados en radianes:

- a) $\pi; 5\pi; 1$
- b) $5/4\pi; 7\pi/36; 2,25$

5 - Expresar en radianes los siguientes ángulos:

- a) $5^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 72^\circ; 120^\circ; 270^\circ; 300^\circ$
- b) $22^\circ 30'; 1$ giro; $3/5$ de un giro; 1 cuadrante; $5^\circ 25'; 50^\circ$

6 - Hallar las longitudes de los arcos AB indicados en las figuras si $r = 4$ cm:



7 - ¿A qué ángulo corresponde un arco de longitud l sabiendo que el radio es de 25 cm?:

- a) $l = 10$ cm b) $l = 48$ cm c) $l = 1$ cm
- d) $l = 25$ cm e) $l = 60$ cm f) $l = 157,08$ cm

8 - Sin usar calculadora haga corresponder las funciones de la columna izquierda con los valores tabulados a la derecha.

I -

- | | |
|-------------------------------|---------------|
| 1) $\text{sen } 81^\circ 53'$ | a) $(-5/2)$ |
| 2) $\text{tg } 259^\circ 42'$ | b) $(-3/25)$ |
| 3) $\text{cos } 96^\circ 54'$ | c) $(99/100)$ |
| 4) $\text{sen } 14^\circ 28'$ | d) $(1/4)$ |
| 5) $\text{tg } 111^\circ 48'$ | e) $(11/2)$ |

- | | |
|----------------------------|--------------|
| 1) $\text{sen } 217^\circ$ | a) 0,9848 |
| 2) $\text{cos } 273^\circ$ | b) (-0,6018) |
| 3) $\text{tg } 115$ | c) 3,0776 |
| 4) $\text{sen } 100^\circ$ | d) (-2,1445) |
| 5) $\text{tg } 252$ | e) 0,0523 |

9 - Hallar los valores de α menores que un giro que verifican las siguientes ecuaciones:

- a) $\text{sen } \alpha = 0$ c) $\text{sen } \alpha = -1$ e) $\text{sen } \alpha = 0,8$
 b) $\text{sen } \alpha = 1$ d) $\text{cos } \alpha = 1/2$ f) $\text{cos } \alpha = 0,8$

10 - Calcular los valores de α y de las funciones trigonométricas de α en cada caso:

- a) $\text{sen } \alpha = 1/2$ y $\text{cos } \alpha > 0$
 b) $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$ y $\text{sen } \alpha < 0$
 c) $\text{sen } \alpha = -7/16$ y $\text{cos } \alpha < 0$
 d) $\text{cos } \alpha = -0,6$ y $\text{tg } \alpha < 0$

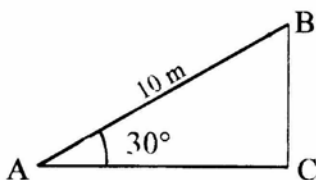
11 - ¿Qué longitud debe tener una escalera para poder alcanzar un estante a 2,30 m de altura, formando un ángulo de 6° con la horizontal?

12 - ¿Cuál es la pendiente de un cablecarril recto de 250 m de recorrido cuyas alturas sobre el nivel del mar son 850 m y 932 m?

13 - Un péndulo de 50 cm de largo se aparta 30° de la vertical. ¿Cuánto se eleva respecto del equilibrio?

14 - Calcular la longitud de un tramo de vía, con una pendiente del 7% en 4 km.

15 - Calcular la distancia del punto C al lado AB y el área del triángulo rectángulo de la figura.



SERIE 1.4

1 - Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

- a) $m = -1/2 (t + i)$
 $m - \sqrt{2} - i = 0$
 b) $2t - x = -1$
 $t - 2x = 1$
 c) $3(x + y) = x - y$
 $x - 2/3 y = 16$

2 - Dadas las rectas L_1 y L_2 , hallar el punto de intersección analítica y gráficamente.

$$L_1: x = 5t + 7 \quad L_2: x = -t + 2$$

3 - Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

- a) $8x - 3y - 7z = 85$
 $x + 6y - 4z = -12$
 $2x - 5y + z = 33$
 b) $x + y = 18$
 $y + z = 24$
 $x + z = 22$

4 - Dado el siguiente sistema

$$(M + m)g - T = (M + m)a$$

$$T - Mg = Ma$$

- a) Hallar el valor de a sabiendo que
 $g = 10$; $M = 4$; $m = 1$
 b) Hallar el valor de m sabiendo que
 $g = 10$; $M = 12$; $a = 2$.

5 - Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$F - T - P_1 \text{ sen } \alpha = m_1 a$$

$$T - P_2 \text{ sen } \alpha = m_2 a$$

obtener T y a en función de m_1 , m_2 , F , g y α .

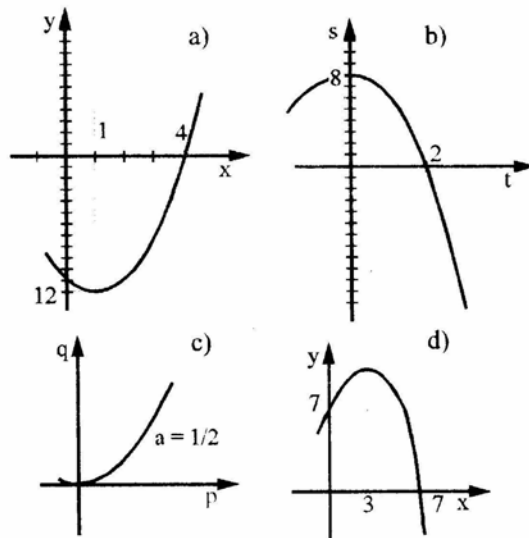
6 - Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$F - T_1 = m_1 a$$

$$T_1 - T_2 = m_2 a$$

$$T_2 - m_3 g = m_3 a$$

- a) Obtener a en función de m_1, m_2, m_3 y F
 b) Obtener F en función de m_1, m_2, m_3 y a .



7 - A partir de las expresiones

$$x = x_0 + v_0 t + 1/2 a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

Demostrar que al eliminar el parámetro t se obtiene la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2 a (x - x_0)$$

SERIE 1.5

1 - Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones cuadráticas. Compararlas y deducir la influencia del coeficiente del término cuadrático.

a) $y = 2x^2$ b) $y = 4x^2$ c) $y = 1/3x^2$

d) $y = -2x^2$ e) $y = -1/4x^2$ f) $y = -1/2x^2$

2 - Representar las siguientes funciones cuadráticas. Compararlas y deducir la influencia del término independiente.

a) $y = 3x^2 - 3$ c) $y = 1/2x^2 + 2$

b) $y = -1/4x^2 - 1$ d) $y = -3/2x^2 - 1/2$

3 - Representar las siguientes funciones cuadráticas. Compararlas y deducir la influencia del coeficiente del término lineal.

a) $y = -x^2 + 4x$ c) $y = 2x^2$

b) $y = x^2 - 3x + 1$ d) $y = -1/3 x^2 - 1/6 x - 3$

4 - Hallar las ecuaciones de las siguientes parábolas graficadas en el semiplano de abscisa positiva; siendo a el coeficiente del término cuadrático.

5 - Dada la ecuación de la parábola

$$P: x = t^2 - 4t - 5$$

- a) Graficarla.
 b) Hallar el punto de intersección con el eje x .
 c) Hallar, si los tiene, los puntos de intersección con el eje t
 d) Hallar las coordenadas del vértice.

6 - Idem ejercicio 5 para:

$$P: y = 4 + t - 1/2 t^2$$

7 - Hallar, si los tiene, los puntos de intersección de las parábolas dadas en 5 y 6 con la recta.

$$L: y = -3t$$

8 - Hallar los valores de t para los que se cumplen las siguientes ecuaciones.

a) $t(t + 3) - (3t + 4) = 0$

b) $t(t + 3) = 5t$

c) $\frac{t+1}{t-1} = \frac{-1}{t+1}$ con $t \neq \pm 1$

d) $(t-1)^2 = (t+3)(t-1) - 4t^2$

e) $\frac{2+t}{t} - (8/t + 1) = 0$ con $t \neq 0$

F 9 - Dada la ecuación

$$y = y_0 t + t g a x + 1/2 g x^2 / (v_0^2 \cos^2 a),$$

S hallar los valores de x que cumplen con la misma.

C Datos:

$$g = -10; \alpha = 30^\circ; v_0 = 100; y_0 = 15; y = 8$$

10 - Dada la ecuación de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 = 25$$

- Graficar.
- Hallar su perímetro y su superficie.
- Hallar la longitud de un arco que abarca 30° ; $\pi/4$ radianes; $1/3$ de giro.
- Hallar las coordenadas de los puntos de intersección con la

$$L: y = x + 5$$

SERIE 1.6

1 - Resolver sin usar calculadora

- $5,3 \cdot 10^{-4} + 1,6 \cdot 10^{-5} =$
- $4,8 \cdot 10^{14} - 5,6 \cdot 10^{13} + 8,1 \cdot 10^{12} =$
- $2,4 \cdot 10^3 \cdot 7,5 \cdot 10^{-5} =$
- $25/6 \cdot 10^{-5} \cdot 8,4 \cdot 10^{-12} \cdot 12/7 \cdot 10^4 =$
- $(12/5 \cdot 10^{12}) / (24/25 \cdot 10^{-4}) =$
- $10^{-2} / 5 \cdot 10^{-11} =$
- $(3 \cdot 10^3)^2 =$
- $(5 \cdot 10^{-4})^3 =$
- $\sqrt[3]{0,810^7} =$
- $\sqrt[3]{2,710^{-2}} =$

$$k) \frac{310^{-5} \sqrt{6,410^{13}}}{3,210^{-4}} =$$

$$l) \frac{\sqrt{310^{-6} \cdot 510^{13} - 1,510^{-2} \cdot 410^9}}{(0,1)^{-1,2}} =$$

2 - Resolver expresando previamente los factores en notación científica (sin usar calculadora):

$$a) \frac{16000 \cdot 0,0002 \cdot 1,2}{2000 \cdot 0,006 \cdot 0,00032} =$$

$$b) \frac{6000000 \cdot (0,00004)^4}{(800)^2 \cdot (0,0002)^3} =$$

3 - Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se calcula mediante la expresión $g_p = G M_p / R_p^2$, M_p : masa del planeta; R_p : radio del planeta,

- Hallar la gravedad en la superficie de la Tierra.
- Si la gravedad en la superficie lunar vale 1,69 (en unidades del Sistema Internacional), y su radio es de $1,7 \cdot 10^6$, hallar la masa de la Luna.

4 - Hallar, usando el resultado del problema anterior, la fuerza de atracción que existe entre la Tierra y la Luna. ($d_{TL} = 3,84 \cdot 10^8$).

2.1 NOCIONES ELEMENTALES Y DEFINICIONES

En la física estudiamos gran cantidad de magnitudes **vectoriales**, como la velocidad y la fuerza. También definimos magnitudes **escalares**, como la temperatura o la masa. ¿Qué factores determinan esta clasificación? Tomemos como ejemplo la masa de un cuerpo. Para definirla necesitamos únicamente **un número** en el sistema de unidades dado, por ejemplo:

$$m = 3 \text{ kg}$$

El número "3" y la unidad "kg" definen totalmente a esa magnitud física. Cuando ocurre esto, decimos que se trata de una magnitud **escalar**.

Consideremos ahora la velocidad. Decir que un móvil viaja a 100 km/h no nos define completamente la velocidad, sino que hay que dar además la **dirección** y el **sentido** del movimiento: el móvil viaja a 100 km/h hacia el Norte (lo que fija la dirección: N-S y el sentido: al N). De estas magnitudes que necesitan más información que un único número para quedar bien determinadas decimos que son **vectoriales**. En este curso de Física, usamos vectores en un espacio de tres dimensiones. El caso más simple de esta situación es considerar la posición de un cuerpo. Al decir "posición" tenemos que especificar con respecto a qué la establecemos. Así, si se nos ocurriera definir la posición de una mosca que vuela dentro de una habitación, en un instante de tiempo dado, podríamos tomar las paredes y el piso como "referencia". Diríamos: la mosca está ahora a 2 m del piso, a 3 m de la pared del fondo y a 50 cm de la pared donde está la ventana.

Se puede abstraer esta forma no muy general de describir la posición de las cosas, especialmente de las que ocurren fuera de la habitación con un sistema de referencia, que consiste en tres rectas (o ejes) mutuamente perpendiculares, que se cortan en un punto llamado **origen** de coordenadas **O**.

El tratamiento que sigue se referirá a las longitudes, pero puede extenderse sin dificultad a otras magnitudes con una conveniente representación en escala.

Así, la posición de un punto P del espacio respecto al sistema de referencia dibujado, puede determinarse sin ambigüedad trazando las líneas rectas de puntos paralelas a los ejes coordenados y observando el punto de corte.

Para distinguir entre los tres ejes los llamaremos **x**, **y**, **z** y para medir la posición asignaremos una unidad de medida (un segmento) a cada uno de ellos, transformándolos en tres reglas con su cero coincidente con el origen de coordenadas.

Por convención asignaremos valores positivos a las divisiones de las reglas a uno de los

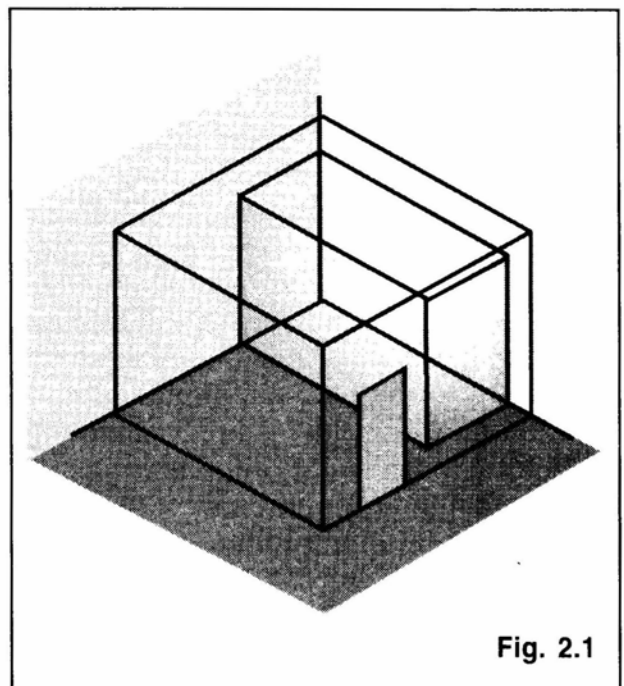


Fig. 2.1

VECTORES

F
I
S
I
C
A
lados a partir del cero para cada eje y simbolizaremos esta convención poniendo flechas en sus extremos que indiquen el sentido positivo (arbitrario) del eje (vea la figura). Con esta construcción, la posición del punto P respecto del sistema de referencia quedará definida por los tres números (x,y,z) que son las marcas de las tres reglas correspondientes a los puntos de cruce con las líneas rectas de puntos que pasan por P y son paralelas a los ejes.

Otra forma de denotar la posición de P es mediante un segmento de recta entre O y P, orientado de forma que vaya de O a P. Este es el **vector posición del punto P**. Para definirlo no basta conocer su longitud, medida con una regla similar a la que colocamos sobre los ejes, sino que es necesario también saber su orientación en el espacio relativa a los tres ejes.

Así los puntos P y Q están a igual distancia de O, de modo que la longitud de sus correspondientes vectores posición es la misma, pero la orientación de los vectores es diferente, por la distinta posición de los puntos.

De ahora en más denominaremos a los vectores colocando una flecha o una raya sobre la letra que simboliza la magnitud física:

- \vec{r} : vector posición
- \vec{v} : vector velocidad
- \vec{F} : vector fuerza, etc

La descripción de la posición de un punto P por medio de sus coordenadas (x,y,z) y por medio de su vector posición \vec{r} , deben ser equivalentes, de donde deducimos que necesitamos tres números para definir a \vec{r} . Para ver cómo pueden definirse estos números, definimos primero la **proyección** de un vector sobre una recta: dado un vector \vec{A} (cualquiera) y una recta u (cualquiera), la proyección \vec{A}_u del vector \vec{A} sobre la recta u es otro vector, contenido en u , cuya longitud resulta de trazar líneas perpendiculares a u desde los extremos del vector. Observe que se mantiene el sentido del vector definido por la flecha.

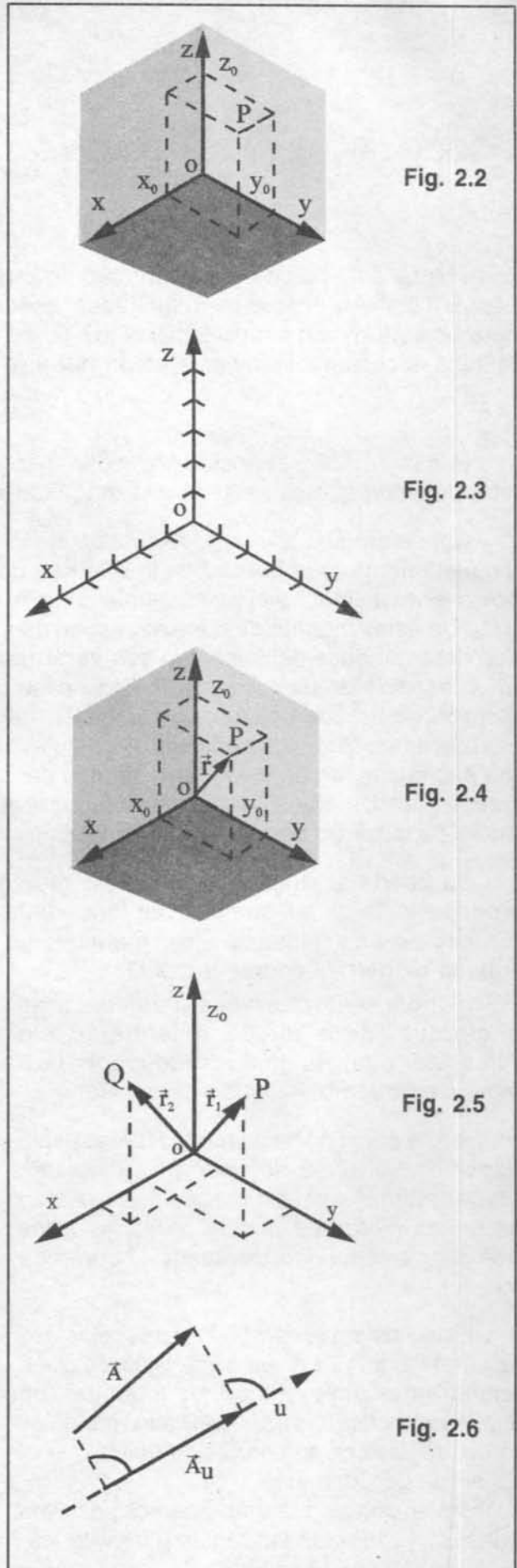


Fig. 2.2

Fig. 2.3

Fig. 2.4

Fig. 2.5

Fig. 2.6

Con esta definición el vector posición \vec{r} puede proyectarse sobre los ejes coordenados, dando las proyecciones \vec{r}_x, \vec{r}_y y \vec{r}_z . Observe que la punta de cada una de estas proyecciones coincide con las medidas x, y, z respectivamente.

Podemos relacionar ambas descripciones de la posición:

$$(x, y, z) : (\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z)$$

definiendo el producto de un vector por un escalar: Dado un vector \vec{A} y un escalar cualquiera, el producto $a\vec{A} = \vec{B}$ es otro vector paralelo y cuya longitud es $|a|$ veces la longitud de \vec{A} .

Si a es positivo, \vec{B} tiene el mismo sentido que \vec{A} . Si a es negativo, \vec{B} tiene sentido opuesto a \vec{A} . Si $a = 0$, $\vec{B} = \vec{0}$ es el **vector nulo**, es decir, de longitud cero. En este caso no tiene sentido especificar dirección o sentido.

Definimos también un **versor** como un vector de longitud unitaria. Así, dada una recta orientada u , el versor que *está asociado* a ella es un vector de longitud unitaria, paralelo a u y de igual sentido que la orientación de la recta. Designaremos a los versores con el nombre de la recta y un acento circunflejo: \hat{u} . Con estas dos definiciones, si existe un vector sobre \hat{u} , como en la figura, podremos denominarlo:

$$\vec{A} = A \hat{u}$$

donde A es un escalar que designa la longitud o **módulo** del vector, expresión que es válida sólo si el versor y el vector van para el mismo lado. También se usa la notación $|\vec{A}|$ para el módulo y se escribe: $\vec{A} = |\vec{A}| \hat{u}$ cuando puede haber confusión en la escritura.

Volviendo con estas nociones al vector posición, hemos observado que resultan de utilidad los versores asociados a los ejes coordenados y que se suelen escribirse en **negrita** (\hat{i}, \hat{j} y \hat{k}) en los libros, sin el acento circunflejo; o a veces: \check{i}

Si designamos, como se hace comúnmente a los versores:

\check{i} : versor del eje x

\check{j} : versor del eje y

\check{k} : versor del eje z

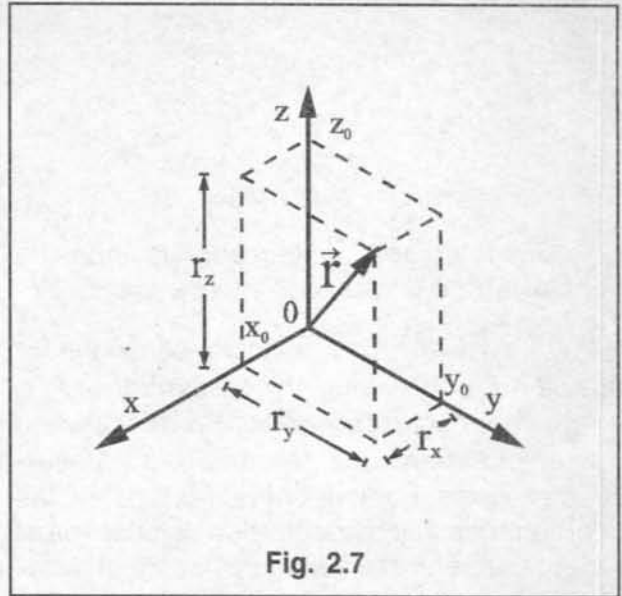


Fig. 2.7

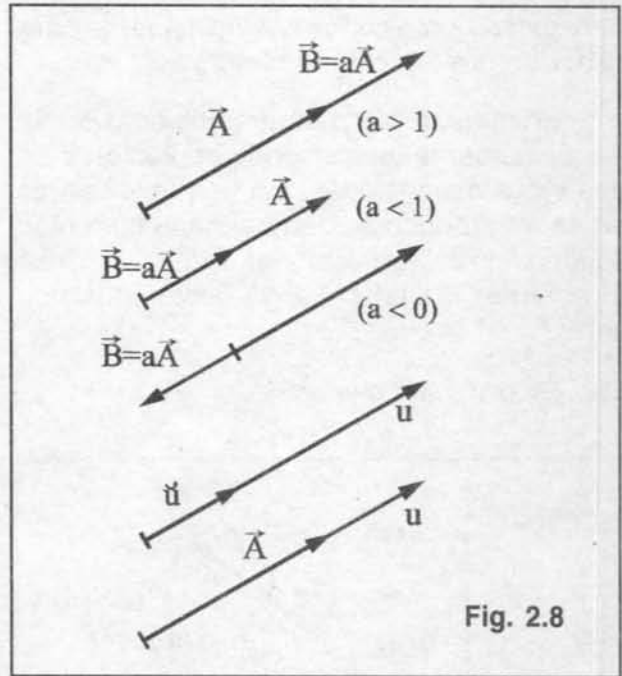


Fig. 2.8

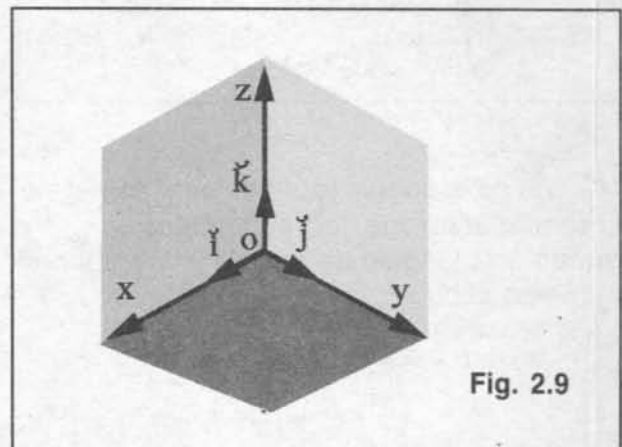


Fig. 2.9

VECTORES

Podemos escribir:

S
I
C
A

$$r_x = x \hat{i}$$

$$r_y = y \hat{j}$$

$$r_z = z \hat{k}$$

Que relacionan ambas descripciones de la posición de un punto **P** en el espacio.

$r_x \hat{i}$, $r_y \hat{j}$, $r_z \hat{k}$, son las proyecciones del vector posición \vec{r} sobre los ejes coordenados; r_x , r_y y r_z se denominan **componentes** (escalares) de \vec{r} en el sistema de referencia dado. Observe que estas componentes (así como las coordenadas x , y , z) dependen de cuál sea el sistema de referencia elegido. Como el sistema de referencia es arbitrario y se elige generalmente por la comodidad del cálculo, siempre es necesario especificarlo claramente para evitar confusiones o sencillamente para saber de qué se está hablando.

En nuestro curso tendremos ocasión de ver únicamente aplicaciones de vectores en una y dos dimensiones, por lo que, después de esta introducción general continuaremos suponiendo dos dimensiones, lo que simplifica el análisis. En tal caso, el vector posición será:

$$\vec{r} = (r_x, r_y) \text{ tal que } r_x = x_0 \hat{i} \text{ y } r_y = y_0 \hat{j}$$

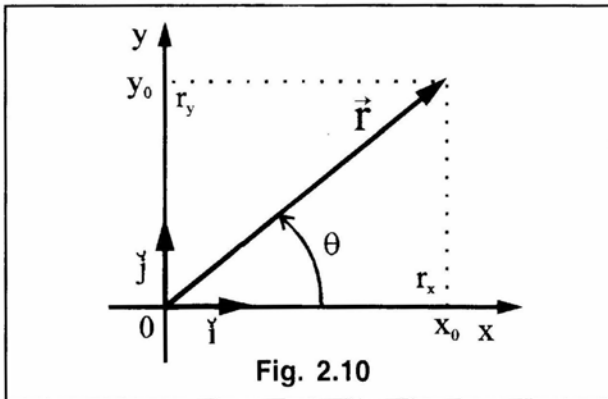


Fig. 2.10

Si θ es el ángulo formado por \vec{r} con el eje x , se observa que los segmentos r_x , r_y y r forman un triángulo de ángulo θ , y entonces podemos escribir:

$$r_x = |\vec{r}| \cos \theta \quad \text{y} \quad r_y = |\vec{r}| \sin \theta$$

$$r_x^2 + r_y^2 = |\vec{r}|^2$$

que son las relaciones entre los módulos de \vec{r} , r_x y r_y . Además, en la otra descripción:

$$x = |\vec{r}| \cos \theta$$

$$y = |\vec{r}| \sin \theta$$

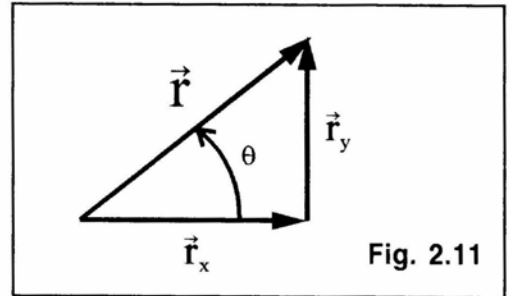


Fig. 2.11

2.2 OPERACIONES CON VECTORES

Ya sabemos que la multiplicación de un vector por un escalar, da como resultado otro vector. Veamos algunas operaciones algebraicas con vectores.

Las magnitudes físicas representadas por vectores se pueden a veces sumar o restar. Así, un par de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo dan a veces una fuerza **resultante** que es la suma o **composición** de ambas fuerzas individuales. Sólo pueden sumarse vectores que tengan iguales unidades, o sea representen la misma magnitud física.

Consideremos dos vectores \vec{A} y \vec{B} , de iguales dimensiones (**no** necesariamente longitudes: iguales unidades) y aplicados al mismo punto donde colocamos un sistema de referencia, sobre el cual resultan las componentes:

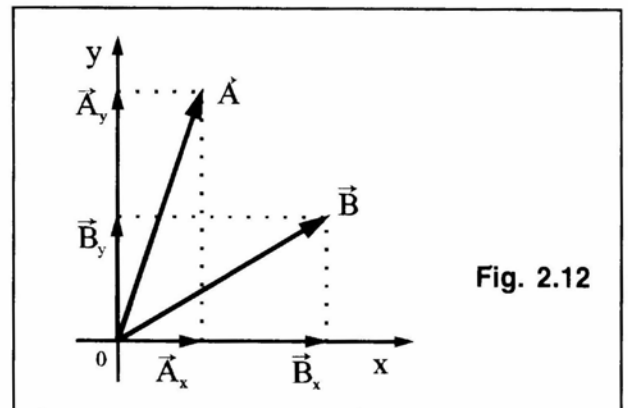


Fig. 2.12

$$\vec{A} = (A_x, A_y) \quad \vec{B} = (B_x, B_y)$$

El vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ tendrá componentes:

$$C_x = A_x + B_x \quad C_y = A_y + B_y$$

que resultan de sumar las **componentes** de los vectores sumandos.

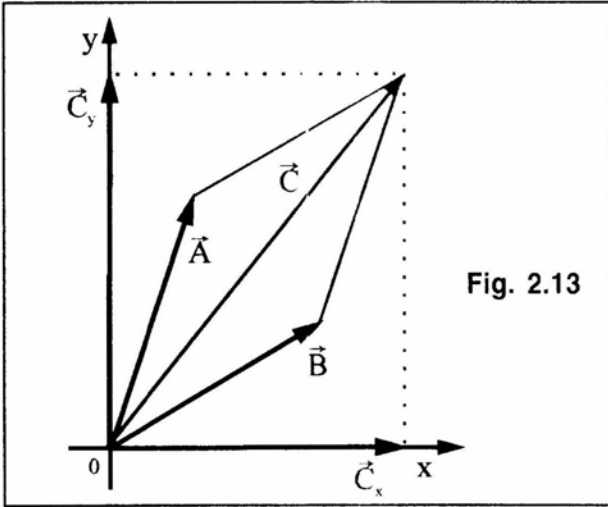


Fig. 2.13

Sumar dos vectores colineales, simplemente es hallar otro vector cuya longitud sea la suma algebraica de las longitudes individuales, su dirección es coincidente con la de los vectores sumandos y el sentido el mismo del vector de mayor longitud.

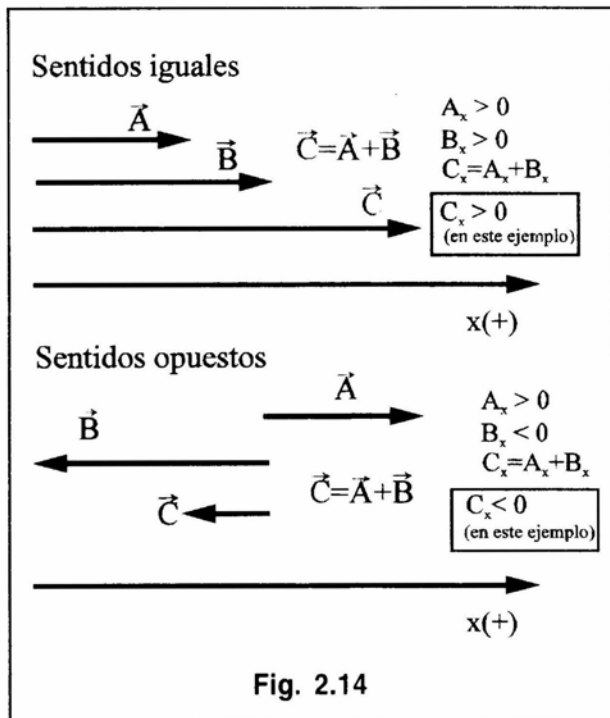


Fig. 2.14

Los casos en que es lícito o no sumar vectores, se estudian en cada capítulo de la Física.

El ejemplo de dos fuerzas opuestas y de igual módulo que actúan sobre rectas paralelas (llamado par o cupla de fuerzas) muestra que **no** es lícito en ese caso reemplazarlas por el vector suma.

Efectivamente, la suma

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

es nula, pues \vec{F}_1 y \vec{F}_2 tienen direcciones paralelas y sentido opuesto y la misma intensidad.

Sin embargo **no** es lo mismo aplicar una cupla al sacacorchos que no aplicarle ninguna fuerza: en el primer caso penetra en el corcho, en el segundo se queda inmóvil.

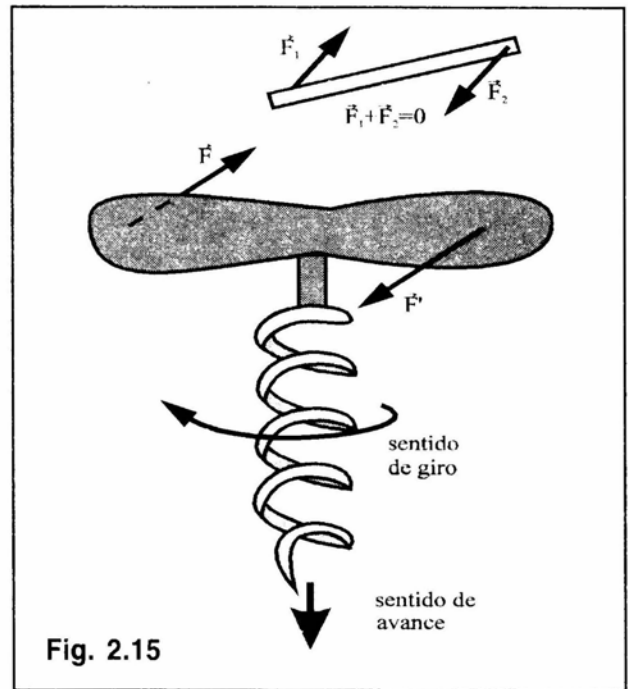


Fig. 2.15

Un caso en que sí es lícito reemplazar dos fuerzas por su suma vectorial, es cuando ambas están aplicadas en el mismo punto.

El cálculo de la suma de vectores a través de sus proyecciones da los mismos resultados que aplicar la llamada «regla del paralelogramo», donde el vector \vec{C} coincide con la diagonal del paralelogramo construido con lados \vec{A} y \vec{B} .

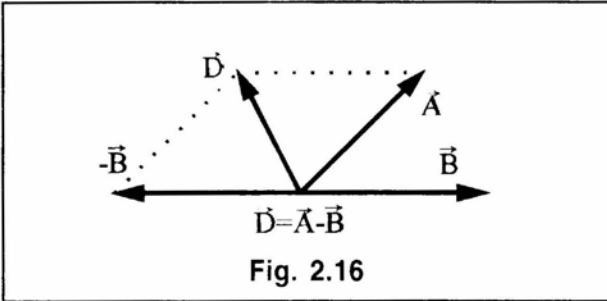
VECTORES

**F
I
S
I
C
A**

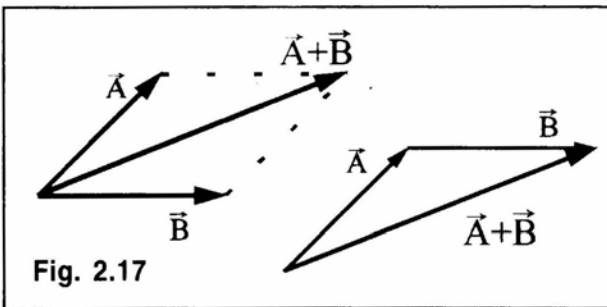
El vector **resta** puede deducirse del vector suma con :

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\vec{B}$$

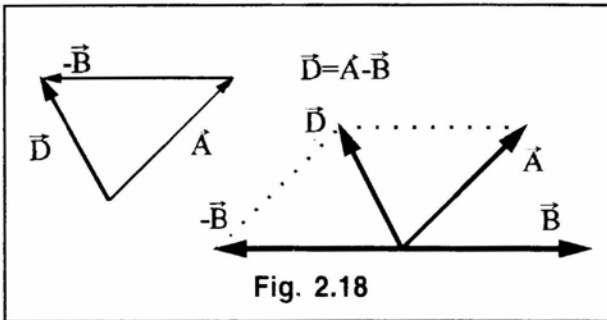
o sea que es la suma de \vec{A} y el vector opuesto a \vec{B} , como se muestra en la figura.



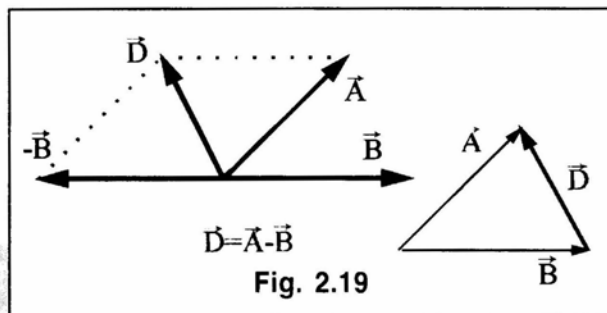
Observe que la construcción del paralelogramo se puede reemplazar por un triángulo:



y análogamente para la resta.

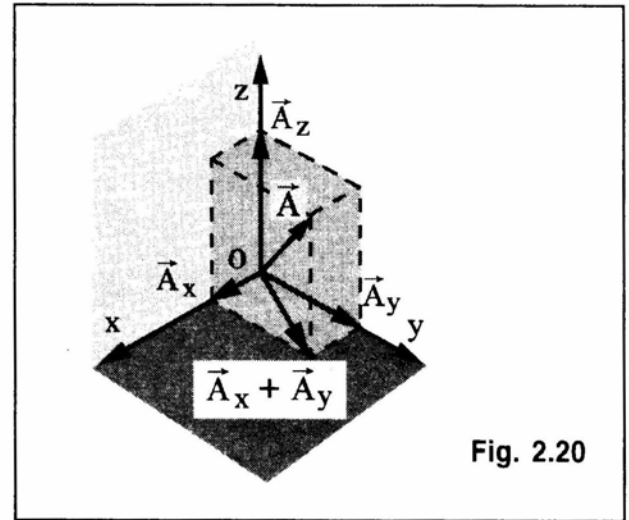


Observe que la siguiente construcción es también equivalente para este caso:



Un caso particular importante de la suma es la operación inversa a la descomposición de un vector, que hemos visto en el caso del vector posición y que plantearemos aquí para un vector cualquiera \vec{A} : para hallar sus componentes colocamos un sistema de coordenadas con su origen O sobre el origen del vector. Recordando la definición de los versores ligados a este sistema de referencia, introducimos los vectores \vec{A}_x , \vec{A}_y y \vec{A}_z relacionados con las componentes A_x , A_y y A_z mediante

$$\vec{A}_x = A_x \mathbf{i}; \quad \vec{A}_y = A_y \mathbf{j}; \quad \vec{A}_z = A_z \mathbf{k}$$



Supongamos que sumamos las proyecciones \vec{A}_x y \vec{A}_y . El vector suma resultante está sobre el **plano x - y** (es decir, el plano que forman los ejes **x** e **y**) y como el paralelogramo formado por \vec{A}_x y \vec{A}_y es un rectángulo, o lo que es lo mismo, \vec{A}_x y \vec{A}_y son vectores perpendiculares, se puede aplicar la relación

$$|\vec{A}_x + \vec{A}_y| = \sqrt{|\vec{A}_x|^2 + |\vec{A}_y|^2}$$

de Pitágoras para hallar:

$\vec{A}_x + \vec{A}_y$ es perpendicular a \vec{A}_z y el vector suma $(\vec{A}_x + \vec{A}_y) + \vec{A}_z$ es justamente el vector original \vec{A} . Entonces podemos escribir

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

o también

$$\vec{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

Aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras a $(\vec{A}_x + \vec{A}_y) + \vec{A}_z$, tenemos:

$$|(\vec{A}_x + \vec{A}_y) + \vec{A}_z| = |\vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z| = \sqrt{|\vec{A}_x|^2 + |\vec{A}_y|^2 + |\vec{A}_z|^2}$$

pero $|\vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z| = |\vec{A}|$ y usando la expresión anterior para $|\vec{A}_x + \vec{A}_y|$ tenemos finalmente

$$|\vec{A}|^2 = |\vec{A}_x|^2 + |\vec{A}_y|^2 + |\vec{A}_z|^2$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

que nos da la amplitud del vector \vec{A} en términos de sus componentes.

Hasta aquí hemos considerado la suma y resta de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar. ¿Se puede introducir más de un producto entre vectores? La respuesta es que sí, y de las muchas formas posibles de definirlos, hay dos clases de productos: el llamado **producto escalar** entre dos vectores, que da por resultado un escalar (o sea un número, no un vector) y el llamado **producto vectorial** que da por resultado otro vector, que son utilizados comúnmente.

Consideremos dos vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} . Llamamos producto **escalar** de \vec{A} por \vec{B} (o de \vec{B} por \vec{A}) y lo denotaremos con $\vec{A} \cdot \vec{B}$, al escalar que surge del producto de la proyección de \vec{A} (en amplitud) sobre la dirección de \vec{B} por la amplitud de \vec{B} .

Luego:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_b B$$

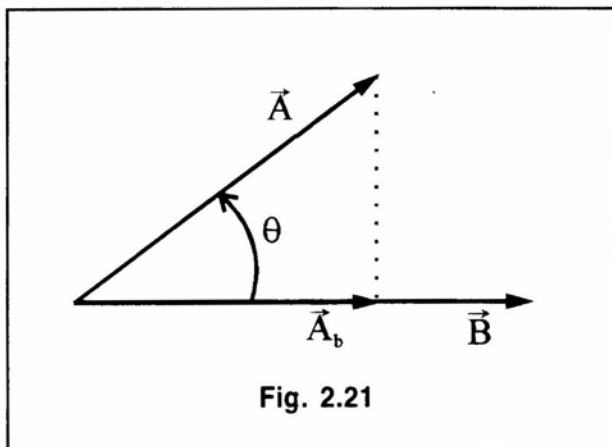


Fig. 2.21

Si θ es el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} , sabemos que la proyección de \vec{A} sobre la dirección de \vec{B} es $A_b = A \cos \theta$, y entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \theta$$

Observe que:

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

y es indistinto el orden en que consideramos el producto. Dado que el producto escalar depende del coseno del ángulo comprendido entre los vectores, su valor puede variar considerablemente al cambiar el ángulo.

Así, por ejemplo, si los vectores son perpendiculares $\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta = 0$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Observe que en este caso la proyección de \vec{A} sobre \vec{B} (o de \vec{B} sobre \vec{A}) es nula.

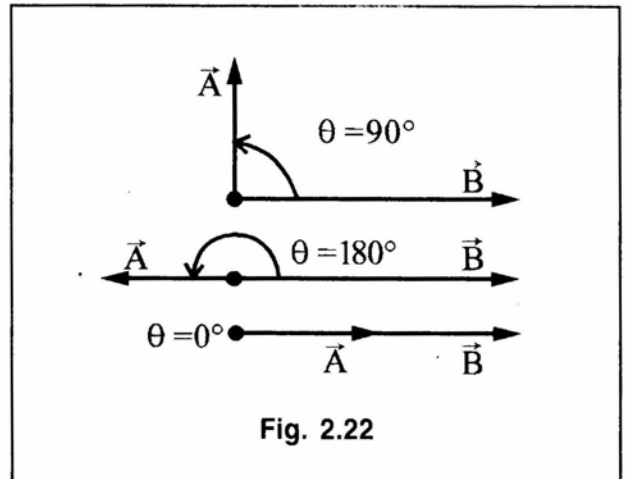


Fig. 2.22

Si los vectores coinciden en dirección y sentido (son paralelos) $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$. La proyección de \vec{A} sobre \vec{B} (o de \vec{B} sobre \vec{A}) tiene la longitud de \vec{A} (o de \vec{B}).

Si los vectores coinciden en dirección pero tienen sentidos opuestos (son **antiparalelos**) $\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos \theta = -1$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$.

El **producto vectorial** da por resultado otro **vector**. Consideremos nuevamente los vectores \vec{A} y \vec{B} . Llamamos producto vectorial de \vec{A} por \vec{B} , y lo denotamos con $\vec{A} \times \vec{B}$, al vector tal que:

- es perpendicular a \vec{A} y a \vec{B}
- su amplitud es igual a $AB \sin \theta$
- su sentido se determina mediante la regla del tornillo o del tirabuzón: imagine un tornillo

VECTORES

F perpendicular al plano formado por los
I vectores \vec{A} y \vec{B} . Si se hace girar el tornillo en
S el sentido de ir desde \vec{A} a \vec{B} , describiendo
I el ángulo más pequeño (ver Fig. 2. 23), el
C sentido de avance del tornillo (en este caso
A hacia «abajo») da el sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$.

Observe que el producto $\vec{B} \times \vec{A}$ (orden invertido) **invierte** el sentido de giro del tornillo

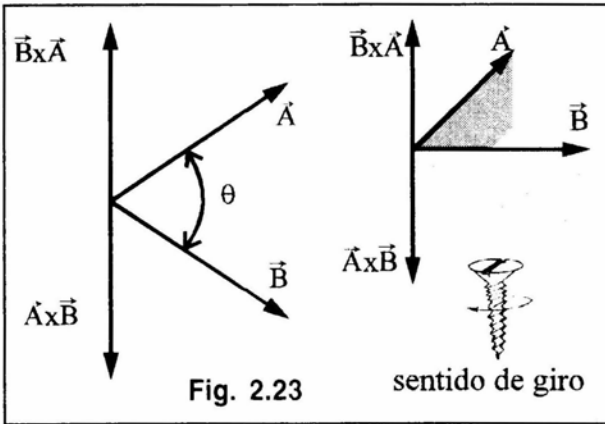


Fig. 2.23

y por lo tanto el sentido de avance, de modo que

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

y en el producto vectorial es importante el orden con que entran los factores.

El producto escalar tendrá aplicación en nuestro curso en el tratamiento del **trabajo** de una fuerza, en tanto que el producto vectorial nos será de utilidad al tratar el **momento** de una fuerza respecto a un punto del espacio.

2.2 PROBLEMAS DE APLICACION

1 - ¿Qué propiedad tienen los vectores \vec{a} y \vec{b} , tales que cumplen

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ y $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ y $a^2 + b^2 = c^2$

d) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

2 - Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores, expresados en coordenadas

polares:

a) $\vec{a} = (10; 300^\circ)$

e) $\vec{e} = (\sqrt{3}; -240^\circ)$

b) $\vec{b} = (\sqrt{2}; 135^\circ)$

f) $\vec{f} = (8; 180^\circ)$

c) $\vec{c} = (0,5; -30^\circ)$

g) $\vec{g} = (1; 0^\circ)$

d) $\vec{d} = (40; 220^\circ)$

h) $\vec{r} = (0; -125^\circ)$

3 - Hallar módulo y argumento de los siguientes vectores expresados en coordenadas cartesianas:

a) $\vec{v}_1 = (4; 5)$

e) $\vec{v}_5 = (1; -2)$

b) $\vec{v}_2 = (-2; 8)$

f) $\vec{v}_6 = (\sqrt{3}; 0)$

c) $\vec{v}_3 = (-10; -1)$

g) $\vec{v}_7 = (-3; -4)$

d) $\vec{v}_4 = (0; 4)$

h) $\vec{v}_8 = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

4 - Dados los vectores $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (-2; 1)$ y $\vec{c} = (5; 0)$ resolver las siguientes operaciones entre vectores:

a) $\vec{a} + \vec{b} =$

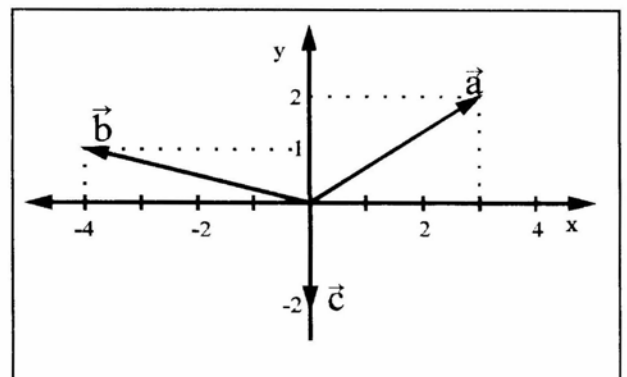
c) $2\vec{b} + 3\vec{c} =$

b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} =$

d) $-4\vec{a} + 1/2 \vec{c} =$

5 - Hallar módulo y argumento de la suma de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

6 - Hallar módulo y argumento del vector



$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$, siendo:

$\vec{v}_1 = (3; 30^\circ)$

$\vec{v}_3 = (10; 90^\circ)$

$\vec{v}_2 = (2; 120^\circ)$

$\vec{v}_4 = (1; 225^\circ)$

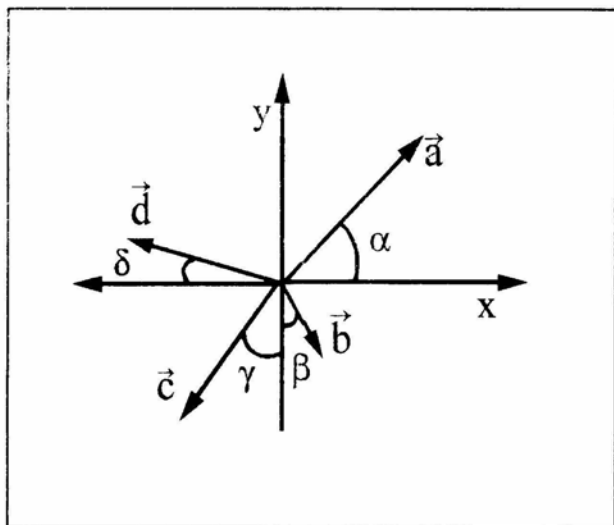
7 - Hallar $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, siendo:

$$\alpha = 45^\circ \quad |\vec{a}| = 5$$

$$\beta = 30^\circ \quad |\vec{b}| = 2$$

$$\gamma = 53^\circ \quad |\vec{c}| = 4$$

$$\delta = 15^\circ \quad |\vec{d}| = 4$$



8 - Dados los vectores

$$\vec{a}: (6; 0^\circ); \vec{b}: (3; 0^\circ); \vec{c}: (8; 60^\circ); \vec{d}: (10; 90^\circ);$$

$$\vec{e}: (2; 135^\circ); \vec{f}: (5; 180^\circ); \vec{g}: (-4; 210^\circ); \vec{r}: (5; 300^\circ)$$

Representar los siguientes pares de vectores y hallar el producto escalar entre ellos.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e) $\vec{b} \cdot \vec{g}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{d}$ f) $\vec{e} \cdot \vec{g}$

c) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ g) $\vec{c} \cdot \vec{g}$

d) $\vec{a} \cdot \vec{f}$ h) $\vec{c} \cdot \vec{r}$

Observe que con esta definición Δt se acerca indefinidamente al valor cero, pero nunca lo alcanza, lo que nos evita el problema de dividir por cero en la expresión de la velocidad. Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, también $\Delta r \rightarrow 0$, con la misma definición que antes. Llamaremos **límite** de $\Delta r/\Delta t$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ al valor al que se aproxima el cociente $\Delta r/\Delta t$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$. En notación matemática:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Esta operación puede dar un resultado **finito** (un número), infinito o puede no tener solución, y en este caso se dice que el límite no existe. Incluso suele decirse que no existe límite aún en el caso en que da infinito.

Vamos a dar algunos ejemplos para ver cómo funciona este concepto de límite. Para ello vamos a operar con movimientos rectilíneos para evitarnos la complicación de usar vectores.

Sea:

$$x_{(t)} = 3t + 2 \quad (x \text{ en m y } t \text{ en s})$$

y calculemos la velocidad media en los intervalos (1; 5); (1; 3) y luego el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ alrededor de $t = 1s$.

Para el intervalo (1; 5): $\Delta t = 4s$

$$\Delta x = x_{(5)} - x_{(1)} = (17 - 5)m = 12m$$

Luego

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 3m/s$$

Para el intervalo (1; 3): $\Delta t = 2s$

$$\Delta x = x_{(3)} - x_{(1)} = (11-5)m = 6m;$$

luego $v_m = 3m/s$

Observe que v_m es la misma en ambos intervalos. Esto ocurre porque se trata de un movimiento uniforme.

Consideremos ahora el intervalo (1; 1+ Δt) con $\Delta t \rightarrow 0$.

Entonces: $\Delta x = x_{(1+\Delta t)} - x_{(1)} =$

$$\Delta x = [3(1+\Delta t) + 2] - [3 \cdot 1 + 2]$$

$$\Delta x = 3 \Delta t + 5 - 5 = 3 \Delta t$$

Luego:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3\Delta t}{\Delta t} = 3m/s$$

Observe que hemos simplificado Δt antes de tomar el límite, cuando Δt vale algo no nulo. Esta es la velocidad instantánea para $t = 1s$. Observe que coincide con las velocidades medias halladas anteriormente por tratarse de un movimiento uniforme. En realidad, para cualquier instante t_0 e intervalo $(t_0, t_0 + \Delta t)$:

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) =$$

$$\Delta x = [3(t_0 + \Delta t) + 2] - [3t_0 + 2] = 3 \Delta t$$

y

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3\Delta t}{\Delta t} = 3m/s$$

La velocidad es constante para un movimiento uniforme.

Consideremos ahora un movimiento acelerado:

$$x(t) = 3t^2 + 2t + 5 \quad (x \text{ en m y } t \text{ en s})$$

y repitamos los cálculos anteriores

$$v_m(1;5) = \frac{x_{(5)} - x_{(1)}}{5s - 1s} =$$

$$v_m(1;5) = \frac{3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 5 - (3 + 2 + 5)}{4} m/s$$

$$v_m(1;5) = 20m/s$$

$$v_m(1;3) = \frac{x_{(3)} - x_{(1)}}{3s - 1s} =$$

$$v_m(1;3) = \frac{3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 5 - (3 + 2 + 5)}{2} m/s$$

$$v_m(1;3) = 14m/s$$

3.1 NOCION DEL LIMITE Y DERIVADA

En la cinemática estudiamos magnitudes medias e instantáneas. Las magnitudes medias, como la velocidad media y aceleración media, dan una descripción global del movimiento en un intervalo de tiempo.

Por otra parte, las magnitudes instantáneas dan una descripción instante a instante del movimiento, y llevan a considerar a dichas magnitudes como funciones del tiempo. Así, en el caso de la trayectoria S de la Fig.3.1, \vec{r}_1 es la posición del móvil en el instante t_1 y \vec{r}_2 la posición el instante t_2 . En el intervalo de tiempo

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

el móvil tuvo un desplazamiento:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Es razonable preguntarse qué ocurre si vamos sucesivamente disminuyendo el intervalo Δt (y por lo tanto el desplazamiento $\Delta \vec{r}$). Obtendríamos distintos valores de velocidad media para intervalos cada vez más pequeños. ¿Qué ocurre si se lleva Δt a cero?

En tal caso tendríamos un problema, porque no podemos dividir por cero, pero como cuando Δt se acerca a cero, también $\Delta \vec{r}$ lo hace, tendríamos para el cálculo de la velocidad media un cociente $0/0$ al que no podemos adjudicarle sentido.

Para tratar de aclarar este sentido debemos introducir el concepto matemático de **límite**, y la noción de la **tendencia** de una variable a un valor dado. Decimos que Δt **tiende a cero** (y escribimos $\Delta t \rightarrow 0$) queriendo significar que hacemos a t tan pequeño como se nos ocurra, pero siempre mayor que cero. En notación matemática:

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta t < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \quad \text{pero} \quad \Delta t > 0$$

donde ε es un número cualquiera que deseemos (0.001; 10^{-75} ; etc).*

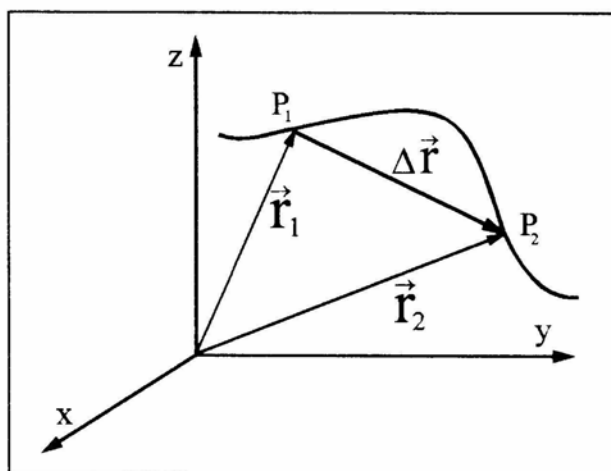


Fig.3.1

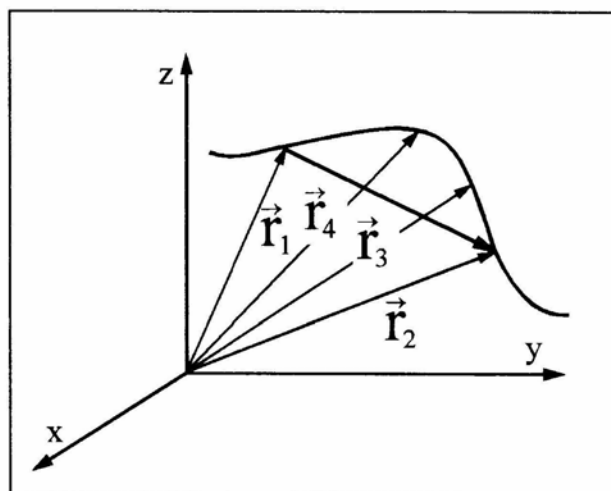


Fig.3.2

* El análisis matemático aclara esto con el rigor suficiente. En esta presentación se apela más a la intuición que al razonamiento valedero.

ANÁLISIS MATEMÁTICO

F Las velocidades medias en distintos
I intervalos difieren, por tratarse de un movimiento
S acelerado. Veamos ahora qué pasa con el
C intervalo $(t_0, t_0 + \Delta t)$:
A

$$v_m(t_0; t_0 + \Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{3(t_0 + \Delta t)^2 + 2(t_0 + \Delta t) + 5 - (3t_0^2 + 2t_0 + 5)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{3\Delta t^2 + 6t_0\Delta t + 2\Delta t}{\Delta t} = 3\Delta t + 6t_0 + 2$$

y tomando ahora el límite para $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m(t_0; t_0 + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 3\Delta t + 6t_0 + 2$$

pero **3 Δt** tiende a **cero** con **Δt**, y es de valor despreciable frente a los otros sumandos. Hemos obtenido así la **velocidad instantánea** del movimiento para cualquier instante t_0 :

$$v(t_0) = 6t_0 + 2 \quad (v \text{ en m/s, } t_0 \text{ en s})$$

Obsérvese que, en general, si

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = a t + v_0$$

y reconocemos en las ecuaciones utilizadas:

$$x_0 = 5 \text{ m}; \quad v_0 = 2 \text{ m/s}; \quad a = 6 \text{ m/s}^2$$

En general, cuando tenemos una función cualquiera $f(t)$, la cantidad

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

se denomina **derivada** de $f(t)$ calculada en $t = t_0$, y se simboliza:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Por ejemplo, sea $f(t) = a t^2$; entonces

$$f(t_0) = a t_0^2;$$

$$f(t_0 + \Delta t) = a (t_0 + \Delta t)^2 = a (t_0^2 + \Delta t^2 + 2t_0 \Delta t)$$

y luego

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t_0^2 + \Delta t^2 + 2t_0 \Delta t) - a t_0^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (a \Delta t + 2a t_0) = 2a t_0$$

y para $t_0 = t$ cualquiera: $f'(t) = 2a t$.

Observe que la derivada de una función cuadrática es una función lineal. En general:

$$f(t) = a t^n \quad f'(t) = n a t^{n-1}$$

A continuación le presentamos una tabla de derivadas de las funciones más comunes:

$f(t)$	$f'(t)$
c (constante)	0
t	1
t^n	nt^{n-1}
$cf(t)$	$c f'(t)$
$1/t$	$-1/t^2$
$\sqrt{t} = t^{1/2}$	$\frac{1}{2} t^{-1/2}$
e^t	e^t
$\cos t$	$-\sin t$
$\operatorname{tg} t$	$1/\cos^2 t$
e^t	$e^t \ln e$

3.2 PROBLEMAS DE APLICACION

1 - Dada la expresión $y = 2 - 3\Delta x - 5x\Delta x + \Delta x^2$

Hallar los límites para:

- a) $\Delta x \rightarrow 1$
- b) $\Delta x \rightarrow 0,2$
- c) $\Delta x \rightarrow 0$

2 - Sea la expresión de la posición en función del tiempo $x(t) = 2t - 3$

- a) Hallar $x(1)$.
- b) Hallar la posición para un instante posterior $t' = t + \Delta t$ en forma general.
- c) El desplazamiento efectuado entre los instantes t y t' , $[\Delta x(t;t+\Delta t)]$ en forma general.
- d) Calcular el desplazamiento entre $t = 1$ y $t' = 1,5 = 1 + 0,5$.
- e) Hallar la expresión de la v_m en forma general.
- f) Calcular la velocidad media entre $t = 1$ y $t' = 1,5$
- g) Hallar la expresión de la velocidad instantánea $v(t)$.

3 - Repetir el problema 2 para:

$$x(t) = 5 - 2t + 3t^2$$

4 - Repetir el problema 2 para

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} - 5t^2\vec{j}, \text{ siendo } \vec{r}: \text{vector posición.}$$

5 - Hallar, para los ejercicios 2, 3 y 4, la velocidad instantánea y la aceleración por derivación.

6 - Sea un movimiento dado por la ecuación

$$x(t) = 2 \text{ sen } t$$

Hallar, por derivación, $v(t)$ y $a(t)$.

4.1 UNIDADES Y MAGNITUDES FISICAS

En Física no basta operar correctamente con reglas algebraicas para obtener un resultado significativo. Es además necesario especificar en qué unidades se expresa tal resultado. Por ejemplo, si decimos que un tren pasa frente a nosotros con una velocidad de 20 m/s y alguien a nuestro lado replica que la velocidad es de 72 km/h, no está contradiciendo nuestra afirmación, a pesar de dar un número distinto, porque las dos formas de expresión son equivalentes, es decir, son una y la misma cosa y la diferencia numérica resulta de usar diferentes unidades de la velocidad: m/s o km/h. Si decimos «20» ó «72» estas expresiones carecen de significado mientras no aclaremos a qué unidades estos números están referidos.

En la Física se definen numerosas unidades que hacen más fácil el trabajo matemático pero la proliferación de unidades acarrea dificultades de comprensión entre personas que utilicen definiciones distintas. Así, podemos medir longitudes terrestres en metros o en yardas, en kilómetros o millas, en múltiplos de la longitud perimetral de la Plaza de Mayo o cualquier otra longitud que se nos ocurra conveniente, pero los números obtenidos en cada caso para expresar una distancia dada serán distintos y será necesario tener una tabla de conversión, lo que hace tedioso y sujeto a error el comparar resultados de experiencias obtenidas por distintas personas. Por lo tanto se ha convenido en fijar un Sistema Internacional de unidades físicas (que abreviaremos en adelante SI) para evitar la proliferación de unidades para una misma magnitud física.

De este sistema señalaremos a continuación las unidades de las magnitudes físicas relevantes en este curso, dejando de lado aquellas magnitudes de interés en otros casos y tratando de simplificar al máximo las definiciones de las unidades, que se han complicado a medida que los avances científicos y técnicos han necesitado mayor precisión en las mediciones.

Por una parte, decimos que hemos definido una unidad de alguna magnitud física cuando especificamos un conjunto de reglas o, por así decirlo, una «receta» de procedimientos a seguir para medir la magnitud y asignarle un número. Estas recetas pueden ser tan arbitrarias como el ejemplo de atribuir la unidad de longitud al perímetro de la Plaza de Mayo, medido extendiendo a su largo un piolín, pero en la actualidad los procedimientos tienden a utilizar fenómenos físicos que puedan repetirse en iguales condiciones en cualquier sitio y arrojen idénticos resultados.

Por otra parte, las magnitudes físicas son interdependientes, es decir, definido un conjunto de unidades, las restantes surgen a partir de ellas mediante las relaciones teóricas que la física ha establecido entre las magnitudes correspondientes. Así, si hemos definido unidades para las magnitudes longitud y tiempo, la unidad de la magnitud velocidad se deriva de aquellas por la relación que define a la velocidad como el cociente entre desplazamiento de un móvil (que es una longitud) y el tiempo transcurrido.

Entonces tendremos unidades **fundamentales**, que son las que definimos mediante reglas de medición y procedimientos de obtención, y unidades **derivadas** que se obtienen a partir de las fundamentales a través de las relaciones físicas entre las magnitudes correspondientes.

Qué unidades tomar como fundamentales y cuáles como derivadas es en última instancia una decisión convencional, pero lo importante es tratar de elegir un número de unidades fundamentales tan pequeño como sea posible y cuyas recetas definitorias sean universales y suficientemente documentadas para evitar ambigüedades.

En el Sistema Internacional (SI) se han elegido como unidades fundamentales correspondientes a las magnitudes de longitud, tiempo y masa, que serán de interés a lo largo del curso, y a otras magnitudes relevantes en otros campos de la física que no utilizaremos aquí.

Las unidades asignadas a estas magnitudes, con los símbolos y las definiciones aceptadas internacionalmente se dan en la siguiente tabla, donde también se da la fecha en que se aceptó la definición citada:

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
longitud	metro	m	"...una longitud igual a 1650763.73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles 2p ₁₀ y 5d ₅ del átomo de Kriptón 86." (1960). En 1983 "el metro se define como la longitud del camino viajando en el vacío en el intervalo de tiempo de 1/299 792 458 segundos, el denominador es la velocidad de la luz en el vacío".
tiempo	segundo	s	"...la duración de 9192631770 períodos de la radiación que corresponde a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado básico del átomo de Cesio 133." (1967)
masa	kilogramo	kg	"...este prototipo (cierto cilindro de platino e iridioconservado en Sèvres, Francia) se considerará de ahora en más como la unidad de masa." (1889)

A partir de estas unidades fundamentales se pueden definir las unidades derivadas para las otras magnitudes utilizadas en la parte de la Física denominada mecánica. Las que utilizaremos en este curso se presentan en la siguiente tabla. Algunas de ellas tienen nombres especiales.

Magnitud	Unidad	Símbolo	Expresión en términos de las unidades fundamentales	Expresión en términos de otras unidades
Velocidad	$\frac{\text{metro}}{\text{segundo}}$	---	m/s	---
Aceleración	$\frac{\text{metro}}{(\text{segundo})^2}$	---	m/s ²	---
Fuerza	Newton	N	kg m/s ²	---
Trabajo y energía	Joule	J	kg m ² /s ²	N m
Potencia	Watt	W	kg m ² /s ³	N m/s
Impulso y cantidad de movimiento	$\frac{\text{kilogramo}}{\text{metro segundo}}$	---	kg m/s	N s
Velocidad angular	$\frac{\text{radián}}{\text{segundo}}$	----	1/s	---
Frecuencia	Hertz	Hz	1/s	---

Además de estas unidades, pertenecientes al **SI**, existen en uso otras que provienen de la tradición o de su uso en campos especializados donde se trata con cantidades muy pequeñas o muy grandes que hacen poco práctico el uso de las unidades en el **SI**. Así, por ejemplo, en la Física atómica y nuclear, se trata con longitudes del orden de 10^{-10} a 10^{-14} m, y para evitar el uso de estos factores exponenciales se define:

$$\text{el Angström (Å)} \quad 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

de modo que la distancia entre átomos vecinos en una muestra de aluminio sólido, digamos, es de 2.86 Å.

En el otro extremo del mundo físico, las distancias entre las galaxias son inmensamente grandes. Por ejemplo, la distancia a la que se encuentra la galaxia más próxima a nuestra posición, Andrómeda, es aproximadamente $2.5 \cdot 10^{19}$ km. La luz viaja en el espacio vacío interestelar a unos 300000 km/s, de modo que la luz proveniente de Andrómeda tarda unos

8,4 10^{13} s en llegar a nosotros, o sea 2.700.000 años... Aunque esta es una cantidad impresionante, es mucho más manejable que los $2,5 \cdot 10^{19}$ km, de modo que las distancias intergalácticas suelen expresarse en «años-luz». Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año, y equivale a $9,3312 \cdot 10^{17}$ m.

Sin ir tan lejos de nuestras experiencias cotidianas, hay unidades de uso común que no pertenecen al **SI**. Algunas de las más usuales que utilizaremos en el curso, con su equivalencia con las unidades del **SI** son las siguientes:

Magnitud	Unidad	Expresión en términos de otras unidades	Equivalencia con unidades del S.I.
Velocidad	kilómetro/hora	km/h	1 km/h = (1/3,6) m/s 1 m/s = 3,6 km/h
Fuerza	kilogramo fuerza	kgf	1 kgf = 9,8 N 1 N = (1/9,8) kgf
Trabajo y/o energía	kilográmetro (kilogramo x metro)	kgm	1 kgm = 9,8 J 1 J = (1/9,8) kgm
Energía	kilo x Watt x hora	kWh	1 kWh = $3,6 \cdot 10^7$ J 1 J = $2,778 \cdot 10^6$ kWh
Potencia	caballo de potencia	hp	1 hp = 745 W 1 W = 0,001341 hp

Esta tabla le permite trabajar con datos expresados en unidades mezcladas. Ponga especial atención al plantear un problema acerca de qué unidades se utilizan para expresar las magnitudes, y al operar siga las siguientes reglas, que le evitarán errores (muchos estudiantes de nuestros cursos equivocan, por falta de práctica, la conversión de kilómetros por hora a metros por segundo).

- Cada vez que reemplace una magnitud física por su valor numérico, escriba la unidad en que está expresada.
- Antes de operar con los valores numéricos, convierta unidades según la tabla y simplifique los símbolos de tales unidades hasta llegar a la unidad que está calculando. Verifique cuidadosamente que la unidad obtenida corresponde a la magnitud física que expresa.
- Recién en este momento realice los cálculos numéricos.

MAGNITUDES FÍSICAS

F Como ejemplo, calculemos la aceleración
i que adquiere un cuerpo de 0,5 kg al actuar
s sobre él una fuerza de 10 kgf, y la velocidad que
i tiene al cabo de 2 minutos de acción de la fuerza,
C si su velocidad inicial era de 36 km/h.
A

La aceleración adquirida es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10 \text{ kgf}}{0,5 \text{ kg}}$$

convertimos los «kgf» a «N»: 10 kgf = 98 N (ver la tabla) y expresamos este resultado en las unidades fundamentales **S.I.**

$$98 \text{ N} = 98 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

Entonces:

$$a = \frac{98 \text{ kg m}}{0,5 \text{ kg s}^2} = 196 \text{ m/s}^2$$

donde hemos simplificado la unidad «kg».

La velocidad que tiene el cuerpo en un instante t dado, suponiendo que la fuerza comienza a actuar en $t = t_0$, cuando la velocidad del cuerpo es v_0 , resulta:

$$v(t) = v_0 + a (t - t_0)$$

En nuestro caso:

$$v_0 = 36 \text{ km/h}$$

$$a = 196 \text{ m/s}^2$$

$$t - t_0 = 2 \text{ minutos}$$

llevando todos estos valores a unidades SI

$$v_0 = \frac{36 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

$$t - t_0 = 2 \cdot 60 \text{ s} = 120 \text{ s}$$

y entonces:

$$v_{(t = t_0 + 120 \text{ s})} = 10 \text{ m/s} + 196 \text{ m/s}^2 \cdot 120 \text{ s}$$

$$v_{(t = t_0 + 120 \text{ s})} = 23530 \text{ m/s}$$

Constantes universales:

velocidad de la luz en el vacío:

$$c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

constante de gravitación universal:

$$G \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

RESPUESTAS

EJERCICIOS

CAPITULO 2

- 1 - a) $5.46 \cdot 10^4$; b) $4.321 \cdot 10^{14}$; c) $1.8 \cdot 10^{-1}$; d) $6 \cdot 10^{-12}$; e) $3 \cdot 10^7$; f) $2 \cdot 10^{-8}$; g) $9 \cdot 10^6$;
 h) $1.25 \cdot 10^{-14}$; i) $2 \cdot 10^3$; j) $2 \cdot 10^{-1}$; k) $7.5 \cdot 10^5$; l) $3 \cdot 10^3$.
- 2 - a) $1 \cdot 10^3$; b) $3 \cdot 10^6$.
- 3 - a) 9.8; b) $7.4 \cdot 10^{22}$.
- 4 - $F = 1.99 \cdot 10^{12}$.

RESPUESTAS

PROBLEMAS DE APLICACION

CAPITULO 1

SERIE 1.1

- 1 - a) $x = -1$; b) $x = -4$; c) $x = -1$;
 d) $x = 6$; e) $x = 5$
- 2 - $v_2 = v \cdot v_1 / (2v_1 - v)$
- 3 - $1/R \sqrt{2g(h_0 - h)}$
- 4 - a) $y = 4.2$; b) $v_1 = 50$
- 5 - a) 0,86603; 0,866; 0,87; 0,9.
 b) 0,60182; 0,6018; 0,0602; 0,6.
 c) 0,79864; 0,7986; 0,799; 0,8.
- 6 - $x_1 = 24,74$; $x_2 = 3,21$; $x_3 = 0,32$.
- 8 - $[G] = \text{Nm}^2 \cdot \text{kg}^2 = \text{kgm}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg}^2$

SERIE 1.2

- 1 - $d_{AD} = 3\sqrt{5}$; $d_{CD} = \sqrt{2}$
- 3 - a) $y = 2x + 5$; b) $y = -3x + 6$; c) $y = x + 5/2$
- 4 - a) $y = 2/5 x + 1/5$; b) $y = 4$; c) $x = -2$;
 d) $y = -1/2 x + 3$.
- 5 - a) $y = -4/7 x + 32/7$; b) $y = -x + 7$
- 6 - a) $y = 2x - 9$; b) $y = -x - 2$; c) $y = -2x$
- 7 - a) $L_1: v = -3/2 u + 3$; $L_2: v = 2$
 b) $L_3: s = t + 2$; $L_4: t = 4$; $L_5: s = -t$

SERIE 1.3

- 1 - a) $5^\circ 17' 43''$; b) $22^\circ 30'$; c) $28^\circ 48'$;
 d) $38^\circ 34' 17''$
- 2 - I) $\alpha = 12^\circ 30'$; II) $\alpha = 48^\circ 18'$
- 3 - I) $\alpha = 15,50^\circ$; II) $\alpha = 23,3^\circ$
- 4 - a) 180° ; 900° ; $57^\circ 17' 45''$;
 b) 225° ; 35° ; $128^\circ 54' 56''$
- 5 - a) $\pi/36$; $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $2\pi/5$; $2\pi/3$;
 $3\pi/2$; $5\pi/3$.
 b) $\pi/8$; 2π ; $6\pi/5$; $\pi/2$; 0,0945; 0,8726.
- 6 - a) 2,14 cm; b) 8,38 cm; 15,71 cm;
 d) 0,35 cm; e) 25,13 cm; f) 2,09 cm.
- 7 - a) $22,9^\circ$; b) 110° ; c) $2,29^\circ$; d) $57,29^\circ$;
 e) $137,5^\circ$; f) 360° .
- 8 - a) 1c; 2e; 3b; 4d; 5a. b) 1b; 2e; 3d; 4a; 5c.

SERIE 1.4

- 1 - a) $t = -3/2$; $m = 1/4$; b) $t = 4$; $x = 5$;
 c) $x = 12$; $y = -6$.
- 2 - $x_p = -5/4$; $y_p = -1/4$
- 3 - a) $x = 4$; $y = -6$; $z = -5$.
 b) $x = 8$; $y = 10$; $z = 14$.

4 - a) $a = 5/3$; b) $m = 6$.

5 - $T = 3m_1g$; $a = g(1 - \text{sen } \theta)$

6 - a) $a = (F - m_2g)/(m_1 + m_2 + m_3)$

b) $F = m_3g + (2m_1 + m_3)a$

SERIE 1.5

4 - a) $y = x^2 - x - 12$; b) $s = -2t^2 + 3$;

c) $q = p^2/2$; d) $y = -x^2 + 6x + 7$

5 - b) $x = -5$; c) $t_1 = 5$, $x_2 = -1$;

d) $t_v = 2$, $x_v = -9$.

6 - b) $x = 4$; c) $t_1 = -2$, $t_2 = 2$; d) $t_v = 0$, $x_v = 4$.

7 - a) $t_1 = 3$; $y_1 = -9$; $t_2 = -2$; $y_2 = -6$.

b) $t_1 = 2 + \sqrt{6}$; $y_1 = -6 - 3\sqrt{6}$;

$t_2 = 2 - \sqrt{6}$; $y_2 = -6 + 3\sqrt{6}$.

8 - a) $t_1 = 2$, $t_2 = -2$; b) $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;

c) $t_1 = 0$, $t_2 = -3$; d) $t_1 = 1$, $t_2 = 1$;

e) no hay ningún valor de t que satisfaga la ecuación.

9 - $x_1 = 97,4$; $x_2 = -10,75$.

10 - b) $P = 31,4$, $S = 78,5$;

c) 2,616, 3,925, 10,466;

d) $x_1 = 0$, $y_1 = 5$; $x_2 = -5$, $y_2 = 0$.

CAPITULO 2

1 - a) $\vec{a} // \vec{b}$; b) $\vec{b} = 0$;

c) $\vec{a} \perp \vec{b}$; d) $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

2 - a) $\vec{a} = (5; -8,66)$; b) $\vec{b} = (-1; 1)$;

c) $\vec{c} = (0,433; -0,25)$;

d) $\vec{d} = (-30,64; -25,7)$;

e) $\vec{e} = (-0,866; 1,5)$; f) $\vec{f} = (-8; 0)$;

g) $\vec{g} = (1; 0)$; h) $\vec{h} = (0; 0)$.

3 - $\vec{v}_1 = (6,4; 51,3^\circ)$; $\vec{v}_2 = (8,25; 104^\circ)$;

$\vec{v}_3 = (10; 185,7^\circ)$; $\vec{v}_4 = (4; 90^\circ)$;

$\vec{v}_5 = (2,25; -63,4)$; $\vec{v}_6 = (\sqrt{1}; 0^\circ)$;

$\vec{v}_7 = (5; 233,1^\circ)$; $\vec{v}_8 = (2; -45^\circ)$.

4 - a) (1; 5); b) (10; 3); c) (11; 2);

d) (-9,5; -16).

5 - (\vec{v}_2 ; 135°).

6 - $\vec{r} = (12,56; 86^\circ)$.

7 - $\vec{r} = (3,75; 174,25^\circ)$

8 - a) 18; b) 0; c) 12; d) -30; e) -10,4;

f) 2; g) -27,7; h) -20.

CAPITULO 3

1 - a) $-0,5 + 5x$; b) $1,42 - x$; c) 2.

2 - a) -1; b) $2t + 2\Delta t - 3$; c) $2\Delta t$; d) 1;

e) 2; f) 2; g) 2.

3 - a) 6; b) $5 - 2t - 2\Delta t + 3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2$;

c) $-2\Delta t + 6t\Delta t + 3\Delta t^2$; d) 2,75;

e) $-2 + 6t + 3\Delta t^2$; f) 5,5; g) $-2 + 6t$.

4 - a) $\vec{r}_{(t)} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$;

b) $\vec{r}_{(t+\Delta t)} = (2t + 2\Delta t)\vec{i} - (5t^2 + 10t\Delta t + 5\Delta t^2)\vec{j}$;

c) $\Delta \vec{r}_{(t; t+\Delta t)} = 2\Delta t\vec{i} - (10t\Delta t + 5\Delta t^2)\vec{j}$;

d) $\Delta \vec{r}_{(t; 1,5)} = 1\vec{i} - 6,25\vec{j}$;

e) $\vec{v}_m = 2\vec{i} - (10t + 5\Delta t)\vec{j}$;

f) $\vec{v}_{m(t; 1,5)} = 2\vec{i} - 12,5\vec{j}$;

g) $\vec{v}_{(t)} = 2\vec{i} - 10t\vec{j}$.

5 - a) $a = 0$; b) $a = 6$; c) $\vec{a} = -10\vec{j}$.

6 - $v_{(t)} = 2 \cos t$; $a_{(t)} = -2 \text{sen } t$.