85. Bienes raíces La tasa de cambio del valor de una casa que cuesta \$350,000 puede modelarse por medio de $\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$, donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en miles de dólares) de la casa. Determine $V(t)$.

86. Tiempo de vida Si la tasa de cambio de la esperanza de vida l al nacer, de personas que nacen en Estados Unidos

puede modelarse por $\frac{dl}{dt} = \frac{12}{2t + 50}$, en donde t es el número de años a partir de 1940 y la esperanza de vida fue de 63 años en 1940, encuentre la esperanza de vida para personas que nacieron en 1998.

87. Oxígeno en los vasos capilares En un análisis de la difusión del oxígeno en los vasos capilares,[4] se usan cilindros concéntricos de radio r como modelos de un capilar. La concentración C de oxígeno en el capilar está dada por

$$C = \int \left(\frac{Rr}{2K} + \frac{B_1}{r} \right) dr,$$

donde R es la razón constante con que el oxígeno se difunde en el capilar, y K y B_1 son constantes. Encuentre C (escriba la constante de integración como B_2).

88. Encuentre $f(2)$ si $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f'(x) = e^{2x-1} - 6x$.

[4]W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

OBJETIVO Analizar técnicas de manejo de problemas de integración más complejas, a saber, por medio de manipulación algebraica y por ajuste del integrando a una forma conocida. Integrar una función exponencial con una base diferente a e y determinar la función de consumo, dada la propensión marginal al consumo.

14.4 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Ahora que ha adquirido alguna práctica en resolver integrales indefinidas, consideraremos algunos problemas con mayor grado de dificultad.

Cuando se tienen que integrar fracciones, es necesario a veces efectuar una división previa para obtener formas de integración familiares, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 División antes de la integración

a. *Encontrar* $\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx$.

Solución: no es evidente una forma familiar de integración. Sin embargo, podemos descomponer el integrando en dos fracciones, dividiendo cada término del numerador entre el denominador. Entonces tenemos

Aquí partimos la integral.

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right] dx = \int \left[x + \frac{1}{x} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx$.

Solución: aquí el integrando es un cociente de polinomios en donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, y el denominador tiene más de un término. En tal caso, para integrar efectuamos primero la división hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor. Obtenemos

Aquí utilizamos la división larga para reescribir el integrando.

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}[2\,dx]$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$$

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas

a. *Encontrar* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}\,dx.$

Solución: podemos escribir esta integral como $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx$. Consideremos la regla de la potencia para integración con $u = \sqrt{x} - 2$. Entonces $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, y

Aquí la integral se ajusta a la forma en la que puede aplicarse la regla de la potencia para integración.

$$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int (\sqrt{x}-2)^{-3}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right]$$

$$= 2\int u^{-3}\,du = 2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} + C.$$

b. *Encontrar* $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

Solución: si $u = \ln x$, entonces $du = \dfrac{1}{x}\,dx$, y

Aquí la integral se lleva a la forma conocida $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du.$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C,$$

c. *Encontrar* $\displaystyle\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw.$

Solución: si $u = \ln w$, entonces $du = \dfrac{1}{w}\,dw$. Aplicando la regla de la potencia para integración, tenemos

Aquí la integral se ajusta a la forma en la que se puede aplicar la regla de la potencia para integración.

$$\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw = 5\int (\ln w)^{-3/2}\left(\frac{1}{w}\,dw\right)$$

$$= 5\int u^{-3/2}\,du = 5\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-10}{u^{1/2}} + C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}} + C.$$

Integración de a^u

En la sección 14.3 integramos una función exponencial con base e:

$$\int e^u \, du = e^u + C.$$

Consideremos ahora la integral de una función exponencial con una base diferente a e:

$$\int a^u \, du.$$

Para encontrar esta integral, primero convertimos a^u en una función exponencial con base e por medio del uso de la propiedad 8 de la sección 5.3:

$$a = e^{\ln a}. \qquad (1)$$

El ejemplo 3 ilustrará esto.

EJEMPLO 3 Una integral que incluye $a^u \, du$

Encontrar $\int 2^{3-x} \, dx$.

Solución:

Estrategia: queremos integrar una función exponencial con base 2. Para hacer esto, primero convertimos de base 2 a base e usando la ecuación (1) para escribir 2 en términos de e.

Como $2 = e^{\ln 2}$, tenemos

$$\int 2^{3-x} \, dx = \int (e^{\ln 2})^{3-x} \, dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)} \, dx.$$

La última integral tiene un integrando de la forma e^u, donde $u = (\ln 2)(3 - x)$. Como $du = -\ln 2 \, dx$, tenemos

$$\int e^{(\ln 2)(3-x)} \, dx = -\frac{1}{\ln 2}\int e^{(\ln 2)(3-x)}[(-\ln 2) \, dx] \quad \left(\text{de la forma: } \int e^u \, du\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Así,

$$\int 2^{3-x} \, dx = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Note que expresamos la respuesta en términos de una función exponencial con base 2, la base del integrando original.

Generalizando el procedimiento descrito en el ejemplo 3, podemos obtener una fórmula para integrar a^u:

$$\int a^u\,du = \int (e^{\ln a})^u\,du = \int e^{(\ln a)u}\,du$$

$$= \frac{1}{\ln a}\int e^{(\ln a)u}[(\ln a)\,du] \qquad (\ln a \text{ es constante})$$

$$= \frac{1}{\ln a}e^{(\ln a)u} + C = \frac{1}{\ln a}(e^{\ln a})^u + C$$

$$= \frac{1}{\ln a}a^u + C \qquad (e^{\ln a} = a).$$

De aquí, tenemos

$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C.$$

Aplicando esta fórmula a la integral del ejemplo 3 resulta

$$\int 2^{3-x}\,dx \qquad (a = 2, u = 3 - x)$$

$$= -\int 2^{3-x}(-\,dx) \qquad (du = -dx)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C,$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

Aplicación de la integración

Ahora, consideraremos una aplicación de la integración que relaciona una función de consumo con la propensión marginal al consumo.

EJEMPLO 4 Determinación de una función de consumo a partir de la propensión marginal al consumo

Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}},$$

donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en miles de millones de slugs (50 slugs = \$0.01). Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de 10 mil millones de slugs ($C = 10$) cuando $I = 12$.

Solución: como la propensión marginal al consumo es la derivada de C, tenemos

$$C = \int\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right)dI = \int \frac{3}{4}\,dI - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2}\,dI$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2}\,dI.$$

Si hacemos $u = 3I$, entonces $du = 3\,dI$ y

$$C = \frac{3}{4}I - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\int (3I)^{-1/2}[3\ dI]$$
$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_1.$$
$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + C_1.$$

Éste es un ejemplo de un problema con condiciones iniciales.

Cuando $I = 12$, entonces $C = 10$, por lo que

$$10 = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + C_1,$$
$$10 = 9 - 2 + C_1.$$

Por tanto $C_1 = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3.$$

Ejercicio 14.4

En los problemas del 1 al 56 determine las integrales indefinidas.

1. $\int \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2}{x^3}\,dx.$

2. $\int \frac{9x^2 + 5}{3x}\,dx.$

3. $\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\,dx.$

4. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}\,dx.$

5. $\int \frac{15}{\sqrt{4 - 5x}}\,dx.$

6. $\int \frac{2xe^{x^2}\,dx}{e^{x^2} - 2}.$

7. $\int 4^{7x}\,dx.$

8. $\int 3^x\,dx.$

9. $\int 2x(7 - e^{x^2/4})\,dx.$

10. $\int \left(e^x + x^e + ex + \frac{e}{x}\right)dx.$

11. $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1}\,dx.$

12. $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{x - 5}\,dx.$

13. $\int \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx.$

14. $\int 6(e^{4-3x})^2\,dx.$

15. $\int \frac{e^{7/x}}{x^2}\,dx.$

16. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2}\,dx.$

17. $\int \frac{2x^3}{x^2 - 4}\,dx.$

18. $\int \frac{5 - 4x^2}{3 + 2x}\,dx.$

19. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}}\,dx.$

20. $\int \frac{3e^s}{6 + 5e^s}\,ds.$

21. $\int \frac{5(x^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

22. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

23. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

24. $\int \sqrt{t}(5 - t\sqrt{t})^{0.4}\,dt.$

25. $\int \frac{\ln^2(r + 1)}{r + 1}\,dr.$

26. $\int \frac{8x^3 - 6x^2 - ex^4}{3x^3}\,dx.$

27. $\int \frac{3^{\ln x}}{x}\,dx.$

28. $\int \frac{4}{x\ln(2x^2)}\,dx.$

29. $\int x\sqrt{e^{x^2+3}}\,dx.$

30. $\int \frac{x + 3}{x + 6}\,dx.$

31. $\int \frac{8}{(x + 3)\ln(x + 3)}\,dx.$

32. $\int (x^{e^2} + 2x)\,dx.$

33. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^2 - 3}\,dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{4x \ln \sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\, dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{6x\sqrt{\ln(x^2+1)^2}}{x^2+1}\, dx.$

36. $\displaystyle\int 3(x^2+2)^{-1/2} x e^{\sqrt{x^2+2}}\, dx.$

37. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}} - \ln 4\right) dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{x - x^{-2}}{x^2 + 2x^{-1}}\, dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4}{x^3}\, dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\, dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\, dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}\, dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{7}{(2x+1)[1+\ln(2x+1)]^2}\, dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{(e^{-x}+6)^2}{e^x}\, dx.$

46. $\displaystyle\int \left[\frac{1}{8x+1} - \frac{1}{e^x(8+e^{-x})^2}\right] dx.$

47. $\displaystyle\int (x^3+ex)\sqrt{x^2+e}\, dx.$

48. $\displaystyle\int 2^{x \ln x}(1+\ln x)\, dx.$

49. $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2}+3}\, dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{3}{x(\ln x)^{1/2}}\, dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}\, ds.$

52. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{3x}\, dx.$

53. $\displaystyle\int e^{\ln(x+2)}\, dx.$

54. $\displaystyle\int dx.$

55. $\displaystyle\int \frac{\ln(xe^x)}{x}\, dx.$

56. $\displaystyle\int 2e^{x^2+\ln x}\, dx.$

En los problemas 57 y 58, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

57. $\dfrac{dr}{dq} = \dfrac{200}{(q+2)^2}.$

58. $\dfrac{dr}{dq} = \dfrac{900}{(2q+3)^3}.$

En los problemas 59 y 60, dc/dq es una función de costo marginal. Encuentre la función de costo total, si los costos fijos en cada caso son de 2000.

59. $\dfrac{dc}{dq} = \dfrac{20}{q+5}.$

60. $\dfrac{dc}{dq} = 2e^{0.001q}.$

En los problemas del 61 al 63, dC/dI representa la propensión marginal al consumo. Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada.

61. $\dfrac{dC}{dI} = \dfrac{1}{\sqrt{I}};\quad C(9) = 8.$

62. $\dfrac{dC}{dI} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2\sqrt{3I}};\quad C(3) = \dfrac{11}{4}.$

63. $\dfrac{dC}{dI} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6\sqrt{I}};\quad C(25) = 23.$

---

64. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Cuando se producen 100 unidades, el costo promedio es de \$50 por unidad. Con aproximación a la unidad de dólar más cercana, determine el costo fijo del fabricante.

65. Función de costo Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 4998q + 50}{q^2 - 50q + 1},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades.

a. Determine el costo marginal cuando se producen 50 unidades.

b. Si los costos fijos son de \$10,000, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

c. Use el resultado de las partes (a) y (b) y diferenciales para aproximar el costo total de producir 52 unidades.

66. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0.04q^{3/4}+4},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Los costos fijos son de \$360.

a. Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

b. Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

c. Use los resultados de las partes (a) y (b) y diferenciales para estimar el costo total de producir 23 unidades.

67. Valor de la tierra Se estima que dentro de t años, contados a partir de ahora, el valor V (en dólares) de un acre de tierra cerca del pueblo fantasma de Cherokee, California, estará creciendo a razón de $\dfrac{8t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}$ dólares por año. Si el valor de la tierra es actualmente de \$500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años? Exprese su resultado al dólar más cercano.

68. Función de ingreso La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{3}{e^q + 2},$$

donde r es el ingreso total recibido (en dólares) cuando se producen y venden q unidades. Encuentre la función de demanda y exprésela en la forma $p = f(q)$. [*Sugerencia:* escriba nuevamente dr/dq al multiplicar numerador y denominador por e^{-q}.]

69. Ahorro La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{5}{(I+2)^2}$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares. Si el consumo total nacional es de \$7.5 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$8 mil millones, ¿para qué valor o valores de I el ahorro total nacional es igual a cero?

70. Función de consumo La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1.8}{\sqrt[3]{3I^2}},$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares.

a. Determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de \$81 mil millones.
b. Determine la función de consumo si el ahorro es de \$3 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$24 mil millones.
c. Use el resultado de la parte (b) para mostrar que el consumo es de \$54.9 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$81 mil millones.
d. Use diferenciales y los resultados de las partes (a) y (c) para estimar el consumo cuando el ingreso total nacional es de \$78 mil millones.

OBJETIVO Introducir la notación sigma y dar fórmulas de sumas que se utilizarán en la sección siguiente.

14.5 SUMATORIA

Con el fin de prepararlo para otras aplicaciones de la integración, tendremos que analizar ciertas sumas.

Consideremos el cálculo de la suma S de los primeros n enteros positivos:

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n. \tag{1}$$

Si escribimos los términos del miembro derecho de la ecuación (1) en orden inverso tenemos

$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1. \tag{2}$$

Al sumar los miembros correspondientes de las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\begin{array}{rcccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\
S = & n & + & (n-1) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1).
\end{array}$$

En el miembro derecho de la última ecuación el término $(n + 1)$ aparece n veces. Así, $2S = n(n + 1)$, por lo que

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(suma de los primeros } n \text{ enteros positivos).} \tag{3}$$

Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos corresponde a $n = 100$ y es $100(100 + 1)/2$ o 5050.

Por conveniencia, para indicar una suma introduciremos la *notación sigma* o *de sumatoria*, llamada así por la letra griega Σ (sigma) que se usa. Por ejemplo, la notación

$$\sum_{k=1}^{3} (2k + 5)$$

denota la suma de aquellos números que se obtienen de la expresión $2k + 5$ al reemplazar primero k por 1, luego por 2 y finalmente por 3. Así,

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+5) = [2(1)+5] + [2(2)+5] + [2(3)+5]$$
$$= 7 + 9 + 11 = 27.$$

La letra k se llama *índice de la sumatoria;* los número 1 y 3 son los *límites de la sumatoria* (1 es el *límite inferior* y 3 el *límite superior*). Los valores del índice comienzan en el límite inferior y toman valores enteros sucesivos hasta llegar al límite superior. El símbolo usado para el índice es "mudo", en el sentido de que no afecta a la suma de los términos. Puede usarse cualquier otra letra. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{3}(2j+5) = 7 + 9 + 11 = \sum_{k=1}^{3}(2k+5).$$

EJEMPLO 1 Notación sigma

a. *Evaluar* $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}\frac{k^2+3}{2}$.

Solución: aquí, la suma comienza con $k = 4$. De modo que tenemos

$$\sum_{k=4}^{7}\frac{k^2+3}{2} = \frac{4^2+3}{2} + \frac{5^2+3}{2} + \frac{6^2+3}{2} + \frac{7^2+3}{2}$$
$$= \frac{19}{2} + \frac{28}{2} + \frac{39}{2} + \frac{52}{2} = 69.$$

b. *Evaluar* $\displaystyle\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2$.

Solución:

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2$$
$$= (-1)^{0+1}(0-1)^2 + (-1)^{1+1}(1-1)^2 + (-1)^{2+1}(2-1)^2$$
$$= (-1) + 0 + (-1) = -2.$$

Para expresar la suma de los primeros n enteros positivos en notación sigma, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Por la ecuación (3),

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4}$$

Note en la ecuación (4) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ es una función sólo de n, no de k.

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula 4

a. *Evaluar* $\sum_{k=1}^{60} k$.

Solución: aquí, debemos encontrar la suma de los primeros 60 números enteros positivos. Por la ecuación (4) con $n = 60$,

$$\sum_{k=1}^{60} k = \frac{60(60+1)}{2} = 1830.$$

b. *Evaluar* $\sum_{k=1}^{n-1} k$.

Solución: aquí se deben sumar los primeros $n - 1$ enteros positivos. Reemplazando n por $n - 1$ en la ecuación (4), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Otra fórmula útil es la de la suma de los *cuadrados* de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (5)$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula 5

Evaluar $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$.

Solución: esta suma puede escribirse como $\sum_{k=1}^{6} k^2$. Por la ecuación (5) con $n = 6$,

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6+1)[2(6)+1]}{6} = 91.$$

Concluimos con una propiedad de sigma. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales y c es una constante, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cx_i &= cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esto significa que un factor constante puede "salir" del símbolo de sumatoria. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2.$$

Por la ecuación (5), tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2 = 3\left[\frac{5(6)(11)}{6}\right] = 165.$$

Advertencia Aunque los factores constantes pueden "salir" del signo de suma, ninguna otra cosa puede salir.

Ejercicio 14.5

En los problemas del 1 al 10 evalúe la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5}(k+4)$.

2. $\sum_{k=12}^{15}(7-2k)$.

3. $\sum_{j=1}^{10}(-1)^j$.

4. $\sum_{j=0}^{5}2^j$.

5. $\sum_{n=2}^{3}(3n^2-7)$.

6. $\sum_{n=2}^{4}\frac{n+1}{n-1}$.

7. $\sum_{k=3}^{4}\frac{(-1)^k(k+1)}{2^k}$.

8. $\sum_{n=1}^{5}4$.

9. $\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k-1}(1-k^2)}{k}$.

10. $\sum_{n=1}^{4}(n^2+n)$.

En los problemas del 11 al 16 exprese las sumas dadas por medio de la notación sigma.

11. $1+2+3+\cdots+19$.

12. $7+8+9+10$.

13. $1+3+5+7$.

14. $2+4+6+8$.

15. $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$.

16. $3+6+9+12$.

En los problemas del 17 al 22 evalúe las sumas por medio de las ecuaciones (4) y (5).

17. $\sum_{k=1}^{450}k$.

18. $\sum_{k=1}^{10}k^2$.

19. $\sum_{j=1}^{6}4j$.

20. $\sum_{i=1}^{40}\frac{i}{2}$.

21. $\sum_{i=1}^{6}3i^2$.

22. $\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{j}{2}\right)^2$.

23. Una compañía tiene un activo cuyo valor original es de \$3200 y no tiene valor de recuperación. El costo de mantenimiento anual es de \$100 y aumenta \$100 cada año. Demuestre que el costo promedio total anual C en un periodo de n años es

$$C = \frac{3200}{n} + 50(n+1).$$

Encuentre el valor de n que minimiza a C. ¿Cuál es el costo promedio anual para este valor de n?

OBJETIVO Explicar, por medio del concepto de área, la integral definida como un límite de una suma especial; evaluar integrales definidas sencillas por medio del proceso de límite.

14.6 La integral definida

La figura 14.1 muestra la región R limitada por las líneas $y = f(x) = 2x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = 1$. La región es simplemente un triángulo rectángulo. Si b y h son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, de geometría, el área A del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ unidad cuadrada. Encontraremos ahora esta área por otro método, el cual como veremos posteriormente, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la suma de áreas de rectángulos.

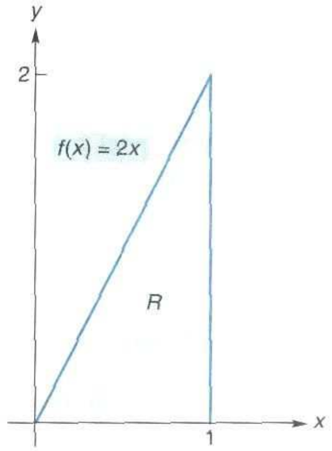


FIGURA 14.1 Región acotada por $f(x) = 2x$, $y = 0$, y $x = 1$

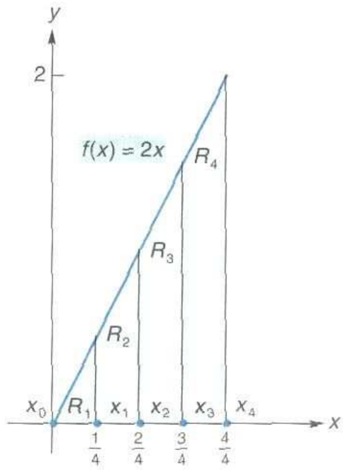


FIGURA 14.2 Cuatro subregiones de R.

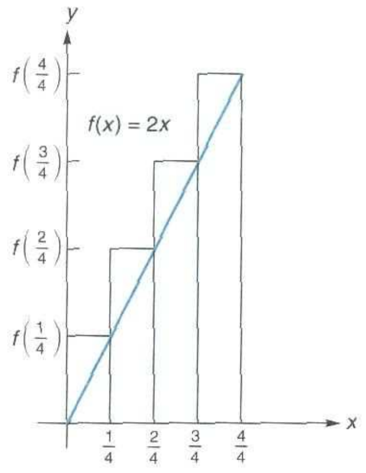


FIGURA 14.3 Cuatro rectángulos circunscritos.

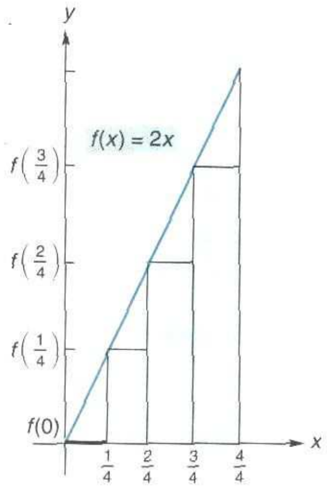


FIGURA 14.4 Cuatro rectángulos inscritos.

Dividamos el intervalo $[0, 1]$ sobre el eje x, en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos igualmente separados, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, y $x_4 = \frac{4}{4} = 1$. (Véase la fig. 14.2.) Cada subintervalo tiene longitud de $\Delta x = \frac{1}{4}$. Estos subintervalos determinan cuatro subregiones de R: R_1, R_2, R_3 y R_4, como se indica.

Con cada subregión podemos asociar un rectángulo *circunscrito* (véase la fig. 14.3), esto es, un rectángulo cuya base es el correspondiente subintervalo y cuya altura es el valor *máximo* de $f(x)$ en cada subintervalo. Como f es una función creciente, el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando x es el extremo derecho de éste. Así, las áreas de los rectángulos circunscritos asociados con las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$, respectivamente. El área de cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Así, la suma de las áreas de estos rectángulos, denotada por $\overline{S}_4$ (se lee "suma superior considerando 4 subintervalos"), aproxima el área A del triángulo. Tenemos

$$\begin{aligned}\overline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{4}{4}) \\ &= \tfrac{1}{4}[2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4}) + 2(\tfrac{4}{4})] = \tfrac{5}{4}.\end{aligned}$$

Usted puede verificar que es posible escribir $\overline{S}_4$ como $\overline{S}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$. El hecho de que $\overline{S}_4$ es mayor que el área real del triángulo era de esperarse, ya que $\overline{S}_4$ incluye áreas de regiones sombreadas que no pertenecen al triángulo (véase la fig. 14.3).

Por otra parte, con cada subregión podemos también asociar un rectángulo *inscrito* (véase la fig. 14.4), esto es, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de $f(x)$ en ese subintervalo. Como f es una función creciente, el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurrirá cuando x sea el extremo izquierdo de éste. Así, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(0)$, $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, respectivamente. Su suma, denotada $\underline{S}_4$ (se lee "suma inferior considerando 4 intervalos") es también una aproximación al área A del triángulo. Tenemos

$$\begin{aligned}\underline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4})\\ &= \tfrac{1}{4}[2(0) + 2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4})] = \tfrac{3}{4}.\end{aligned}$$

Usando la notación sigma podemos escribir $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$. Observe que $\underline{S}_4$ es *menor que* el área del triángulo porque los rectángulos no toman en cuenta aquella porción del triángulo que no está sombreada en la figura 14.4.

Como

$$\tfrac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \overline{S}_4 = \tfrac{5}{4},$$

decimos que $\underline{S}_4$ es una aproximación a A por *abajo* y $\overline{S}_4$ es una aproximación a A por *arriba*.

Si $[0, 1]$ se divide en más subintervalos, esperamos que ocurran mejores aproximaciones a A. Para probar esto, usemos seis subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{1}{6}$. Entonces $\overline{S}_6$ el área total de seis rectángulos circunscritos (véase la fig. 14.5), y $\underline{S}_6$, el área total de seis rectángulos inscritos (véase la fig. 14.6), son

$$\begin{aligned}\overline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{6}{6})\\ &= \tfrac{1}{6}[2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6}) + 2(\tfrac{6}{6})] = \tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\underline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(0) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6})\\ &= \tfrac{1}{6}[2(0) + 2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6})] = \tfrac{5}{6}.\end{aligned}$$

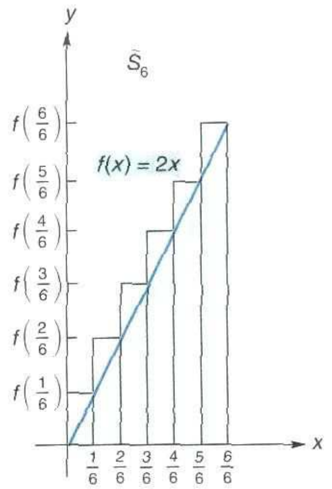


FIGURA 14.5 Seis rectángulos circunscritos.

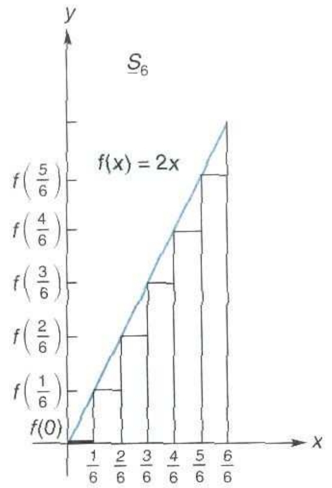


FIGURA 14.6 Seis rectángulos inscritos.

Observe que $\underline{S}_6 \leq A \leq \overline{S}_6$ y, con la notación apropiada, tanto $\overline{S}_6$ como $\underline{S}_6$ serán de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. Es claro que usando seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que con cuatro subintervalos, como era de esperarse.

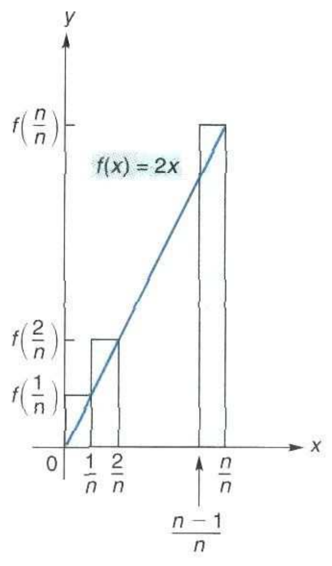


FIGURA 14.7 n rectángulos circunscritos.

En términos generales, si dividimos $[0, 1]$ en n subintervalos de igual longitud Δx, entonces $\Delta x = 1/n$ y los puntos extremos de los subintervalos son $x = 0, 1/n, 2/n, ..., (n-1)/n$, y $n/n = 1$ (véase la fig. 14.7). El área de n rectángulos *circunscritos* es

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{n}\left[2\left(\frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n^2}[1 + 2 + \cdots + n] \qquad \left(\textit{al factorizar } \frac{2}{n} \text{ en cada término}\right).$$

De la sección 14.5, la suma de los n primeros enteros positivos es $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Así,

$$\overline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}.$$

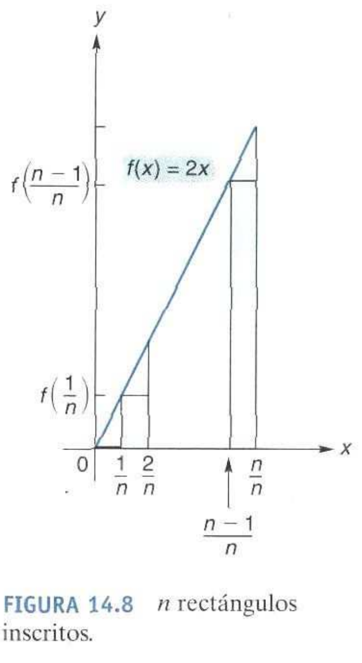


FIGURA 14.8 n rectángulos inscritos.

Para n rectángulos *inscritos*, el área total determinada por los subintervalos (véase la fig. 14.8) es

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{n}\left[2(0) + 2\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n^2}[1 + \cdots + (n-1)].$$

Sumando los primeros $n - 1$ enteros positivos, como hicimos en el ejemplo 2(b) de la sección 14.5, obtenemos

$$\underline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n}.$$

De las ecuaciones (1) y (2) se observa nuevamente que $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ son sumas de la *forma* $\Sigma f(x)\Delta x$, es decir, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$ y $\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$.

Por la naturaleza de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ parece razonable, y de hecho es cierto, que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n.$$

Conforme n crece, $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ resultan ser mejores aproximaciones para A. De hecho, tomamos los límites de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$, cuando n tienda a ∞ a través de valores enteros positivos:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Como $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ tienen el mismo límite común, a saber,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 1, \tag{3}$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n,$$

debemos considerar este límite como el área del triángulo. Así, $A = 1$ unidad cuadrada, lo cual concuerda con nuestro valor anterior.

Llamamos al límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, o sea 1, la *integral definida* de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$, y denotamos esta cantidad escribiendo

$$\int_0^1 2x\, dx = 1. \tag{4}$$

La razón para usar el término *integral definida* y el simbolismo de la ecuación (4), será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen con el signo $\int$ en la ecuación (4) se llaman *límites de integración*; 0 es el *límite inferior* y 1 es el *límite superior*.

En general, para una función f definida sobre el intervalo de $x = a$ a $x = b$, donde $a < b$, podemos formar las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, que se obtienen considerando los valores máximo y mínimo, respectivamente, en cada uno de n subintervalos de igual longitud Δx.[5] Ahora podemos establecer lo siguiente:

El límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$, si éste existe, se llama **integral definida** de f sobre $[a, b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Los números a y b se llaman **límites de integración;** a es el **límite inferior** y b es el **límite superior.** EL símbolo x se llama **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando.**

En términos de un proceso límite, tenemos

La integral definida es el límite de la forma $\Sigma f(x)\, \Delta x$. Esta interpretación será útil en secciones posteriores.

$$\sum f(x)\, \Delta x \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Debemos aclarar dos puntos acerca de la integral definida. Primero, la integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\, \Delta x$. De hecho, podemos pensar el signo de integral como una "S" alargada, que es la primera letra de "sumatoria". Segundo, para una función f arbitraria definida en un intervalo, podemos calcular las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ y determinar su límite común en caso de que exista. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos, si $f(x)$ es negativa en puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa), por lo que el límite común puede no representar un área. Así, **la integral definida no es otra cosa que un número real y puede o no representar un área.**

Como vimos en la ecuación (3) $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$ es igual a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que consideraremos, esos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para

[5]Aquí suponemos que los valores máximo y mínimo existen.

ahorrar tiempo, usaremos sólo el **extremo derecho** de cada subintervalo al calcular una suma. Para las funciones en esta sección, esta suma se denotará como S_n y corresponderá ya sea a $\underline{S}_n$ o bien a $\overline{S}_n$.

En general, en $[a, b]$, tenemos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

EJEMPLO 1 Cálculo de un área usando extremos derechos

Encontrar el área de la región en el primer cuadrante limitada por $f(x) = 4 - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 0$.

Solución: en la figura 14.9 se da el bosquejo de la región. Se ve que el intervalo en el cual varía x es $[0, 2]$, que subdividimos en n subintervalos de igual longitud Δx. Como la longitud de $[0, 2]$ es 2, tomamos $\Delta x = 2/n$. Los extremos de los subintervalos son $x = 0, 2/n, 2(2/n), \ldots, (n-1)(2/n)$ y $n(2/n) = 2$, que se muestran en la figura 14.10. El diagrama también muestra los correspondientes rectángulos obtenidos usando el extremo derecho de cada subintervalo. El área de cada rectángulo es el producto de su

Principios en práctica 1
Cálculo de un área por medio de los extremos del lado derecho

Una compañía ha determinado que su función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 600 - 0.5x$, en donde R es el ingreso (en dólares) recibido cuando se venden x unidades. Determine el ingreso total recibido por la venta de 10 unidades, determinando el área en el primer cuadrante acotada por $y = R'(x) = 600 - 0.5x$ y las rectas $y = 0, x = 0$, y $x = 10$.

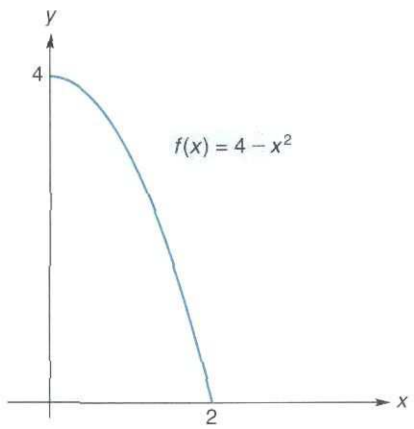


FIGURA 14.9 La región del ejemplo 1.

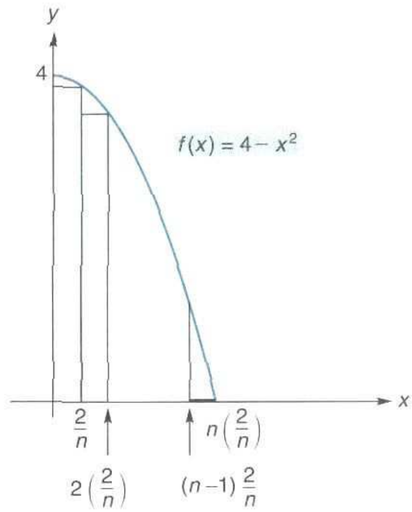


FIGURA 14.10 n subintervalos y los rectángulos correspondientes para el ejemplo 1.

ancho $(2/n)$ y su altura, que es el valor en el extremo derecho de su base. Al sumar estas áreas, obtenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n}f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{2}{n}f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[\left\{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right\} + \left\{4 - \left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\} + \cdots + \left\{4 - \left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\}\right]. \end{aligned}$$

Como el número 4 aparece n veces en la suma, podemos simplificar S_n. Obtenemos

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 - 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \cdots - n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\}\right].$$

De la sección 14.5, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, por lo que

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \qquad \text{(distribución)}$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right) \qquad \text{(expansión).}$$

Por último, se considera el límite de S_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{3}.$$

Por consiguiente, el área de la región es de $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx.$

Solución: queremos encontrar la integral definida de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Así, tenemos que calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$. Pero este límite es precisamente el límite $\frac{16}{3}$ encontrado en el ejemplo 1, por ello concluimos que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}.$$

No se le agregan unidades a la respuesta, ya que una integral definida es sólo un número sin dimensiones.

EJEMPLO 3 Integración de una función sobre un intervalo

Integrar $f(x) = x - 5$ *entre* $x = 0$ *y* $x = 3$; *esto es, evaluar* $\int_0^3 (x - 5)\, dx.$

Solución: primero dividimos $[0, 3]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 3/n$. Los puntos extremos son $0,\ 3/n,\ 2(3/n),\ \ldots,\ (n-1)(3/n), n(3/n) = 3$ (véase la fig. 14.11). Usando los extremos derechos formamos la suma

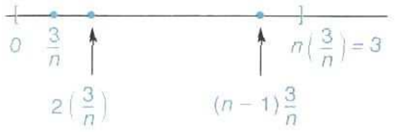


FIGURA 14.11 División de [0, 3] en n subintervalos.

$$S_n = \frac{3}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n}f\left[2\left(\frac{3}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{3}{n}f\left[n\left(\frac{3}{n}\right)\right].$$

Al simplificar, tenemos

$$S_n = \frac{3}{n}\left[\left\{\frac{3}{n} - 5\right\} + \left\{2\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\} + \cdots + \left\{n\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\}\right]$$

$$= \frac{3}{n}\left[-5n + \frac{3}{n}\{1 + 2 + \cdots + n\}\right]$$

$$= \frac{3}{n}\left[-5n + \left(\frac{3}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= -15 + \frac{9}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$= -15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Al calcular el límite, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[-15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = -15 + \frac{9}{2} = -\frac{21}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^3 (x - 5)\,dx = -\frac{21}{2}.$$

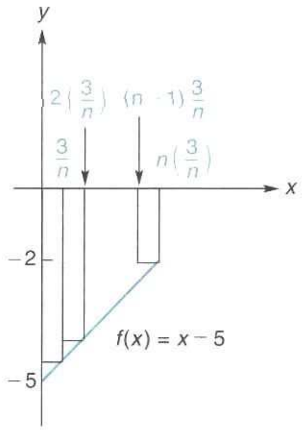


FIGURA 14.12 $f(x)$ es negativa en cada extremo derecho.

Observe que la integral definida en este caso es un número *negativo*. La razón es clara de la gráfica de $f(x) = x - 5$ en el intervalo [0, 3]. (Véase la fig. 14.12.) Como el valor $f(x)$ es negativo en cada extremo derecho, cada término en S_n debe también ser negativo. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$, que es la integral definida, es negativo. Geométricamente, cada término en S_n es el valor negativo del área de un rectángulo (véase la fig. 14.12). Aunque la integral definida es sólo un número, aquí podemos interpretarla como la representación del valor negativo del área de la región limitada por $f(x) = x - 5$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x ($y = 0$).

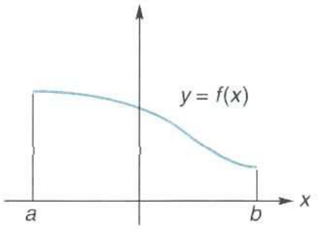


FIGURA 14.13 Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área.

En el ejemplo 3 se demostró que *la integral definida no tiene que representar un área*. De hecho, ahí la integral definida fue negativa. Sin embargo, si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $S_n \geq 0$ para todo valor de n. Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$, por lo que $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Además, está integral definida da el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ (véase la fig. 14.13).

Aunque el procedimiento que usamos para analizar la integral definida es suficiente para nuestros fines, no es riguroso. **Lo importante por recordar acerca de la integral definida es que es el límite de una suma especial.**

Tecnología

Aquí se presenta un programa para la calculadora gráfica TI-83 que estimará el límite de S_n cuando $n \to \infty$ para una función f definida en $[a, b]$.

```
PROGRAM:RIGHTSUM
Lbl 1
Input "SUBINTV",N
(B − A)/N → H
Ø → S
A + H → X
1 → I
Lbl 2
Y₁ + S → S
X + H → X
I + 1 → I
If I ≤ N
Goto 2
H*S → S
Disp S
Pause
Goto 1
```

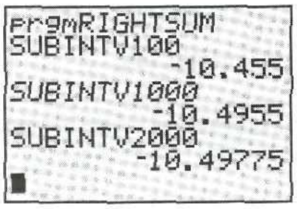


FIGURA 14.14 Los valores de S_n para $f(x) = x - 5$ en $[0, 3]$.

RIGHTSUM calculará S_n para un número dado n de subintervalos. Antes de ejecutar el programa, almacene $f(x)$, a y b como Y_1, A y B, respectivamente. Durante la ejecución del programa se le pedirá a usted indicar el número de subintervalos. El programa procederá entonces a exhibir el valor de S_n. Cada vez que oprima ENTER, el programa se repetirá. De esta manera, pueden obtenerse los valores de S_n para varios números de subintervalos. La figura 14.14 muestra valores de S_n ($n = 100, 1000$ y 2000) para la función $f(x) = x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$. Cuando $n \to \infty$, se ve que $S_n \to -10.5$. Así estimamos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \approx -10.5,$$

o, de manera equivalente,

$$\int_0^3 (x - 5)\, dx \approx -10.5,$$

lo cual concuerda con nuestro resultado del ejemplo 3. Es interesante notar que el tiempo requerido por una calculadora para calcular S_{2000} en la figura 14.14 fue mayor de 1.5 minutos.

Ejercicio 14.6

En los problemas del 1 al 4 esboce la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región por medio de la suma indicada. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

1. $f(x) = x, y = 0, x = 1$; S_3.

2. $f(x) = 3x, y = 0, x = 1$; S_5.

3. $f(x) = x^2, y = 0, x = 1$; S_3.

4. $f(x) = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$; S_2.

En los problemas 5 y 6, por medio de la división del intervalo indicado en n subintervalos de igual longitud, encuentre S_n para la función dada. Use el extremo derecho de cada subintervalo. No encuentre el $\lim_{n\to\infty} S_n$.

5. $f(x) = 4x$; $[0, 1]$.

6. $f(x) = 2x + 1$; $[0, 2]$.

En los problemas 7 y 8, (a) simplifique S_n y (b) encuentre $\lim_{n\to\infty} S_n$.

7. $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \left(\frac{2}{n} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n} + 1\right)\right]$.

8. $S_n = \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2\right]$.

En los problemas del 9 al 14 esboce la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de S_n, cuando $n \to \infty$. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

9. Región descrita en el problema 1.

10. Región descrita en el problema 2.

11. Región descrita en el problema 3.

12. Región descrita en el problema 4.

13. $f(x) = 2x^2, y = 0, x = 2$.

14. $f(x) = 9 - x^2, y = 0, x = 0$.

En los problemas del 15 al 20 evalúe la integral definida dada tomando el límite de S_n. Use el extremo derecho de cada subintervalo. Esboce la gráfica, en el intervalo dado, de la función por integrar.

15. $\int_0^2 3x\, dx$.

16. $\int_0^4 9\, dx$.

17. $\int_0^3 -4x\, dx$.

18. $\int_0^3 (2x - 9)\,dx.$

19. $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx.$

20. $\int_1^2 (x + 2)\,dx.$

21. Encuentre $D_x\left[\int_2^3 \sqrt{x^2+1}\,dx\right]$ sin usar límites.

22. Encuentre $\int_0^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2x - 2, & \text{si } 1 \le x \le 2, \\ 2, & \text{si } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

23. Encuentre $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \le 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 \le x \le 2, \\ -1 + \dfrac{x}{2}, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

En los problemas del 24 al 26 use un programa como el ***RIGHTSUM,*** *para estimar el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a un decimal.*

24. $f(x) = x^3 + 1, y = 0, x = 2, x = 3.7.$

25. $f(x) = \sqrt{x}, y = 0, x = 1.3, x = 4.$

26. $f(x) = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$

En los problemas del 27 al 30 use un programa como el ***RIGHTSUM,*** *para estimar el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a un decimal.*

27. $\int_2^5 \frac{x+1}{x+2}\,dx.$

28. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx.$

29. $\int_{-1}^{2} (4x^2 + x - 13)\,dx.$

30. $\int_{0.1}^{0.2} \ln x\;dx.$

OBJETIVO Hacer un desarrollo informal del teorema fundamental del cálculo y utilizarlo para calcular integrales definidas. Obtener un cambio en los valores de la función cuando la tasa de cambio en la función es conocida.

14.7 El teorema fundamental del cálculo integral

Teorema fundamental

Hasta ahora, hemos considerado por separado los procesos de cálculo de la derivada y de la integral definida. Ahora juntaremos esas ideas fundamentales y desarrollaremos la importante relación que existe entre ellas. Como resultado, podremos evaluar las integrales definidas en forma más eficiente.

La gráfica de una función f está dada en la figura 14.15. Supongamos que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que su gráfica no cae debajo del eje x. Esto es, $f(x) \ge 0$. De la sección precedente, el área de la región debajo de la gráfica y arriba del eje x entre $x = a$ y $x = b$, está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. Consideraremos ahora otra manera de determinar está área.

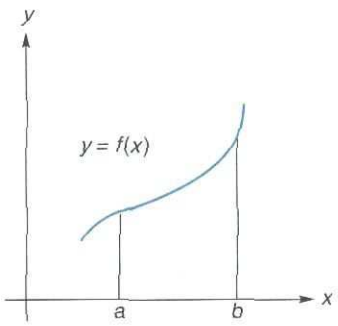


FIGURA 14.15 En $[a, b]$, f es continua y $f(x) \ge 0$.

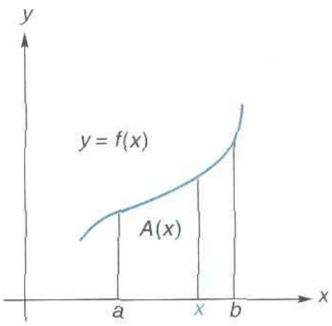


FIGURA 14.16 $A(x)$ es una función de área.

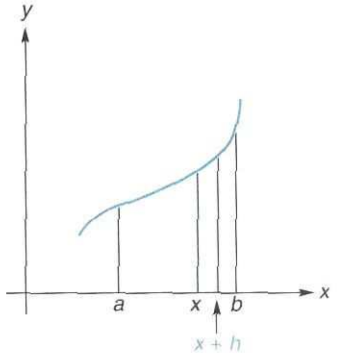


FIGURA 14.17 $A(x + h)$ proporciona el área de la región sombreada.

Supongamos que existe una función $A = A(x)$, a la cual nos referiremos como una función de área, que nos da el área de la región debajo de la gráfica de f y arriba del eje x, entre a y x, donde $a \leq x \leq b$. Esta región aparece sombreada en la figura 14.16. No confunda $A(x)$, que es un área, con $f(x)$, que es la altura de la gráfica en x.

Con base en su definición, podemos enunciar inmediatamente dos propiedades de A:

1. $A(a) = 0$, ya que no hay "área" entre a y a;
2. $A(b)$ es el área ente a y b; esto es

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si x se incrementa en h unidades, entonces $A(x + h)$ es el área de la región sombreada en la figura 14.17. Por tanto, $A(x + h) - A(x)$ es la diferencia de las áreas en las figuras 14.17 y 14.16, o sea, el área de la región sombreada en la figura 14.18. Para una h suficientemente cercana a cero, el área de esta

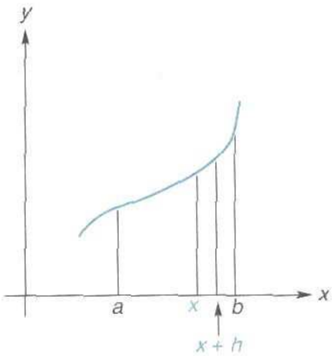


FIGURA 14.18 El área de la región sombreada es $A(x + h) - A(x)$.

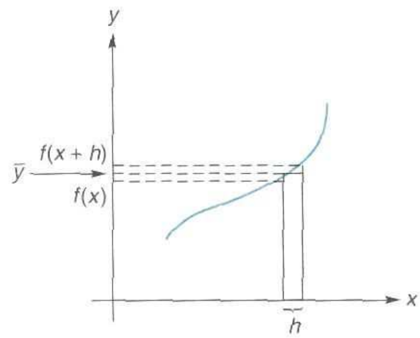


FIGURA 14.19 El área del rectángulo es la misma que el área de la región sombreada en la figura 14.18.

región es la misma que la de un rectángulo (véase la fig. 14.19) cuya base sea h y su altura algún valor $\overline{y}$ entre $f(x)$ y $f(x + h)$. Aquí $\overline{y}$ es una función de h. Así, el área del rectángulo es, por una parte, $A(x + h) - A(x)$, y por otra $h\overline{y}$, por lo que

$$A(x + h) - A(x) = h\overline{y}$$

o

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = \overline{y} \qquad \text{(dividiendo entre } h\text{)}.$$

Cuando $h \to 0$, $\overline{y}$ se aproxima al número $f(x)$, por lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x). \qquad (1)$$

Pero el miembro izquierdo es simplemente la deriva de A. La ecuación (1) se puede entonces escribir como

$$A'(x) = f(x).$$

Concluimos que la función de área A tiene la propiedad adicional de que su derivada A' es f. Esto es, A es una antiderivada de f. Ahora, supongamos que

F es *cualquier* antiderivada de f. Como A y F son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante

$$A(x) = F(x) + C. \tag{2}$$

Recuerde que $A(a) = 0$. Por lo que, al evaluar ambos miembros de la ecuación (2) para $x = a$, resulta

$$0 = F(a) + C,$$

o

$$C = -F(a).$$

Así, la ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a). \tag{3}$$

Entonces, si $x = b$, de la ecuación (3)

$$A(b) = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Pero recuerde que

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La relación entre una integral definida y la antidiferenciación ha resultado clara. Para encontrar $\int_a^b f(x)\,dx$ basta encontrar una antiderivada de f, digamos F, y restar el valor de F en el límite inferior a, de su valor en el límite superior b. Supusimos que f era continua y $f(x) \geq 0$ para poder usar el concepto de "área". Sin embargo, nuestro resultado es cierto para cualquier función continua,[6] y se conoce como el *teorema fundamental del cálculo integral.*

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La integral definida es un número, y una integral indefinida es una función.

Es importante que entienda la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número definido** como el límite de una suma. El teorema fundamental establece que la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ (una antiderivada de f), la cual es una **función** de x y está relacionada con el proceso de diferenciación, puede usarse para determinar ese límite.

[6]Si f es continua en $[a, b]$, puede demostrarse que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Supongamos que aplicamos el teorema fundamental para evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Aquí, $f(x) = 4 - x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Como una antiderivada de $4 - x^2$ es $F(x) = 4x - (x^3/3)$, se sigue que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}.$$

Esto confirma nuestro resultado del ejemplo 2 de la sección 14.6. Si hubiésemos escogido $F(x)$ como $4x - (x^3/3) + C$, entonces

$$F(2) - F(0) = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + C\right] - [0 + C] = \frac{16}{3},$$

igual que antes. Ya que el valor escogido para C es irrelevante, por conveniencia lo escogeremos siempre igual a 0, como se hizo inicialmente. Por lo general, $F(b) - F(a)$ se abrevia escribiendo

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Por tanto, tenemos

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}.$$

Principios en práctica 1

Aplicación del teorema fundamental

El ingreso (en dólares) de una cadena de comida rápida está aumentando a una tasa de $f(t) = 10{,}000e^{0.02t}$, donde t está en años. Determine $\int_3^6 10{,}000e^{0.02t}\,dt$, que proporciona el ingreso total para la cadena entre el tercero y sexto años.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema fundamental

Encontrar $\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\,dx$.

Solución: una antiderivada de $3x^2 - x + 6$ es

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\,dx \\
&= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{-1}^3 \\
&= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right] \\
&= \left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48.
\end{aligned}$$

Propiedades de la integral definida

Para $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que $a < b$. Ahora se definen los casos en que $a > b$ o $a = b$. Primero,

$$\text{si } a > b, \text{ entonces } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2)\, dx = -\int_0^2 (4 - x^2)\, dx.$$

Si los límites de integración son iguales, tenemos

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Algunas propiedades de la integral definida merecen mencionarse. La primera propiedad replantea más formalmente nuestro comentario de la sección anterior sobre áreas.

Propiedades de la integral definida

1. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$.

2. $\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx,$ donde k es una constante.

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

Las propiedades 2 y 3 son similares a las reglas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse, utilizando el teorema fundamental, en términos de una antiderivada. Se dan a continuación dos propiedades más de las integrales definidas.

4. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$

La variable de integración es una "variable muda" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, esto es, el mismo número.

Para ilustrar la propiedad 4, usted puede verificar, por ejemplo, que

$$\int_0^2 x^2\, dx = \int_0^2 t^2\, dt.$$

5. Si f es continua sobre un intervalo I, y a, b y c están en I, entonces

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx.$$

La propiedad 5 significa que la integral definida en un intervalo puede expresarse en términos de integrales definidas en subintervalos. Así

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \int_0^1 (4 - x^2)\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx.$$

Veremos ahora ejemplos de integración definida y calcularemos algunas áreas en la sección siguiente.

EJEMPLO 2 Uso del teorema fundamental

Encontrar $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx.$

Solución: para encontrar una antiderivada del integrando, aplicaremos la regla de la potencia para integración:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx &= \int_0^1 x^3(1 + x^4)^{-1/2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + x^4)^{-1/2}[4x^3\,dx] = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1 + x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

Advertencia En el ejemplo 2, el valor de la antiderivada $\frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}$ en el límite inferior es $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$. **No** suponga que una evaluación en el límite cero da como resultado 0.

EJEMPLO 3 Evaluación de integrales definidas

a. *Encontrar* $\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\,dt.$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\,dt &= 4\int_1^2 t^{1/3}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (t^2 + 1)^3[2t\,dt] \\ &= (4)\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\bigg|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t^2 + 1)^4}{4}\bigg|_1^2 \\ &= 3(2^{4/3} - 1) + \frac{1}{8}(5^4 - 2^4) \\ &= 3 \cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8}, \\ &= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8}.\end{aligned}$$

b. *Encontrar* $\int_0^1 e^{3t}\,dt.$

Solución:

$$\int_0^1 e^{3t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}[3\,dt]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

EJEMPLO 4 Determinación e interpretación de una integral definida

Evaluar $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$.

Solución:

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

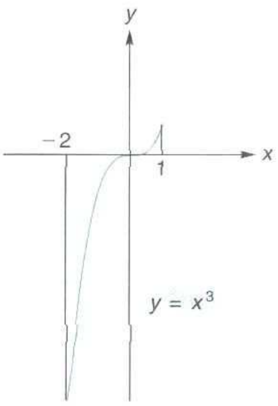


FIGURA 14.20 Gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$.

La razón por la que el resultado es negativo es clara si observamos la gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$. (Véase la fig. 14.20.) Para $-2 \leq x < 0, f(x)$ es negativa. Como una integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$, se deduce que $\int_{-2}^{0} x^3\,dx$ no es sólo un número negativo, sino también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte, $\int_0^1 x^3\,dx$ es el área de la región sombreada en el primer cuadrante, ya que $f(x) \geq 0$ en $[0, 1]$. La integral definida en el intervalo entero $[-2, 1]$ es la suma *algebraica* de estos números, ya que, por la propiedad 5,

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx.$$

Así, $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$ no representa el área entre la curva y el eje x. Sin embargo, si se desea el área, ésta puede darse como el valor de

$$\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_0^1 x^3\,dx.$$

Advertencia Recuerde que $\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de un suma. En algunos casos este límite representa un área. En otros no. Cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces la integral representa el área entre la gráfica de f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$.

La integral definida de una derivada

Como una función f es una antiderivada de f', por el teorema fundamental tenemos

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \tag{6}$$

Pero $f'(x)$ es la razón de cambio de f con respecto a x. De aquí que si conocemos la razón de cambio de f y es necesario encontrar la diferencia entre los valores de la función $f(b) - f(a)$, es suficiente con evaluar $\int_a^b f'(x)\,dx$.

Principios en práctica 2

Cambio en los valores de una función

Un servicio administrativo determina que la tasa de incremento del costo de mantenimiento (en dólares por año) para un complejo privado de departamentos está dada por $M'(x) = 90x^2 + 5000$, en donde x es la edad del complejo de departamentos en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) de mantenimiento en x años. Determine el costo para los primeros cinco años.

EJEMPLO 5 Determinación de un cambio en los valores de la función por integración definida

La definición de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2.$$

Si la producción actual es $q = 80$ unidades por semana, ¿cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

Solución: la función de costo total es $c = c(q)$ y queremos encontrar la diferencia $c(100) - c(80)$. La razón de cambio de c es dc/dq; entonces, por la ecuación (6),

$$\begin{aligned}
c(100) - c(80) &= \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq}\,dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq \\
&= \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]\Bigg|_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]\Big|_{80}^{100} \\
&= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)] \\
&= 3200 - 2080 = 1120.
\end{aligned}$$

Si c está en dólares, entonces el costo de incrementar la producción de 80 a 100 unidades es \$1120.

Tecnología

Muchas calculadoras gráficas tienen la capacidad de estimar el valor de una integral definida. En una TI-83, para estimar

$$\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq,$$

usamos el comando "fnInt(" como se indica en la figura 14.21. Los parámetros que deben proporcionarse con este comando son:

función que será integrada, variable de integración, límite inferior, límite superior.

Vemos que el valor de esta integral definida es de 1120, lo que concuerda con el resultado del ejemplo 5.

De manera similar, para estimar

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx$$

introducimos

$$\text{fnInt}(X^3, X, -2, 1),$$

o en forma alterna, si primero almacenamos x^3 como Y_1, podemos introducir

$$\text{fnInt}(Y_1, X, -2, 1).$$

En cada caso obtenemos -3.75, valor que concuerda con el resultado del ejemplo 4.

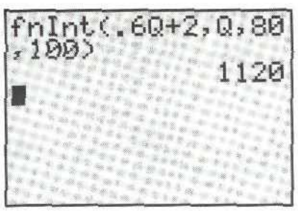


FIGURA 14.21 Estimación de $\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$.

Ejercicio 14.7

En los problemas del 1 al 43 evalúe la integral definida.

1. $\int_0^2 7\,dx.$ **2.** $\int_2^4 (1-e)\,dx.$ **3.** $\int_1^2 5x\,dx.$ **4.** $\int_0^5 -3x\,dx.$

5. $\int_{-3}^{1} (2x-3)\,dx.$ **6.** $\int_{-1}^{1} (4-9y)\,dy.$ **7.** $\int_2^3 (y^2-2y+1)\,dy.$ **8.** $\int_3^2 (2t-t^2)\,dt.$

9. $\int_{-2}^{-1} (3w^2-w-1)\,dw.$ **10.** $\int_8^9 dt.$ **11.** $\int_1^2 -4t^{-4}\,dt.$ **12.** $\int_1^2 \frac{x^{-2}}{2}\,dx.$

13. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^5}\,dx.$ **14.** $\int_{1/2}^{3/2} (x^2+x+1)\,dx.$ **15.** $\int_{1/2}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx.$ **16.** $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)dx.$

17. $\int_{-1}^{1} (z+1)^5\,dz.$ **18.** $\int_1^8 (x^{1/3}-x^{-1/3})\,dx.$ **19.** $\int_0^1 2x^2(x^3-1)^3\,dx.$ **20.** $\int_1^3 (x+3)^3\,dx.$

21. $\int_1^8 \frac{4}{y}\,dy.$ **22.** $\int_{-(e^e)}^{-1} \frac{6}{x}\,dx.$ **23.** $\int_0^1 e^5\,dx.$ **24.** $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx.$

25. $\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx.$ **26.** $\int_0^1 (3x^2+4x)(x^3+2x^2)^4\,dx.$ **27.** $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3}\,dx.$

28. $\int_0^6 \sqrt{2x+4}\,dx.$ **29.** $\int_{1/3}^{2} \sqrt{10-3p}\,dp.$ **30.** $\int_{-1}^{1} q\sqrt{q^2+3}\,dq.$

31. $\int_0^1 x^2\sqrt[3]{7x^3+1}\,dx.$ **32.** $\int_0^{\sqrt{7}} \left[2x-\frac{x}{(x^2+1)^{5/3}}\right]dx.$ **33.** $\int_0^1 \frac{2x^3+x}{x^2+x^4+1}\,dx.$

34. $\int_a^b (m+ny)\,dy.$ **35.** $\int_0^1 (e^x-e^{-2x})\,dx.$ **36.** $\int_{-2}^{1} 8|x|\,dx.$

37. $\int_1^e 2(x^{-1}+x^{-2}-x^{-3})\,dx.$ **38.** $\int_1^2 \left(6\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$ **39.** $\int_1^3 (x+1)e^{x^2+2x}\,dx.$

40. $\int_3^4 \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx.$ **41.** $\int_0^2 \frac{x^6+6x^4+x^3+8x^2+x+5}{x^3+5x+1}\,dx.$

42. $\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+e^x}\,dx.$ [*Sugerencia:* multiplique el integrando por $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.] **43.** $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde $f(x)=\begin{cases}4x^2, & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 2x, & \text{si } \frac{1}{2}\le x\le 2.\end{cases}$

■■■

44. Evalúe $\left(\int_2^3 x\,dx\right)^2 - \int_2^3 x^2\,dx.$

45. Suponga que $f(x)=\int_1^x 3\frac{1}{t^2}\,dt$. Evalúe $\int_e^1 f(x)\,dx.$

46. Evalúe $\int_{10}^{10} e^{x^2}\,dx + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2\ln 2}\,dx.$

47. Si $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^2 f(x)\,dx = 3$, encuentre

$\int_1^2 f(x)\,dx.$

48. Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$, $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$,

y $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$, encuentre $\int_2^3 f(x)\,dx.$

49. Evalúe $\int_1^2 \left(\frac{d}{dx}\int_1^2 e^{x^2}\,dx\right)dx$. [*Sugerencia:* no es necesario determinar $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$.]

50. Suponga que $f(x)=\int_e^x \frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\,dt$, donde $x>e$. Encuentre $f'(x)$.

51. Índice de severidad En un análisis de la seguridad en el tránsito, Shonle[7] considera cuánta aceleración puede tolerar una persona en un choque sin que se presenten en ella lesiones serias. El *índice de severidad* se define como

$$\text{I.S.} = \int_0^T \alpha^{5/2}\,dt,$$

[7] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

donde α (la letra griega "alfa") se considera una constante implicada con la aceleración media ponderada y T es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.

52. Estadística En estadística, la media μ (letra griega "mu") de la función f de densidad de probabilidad continua, definida en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]\, dx,$$

y la varianza σ^2 (letra griega "sigma") está dada por

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)\, dx.$$

Calcule μ y σ^2 si $a = 0, b = 1$ y $f(x) = 1$.

53. Distribución de ingresos El economista Pareto[8] ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que da el número N de personas que reciben x o más dólares. Si

$$\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B},$$

donde A y B son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre a y b, si $a < b$.

54. Biología En un estudio sobre mutación genética,[9] aparece la integral siguiente:

$$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2}\, dx.$$

Evalúe esta integral.

55. Flujo continuo de ingreso El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^5 2000e^{-0.06t}\, dt.$$

Evalúe el valor actual, al dólar más cercano.

56. Biología En biología, con frecuencia surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia del flujo sanguíneo a los tejidos. Evalúe la siguiente integral que se presenta en un problema de difusión[10] entre dos compartimentos:

$$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})\, d\tau,$$

aquí, τ (se lee "tau") es una letra griega; a y b son constantes.

57. Demografía Para cierta población, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral

$$\int_x^{x+n} l(t)\, dt$$

da el número esperado de gente en la población que tiene entre exactamente x y $x + n$ años, inclusive. Si

$$l(x) = 10{,}000\sqrt{100 - x},$$

determine el número de personas que tienen exactamente entre 36 y 64 años, inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano, ya que respuestas fraccionarias no tienen sentido.

58. Consumo de mineral Si c_0 es el consumo anual de un mineral en el tiempo $t = 0$, entonces bajo consumo continuo, la cantidad total de mineral usado en el intervalo $[0, t_1]$ es

$$\int_0^{t_1} c_0 e^{kt}\, dt,$$

donde k es la razón de consumo. Para un mineral de tierras raras se ha determinado que $c_0 = 3000$ unidades y $k = 0.05$. Evalúe la integral para estos datos.

59. Costo marginal La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q + 8.$$

Si c está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.

60. Costo marginal Repita el problema 59 si

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.6q + 40$$

y la producción aumenta de 100 a 200 unidades.

61. Ingreso marginal La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{1000}{\sqrt{100q}}.$$

[8]G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), pág. 16.

[9]W. J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

[10]W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Si r está en dólares, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 400 a 900 unidades.

62. Ingreso marginal Repita el problema 61 si

$$\frac{dr}{dq} = 250 + 90q - 3q^2$$

y la producción crece de 10 a 20 unidades.

63. Tasa de criminalidad Una socióloga está estudiando la tasa de crímenes en cierta ciudad. Ella estima que t meses después del principio del próximo año, el número total de crímenes cometidos se incrementará a razón de $8t + 10$ por mes. Determine el número total de crímenes que puede esperarse que se cometan el próximo año. ¿Cuántos crímenes puede esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?

64. Altas de hospital Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4},$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta por día al término de t días. ¿Qué proporción ha sido dada de alta al final de 700 días?

65. Producción Imagine un país "unidimensional" de longitud $2R$ (véase la fig. 14.22).[11] Suponga que la producción de bienes en este país está distribuida en forma

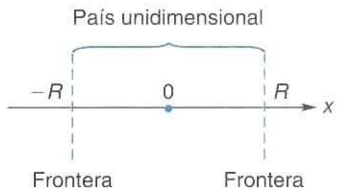


FIGURA 14.22 Diagrama para el problema 65.

continua de frontera a frontera. Si la cantidad producida cada año por unidad de distancia es $f(x)$, entonces la producción total del país está dada por

$$G = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Evalúe G si $f(x) = i$, donde i es una constante.

66. Exportaciones Para el país "unidimensional" del problema 65, la cantidad E de exportaciones bajo ciertas condiciones, está dada por

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{i}{2}[e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}]\,dx,$$

donde i y k son constantes ($k \neq 0$). Evalúe E.

67. Precio promedio de entrega En un análisis del precio de entrega de un artículo desde la fábrica hasta el cliente, DeCanio[12] afirma que el precio promedio de entrega pagado por los consumidores está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + x)[1 - (m + x)]\,dx}{\int_0^R [1 - (m + x)]\,dx},$$

donde m es el precio en la fábrica, x la distancia y R la distancia máxima al punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \frac{R}{2} - m^2 - mR - \frac{R^2}{3}}{1 - m - \frac{R}{2}}.$$

Verifíquelo.

En los problemas del 68 al 70 use el teorema fundamental del cálculo integral para determinar el valor de la integral definida. Verifique los resultados con su calculadora.

68. $\int_2^4 (7x + 3x^2)\,dx.$

69. $\int_0^4 \frac{1}{(4x + 4)^2}\,dx.$

70. $\int_0^1 e^{3t}\,dt$. Redondee su respuesta a dos decimales.

En los problemas del 71 al 74 estime el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a dos decimales.

71. $\int_{-1}^5 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}\,dx.$

72. $\int_1^{3.4} x \ln^2 x\,dx.$

73. $\int_0^4 5\sqrt{t^2 + 3}\,dt.$

74. $\int_{-1}^1 \frac{6\sqrt{q + 1}}{q + 3}\,dq.$

[11] R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decrease with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), 385-404.

[12] S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Reevaluation", *The Quartely Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

OBJETIVO Utilizar bandas verticales y la integral definida para encontrar el área de la región entre una curva y el eje x.

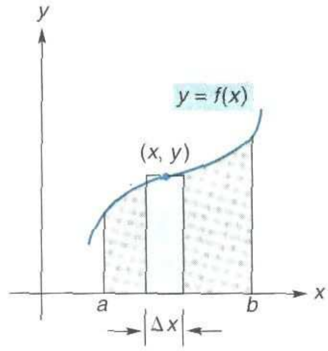


FIGURA 14.23 Región con elemento vertical.

14.8 ÁREA

En la sección 14.6 vimos que el área de una región puede encontrarse evaluando el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, donde $f(x)\,\Delta x$ representa el área de un rectángulo. Este límite es un caso especial de una integral definida, por lo que puede encontrarse fácilmente usando el teorema fundamental.

Al usar la integral definida para determinar áreas, conviene hacer un esbozo de la región implicada. Consideremos el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x entre $x = a$ y $x = b$, donde $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$.(Véase la fig. 14.23.) Para plantear la integral, debe incluirse un rectángulo muestra en el esbozo, ya que el área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Esto no sólo ayuda a entender el proceso de integración, también ayuda a encontrar áreas de regiones más complicadas. Dicho rectángulo (véase la fig. 14.23) se llama **elemento vertical de área** (o **franja vertical**). En el diagrama, el ancho del elemento vertical es Δx. La altura es el valor y de la curva. Por tanto, el rectángulo tiene un área de $y\,\Delta x$ o $f(x)\,\Delta x$. El área de la región entera se encuentra sumando las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$, y determinando el límite de esta suma, que es la integral definida. En forma simbólica, tenemos

$$\Sigma f(x)\,\Delta x \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \text{área.}$$

El ejemplo 1 ilustrará esto.

EJEMPLO 1 Uso de la integral definida para encontrar un área

Encontrar el área de la región limitada por la curva

$$y = 6 - x - x^2$$

y el eje x.

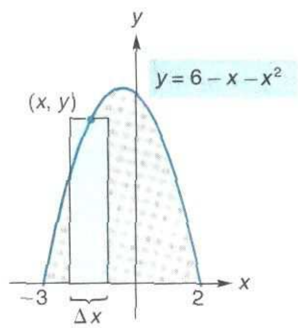


FIGURA 14.24 Región del ejemplo 1 con elemento vertical.

Solución: primero debemos esbozar la curva para poder visualizar la región. Como

$$y = -(x^2 + x - 6) = -(x - 2)(x + 3),$$

las intersecciones con el eje x son $(2, 0)$ y $(-3, 0)$. Usando las técnicas de graficación que vimos antes, obtenemos la gráfica y la región que se muestra en la figura 14.24. *Con esta región es crucial encontrar las intersecciones de la curva con el eje x, porque ellas determinan el intervalo en el cual las áreas de los elementos deben sumarse.* Esto es, *esos valores x son los límites de integración.* El elemento vertical mostrado tiene un ancho Δx y altura y. Por tanto, el área del elemento es $y\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos estos elementos de $x = -3$ a $x = 2$ y tomando el límite mediante la integral definida, obtenemos el área:

$$\Sigma y\,\Delta x \rightarrow \int_{-3}^{2} y\,dx = \text{área.}$$

Para evaluar la integral debemos expresar el integrando en términos de la variable de integración x. Como $y = 6 - x - x^2$,

$$\text{área} = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}$$

$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

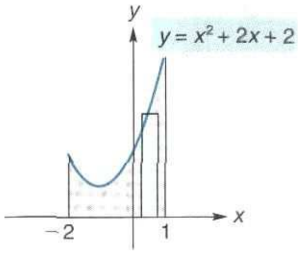


FIGURA 14.25 Diagrama para el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Determinación del área de una región

Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 2$, *el eje x y las líneas* $x = -2$ *y* $x = 1$.

Solución: en la figura 14.25 se muestra un esbozo de la región. Tenemos

$$\text{área} = \int_{-2}^{1} y\,dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 4\right)$$

$$= 6 \text{ unidades cuadradas.}$$

EJEMPLO 3 Determinación del área de una región

Encontrar el área de la región entre la curva $y = e^x$ *y el eje x entre* $x = 1$ *y* $x = 2$.

Solución: en la figura 14.26 se muestra un esbozo de la región.

$$\text{área} = \int_{1}^{2} y\,dx = \int_{1}^{2} e^x\,dx = e^x\bigg|_{1}^{2}$$

$$= e^2 - e = e(e - 1) \text{ unidades cuadradas.}$$

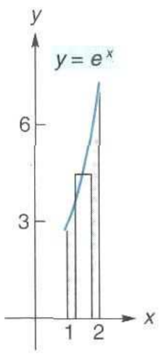


FIGURA 14.26 Diagrama para el ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Un área que requiere dos integrales definidas

Encontrar el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

y la línea $y = 0$ *(el eje x) entre* $x = -2$ y $x = 2$.

Solución: en la figura 14.27 se muestra un esbozo de la región. Note que las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

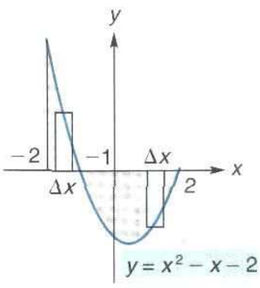


FIGURA 14.27 Diagrama para el ejemplo 4.

Advertencia Es erróneo apresurarse y escribir que el área es $\int_{-2}^{2} y\,dx$, por la siguiente razón: para el rectángulo izquierdo la altura es y. Sin embargo, para el rectángulo a la derecha, la y es negativa, por lo que su altura es el número positivo $-y$. Esto señala la importancia de esbozar la región.

En el intervalo $[-2, -1]$, el área del elemento es

$$y\,\Delta x = (x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

En $[-1, 2]$ el área es

$$-y\,\Delta x = -(x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

Así,

$$\text{área} = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right]$$

$$= \frac{19}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

El ejemplo siguiente muestra el uso del área como una probabilidad en estadística.

EJEMPLO 5 Aplicación a la estadística

En estadística, una ***función de densidad*** *(de probabilidad) f de una variable x, donde x toma todos los valores en el intervalo [a, b], tiene las siguientes propiedades:*

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

3. *La probabilidad de que x tome un valor entre c y d, que se escribe* $P(c \leq x \leq d)$, *donde* $a \leq c \leq d \leq b$, *se representa por el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre* $x = c$ *y* $x = d$. *Por tanto (véase la fig. 14.28),*

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

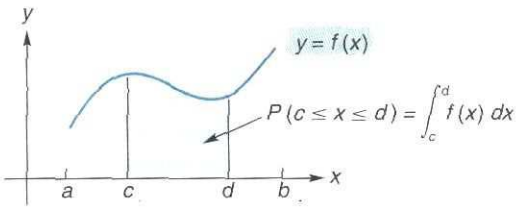


FIGURA 14.28 Probabilidad como un área.

Para la función de densidad $f(x) = 6(x - x^2)$, *donde* $0 \leq x \leq 1$, *encontrar cada una de las siguientes probabilidades.*

a. $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$.

Solución: aquí $[a, b]$ es $[0, 1]$, c es 0 y d es $\frac{1}{4}$. Por la propiedad 3, tenemos

$$P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_0^{1/4} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3)\Bigg|_0^{1/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right] - 0 = \frac{5}{32}.$$

b. $P(x \geq \frac{1}{2})$.

Solución: como el dominio de f es $0 \leq x \leq 1$, decir que $x \geq \frac{1}{2}$ significa $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Así,

$$P(x \geq \tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_{1/2}^{1}(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = (3x^2 - 2x^3)\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 14.8

En los problemas del 1 al 34 use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. En cada caso primero haga el bosquejo de la región. Tenga cuidado con las áreas de regiones situadas debajo del eje x.

1. $y = 4x, \quad x = 2.$

2. $y = \dfrac{3}{4}x + 1, \quad x = 0, \quad x = 16.$

3. $y = 3x + 2, \quad x = 2, \quad x = 3.$

4. $y = x + 5, \quad x = 2, \quad x = 4.$

5. $y = x - 1, \quad x = 5.$

6. $y = 2x^2, \quad x = 1, \quad x = 2.$

7. $y = x^2, \quad x = 2, \quad x = 3.$

8. $y = 2x^2 - x, \quad x = -2, \quad x = -1.$

9. $y = x^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 2.$

10. $y = 2x + x^3, \quad x = 1.$

11. $y = x^2 - 2x, \quad x = -3, \quad x = -1.$

12. $y = 3x^2 - 4x, \quad x = -2, \quad x = -1.$

13. $y = 9 - x^2.$

14. $y = \dfrac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2.$

15. $y = 1 - x - x^3, \quad x = -2, \quad x = 0.$

16. $y = e^x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

17. $y = 3 + 2x - x^2.$

18. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad x = 2, \quad x = 3.$

19. $y = \dfrac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e.$

20. $y = \dfrac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e^2.$

21. $y = \sqrt{x + 9}, \quad x = -9, \quad x = 0.$

22. $y = x^2 - 2x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

23. $y = \sqrt{2x - 1}, \quad x = 1, \quad x = 5.$

24. $y = x^3 + 3x^2, \quad x = -2, \quad x = 2.$

25. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 2.$

26. $y = x^2 - 4, \quad x = -2, \quad x = 2.$

27. $y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 2.$

28. $y = |x|, \quad x = -2, \quad x = 2.$

29. $y = x + \dfrac{2}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2.$

30. $y = 6 - x - x^2.$

31. $y = x^3, \quad x = -2, \quad x = 4.$

32. $y = \sqrt{x - 2}, \quad x = 2, \quad x = 6.$

33. $y = 2x - x^2, \quad x = 1, \quad x = 3.$

34. $y = x^2 - x + 1, \quad x = 0, \quad x = 1.$

35. Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 16 - 2x, & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

determine el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y la línea $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.

36. En condiciones de distribución uniforme continua, el concepto estadístico de la proporción de personas con ingresos entre a y t, donde $a \leq t \leq b$, es el área de la región entre la curva $y = 1/(b - a)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = t$. Esboce la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.

37. Suponga que $f(x) = x/8$, donde $0 \leq x \leq 4$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre cada uno de lo siguiente:

a. $P(0 \leq x \leq 1)$.
b. $P(2 \leq x \leq 4)$.
c. $P(x \geq 3)$.

38. Suponga $f(x) = 3(1-x)^2$, donde $0 \leq x \leq 1$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

a. $P(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$.
b. $P(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2})$.
c. $P(x \leq \frac{1}{3})$.
d. Use el resultado de la parte (c) para determinar $P(x \geq \frac{1}{3})$.

39. Suponga $f(x) = 1/x$, donde $e \leq x \leq e^2$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

a. $P(3 \leq x \leq 5)$.
b. $P(x \leq 4)$.
c. $P(x \geq 3)$.
d. Verifique que $P(e \leq x \leq e^2) = 1$.

40. a. Sea r un número real, donde $r > 1$. Evalúe

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx.$$

b. Su respuesta a la parte (a) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Esboce esta región.

c. Evalúe $\lim\limits_{r\to\infty}\left(\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx\right)$.

d. Su respuesta a la parte (c) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Esboce esta región.

En cada uno de los problemas del 41 al 44 use la integración definida para estimar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x = -2$, $x = 1$.

42. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+3}}$, $x = 3$, $x = 6$.

43. $y = x^4 - 2x^3 - 2$, $x = 1$, $x = 3$.

44. $y = 1 + 3x - x^4$.

OBJETIVO Determinar el área de una región acotada por dos o más curvas por medio del uso de franjas verticales u horizontales.

14.9 Área entre curvas

Elementos verticales

Ahora encontraremos el área de una región encerrada por varias curvas. Igual que antes, nuestro procedimiento consistirá en dibujar un elemento muestra de área y usar la integral definida para "sumar" las áreas de todos los elementos.

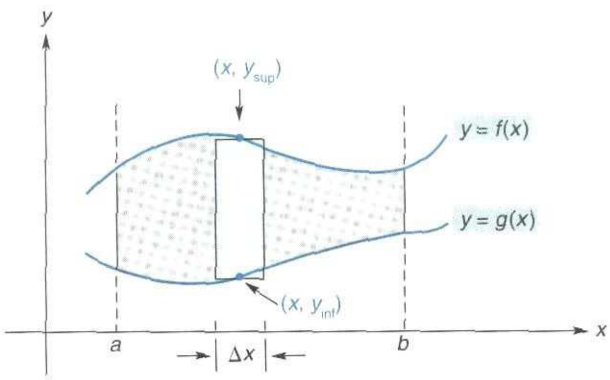


FIGURA 14.29 Región entre curvas.

Por ejemplo, considere el área de la región en la figura 14.29 que está limitada arriba y abajo por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y lateralmente por las líneas $x = a$ y $x = b$. El ancho del elemento vertical indicado es Δx y la altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior, lo que escribiremos como $y_{sup} - y_{inf}$. El área del elemento es entonces

$$[y_{sup} - y_{inf}]\Delta x,$$

o

$$[f(x) - g(x)]\,\Delta x.$$

Al sumar las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$ por medio de la integral definida, obtenemos el área de la región:

$$\sum [f(x) - g(x)]\,\Delta x \to \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \text{área}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de un área entre dos curvas

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

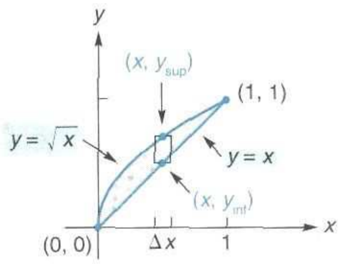


FIGURA 14.30 Diagrama para el ejemplo 1.

Solución: en la figura 14.30 se muestra un esbozo de la región. Para determinar dónde se intersecan las curvas, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Eliminando y por sustitución, obtenemos

$$\sqrt{x} = x,$$

$$x = x^2 \qquad \text{(elevando ambos lados al cuadrado)}.$$

$$0 = x^2 - x = x(x - 1).$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

Si $x = 0$, $y = 0$; si $x = 1$, $y = 1$. Por lo que las curvas se intersecan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$. El ancho del elemento del área indicado es Δx. Su altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior:

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = \sqrt{x} - x.$$

El área del elemento es entonces $(\sqrt{x} - x)\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos estos elementos entre $x = 0$ y $x = 1$ por medio de la integral definida, obtenemos el área de toda la región:

Debe ser obvio para usted que el conocimiento de los puntos de intersección es importante en la determinación de los límites de integración.

$$\text{área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^{1/2} - x)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}\text{ unidad cuadrada.}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un área entre dos curvas

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.

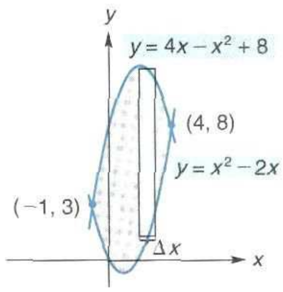


FIGURA 14.31 Diagrama para el ejemplo 2.

Solución: en la figura 14.31 se muestra un esbozo de la región. Para encontrar dónde se intersecan las curvas, resolvemos el sistema de ecuaciones $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$:

$$4x - x^2 + 8 = x^2 - 2x,$$

$$-2x^2 + 6x + 8 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$(x + 1)(x - 4) = 0 \qquad \text{(factorizando)},$$

$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Cuando $x = -1$, $y = 3$; cuando $x = 4$, $y = 8$. Las curvas se intersecan en $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. El ancho del elemento indicado es Δx. La altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior:

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x).$$

Por tanto, el área del elemento es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]\,\Delta x = (-2x^2 + 6x + 8)\,\Delta x.$$

Al sumar todas estas áreas desde $x = -1$ hasta $x = 4$, tenemos

$$\text{área} = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = 41\tfrac{2}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

■ **EJEMPLO 3 Área de una región con dos curvas superiores diferentes**

Encontrar el área de la región entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

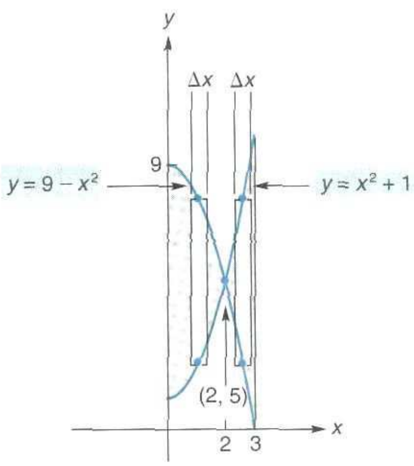


FIGURA 14.32 y_{sup} es $9 - x^2$ en $[0, 2]$ y es $x^2 + 1$ en $[2, 3]$.

Solución: en la figura 14.32 se muestra un esbozo de la región. Las curvas se intersecan cuando

$$9 - x^2 = x^2 + 1,$$

$$8 = 2x^2,$$

$$4 = x^2,$$

$$x = \pm 2 \qquad \text{(dos soluciones)}.$$

Cuando $x = \pm 2$, $y = 5$, por lo que los puntos de intersección son $(\pm 2, 5)$. Como estamos interesados en la región de $x = 0$ a $x = 3$, el punto de intersección que nos concierne es $(2, 5)$. Note en la figura 14.32 que en la región a la *izquierda* del punto de intersección $(2, 5)$, un elemento tiene

$$y_{\text{sup}} = 9 - x^2 \quad \text{y} \quad y_{\text{inf}} = x^2 + 1,$$

pero para un elemento a la *derecha* de $(2, 5)$ ocurre lo contrario, esto es

$$y_{\text{sup}} = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad y_{\text{inf}} = 9 - x^2.$$

Entonces, entre $x = 0$ y $x = 2$, el área de un elemento es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}})\,\Delta x &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]\,\Delta x\\ &= (8 - 2x^2)\,\Delta x,\end{aligned}$$

pero entre $x = 2$ y $x = 3$, es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}})\,\Delta x &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]\,\Delta x\\ &= (2x^2 - 8)\,\Delta x.\end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar el área de la región entera necesitamos *dos* integrales:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^2 (8 - 2x^2)\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)\,dx\\ &= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 8x\right)\Big|_2^3\\ &= \left[\left(16 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] + \left[(18 - 24) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right]\\ &= \frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas.}\end{aligned}$$

Elementos horizontales

Algunas veces el área puede ser más fácil de determinar sumando áreas de elementos horizontales en lugar de elementos verticales. En el ejemplo siguiente, se determinará el área por ambos métodos. En cada caso, el elemento de área determina la forma de la integral.

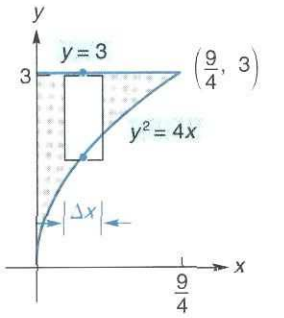


FIGURA 14.33 Elemento vertical de área.

EJEMPLO 4 Los métodos de elementos verticales y elementos horizontales

Encontrar el área de la región limitada para la curva $y^2 = 4x$ y las líneas $y = 3$ y $x = 0$ (el eje y).

Solución: en la figura 14.33 se da el esbozo de la región. Cuando las curvas $y = 3$ y $y^2 = 4x$ se intersecan, $9 = 4x$ por lo que $x = \frac{9}{4}$. Entonces el punto de intersección es $(\frac{9}{4}, 3)$. Como el ancho de la franja vertical es Δx, integramos con respecto a la variable x. De acuerdo con esto, y_{sup} y y_{inf} deben expresarse como funciones de x. Para la curva inferior $y^2 = 4x$ tenemos $y = \pm 2\sqrt{x}$. Pero $y \geq 0$ para la porción de esta curva que limita la región, por lo que usamos $y = 2\sqrt{x}$. La curva superior es $y = 3$. Entonces, la altura de la franja es

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = 3 - 2\sqrt{x}.$$

Por consiguiente, la franja tiene un área de $(3 - 2\sqrt{x})\,\Delta x$ y queremos sumar todas estas áreas entre $x = 0$ y $x = \frac{9}{4}$,

$$\text{área} = \int_0^{9/4} (3 - 2\sqrt{x})\,dx = \left(3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\Big|_0^{9/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right] - (0)$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

Con elementos horizontales, el ancho es Δy, no Δx.

Consideremos ahora este problema desde el punto de vista de un **elemento horizontal de área** (o **franja horizontal**), como se muestra en la figura 14.34. El ancho del elemento es Δy. La longitud del elemento es el *valor x de la curva más a la derecha menos el valor x de la curva más a la izquierda*. El área del elemento es entonces

$$(x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,\Delta y.$$

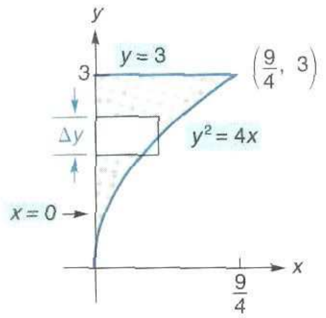


FIGURA 14.34 Elemento horizontal de área.

Queremos sumar todas estas áreas entre $y = 0$ y $y = 3$:

$$\sum (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,\Delta y \to \int_0^3 (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,dy.$$

Como la variable de integración es y, debemos expresar x_{der} y x_{izq} como funciones de y. La curva de más a la derecha es $y^2 = 4x$ o, en forma equivalente, $x = y^2/4$. La curva izquierda es $x = 0$. Así,

$$\text{área} = \int_0^3 (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\,dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy = \frac{y^3}{12}\Big|_0^3 = \frac{9}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

Note que para esta región las franjas horizontales hacen más fácil la evaluación (y el planteamiento) de la integral definida que una integral con franjas verticales. En todo caso, recuerde que **los límites de integración son los límites para la variable de integración.**

EJEMPLO 5 Ventajas al emplear elementos horizontales

Encontrar el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $x - y = 2$.

Solución: el esbozo de la región se da en la figura 14.35. Las curvas se intersecan cuando $y^2 - y = 2$. Así, $y^2 - y - 2 = 0$ o, en forma equivalente, $(y + 1)(y - 2) = 0$, de donde $y = -1$ o $y = 2$. Esto da los puntos de intersección $(1, -1)$ y $(4, 2)$. Consideremos elementos verticales de área [véase la fig. 14.35(a)]. Despejando a y de $y^2 = x$, obtenemos $y = \pm\sqrt{x}$. Como se ve en la figura 14.35(a), a la *izquierda* de $x = 1$, el extremo superior del elemento se encuentra sobre $y = \sqrt{x}$ y el extremo inferior sobre $y = -\sqrt{x}$. A la *derecha* de $x = 1$, la curva superior es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior es $x - y = 2$ (o $y = x - 2$). Entonces, con franjas verticales son necesarias *dos* integrales para evaluar el área:

$$\text{área} = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\,dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)]\,dx.$$

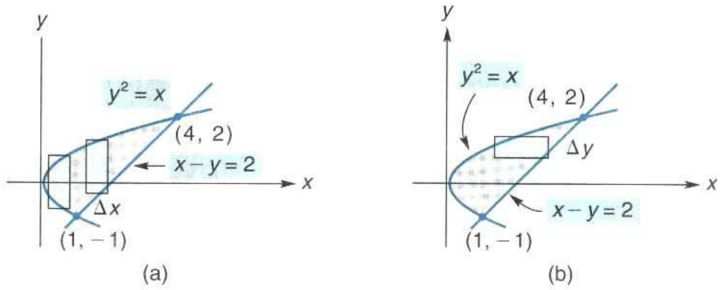


FIGURA 14.35 Región del ejemplo 5 con elementos verticales y horizontales.

Tal vez el uso de franjas horizontales pueda simplificar nuestro trabajo. En la figura 14.35(b), el ancho de la franja es Δy. La curva más a la derecha *siempre* es $x - y = 2$ (o $x = y + 2$) y la curva más a la izquierda siempre es $y^2 = x$ (o $x = y^2$). Por tanto, el área de la franja horizontal es $[(y + 2) - y^2]\Delta y$, por lo que el área total está dada por

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \frac{9}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Queda claro que usar franjas horizontales es la manera más conveniente de atacar este problema. Así sólo se requiere de una integral que es además mucho más sencilla de calcular.

Tecnología

Problema: estimar el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = x^4 - 2x^3 - 2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2x - 2x^2.$$

Solución: en una calculadora TI-83, introducimos $x^4 - 2x^3 - 2$ como Y_1 y $1 + 2x - 2x^2$ como Y_2 y desplegamos sus gráficas. La región que nos ocupa se muestra sombreada en la figura 14.36; y_{sup} corresponde a Y_2 y y_{inf} a Y_1. Usando franjas verticales tenemos

$$\text{área} = \int_{A}^{B} (Y_2 - Y_1)\, dx,$$

donde A y B son los valores x de los puntos de intersección en los cuadrantes III y IV, respectivamente. Con la función de intersección encontramos A, como se indica en la figura 14.37. Este valor de x se almacena entonces como A (véase la fig. 14.38). De manera similar, encontramos el valor x del punto de intersección en el cuadrante IV, que almacenamos en B. Con el comando "fnInt(" (véase la fig. 14.38), estimamos que el área de la región es de 7.54 unidades cuadradas.

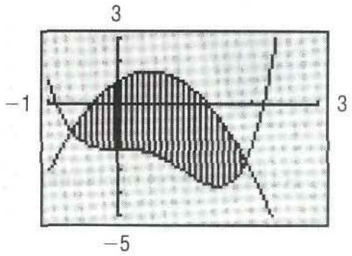


FIGURA 14.36 Gráficas de $Y_1(y_{\text{inf}})$ y $Y_2(y_{\text{sup}})$.

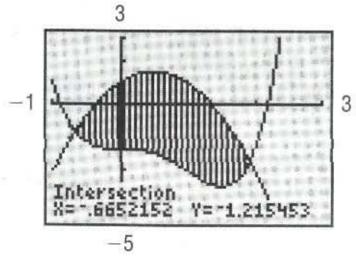


FIGURA 14.37 Punto de intersección en el tercer cuadrante.

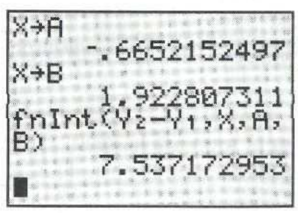


FIGURA 14.38 Almacenamiento de las abscisas de los puntos de intersección y estimación del área.

Ejercicio 14.9

En los problemas del 1 al 6 exprese en términos de una integral (o integrales) el área de la región sombreada. No evalúe su expresión.

1. Observe la figura 14.39.

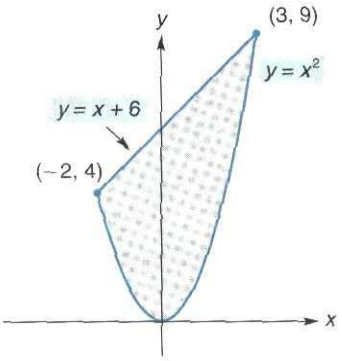


FIGURA 14.39 Región para el problema 1.

2. Observe la figura 14.40.

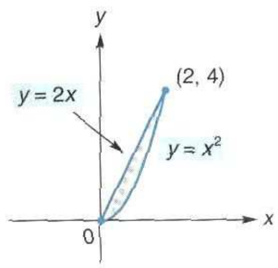


FIGURA 14.40 Región para el problema 2.

3. Observe la figura 14.41.

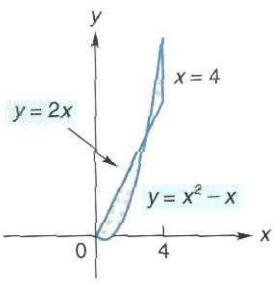


FIGURA 14.41 Región para el problema 3.

4. Observe la figura 14.42.

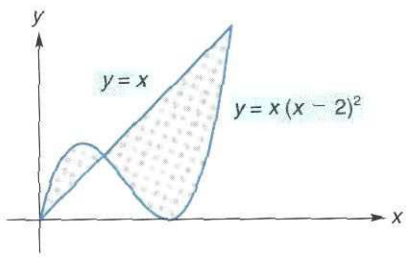


FIGURA 14.42 Región para el problema 4.

5. Observe la figura 14.43.

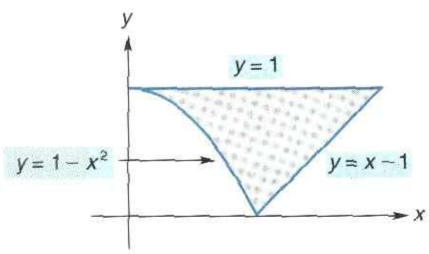


FIGURA 14.43 Región para el problema 5.

6. Observe la figura 14.44.

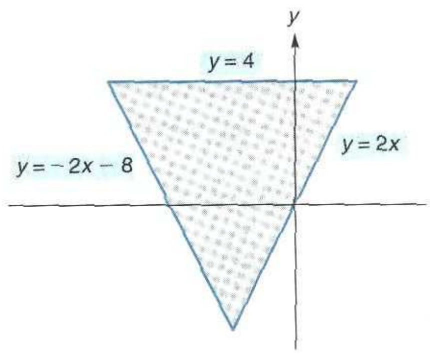


FIGURA 14.44 Región para el problema 6.

7. Exprese en términos de una sola integral el área total de la región a la izquierda de la recta $x = 2$, que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 11 - 2x^2$. *No* evalúe la integral.

8. Exprese en términos de una sola integral el área total de la región en el *cuarto* cuadrante, limitada por el eje x y las gráficas de $y^2 = x$ y $y = 2 - x$. *No* evalúe la integral.

En los problemas del 9 al 32 encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos. Considere si el uso de franjas horizontales hace más sencilla la integral que el uso de franjas verticales.

9. $y = x^2, \quad y = 2x.$

10. $y = x, \quad y = -x + 3, \quad y = 0.$

11. $y = x^2, \quad x = 0, \quad y = 4\ (x \geq 0).$

12. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3.$

13. $y = x^2 + 2, \quad y = 8.$

14. $y^2 = x + 1, \quad x = 1.$

15. $x = 8 + 2y, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 3.$

16. $y = x - 4, \quad y^2 = 2x.$

17. $y = 4 - x^2, \quad y = -3x.$

18. $x = y^2 + 2, \quad x = 6.$

19. $y^2 = x, \quad y = x - 2.$

20. $y = x^2, \quad y = x + 2.$

21. $2y = 4x - x^2, \quad 2y = x - 4.$

22. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$

23. $y^2 = x, \quad 3x - 2y = 1.$

24. $y = 2 - x^2, \quad y = x.$

25. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -1, \quad x = 1.$

26. $y^2 = 2 - x, \quad y = x + 4.$

27. $y = x^2, \quad y = 2, \quad y = 5.$

28. $y = x^3 - x$, eje x.

29. $y = x^3 - 1, \quad y = x - 1.$

30. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$

31. $4x + 4y + 17 = 0, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

32. $y^2 = -x, \quad x - y = 4, \quad y = -1, \quad y = 2.$

33. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x - 1 \quad \text{y} \quad y = 5 - 2x$$

entre $x = 0$ y $x = 4$.

34. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x^2 - 4x + 4 \quad \text{y} \quad y = 10 - x^2$$

entre $x = 2$ y $x = 4$.

35. Curva de Lorentz Una *curva de Lorentz* se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$, en la figura 14.45, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10% de la gente recibe 10% de los ingresos totales, 20% de la gente recibe 20% de los ingresos, etcétera. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorentz definida por

$$y = \tfrac{20}{21}x^2 + \tfrac{1}{21}x.$$

Observe, por ejemplo, que 30% de la gente sólo recibe 10% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el *coeficiente de desigualdad*[13] para una curva de Lorentz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal:

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}.$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz definida antes.

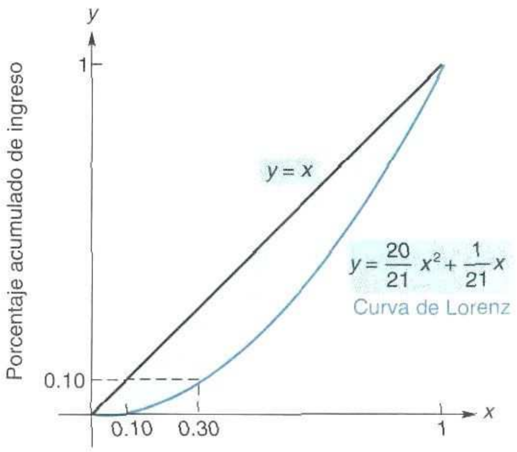


FIGURA 14.45 Diagrama para el problema 35.

36. Curva de Lorentz Encuentre el coeficiente de desigualdad en el problema 35, para la curva de Lorentz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

37. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 4x$ y $y = mx$, donde m es una constante positiva.

38. a. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 2x + 2$.

b. ¿Qué porcentaje del área en la parte (a) se encuentra arriba del eje x?

39. La región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ está dividida en dos partes de igual área por la recta $y = k$, donde k es una constante. Encuentre el valor de k.

[13]G. Stigler, *The Theory of Price*, tercera edición (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), págs. 293-294.

En los problemas del 40 al 44 estime el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. $y = 9x - 15 - x^2, \quad y = \dfrac{10}{x}$.

41. $y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = 7 - 2x - x^4$.

42. $y = x^3 - 8x + 1, \quad y = x^2 - 5$.

43. $y = x^5 - 3x^3 + 2x, \quad y = 3x^2 - 4$.

44. $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30, \quad y = x^3 + x^2 - 20x$.

OBJETIVO Desarrollar los conceptos económicos de excedente de los consumidores y excedente de los productores, los que están representados por áreas.

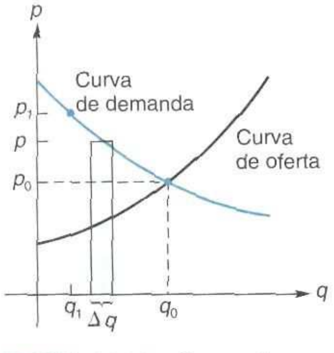


FIGURA 14.46 Curvas de oferta y demanda.

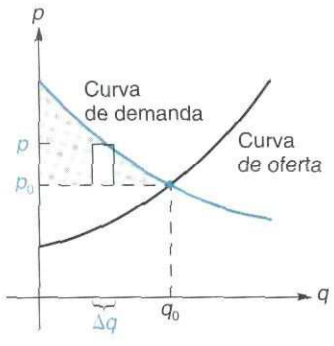


FIGURA 14.47 Beneficio para los consumidores por Δq unidades.

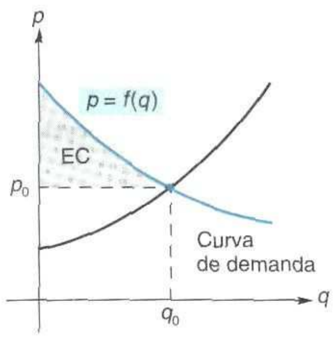


FIGURA 14.48 Excedente de los consumidores.

14.10 EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES Y DE LOS PRODUCTORES

La determinación del área de una región tiene aplicaciones en economía. La figura 14.46 muestra una curva de oferta para un producto. La curva indica el precio p por unidad al que un fabricante venderá (o suministrará) q unidades. El diagrama también muestra la curva de demanda para el producto. Esta curva indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán (o demandarán) q unidades. El punto (q_0, p_0) en el que las curvas se intersecan se llama *punto de equilibrio*. Aquí, p_0 es el precio por unidad al que los consumidores comprarán la misma cantidad q_0 de un producto que los productores desean vender a ese precio. En resumen, p_0 es el precio en el que se presenta estabilidad en la relación productor-consumidor.

Supongamos que el mercado está en equilibrio y el precio por unidad del producto es p_0. De acuerdo con la curva de demanda, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar *más* que p_0. Por ejemplo, al precio p_1 por unidad, los consumidores comprarían q_1 unidades. Estos consumidores están beneficiándose del menor precio, inferior al de equilibrio p_0.

La franja vertical en la figura 14.46 tiene un área de $p\,\Delta q$. Esta expresión puede también considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían comprando Δq unidades de producto, si el precio por unidad fuese p. Como el precio es en realidad p_0, esos consumidores sólo gastan $p_0\,\Delta q$ en esas Δq unidades y se benefician así en la cantidad $p\,\Delta q - p_0\,\Delta q$. Esto puede escribirse como $(p - p_0)\,\Delta q$, que es el área de un rectángulo de ancho Δq y altura $p - p_0$ (véase la fig. 14.47). Sumando las áreas de todos los rectángulos entre $q = 0$ y $q = q_0$, por medio de integración definida, tenemos

$$\int_0^{q_0} (p - p_0)\,dq.$$

Esta integral, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia EC. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq.$$

De manera geométrica (véase la fig. 14.48), el excedente de los consumidores se representa por el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de demanda $p = f(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$.

Algunos de los productores también se benefician del precio de equilibrio, ya que están dispuestos a suministrar el producto a precios *menores* que p_0. Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores se representa en forma geométrica en la figura 14.49, por el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de oferta $p = g(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$. Esta ganancia, llamada **excedente de los productores,** y abreviada EP, está dada por

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq.$$

EJEMPLO 1 Determinación del excedente de los consumidores y de los productores

La función de demanda para un producto es

$$p = f(q) = 100 - 0.05q,$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) de q unidades. La función de oferta es

$$p = g(q) = 10 + 0.1q.$$

Determinar el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

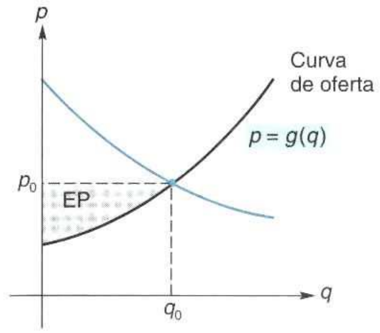


FIGURA 14.49 Excedente de los productores.

Solución: primero debemos encontrar el punto de equilibrio (p_0, q_0) resolviendo el sistema formado por las funciones $p = 100 - 0.05q$ y $p = 10 + 0.1q$. Igualamos las dos expresiones para p y resolvemos:

$$\begin{aligned} 10 + 0.1q &= 100 - 0.05q, \\ 0.15q &= 90, \\ q &= 600. \end{aligned}$$

Cuando $q = 600$, $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\, dq \\ &= \left(30q - 0.05\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 9000. \end{aligned}$$

El excedente de los productores es

$$\begin{aligned} \text{EP} &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\, dq \\ &= \left(60q - 0.1\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 18{,}000. \end{aligned}$$

Por tanto, el excedente de los consumidores es de \$9000 y el de los productores es de \$18,000.

EJEMPLO 2 Uso de franjas horizontales para encontrar el excedente de los consumidores y de los productores

La ecuación de demanda para un producto es

$$q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$$

y la ecuación de oferta es $q = g(p) = p - 1$. *Determinar el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.*

Solución: al determinar el punto de equilibrio, tenemos

$$\begin{aligned} p - 1 &= \frac{90}{p} - 2, \\ p^2 + p - 90 &= 0, \\ (p + 10)(p - 9) &= 0. \end{aligned}$$

Así, $p_0 = 9$, por lo que $q_0 = 9 - 1 = 8$ (véase la fig. 14.50). Observe que la ecuación de demanda expresa a q como una función de p. Ya que el exce-

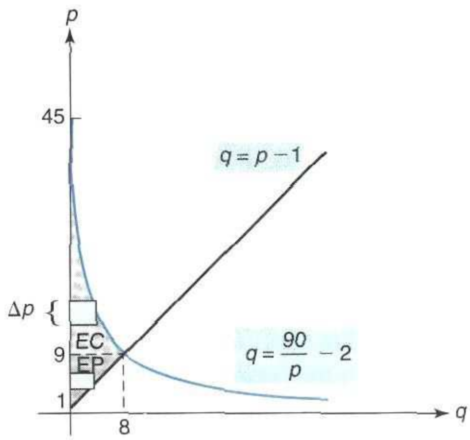


FIGURA 14.50 Diagrama para el ejemplo 2.

dente de los consumidores puede considerarse como un área, esta área puede determinarse por medio de franjas horizontales de ancho Δp y longitud $q = f(p)$. Las áreas de estas franjas se suman desde $p = 9$ hasta $p = 45$, por medio de integración con respecto a p:

$$\text{EC} = \int_9^{45} \left(\frac{90}{p} - 2\right) dp = (90 \ln |p| - 2p)\Big|_9^{45}$$

$$= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85.$$

Usando franjas horizontales para el excedente de los productores, se tiene

$$\text{EP} = \int_1^9 (p - 1)\, dp = \frac{(p-1)^2}{2}\Big|_1^9 = 32.$$

Ejercicio 14.10

En los problemas del 1 al 6, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

1. $p = 22 - 0.8q$,
$p = 6 + 1.2q$.

2. $p = 1100 - q^2$,
$p = 300 + q^2$.

3. $p = \dfrac{50}{q + 5}$,
$p = \dfrac{q}{10} + 4.5$.

4. $p = 400 - q^2$,
$p = 20q + 100$.

5. $q = 100(10 - p)$,
$q = 80(p - 1)$.

6. $q = \sqrt{100 - p}$,
$q = \dfrac{p}{2} - 10$.

7. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}.$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.

8. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 400 - p^2,$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{q}{60} + 5.$$

Encuentre el excedente de los productores y de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

9. La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{11-q}$, y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+1}$, donde p es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando q unidades se demandan o se ofrecen. Determine, al millar de unidades *más cercano*, el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

10. La ecuación de demanda para un producto es

$$(p + 20)(q + 10) = 800,$$

y la ecuación de oferta es

$$q - 2p + 30 = 0.$$

a. Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 20$ y $q = 10$.

b. *Determine el excedente de los consumidores bajo* equilibrio del mercado.

11. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3600}},$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 10 \ln(q + 20) - 26.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

14.11 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 14.1 antiderivada   integral indefinida $\int f(x)\,dx$ signo de integral   integrando   variable de integración   constante de integración

Sección 14.2 condición inicial

Sección 14.3 regla de la potencia para integración

Sección 14.5 $\sum$ índice de sumatoria   límites de sumatoria

Sección 14.6 integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ límite inferior de integración   límite superior de integración

Sección 14.7 teorema fundamental del cálculo integral $F(x)\big|_a^b$

Sección 14.8 elemento vertical de área (franja vertical)

Sección 14.9 elemento horizontal de área (franja horizontal)

Sección 14.10 excedente de los consumidores   excedente de los productores

Resumen

Una antiderivada de una función f es una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Dos antiderivadas cualesquiera de f difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada más general de f se llama integral indefinida de f y se denota $\int f(x)\,dx$. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C se llama constante de integración.

Algunas fórmulas básicas de integración son

$$\int k\,dx = kx + C, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\text{y} \quad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para integración:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1.$$

Aquí, u representa una función diferenciable de x y du es su diferencial. Al aplicar la regla de la potencia a una integral dada, es importante que la integral se escriba en forma que coincida con la de la regla. Otras fórmulas de integración son

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\text{y} \qquad \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C, \quad u \neq 0.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f, esto es, si f' se conoce, entonces f es una antiderivada de f'. Además, si sabemos que f satisface una condición inicial, entonces podemos encontrar la antiderivada particular. Por ejemplo, si nos dan una función de costo marginal dc/dq, por integración podemos encontrar la forma general de c. Esa forma implica una constante de integración. Sin embargo, si también nos dan los costos fijos (esto es, los costos implicados cuando $q = 0$), podremos determinar el valor de la constante de integración y así encontrar la función de costo particular c. De manera similar, si nos dan una función de ingreso marginal dr/dq, entonces por integración y usando el hecho de que $r = 0$ cuando $q = 0$, podemos determinar la función de ingreso particular r. Una vez conocida r, puede encontrarse la correspondiente ecuación de demanda usando la ecuación $p = r/q$.

La notación sigma es conveniente para representar sumas, y en particular es útil en la determinación de áreas. Para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geq 0$ y f es continua] y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δx. Si x_i es el extremo derecho de un subintervalo arbitrario, el producto $f(x_i)\,\Delta x$ es el área de un rectángulo. Si denotamos la suma de todas estas áreas de rectángulos para los n subintervalos por S_n, entonces el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es el área de toda la región:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \text{área}.$$

Si se omite la restricción de que $f(x) \geq 0$, el límite anterior se define como la integral definida de f en $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En vez de evaluar integrales definidas usando límites, puede usarse el teorema fundamental del cálculo integral. En forma matemática,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f.

Algunas propiedades de la integral definida son

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

y

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f, entonces un cambio en los valores de una función de f puede encontrarse con facilidad por medio de la fórmula

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Si $f(x) \geq 0$ y es continua en $[a, b]$, entonces la integral definida puede usarse para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$. La integral definida puede usarse también para encontrar áreas de regiones más complicadas. En esos casos conviene dibujar un elemento de área de la región para plantear correctamente la integral definida. A veces conviene considerar elementos verticales y en otras es preferible usar elementos horizontales.

Una aplicación de la determinación de áreas tiene que ver con el excedente de los consumidores y de los productores. Suponga que el mercado para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, EC, corresponde al área entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Entonces,

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq,$$

donde f es la función de demanda. El excedente de los productores, EP, corresponde al área, entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Así,

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq,$$

donde g es la función de oferta.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 40 determine las integrales.

1. $\int (x^3 + 2x - 7)\,dx.$
2. $\int dx.$
3. $\int_0^9 (\sqrt{x} + x)\,dx.$
4. $\int \frac{4}{5 - 3x}\,dx.$
5. $\int \frac{6}{(x + 5)^3}\,dx.$
6. $\int_4^{12} (y - 8)^{501}\,dy.$
7. $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1}\,dx.$
8. $\int_0^2 xe^{4-x^2}\,dx.$
9. $\int_0^1 \sqrt[3]{3t + 8}\,dt.$
10. $\int \frac{5 - 3x}{9}\,dx.$
11. $\int y(y + 1)^2\,dy.$
12. $\int_0^1 10^{-8}\,dx.$
13. $\int \frac{\sqrt[4]{z} - \sqrt[3]{z}}{\sqrt{z}}\,dz.$
14. $\int \frac{(0.5x - 0.1)^4}{0.4}\,dx.$
15. $\int_1^2 \frac{t^2}{2 + t^3}\,dt.$
16. $\int \frac{4x^2 - x}{x}\,dx.$
17. $\int x^2\sqrt{3x^3 + 2}\,dx.$
18. $\int (2x^3 + x)(x^4 + x^2)^{3/4}\,dx.$
19. $\int (e^{2y} - e^{-2y})\,dy.$
20. $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7 - 2x^2}}\,dx.$
21. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx.$
22. $\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx.$
23. $\int_{-2}^1 10(y^4 - y + 1)\,dy.$
24. $\int_7^{70} dx.$
25. $\int_{\sqrt{3}}^2 7x\sqrt{4 - x^2}\,dx.$
26. $\int_0^1 (2x + 1)(x^2 + x)^4\,dx.$
27. $\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{(x + 1)^{2/3}}\right]dx.$
28. $\int_2^8 3(\sqrt{2x} - x + 4)\,dx.$
29. $\int \frac{\sqrt{t} - 3}{t^2}\,dt.$
30. $\int \frac{2z^2}{z - 1}\,dz.$
31. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2}\,dx.$
32. $\int \frac{(x^2 + 4)^2}{x^2}\,dx.$
33. $\int 9\sqrt{x}\sqrt{x^{3/2} + 1}\,dx.$
34. $\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{2x}}\,dx.$
35. $\int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x^2}\,dx.$
36. $\int \frac{6x^2 + 4}{e^{x^3+2x}}\,dx.$
37. $\int \frac{(1 + e^{3x})^2}{e^{-3x}}\,dx.$
38. $\int \frac{3}{e^{3x}(6 + e^{-3x})^2}\,dx.$
39. $\int 3\sqrt{10^{3x}}\,dx.$
40. $\int \frac{3x^3 + 3x^2 + 11x + 1}{x^2 + x + 3}\,dx.$

En los problemas 41 y 42 encuentre, y sujeta a las condiciones dadas.

41. $y' = e^{2x} + 3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$
42. $y' = \frac{x + 3}{x}, \quad y(1) = 5.$

En los problemas del 43 al 50 determine el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas dadas.

43. $y = x^2 - 1, \quad x = 2 \quad (y \geq 0).$
44. $y = 4e^x, \quad x = 0, \quad x = 3.$
45. $y = \sqrt{x + 4}, \quad x = 0.$
46. $y = x^2 - x - 2, \quad x = -2, \quad x = 2.$
47. $y = 5x - x^2.$
48. $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 1, \quad x = 16.$
49. $y = \frac{1}{x} + 3, \quad x = 1, \quad x = 3.$
50. $y = x^3 - 1, \quad x = -1.$

En los problemas del 51 al 58 encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

51. $y^2 = 4x, \quad x = 0, \quad y = 2.$
52. $y = 2x^2, \quad x = 0, \quad y = 2 \ (x \geq 0).$
53. $y = x^2 + 4x - 5, \quad y = 0.$
54. $y = 2x^2, \quad y = x^2 + 9.$

55. $y = x^2 - 2x, \quad y = 12 - x^2.$

56. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3.$

57. $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1.$

58. $y = 1 - x, \quad y = x - 2, \quad y = 0, \quad y = 1.$

59. **Ingreso marginal** Si el ingreso marginal está dado por

$$\frac{dr}{dq} = 100 - \frac{3}{2}\sqrt{2q},$$

determine la correspondiente ecuación de demanda.

60. **Costo marginal** Si el costo marginal está dado por

$$\frac{dc}{dq} = q^2 + 7q + 6,$$

y los costos fijos son de 2500, determine el costo total para producir 6 unidades. Suponga que los costos están en dólares.

61. **Ingreso marginal** Una función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 275 - q - 0.3q^2.$$

Si r está en dólares, encuentre el incremento en el ingreso total del fabricante si la producción se incrementa de 10 a 20 unidades.

62. **Costo marginal** Una función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = \frac{500}{\sqrt{2q + 25}}.$$

Si c está en dólares, determine el costo implicado en incrementar la producción de 100 a 300 unidades.

63. **Altas hospitalarias** Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = 0.008e^{-0.008t},$$

donde $f(t)$ es la proporción de altas por día al final de t días de hospitalización. ¿Qué proporción del grupo es dada de alta al término de 100 días?

64. **Gastos de un negocio** Los gastos totales (en dólares) de un negocio para los próximos cinco años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t}\, dt.$$

Evalúe los gastos.

65. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - 2x$ y $y = x$ de $x = 0$ a $x = 4$.

66. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = x^2$ y $y = 4 - 3x$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

67. **Excedente de los consumidores y de los productores** Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = 0.01q^2 - 1.1q + 30,$$

y su ecuación de oferta es

$$p = 0.01q^2 + 8.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

68. **Excedente de los consumidores** Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = (q - 5)^2,$$

y la ecuación de oferta es

$$p = q^2 + q + 3,$$

donde p (en miles de dólares) es el precio de 100 unidades cuando q cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

69. **Biología** En un estudio sobre mutación de genes[14], se tiene la ecuación

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \hat{q}} = -(u + v)\int_0^n dt$$

donde u y v son razones de mutación de genes, las q son frecuencias de genes y n es el número de generaciones. Suponga que todas las letras representan constantes, excepto q y t. Integre ambos miembros de la ecuación y luego utilice su resultado para demostrar que

$$n = \frac{1}{u + v}\ln\left|\frac{q_0 - \hat{q}}{q_n - \hat{q}}\right|.$$

70. **Flujo de un fluido** En el estudio del flujo de un fluido dentro de un tubo de radio constante, R, tal como el flujo de la sangre en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[15]

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l},$$

donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l la longitud del tubo. La razón de volumen Q del fluido por el tubo está dado por

$$Q = \int_0^R 2\pi r v\, dr.$$

[14] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

[15] R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Demuestre que $Q = \dfrac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$. Observe que R aparece como un factor elevado a la cuarta potencia. Así, duplicar el radio del tubo tiene por efecto incrementar el flujo por un factor de 16. La fórmula para la razón de volumen se llama *ley de Poiseuille*, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

71. Inventario En un análisis de inventarios, Barbosa y Friedman[16] se refieren a la función

$$g(x) = \frac{1}{k}\int_1^{1/x} ku^r\, du,$$

donde k y r son constantes, $k > 0, r > -2$ y $x > 0$. Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}.$$

[*Sugerencia:* considere dos casos: cuando $r \neq -1$ y cuando $r = -1$].

En los problemas del 72 al 74 estime el área de la región limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

72. $y = 3x^3 + 6x^2 - 5x - 4, \quad y = 0.$

73. $y = x^3 - 2x - 3, \quad y = 4 + 2x - 3x^2.$

74. $y = x^3 - 2x - 3, \quad y = 2x^2 - x^3 - 4.$

---

75. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 20}},$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 2\ln(q + 10) + 5.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

[16]L. C. Barbosa y M. Friedman, "Deterministic Inventory Lot Size Models —a General Root Law", *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), 819-826.

Aplicación práctica

Precio de envío

Supongamos que usted es fabricante de un producto cuyas ventas tienen lugar dentro de R millas alrededor de su fábrica. Suponga que usted cobra a sus clientes a razón de s, en dólares por milla, por cada unidad de producto vendido. Si m es el precio unitario (en dólares) en la fábrica, entonces el precio unitario p de entrega a un cliente situado a x millas de la fábrica será el precio de la fábrica más el cargo por envío sx:

$$p = m + sx, \quad 0 \leq x \leq R. \tag{1}$$

El problema es determinar el precio promedio de entrega de las unidades vendidas.

Supongamos que existe una función f tal que $f(t) \geq 0$ en el intervalo $[0, R]$ y que el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = x$, representa el número total de unidades Q vendidas a clientes dentro de un radio de x millas de la fábrica [véase la fig. 14.51(a)]. Podemos referirnos a f como la distribución de la demanda. Como Q es una función de x y se representa por un área,

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t)\,dt$$

[véase la fig. 14.51(b)]. Por ejemplo, si $f(t) = 10$ y $R = 100$, entonces el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10\,dt = 10t\Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000.$$

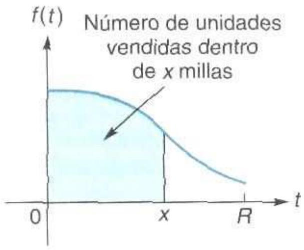
El precio de entrega promedio A está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}.$$

Como el denominador es $Q(R)$, A puede determinarse una vez que se conoce el ingreso total.

Para encontrar el ingreso total, consideremos primero el número de unidades vendidas en un intervalo. Si $t_1 < t_2$ [véase la fig. 14.52(a)], entonces el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = t_1$, representa el número de unidades vendidas dentro de un radio de t_1 millas de la fábrica. De manera análoga, el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = t_2$, representa el número de unidades vendidas dentro de t_2 millas de la fábrica. La diferencia entre esas áreas geométricamente es el área de la región sombreada en la figura 14.52(a), y representa el número de unidades vendidas entre t_1 y t_2 millas de la fábrica, lo cual es $Q(t_2) - Q(t_1)$. Así,

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$



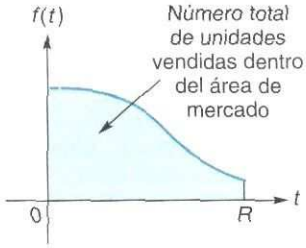


FIGURA 14.51 Número de unidades vendidas como un área.

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, entonces el número de unidades vendidas a clientes situados entre 4 y 6 millas de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10\,dt = 10t\Big|_4^6 = 60 - 40 = 20.$$

El área de la región sombreada en la figura 14.52(a), puede aproximarse por el área de un rectángulo [véase la fig. 14.52(b)], cuya altura es $f(t)$ y ancho Δt, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, el número de unidades vendidas en el intervalo de longitud Δt es casi igual a $f(t)\Delta t$.

Como el precio de cada una de esas unidades es [de la ecuación (1)] casi $m + st$, el ingreso recibido es aproximadamente

$$(m + st)f(t)\ \Delta t.$$

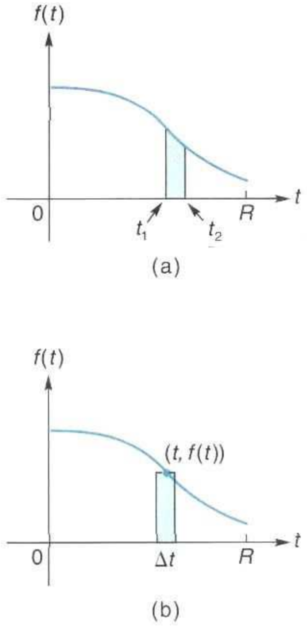


FIGURA 14.52 Número de unidades vendidas en un intervalo.

La suma de todos estos productos desde $t = 0$ hasta $t = R$, aproxima el ingreso total. La integración definida da

$$\sum (m + st)f(t)\ \Delta t \rightarrow \int_0^R (m + st)f(t)\ dt.$$

Así,

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t)\ dt.$$

En consecuencia, el precio promedio de envío A está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\ dt}{Q(R)}$$

o, en forma equivalente

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\ dt}{\int_0^R f(t)\ dt}.$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10, m = 200, s = 0.25$ y $R = 100$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R (m + st)f(t)\ dt &= \int_0^{100} (200 + 0.25t) \cdot 10\ dt \\ &= 10 \int_0^{100} (200 + 0.25t)\ dt \\ &= 10\left(200t + \frac{t^2}{8}\right)\Bigg|_0^{100} \\ &= 10\left[\left(20{,}000 + \frac{10{,}000}{8}\right) - 0\right] \\ &= 212{,}500.\end{aligned}$$

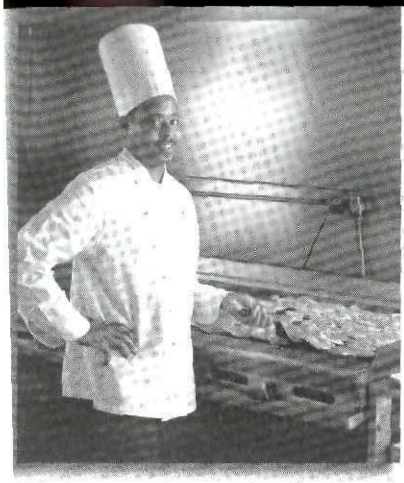
Pero ya teníamos que,

$$\int_0^R f(t)\ dt = \int_0^{100} 10\ dt = 1000.$$

Por tanto, el precio promedio de envío es de $212{,}500/1000 = \$212.50$.

Ejercicios

1. Si $f(t) = 50 - 2t$, determine el número de unidades vendidas a clientes localizados (a) dentro de un radio de 5 millas de la fábrica, y (b) entre 10 y 15 millas.
2. Si $f(t) = 40 - 0.5t, m = 50, s = 0.20$ y $R = 80$, determine (a) el ingreso total; (b) el número total de unidades vendidas, y (c) el precio promedio de envío.
3. Si $f(t) = 900 - t^2, m = 100, s = 1$ y $R = 30$, determine (a) el ingreso total; (b) el número total de unidades vendidas, y (c) el precio promedio de envío. Si desea, utilice una calculadora gráfica.
4. En la práctica, ¿cómo hacen los vendedores de cosas como libros o ropa, para determinar los cobros por envío de un pedido? (Visite a un comerciante en línea para determinarlo.) ¿Usted cómo podría calcular el precio promedio de envío de sus productos? ¿El procedimiento es fundamentalmente diferente del visto en está aplicación práctica?



CAPÍTULO 15

Métodos y aplicaciones de la integración

Ahora sabemos cómo determinar la derivada de una función, y en algunos casos conocemos cómo encontrar una función a partir de su derivada, por medio de la integración. Sin embargo, el proceso de integración no siempre es directo.

Suponga que modelamos la desaparición gradual de una sustancia química, usando las ecuaciones $M' = -0.004t$ y $M(0) = 3000$, en donde la cantidad M, en gramos, es una función del tiempo t en días. Este problema de condición inicial es resuelto con facilidad por medio de integración con respecto a t: $M = -0.002t^2 + 3000$. Pero, ¿qué pasa si, en lugar de lo anterior, la desaparición de la sustancia fuese modelada por medio de las ecuaciones $M' = -0.004M$ y $M(0) = 3000$? El simple reemplazo de t en la primera ecuación por M cambia el carácter del problema. Aún no hemos aprendido cómo encontrar una función cuando su derivada está descrita en términos de ella misma.

Si trabajó la aplicación práctica del capítulo 11, usted recordará una situación similar, que incluye una ecuación con P de un lado y la derivada de P en el otro. Allí usamos una aproximación para resolver el problema, En este capítulo aprenderemos un método que produce una solución exacta en muchos problemas de este tipo.

Las ecuaciones de la forma $y' = ky$, en donde k es constante, son especialmente comunes. Cuando y representa la cantidad de sustancia radiactiva, $y' = ky$ puede representar la tasa de su desaparición, a través de decaimiento radiactivo. Y si y es la temperatura de un pollo acabado de sacar del horno o que se acaba de meter al congelador, entonces una fórmula, conocida como ley de enfriamiento de Newton, puede utilizarse para describir el cambio en la temperatura interna del pollo a lo largo del tiempo. La ley de Newton, que se analizará en este capítulo, podría utilizarse para recomendar procedimientos en la cocina de un restaurante, de modo que los alimentos propensos a contaminación a través de crecimiento bacterial no permanezcan mucho tiempo en una zona de temperatura peligrosa (40 a 140° F). El crecimiento de bacterias, respecto a eso, ¡también se deduce de una ley tipo $y' = ky$!

OBJETIVO Desarrollar y aplicar la fórmula para integración por partes.

15.1 INTEGRACIÓN POR PARTES[1]

Muchas integrales no pueden encontrarse con los métodos que hemos visto hasta ahora. Sin embargo, hay maneras de cambiar ciertas integrales a formas más fáciles de integrar. Veremos dos de tales procedimientos: *la integración por partes* y (en la sección 15.2), *la integración por medio de fracciones parciales.*

Si u y v son funciones diferenciables de x, por la regla del producto tenemos

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Al ordenar nuevamente los términos resulta

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Integrando ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int vu'\,dx. \tag{1}$$

Para $\int (uv)'\,dx$ debemos encontrar una función cuya derivada con respecto a x sea $(uv)'$. Es claro que uv es esa función. Por tanto, $\int (uv)'\,dx = uv + C_1$ y la ecuación (1) queda como

$$\int uv'\,dx = uv + C_1 - \int vu'\,dx.$$

Al incluir a C_1 en la constante de integración para $\int vu'\,dx$ y reemplazar $v'dx$ por dv y $u'dx$ por du, obtenemos la *fórmula de integración por partes*:

Fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$ en términos de otra integral, $\int v\,du$ que puede ser más fácil de integrar.

Para aplicar la fórmula a una integral dada $\int f(x)\,dx$ debemos escribir $f(x)\,dx$ como el producto de dos factores (o *partes*) escogiendo una función u y una diferencial dv tales que $f(x)\,dx = u\,dv$. Sin embargo, para que la fórmula sea útil, debemos ser capaces de integrar la parte seleccionada como dv. Para ilustrar esto consideremos

$$\int xe^x\,dx.$$

[1]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Esta integral no puede determinarse con las fórmulas de integración previas. Una manera de escribir $xe^x\,dx$ en la forma $u\,dv$ es haciendo

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^x\,dx.$$

Para aplicar la fórmula de integración por partes, debemos encontrar du y v:

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = \int e^x\,dx = e^x + C_1.$$

Por tanto,

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du$$

$$= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)\,dx$$

$$= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C$$

$$= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

La primera constante, C_1, no aparece en la respuesta final. Ésta es una característica de la integración por partes y de ahora en adelante esta constante no será escrita cuando encontremos v a partir de dv.

Cuando se usa la fórmula de integración por partes, algunas veces la "mejor selección" de u y dv puede no ser obvia. En algunos casos una selección puede ser tan buena como la otra; en otros, sólo una selección puede ser adecuada. La habilidad para hacer una buena selección (si ésta existe) se adquiere con la práctica y, desde luego, con el procedimiento de ensayo y error.

▪ ***Principios en práctica 1***
Integración por partes

Las ventas mensuales de un teclado para computadora se estima que van a disminuir a una tasa de $S'(t) = -4te^{0.1t}$ teclados por mes, en donde t es el tiempo, en meses y $S(t)$ es el número de teclados vendidos cada mes. Determine $S(t)$, si ahora se venden 5000 teclados $[S(0) = 5000]$.

▪ EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ *utilizando integración por partes.*

Solución: ensayamos

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}.$$

Así,

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right)}_{dv} = uv - \int v\,du$$

$$= (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2x^{1/2})\left(\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2(2\sqrt{x}) + C \qquad (x^{1/2} = \sqrt{x})$$

$$= 2\sqrt{x}\,[\ln(x) - 2] + C.$$

l ejemplo 2 muestra cómo puede acerse una mala elección de u y dv. usted hace una elección que no uncione, no se frustre. En lugar de so, haga otras elecciones hasta que ncuentre una que funcione (si xiste tal elección).

EJEMPLO 2 Integración por partes

Evaluar $\displaystyle\int_1^2 x \ln x\, dx$.

Solución: como la integral no se ajusta a una forma familiar, intentaremos la integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = \ln x\, dx$. Entonces $du = dx$, pero $v = \displaystyle\int \ln x\, dx$ no es evidente por inspección. Por lo que haremos una selección diferente para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x\,dx.$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{y} \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= \frac{x^2\ln x}{2}\bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 0) - (1 - \tfrac{1}{4}) = 2\ln 2 - \tfrac{3}{4}.$$

EJEMPLO 3 *Integración por partes cuando u es todo el integrando*

Determinar $\displaystyle\int \ln y\, dy$.

Solución: no podemos integrar $\ln y$ con los métodos previos, por lo que trataremos de hacerlo con integración por partes. Sea $u = \ln y$ y $dv = dy$. Entonces $du = (1/y)dy$ y $v = y$. Así, tenemos

$$\int \ln y\,dy = (\ln y)(y) - \int y\left(\frac{1}{y}\,dy\right)$$

$$= y\ln y - \int dy = y\ln y - y + C$$

$$= y[\ln(y) - 1] + C.$$

Antes de intentar la integración por partes, debemos ver si este procedimiento es realmente necesario. A veces la integral puede resolverse con una fórmula básica, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Forma de integración básica

Determinar $\int xe^{x^2}\,dx$.

Solución: esta integral puede ajustarse a la forma $\int e^u\,du$.

Advertencia No olvide las formas de integración básicas. ¡La integración por partes no es necesaria aquí!

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\int e^u\,du \qquad \text{(donde } u = x^2\text{)}\\ &= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.\end{aligned}$$

En ocasiones la integración por partes debe usarse más de una vez, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Principios en práctica 2

Doble aplicación de integración por partes

Suponga que una población de bacterias crece a una tasa de

$$P'(t) = 0.1t(\ln t)^2.$$

Determine la forma general de $P(t)$.

EJEMPLO 5 Aplicación de la integración por partes

Determinar $\int x^2e^{2x+1}\,dx$.

Solución: sea $u = x^2$ y $dv = e^{2x+1}\,dx$. Entonces, $du = 2x\,dx$ y $v = e^{2x+1}/2$.

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x+1}\,dx &= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}(2x\,dx)\\ &= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1}\,dx.\end{aligned}$$

Para encontrar $\int xe^{2x+1}\,dx$ usaremos de nuevo la integración por partes. Aquí, sea $u = x$, y $dv = e^{2x+1}\,dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^{2x+1}/2$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\int xe^{2x+1}\,dx &= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}\,dx\\ &= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C_1.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x+1}\,dx &= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C \qquad \text{(donde } C = -C_1\text{)}\\ &= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Ejercicio 15.1

1. Al aplicar la integración por partes a

$$\int f(x)\,dx,$$

un estudiante encontró que $u = x$, $du = dx$, $dv = (x+5)^{1/2}$ y $v = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$. Use esta información para encontrar $\int f(x)\,dx$.

2. Use integración por partes para encontrar

$$\int xe^{5x+2}\,dx$$

seleccionando $u = x$ y $dv = e^{5x+2}\,dx$.

En los problemas del 3 al 29 encuentre las integrales.

3. $\int xe^{-x}\,dx.$
4. $\int xe^{2x}\,dx.$
5. $\int y^3 \ln y\,dy.$
6. $\int x^2 \ln x\,dx.$
7. $\int \ln(4x)\,dx.$
8. $\int \frac{t}{e^t}\,dt.$
9. $\int 15x\sqrt{x+1}\,dx.$
10. $\int \frac{12x}{\sqrt{1+4x}}\,dx.$
11. $\int \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx.$
12. $\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\,dx.$
13. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$
14. $\int \frac{x+1}{e^x}\,dx.$
15. $\int_1^2 4xe^{2x}\,dx.$
16. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$
17. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx.$
18. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$
19. $\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{4-x}}\,dx.$
20. $\int (\ln x)^2\,dx.$
21. $\int 2(2x-1)\ln(x-1)\,dx.$
22. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$
23. $\int x^2e^x\,dx.$
24. $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x^2)\,dx.$
25. $\int (x-e^{-x})^2\,dx.$
26. $\int x^2e^{-2x}\,dx.$
27. $\int x^3e^{x^2}\,dx.$
28. $\int x^5e^{x^3}\,dx.$
29. $\int (2^x+x)^2\,dx.$

30. Encuentre $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$. *Sugerencia:* demuestre que

$$\frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

31. Encuentre el área de la región limitada por el eje x, la curva $y = \ln x$ y la recta $x = e^3$.

32. Encuentre el área de la región limitada por el eje x y la curva $y = xe^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

33. Encuentre el área de la región limitada por el eje x, la curva $y = x\sqrt{2x+1}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

34. **Excedente de los consumidores** Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = 10(q+10)e^{-(0.1q+1)},$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan q unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre cuando $q = 20$. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

35. **Ingreso** Suponga que el ingreso total r y el precio por unidad p son funciones diferenciables de la función de producción q.

a. Use integración por partes para demostrar que

$$\int p\,dq = r - \int q\frac{dp}{dq}\,dq.$$

b. Utilizando la parte (a), demuestre que

$$r = \int \left(p + q\frac{dp}{dq}\right)dq.$$

c. Utilizando la parte (b), demuestre que

$$r(q_0) = \int_0^{q_0} \left(p + q\frac{dp}{dq}\right)dq.$$

[*Sugerencia:* remítase a la sección 14.7.]

36. Suponga que f es una función diferenciable. Aplique la integración por partes a $\int f(x)e^x\,dx$ para demostrar que

$$\int f(x)e^x\,dx + \int f'(x)e^x\,dx = f(x)e^x + C.$$

$$\left(\text{De aquí, } \int [f(x)+f'(x)]e^x\,dx = f(x)e^x + C.\right)$$

OBJETIVO Mostrar cómo integrar una función racional propia, expresándola primero como una suma de sus fracciones parciales.

15.2 INTEGRACIÓN POR MEDIO DE FRACCIONES PARCIALES[2]

Factores lineales distintos

Consideraremos ahora la integral de una función racional (cociente de dos polinomios). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el numerador $N(x)$ y el denominador $D(x)$, no tienen factor polinomial común y que el grado de $N(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. [Esto es, $N(x)/D(x)$ define una *función racional propia.*] Si el numerador no fuese de grado menor, podríamos dividir $N(x)$ entre $D(x)$:

$$D(x)\overline{\big)\,N(x)}^{\;P(x)} \quad \vdots \quad \overline{R(x)}; \qquad \text{así,} \qquad \frac{N(x)}{D(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Aquí $P(x)$ sería un polinomio (fácilmente integrable) y $R(x)$ sería un polinomio de menor grado que el de $D(x)$. Por lo que, $R(x)/D(x)$ definiría una función racional propia. Por ejemplo,

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx = \int\left(2x + 1 + \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\right)dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx.$$

Por tanto, consideremos

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx.$$

Es esencial que el denominador se exprese como un producto de factores:

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)}\,dx.$$

Observe que el denominador consiste sólo en **factores lineales distintos** y que cada factor se presenta exactamente una vez. Puede demostrarse que a cada factor $x - a$, le corresponde entonces una *fracción parcial* de la forma

$$\frac{A}{x - a} \qquad \text{(}A\text{ es una constante)}$$

tal que el integrando es la suma de las fracciones parciales. Si se tienen n factores lineales *distintos*, se tendrán n fracciones parciales, cada una de ellas fácilmente integrable. De acuerdo con esto, podemos escribir

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}. \tag{1}$$

Para determinar las constantes A, B y C, combinamos primero los términos en el miembro derecho:

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}.$$

[2]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Como los denominadores de ambos miembros son iguales, podemos igualar sus numeradores:

$$4x^2 - 14x - 6 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1). \quad \textbf{(2)}$$

Aunque la ecuación (1) no está definida para $x = 0, x = -1$ y $x = 3$, queremos encontrar valores para A, B y C que hagan la ecuación (2) verdadera para todo valor de x. Esto es, se tendrá una identidad. Al hacer sucesivamente a x en la ecuación (2) igual a tres números cualesquiera diferentes, obtenemos un sistema de ecuaciones del que podemos despejar A, B y C. En particular, el trabajo puede simplificarse dándole a x los valores de las raíces de $D(x) = 0$, en nuestro caso, $x = 0, x = -1$ y $x = 3$. Usando la ecuación (2), tenemos, para $x = 0$,

$$-6 = A(1)(-3) + B(0) + C(0) = -3A, \quad \text{por lo que } A = 2.$$

Si $x = -1$,

$$12 = A(0) + B(-1)(-4) + C(0) = 4B, \quad \text{por lo que } B = 3.$$

Si $x = 3$,

$$-12 = A(0) + B(0) + C(3)(4) = 12C, \quad \text{por lo que } C = -1.$$

La ecuación (1) se convierte entonces en

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)}\, dx \\
&= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}\right) dx \\
&= 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{x - 3} \\
&= 2 \ln |x| + 3 \ln |x + 1| - \ln |x - 3| + C \\
&= \ln \left|\frac{x^2(x + 1)^3}{x - 3}\right| + C \quad \text{(usando propiedades de logaritmos).}
\end{aligned}$$

Para la integral *original*, ahora podemos establecer que

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\, dx = x^2 + x + \ln \left|\frac{x^2(x + 1)^3}{x - 3}\right| + C.$$

Existe un método alternativo para determinar A, B y C. Éste implica desarrollar el miembro derecho de la ecuación (2) y agrupar términos semejantes:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 14x - 6 &= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x) \\
&= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 + Cx, \\
4x^2 - 14x - 6 &= (A + B + C)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (-3A).
\end{aligned}$$

Para esta identidad, los coeficientes de las potencias correspondientes de x en ambos miembros de la ecuación deben ser iguales:

$$\begin{cases} 4 = A + B + C, \\ -14 = -2A - 3B + C, \\ -6 = -3A. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se encuentra que $A = 2, B = 3$ y $C = -1$, igual que antes.

■ *Principios en práctica 1*

Factores lineales distintos

El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semana está dado por $r'(q) = \dfrac{5(q+4)}{q^2+4q+3}$, donde $r(q)$ es el ingreso en miles de dólares. Determine la ecuación para $r(q)$.

■ **EJEMPLO 1 Factores lineales distintos**

Determinar $\displaystyle\int \frac{2x+1}{3x^2-27}\,dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no es necesario dividir primero. La integral puede escribirse como

$$\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2-9}\,dx.$$

Si expresamos $(2x+1)(x^2-9)$ como una suma de fracciones parciales obtenemos

$$\frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}.$$

Al combinar términos e igualar los numeradores resulta

$$2x+1 = A(x-3) + B(x+3).$$

Si $x = 3$, entonces

$$7 = 6B, \quad \text{por lo que} \quad B = \frac{7}{6};$$

Si $x = -3$, entonces

$$-5 = -6A, \quad \text{por lo que} \quad A = \frac{5}{6}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{3x^2-27}\,dx &= \frac{1}{3}\left[\int \frac{\frac{5}{6}\,dx}{x+3} + \int \frac{\frac{7}{6}\,dx}{x-3}\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}\ln|x+3| + \frac{7}{6}\ln|x-3|\right] + C\\ &= \frac{1}{18}\ln|(x+3)^5(x-3)^7| + C.\end{aligned}$$

■

Factores lineales repetidos

Si el denominador de $N(x)/D(x)$ sólo contiene factores lineales, algunos de los cuales están repetidos, entonces a cada factor $(x-a)^k$, donde k es el número máximo de veces que se presenta $x-a$ como factor, le corresponderá la suma de k fracciones parciales:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-a)^k}.$$

■ **EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos**

Determinar $\displaystyle\int \frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como el grado del numerador, a saber, 2, es menor que el denominador, 3, no es necesario dividir primero. En el denominador el factor lineal $x+2$ aparece una vez y el factor lineal $x+1$ aparece dos veces. Así, se tendrán que determinar tres fracciones parciales y tres constantes, y tenemos

$$\frac{6x^2 + 13x + 6}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2},$$

$$6x^2 + 13x + 6 = A(x + 1)^2 + B(x + 2)(x + 1) + C(x + 2).$$

Escogemos $x = -2, x = -1$ y, por conveniencia, $x = 0$. Para $x = -2$, tenemos

$$4 = A.$$

Si $x = -1$, entonces

$$-1 = C.$$

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 6 &= A + 2B + 2C = 4 + 2B - 2 = 2 + 2B \\ 4 &= 2B, \\ 2 &= B. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x + 2)(x + 1)^2} dx &= 4\int \frac{dx}{x + 2} + 2\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2} \\ &= 4 \ln|x + 2| + 2 \ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C \\ &= \ln[(x + 2)^4(x + 1)^2] + \frac{1}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

Factores cuadráticos irreducibles distintos

Suponga que un factor cuadrático $x^2 + bx + c$ ocurre en $D(x)$ y que no puede expresarse como un producto de dos factores lineales con coeficientes reales. Se dice que tal factor es un *factor cuadrático irreducible en los números reales*. A cada factor cuadrático irreducible distinto que ocurre sólo una vez en $D(x)$, le corresponderá una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}.$$

Observe que incluso después de que haya expresado una función racional en términos de fracciones parciales, todavía puede encontrar imposible integrar utilizando solamente el cálculo que ha aprendido hasta aquí.

EJEMPLO 3 **Integral con un factor cuadrático irreducible distinto**

Determinar $\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, tenemos el factor lineal x y el factor cuadrático $x^2 + x + 1$, que no parece factorizable a simple vista. Si fuese factorizable en $(x - r_1)(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 fuesen reales, entonces r_1 y r_2 serían las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Por medio de la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}.$$

Como no se tienen raíces reales, concluimos que $x^2 + x + 1$ es irreducible. Así, se tendrán dos fracciones parciales y *tres* constantes que determinar. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}, \\
-2x - 4 &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x \\
&= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx. \\
0x^2 - 2x - 4 &= (A + B)x^2 + (A + C)x + A.
\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, obtenemos

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ -2 = A + C, \\ -4 = A. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $A = -4$, $B = 4$ y $C = 2$. De aquí que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\,dx &= \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx \\
&= -4 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx.
\end{aligned}$$

Ambas integrales tienen la forma $\int \frac{du}{u}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\,dx &= -4 \ln|x| + 2 \ln|x^2 + x + 1| + C \\
&= \ln\left[\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^4} \right] + C.
\end{aligned}$$

Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Suponga que $D(x)$ contiene factores de la forma $(x^2 + bx + c)^k$, donde k es el número máximo de veces que ocurre el factor irreducible $x^2 + bx + c$. Entonces, a cada uno de tales factores le corresponde una suma de k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A + Bx}{x^2 + bx + c} + \frac{C + Dx}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{M + Nx}{(x^2 + bx + c)^k}.$$

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Determinar $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\,dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como el numerador tiene grado 5 y el denominador grado 4, primero dividimos, lo que da

$$\frac{x^5}{x^4+8x^2+16} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}.$$

El factor cuadrático x^2+4 en el denominador de $(8x^3+16x)/(x^2+4)^2$ es irreducible y ocurre dos veces como factor. Así, a $(x^2+4)^2$ le corresponden dos fracciones parciales y tienen que ser determinados *cuatro* coeficientes. De acuerdo con esto, establecemos

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

y obtener

$$8x^3+16x = (Ax+B)(x^2+4)+Cx+D,$$

$$8x^3+0x^2+16x+0 = Ax^3+Bx^2+(4A+C)x+4B+D.$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, obtenemos

$$\begin{cases} 8 = A, \\ 0 = B, \\ 16 = 4A+C, \\ 0 = 4B+D. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A=8$, $B=0$, $C=-16$ y $D=0$. Por tanto,

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \left(x - \left[\frac{8x}{x^2+4} - \frac{16x}{(x^2+4)^2}\right]\right)dx$$

$$= \int x\,dx - 4\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 8\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

La segunda integral en la línea precedente tiene la forma $\int \frac{du}{u}$, y la tercera integral tiene la forma $\int \frac{du}{u^2}$. De modo que

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2+4) - \frac{8}{x^2+4} + C.$$

De nuestros ejemplos, habrá usted deducido que el número de constantes necesarias para expresar $N(x)/D(x)$ por medio de fracciones parciales es igual al grado de $D(x)$, si se supone que $N(x)/D(x)$ define una función racional propia. Éste es, ciertamente, el caso. Observe también que la representación de una función racional propia por medio de fracciones parciales es única; esto es, sólo hay una posible opción para las constantes. Además, de manera independiente de la complejidad del polinomio $D(x)$, éste siempre puede expresarse (teóricamente) como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

Principios en práctica 2
Integral que no requiere fracciones parciales

La tasa de cambio con respecto al tiempo (t en años) de la población que vota en una ciudad, se estima que es $V'(t) = \frac{300t^3}{t^2+6}$. Determine la forma general de $V(t)$.

EJEMPLO 5 Integral que no requiere fracciones parciales

Encontrar $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$.

Solución: esta integral tiene la forma $\int \frac{1}{u}\,du$. Así,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+3x+1| + C.$$

Advertencia No olvide las formas básicas de integración.

Ejercicio 15.2

En los problemas del 1 al 8 exprese la función racional dada en términos de fracciones parciales. Considere la posibilidad de tener primero que dividir.

1. $f(x) = \frac{10x}{x^2+7x+6}$.

2. $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$.

3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+6x+8}$.

4. $f(x) = \frac{2x^2-15}{x^2+5x}$.

5. $f(x) = \frac{4x-5}{x^2+2x+1}$.

6. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2(x-1)}$.

7. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+x}$.

8. $f(x) = \frac{3x^2+5}{(x^2+4)^2}$.

En los problemas del 9 al 30 determine las integrales.

9. $\int \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$.

10. $\int \frac{3x+8}{x^2+2x}\,dx$.

11. $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}\,dx$.

12. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

13. $\int \frac{3x^3-3x+4}{4x^2-4}\,dx$.

14. $\int \frac{7(4-x^2)}{(x-4)(x-2)(x+3)}\,dx$.

15. $\int \frac{17x-12}{x^3-x^2-12x}\,dx$.

16. $\int \frac{4-x}{x^4-x^2}\,dx$.

17. $\int \frac{2(3x^5+4x^3-x)}{x^6+2x^4-x^2-2}\,dx$.

18. $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+8x-1}{x^3-2x^2-8x}\,dx$.

19. $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-1)}\,dx$.

20. $\int \frac{-3x^3+2x-3}{x^2(x^2-1)}\,dx$.

21. $\int \frac{2(x^2+8)}{x^3+4x}\,dx$.

22. $\int \frac{2x^3-6x^2-10x-6}{x^4-1}\,dx$.

23. $\int \frac{-x^3+8x^2-9x+2}{(x^2+1)(x-3)^2}\,dx$.

24. $\int \frac{2x^4+9x^2+8}{x(x^2+2)^2}\,dx$.

25. $\int \frac{14x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$.

26. $\int \frac{12x^3+20x^2+28x+4}{3(x^2+2x+3)(x^2+1)}\,dx$.

27. $\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

28. $\int \frac{3x^2-8x+4}{x^3-4x^2+4x-6}\,dx$.

29. $\int_0^1 \frac{2-2x}{x^2+7x+12}\,dx$.

30. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(x+3)(x+2)}\,dx$.

31. Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{6(x^2+1)}{(x+2)^2}$$

y el eje x, de $x = 0$ a $x = 1$.

32. Excedente de los consumidores La ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = \frac{200(q+3)}{q^2+7q+6},$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan q unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre en el punto $(q, p) = (10, 325/22)$. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

OBJETIVO Ilustrar el uso de la tabla de integrales del apéndice C.

15.3 INTEGRACIÓN POR MEDIO DE TABLAS

Ciertas formas de integrales que aparecen con frecuencia pueden encontrarse en tablas estándar de fórmulas de integración.[3] Por ello, en el apéndice C se proporciona una tabla cuyo uso se ilustrará en esta sección.

Una integral dada puede tener que transformarse a una forma equivalente para que se ajuste o corresponda a una fórmula de la tabla. La forma equivalente debe concordar *exactamente* con la fórmula. En consecuencia, los pasos que dé usted al respecto *no* debe hacerlos mentalmente; ¡*escríbalos*! Si no lo hace, con facilidad podrá llegar a resultados incorrectos. Antes de empezar a resolver los ejercicios, asegúrese de que entiende *perfectamente* los ejemplos ilustrativos.

En los ejemplos siguientes, los números de las fórmulas se refieren a los de la tabla de integrales seleccionadas dadas en el apéndice C.

EJEMPLO 1 Integración con tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2}$.

Solución: al examinar la tabla, identificamos el integrando con la fórmula 7:

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$$

Ahora veamos si podemos hacer coincidir de manera exacta el integrando dado con el de la fórmula. Si reemplazamos x por u, 2 por a y 3 por b, entonces $du = dx$ y por sustitución tenemos

$$\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2} = \int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$$

Volviendo a la variable x y reemplazando a por 2 y b por 3, obtenemos

$$\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2} = \frac{1}{9}\left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x}\right) + C.$$

Note que la respuesta debe darse en términos de x, la variable *original* de integración.

EJEMPLO 2 Integración con tablas

Encontrar $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución: esta integral se identifica con la fórmula 24:

$$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

En esta fórmula, si se usa el signo inferior del símbolo dual "±" en el miembro izquierdo, entonces deberá usarse también el signo inferior de los símbolos

[3]Véase por ejemplo, W. H. Beyer (ed.) *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30 ed. (Boca Ratón, Florida: CRC Pres, 1996).

duales en el miembro derecho. En la integral original, hacemos $u = x$ y $a = 1$. Entonces, $du = dx$ y por sustitución, la integral que resulta es

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du$$

$$= \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C.$$

Como $u = x$ y $a = 1$,

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

Este ejemplo, así como los ejemplos 4, 5 y 7, muestran cómo ajustar una integral de modo que se adecue a una de la tabla.

EJEMPLO 3 Integración con tablas

Encontrar $\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2+3}}$.

Solución: el integrando puede identificarse con la fórmula 28:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right| + C.$$

Si hacemos $u = 4x$ y $a = \sqrt{3}$, entonces $du = 4dx$. Observe cuidadosamente cómo al insertar 4 en el numerador y en el denominador, transformamos la integral dada a una forma equivalente que coincide con la fórmula 28:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2+3}} = \int \frac{(4\,dx)}{(4x)\sqrt{(4x)^2+(\sqrt{3})^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2+3}-\sqrt{3}}{4x}\right| + C.$$

EJEMPLO 4 Integración con tablas

Encontrar $\int \frac{dx}{x^2(2-3x^2)^{1/2}}$.

Solución: el integrando se identifica con la fórmula 21:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C.$$

Haciendo $u = \sqrt{3}x$ y $a^2 = 2$, tenemos $du = \sqrt{3}\,dx$. De aquí que al insertar dos factores de $\sqrt{3}$ en el numerador y en el denominador de la integral original, tenemos

$$\int \frac{dx}{x^2(2-3x^2)^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{(\sqrt{3}\,dx)}{(\sqrt{3}x)^2[2-(\sqrt{3}x)^2]^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}\right] + C = \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{2-3x^2}}{2(\sqrt{3}x)}\right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{2x} + C.$$

EJEMPLO 5 Integración con tablas

Encontrar $\int 7x^2 \ln(4x)\, dx$.

Solución: esta integral es similar a la de la fórmula 42 con $n = 2$:

$$\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}\ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Si hacemos $u = 4x$, entonces $du = 4\,dx$. Por tanto,

$$\int 7x^2 \ln(4x)\, dx = \frac{7}{4^3}\int (4x)^2 \ln(4x)(4\,dx)$$

$$= \frac{7}{64}\int u^2 \ln u\, du = \frac{7}{64}\left(\frac{u^3\ln u}{3} - \frac{u^3}{9}\right) + C$$

$$= \frac{7}{64}\left[\frac{(4x)^3\ln(4x)}{3} - \frac{(4x)^3}{9}\right] + C$$

$$= 7x^3\left[\frac{\ln(4x)}{3} - \frac{1}{9}\right] + C$$

$$= \frac{7x^3}{9}[3\ln(4x) - 1] + C.$$

EJEMPLO 6 Integral en la que la tabla no se necesita

Encontrar $\int \frac{e^{2x}\,dx}{7+e^{2x}}$.

Solución: a primera vista, el integrando no se identifica con ninguna forma de la tabla. Tal vez sea de utilidad escribir de nuevo la integral. Sea $u = 7 + e^{2x}$, entonces $du = 2e^{2x}\,dx$. De modo que

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{7+e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2e^{2x}\,dx)}{7+e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|7+e^{2x}| + C = \frac{1}{2}\ln(7+e^{2x}) + C.$$

Así, sólo tuvimos que usar nuestro conocimiento de las formas básicas de integración. En realidad, esta forma aparece como la fórmula 2 en la tabla.

EJEMPLO 7 Determinación de una integral definida con ayuda de las tablas

Evaluar $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}}$.

Solución: usaremos la fórmula 32 para obtener primero la integral indefinida:

$$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$$

Haciendo $u = 2x$ y $a^2 = 2$, tenemos $du = 2\,dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2\,dx)}{[(2x)^2+2]^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2\sqrt{u^2+2}}\right] + C.$$

Aquí determinamos los límites de integración con respecto a u.

En vez de sustituir los valores de x y evaluar la integral entre $x = 1$ y $x = 4$, podemos determinar los límites de integración correspondientes con respecto a u, y luego evaluar la última expresión entre esos límites. Como $u = 2x$, cuando $x = 1$, tenemos $u = 2$; cuando $x = 4$, tenemos $u = 8$. Así,

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_2^8 \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\sqrt{u^2+2}}\right)\Bigg|_2^8 = \frac{2}{\sqrt{66}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Advertencia Al cambiar la variable de integración x a la variable de integración u, asegúrese de cambiar los límites de integración de manera que concuerden con u. Esto es, en el ejemplo 7,

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} \neq \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}.$$

Integración aplicada a las anualidades

Las tablas de integrales son útiles al manejar integrales asociadas con anualidades. Suponga que debe pagar \$100 al final de cada año, durante los siguientes dos años. Del capítulo 8, recuerde que una serie de pagos sobre un periodo, como en este caso, se denomina *anualidad*. Si en vez de en dos años, usted fuese a liquidar la deuda en este momento, pagaría el valor presente de los \$100 que vencen al final del primer año, más el valor presente de los \$100 que vencen al final del segundo año. La suma de esos valores presentes es el valor actual de la anualidad (el valor presente de una anualidad se vio en la sección 8.3). Ahora consideraremos el valor presente de pagos hechos de manera continua en el intervalo de tiempo que va de $t = 0$ a $t = T$, con t en años, cuando el interés se compone de manera continua a una tasa anual de r.

Suponga que se hace un pago en el tiempo t, de manera que según una base anual, este pago es $f(t)$. Si dividimos el intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de longitud Δt (donde Δt es pequeño), entonces la cantidad total de todos los pagos en tal intervalo es aproximadamente igual a $f(t_i)\Delta t$ [por ejemplo, si $f(t) = 2000$ y Δt fuese de un día, la cantidad total de los pagos sería $2000(\frac{1}{365})$]. El valor presente de esos pagos es de aproximadamente $e^{-rt_i}f(t_i)\,\Delta t$

(véase la sección 9.3). En el intervalo $[0, T]$, el total de todos los valores presentes es

$$\sum e^{-rt_i} f(t_i)\, \Delta t.$$

Esta suma aproxima el valor actual A de la anualidad. Entre menor es Δt, mejor será la aproximación. Esto es, cuando $\Delta t \to 0$, el límite de la suma es el valor actual. Sin embargo, este límite es también una integral definida. Esto es,

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\, dt. \quad \textbf{(1)}$$

donde A es el **valor presente (actual) de una anualidad continua** a la tasa anual r (compuesta de manera continua) durante T años, si un pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ por año.

Decimos que la ecuación (1) da el **valor presente de un flujo continuo de ingreso.** La ecuación (1) puede usarse también para encontrar el valor presente de la utilidad futura de un negocio. En ese caso, $f(t)$ será la tasa anual de utilidad en el tiempo t.

Podemos considerar también el valor *futuro* de una anualidad en vez de su valor presente. Si se hace un pago en el tiempo t, entonces el mismo tiene un cierto valor al *final* del periodo de la anualidad, esto es $T - t$ años después. Este valor es

$$\begin{pmatrix}\text{monto del}\\ \text{pago}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{interés sobre este}\\ \text{pago durante } T - t \text{ años}\end{pmatrix}.$$

Si S es el total de esos valores para todos lo pagos, entonces S se llama *monto acumulado de una anualidad continua* el cual está dado por la fórmula:

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\, dt,$$

donde S es el **monto acumulado de una anualidad continua** al final de T años a la tasa anual r (compuesta de manera continua), cuando un pago al tiempo t es a la tasa $f(t)$ por año.

EJEMPLO 8 Valor presente de una anualidad continua

Encontrar el valor presente (al dólar más cercano) de una anualidad continua a un interés de 8% durante 10 años, si el pago en el tiempo t es a razón de t^2 dólares por año.

Solución: el valor presente está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\, dt = \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t}\, dt.$$

Utilizaremos la fórmula 39,

$$\int u^n e^{au}\, du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du.$$

Esta expresión se llama *fórmula de reducción,* ya que reduce una integral a una expresión que contiene una integral más fácil de determinar. Si $u = t$, $n = 2$ y $a = -0.08$, entonces $du = dt$, y tenemos

$$A = \frac{t^2e^{-0.08t}}{-0.08}\bigg|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\int_0^{10} te^{-0.08t}\,dt.$$

En la nueva integral el exponente de t se ha reducido a 1. Podemos identificar esta integral con la de la fórmula 38,

$$\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C,$$

haciendo $u = t$ y $a = -0.08$. Entonces $du = dt$ y

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{10} t^2e^{-0.08t}\,dt = \frac{t^2e^{-0.08t}}{-0.08}\bigg|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\left[\frac{e^{-0.08t}}{(-0.08)^2}(-0.08t - 1)\right]\bigg|_0^{10} \\ &= \frac{100e^{-0.8}}{-0.08} - \frac{2}{-0.08}\left[\frac{e^{-0.8}}{(-0.08)^2}(-0.8 - 1) - \frac{1}{(-0.08)^2}(-1)\right] \\ &\approx 185. \end{aligned}$$

El valor presente es de \$185.

Ejercicio 15.3

En los problemas 1 y 2 utilice la fórmula 19 del apéndice C para determinar las integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9 - x^2)^{3/2}}$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(25 - 4x^2)^{3/2}}$.

En los problemas 3 y 4 use la fórmula 30 del apéndice C para determinar las integrales.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2 + 3}}$.
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^4 - 4}}$.

En los problemas del 5 al 38 encuentre las integrales usando la tabla del apéndice C.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(6 + 7x)}$.
6. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1 + 2x)^2}$.
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$.
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 7)^{3/2}}$.
9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2 + 3x)(4 + 5x)}$.
10. $\displaystyle\int 2^{5x}\,dx$.
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 3e^{2x}}$.
12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 + x}\,dx$.
13. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x(1 + x)^2}$.
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5 - 11x^2}}$.
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2 + x}$.
16. $\displaystyle\int \frac{5x^2\,dx}{2 + 5x}$.
17. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 3}\,dx$.
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4 + 3x)(4x + 3)}$.
19. $\displaystyle\int_0^{1/12} xe^{12x}\,dx$.
20. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2 + 3x}{5 + 3x}}\,dx$.
21. $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$.
22. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4\,dx}{x^2(1 + x)}$.
23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x^2}\,dx$.
24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2 - x}}$.
25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1 + 3x)^2}$.
26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + 2x)(3 + 2x)}}$.
27. $\displaystyle\int \frac{dx}{7 - 5x^2}$.
28. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x^2 - 9}\,dx$.
29. $\displaystyle\int 36x^5\ln(3x)\,dx$.
30. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1 + x)^2}$.
31. $\displaystyle\int 270x\sqrt{1 + 3x}\,dx$.
32. $\displaystyle\int 9x^2\ln x\,dx$.
33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 13}}$.
34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(2x)}$.
35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - 4x^2}}$.
36. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{x}\,dx$.
37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\pi + 7e^{4\sqrt{x}})}$.
38. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1 + x^4}$.

En los problemas del 39 al 56 encuentre las integrales por cualquier método.

39. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

40. $\int \sqrt{x}e^{x^{3/2}}\,dx$.

41. $\int 6x\sqrt{2x^2+1}\,dx$.

42. $\int \frac{4x^2-\sqrt{x}}{x}\,dx$.

43. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

44. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}\,dx$.

45. $\int x^3 \ln x\,dx$.

46. $\int_0^3 xe^{-x}\,dx$.

47. $\int 4xe^{2x}\,dx$.

48. $\int_1^2 35x^2\sqrt{3+2x}\,dx$.

49. $\int \ln^2 x\,dx$.

50. $\int_1^e \ln x\,dx$.

51. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x}}$.

52. $\int_1^2 x\sqrt{1+2x}\,dx$.

53. $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

54. $\int_0^{\ln 2} x^3e^{2x}\,dx$.

55. $\int_1^2 x\ln(2x)\,dx$.

56. $\int_1^2 dx$.

57. Biología En un análisis sobre frecuencia[4] de genes aparece la integral siguiente

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q(1-q)},$$

donde las q representan frecuencias de genes. Evalúe esta integral.

58. Biología Bajo ciertas condiciones, el número n de generaciones requeridas para cambiar la frecuencia de un gen de 0.3 a 0.1 está dado por[5]

$$n = -\frac{1}{0.4}\int_{0.3}^{0.1} \frac{dq}{q^2(1-q)}.$$

Encuentre n (al entero más cercano).

59. Anualidad continua Encuentre el valor presente, al dólar más cercano, de una anualidad continua a un interés anual de r durante T años, si el pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ dólares por año, dado que

a. $r = 0.06$, $T = 10$, $f(t) = 5000$,
b. $r = 0.05$, $T = 8$, $f(t) = 200t$.

60. Si $f(t) = k$, donde k es una constante positiva, demuestre que el valor de la integral en la ecuación (1) de esta sección es

$$k\left(\frac{1-e^{-rT}}{r}\right).$$

61. Anualidad continua Encuentre el monto acumulado, al dólar más cercano, de una anualidad continua a un interés anual de r durante T años si el pago en el tiempo t es a razón de $f(t)$ dólares al año, dado que

a. $r = 0.06$, $T = 10$, $f(t) = 400$,
b. $r = 0.04$, $T = 5$, $f(t) = 40t$.

62. Valor de un negocio Durante los próximos 5 años, las utilidades de un negocio en el tiempo t se estiman igual a $20{,}000t$ dólares por año. El negocio va a ser vendido a un precio igual al valor presente de esas futuras utilidades. Si el interés se compone continuamente a una tasa anual del 10%, ¿a qué precio, a la decena de dólares más cercana, ha de venderse el negocio?

[4] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burges Publishing Company, 1964).

[5] E. O. Wilson y W. H. Bossert, *A Primer of Population Biology* (Stamford, CT.: Sinauer Associates, Inc., 1971).

OBJETIVO Desarrollar el concepto de valor promedio de una función.

15.4 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

Si nos dan los tres números 1, 2 y 9, el valor promedio o *media* de ellos es su suma dividida entre 3. Si denotamos esta media por $\bar{y}$, tenemos

$$\bar{y} = \frac{1+2+9}{3} = 4.$$

Similarmente, supongamos que nos dan una función f definida en el intervalo $[a, b]$ y que los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están en el intervalo. Entonces, el valor promedio de los n valores correspondientes de la función $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$\bar{y} = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}. \quad (1)$$

Suponemos que x_1, x_2, etc., son los extremos derechos de los subintervalos.

Podemos ir un paso más adelante. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Escogemos x_1 en el primer subintervalo, x_2 en el segundo, etc. Como $[a, b]$ tiene longitud $b - a$, cada subintervalo tiene longitud de $\frac{b-a}{n}$, que llamaremos Δx. Por lo que, la ecuación (1) puede escribirse como

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}{n} = \frac{\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}{n} = \frac{1}{n\,\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \qquad (2)$$

Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, entonces se deduce que $n\,\Delta x = b - a$. Así la expresión $\frac{1}{n\,\Delta x}$ en la ecuación (2), puede ser reemplazada por $\frac{1}{b-a}$. Además, cuando $n \to \infty$, el número de valores de la función usados para calcular $\bar{y}$ crece, y obtenemos así el *valor promedio de la función f*, denotado por $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Pero el límite de la derecha es justamente la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Tenemos así la siguiente definición.

Definición

El ***valor promedio*** (o ***media***) ***de una función*** $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se denota con el símbolo $\bar{f}$ o $\bar{y}$ y está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1 Valor promedio de una función

Encontrar el valor promedio de la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[1, 2]$.

Solución:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

En el ejemplo 1 encontramos que el valor promedio de $y = f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ es $\frac{7}{3}$. Podemos interpretar este valor de manera geométrica. Como

$$\frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3},$$

al calcular el valor de la integral tenemos

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}(2-1).$$

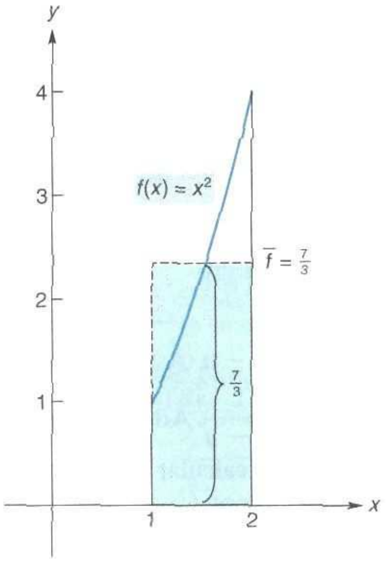


FIGURA 15.1 Interpretación geométrica del valor promedio de una función.

Sin embargo, esta integral da el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = 2$ (véase la fig. 15.1). De la ecuación anterior, esta área es $(\frac{7}{3})(2 - 1)$, que corresponde al área de un rectángulo cuya altura es el valor promedio $\overline{f} = \frac{7}{3}$ y cuyo ancho es $b - a = 2 - 1 = 1$.

EJEMPLO 2 Flujo sanguíneo promedio

Supóngase que el flujo sanguíneo en el tiempo t está dado por

$$F(t) = \frac{F_1}{(1 + \alpha t)^2}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde F_1 *y* α (la letra griega "alfa") *son constantes.*[6] *Encontrar el flujo promedio* $\overline{F}$ en el intervalo $[0, T]$.

Solución:

$$\overline{F} = \frac{1}{T - 0}\int_0^T F(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F_1}{(1 + \alpha t)^2}\,dt = \frac{F_1}{\alpha T}\int_0^T (1 + \alpha t)^{-2}(\alpha\,dt)$$

$$= \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{(1 + \alpha t)^{-1}}{-1}\right]\Bigg|_0^T = \frac{F_1}{\alpha T}\left[-\frac{1}{1 + \alpha T} + 1\right]$$

$$= \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{-1 + 1 + \alpha T}{1 + \alpha T}\right] = \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{\alpha T}{1 + \alpha T}\right] = \frac{F_1}{1 + \alpha T}$$

[6] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Ejercicio 15.4

En los problemas del 1 al 8 encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^2$; $[0, 4]$.
2. $f(x) = 3x - 1$; $[1, 2]$.
3. $f(x) = 2 - 3x^2$; $[-1, 2]$.
4. $f(x) = x^2 + x + 1$; $[1, 3]$.
5. $f(t) = 4t^3$; $[-2, 2]$.
6. $f(t) = t\sqrt{t^2 + 9}$; $[0, 4]$.
7. $f(x) = 6\sqrt{x}$; $[1, 9]$.
8. $f(x) = 7/x$; $[2, 4]$.

9. **Utilidad** La utilidad (en dólares) de un negocio está dada por

$$P = P(q) = 369q - 2.1q^2 - 400,$$

donde q es el número de unidades del producto vendido. Encuentre la utilidad promedio sobre el intervalo de $q = 0$ a $q = 100$.

10. **Costo** Suponga que el costo c (en dólares) de producir q unidades de un producto está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2.$$

Encuentre el costo promedio sobre el intervalo de $q = 100$ a $q = 500$.

11. **Inversión** Una inversión de \$3000 gana interés a una tasa anual de 5% compuesto continuamente. Después de t años, su valor S (en dólares) está dado por $S = 3000e^{0.05t}$. Encuentre el valor promedio de una inversión a 2 años.

12. **Medicina** Suponga que se inyecta un líquido de contraste (tinte) en la corriente sanguínea a una razón R constante. En el tiempo t, sea

$$C(t) = \frac{R}{F(t)}$$

la concentración de tinte en un punto a cierta distancia (distal) del punto de inyección, donde $F(t)$ está dada en el ejemplo 2. Demuestre que la concentración promedio en $[0, T]$ es

$$\overline{C} = \frac{R(1 + \alpha T + \frac{1}{3}\alpha^2T^2)}{F_1}.$$

13. Ingreso Suponga que un fabricante recibe un ingreso r por la venta de q unidades de un producto. Demuestre que el valor promedio de la función de ingreso marginal sobre el intervalo $[0, q_0]$ es el precio por unidad cuando se han vendido q_0 unidades.

14. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en el intervalo $[0, 4]$. Redondee su respuesta a dos decimales.

OBJETIVO Estimar el valor de una integral definida por medio de la regla del trapecio o por la regla de Simpson.

15.5 INTEGRACIÓN APROXIMADA

Regla del trapecio

Al usar el teorema fundamental para evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$, usted puede encontrar sumamente difícil, o tal vez imposible, encontrar una antiderivada de f, aun con la ayuda de tablas. En tal caso, muchas calculadoras gráficas pueden estimar el valor de la integral definida siempre que se conozca el integrando. Además, existen métodos numéricos que pueden usarse para estimar la integral. Esos métodos numéricos usan sólo un número finito de valores de $f(x)$. Así, f no tiene que conocerse en todo el intervalo $[a, b]$. Esos métodos son, en especial, adecuados para las computadoras o calculadoras. Consideraremos dos métodos numéricos: la *regla del trapecio* y la *regla de Simpson*. En ambos casos supondremos que f es continua sobre $[a, b]$.

Al desarrollar la regla del trapecio, por conveniencia supondremos también que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, para poder pensar en términos de áreas. Básicamente, esta regla implica aproximar la gráfica de f por medio de segmentos rectos.

En la figura 15.2, el intervalo $[a, b]$ está dividido en n subintervalos de igual longitud por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ y $x_n = b$. Como la longitud de $[a, b]$ es $b - a$, la longitud de cada subintervalo es $(b - a)/n$, a la cual llamaremos h.

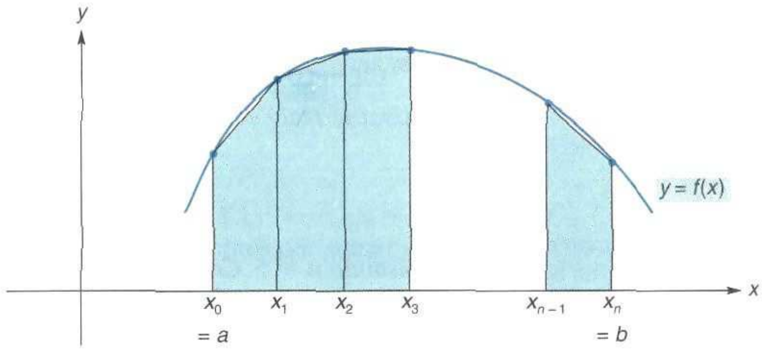


FIGURA 15.2 Aproximación de un área por medio de trapecios.

Es claro que,

$$x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + nh = b.$$

Podemos asociar un trapecio (figura de cuatro lados, dos de ellos paralelos) con cada subintervalo. El área A de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$, la cual puede aproximarse por la suma de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

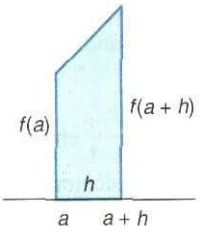


FIGURA 15.3
Primer trapecio.

Consideremos el primer trapecio, que se volvió a dibujar en la figura 15.3. Como el área de un trapecio es igual a la mitad de su base multiplicada por la suma de los lados paralelos, este trapecio tiene un área de

$$\tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)].$$

En forma similar, el segundo trapecio tiene área

$$\tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)].$$

El área A bajo la curva es aproximada por la suma de las áreas de n trapecios:

$$A \approx \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)] + \tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)] +$$

$$\tfrac{1}{2}h[f(a + 2h) + f(a + 3h)] + \cdots + \tfrac{1}{2}h[f(a + (n - 1)h) + f(b)].$$

Como $A = \int_a^b f(x)\,dx$, al simplificar la expresión anterior obtenemos la regla del trapecio:

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a + h) + 2f(a + 2h) +$$

$$\dots + 2f[a + (n - 1)h] + f(b)\},$$

donde $h = (b - a)/n$.

El patrón de los coeficientes dentro de las llaves es 1, 2, 2, ... , 2, 1. Por lo regular, entre más subintervalos se consideren, mejor será la aproximación. En nuestro desarrollo supusimos por conveniencia que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Sin embargo, la regla del trapecio es válida sin esta restricción.

Principios en práctica 1

Regla del trapecio

Un tanque derrama aceite a una velocidad de $R'(t) = \dfrac{60}{\sqrt{t^2 + 9}}$, en donde t es el tiempo en minutos y $R(t)$ es el radio de la mancha de aceite, en pies. Utilice la regla del trapecio, con $n = 5$ para aproximar $\int_0^5 \dfrac{60}{\sqrt{t^2 + 9}}\,dt$, el tamaño del radio después de cinco segundos.

EJEMPLO 1 Regla del trapecio

Usar la regla del trapecio para estimar el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

usando $n = 5$. *Calcular cada término con cuatro decimales y redondear su respuesta a tres decimales.*

Solución: aquí, $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $n = 5$, $a = 0$ y $b = 1$. Entonces,

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Los términos a sumar son

$$f(a) = f(0) = 1.0000$$

$$2f(a + h) = 2f(0.2) = 1.9231$$

$$2f(a + 2h) = 2f(0.4) = 1.7241$$

$$2f(a + 3h) = 2f(0.6) = 1.4706$$

$$2f(a + 4h) = 2f(0.8) = 1.2195$$
$$f(b) = f(1) = \underline{0.5000} \qquad (a + nh = b)$$
$$7.8373 = \text{suma}$$

Por tanto, nuestra estimación de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784.$$

El valor real de la integral es aproximadamente 0.784.

Regla de Simpson

Otro método para estimar $\int_a^b f(x)\, dx$ está dado por la regla de Simpson, que implica aproximar la gráfica de f por medio de segmentos parabólicos. Omitiremos su deducción.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a + h) + 2f(a + 2h) +$$
$$\ldots + 4f[a + (n - 1)h] + f(b)\},$$

donde $h = (b - a)/n$ y n es un número par.

El patrón de coeficientes dentro de las llaves es 1, 4, 2, 4, 2, ... , 2, 4, 1, lo cual requiere que ***n* sea par.** Usemos esta regla para evaluar la integral del ejemplo 1.

Principios en práctica 2

Regla de Simpson

Un cultivo de levadura está creciendo a la velocidad de $A'(t) = 0.3e^{0.2t^2}$, en donde t es el tiempo en horas y $A(t)$ es la cantidad en gramos. Utilice la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar $\int_0^4 0.3e^{0.2t^2}\, dt$, la cantidad de cultivo que creció durante las primeras cuatro horas.

EJEMPLO 2 Regla de Simpson

Usar la regla de Simpson para estimar el valor de $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ *con* $n = 4$. *Calcular cada término con cuatro decimales y redondear la respuesta a tres decimales.*

Solución: aquí, $f(x) = 1/(1 + x^2,)$ $n = 4$, $a = 0$ y $b = 1$. Así, $h = (b - a)/n = 1/4 = 0.25$. Los términos por sumar son:

$$f(a) = f(0) = 1.0000$$
$$4f(a + h) = 4f(0.25) = 3.7647$$
$$2f(a + 2h) = 2f(0.5) = 1.6000$$
$$4f(a + 3h) = 4f(0.75) = 2.5600$$
$$f(b) = f(1) = \underline{0.5000}$$
$$9.4247 = \text{suma}$$

Por tanto, por la regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785.$$

Ésta es una aproximación mejor que la que obtuvimos en el ejemplo 1 usando la regla del trapecio.

Tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio pueden usarse si sólo conocemos $f(a)$, $f(a+h)$, etc.; no tenemos que conocer f. El ejemplo 3 ilustrará esto.

En el ejemplo 3, se estima una integral definida a partir de puntos de datos; la función no es conocida.

EJEMPLO 3 Demografía

Una función usada a menudo en demografía (el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etc., en una comunidad) es la ***función de la tabla de vida,*** *denotada por l. En una población con 100,000 nacimientos en cualquier año, $l(x)$ representa el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Por ejemplo, si $l(20) = 98{,}857$, entonces el número de personas que llegan a los 20 años en cualquier año es 98,857. Suponga que la función l se aplica a toda la gente nacida en un intervalo largo de tiempo. Puede demostrarse que en cualquier tiempo, el número esperado de personas en la población que tienen exactamente entre x y $x+m$ años inclusive, está dado por*

$$\int_x^{x+m} l(t)\,dt.$$

La siguiente tabla da valores de $l(x)$ para hombres y mujeres de Estados Unidos.[7] Aproximar el número de mujeres en el grupo de 20 a 35 años de edad usando la regla del trapecio con $n = 3$.

Tabla de vida

	$l(x)$			$l(x)$	
Edad, x	**Hombres**	**Mujeres**	**Edad, x**	**Hombres**	**Mujeres**
0	100,000	100,000	45	93,717	96,582
5	99,066	99,220	50	91,616	95,392
10	98,967	99,144	55	88,646	93,562
15	98,834	99,059	60	84,188	90,700
20	98,346	98,857	65	77,547	86,288
25	97,648	98,627	70	68,375	79,926
30	96,970	98,350	75	56,288	70,761
35	96,184	97,964	80	42,127	58,573
40	95,163	97,398			

Solución: queremos estimar

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt.$$

Tenemos $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{35-20}{3} = 5$. Los términos que deben sumarse de acuerdo con la regla del trapecio son

[7]*National Vital Statistics Report*, vol. 48, núm. 18, febrero 7, 2001.

$$\begin{aligned} l(20) &= 98{,}857 \\ 2l(25) = 2(98{,}627) &= 197{,}254 \\ 2l(30) = 2(98{,}350) &= 196{,}700 \\ l(35) &= \underline{97{,}964} \\ & \ 590{,}775 = \text{suma} \end{aligned}$$

Según la regla del trapecio,

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt \approx \frac{5}{2}(590{,}775) = 1{,}476{,}937.5.$$

Existen fórmulas que se usan para determinar la exactitud de las respuestas obtenidas al usar la regla del trapecio o la regla de Simpson, las cuales pueden encontrarse en textos comunes sobre análisis numérico.

Ejercicio 15.5

En los ejercicios 1 y 2 use la regla del trapecio o la regla de Simpson (con los datos indicados) y el valor dado de n para estimar la integral.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla del trapecio, $n = 6$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla de Simpson, $n = 6$.

En los problemas del 3 al 8 use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de n, para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales. En los problemas del 3 al 6 evalúe también la integral por antidiferenciación (teorema fundamental del cálculo integral).

3. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla del trapecio, $n = 5$.

4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$.

5. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla de Simpson, $n = 6$.

6. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla del trapecio, $n = 6$.

7. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x+1}$; regla del trapecio, $n = 4$.

8. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{dx}{x+x^2}$; regla de Simpson, $n = 4$.

En los problemas 9 y 10 use la tabla de vida del ejemplo 3 para estimar las integrales dadas, por medio de la regla del trapecio.

9. $\displaystyle\int_{15}^{40} l(t)\,dt$, hombres, $n = 5$.

10. $\displaystyle\int_{35}^{55} l(t)\,dt$, mujeres, $n = 4$.

En los problemas 11 y 12 suponga que la gráfica de una función continua f, donde $f(x) \geq 0$, contiene los puntos dados. Use la regla de Simpson y todos los puntos dados para aproximar el área entre la gráfica y el eje x en el intervalo dado. Redondee su respuesta a un decimal.

11. $(1, 0.4), (2, 0.6), (3, 1.2), (4, 0.8), (5, 0.5)$; $[1, 5]$.

12. $(2, 0), (2.5, 3.6), (3, 10), (3.5, 19.9), (4, 34)$; $[2, 4]$.

▪▪▪

13. Usando toda la información dada en la figura 15.4, estime $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson. Dé su respuesta en forma de fracción.

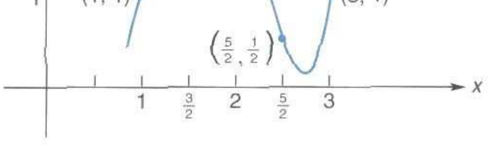


FIGURA 15.4 Gráfica de f para el problema 13

En los problemas 14 y 15 use la regla de Simpson y el valor dado de n para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee sus respuestas a tres decimales.

14. $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx, n = 4$. Evalúe también la integral usando el teorema fundamental del cálculo integral.

15. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx; n = 4$.

16. Ingreso Use la regla de Simpson para aproximar el ingreso total recibido por la producción y venta de 80 unidades de un producto, si los valores de la función de ingreso marginal dr/dq son los siguientes:

q (unidades)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{dr}{dq}$ ($ por unidad)	10	9	8.5	8	8.5	7.5	7	6.5	7

17. Área de un lago Un tramo recto de autopista corre a lo largo de un lago. Un topógrafo que desea conocer el área aproximada del lago, mide la distancia desde varios puntos de la carretera a las orillas cercana y lejana del lago y obtiene los siguientes valores:

Distancia a lo largo de la autopista (km)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Distancia a la orilla cercana (km)	0.5	0.3	0.7	1.0	0.5	0.2	0.5	0.8	1.0
Distancia a la orilla lejana (km)	0.5	2.3	2.2	3.0	2.5	2.2	1.5	1.3	1.0

Dibuje un croquis de la posición geográfica. Luego use la regla de Simpson para estimar la mejor aproximación del área del lago. Dé su respuesta en forma de fracción.

18. Excedente de los productores La función de oferta para un producto está dada por la siguiente tabla, donde p es el precio por unidad (en dólares) al que se suministran q unidades al mercado:

q	0	10	20	30	40	50
p	38	59	69	75	80	84

Utilice la regla del trapecio para estimar el excedente de los productores, si el precio de venta es de $80.

19. Fabricación Un fabricante estimó su costo marginal (CM) y su ingreso marginal (IM) para varios niveles de producción (q). Esas estimaciones se muestran en la siguiente tabla:

q (unidades)	0	20	40	60	80	100	120
CM ($ por unidad)	260	255	240	240	245	250	255
IM ($ por unidad)	415	360	320	290	270	260	255

a. Con la regla del trapecio, estime los costos totales variables de producción para 120 unidades.
b. Con la regla de Simpson, estime el ingreso total en la venta de 120 unidades.
c. Si se supone que la utilidad máxima ocurre cuando IM = CM (esto es, cuando $q = 120$), estime la utilidad máxima si los costos fijos son de $1500.

OBJETIVO Resolver una ecuación diferencial por medio del método de separación de variables. Analizar soluciones particulares y soluciones generales. Desarrollar el concepto de interés compuesto de manera continua en términos de una ecuación diferencial. Estudiar el crecimiento y el decaimiento exponenciales.

15.6 ECUACIONES DIFERENCIALES

En algunas ocasiones, usted tendrá que resolver una ecuación que contenga la derivada de una función desconocida. Tal ecuación se llama **ecuación diferencial.** Un ejemplo es

$$y' = xy^2. \quad (1)$$

Con mayor precisión, la ecuación (1) se llama **ecuación diferencial de primer orden,** ya que incluye una derivada de primer orden y ninguna de orden superior. Una solución de la ecuación (1), es cualquier función $y = f(x)$ que esté definida en un intervalo y satisfaga la ecuación para toda x en el intervalo.

Para resolver $y' = xy^2$, o de manera equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = xy^2, \quad (2)$$

consideramos a dy/dx como un cociente de diferenciales, y "separamos variables" algebraicamente al escribir de nuevo la ecuación de manera que cada miembro contenga sólo una variable, y no aparezcan diferenciales en los denominadores:

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx.$$

Al integrar ambos miembros y combinar las constantes de integración, obtenemos

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2C_1}{2}.$$

Como $2C_1$ es una constante arbitraria, la reemplazamos por C.

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + C}{2}. \tag{3}$$

Despejando a y de la ecuación (3), se tiene

$$y = -\frac{2}{x^2 + C}. \tag{4}$$

Podemos verificar por sustitución que y es una solución de la ecuación diferencial (2):

$$\frac{dy}{dx} = xy^2?$$

$$\frac{4x}{(x^2 + C)^2} = x\left[-\frac{2}{x^2 + C}\right]^2?$$

$$\frac{4x}{(x^2 + C)^2} = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}.$$

Observe en la ecuación (4), que para *cada* valor de C, obtuvimos una solución diferente. Llamamos a la ecuación (4) la *solución general* de la ecuación diferencial. El método que usamos para encontrarla se llama *separación de variables*.

En el ejemplo anterior, suponga que nos dan la condición de que $y = -\frac{2}{3}$ cuando $x = 1$; esto es $y(1) = -\frac{2}{3}$. Entonces, la función *particular* que satisface a la ecuación (2) y a esta condición, puede encontrarse sustituyendo los valores $x = 1$ y $y = -\frac{2}{3}$ en la ecuación (4) y despejando a C:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{1^2 + C},$$

$$C = 2.$$

Por tanto, la solución para $dy/dx = xy^2$, tal que $y(1) = -\frac{2}{3}$ es

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2}. \tag{5}$$

Llamamos a la ecuación (5) una **solución particular** de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1 Separación de variables

Resolver $y' = -\dfrac{y}{x}$ si $x, y > 0$.

Principios en práctica 1

Separación de variables

Para un líquido claro, la intensidad de la luz disminuye a una razón de $\frac{dI}{dx} = -kI$, en donde I es la intensidad de la luz y x es el número de pies debajo de la superficie del líquido. Si $k = 0.0085$ y $I = I_0$, cuando $x = 0$, determine I como una función de x.

Solución: al escribir y' como dy/dx, separar variables e integrar, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx,$$

$$\ln|y| = C_1 - \ln|x|.$$

Como $x, y > 0$, podemos omitir las barras de valor absoluto:

$$\ln y = C_1 - \ln x. \tag{6}$$

Para despejar a y, convertimos la ecuación (6) a una forma exponencial:

$$y = e^{C_1 - \ln x}.$$

Por lo que,

$$y = e^{C_1}e^{-\ln x} = \frac{e^{C_1}}{e^{\ln x}}.$$

Reemplazando e^{C_1} por C, donde $C > 0$, y al escribir $e^{\ln x}$ como x, obtenemos

$$y = \frac{C}{x}, \quad C, x > 0.$$

En el ejemplo 1, note que la ecuación (6) expresa la solución de manera implícita, mientras que la ecuación final ($y = C/x$) nos da la solución para y en forma explícita, en términos de x. Usted encontrará que las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales suelen expresarse en forma implícita por conveniencia (o necesidad, debido a la dificultad de obtener una forma explícita).

Crecimiento y decaimiento exponenciales

En la sección 9.3 desarrollamos el concepto del interés compuesto en forma continua. Veamos ahora este tema desde un punto de vista diferente que implica una ecuación diferencial. Supongamos una inversión de P dólares a una tasa anual r compuesta n veces por año. Sea la función $S = S(t)$ la cantidad compuesta S (o la cantidad total presente) después de t años, contados desde la fecha de inversión inicial. Entonces, el capital inicial es $S(0) = P$. Además, como se tienen n periodos de interés por año, cada periodo tiene una duración de $1/n$ años, lo que denotaremos por Δt. Al final del primer periodo, el interés acumulado se suma al capital y la suma actúa como el capital para el segundo periodo, y así sucesivamente. Por tanto, si el principio de un periodo de interés ocurre en el tiempo t, entonces el incremento en la cantidad presente al final de un periodo Δt será $S(t + \Delta t) - S(t)$, que escribimos como ΔS. Este incremento, ΔS, es también el interés ganado en el periodo. En forma equivalente, el interés ganado es el capital por la tasa y por el tiempo:

$$\Delta S = S \cdot r \cdot \Delta t.$$

Dividiendo ambos miembros entre Δt, obtenemos

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = rS. \tag{7}$$

Cuando $\Delta t \to 0$, entonces $n = \dfrac{1}{\Delta t} \to \infty$ y, en consecuencia, el interés es *compuesto continuamente;* esto es, el capital está sometido a un crecimiento continuo en cada instante. Sin embargo, cuando $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta S/\Delta t \to dS/dt$ y la ecuación (7) toma la forma

$$\frac{dS}{dt} = rS. \tag{8}$$

Esta ecuación diferencial significa que *cuando el interés es compuesto en forma continua, la razón de cambio de la cantidad de dinero presente en el tiempo t es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t.* La constante de proporcionalidad es r.

Para determinar la función S, resolvemos la ecuación diferencial (8) por el método de separación de variables:

$$\frac{dS}{dt} = rS,$$

$$\frac{dS}{S} = r\,dt,$$

$$\int \frac{1}{S}\,dS = \int r\,dt,$$

$$\ln|S| = rt + C_1.$$

Suponemos que $S > 0$, por lo que $\ln|S| = \ln S$. Entonces,

$$\ln S = rt + C_1.$$

Para obtener una forma explícita, podemos despejar S convirtiendo la ecuación a una forma exponencial.

$$S = e^{rt+C_1} = e^{C_1}e^{rt}$$

Por simplicidad e^{C_1} puede reemplazarse por C para obtener la solución general

$$S = Ce^{rt}.$$

La condición $S(0) = P$ nos permite encontrar el valor de C:

$$P = Ce^{r(0)} = C \cdot 1.$$

Por tanto, $C = P$, y entonces

$$S = Pe^{rt}. \tag{9}$$

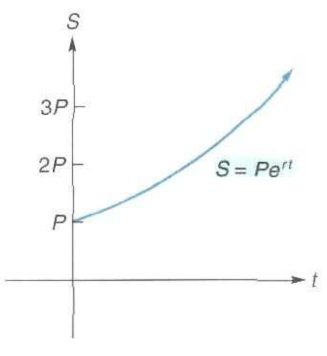


FIGURA 15.5 Capitalización continua.

La ecuación (9) da el valor total después de t años de una inversión inicial de P dólares compuesta continuamente a una tasa anual r (véase la fig. 15.5).

En nuestro análisis del interés compuesto, vimos en la ecuación (8) que la *razón de cambio en la cantidad presente era proporcional a la cantidad presente.* Hay muchas cantidades naturales, tales como la población, cuya tasa de crecimiento o decaimiento en cualquier tiempo se considera proporcional a la magnitud de la cantidad presente. Si N denota la magnitud de tal cantidad en el tiempo t, entonces esta razón de crecimiento significa que

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

donde k es una constante. Si separamos variables y despejamos N, como lo hicimos para la ecuación (8), obtenemos

$$N = N_0e^{kt}, \tag{10}$$

donde N_0 es una constante. En particular, si $t = 0$, entonces $N = N_0e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 es simplemente $N(0)$. Debido a la forma de la ecuación (10), decimos que la cantidad sigue una **ley exponencial de crecimiento** si k es positiva y una **ley de decaimiento exponencial** si k es negativa.

EJEMPLO 2 Crecimiento de la población

En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo es proporcional al tamaño de la población. Si la población era de 125,000 habitantes en 1970 y de 140,000 en 1990, ¿cuál es la población esperada en el año 2010?

Solución: sea N el tamaño de la población en el tiempo t. Como es aplicable la ley de crecimiento exponencial,

$$N = N_0e^{kt}.$$

Para encontrar la población en el año 2010, primero debemos encontrar la ley particular del crecimiento implicada, determinando los valores de N_0 y k. Sea el año 1970 el correspondiente a $t = 0$. Entonces $t = 20$ en 1990 y $t = 40$ en 2010. Tenemos,

$$N_0 = N(0) = 125{,}000.$$

Así,

$$N = 125{,}000e^{kt}.$$

Para encontrar k, usamos la condición de que $N = 140{,}000$ cuando $t = 20$:

$$140{,}000 = 125{,}000e^{20k}.$$

Así,

$$e^{20k} = \frac{140{,}000}{125{,}000} = 1.12,$$

$$20k = \ln(1.12) \qquad \text{(forma logarítmica)},$$

$$k = \tfrac{1}{20}\ln(1.12).$$

Por tanto, la ley de crecimiento es

$$N = 125{,}000e^{(t/20)\ln 1.12} \tag{11}$$
$$= 125{,}000[e^{\ln 1.12}]^{t/20},$$

o

$$N = 125{,}000(1.12)^{t/20}. \tag{12}$$

Haciendo $t = 40$, obtenemos la población esperada para 2010:

$$N = 125{,}000(1.12)^2 = 156{,}800.$$

Observamos que podemos escribir la ecuación (11) en forma diferente a la de la ecuación (12). Como $\ln(1.12)/20 \approx 0.0057$, tenemos

$$N \approx 125{,}000e^{0.0057t}.$$

En el capítulo 5, analizamos el decaimiento radiactivo. Consideraremos ahora ese tema desde el punto de vista de una ecuación diferencial. La razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera se sabe que es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decaimiento está dado por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{13}$$

La cantidad positiva λ (letra griega "lambda") se llama **constante de decaimiento,** y el signo menos indica que N decrece cuando t crece. Tenemos así un decaimiento exponencial. De acuerdo con la ecuación (10), la solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{14}$$

Si $t = 0$, entonces $N = N_0 \cdot 1 = N_0$, por lo que, N_0 representa la cantidad de sustancia radiactiva presente cuando $t = 0$.

El tiempo que se requiere para que una sustancia radiactiva se reduzca a la mitad se llama **vida media** de la sustancia. En la sección 5.2 vimos que la vida media está dada por

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}. \tag{15}$$

Note que la vida media depende de λ. En el capítulo 5, la figura 5.13 muestra la gráfica del decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 3 Determinación de la constante de decaimiento y de la vida media

Si después de 50 días queda el 60% de una sustancia radiactiva, encontrar la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

Solución: de la ecuación (14),

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde N_0 es la cantidad del elemento presente en $t = 0$. Cuando $t = 50$, $N = 0.6N_0$ y tenemos

$$\begin{aligned} 0.6N_0 &= N_0 e^{-50\lambda}, \\ 0.6 &= e^{-50\lambda}, \\ -50\lambda &= \ln(0.6) && \text{(forma logarítmica),} \\ \lambda &= -\frac{\ln(0.6)}{50} \approx 0.01022. \end{aligned}$$

Así, $N \approx N_0 e^{-0.01022t}$. La vida media, de la ecuación (15), es

$$\frac{\ln 2}{\lambda} \approx 67.85 \text{ días.}$$

La radiactividad es útil en el fechado de restos de plantas fósiles y restos arqueológicos de origen orgánico. Las plantas y otros organismos vivos contienen una pequeña cantidad de carbono 14 radiactivo (^{14}C), además del carbono ordinario (^{12}C). Los átomos de ^{12}C son estables, pero los de ^{14}C decaen exponencialmente. Sin embargo, el ^{14}C se forma en la atmósfera debido al efecto de los rayos cósmicos. Este ^{14}C es absorbido por las plantas durante el proceso de fotosíntesis y reemplaza al que ha decaído. En consecuencia, la razón de átomos de ^{14}C a ^{12}C se considera constante durante un periodo largo. Cuando una planta muere, deja de absorber ^{14}C y los átomos restantes de ^{14}C decaen. Comparando la proporción de ^{14}C a ^{12}C en una planta fósil con la de una planta actual, podemos estimar la edad del fósil. La vida media del ^{14}C es aproximadamente de 5600 años. Así, por ejemplo, si se encuentra que un fósil tiene una relación ^{14}C a ^{12}C que es la mitad de la de una sustancia similar que existe en la actualidad, estimaríamos que el fósil tiene 5600 años de antigüedad.

EJEMPLO 4 Determinación de la edad de una herramienta antigua

Se encontró que una herramienta de madera hallada en una excavación en el Medio Oriente tiene una relación de ^{14}C a ^{12}C igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual. Estimar la edad de la herramienta al ciento de años más cercano.

Solución: sea N la cantidad de ^{14}C presente en la madera t años después de que se fabricó la herramienta. Entonces $N = N_0e^{-\lambda t}$, donde N_0 es la cantidad de ^{14}C cuando $t = 0$. Como la relación de ^{14}C a ^{12}C es igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual, esto significa que debemos encontrar el valor de t para el cual $N = 0.6N_0$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} 0.6N_0 &= N_0e^{-\lambda t}, \\ 0.6 &= e^{-\lambda t}, \\ -\lambda t &= \ln(0.6) \qquad \text{(forma logarítmica)}, \\ t &= -\frac{1}{\lambda}\ln(0.6). \end{aligned}$$

De la ecuación (15), la vida media es $(\ln 2)/\lambda$, que es igual a 5600, por lo que, $\lambda = (\ln 2)/5600$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{(\ln 2)/5600}\ln(0.6) \\ &= -\frac{5600\ln(0.6)}{\ln 2} \\ &\approx 4100 \text{ años.} \end{aligned}$$

Ejercicio 15.6

En los problemas del 1 al 8 resuelva las ecuaciones diferenciales.

1. $y' = 2xy^2$.
2. $y' = x^3y^3$.
3. $\dfrac{dy}{dx} - 3x\sqrt{x^2+1} = 0$.
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$.
5. $\dfrac{dy}{dx} = y,\ y > 0$.
6. $y' = e^xy^2$.
7. $y' = \dfrac{y}{x},\ x, y > 0$.
8. $\dfrac{dy}{dx} + xe^x = 0$.

En los problemas del 9 al 18 resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas.

9. $y' = \dfrac{1}{y}$; $\quad y > 0,\ y(2) = 2$.

10. $y' = e^{x-y}$; $\quad y(0) = 0$. [*Sugerencia*: $e^{x-y} = e^x/e^y$.]

11. $e^yy' - x^2 = 0$; $\quad y = 0$ cuando $x = 0$.

12. $x^2y' + \dfrac{1}{y^2} = 0$; $\quad y(1) = 2$.

13. $(4x^2+3)^2y' - 4xy^2 = 0$; $\quad y(0) = \frac{3}{2}$.

14. $y' + x^2y = 0$; $\quad y > 0,\ y = 1$ cuando $x = 0$.

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$; $\quad y > 0,\ y(1) = \sqrt{8}$.

16. $2y(x^3+2x+1)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{\sqrt{y^2+9}}$; $\quad y(0) = 0$.

17. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xe^{-y}}{\sqrt{x^2+3}}$; $\quad y(1) = 0$.

18. $x(y^3+4)^{3/2}\,dx = 3e^{x^2}y^2\,dy$; $\quad y(0) = 0$.

19. Costo Encuentre la función de costo $c = f(q)$ de un fabricante, dado que

$$(q+1)^2\frac{dc}{dq} = cq$$

y que el costo fijo es e.

20. Encuentre $f(2)$, dado que $f(1) = 0$ y que $y = f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}.$$

21. Circulación de dinero Un país tiene 900 millones de dólares de papel moneda en circulación. Cada semana, 45 millones se llevan a depositar a los bancos y la misma cantidad es pagada. El gobierno decide reimprimir papel moneda nuevo; siempre que el papel moneda viejo llega a los bancos, es destruido y reemplazado por nuevo. Sea y la cantidad de papel viejo (en millones de dólares) en circulación en el tiempo t (en semanas). Entonces y satisface la relación

$$\frac{dy}{dt} = -0.05y.$$

¿Qué tiempo se requerirá para que el 90% del papel moneda en circulación quede reemplazado por papel nuevo? Redondee su respuesta a la semana más cercana. [*Sugerencia:* si el 90% del papel es nuevo, entonces y es 10% de 900.]

22. Ingreso marginal y demanda Suponga que la función de ingreso marginal de un monopolista está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dq} = (50 - 4q)e^{-r/5}.$$

Encuentre la ecuación de demanda para el producto del monopolista.

23. Crecimiento de la población En cierta ciudad, la población en cualquier tiempo cambia a una razón proporcional a la población existente. Si en 1985 había 40,000 habitantes y en 1995 había 48,000, encuentre una ecuación para la población en el tiempo t, donde t es el número de años contados a partir de 1985. Escriba su respuesta en dos formas, una de ellas que contenga e. Puede suponer que $\ln 1.2 = 0.18$. ¿Cuál es la población esperada en el año 2005?

24. Crecimiento de la población La población de un pueblo se incrementa por crecimiento natural a una razón proporcional al número N de personas presentes. Si la población en el tiempo $t = 0$ es de 50,000, encuentre dos expresiones para la población N, t años después, si la población se duplica en 50 años. Suponga que $\ln 2 = 0.69$. Encuentre también N para $t = 100$.

25. Crecimiento de la población Suponga que la población del mundo en 1930 era de 2000 millones y que en 1960 era de 3000 millones de habitantes. Si se supone una ley de crecimiento exponencial, ¿cuál es la población esperada en el año 2010? Proporcione su respuesta en términos de e.

26. Crecimiento de la población Si se supone crecimiento exponencial, ¿en cuántos años aproximadamente se triplicará una población, si se duplica en 50 años? [*Sugerencia:* sea N_0 la población en $t = 0$.]

27. Radiactividad Si después de 100 segundos queda el 30% de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

28. Radiactividad Si después de 100 segundos una muestra de radiactividad ha *decaído* el 30% de la cantidad inicial, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

29. Fechado con carbono Se encontró que un rollo de papiro egipcio tiene una relación ^{14}C a ^{12}C igual a 0.7 de la relación correspondiente a la de un material similar actual. Estime la edad del rollo al ciento de años más cercano.

30. Fechado con carbono Un espécimen arqueológico recientemente descubierto tiene una relación ^{14}C a ^{12}C igual a 0.2 de la relación correspondiente a la de un material orgánico similar actual. Estime la edad del espécimen al ciento de años más cercano.

31. Crecimiento de la población Suponga que una población tiene un crecimiento exponencial dado por $dN/dt = kN$ para $t \geq t_0$. También suponga que $N = N_0$ cuando $t = t_0$. Encuentre el tamaño, N, de la población en el tiempo t.

32. Radiactividad El radón tiene una vida media de 3.82 días. (a) Encuentre la constante de decaimiento en términos de ln 2. (b) ¿Qué fracción de la cantidad original queda después de $2(3.82) = 7.64$ días?

33. Radiactividad Los isótopos radiactivos se usan en los diagnósticos médicos como indicadores para determinar las anormalidades que puedan existir en un órgano. Por ejemplo, si se ingiere yodo radiactivo, éste es absorbido después de cierto tiempo por la glándula tiroides. Usando un detector, puede medirse la razón a la que el yodo se absorbe y determinarse si ésta es la razón normal. Suponga que se va a usar tecnecio-99m radiactivo que tiene una vida media de 6 horas en un estudio de cerebro dentro de 2 horas. ¿Cuál debe ser su actividad ahora, si su actividad cuando se use debe ser de 10 unidades? Dé su respuesta con un decimal. [*Sugerencia:* en la ecuación (14), haga N = actividad dentro de t horas y N_0 = actividad ahora.]

34. Radiactividad Una sustancia radiactiva que tiene una vida media de 8 días va a ser implantada temporalmente en un paciente de un hospital hasta que queden 3/5 partes de la cantidad originalmente presente. ¿Cuánto tiempo permanecerá la sustancia implantada en el paciente?

35. Ecología En un bosque ocurre el depósito natural de basura, tal como hojas y ramas caídas, animales muertos, etc.[8] Sea $A(t)$ la cantidad de basura presente en el tiempo t, donde $A(t)$ se expresa en gramos por metro cuadrado y t está en años. Suponga que no hay basura en $t = 0$. Así, $A(0) = 0$. Suponga que

a. La basura cae al suelo continuamente a razón constante de 200 gramos por metro cuadrado cada año.

b. La basura acumulada se descompone continuamente a razón del 50% de la cantidad presente por año (que es $0.50A$).

La diferencia de las dos tasas es la razón de cambio de la cantidad presente de basura con respecto al tiempo:

$$\begin{pmatrix}\text{tasa de cambio de}\\ \text{la basura presente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{tasa de caída}\\ \text{al suelo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de}\\ \text{decomposición}\end{pmatrix}.$$

[8]R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = 200 - 0.50A.$$

Despeje A. Al gramo más cercano, determine la cantidad de basura por metro cuadrado después de un año.

. **Utilidad y publicidad** Una empresa determina que la razón de cambio de la utilidad neta mensual P en función del gasto publicitario mensual x, es proporcional a la diferencia entre una cantidad fija, \$110,000 y P; esto es, dP/dx es proporcional a \$110,000 $- P$. Además, si no se gasta en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$10,000; si se gastan \$1000 en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$60,000. ¿Cuál sería la utilidad neta mensual si se gastaran \$2000 en publicidad cada mes?

37. **Valor de un automóvil** El valor de cierto modelo de automóvil se deprecia un 30% en el primer año después de su compra. La razón de la depreciación posterior es proporcional a su valor. Suponga que un automóvil se compró nuevo el 1 de julio de 1999 en \$30,000, y se valuó en \$18,900 el 1 de enero de 2001.

   a. Determine una fórmula que exprese el valor V del automóvil en términos de t, el número de años después del 1 de julio de 2000.

   b. Use la fórmula en la parte (a) para determinar el año y mes en que el automóvil tiene un valor de exactamente \$14,000.

)BJETIVO Desarrollar la función logística como una solución de una ecuación diferencial. Modelar el esparcimiento de un rumor. Analizar y aplicar la ley de enfriamiento de Newton.

15.7 MÁS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Crecimiento logístico

En la sección anterior encontramos que si el número N de individuos en una población en el tiempo t sigue una ley de crecimiento exponencial, entonces $N = N_0e^{kt}$ donde $k > 0$ y N_0 es la población cuando $t = 0$. Esta ley supone que en el tiempo t la razón de crecimiento dN/dt de la población es proporcional al número de individuos en la población. Esto es, $dN/dt = kN$.

Bajo crecimiento exponencial, una población llegaría a ser infinita con el paso del tiempo. Sin embargo, en realidad, cuando una población llega a ser suficientemente grande existen factores ambientales que hacen más lenta la razón de crecimiento. Ejemplos son la disponibilidad de alimentos, los depredadores, la población en exceso, etc. Esos factores ocasionan que dN/dt decrezca finalmente. Es razonable suponer que el tamaño de la población está limitado a cierto número máximo M, donde $0 < N < M$ y que cuando $N \to M$, entonces $dN/dt \to 0$ y el tamaño de la población tiende a estabilizarse.

En resumen, queremos un modelo de población que tenga inicialmente crecimiento exponencial, pero que también incluya los efectos de la resistencia ambiental a grandes crecimientos de la población. Tal modelo se obtiene multiplicando el miembro derecho de $dN/dt = kN$ por el factor $(M - N)/M$:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{M - N}{M}\right).$$

Observe que si N es pequeño, entonces $(M - N)/M$ es cercano a 1 y tenemos un crecimiento que es aproximadamente exponencial. Cuando $N \to M$, entonces $M - N \to 0$ y $dN/dt \to 0$, como lo queremos en nuestro modelo. Como k/M es una constante, podemos reemplazarla por K. Así,

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N). \tag{1}$$

Esto establece que la razón de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y la diferencia entre el tamaño máximo y el tamaño de la población actual. Podemos determinar N en la ecuación diferencial (1) con el método de separación de variables:

$$\frac{dN}{N(M - N)} = K\,dt,$$

$$\int \frac{1}{N(M - N)}\,dN = \int K\,dt. \tag{2}$$

La integral en el miembro izquierdo puede encontrarse usando la fórmula 5 de la tabla de integrales del apéndice C. Así, la ecuación (2) conduce a

$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = Kt + C,$$

o

$$\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = MKt + MC.$$

Como $N > 0$ y $M - N > 0$, podemos escribir

$$\ln\frac{N}{M-N} = MKt + MC.$$

En forma exponencial, tenemos

$$\frac{N}{M-N} = e^{MKt+MC} = e^{MKt}e^{MC}.$$

Reemplazando la constante positiva e^{MC} *por* A y despejando N se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{N}{M-N} &= Ae^{MKt},\\
N &= (M-N)Ae^{MKt},\\
N &= MAe^{MKt} - NAe^{MKt},\\
NAe^{MKt} + N &= MAe^{MKt},\\
N(Ae^{MKt}+1) &= MAe^{MKt},\\
N &= \frac{MAe^{MKt}}{Ae^{MKt}+1}.
\end{aligned}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre Ae^{MKt}, tenemos

$$N = \frac{M}{1+\frac{1}{Ae^{MKt}}} = \frac{M}{1+\frac{1}{A}e^{-MKt}}.$$

Al reemplazar $1/A$ por b y MK por c se obtiene la llamada *función logística:*

Función logística

La función definida por

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}} \tag{3}$$

se llama **función logística** o **función logística de Verhulst-Pearl.**

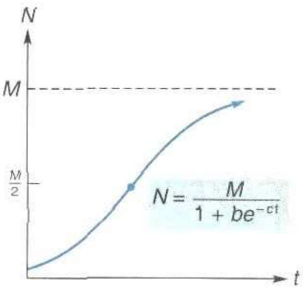


FIGURA 15.6 Curva logística.

La gráfica de la ecuación (3), llamada *curva logística*, tiene forma de S, como se muestra en la figura 15.6. Observe que la recta $N = M$ es una asíntota horizontal; esto es,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M}{1+be^{-ct}} = \frac{M}{1+b(0)} = M.$$

Además, de la ecuación (1), la razón de crecimiento es

$$KN(M - N),$$

que puede considerarse como una función de N. Para encontrar cuándo ocurre la máxima razón de crecimiento, resolvemos $\frac{d}{dN}[KN(M - N)] = 0$ para N:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dN}[KN(M - N)] &= \frac{d}{dN}[K(MN - N^2)]\\ &= K[M - 2N] = 0.\end{aligned}$$

Así, $N = M/2$. En otras palabras, la razón de crecimiento aumenta hasta que el tamaño de la población es $M/2$ y después decrece. La razón máxima de crecimiento ocurre cuando $N = M/2$ y corresponde a un punto de inflexión en la gráfica de N. Para encontrar el valor de t en que ocurre esto, sustituimos $M/2$ por N en la ecuación (3) y despejamos t:

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} &= \frac{M}{1 + be^{-ct}},\\ 1 + be^{-ct} &= 2,\\ e^{-ct} &= \frac{1}{b},\\ e^{ct} &= b,\\ ct &= \ln b \qquad \text{(forma logarítmica)},\\ t &= \frac{\ln b}{c}.\end{aligned}$$

Por tanto, la razón máxima de crecimiento ocurre en el punto $([\ln b]/c, M/2)$.

Observamos que en la ecuación (3) podemos reemplazar e^{-c} por C y entonces la función logística tiene la siguiente forma:

Forma alternativa de la función logística

$$N = \frac{M}{1 + bC^t}.$$

EJEMPLO 1 Crecimiento logístico de la membresía de un club

Supóngase que el número máximo de socios en un club nuevo será de 800 personas debido a las limitaciones de espacio. Hace un año, el número inicial de socios era de 50, pero ahora es de 200. Si el número de socios crece como una función logística, ¿cuántos socios habrá dentro de 3 años?

Solución: sea N el número de socios inscritos t años después de la formación del club. Entonces, de la ecuación (3).

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

Aquí, $M = 800$ y cuando $t = 0$, tenemos $N = 50$. De este modo,

$$50 = \frac{800}{1 + b},$$

$$1 + b = \frac{800}{50} = 16,$$
$$b = 15.$$

Así,

$$N = \frac{800}{1 + 15e^{-ct}}. \tag{4}$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 200$, así tenemos

$$200 = \frac{800}{1 + 15e^{-c}},$$
$$1 + 15e^{-c} = \frac{800}{200} = 4,$$
$$e^{-c} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Por consiguiente, $c = -\ln \frac{1}{5} = \ln 5$. En vez de sustituir este valor de c en la ecuación (4), es más conveniente sustituir ahí el valor de e^{-c}:

$$N = \frac{800}{1 + 15(\frac{1}{5})^t}.$$

Dentro de tres años, a partir de ahora, t será 4. Por tanto,

$$N = \frac{800}{1 + 15(\frac{1}{5})^4} \approx 781$$

Modelado de la difusión de un rumor

Consideremos ahora un modelo simplificado de cómo se difunde un rumor en una población del tamaño M. Una situación similar sería la difusión de una epidemia o de una nueva moda.

Sea $N = N(t)$ el número de personas que conocen el rumor en el tiempo t. Supondremos que aquellos que conocen el rumor lo difunden en forma aleatoria entre la población, y que quienes lo oyen se convierten en difusores del mismo. Más aún, supondremos que cada conocedor del rumor lo comunica a k individuos por unidad de tiempo (algunos de esos individuos pueden conocer ya el rumor). Buscamos una expresión para la razón de crecimiento de conocedores del rumor. En una unidad de tiempo, casi cada una de N personas comunicarán el rumor a k personas. Así, el número total de personas que oyen el rumor en un tiempo unitario es (aproximadamente) Nk. Sin embargo, estamos interesados sólo en *nuevos* conocedores. La proporción de la población que no conoce el rumor es $(M - N)/M$. De aquí que el número total de nuevos conocedores del rumor es

$$Nk\left(\frac{M - N}{M}\right),$$

que puede escribirse $(k/M)N(M - N)$. Por tanto,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k}{M}N(M - N)$$
$$= KN(M - N), \quad \text{donde } K = \frac{k}{M}.$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (1), por lo que su solución, de acuerdo con la ecuación (3), es una *función logística:*

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

EJEMPLO 2 Rumor en un campus

En una gran universidad de 45,000 estudiantes, una estudiante de sociología está investigando la difusión de un rumor en el campus. Cuando comienza su investigación, ella determina que 300 estudiantes conocen el rumor. Después de una semana, determina que 900 lo conocen. Estimar el número de estudiantes que lo conocen después de 4 semanas de comenzada la investigación, suponiendo un crecimiento logístico. Dar la respuesta al millar más cercano.

Solución: sea N el número de estudiantes que conocen el rumor t semanas después de que comienza la investigación. Entonces,

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

Aquí, el tamaño de la población M es de 45,000 y cuando $t = 0$, $N = 300$. Así, tenemos

$$300 = \frac{45{,}000}{1 + b},$$

$$1 + b = \frac{45{,}000}{300} = 150,$$

$$b = 149.$$

Por tanto,

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149e^{-ct}}.$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 900$. De aquí que

$$900 = \frac{45{,}000}{1 + 149e^{-c}},$$

$$1 + 149e^{-c} = \frac{45{,}000}{900} = 50.$$

Por tanto, $e^{-c} = \frac{49}{149}$ por lo que

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149(\frac{49}{149})^t}.$$

Cuando $t = 4$,

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149(\frac{49}{149})^4} \approx 16{,}000.$$

Después de 4 semanas, aproximadamente 16,000 estudiantes conocerán el rumor.

Ley del enfriamiento de Newton

Concluimos esta sección con una interesante aplicación de una ecuación diferencial. Si se comete un homicidio, la temperatura del cuerpo de la víctima disminuirá gradualmente de 37°C (temperatura normal del cuerpo) a la temperatura ambiente. En general, la temperatura del cuerpo en proceso de enfriamiento cambia a una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Este enunciado se conoce como **ley de enfriamiento de Newton.** Así, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y la del medio ambiente es a, entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a),$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Por tanto, la ley de enfriamiento de Newton es una ecuación diferencial. Puede aplicarse para determinar el tiempo en que se cometió un homicidio, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Tiempo del crimen

Un rico industrial fue encontrado asesinado en su casa. La policía llegó a la escena a las 11:00 P.M. *La temperatura del cadáver en ese momento era de* 31°C *y una hora después era de* 30°C. *La temperatura de la habitación en que se encontró el cadáver era de* 22°C. *Estime la hora en que ocurrió el asesinato.*

Solución: sean t el número de horas después de que fue descubierto el cadáver y $T(t)$ la temperatura (en grados Celsius) de éste en el tiempo t. Queremos encontrar el valor de t para el cual $T = 37$ (temperatura normal del cuerpo humano). Este valor de t será, por supuesto, negativo. Por la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a),$$

donde k es una constante y a (la temperatura del ambiente) es 22. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22).$$

Separando variables, tenemos

$$\frac{dT}{T - 22} = k\,dt,$$

$$\int \frac{dT}{T - 22} = \int k\,dt,$$

$$\ln|T - 22| = kt + C.$$

Ya que $T - 22 > 0$,

$$\ln(T - 22) = kt + C.$$

Cuando $t = 0$, entonces $T = 31$. Por tanto,

$$\ln(31 - 22) = k \cdot 0 + C,$$

$$C = \ln 9.$$

De aquí que,

$$\ln(T - 22) = kt + \ln 9,$$

$$\ln(T - 22) - \ln 9 = kt,$$

$$\ln \frac{T - 22}{9} = kt \qquad \left(\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}\right).$$

Cuando $t = 1$, entonces $T = 30$, por lo que

$$\ln \frac{30 - 22}{9} = k \cdot 1,$$

$$k = \ln \frac{8}{9}.$$

Por tanto,

$$\ln \frac{T - 22}{9} = t \ln \frac{8}{9}.$$

Ahora encontramos T cuando $T = 37$:

$$\ln \frac{37 - 22}{9} = t \ln \frac{8}{9},$$

$$t = \frac{\ln(15/9)}{\ln(8/9)} \approx -4.34.$$

De acuerdo con esto, el crimen ocurrió aproximadamente 4.34 horas *antes* del tiempo en que fue descubierto el cadáver (11:00 P.M.). Como 4.34 horas son (aproximadamente) 4 horas 20 minutos, el industrial fue asesinado alrededor de las 6:40 P.M.

Ejercicio 15.7

1. **Población** La población de una ciudad sigue un crecimiento logístico y está limitada a 80,000. Si la población en 1995 era de 40,000 y en 2000 de 50,000, ¿cuál será la población en el año 2005? Dé su respuesta al ciento más cercano.

2. **Producción** Una empresa cree que la producción de cierto artículo con sus instalaciones actuales tendrá un crecimiento logístico. Actualmente se producen 200 unidades diarias y esta cantidad crecerá a 300 por día en un año. Si la producción está limitada a 500 unidades por día, ¿cuál es la producción diaria prevista para dentro de 2 años? Dé su respuesta a la unidad más cercana.

3. **Difusión de un rumor** En un país de 6 millones de habitantes, el primer ministro sufre un ataque cardiaco, que el gobierno no publica oficialmente. Al principio, 100 personas del gobierno saben del ataque, pero están difundiendo esta información como un rumor. Al final de la semana, 10,000 personas conocen el rumor. Suponiendo un crecimiento logístico, encuentre cuánta gente conocerá el rumor después de 2 semanas. Dé su respuesta al millar más cercano.

4. **Difusión de una moda** Una moda nueva ha llegado a un campus de 30,000 estudiantes. El periódico de la universidad piensa que sus lectores estarían interesados en un artículo sobre la nueva moda. A un reportero se le encarga el artículo cuando el número de estudiantes que la han adoptado es de 400. Una semana después la están practicando 1200 estudiantes. Suponiendo un crecimiento logístico, encuentre una fórmula para el número N que seguirán la moda t semanas después del encargo al reportero.

5. **Brote de gripe** En una ciudad de 100,000 habitantes ocurre un brote de gripe. Cuando el departamento de salud comienza a registrar casos, hay sólo 500 personas infectadas. Una semana después hay 1000 infectados. Suponiendo un crecimiento logístico, estime el número de personas infectadas dos semanas después de que comenzó el registro.

6. **Población** Se estima que la curva logística para la población de Estados Unidos de 1790 a 1910 es[9]

$$N = \frac{197.30}{1 + 35.60e^{-0.031186t}},$$

donde N es la población en millones y t está en años contados desde 1800. Si esta función logística fuese válida para los años después de 1910, ¿en qué año ocurriría el punto de inflexión? Redondee su respuesta a un decimal.

[9] N. Keyfitz, *Introduction to the Mathematics of Population* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968).

7. Biología En un experimento,[10] cinco *Paramecia* se colocaron en un tubo de ensayo que contenía un medio nutritivo. El número N de *Paramecia* en el tubo al final de t días está dado, en forma aproximada, por

$$N = \frac{375}{1 + e^{5.2-2.3t}}.$$

a. Demuestre que esto puede escribirse como

$$N = \frac{375}{1 + 181.27e^{-2.3t}}$$

por lo que es una función logística.

b. Encontrar $\lim_{t\to\infty} N$.

8. Biología En el estudio del crecimiento de una colonia de organismos[11] unicelulares se obtuvo la siguiente ecuación

$$N = \frac{0.2524}{e^{-2.128x} + 0.005125}, \qquad 0 \leq x \leq 5,$$

donde N es el área estimada del crecimiento en centímetros cuadrados y x es la edad de la colonia en días después de la primera observación.

a. Ponga esta ecuación en forma de una ecuación logística.

b. Encuentre el área cuando la edad de la colonia es 0.

9. Tiempo de un crimen Se cometió un homicidio y la policía descubrió el cuerpo de la víctima a las 3:15 A.M. En ese momento la temperatura del cadáver era de 32°C. Una hora después su temperatura era de 30°C. Después de consultar con la oficina meteorológica, se determinó que la temperatura en el lugar del crimen era de 10°C entre las 10:00 P.M. y las 5:00 A.M. ¿A qué hora ocurrió el homicidio?

10. Formación de enzimas Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima A se convierte en otra enzima B. La enzima B actúa como catalizador en su propia formación. Sean p la cantidad de enzima B en el tiempo t, e I la cantidad total de ambas enzimas cuando $t = 0$. Suponga que la razón de formación de B es proporcional a $p(I - p)$. *Sin usar el cálculo en forma directa*, encuentre el valor de p para el cual la razón de formación será un máximo.

11. Colecta Una ciudad pequeña decide efectuar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta \$70,000. La cantidad inicial en la colecta es de \$10,000. Con base en colectas anteriores, se determinó que t meses después del inicio de esta colecta, la razón dx/dt con que se recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada de \$70,000 y la cantidad total x en el fondo en ese momento. Después de un mes se tienen \$40,000. ¿Cuánto se tendrá después de 3 meses?

12. Tasa de nacimientos En un análisis de las propiedades inesperadas de modelos matemáticos de población, Bailey[12] considera el caso en que la tasa de nacimientos por *individuo* es proporcional al tamaño N de la población en el tiempo t. Como la tasa de crecimiento por individuo es $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, esto significa que

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = kN,$$

o

$$\frac{dN}{dt} = kN^2 \qquad (\text{sujeto a } N = N_0 \text{ en } t = 0),$$

donde $k > 0$. Demuestre que

$$N = \frac{N_0}{1 - kN_0t}.$$

Use este resultado para demostrar que

$$\lim N = \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \left(\frac{1}{kN_0}\right)^-.$$

Esto significa que en un intervalo finito de tiempo hay una cantidad infinita de crecimiento. Tal modelo podría ser útil sólo para un crecimiento rápido en un intervalo corto de tiempo.

13. Población Suponga que la razón de crecimiento de una población es proporcional a la diferencia entre algún tamaño máximo M y el número N de individuos en la población en el tiempo t. Suponga que cuando $t = 0$, el tamaño de la población es N_0. Encuentre una fórmula para N.

[10] G. F. Gause, *The Struggle for Existence* (Nueva York: Hafner Publishing Co., 1964).

[11] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publicatios, Inc., 1956).

[12] N. T. J. Bailey, *The Mathematical Approach to Biology and Medicine* (Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967).

OBJETIVO Definir y evaluar integrales impropias.

15.8 INTEGRALES IMPROPIAS

Suponga que $f(x)$ es continua y no negativa para $a \leq x < \infty$ (véase la fig. 15.7). Sabemos que la integral $\int_a^r f(x)\, dx$ es el área de la región entre la

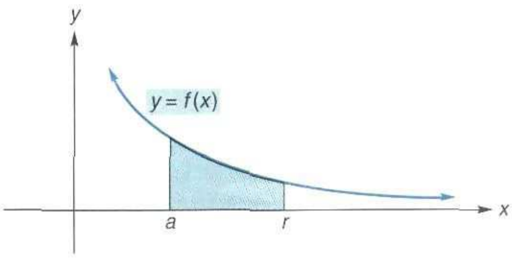


FIGURA 15.7 Área de a a r.

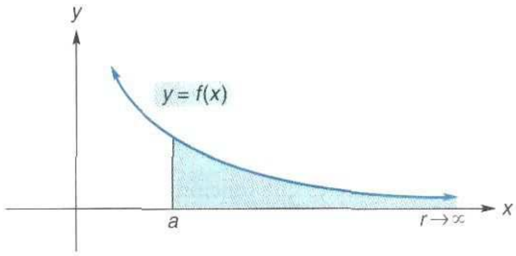


FIGURA 15.8 Área de a a r cuando $r \to \infty$.

curva $y = f(x)$ y el eje x, de $x = a$ a $x = r$. Cuando $r \to \infty$, podemos considerar que

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\, dx$$

es el área de la región no acotada y que aparece sombreada en la figura 15.8. Este límite que se abrevia como

$$\int_a^\infty f(x)\, dx, \qquad (1)$$

se llama **integral impropia.** Si este límite existe, $\int_a^\infty f(x)\, dx$ se dice que es **convergente** o que *converge* a ese límite. En este caso, la región no acotada se considera que tiene un área finita, y esta área es representada por $\int_a^\infty f(x)\, dx$. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia es **divergente** y la región no tiene un área finita.

Podemos quitar la restricción de que $f(x) \geq 0$. En general, la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\, dx$ está definida por

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\, dx.$$

Otros tipos de integrales impropias son

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx \qquad (2)$$

y

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx. \qquad (3)$$

En cada uno de los tres tipos de integrales impropias [(1), (2) y (3)], el intervalo en el cual la integral se evalúa tiene longitud infinita. La integral impropia en (2) se define como

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{b} f(x)\,dx.$$

Si este límite existe, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ se dice que es convergente. En caso contrario, se dice que es divergente. Definiremos la integral impropia en (3) después del ejemplo siguiente.

Principios en práctica 1

Integrales impropias de la forma $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

La razón a la que el cuerpo humano elimina cierta droga de su sistema, puede ser aproximado por $R(t) = 3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t}$, donde $R(t)$ está en mililitros por minuto y t es el tiempo en minutos desde que se tomó la droga. Determine $\int_{0}^{\infty} (3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t})\,dt$, la cantidad total de droga que se elimina.

EJEMPLO 1 Integrales impropias de la forma $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes. Para las que sean convergentes, calcular el valor de la integral.

a. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$

Solución:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_{1}^{r} x^{-3}\,dx = \lim_{r \to \infty} -\frac{x^{-2}}{2}\bigg|_{1}^{r}$$

$$= \lim_{r \to \infty}\left[-\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2}\right] = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge a $\frac{1}{2}$.

b. $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx.$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} e^x\,dx = \lim_{r \to -\infty} e^x\bigg|_{r}^{0}$$

$$= \lim_{r \to -\infty} (1 - e^r) = 1 - 0 = 1 \qquad (e^0 = 1).$$

(Aquí usamos el hecho de que cuando $r \to -\infty$, la gráfica de $y = e^r$ se aproxima al eje r, por lo que $e^r \to 0$). Por tanto, $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ converge a 1.

c. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Solución:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_{1}^{r} x^{-1/2}\,dx = \lim_{r \to \infty} 2x^{1/2}\bigg|_{1}^{r}$$

$$= \lim_{r \to \infty} 2(\sqrt{r} - 1) = \infty$$

Por tanto, la integral impropia diverge.

La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define en términos de integrales impropias de las formas (1) y (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Si *ambas* integrales en el miembro derecho de la ecuación (4) son convergentes, se dice entonces que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente; de otra manera es divergente.

EJEMPLO 2 Integral impropia de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Determinar si $\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx$ es convergente o divergente.

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{\infty} e^x\,dx.$$

Por el ejemplo 1(b), $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = 1$. Por otra parte,

$$\int_{0}^{\infty} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{0}^{r} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty} e^x\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty}(e^r - 1) = \infty.$$

Como $\int_{0}^{\infty} e^x\,dx$ es divergente, $\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx$ también es divergente.

EJEMPLO 3 Función de densidad

En estadística, una función se llama función de densidad si $f(x) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}, & \text{para } x \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad. Encontrar k.

Solución: escribimos la ecuación $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ como

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Como $f(x) = 0$ para $x < 0$, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$. Por lo que,

$$\int_0^{\infty} ke^{-x}\,dx = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{r} ke^{-x}\,dx = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} -ke^{-x}\Big|_0^r = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty}(-ke^{-r} + k) = 1,$$

$$0 + k = 1 \qquad \left(\lim_{r\to\infty} e^{-r} = 0\right),$$

$$k = 1.$$

Ejercicio 15.8

En los problemas del 1 al 12 determine las integrales en caso de que existan. Indique cuáles son divergentes.

1. $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx.$ **2.** $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{(2x-1)^3}\,dx.$ **3.** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx.$

4. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$ **5.** $\displaystyle\int_1^{\infty}e^{-x}\,dx.$ **6.** $\displaystyle\int_0^{\infty}(5+e^{-x})\,dx.$

7. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$ **8.** $\displaystyle\int_4^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$ **9.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{(x+1)^3}\,dx.$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\sqrt{7-x}}\,dx.$ **11.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}\,dx.$ **12.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(5-3x)\,dx.$

13. Función de densidad La función de densidad para la vida en horas x, de un componente electrónico en un aparato de medición, está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2}, & \text{para } x \geq 800, \\ 0, & \text{para } x < 800. \end{cases}$$

a. Si k satisface la condición de que $\displaystyle\int_{800}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, encuentre k.

b. La probabilidad de que el componente dure por lo menos 1200 horas está dada por $\displaystyle\int_{1200}^{\infty} f(x)\,dx$. Evalúe esta integral.

14. Función de densidad Dada la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-4x}, & \text{para } x \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Encuentre k. [*Sugerencia:* véase el ejemplo 3.]

15. Utilidades futuras Para un negocio, el valor presente de todas las utilidades futuras a un interés anual r compuesto continuamente, está dada por

$$\int_0^{\infty} p(t)e^{-rt}\,dt,$$

donde $p(t)$ es la utilidad anual en dólares en el tiempo t. Con $p(t) = 240{,}000$ y $r = 0.06$, evalúe la integral anterior.

16. Psicología En un modelo psicológico para la detección de señales,[13] la probabilidad α (letra griega "alfa") de reportar una señal cuando ninguna señal está presente está dada por

$$\alpha = \int_{x_c}^{\infty} e^{-x}\,dx, \quad x \geq 0.$$

La probabilidad β (letra griega "beta") de detectar una señal cuando una está presente es

$$\beta = \int_{x_c}^{\infty} ke^{-kx}\,dx, \; x \geq 0.$$

[13]D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

En ambas integrales x_c es una constante (llamada valor de criterio en este modelo). Encuentre α y β si $k = \frac{1}{8}$.

7. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante limitada por la curva $y = e^{-2x}$ y el eje x.

8. Economía En el análisis de la entrada de una empresa a una industria, Stigler[14] utiliza la ecuación

$$V = \pi_0 \int_0^{\infty} e^{\theta t} e^{-\rho t}\, dt,$$

donde π_0, θ (letra griega "theta"), y ρ (letra griega "rho") son constantes. Demuestre que $V = \pi_0/(\rho - \theta)$ si $\theta < \rho$.

19. Población La predicción de la tasa de crecimiento por año de la población de cierta ciudad pequeña, está dada por

$$\frac{40{,}000}{(t+2)^2},$$

donde t es el número de años, contados a partir de ahora. A largo plazo (esto es, cuando $t \to \infty$), ¿cuál es el cambio esperado en la población a partir del nivel actual?

[14]G. Stigler, *The Theory of Price*, 3ra. ed. (Nueva York: Macmillan Publishing Company, 1966), p. 344.

15.9 REPASO

érminos y símbolos importantes

ección 15.1 integración por partes

ección 15.2 función racional propia fracciones parciales

ección 15.3 valor presente de una anualidad continua monto acumulado de una anualidad continua

ección 15.4 valor promedio de una función

ección 15.5 regla del trapecio regla de Simpson

ección 15.6 ecuación diferencial de primer orden separación de variables crecimiento exponencial decaimiento exponencial constante de decaimiento vida media

ección 15.7 función logística ley de enfriamiento de Newton

ección 15.8 integral impropia, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

esumen

En ocasiones, podemos determinar con facilidad una ntegral cuya forma es $u\,dv$, donde u y v son funciones le la misma variable, aplicando la fórmula de integra-ión por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Una función racional propia puede integrarse aplicando la técnica de las fracciones parciales. Según este procedimiento, la función racional se expresa como una suma de fracciones, cada una de las cuales es más fácil de integrar que la fracción original.

Para determinar una integral que no tiene una forma familiar, a veces es posible hacerla coincidir con una fórmula de una tabla de integrales.

Sin embargo, puede ser necesario transformarla en una forma equivalente antes de poder aplicar la fórmula.

Una anualidad es una serie de pagos en un periodo. Suponga que los pagos se hacen continuamente durante T años, de manera que un pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ por año. Si la tasa anual de interés es r, compuesta de manera continua, entonces el valor presente (actual) de la anualidad continua está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt,$$

y el monto acumulado S está dado por

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt.$$

El valor promedio $\bar{f}$ de una función f en un intervalo $[a, b]$ está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Existen fórmulas que nos permiten aproximar el valor de una integral definida. Una de ellas es la regla del trapecio:

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f[a+(n-1)h] + f(b)],$$

donde $h = (b-a)/n$.

Otra fórmula es la regla de Simpson:

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f[a+(n-1)h] + f(b)],$$

donde $h = (b-a)/n$ y n es un número par.

Una ecuación que contiene la derivada de una función desconocida se llama ecuación diferencial. Si la derivada de mayor orden que se tiene es la primera, la ecuación se llama ecuación diferencial de primer orden. Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden pueden resolverse por el método de separación de variables. En ese método, considerando la derivada como un cociente de diferenciales, escribimos la ecuación de manera que cada miembro contenga sólo una variable y ninguna diferencial en el denominador. Integrando ambos miembros de la ecuación resultante se obtiene la solución. Esta solución incluye una constante de integración y se llama solución general de la ecuación diferencial. Si la función desconocida debe satisfacer la condición de que tenga un valor específico para un valor dado de la variable independiente, entonces puede encontrarse una solución particular.

Las ecuaciones diferenciales surgen cuando conocemos una relación que implica la razón de cambio de una función. Por ejemplo, si una cantidad N en el tiempo t es tal que cambia a una razón proporcional a la cantidad presente, entonces

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0e^{kt},$$

donde N_0 es la cantidad presente en $t = 0$. El valor de k puede determinarse cuando se conoce el valor de N para un valor dado de t (que no sea $t = 0$). Si k es positiva, entonces N sigue una ley exponencial de crecimiento; si k es negativa, N sigue una ley exponencial de decaimiento. Si N representa una cantidad de un elemento radiactivo, entonces

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad \text{donde } \lambda \text{ es una constante positiva.}$$

Así, N sigue una ley exponencial de decaimiento, por lo que

$$N = N_0e^{-\lambda t}.$$

La constante λ se llama constante de decaimiento. El tiempo para que la mitad del elemento decaiga es la vida media del elemento:

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}.$$

Una cantidad N puede seguir una razón de crecimiento dada por

$$\frac{dN}{dt} = KN(M-N), \text{ donde } K \text{ y } M \text{ son constantes.}$$

Al resolver esta ecuación diferencial resulta una función de la forma

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}}, \quad \text{donde } b \text{ y } c \text{ son constantes,}$$

que se llama función logística. Muchos tamaños de poblaciones pueden describirse por medio de una función logística. En este caso, M representa el límite del tamaño de la población. Una función logística se usa también en el análisis de la difusión de un rumor.

La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo que se enfría en el tiempo t, cambia a una razón proporcional a la diferencia $T - a$, donde a es la temperatura del medio ambiente. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T-a), \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

La solución de esta ecuación diferencial puede usarse, por ejemplo, para determinar la hora a la que se cometió un homicidio.

Una integral de la forma

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \quad \text{o} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

se llama integral impropia. Las primeras dos integrales se definen como sigue:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx,$$

y

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\,dx.$$

Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ (o $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$) es un número finito, decimos que la integral es convergente, de otra manera, que es divergente. La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Si ambas integrales en el miembro derecho son convergentes, se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, de otra manera, es divergente.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 22 determine las integrales.

1. $\int x \ln x\,dx.$ **2.** $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx.$ **3.** $\int_0^2 \sqrt{4x^2+9}\,dx.$ **4.** $\int \frac{16x}{3-4x}\,dx.$

5. $\int \frac{21x\,dx}{(2+3x)(3+x)}.$ **6.** $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$ **7.** $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}.$ **8.** $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}}.$ **10.** $\int x^{1/3}\ln\sqrt{x}\,dx.$ **11.** $\int \frac{9\,dx}{x^2-9}.$ **12.** $\int \frac{27x}{\sqrt{1+3x}}\,dx.$

13. $\int 49xe^{7x}\,dx.$ **14.** $\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}.$ **15.** $\int \frac{dx}{2x\ln 2x}.$ **16.** $\int \frac{dx}{x(2+x)}.$

17. $\int \frac{2x}{3+2x}\,dx.$ **18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}.$ [15]**19.** $\int \frac{5x^2+2}{x^3+x}\,dx.$

[15]**20.** $\int \frac{3x^3+5x^2+4x+3}{x^4+x^3+x^2}\,dx.$ [16]**21.** $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx.$ [16]**22.** $\int (\ln x)^3\,dx.$

23. Encuentre el valor promedio de $f(x) = 3x^2 + 2x$ en el intervalo $[2, 4]$.

24. Encuentre el valor promedio de $f(t) = te^{t^2}$ en el intervalo $[2, 5]$.

En los problemas 25 y 26 use (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson para estimar la integral con el valor dado de n. Redondee sus respuestas a tres decimales.

25. $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx,\ n = 6.$ **26.** $\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\,dx,\ n = 4.$

En los problemas 27 y 28 resuelva las ecuaciones diferenciales.

27. $y' = 3x^2y + 2xy,\quad y > 0.$ **28.** $y' - 2xe^{x^2-y+3} = 0,\quad y(0) = 3.$

En los problemas del 29 al 32 determine las integrales impropias, en caso de que existan.[17] *Indique cuáles son divergentes.*

29. $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$ **30.** $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx.$ **31.** $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx.$ **32.** $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{1-x^2}\,dx.$

33. Población La población de una ciudad en 1985 era de 100,000 habitantes y en 2000 fue de 120,000. Suponiendo un crecimiento exponencial, estime la población para el año 2015.

34. Población La población de una ciudad se duplica cada 10 años debido a un crecimiento exponencial. En cierto tiempo, la población es de 40,000 habitantes. Encuentre una expresión para el número N de personas t años después. Dé su respuesta en términos de ln 2.

35. Radiactividad Si después de 100 años queda el 95% de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y, al por ciento más cercano, dé el porcentaje de la cantidad original presente después de 200 años.

36. Medicina Suponga que q es la cantidad de penicilina en el cuerpo en el tiempo t y sea q_0 la cantidad en $t = 0$. Suponga que la razón de cambio de q con respecto a t es proporcional a q y que q decrece cuando t crece. Entonces tenemos $dq/dt = -kq$, donde $k > 0$. Despeje q. ¿Qué porcentaje de la cantidad original se tiene cuando $t = 2/k$?

[15]Revise la sección 15.2.

[16]Revise la sección 15.1.

[17]Revise la sección 15.8.

37. Biología Dos organismos se colocan inicialmente en un medio y empiezan a multiplicarse. El número N de organismos presentes después de t días se registra sobre una gráfica cuyo eje horizontal es el eje t y el eje vertical es el eje N. Se observa que los puntos caen sobre una curva logística. El número de organismos presentes después de 6 días es de 300 y después de 10 días el número tiende al límite de 450. Encuentre la ecuación logística.

38. Matrícula La matrícula de un colegio sigue un crecimiento logístico. El año pasado, la matrícula fue de 1000 y este año de 1100. Si el colegio puede recibir un máximo de 2000 estudiantes, ¿cuál es la matrícula esperada para el año próximo? Dé su respuesta al ciento más cercano.

39. Hora de un crimen Un médico forense es llamado a la escena de un crimen. Él llega a las 6:00 P.M. y encuentra que la temperatura de la víctima es de 35°C. Una hora después, la temperatura del cadáver es de 34°C. La temperatura en la habitación es de 25°C. Aproximadamente, ¿a qué hora se cometió el crimen? (Suponga que la temperatura normal del cuerpo humano es de 37°C.)

40. Anualidad Encuentre el valor actual, al dólar más cercano, de una anualidad continua con tasa anual de 5% durante 10 años, si el pago en el tiempo t es a razón anual de $f(t) = 40t$ dólares.

[18]**41. Altas de hospital** Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la proporción que ha sido dada de alta al término de t días está dada por

$$\int_0^t f(x)\, dx,$$

donde $f(x) = 0.008e^{-0.01x} + 0.00004e^{-0.0002x}$. Evalúe

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

[18]**42. Consumo de un producto** Suponga que $A(t)$ es la cantidad de un producto que se consume en el tiempo t y que A sigue una ley de crecimiento exponencial. Si $t_1 < t_2$, y en el tiempo t_2 la cantidad consumida $A(t_2)$ es el doble de la cantidad consumida en el tiempo t_1, $A(t_1)$, entonces $t_2 - t_1$, se llama periodo de duplicación. En un análisis de crecimiento exponencial, Shonle[19] establece que en condiciones de crecimiento exponencial, "la cantidad de un producto consumido durante un periodo de duplicación, es igual al total utilizado en todo el tiempo hasta el principio del periodo de duplicación en cuestión". Para justificar esta afirmación, reproduzca la argumentación de Shonle de la manera siguiente. La cantidad del producto consumido hasta el tiempo t_1 está dada por

$$\int_{-\infty}^{t_1} A_0e^{kt}\, dt, \quad k > 0,$$

donde A_0 es la cantidad cuando $t = 0$. Demuestre que esto es igual a $(A_0/k)\, e^{kt_1}$. Entonces, la cantidad consumida durante el intervalo de t_1 a t_2 es

$$\int_{t_1}^{t_2} A_0e^{kt}\, dt.$$

Demuestre que esto es igual a

$$\frac{A_0}{k}e^{kt_1}[e^{k(t_2-t_1)} - 1]. \tag{1}$$

Si el intervalo $[t_1, t_2]$ es un periodo de duplicación, entonces

$$A_0e^{kt_2} = 2A_0e^{kt_1}.$$

Demuestre que esta relación implica que $e^{k(t_2-t_1)} = 2$. Sustituya lo anterior en la ecuación (1); su resultado debe ser el mismo que el total consumido durante todo el tiempo hasta t_1, esto es $(A_0/k)e^{kt_1}$.

43. Ingreso, costo y utilidad La tabla siguiente da los valores de las funciones de ingreso marginal (IM) y de costo marginal (CM) de una empresa:

q	0	3	6	9	12	15	18
IM	25	22	18	13	7	3	0
CM	15	14	12	10	7	4	2

El costo fijo de la empresa es 25. Suponga que la utilidad es máxima cuando IM = CM y que esto ocurre cuando $q = 12$. Además, suponga que la producción de la empresa se escoge en forma tal que maximice la utilidad. Utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson en cada una de las siguientes partes.

a. Estime el ingreso total usando tantos datos como sea posible.

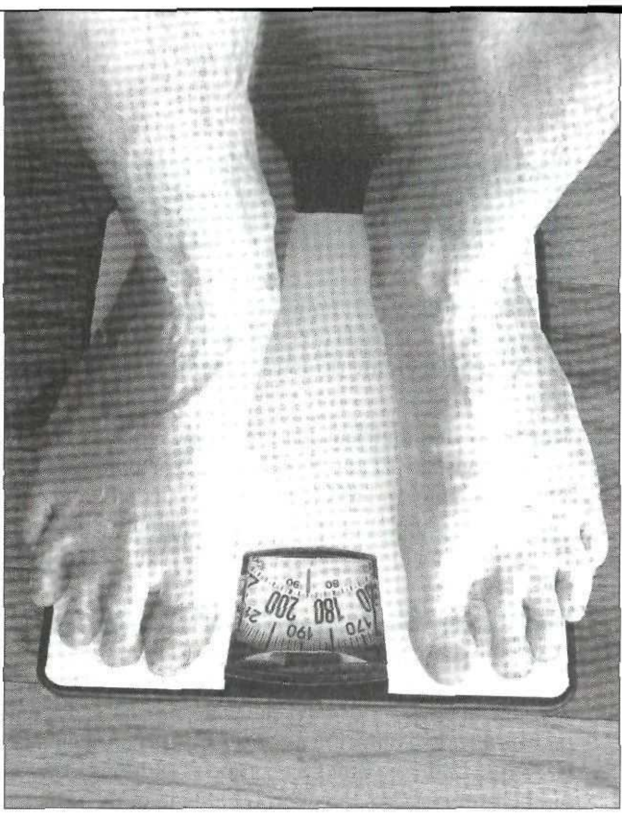
b. Estime el costo total usando los menos datos posibles.

c. Determine cómo está relacionada la utilidad máxima con el área encerrada por la línea $q = 0$ y las curvas IM y CM; use esta relación para estimar la utilidad máxima tan exactamente como sea posible.

[18]Revise la sección 15.8.

[19]J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison–Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

Aplicación práctica
Dietas



En la actualidad existe un gran interés sobre las dietas y la pérdida de peso. Algunas personas quieren perder peso para "verse bien". Otras por razones de salud o condición física. De hecho, algunas lo hacen por presión de las amistades. Con frecuencia aparecen anuncios publicitarios en televisión, periódicos y revistas sobre programas para control de peso. En muchas librerías, secciones enteras se dedican a las dietas y al control de peso.

Suponga que quiere determinar un modelo matemático para saber el peso de una persona sometida a una dieta baja en calorías.[20] El peso de una persona depende tanto de la tasa diaria de energía ingerida, digamos C calorías diarias, como de la tasa diaria de energía consumida, que típicamente tiene un valor de entre 15 y 20 calorías por día por cada libra de peso del cuerpo. El consumo depende de la edad, sexo, razón metabólica, etc. Para un valor promedio de 17.5 calorías por libra y por día, una persona que pese w libras consume $17.5w$ calorías por día. Si $C = 17.5w$, entonces su peso permanece constante; de otra manera, se tiene una ganancia o pérdida de peso según si C es mayor o menor que $17.5w$.

¿Qué tan rápido ocurrirá la ganancia o pérdida de peso? La hipótesis fisiológica más plausible es que dw/dt es proporcional al exceso neto (o déficit) $C - 15.5w$ en el número de calorías por día. Esto es,

$$\frac{dw}{dt} = K(C - 17.5w),$$

donde K es una constante. El miembro izquierdo de la ecuación tiene unidades de libras por día y $C - 17.5w$ tiene unidades de calorías por día. De aquí que las unidades de K son libras por caloría. Por tanto, se requiere conocer cuántas libras, por cada exceso o déficit de calorías, se agregan o quitan al peso. El factor de conversión dietético que generalmente se usa es que 3500 calorías equivalen a 1 libra. Así, $K = 1/3500$ libras por caloría.

Ahora, la ecuación diferencial que modela la ganancia o pérdida de peso es

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{3500}(C - 17.5w). \qquad \textbf{(1)}$$

[20]Adaptado de A. C. Segal, "A. Linear Diet Model", *The College Mathematics Journal*, 18, núm. 1 (1987), 44-45. Con permiso de la Mathematical Association of America.

Si C es constante, la ecuación es separable y su solución es

$$w(t) = \frac{C}{17.5} + \left(w_0 - \frac{C}{17.5}\right)e^{-0.005t}, \qquad \textbf{(2)}$$

donde w_0 es el peso inicial y t está en días. A la larga, note que el peso de equilibrio (esto es, el peso cuando $t \to \infty$) es $w_{eq} = C/17.5$.

Por ejemplo, si alguien que pese inicialmente 180 lb adopta una dieta de 2500 calorías por día, entonces $w_{eq} = 2500/17.5 \approx 143$ lb y la función del peso es

$$w(t) \approx 143 + (180 - 143)e^{-0.005t}$$
$$= 143 + 37e^{-0.005t}.$$

La figura 15.9 muestra la gráfica de $w(t)$. Observe cuánto tiempo toma estar cerca del peso de equilibrio de 143 libras. La vida media para el proceso es $(\ln 2)/0.005 \approx 138.6$ días, alrededor de 20 semanas (tomaría casi 584 días, es decir, 83 semanas, para llegar a las 145 libras). Esto pudiera ser la causa por la que muchas personas abandonan frustradas la dieta.

Ejercicios

1. Si una persona que pesa 200 lb adopta una dieta de 2000 calorías por día, determine a la libra más cercana el peso de equilibrio w_{eq}. Al día más cercano, ¿después de cuántos días, esta persona tendrá un peso de 175 libras?

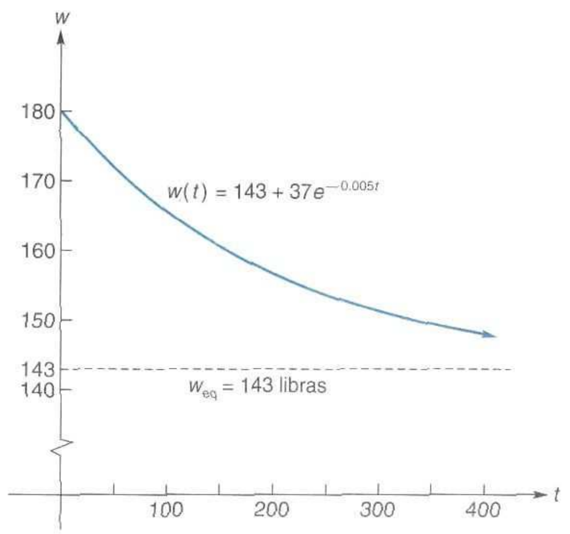


FIGURA 15.9 El peso como una función del tiempo.

2. Demuestre que la solución de la ecuación (1) está dada por la ecuación (2).
3. El peso de una persona sometida a una dieta restringida en calorías está dado, en el tiempo t, por $w(t)$. [Véase la ecuación (2).] La diferencia entre este peso y el peso de equilibrio w_{eq} es $w(t) - w_{eq}$. Suponga que se requieren d días para que la persona pierda la mitad de esta diferencia de peso. Entonces

$$w(t + d) = w(t) - \tfrac{1}{2}[w(t) - w_{\text{eq}}].$$

Despeje d de esta ecuación y demuestre que $d = \dfrac{\ln 2}{0.005}$.
4. Idealmente, la meta de la pérdida de peso debe establecerse en una consulta con un médico. Sin embargo, en general, un peso ideal está relacionado con la altura de uno por el índice de masa del cuerpo (IMC), que es igual al peso en kilogramos dividido entre la altura, en metros, al cuadrado. El rango óptimo de IMC es de 18.5 a 24.9.

   ¿Cuántas libras necesitaría perder una mujer de 5′6″ de altura y de 180 libras de peso, para estar en el rango ideal de IMC? (Sea cuidadoso con las unidades cuando calcule la respuesta.) Al día más cercano, ¿cuánto tardaría ella en perder este exceso de peso con una dieta de 2200 calorías por día?

   Mayor información sobre peso y dietas puede encontrarse en
   `www.consumer.gov/weightloss/setgoals.htm.`
5. ¿Cuáles son los pros y los contras de "romper" una dieta, la cuál tiene como base cambios drásticos en los hábitos alimenticios para lograr una pérdida de peso rápida?

CAPÍTULO 16

Cálculo de varias variables

Del capítulo 13, sabemos cómo maximizar la utilidad de una compañía, cuando tanto los ingresos como los costos están escritos como funciones de una sola cantidad, a saber, el número de unidades producidas. Pero, por supuesto, el nivel de producción en sí, está determinado por otros factores, y en general, ninguna variable sola puede representarlo.

Por ejemplo, la cantidad de petróleo que se bombea cada semana desde un campo petrolero depende del número de bombas y del número de horas que las bombas están funcionando. El número de bombas en el campo dependerá de la cantidad de capital disponible originalmente para construir las bombas, así como del tamaño y forma del campo. El número de horas que las bombas pueden ser operadas depende de la mano de obra disponible para hacer funcionar y dar mantenimiento a las bombas. Además, la cantidad de petróleo que se deseará bombear desde el campo petrolero dependerá de la demanda actual del petróleo, que está relacionada con el precio del petróleo.

La maximización de la utilidad semanal de un campo petrolero requerirá de un balance entre el número de bombas y la cantidad de tiempo que cada bomba pueda ser operada. La utilidad máxima no se alcanzará construyendo más bombas de las que puedan ser operadas ni poniendo a trabajar pocas bombas todo el tiempo.

Éste es un ejemplo del problema general de maximización de utilidades cuando la producción depende de varios factores. La solución incluye un análisis de la función de producción, que relaciona la producción con la asignación de recursos para la misma. En general, como son necesarias varias variable para describir la asignación de recursos, la asignación que da mayores utilidades no puede encontrarse por medio de la diferenciación con respecto a una sola variable, como en los capítulos anteriores. En este capítulo se estudiarán.

OBJETIVO Estudiar funciones de varias variables y calcular valores funcionales. Analizar coordenadas en tres dimensiones y hacer bosquejos de superficies simples.

16.1 Funciones de varias variables

Suponga que un fabricante hace dos productos, X y Y. Entonces, el costo total depende de los niveles de producción *tanto* de X *como* de Y. La tabla 16.1 muestra el costo total para diferentes niveles. Por ejemplo, cuando se producen 5 unidades de X y 6 de Y, el costo total c es 17. En esta situación parece natural asociar el número 17 con el *par ordenado* (5, 6):

$$(5, 6) \rightarrow 17.$$

TABLA 16.1

Número de unidades de X producidas, x	Número de unidades de Y producidas, y	Costo total de producción, c
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

El primer elemento del par ordenado, 5, representa el número de unidades de X producidas, mientras que el segundo elemento, 6, representa el número de unidades producidas de Y. Para las otras situaciones de producción tenemos

$$(5, 7) \rightarrow 19,$$

$$(6, 6) \rightarrow 18,$$

y

$$(6, 7) \rightarrow 20.$$

Esta correspondencia puede considerarse como una relación entrada-salida donde las entradas son los pares ordenados. Con cada entrada asociamos exactamente una salida. Así, la correspondencia define una función f en la que el dominio consiste en (5, 6), (5, 7), (6, 6), (6, 7) y el rango consiste en 17, 19, 18 y 20. En notación funcional,

$$f(5, 6) = 17, \quad f(5, 7) = 19,$$

$$f(6, 6) = 18, \quad f(6, 7) = 20.$$

Decimos que la lista de costo total puede describirse por $c = f(x, y)$, que es una función de las dos variables independientes x y y. La letra c es la variable dependiente.

Veamos otra función de dos variables. La ecuación

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

define a z como función de x y y:

$$z = f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

El dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales la ecuación tiene sentido, cuando el primero y segundo elementos de (x, y) se sustituyen por x y y, respectivamente, en la ecuación. Así, el dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados excepto (0, 0). Por ejemplo, para encontrar $f(2, 3)$, sustituimos $x = 2$ y $y = 3$ en la expresión $2/(x^2 + y^2)$. Obtenemos, $f(2, 3) = 2/(2^2 + 3^2) = 2/13$.

▪ *Principios en práctica 1*
Funciones de dos variables

El costo por día para la fabricación de tazas de 12 y 20 onzas para café, está dado por $c = 160 + 2x + 3y$, en donde x es el número de tazas de 12 onzas e y es el número de tazas de 20 onzas. ¿Cuál es el costo por día de la fabricación de

a. 500 tazas de 12 onzas y 700 tazas de 20 onzas?

b. 1000 tazas de 12 onzas y 750 tazas de 20 onzas?

EJEMPLO 1 Funciones de dos variables

a. $f(x, y) = \dfrac{x + 3}{y - 2}$ es una función de dos variables. Como el denominador es cero cuando $y = 2$, el dominio de f son todos los (x, y) tales que $y \neq 2$. Algunos valores de la función son

$$f(0, 3) = \frac{0 + 3}{3 - 2} = 3,$$

$$f(3, 0) = \frac{3 + 3}{0 - 2} = -3.$$

Note que $f(0, 3) \neq f(3, 0)$.

b. $h(x, y) = 4x$ define a h como función de x y y. El dominio son todos los pares ordenados de números reales. Algunos valores de la función son

$$h(2, 5) = 4(2) = 8,$$

$$h(2, 6) = 4(2) = 8.$$

Observe que los valores de la función son independientes del valor de y.

c. Si $z^2 = x^2 + y^2$ y $x = 3$ y $y = 4$, entonces $z^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. En consecuencia, $z = \pm 5$. Entonces, con el par ordenado $(3, 4)$ *no podemos* asociar exactamente un solo número de salida. Por tanto, z *no* es una función de x y y.

EJEMPLO 2 Índice temperatura-humedad

En días húmedos y cálidos, mucha gente tiende a sentirse incómoda. El grado de incomodidad está dado numéricamente por el índice temperatura-humedad, ITH, *que es una función de dos variables,* t_d y t_w:

$$\text{ITH} = f(t_d, t_w) = 15 + 0.4(t_d + t_w),$$

donde t_d, *es la temperatura de bulbo seco (en grados Fahrenheit)* y t_w *la temperatura de bulbo húmedo (en grados Fahrenheit) del aire. Evaluar el* ITH *cuando* $t_d = 90$ *y* $t_w = 80$.

Solución: queremos encontrar $f(90, 80)$:

$$f(90, 80) = 15 + 0.4(90 + 80) = 15 + 68 = 83.$$

Cuando el ITH es mayor que 75, la mayoría de la gente se siente incómoda. De hecho, el ITH solía llamarse antes "índice de incomodidad". Muchos dispositivos eléctricos responden a este índice y pueden anticipar la demanda de aire acondicionado en sus sistemas.

Si $y = f(x)$ es una función de una variable, el dominio de f puede representarse de manera geométrica por puntos en la recta numérica. La función misma puede representarse por medio de su gráfica en un plano de coordenadas, algunas veces llamado un sistema de coordenadas de dos dimensiones. Sin embargo, para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, el dominio (que consiste en parejas ordenadas de números reales) puede representarse de manera geométrica por medio de una *región* en el plano. La función misma puede representarse geométricamente en un **sistema coordenado rectangular *tri*dimensional.**

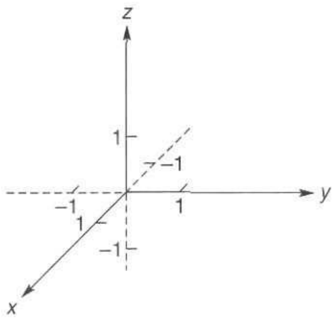


FIGURA 16.1 Sistema de coordenadas rectangulares de tres dimensiones.

Tal sistema se forma cuando tres ejes de números reales mutuamente perpendiculares en el espacio, se intersecan en el origen de cada eje como en la figura 16.1. Los tres ejes se llaman eje x, eje y y eje z y su punto de intersección recibe el nombre de origen del sistema. Las flechas indican las direcciones positivas de los ejes y las porciones negativas de los ejes se muestran con líneas punteadas.

A cada punto P en el espacio podemos asignar una terna ordenada única de números, llamada *coordenadas* de P. Para hacerlo [véase la fig. 16.2(a)], desde P construimos una perpendicular al plano x, y, esto es, al plano determinado por lo ejes x y y. Sea Q el punto donde la línea interseca a este plano. Desde Q trazamos líneas perpendiculares a los ejes x y y, las cuales intersecan a los ejes x y y en x_0 y y_0, respectivamente. Desde P trazamos una perpendicular al eje z que lo interseca en z_0. Así, hemos asignado a P la terna ordenada (x_0, y_0, z_0). Debe ser también evidente que a cada terna ordenada le podemos asignar un punto único en el espacio. Debido a esta correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio y ternas ordenadas, una terna ordenada puede denominarse como punto. En la figura 16.2(b) se muestran los puntos $(2, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$ y $(2, 3, 4)$. Note que el origen corresponde a $(0, 0, 0)$. Por lo general, las porciones negativas de los ejes no se muestran más que en caso necesario.

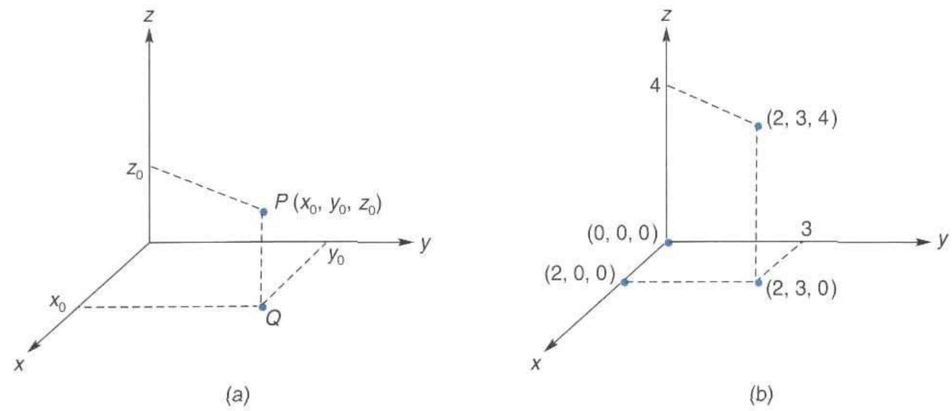


FIGURA 16.2 Puntos en el espacio.

Podemos representar geométricamente una función de dos variables, $z = f(x, y)$. A cada par ordenado (x, y) en el dominio de f, le asignamos el punto $(x, y, f(x, y))$. El conjunto de todos estos puntos se llama *gráfica* de f. Tal gráfica se muestra en la figura 16.3. Se puede considerar que $z = f(x, y)$ representa una superficie en el espacio.[1]

En el capítulo 9, estudiamos la continuidad de funciones de una variable. Si $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$, entonces los puntos cercanos a x_0 tendrán sus valores funcionales cerca de $f(x_0)$. Al extender este concepto a una función de dos variables, decimos que la función $z = f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) cuando los puntos cercanos a (x_0, y_0) tienen sus valores funcionales cercanos a $f(x_0, y_0)$. Hablando en general y sin profundizar demasiado en este concepto, decimos que una función de dos variables es continua en su dominio (esto es, continua en cada punto de su dominio) si su gráfica es una "superficie ininterrumpida".

Hasta ahora sólo hemos considerado funciones de una o de dos variables. En general, una **función de n variables** es aquella cuyo dominio consiste en

[1]Usaremos libremente el término "superficie" en sentido intuitivo.

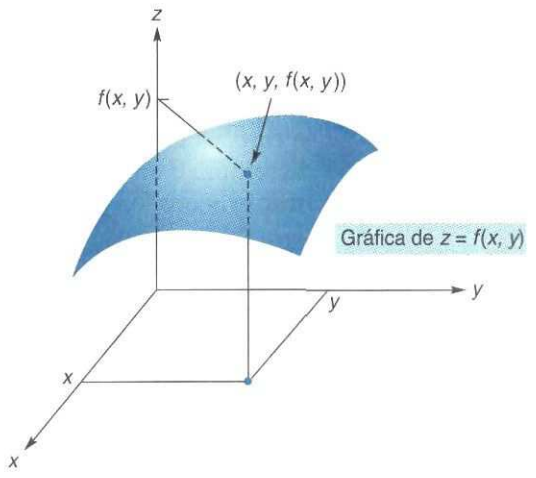


FIGURA 16.3 Gráfica de una función de dos variables.

n-adas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ es una función de tres variables con un dominio que consiste en todas las ternas ordenadas. La función $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$ es una función de cuatro variables con un dominio que consiste en todas las 4-adas ordenadas. Aunque las funciones de varias variables son sumamente importantes y útiles, no podemos representar geométricamente funciones de más de dos variables.

Daremos ahora una breve explicación de cómo esbozar superficies en el espacio. Comenzamos con planos que son paralelos a un plano coordenado. Con "plano coordenado" queremos decir un plano que contiene dos ejes coordenados. Por ejemplo, el plano determinado por los ejes x y y es el **plano *x*, *y*.** Similarmente, hablamos del **plano *x*, *z*** y del **plano *y*, *z*.** Los planos coordenados dividen el espacio en ocho parte llamadas *octantes*. En particular, la parte que contiene todos los puntos (x, y, z) donde x, y y z son positivos se llama **primer octante.**

A los restantes octantes no se les asignan nombres.

Supongamos que S es un plano paralelo al plano x, y y pasa por el punto $(0, 0, 5)$. [Véase la fig. 16.4(a).] Entonces, el punto (x, y, z) estará en S si y sólo si, $z = 5$; esto es, x y y pueden ser cualesquiera números reales, pero z debe ser igual a 5. Por esta razón decimos que $z = 5$ es una ecuación de S. En forma análoga, una ecuación del plano paralelo al plano x, z y que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ es $y = 2$ [véase la fig. 16.4(b)]. La ecuación $x = 3$ es una ecuación del plano que pasa por $(3, 0, 0)$ y es paralelo al plano y, z [véase la fig. 16.4(c)]. Veamos ahora los planos en general.

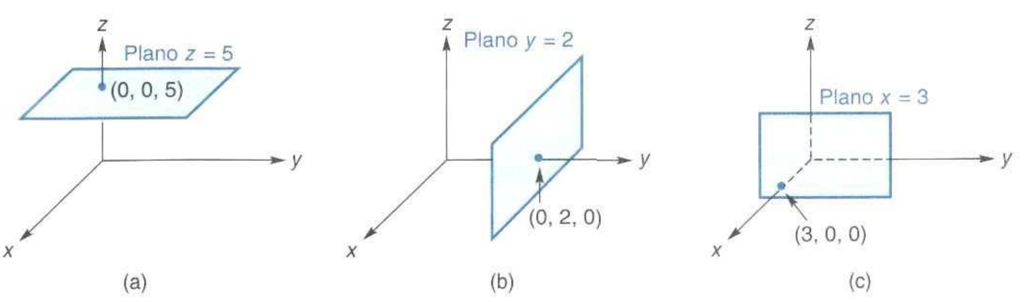


FIGURA 16.4 Planos paralelos a los planos coordenados.

En el espacio, la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde D es una constante y A, B y C son constantes sin que todas sean iguales a cero, es un plano. Como tres puntos distintos (no todos en la misma recta) determinan un plano, una manera conveniente de esbozar un plano es encontrar primero los puntos, en caso de que existan, en que el plano interseca los ejes x, y y z. Esos puntos se llaman *intersecciones*.

EJEMPLO 3 Graficación de un plano

Esbozar el plano $2x + 3y + z = 6$.

Solución: el plano interseca el eje x cuando $y = 0$ y $z = 0$. Así, $2x = 6$, lo que da $x = 3$. Similarmente, si $x = z = 0$, $y = 2$; si $x = y = 0$, $z = 6$. Las intersecciones son entonces $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 6)$. Después de marcar estos puntos se pasa un plano por ellos. La porción del plano en el primer octante se muestra en la figura 16.5(a); sin embargo, debe quedar claro que el plano se extiende indefinidamente en el espacio.

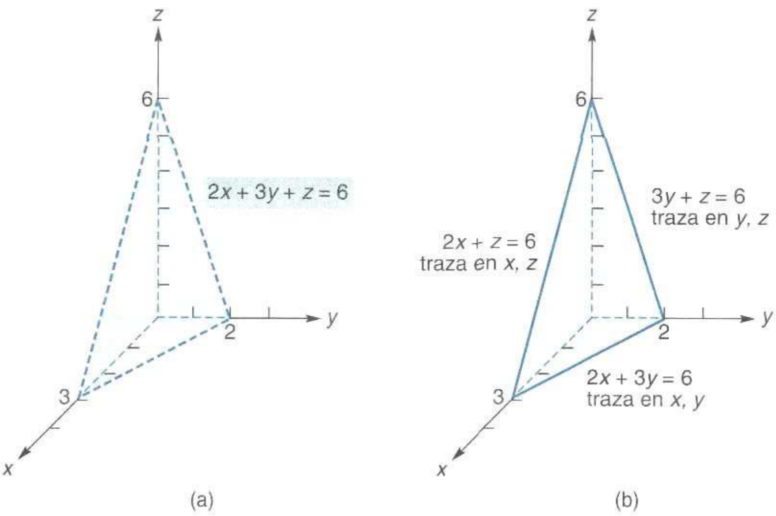


FIGURA 16.5 El plano $2x + 3y + z = 6$ y sus trazas.

Una superficie puede esbozarse con ayuda de sus **trazas.** Éstas son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados. Como ilustración, para el plano $2x + 3y + z = 6$ del ejemplo 3, la traza en el plano x, y se obtiene haciendo $z = 0$. Esto da $2x + 3y = 6$, que es la ecuación de una *recta* en el plano x, y. En forma análoga, hacer $x = 0$ da la traza en el plano y, z: la recta $3y + z = 6$. La traza x, z es la recta $2x + z = 6$ [véase la fig. 16.5(b)].

Observe que esta ecuación no pone restricción sobre y.

EJEMPLO 4 Esbozo de una superficie

Esbozar la superficie $2x + z = 4$.

Solución: esta ecuación tiene la forma de un plano. Las intersecciones x y z son $(2, 0, 0)$ y $(0, 0, 4)$ y no hay intersección y, porque x y z no pueden ser ambas cero. Haciendo $y = 0$ obtenemos la traza x, z $2x + z = 4$, que es una recta en

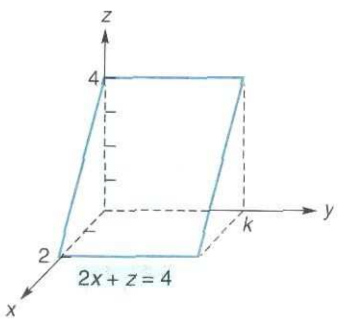


FIGURA 16.6 El plano $2x + z = 4$.

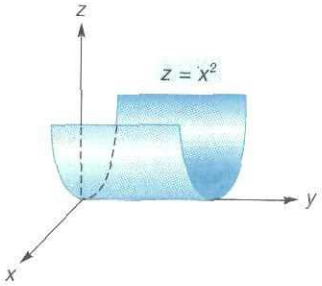


FIGURA 16.7 La superficie $z = x^2$.

el plano x, z. De hecho, la intersección de la superficie con *cualquier* plano $y = k$ es también $2x + z = 4$. Por lo que, el plano es como el de la figura 16.6.

Nuestros ejemplos finales tratan con superficies que no son planas, pero cuyas gráficas pueden obtenerse con facilidad.

EJEMPLO 5 Esbozo de una superficie

Esbozar la superficie $z = x^2$.

Solución: la traza x, z es la curva $z = x^2$, que es una parábola. De hecho, para *cualquier* valor fijo de y obtenemos $z = x^2$. La gráfica es como la de la figura 16.7.

EJEMPLO 6 Esbozo de una superficie

Esbozar la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución: haciendo $z = 0$ obtenemos la traza x, y, $x^2 + y^2 = 25$, lo cual es un círculo de radio 5. Similarmente, las trazas y, z y x, z, son los círculos $y^2 + z^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$, respectivamente. Note también que como $x^2 + y^2 = 25 - z^2$, la intersección de la superficie con el plano $z = k$, donde $-5 \leq k \leq 5$, es un círculo. Por ejemplo, si $z = 3$, la intersección es el círculo $x^2 + y^2 = 16$. Si $z = 4$, la intersección es $x^2 + y^2 = 9$. Esto es, las secciones transversales de la superficie que son paralelas al plano x, y son círculos. La superficie se muestra en la figura 16.8 en un esfera.

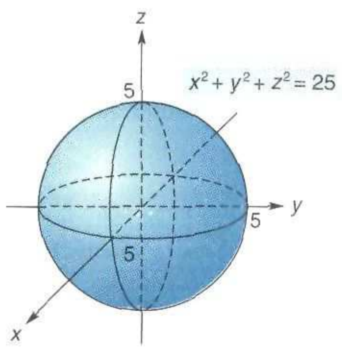


FIGURA 16.8 La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Ejercicio 16.1

En los problemas del 1 al 12 determine los valores de las funciones dadas en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = 4x - y^2 + 3$; $f(1, 2)$.

2. $f(x, y) = 3x^2y - 4y$; $f(2, -1)$.

3. $g(x, y, z) = e^x(2y + 3z)$; $g(0, -4, 2)$.

4. $g(x, y, z) = x^2y + xy^2 + yz^2$; $g(6, -1, 2)$.

5. $h(r, s, t, u) = \dfrac{rs}{t^2 - u^2}$; $h(-3, 3, 5, 4)$.

6. $h(r, s, t, u) = \ln(ru)$; $h(1, 5, 3, 1)$.

7. $g(p_A, p_B) = 2p_A(p_A^2 - 5)$; $g(4, 8)$.

8. $g(p_A, p_B) = p_A\sqrt{p_B} + 10$; $g(8, 4)$.

9. $F(x, y, z) = 3;\quad F(2, 0, -1)$.

10. $F(x, y, z) = \dfrac{x}{yz},\quad F(0, 0, 3)$.

11. $f(x, y) = 2x - 5y + 4;\quad f(x_0 + h, y_0)$.

12. $f(x, y) = x^2y - 3y^3;\quad f(r + t, r)$.

13. **Ecología** Un método de muestreo ecológico para determinar las poblaciones de animales en un área dada, implica marcar primero todos los animales obtenidos en una muestra de R animales del área y luego soltarlos de manera que puedan mezclarse con animales no marcados. En fecha posterior se toma una segunda muestra de M animales y se anota el número de aquéllos que ya están marcados, S. Con base en R, M y S, una estimación de la población total N de animales en el área muestreada está dada por

$$N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}.$$

Encuentre $f(400, 400, 80)$. Este método se llama *procedimiento de marcaje y recaptura*.[2]

14. **Genética** Bajo ciertas condiciones, si dos padres de ojos cafés tienen exactamente k hijos, la probabilidad $P = P(r, k)$ de que haya exactamente entre ellos r de ojos azules está dada por

$$P(r, k) = \frac{k!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{k-r}}{r!(k-r)!},\quad r = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Encuentre la probabilidad de que en un total de 4 hijos, exactamente 3 tengan ojos azules.

En los problemas del 15 al 18 encuentre las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones dadas.

15. Paralelo al plano x, z que pasa por el punto $(0, -4, 0)$.

16. Paralelo al plano y, z que pasa por el punto $(8, 0, 0)$.

17. Paralelo al plano x, y que pasa por el punto $(2, 7, 6)$.

18. Paralelo al plano y, z que pasa por el punto $(-4, -2, 7)$.

En los problemas del 19 al 28 esboce las superficies dadas.

19. $x + y + z = 1$.

20. $2x + y + 2z = 6$.

21. $3x + 6y + 2z = 12$.

22. $x + 2y + 3z = 4$.

23. $x + 2y = 2$.

24. $y + z = 1$.

25. $z = 4 - x^2$.

26. $y = x^2$.

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

28. $x^2 + y^2 = 1$.

[2] E.P. Odum, *Ecology* (Nueva York: Holt, Rinehart y Winston, 1966).

OBJETIVO Calcular derivadas parciales.

16.2 Derivadas parciales

La figura 16.9 muestra la superficie $z = f(x, y)$ y un plano paralelo al plano x, z que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sobre la superficie. Una ecuación de este plano es $y = y_0$. Por tanto, cualquier punto en la curva que sea la intersección de la superficie con el plano debe tener la forma $(x, y_0, f(x, y_0))$. Así, la curva puede ser descrita por $z = f(x, y_0)$. Como y_0 es constante, $z = f(x, y_0)$ puede considerarse como una función de una variable, x. Cuando se evalúa la derivada de esta función en x_0, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. (Véase la fig. 16.9.) Esta pendiente se llama *derivada parcial de f con respecto a x* en (x_0, y_0) y se denota con $f_x(x_0, y_0)$. En términos de límites,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{1}$$

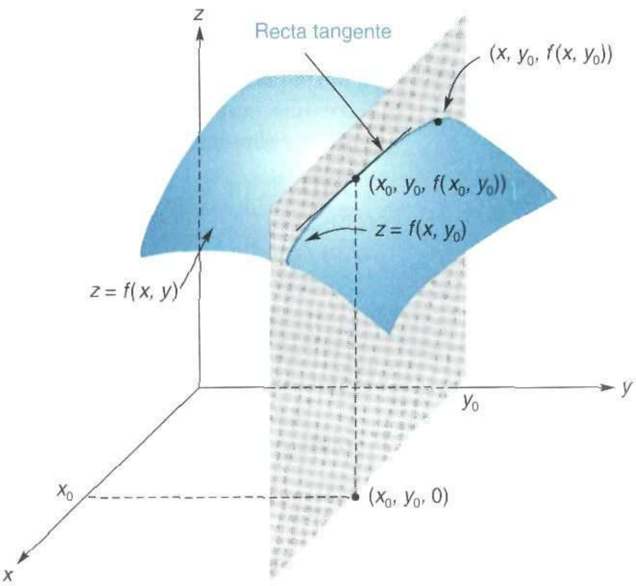


FIGURA 16.9 Interpretación geométrica de $f_x(x_0, y_0)$.

Por otra parte, en la figura 16.10 el plano $x = x_0$ es paralelo al plano y, z y corta la superficie $z = f(x, y)$ en una curva dada por $z = f(x_0, y)$, que es una función de y. Cuando se evalúa la derivada de esta función en y_0, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Esta pendiente se llama *derivada parcial de f con respecto a y* en (x_0, y_0) y se denota con $f_y(x_0, y_0)$. En términos de límites.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \qquad (2)$$

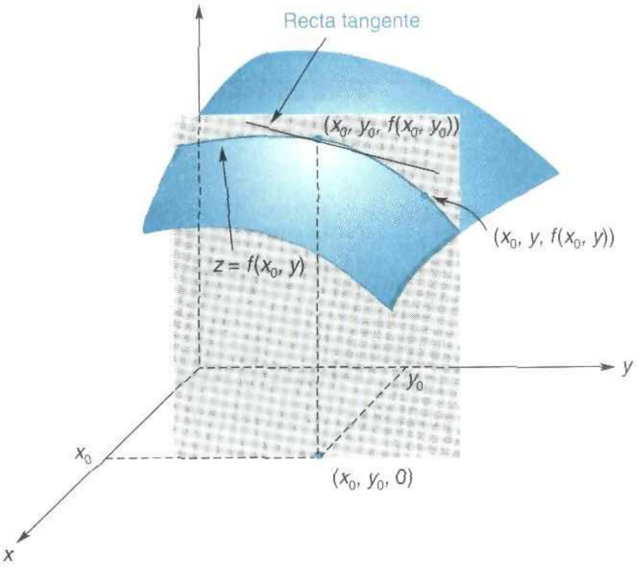


FIGURA 16.10 Interpretación geométrica de $f_y(x_0, y_0)$.

sto nos da una interpretación ꞓeométrica de una derivada parcial.

Decimos que $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *en la dirección x;* similarmente, $f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente *en la dirección y*.

En general, al reemplazar x_0 y y_0 en las ecuaciones (1) y (2) por x y y, respectivamente, obtenemos la siguiente definición.

Definición

Si $z = f(x, y)$ la ***derivada parcial de f con respecto a x,*** denotada como f_x, es la función dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

en caso de que este límite exista.

La ***derivada parcial de f con respecto a y,*** denotada como f_y, es la función dada por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h},$$

en caso de que este límite exista.

Al analizar la definición anterior, podemos establecer el siguiente procedimiento para determinar f_x y f_y:

Esto nos da una manera mecánica de determinar derivadas parciales.

Procedimiento para encontrar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$

Para encontrar f_x, trate a y como constante y diferencie f con respecto a x de la manera usual.
Para encontrar f_y, trate a x como constante y diferencie f con respecto a y de la manera usual.

EJEMPLO 1 Obtención de derivadas parciales

Si $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, encontrar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. Encontrar también, $f_x(3, 4)$ y $f_y(3, 4)$.

Solución: para encontrar $f_x(x, y)$, tratamos a y como una constante y diferenciamos a f con respecto a x:

$$f_x(x, y) = (1)y^2 + (2x)y = y^2 + 2xy.$$

Para encontrar $f_y(x, y)$, tratamos a x como constante y diferenciamos con respecto a y:

$$f_y(x, y) = x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2.$$

Note que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son cada una funciones de las dos variables x y y. Para encontrar $f_x(3, 4)$, evaluamos $f_x(x, y)$ cuando $x = 3$ y $y = 4$:

$$f_x(3, 4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40.$$

De manera similar,

$$f_y(3, 4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33.$$

En la tabla 16.2 se dan las notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$. La tabla 16.3 da las notaciones para las derivadas parciales evaluadas en (x_0, y_0). Note que el símbolo ∂ (no d) se usa para denotar una derivada parcial. El símbolo $\partial z/\partial x$ se lee "derivada parcial de z con respecto a x".

TABLA 16.2

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x	Derivada parcial de f (o z) con respecto a y
$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
$\dfrac{\partial}{\partial x}[f(x, y)]$	$\dfrac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$
$\dfrac{\partial z}{\partial x}$	$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

TABLA 16.3

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x evaluada en (x_0, y_0)	Derivada parcial de f (o z) con respecto a y evaluada en (x_0, y_0)
$f_x(x_0, y_0)$	$f_y(x_0, y_0)$
$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(x_0, y_0)}$	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(x_0, y_0)}$
$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$	$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

EJEMPLO 2 Obtención de derivadas parciales

a. Si $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$, *encontrar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$.

Solución: para encontrar $\partial z/\partial x$, diferenciamos z con respecto a x manteniendo a y constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3(3x^2)y^3 - 9(2x)y + (1)y^2 + 0\\ &= 9x^2y^3 - 18xy + y^2.\end{aligned}$$

Al evaluar en $(1, 0)$ obtenemos

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 9(1)^2(0)^3 - 18(1)(0) + 0^2 = 0.$$

Para encontrar $\partial z/\partial y$, diferenciamos z con respecto a y manteniendo a x constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^3(3y^2) - 9x^2(1) + x(2y) + 4(1)\\ &= 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 9(1)^3(0)^2 - 9(1)^2 + 2(1)(0) + 4 = -5.$$

b. Si $w = x^2e^{2x+3y}$, *encontrar* $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$.

Solución: para encontrar $\partial w/\partial x$, tratamos a y como constante y diferenciamos con respecto a x. Como x^2e^{2x+3y} es un producto de dos funciones que cada una incluye a x, usamos la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= x^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2(2e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}(2x)\\ &= 2x(x+1)e^{2x+3y}.\end{aligned}$$

Para encontrar $\partial w/\partial y$, tratamos a x como constante y diferenciamos con respecto a y:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+3y}) = 3x^2e^{2x+3y}.$$

Hemos visto que para una función de dos variables pueden considerarse dos derivadas parciales. En realidad, el concepto de derivadas parciales puede extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, con $w = f(x, y, z)$ tenemos tres derivadas parciales:

la parcial con respecto a x, denotada como $f_x(x, y, z)$, $\partial w/\partial x$, etc.;

la parcial con respecto a y, denotada como $f_y(x, y, z)$, $\partial w/\partial y$, etc.;

y

la parcial con respecto a z, denotada como $f_z(x, y, z)$, $\partial w/\partial z$, etc.

Para determinar $\partial w/\partial x$, tratamos a y y a z como constantes y diferenciamos w con respecto a x. Para determinar $\partial w/\partial y$, tratamos a x y a z como constantes y diferenciamos con respecto a y. Para determinar $\partial w/\partial z$, tratamos a x y a y como constantes y diferenciamos con respecto a z. Con una función de n variables, tenemos n derivadas parciales que se determinan de manera obvia.

EJEMPLO 3 Derivadas parciales de una función de tres variables

Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2z + z^3$, *encontrar* $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ *y* $f_z(x, y, z)$.

Solución: para encontrar $f_x(x, y, z)$ tratamos a y y a z como constantes y diferenciamos f con respecto a x:

$$f_x(x, y, z) = 2x.$$

Tratando a x y a z como constantes y diferenciando con respecto a y, tenemos

$$f_y(x, y, z) = 2yz.$$

Tratando a x y a y como constantes y diferenciando con respecto a z, tenemos

$$f_z(x, y, z) = y^2 + 3z^2.$$

EJEMPLO 4 Derivadas parciales de una función de cuatro variables

Si $p = g(r, s, t, u) = \dfrac{rsu}{rt^2 + s^2t}$, *encontrar* $\dfrac{\partial p}{\partial s}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ *y* $\left.\dfrac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)}$.

Solución: para encontrar $\partial p/\partial s$, note primero que p es un cociente de dos funciones y que cada una incluye a la variable s. Por tanto, usamos la regla del cociente y tratamos de r, t y u como constantes:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{(rt^2 + s^2t)\frac{\partial}{\partial s}(rsu) - rsu\frac{\partial}{\partial s}(rt^2 + s^2t)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

$$= \frac{(rt^2 + s^2t)(ru) - (rsu)(2st)}{(rt^2 + s^2t)^2}.$$

Al simplificar se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{ru(rt - s^2)}{t(rt + s^2)^2} \qquad \text{(un factor } t \text{ se cancela).}$$

Para encontrar $\partial p/\partial t$, podemos escribir primero a p como

$$p = rsu(rt^2 + s^2t)^{-1}.$$

A continuación, usamos la regla de la potencia y tratamos a r, s y u como constantes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= rsu(-1)\,(rt^2 + s^2t)^{-2}\frac{\partial}{\partial t}(rt^2 + s^2t)\\ &= -rsu(rt^2 + s^2t)^{-2}(2rt + s^2),\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{rsu(2rt + s^2)}{(rt^2 + s^2t)^2}.$$

Al hacer $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$ y $u = 1$ resulta

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)} = -\frac{0(1)(1)[2(0)(1) + (1)^2]}{[0(1)^2 + (1)^2(1)]^2} = 0.$$

Ejercicio 16.2

En cada uno de los problemas del 1 al 26, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

1. $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7.$

2. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy.$

3. $f(x, y) = 2y + 1.$

4. $f(x, y) = e.$

5. $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y - 4xy + 3y.$

6. $g(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 3)^3 + 5xy^3 - 2.$

7. $g(p, q) = \sqrt{pq}.$

8. $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}.$

9. $h(s, t) = \dfrac{s^2 + 4}{t - 3}.$

10. $h(u, v) = \dfrac{8uv^2}{u^2 + v^2}.$

11. $u(q_1, q_2) = \frac{3}{4}\ln q_1 + \frac{1}{4}\ln q_2.$

12. $Q(l, k) = 3l^{0.41}k^{0.59}.$

13. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

14. $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + 9}}{x^2y + y^2x}.$

15. $z = e^{5xy}.$

16. $z = (x^2 + y)e^{3x+4y}.$

17. $z = 5x\ln(x^2 + y).$

18. $z = \ln(3x^2 + 4y^4).$

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}\,(r^3 - 2rs + s^2).$

20. $f(r, s) = \sqrt{rs}\,e^{2+r}.$

21. $f(r, s) = e^{3-r}\ln(7 - s).$

22. $f(r, s) = (5r^2 + 3s^3)(2r - 5s).$

23. $g(x, y, z) = 3x^2y + 2xy^2z + 3z^3.$

24. $g(x, y, z) = x^2y^3z^5 - 3x^2y^4z^3 + 5xz.$

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3).$

26. $g(r, s, t, u) = rs\ln(2t + 5u).$

En los problemas del 27 al 34 evalúe las derivadas parciales dadas.

27. $f(x, y) = x^3y + 7x^2y^2;\quad f_x(1, -2).$

28. $z = \sqrt{5x^2 + 3xy + 2y};\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}.$

29. $g(x, y, z) = e^x\sqrt{y + 2z};\quad g_z(0, 6, 4).$

30. $g(x, y, z) = \dfrac{3x^2 + 2y}{xy + xz},\quad g_y(1, 1, 5).$

31. $h(r, s, t, u) = (s^2 + tu)\ln(2r + 7st);\quad h_s(1, 0, 0, 1).$

32. $h(r, s, t, u) = \dfrac{7r + 3s^2u^2}{s};\quad h_t(4, 3, 2, 1).$

33. $f(r, s, t) = rst(r^2 + s^3 + t^4);\quad f_s(1, -1, 2).$

34. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln x};\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=e,\\y=0}} \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=e.\\y=0}}$

---

35. Si $z = xe^{x-y} - ye^{y-x}$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} - e^{y-x}.$$

36. Precio de acciones de un ciclo de dividendos En un análisis de los precios de un ciclo de dividendos, Palmon y Yaari[3] consideran la función f dada por

$$u = f(t, r, z) = \frac{(1 + r)^{1-z}\ln(1 + r)}{(1 + r)^{1-z} - t},$$

donde u es la tasa instantánea de la apreciación del precio solicitado, r es una tasa de rendimiento anual de oportunidad, z la fracción de un ciclo de dividendos sobre el cual una porción de las acciones es controlada por un vendedor de medio ciclo y t es la tasa efectiva del impuesto por ganancias de capital. Ellos afirman que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{t(1 + r)^{1-z}\ln^2(1 + r)}{[(1 + r)^{1-z} - t]^2}.$$

Verifíquelo.

37. Demanda de dinero En un análisis de la teoría de inventarios sobre la demanda de dinero, Swanson[4] considera la función

$$F(b, C, T, i) = \frac{bT}{C} + \frac{iC}{2}$$

y determina que $\dfrac{\partial F}{\partial C} = -\dfrac{bT}{C^2} + \dfrac{i}{2}$. Verifique esta derivada parcial.

38. Desregulación de la tasa de interés En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[5] obtienen la ecuación

$$r_L = r + D\frac{\partial r}{\partial D} + \frac{dC}{dD}, \tag{3}$$

donde r es la tasa de interés por depósitos pagados por los bancos comerciales, r_L es la tasa de interés ganado por esos bancos, C es el costo administrativo por transformar los depósitos en activos productivos y D el nivel de los depósitos por ahorros. Christofi y Agapos establecen que

$$r_L = r\left[\frac{1 + \eta}{\eta}\right] + \frac{dC}{dD}, \tag{4}$$

donde $\eta = \dfrac{r/D}{\partial r/\partial D}$ es la elasticidad del depósito con respecto al interés del depósito. Exprese la ecuación (3) en términos de η para verificar la ecuación (4).

39. Publicidad y ganancia En un análisis sobre publicidad y utilidades, Swales[6] considera una función f dada por

$$R = f(r, a, n) = \frac{r}{1 + a\left(\dfrac{n - 1}{2}\right)},$$

donde R es la tasa ajustada de utilidad, r la tasa contable de utilidad, a es una medida de los gastos publicitarios y n el número de años en que la publicidad se deprecia por completo. En su análisis, Swales determina $\partial R/\partial n$. Encuentre esta derivada parcial.

---

[3] D. Palmon y U. Yaari, "Taxation of Capital Gains and the Behavior of Stock Prices over the Dividend Cycle", *The American Economist*, XXVII, núm. 1 (1983), 13-22.

[4] P. E. Swanson, "Integer Constraints on the Inventory Theory of Money Demand", *Quarterly Journal of Business and Economics*, 23, núm. 1(1984), 32-37.

[5] A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research*, XX (1984), 39-49.

[6] J. K. Swales, "Advertising as an Intangible Asset: Profitability and Entry Barriers: A Comment on Reekie and Bhoyrub", *Aplied Economics*, 17, núm. 4 (1985), 603-617.

OBJETIVO Desarrollar las nociones de costo marginal parcial, productividad marginal y productos competitivos y complementarios.

16.3 Aplicaciones de las derivadas parciales

De la sección 16.2 sabemos que si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes a la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones x y y, respectivamente. Existen otras interpretaciones. Como $\partial z/\partial x$ es la derivada de z con respecto a x cuando y permanece constante, y como una derivada es una razón de cambio, tenemos

Aquí tenemos la interpretación de "tasa de cambio" de las derivadas parciales.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **es la razón de cambio de z con respecto a x cuando y se mantiene constante.**

De modo similar,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **es la razón de cambio de z con respecto a y cuando x se mantiene constante.**

Veremos ahora algunas aplicaciones en las que la noción "razón de cambio" de una derivada parcial resulta muy útil.

Supongamos que un fabricante produce x unidades del producto X y y unidades del producto Y. Entonces, el costo total c de esas unidades es una función de x y y; a esto se le llama **función de costos conjuntos.** Si una función de este tipo es $c = f(x, y)$, entonces $\partial c/\partial x$ se llama **costo marginal (parcial) con respecto a x,** y es la razón de cambio de c con respecto a x cuando y se mantiene fija. Similarmente, $\partial c/\partial y$ es el **costo marginal (parcial) con respecto a y,** y es la razón de cambio de c con respecto a y cuando x se mantiene fija.

Por ejemplo, si c se expresa en dólares y $\partial c/\partial y = 2$, entonces el costo de producir una unidad adicional de Y cuando el nivel de producción de X es fijo, es de aproximadamente 2 dólares.

Si un fabricante produce n artículos, la función de costos conjuntos es una función de n variables y habrá n funciones de costo marginal (parcial).

EJEMPLO 1 Costos marginales

Una empresa fabrica dos tipos de esquíes, los modelos Ligero y Alpino. Supóngase que la función de costos conjuntos de producir x pares del modelo Ligero y y pares del modelo Alpino por semana es

$$c = f(x, y) = 0.07x^2 + 75x + 85y + 6000,$$

donde c está expresado en dólares. Determinar los costos marginales $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ cuando $x = 100$ y $y = 50$, e interpretar los resultados.

Solución: los costos marginales son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0.14x + 75 \quad \text{y} \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 85.$$

Así,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(100,\,50)} = 0.14(100) + 75 = 89 \tag{1}$$

y

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{(100,\,50)} = 85. \tag{2}$$

La ecuación (1) implica que al aumentar la producción del modelo Ligero de 100 a 101, mientras se mantiene en 50 la producción del Alpino, aumentan los costos aproximadamente en \$89. La ecuación (2) implica que al aumentar la producción del modelo Alpino de 50 a 51 mientras se mantiene en 100 la producción del Ligero, aumentan los costos aproximadamente en \$85. De hecho, como $\partial c/\partial y$ es una función constante, el costo marginal con respecto a y es de \$85 en todos los niveles de producción.

■

EJEMPLO 2 Pérdida de calor en el cuerpo humano

En un día frío, una persona puede sentir más frío cuando hay viento que cuando no lo hay, porque la razón de pérdida de calor es una función de la temperatura y de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

indica la razón de pérdida de calor H (en kilocalorías por metro cuadrado por hora) cuando la temperatura del aire es t (en grados Celsius) y la velocidad del viento w (en metros por segundo). Para $H = 2000$, la piel expuesta se congelará en un minuto.[7]

a. *Evaluar H cuando $t = 0$ y $w = 4$.*

Solución: cuando $t = 0$ y $w = 4$, entonces

$$H = (10.45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 872.85.$$

b. *Evaluar $\partial H/\partial w$ y $\partial H/\partial t$ cuando $t = 0$ y $w = 4$ e interpretar los resultados.*

Solución:

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \left(\frac{5}{\sqrt{w}} - 1\right)(33 - t), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial w}\right|_{\substack{t=0\\ w=4}} = 49.5;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(-1), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ w=4}} = -26.45.$$

Estas ecuaciones significan que cuando $t = 0$ y $w = 4$, al incrementar w por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo t, H aumentará alrededor de 49.5 veces lo que aumente w. Al incrementar t por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo w, H *disminuirá* alrededor de 26.45 veces lo que aumente t.

c. *Cuando $t = 0$ y $w = 4$, ¿qué tiene más influencia en H: un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s o un cambio en la temperatura de 1°C?*

Solución: como la derivada parcial de H con respecto a w es mayor en magnitud que la parcial con respecto a t cuando $t = 0$ y $w = 4$, un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s tendrá más influencia sobre H.

■

[7] G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, segunda edición (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

La elaboración de un producto depende de muchos factores en la producción. Entre éstos se encuentran la mano de obra de trabajo, el capital, el terreno, la maquinaria, etc. Por simplicidad, supongamos que la producción sólo depende del trabajo y del capital. Si la función $P = f(l, k)$ da la producción P cuando el productor emplea l unidades de trabajo y k unidades de capital, entonces esta función se llama **función de producción.** Definimos la **productividad marginal con respecto a l** como $\partial P/\partial l$. Ésta es la razón de cambio de P con respecto a l cuando k se mantiene fija. Igualmente, la **productividad marginal con respecto a k** es $\partial P/\partial k$. Ésta es la razón de cambio de P con respecto a k cuando l se mantiene fija.

EJEMPLO 3 Productividad marginal

Un fabricante de un juguete popular ha determinado que su función de producción es $P = \sqrt{lk}$, donde l es el número de horas de trabajo por semana y k el capital (expresado en cientos de dólares por semana) requerido para la producción semanal de P gruesas del juguete (una gruesa son 144 unidades). Determinar las funciones de productividad marginal y evaluarlas cuando $l = 400$ y $k = 16$. Interpretar los resultados.

Solución: como $P = (lk)^{1/2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}\,k = \frac{k}{2\sqrt{lk}}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}l = \frac{l}{2\sqrt{lk}}.$$

Si evaluamos estas ecuaciones cuando $l = 400$ y $k = 16$, obtenemos

$$\left.\frac{\partial P}{\partial l}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{16}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{1}{10}$$

y

$$\left.\frac{\partial P}{\partial k}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{400}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{5}{2}.$$

Así, si $l = 400$ y $k = 16$, al incrementar l a 401 y mantener k en 16, aumentará la producción en aproximadamente $\frac{1}{10}$ de gruesa. Pero si k se incrementa a 17 y se mantiene l en 400, la producción aumenta en alrededor de $\frac{5}{2}$ gruesas.

Productos competitivos y complementarios

Algunas veces dos productos pueden estar relacionados de modo que cambios en el precio de uno afecten la demanda del otro. Un ejemplo representativo es el caso de la mantequilla y la margarina. Si tal relación existe entre los productos A y B, la demanda de cada producto depende del precio de ambos. Suponga que q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, respectivamente, y que p_A y p_B son sus respectivos precios. Entonces q_A y q_B son funciones de p_A y p_B:

$$q_{\mathrm{A}} = f(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}), \qquad \text{función de demanda para A;}$$

$$q_{\mathrm{B}} = g(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}), \qquad \text{función de demanda para B.}$$

Podemos encontrar cuatro derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A}, \text{ la demanda marginal para A con respecto a } p_A;$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B}, \text{ la demanda marginal para A con respecto a } p_B;$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A}, \text{ la demanda marginal para B con respecto a } p_A;$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B}, \text{ la demanda marginal para B con respecto a } p_B.$$

En condiciones comunes, si el precio de B está fijo y el de A aumenta, la cantidad demandada de A disminuirá. Así, $\partial q_A/\partial p_A < 0$. Similarmente, $\partial q_B/\partial p_B < 0$. Sin embargo, $\partial q_A/\partial p_B$ y $\partial q_B/\partial p_A$ pueden ser positivas o negativas. Si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0,$$

entonces se dice que A y B son **productos competitivos** o **sustitutos.** En esta situación, un incremento en el precio de B ocasiona un incremento en la demanda de A, si se supone que el precio de A no cambia. Similarmente, un incremento en el precio de A ocasiona un incremento en la demanda de B cuando el precio de B se mantiene fijo. La mantequilla y la margarina son ejemplos de sustitutos.

Consideremos una situación diferente, decimos que si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0,$$

entonces A y B son **productos complementarios.** En este caso, un incremento en el precio de B causa una disminución en la demanda de A, si el precio de A no cambia. Similarmente, un incremento en el precio de A causa una disminución en la demanda de B, cuando el precio de B se mantiene fijo. Por ejemplo, las cámaras y las películas fotográficas son productos complementarios. Un incremento en el precio de la película hará más cara la toma de fotografías. Por tanto, la demanda de cámaras disminuirá.

EJEMPLO 4 Determinación si los productos son competitivos *o complementarios*

Las funciones de demanda para los productos A y B *son cada una función de los precios de* A *y* B *y están dadas por*

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt{p_A}} \quad y \quad q_B = \frac{75p_A}{\sqrt[3]{p_B^2}},$$

respectivamente. Encontrar las cuatro funciones de demanda marginal y determinar también si A *y* B *son productos competitivos, productos complementarios o ni uno ni otro.*

Solución: si hacemos $q_A = 50p_A^{-1/2}p_B^{1/3}$ y $q_B = 75p_Ap_B^{-2/3}$, tenemos

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = 50\left(-\frac{1}{2}\right)p_A^{-3/2}p_B^{1/3} = -25p_A^{-3/2}p_B^{1/3},$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 50p_A^{-1/2}\left(\frac{1}{3}\right)p_B^{-2/3} = \frac{50}{3}p_A^{-1/2}p_B^{-2/3},$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 75(1)p_B^{-2/3} = 75p_B^{-2/3},$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = 75p_A\left(-\frac{2}{3}\right)p_B^{-5/3} = -50p_Ap_B^{-5/3}.$$

Como p_A y p_B representan precios, ambas son positivas. Por tanto, $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$. Concluimos que A y B son productos competitivos.

Ejercicio 16.3

Para las funciones de costos conjuntos en los problemas del 1 al 3, encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

1. $c = 7x + 0.3y^2 + 2y + 900;\quad \frac{\partial c}{\partial y}, x = 20, y = 30.$

2. $c = x\sqrt{x + y} + 5000;\quad \frac{\partial c}{\partial x}, x = 40, y = 60.$

3. $c = 0.03(x + y)^3 - 0.6(x + y)^2 + 9.5(x + y) + 7700;\quad \frac{\partial c}{\partial x}, x = 50, y = 80.$

Para las funciones de producción en los problemas 4 y 5, encuentre las funciones de producción marginal $\partial P/\partial k$ y $\partial P/\partial l$.

4. $P = 20lk - 2l^2 - 4k^2 + 800.$

5. $P = 1.582l^{0.192}k^{0.764}.$

6. Función de producción Cobb-Douglas En economía, una función de producción Cobb-Douglas tiene la forma $P = Al^{\alpha}k^{\beta}$, donde A, α y β son constantes y $\alpha + \beta = 1$. Para tal función, demuestre que

a. $\partial P/\partial l = \alpha P/l$.

b. $\partial P/\partial k = \beta P/k$.

c. $l\frac{\partial P}{\partial l} + k\frac{\partial P}{\partial k} = P$. Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total P.

En los problemas del 7 al 9, q_A y q_B son funciones de demanda para los productos A y B, *respectivamente. En cada caso encuentre $\partial q_A/\partial p_A$, $\partial q_A/\partial p_B$, $\partial q_B/\partial p_A$, $\partial q_B/\partial p_B$ y determine si* A y B *son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.*

7. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B;\quad q_B = 500 + 4p_A - 20p_B.$

8. $q_A = 20 - p_A - 2p_B;\ q_B = 50 - 2p_A - 3p_B.$

9. $q_A = \frac{100}{p_A\sqrt{p_B}};\quad q_B = \frac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}.$

10. Manufactura canadiense La función de producción para las industrias manufactureras canadienses en 1927 se estimó con la expresión[8] $P = 33.0l^{0.46}k^{0.52}$, donde P es la producción, l es el trabajo y k el capital. Determine la productividad marginal de la mano de obra y del capital, y evalúela cuando $l = 1$ y $k = 1$.

11. Granja lechera Un estimado de la función de producción para las granjas lecheras en Iowa (1939) está dado por[9]

$$P = A^{0.27}\,B^{0.01}\,C^{0.01}\,D^{0.23}\,E^{0.09}\,F^{0.27},$$

donde P es la producción, A el terreno, B el trabajo, C son mejoras, D activos líquidos, E activos de trabajo y F

[8]P. Daly y P. Douglas, "The Production Function for Canadian Manufactures", *Journal of the American Statistical Association*, 38 (1943), 178-186.

[9]G. Tintner y O. H. Brownlee, "Production Functions Derived from Farm Records", *American Journal of Agricultural Economics*, 26 (1944), 566-571.

gastos de operación en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.

2. **Función de producción** Suponga que una función de producción está dada por $P = \frac{kl}{k + l}$.
   a. Determine las funciones de productividad marginal.
   b. Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es una constante.

3. **Compensación a MAN** En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con maestría en administración de negocios (MAN), se estimó que para gerentes (contadores, analistas, etc.) la compensación anual z (en dólares) está dada por

$$z = 43{,}960 + 4480x + 3492y,$$

donde x y y es el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de maestría, respectivamente.[10] Encuentre $\partial z/\partial x$ e interprete su resultado.

14. **Condición social** La condición general S_g de una persona se cree que es una función atribuible a la educación S_e y al ingreso S_i, donde S_g, S_e y S_i están representadas numéricamente. Si

$$S_g = 7\sqrt[3]{S_e}\sqrt{S_i},$$

determine $\partial S_g/\partial S_e$ y $\partial S_g/\partial S_i$ cuando $S_e = 125$ y $S_i = 100$, e interprete sus resultados.[11]

15. **Facilidad de lectura** A veces queremos evaluar el grado de legibilidad de un documento escrito. Rudolf Flesch[12] desarrolló una función de dos variables que hace esto, a saber,

$$R = f(w, s) = 206.835 - (1.015w + 0.846s),$$

donde R es el *puntaje de facilidad de lectura*, w el número promedio de palabras por oración en muestras de 100 palabras, y s el número promedio de sílabas en tales muestras. Flesch afirma que un artículo para el cual $R = 0$, es "prácticamente ilegible", pero que uno con $R = 100$ "es fácil para cualquier persona que sepa leer". (a) Encuentre $\partial R/\partial w$ y $\partial R/\partial s$. (b) ¿Qué es más fácil de leer, un artículo para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$, u otro para el cual $w = w_0 + 1$ y $s = s_0$?

16. **Modelo de una voz** El estudio de las frecuencias de las vibraciones de un alambre tenso es útil al considerar la voz de un individuo. Suponga que

$$\omega = \frac{1}{bL}\sqrt{\frac{\tau}{\pi\rho}},$$

donde ω (letra griega "omega") es la frecuencia, b el diámetro, L la longitud, ρ (letra griega "rho") la densidad y τ (letra griega "tau") es la tensión.[13] Encuentre $\partial\omega/\partial b$, $\partial\omega/\partial L$, $\partial\omega/\partial\rho$ y $\partial\omega/\partial\tau$.

17. **Flujo de tránsito** Considere la siguiente situación de tránsito. En una autopista con dos carriles en cada dirección, se encuentra un vehículo de mantenimiento bloqueando el carril izquierdo (véase la fig. 16.11). Dos vehículos (*anterior* y *posterior*) circulan sobre el carril derecho a cierta distancia uno del otro. El vehículo *sujeto* puede escoger llenar o no el hueco entre los vehículos anterior y posterior. Esa decisión puede basarse no sólo

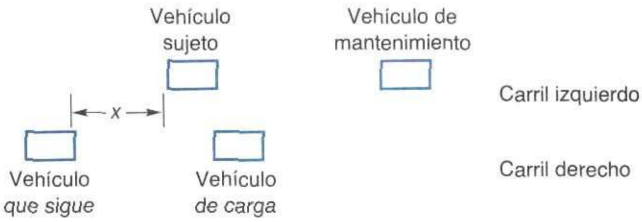


FIGURA 16.11 Diagrama para el problema 17.

en la distancia x mostrada en el diagrama, sino en otros factores (como la velocidad del vehículo *posterior*). Un *índice de espacio*, g, se ha usado en el análisis de tal decisión.[14,15] Entre mayor es el valor de g, mayor es la propensión del vehículo *sujeto* a ocupar el espacio. Suponga que

$$g = \frac{x}{V_F} - \left(0.75 + \frac{V_F - V_S}{19.2}\right),$$

donde x (en pies) es el espacio, V_F la velocidad del vehículo *posterior* (en pies por segundo) y V_s la velocidad

[10] A. G. Weinstein y V. Srinivasen, "Predicting Managerial Success of Master of Business Administration (M.B.A.) Graduates", *Journal of Aplied Psychology*, 59, núm. 2 (1974), 207-212.

[11] Adaptado de R.K. Leik y B.F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975).

[12] R. Flesch, *The Art of Readable Writing* (Nueva York: Harper & Row Publishers, Inc., 1949).

[13] R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum, editores, *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada. Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

[14] P. M. Hurst, K. Perchonok y E. L. Seguin, "Vehicle Kinematics and Gap Acceptance", *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 4 (1968), 321-324.

[15] K. Perchonok y P. M. Hurst, "Effect of Lane-Closure Signals upon Driver Decision Making and Traffic Flow", *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 5 (1968), 410-413.

del vehículo *sujeto* (en pies por segundo). Del diagrama parece razonable suponer que si V_F y V_S son constantes y x crece, entonces g debería crecer también. Demuestre que esto es cierto aplicando cálculo a la función g dada anteriormente. Suponga que x, V_F y V_S son positivas.

18. Demanda Suponga que las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B son

$$q_A = e^{-(p_A/p_B)} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{16}{p_A p_B^2},$$

donde q_A y q_B son los números de unidades demandadas de A y B cuando los precios unitarios (en miles de dólares) son p_A y p_B, respectivamente.

a. Clasifique A y B como competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

b. Si los precios unitarios de A y B son \$1000 y \$2000, respectivamente, estime el cambio en la demanda de A cuando el precio de B disminuye \$40 y el precio de A se mantiene constante.

19. Demanda Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = \frac{30\sqrt{p_B}}{p_A^{2/3}} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{50p_A}{p_B^{1/3}},$$

donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, y p_A y p_B son los correspondientes precios (en dólares) por unidad.

a. Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $p_A = 8$ y $p_B = 64$.

b. Si p_B se reduce de 64 a 60, con p_A fijo en 8, use la parte (a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

20. Función de costos conjuntos La función de costos conjuntos para producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c = \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600,$$

donde c está en dólares.

a. Encuentre las funciones de costo marginal con respecto a q_A y q_B.

b. Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_A cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$. Redondee su respuesta a dos decimales.

c. Use su respuesta a la parte (b) para estimar el cambio en el costo si la producción del producto A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del producto B se mantiene en 8 unidades.

21. Elecciones Para las elecciones de 1974, el porcentaje republicano R del voto republicano-democrático en un distrito está dado (aproximadamente) por[16]

$$\begin{aligned} R &= f(E_r, E_d, I_r, I_d, N) \\ &= 15.4725 + 2.5945E_r - 0.0804E_r^2 - 2.3648E_d + \\ &\qquad 0.0687E_d^2 + 2.1914I_r - 0.0912I_r^2 - \\ &\qquad 0.8096I_d + 0.0081I_d^2 - 0.0277E_rI_r + \\ &\qquad 0.0493E_dI_d + 0.8579N - 0.0061N^2. \end{aligned}$$

Aquí, E_r y E_d son los gastos de campaña (en unidades de \$10,000) de los republicanos y demócratas, respectivamente; I_r e I_d el número de periodos en los que han estado en el Congreso, *más* uno, para los candidatos republicano y demócrata, respectivamente, y N es el porcentaje del voto presidencial de los dos partidos que Richard Nixon obtuvo en el distrito en 1968. La variable N da una medida de la fuerza de los republicanos en ese distrito.

a. En el Acta de 1974 de la Campaña Federal de Elecciones, el Congreso impuso un límite de \$188,000 para los gastos de campaña. Analizando $\partial R/\partial E_r$, ¿habría aconsejado usted a un candidato republicano con nueve periodos en el Congreso, gastar \$188,000 en su campaña?

b. Encuentre el porcentaje por encima del cual el voto de Nixon tuvo un efecto negativo sobre R; esto es, encuentre N cuándo $\partial R/\partial N < 0$. Dé su respuesta al porcentaje entero más cercano.

22. Ventas Después que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas S (en miles de unidades) está dado por

$$S = \frac{AT + 450}{\sqrt{A + T^2}},$$

donde T es el tiempo (en meses) desde que el producto fue introducido por primera vez y A la cantidad (en *cientos* de dólares) gastada cada mes en publicidad.

a. Verifique que la derivada parcial del volumen de ventas con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{A^2 - 450T}{(A + T^2)^{3/2}}.$$

b. Use el resultado de la parte (a) para predecir el número de meses que transcurrirán, antes de que el volumen de ventas empiece a descender, si la cantidad destinada a publicidad se mantiene fija en \$9000 por mes.

[16]J. Silberman y G. Yochum, "The Role of Money in Determining Election Outcomes", *Social Science Quarterly*, 58, núm. 4 (1978), 671-682.

'ea f una función de demanda para el producto A y $q_A = f(p_A, p_B)$ donde q_A es la cantidad demandada de A cuando su precio 'or unidad es p_A y el precio por unidad del producto B es p_B. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_A, de-otada η_{p_A} se define como $\eta_{p_A} = (p_A/q_A)(\partial q_A/\partial p_A)$. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_B, denotada η_{p_B} e define como $\eta_{p_B} = (p_B/q_A)(\partial q_A/\partial p_B)$. En términos generales η_{p_A}, es la razón de un cambio porcentual en la cantidad deman-'ada de A con respecto a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. De manera similar, η_{p_B} puede 'nterpretarse como la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A a un cambio porcentual en el precio de B uando el precio de A está fijo. En los problemas del 23 al 25 encuentre η_{p_A} y η_{p_B} para los valores dados de p_A y p_B

3. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $p_A = 2, p_B = 10$.

24. $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $p_A = 2, p_B = 2$.

5. $q_A = 100/(p_A\sqrt{p_B})$; $p_A = 1, p_B = 4$.

OBJETIVO Determinar deriva-las parciales de una función de-inida de manera implícita.

16.4 DIFERENCIACIÓN PARCIAL IMPLÍCITA[17]

Una ecuación en x, y y z no necesariamente define a z como función de x y y. Por ejemplo, en la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \qquad (1)$$

si $x = 1$ y $y = 1$, entonces $z^2 - 1 - 1 = 0$, por lo que $z = \pm\sqrt{2}$. Así, la ecuación (1) no define a z como función de x y y. Sin embargo, despejando z de la ecuación (1) se obtiene

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{o} \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2},$$

cada una de las cuales define a z como función de x y de y. Aunque la ecuación (1) no expresa de manera explícita a z como función de x y y, puede considerarse que expresa a z *implícitamente* como una de dos funciones diferentes de x y y. Note que la ecuación $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ tiene la forma $F(x, y, z) = 0$ donde F es una función de tres variables. Cualquier ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ puede considerarse que expresa a z de manera implícita como un conjunto de posibles funciones de x y y. Además, podemos encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ directamente de la forma $F(x, y, z) = 0$.

Para encontrar $\partial z/\partial x$ de

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \qquad (2)$$

diferenciamos primero ambos miembros de la ecuación (2) con respecto a x tratando a z como función de x y y, y tratando a y como constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0,$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 = 0.$$

Ya que y es tratada como una cons-:ante, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Al despejar $\partial z/\partial x$, obtenemos

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}.$$

[17]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Para encontrar $\partial z/\partial y$ diferenciamos ambos miembros de la ecuación (2) con respecto a y considerando a z como función de x y y, y manteniendo a x constante:

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(0),$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y} = 0\right),$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

De aquí que,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}.$$

El método que usamos para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se llama *diferenciación parcial implícita*.

EJEMPLO 1 Diferenciación parcial implícita

Si $\dfrac{xz^2}{x+y} + y^2 = 0$ *evaluar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *cuando* $x = -1$, $y = 2$ *y* $z = 2$.

Solución: tratamos a z como función de x y y, y diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz^2}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0).$$

Si usamos la regla del cociente para el primer término a la izquierda, tenemos

$$\frac{(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2) - xz^2\dfrac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2} + 0 = 0.$$

Con la regla del producto para $\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2)$ resulta

$$\frac{(x+y)\left[x\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + z^2(1)\right] - xz^2(1)}{(x+y)^2} = 0.$$

Despejamos $\partial z/\partial x$, y así obtenemos

$$2xz(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2(x+y) - xz^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz^2 - z^2(x+y)}{2xz(x+y)} = -\frac{yz}{2x(x+y)}, \quad z \neq 0.$$

Entonces,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,2,2)} = 2.$$

EJEMPLO 2 Diferenciación parcial implícita

Si $se^{r^2+u^2} = u\ln(t^2+1)$, *determinar* $\partial t/\partial u$.

Solución: consideramos a t como función de r, s y u. Diferenciando ambos miembros con respecto a u, mientras mantenemos constantes a r y a s, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial u}(se^{r^2+u^2}) = \frac{\partial}{\partial u}[u\ln(t^2+1)],$$

$$2sue^{r^2+u^2} = u\frac{\partial}{\partial u}[\ln(t^2+1)] + \ln(t^2+1)\frac{\partial}{\partial u}(u) \quad \text{(regla del producto)},$$

$$2sue^{r^2+u^2} = u\frac{2t}{t^2+1}\frac{\partial t}{\partial u} + \ln(t^2+1).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{(t^2+1)[2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2+1)]}{2ut}.$$

Ejercicio 16.4

En los problemas del 1 al 11 encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $\partial z/\partial x$.

2. $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0$; $\partial z/\partial x$.

3. $2z^3 - x^2 - 4y^2 = 0$; $\partial z/\partial y$.

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9$; $\partial z/\partial y$.

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$; $\partial z/\partial x$.

6. $z^3 - xz - y = 0$; $\partial z/\partial x$.

7. $e^x + e^y + e^z = 10$; $\partial z/\partial y$.

8. $xyz + 2y^2x - z^3 = 0$; $\partial z/\partial x$.

9. $\ln(z) + 9z - xy = 1$; $\partial z/\partial x$.

10. $\ln x + \ln y - \ln z = e^y$; $\partial z/\partial x$.

11. $(z^2 + 6xy)\sqrt{x^3+5} = 2$; $\partial z/\partial y$.

En los problemas del 12 al 20 evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

12. $xz + xyz - 5 = 0$; $\partial z/\partial x, x = 1, y = 4, z = 1$.

13. $xz^2 + yz - 12 = 0$; $\partial z/\partial x, x = 2, y = -2, z = 3$.

14. $e^{zx} = xyz$; $\partial z/\partial y, x = 1, y = -e^{-1}, z = -1$.

15. $e^{yz} = -xyz$; $\partial z/\partial x, x = -e^2/2, y = 1, z = 2$.

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0$; $\partial z/\partial y, x = 2, y = 2, z = 6$.

17. $\ln z = 4x + y$; $\partial z/\partial x, x = 5, y = -20, z = 1$.

18. $\dfrac{rs}{s^2+t^2} = t$; $\partial r/\partial t, r = 0, s = 1, t = 0$.

19. $\dfrac{s^2+t^2}{rs} = 10$; $\partial t/\partial r, r = 1, s = 2, t = 4$.

20. $\ln(x + z) + xyz = x^2e^{y+z}$; $\partial z/\partial x, x = 0, y = 1, z = 1$.

21. Función de costos conjuntos Una función de costos conjuntos está definida en forma implícita por la ecuación

$$c + \sqrt{c} = 12 + q_A\sqrt{9 + q_B^2},$$

donde c denota el costo total (en dólares) de producir q_A unidades del producto A y q unidades del producto B.

a. Si $q_A = 6$ y $q_B = 4$, encuentre el correspondiente al valor de c.

b. Determine los costos marginales con respecto a q_A y q_B, cuando $q_A = 6$ y $q_B = 4$.

OBJETIVO Calcular derivadas parciales de orden superior.

16.5 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Si $z = f(x, y)$, entonces no sólo z es una función de x y y, también f_x y f_y lo son. Por lo que podemos diferenciar f_x y f_y para obtener **derivadas parciales de segundo orden** de f. Simbólicamente,

$$f_{xx} \text{ significa } (f_x)_x, \quad f_{xy} \text{ significa } (f_x)_y,$$

$$f_{yx} \text{ significa } (f_y)_x, \quad f_{yy} \text{ significa } (f_y)_y.$$

En términos de la notación ∂,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Observe que para encontrar f_{xy}, diferenciamos primero f con respecto a x. Para $\partial^2 z/\partial x\partial y$, primero diferenciamos con respecto a y.

Podemos extender nuestra notación más allá de las derivadas parciales de segundo orden. Por ejemplo, f_{xxy} (o $\partial^3 z/\partial y\partial x^2$) es una derivada parcial de tercer orden de f, esto es, la derivada parcial de f_{xx} (o $\partial^2 z/\partial x^2$) con respecto a y. Una generalización a derivadas parciales de orden superior con funciones de más de dos variables debería ser obvia.

EJEMPLO 1 Derivadas parciales de segundo orden

Encontrar las cuatro derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = x^2y + x^2y^2$.

Solución: como

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2,$$

tenemos

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2xy^2) = 2y + 2y^2$$

y

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy.$$

También, como

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2y,$$

tenemos

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x^2y) = 2x^2$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x^2y) = 2x + 4xy.$$

Las derivadas f_{xy} y f_{yx} se llaman **derivadas parciales mixtas.** Observe en el ejemplo 1 que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Bajo ciertas condiciones, las derivadas parciales mixtas de una función son iguales; esto es, el orden de diferenciación es irrelevante. Puede suponerse que éste es el caso para todas las funciones que consideremos.

EJEMPLO 2 Derivada parcial mixta

Encontrar el valor de $\left.\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}\right|_{(1,2,3)}$ *si* $w = (2x + 3y + 4z)^3$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= 3(2x + 3y + 4z)^2 \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 4z) \\
&= 6(2x + 3y + 4z)^2, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} &= 6 \cdot 2(2x + 3y + 4z)\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4z) \\
&= 36(2x + 3y + 4z), \\
\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x} &= 36 \cdot 4 = 144.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\left.\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}\right|_{(1,2,3)} = 144.$$

[18] EJEMPLO 3 Derivada parcial de segundo orden de una función implícita

Determinar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *si* $z^2 = xy$.

Solución: por medio de la diferenciación implícita determinamos primero $\partial z/\partial x$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy), \\
2z\frac{\partial z}{\partial x} &= y, \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{2z}, \quad z \neq 0.
\end{aligned}$$

Al diferenciar ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}yz^{-1}\right], \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2}yz^{-2}\frac{\partial z}{\partial x}.
\end{aligned}$$

[18] Si no se estudió la sección 16.4, omítase.

Al sustituir $y/(2z)$ por $\partial z/\partial x$, tenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2}\left(\frac{y}{2z}\right) = -\frac{y^2}{4z^3}, \quad z \neq 0.$$

Ejercicio 16.5

En los problemas del 1 al 10 encuentre las derivadas parciales indicadas.

1. $f(x, y) = 4x^2y$; $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$.

2. $f(x, y) = 4x^3 + 5x^2y^3 - 3y$; $f_x(x, y), f_{xx}(x, y)$.

3. $f(x, y) = 7x^2 + 3y$; $f_y(x, y), f_{yy}(x, y), f_{yyx}(x, y)$.

4. $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 1)$; $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$.

5. $f(x, y) = 9e^{2xy}$; $f_y(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yxy}(x, y)$.

6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$; $f_x(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y)$.

7. $f(x, y) = (x + y)^2(xy)$; $f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y)$.

8. $f(x, y, z) = xy^2z^3$; $f_x(x, y, z), f_{xz}(x, y, z), f_{xy}(x, y, z)$.

9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

10. $z = \dfrac{\ln(x^2 + 5)}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

En los problemas del 11 al 16 encuentre el valor indicado.

11. Si $f(x, y, z) = 7$, encuentre $f_{yxx}(4, 3, -2)$.

12. Si $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$, encuentre $f_{xyz}(1, 2, 3)$.

13. Si $f(l, k) = 5l^3k^6 - lk^7$, encuentre $f_{kkl}(8, 1)$.

14. Si $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - x^2y^2$, encuentre $f_{xxy}(5, 1)$.

15. Si $f(x, y) = y^2e^x + \ln(xy)$, encuentre $f_{xyy}(1, 1)$.

16. Si $f(x, y) = x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^3$, encuentre $f_{xy}(1, -1)$.

17. Función costo Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3},$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B.$$

Encuentre el valor de

$$\frac{\partial^2 c}{\partial q_A\,\partial q_B}$$

cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

18. Para $f(x, y) = x^4y^4 + 3x^3y^2 - 7x + 4$, demuestre que

$$f_{xyx}(x, y) = f_{xxy}(x, y).$$

19. Para $f(x, y) = 8x^3 + 2x^2y^2 + 5y^4$, demuestre que

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

20. Para $f(x, y) = xe^{y/x}$, demuestre que

$$xf_{xx}(x, y) + yf_{xy}(x, y) = 0.$$

21. Para $z = \ln(x^2 + y^2)$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

[19]**22.** Si $2z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

[19]**23.** Si $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

[19]**24.** Si $2z^2 = x^2 + 2xy + xz$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

[19]Omítase si no se estudió la sección 16.4.

OBJETIVO Demostrar cómo encontrar derivadas parciales de una función de funciones utilizando la regla de la cadena.

16.6 REGLA DE LA CADENA[20]

Suponga que un fabricante de dos productos relacionados A y B tiene una función de costos conjuntos dada por

$$c = f(q_A, q_B),$$

donde c es el costo total de producir las cantidades q_A y q_B de A y B, respectivamente. Además, suponga que las funciones de demanda para los productos son

$$q_A = g(p_A, p_B) \quad \text{y} \quad q_B = h(p_A, p_B),$$

donde p_A y p_B son los precios por unidad de A y B, respectivamente. Como c es una función de q_A y q_B, y ya que éstos son a su vez funciones de p_A y p_B, entonces c puede considerarse una función de p_A y p_B (de manera apropiada, las variables q_A y q_B se llaman *variables intermedias* de c). En consecuencia, deberíamos poder determinar $\partial c/\partial p_A$ la razón de cambio del costo total con respecto al precio de A. Una manera de hacer esto es sustituyendo las expresiones $g(P_A, P_B)$ y $h(p_A, p_B)$ por q_A y q_B, respectivamente, en $c = f(q_A, q_B)$. Entonces c es una función de p_A y p_B y podemos diferenciar c con respecto a p_A directamente. Este procedimiento tiene algunas desventajas, especialmente cuando f, g o h están dadas por una expresión complicada. Otra manera de atacar el problema sería por medio de la regla de la cadena (en realidad, *una* regla de la cadena), que ahora enunciamos sin demostrarla.

Regla de la cadena

Sea $z = f(x, y)$ donde x y y son funciones de r y s dadas por $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$. Si f, x y y tienen derivadas parciales continuas, entonces z es una función de r y s, y

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Observe que en la regla de la cadena, el número de variables intermedias de z (dos), es el mismo que el número de términos que componen cada una de $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$.

Regresando a la situación original en lo que concierne al productor, vemos que si f, q_A y q_B tienen derivadas parciales continuas, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = \frac{\partial c}{\partial q_A}\frac{\partial q_A}{\partial p_A} + \frac{\partial c}{\partial q_B}\frac{\partial q_B}{\partial p_A}.$$

EJEMPLO 1 Tasa de cambio del costo

Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total c de producir q_C cámaras y q_F rollos de película está dado por

$$c = 30q_C + 0.015q_Cq_F + q_F + 900.$$

[20]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos están dadas por

$$q_C = \frac{9000}{p_C\sqrt{p_F}} \quad \text{y} \quad q_F = 2000 - p_C - 400p_F,$$

donde p_C es el precio por cámara y p_F el precio por rollo de película. Encontrar la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$.

Solución: primero debemos determinar $\partial c/\partial p_C$. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial p_C} &= \frac{\partial c}{\partial q_C}\frac{\partial q_C}{\partial p_C} + \frac{\partial c}{\partial q_F}\frac{\partial q_F}{\partial p_C}\\ &= (30 + 0.015q_F)\left[\frac{-9000}{p_C^2\sqrt{p_F}}\right] + (0.015q_C + 1)(-1).\end{aligned}$$

Cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$, entonces $q_C = 90\sqrt{2}$ y $q_F = 1150$. Sustituyendo esos valores en $\partial c/\partial p_C$ y simplificando, obtenemos

$$\left.\frac{\partial c}{\partial p_C}\right|_{\substack{p_C=50\\ p_F=2}} \approx -123.2.$$

La regla de la cadena puede extenderse. Por ejemplo, suponga que $z = f(v, w, x, y)$ y que v, w, x y y son todas funciones de r, s y t. Entonces, si se suponen ciertas condiciones de continuidad, puede considerarse a z como una función de r, s y t, por lo que tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Observe que el número de variables intermedias de z (cuatro) es el mismo que el número de términos que forman cada una de $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

Consideremos ahora el caso en que $z = f(x, y)$ tal que $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Utilice los símbolos de derivadas parciales y los símbolos de derivadas ordinarias de manera apropiada.

Aquí usamos el símbolo dz/dt en vez de $\partial z/\partial t$, ya que z puede considerarse como una función de *una sola* variable t. En la misma forma, los símbolos dx/dt y dy/dt se usan en vez de $\partial z/\partial t$ y $\partial z/\partial t$. Como se ha visto, el número de términos que componen dz/dt es igual al número de variables intermedias de z. Otros casos se tratarán de manera similar.

EJEMPLO 2 Regla de la cadena

a. *Si* $w = f(x, y, z) = 3x^2y + xyz - 4y^2z^3$, *donde*

$$x = 2r - 3s, \quad y = 6r + s \quad y \quad z = r - s,$$

determinar $\partial w/\partial r$ *y* $\partial w/\partial s$.

Solución: como x, y y z, son funciones de r y s, entonces por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &= (6xy + yz)(2) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(6) + (xy - 12y^2z^2)(1)\\ &= x(18x + 13y + 6z) + 2yz(1 - 24z^2 - 6yz).\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= (6xy + yz)(-3) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(1) + (xy - 12y^2z^2)(-1)\\ &= x(3x - 19y + z) - yz(3 + 8z^2 - 12yz).\end{aligned}$$

b. *Si* $z = \dfrac{x + e^y}{y}$, *donde* $x = rs + se^{rt}$ *y* $y = 9 + rt$, *evaluar* $\partial z/\partial s$ *cuando* $r = -2$, $s = 5$ *y* $t = 4$.

Solución: como x y y son funciones de r, s y t (note que podemos escribir $y = 9 + rt + 0 \cdot s$), por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= \left(\frac{1}{y}\right)(r + e^{rt}) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(0) = \frac{r + e^{rt}}{y}.\end{aligned}$$

Si $r = -2$, $s = 5$ y $t = 4$, entonces $y = 1$. Así,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{\substack{r=-2\\ s=5\\ t=4}} = \frac{-2 + e^{-8}}{1} = -2 + e^{-8}.$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

a. *Determinar* $\partial y/\partial r$ *si* $y = x^2\ln(x^4 + 6)$ *y* $x = (r + 3s)^6$.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}\\ &= \left[x^2 \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 6} + 2x \cdot \ln(x^4 + 6)\right][6(r + 3s)^5]\\ &= 12x(r + 3s)^5\left[\frac{2x^4}{x^4 + 6} + \ln(x^4 + 6)\right].\end{aligned}$$

b. *Dado $z = e^{xy}$, $x = r - 4s$ y $y = r - s$, encontrar $\partial z/\partial r$ en términos de r y s.*

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(1)\\ &= (x + y)e^{xy}\end{aligned}$$

Como $x = r - 4s$ y $y = r - s$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= [(r - 4s) + (r - s)]e^{(r-4s)(r-s)}\\ &= (2r - 5s)e^{r^2-5rs+4s^2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 16.6

En los problemas del 1 al 12 encuentre las derivadas indicadas usando la regla de la cadena.

1. $z = 5x + 3y$, $x = 2r + 3s$, $y = r - 2s$; $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$.

2. $z = x^2 + 3xy + 7y^3$, $x = r^2 - 2s$, $y = 5s^2$; $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$.

3. $z = e^{x+y}$, $x = t^2 + 3$, $y = \sqrt{t^3}$; dz/dt.

4. $z = \sqrt{8x + y}$, $x = t^2 + 3t + 4$, $y = t^3 + 4$; dz/dt.

5. $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$, $x = 5t$, $y = 2t + 3$, $z = 6 - t$; dw/dt.

6. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = 2 - 3t$, $y = t^2 + 3$, $z = 4 - t$; dw/dt.

7. $z = (x^2 + xy^2)^3$, $x = r + s + t$, $y = 2r - 3s + 8t$; $\partial z/\partial t$.

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r^2 + s - t$, $y = r - s + t$; $\partial z/\partial r$.

9. $w = x^2 + xyz + y^3z^2$, $x = r - s^2$, $y = rs$, $z = 2r - 5s$; $\partial w/\partial s$.

10. $w = e^{xyz}$, $x = r^2s^3$, $y = r - s$, $z = rs^2$; $\partial w/\partial r$.

11. $y = x^2 - 7x + 5$, $x = 19rs + 2s^2t^2$; $\partial y/\partial r$.

12. $y = 4 - x^2$, $x = 2r + 3s - 4t$; $\partial y/\partial t$.

13. Si $z = (4x + 3y)^3$, donde $x = r^2s$ y $y = r - 2s$, evalúe $\partial z/\partial r$ cuando $r = 0$ y $s = 1$.

14. Si $z = \sqrt{5x + 2y}$, donde $x = 4t + 7$ y $y = t^2 - 3t + 9$, evalúe dz/dt cuando $t = 1$.

15. Si $w = e^{3x-y}(x^2 + 4z^3)$, donde $x = rs$, $y = 2s - r$ y $z = r + s$, evalúe $\partial w/\partial s$ cuando $r = 1$ y $s = -1$.

16. Si $y = x/(x - 5)$, donde $x = 2t^2 - 3rs - r^2t$, evalúe $\partial y/\partial t$ cuando $r = 0$, $s = 2$ y $t = -1$.

17. Función de costo Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B.$$

Use la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial c}{\partial p_A}$ y $\dfrac{\partial c}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

18. Suponga que $w = f(x, y)$, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$.

a. Establezca una regla de la cadena que dé dw/dt.

b. Suponga que $h(t) = t$, de modo que $w = f(x, t)$, donde $x = g(t)$. Use la parte (a) para encontrar dw/dt y simplifique su respuesta.

19. a. Suponga que w es una función de x y y, y que a su vez x y y son funciones de s y t. Establezca una regla de la cadena que exprese $\partial w/\partial s$ en términos de las derivadas de estas funciones.

b. Sea $w = 3x^2 \ln(x - 2y)$, donde $x = s\sqrt{t-2}$ y $y = t - 3e^{1-s}$. Use la parte (a) para evaluar $\partial w/\partial s$ cuando $s = 1$ y $t = 3$.

20. Función de producción Al considerar una función de producción $P = f(l, k)$, donde l es el trabajo y k el capital inicial, Fon, Boulier y Goldfarb[21] suponen que l está dada por $l = Lg(h)$, donde L es el número de trabajadores, h el número de horas por día por trabajador y $g(h)$ una función de la eficiencia del trabajo. Al maximizar la ganancia p dada por

$$p = aP - whL,$$

donde a es el precio por unidad de producción y w el salario por hora por trabajador, Fon, Boulier y Goldfarb determinan $\partial p/\partial L$ y $\partial p/\partial h$. Suponga que k es independiente de L y h, y determine estas derivadas parciales.

[21]V. Fon, B. L. Boulier y R. S. Goldfarb, "The Firm's Demand for Daily Hours of Work: Some Implications", *Atlantic Economic Journal*, XIII, núm. 1 (1985), 36-42.

OBJETIVO Analizar máximos y mínimos relativos para determinar puntos críticos, y aplicar la prueba de la segunda derivada para una función de dos variables.

16.7 MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Ahora extenderemos los conceptos de máximos y mínimos relativos (o extremos relativos) a funciones de dos variables.

Definición

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** en el punto (x_0, y_0), esto es, cuando $x = x_0$ y $y = y_0$, si para todo punto (x, y) en el plano que esté lo suficientemente cercano a (x_0, y_0) se tiene

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y). \tag{1}$$

Para un ***mínimo relativo,*** reemplazamos en la ecuación (1) $\geq$ por $\leq$.

Decir que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa, en forma geométrica, que el punto (x_0, y_0, z_0) sobre la gráfica de f es mayor que (o tan alto como) todos los otros puntos sobre la superficie "cercanos" a (x_0, y_0, z_0). En la figura 16.12(a), f tiene un máximo relativo en (x_1, y_1). En forma similar, la función f en la figura 16.12(b) tiene un mínimo relativo cuando $x = y = 0$, el cual corresponde a un punto *bajo* en la superficie.

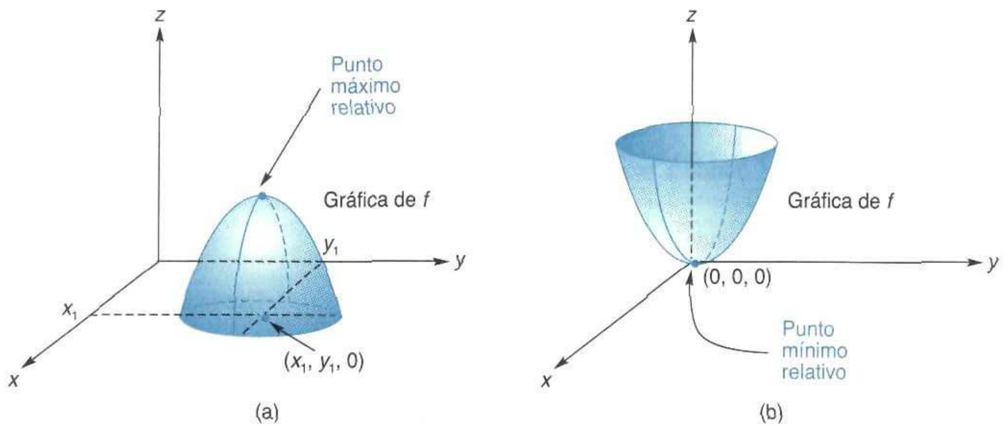


FIGURA 16.12 Extremos relativos.

Recuerde que para localizar los extremos de una función $y = f(x)$ de una variable, examinamos aquellos valores de x en el dominio de f para los cuales $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. Para funciones de dos (o más) variables, se sigue un procedimiento similar. Sin embargo, para las funciones que nos interesan, los extremos no se presentarán donde una derivada no exista, y tales situaciones no se considerarán.

Suponga que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0), como se indica en la figura 16.13(a). Entonces, la curva donde el plano $y = y_0$ interseca la superficie debe tener un máximo relativo cuando $x = x_0$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la superficie en la dirección x debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_x(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). En forma análoga, sobre la curva en que el plano $x = x_0$ interseca la superficie [véase la fig. 16.13(b)], debe haber un máximo relativo cuando $y = y_0$. Así, en la dirección y, la pendiente

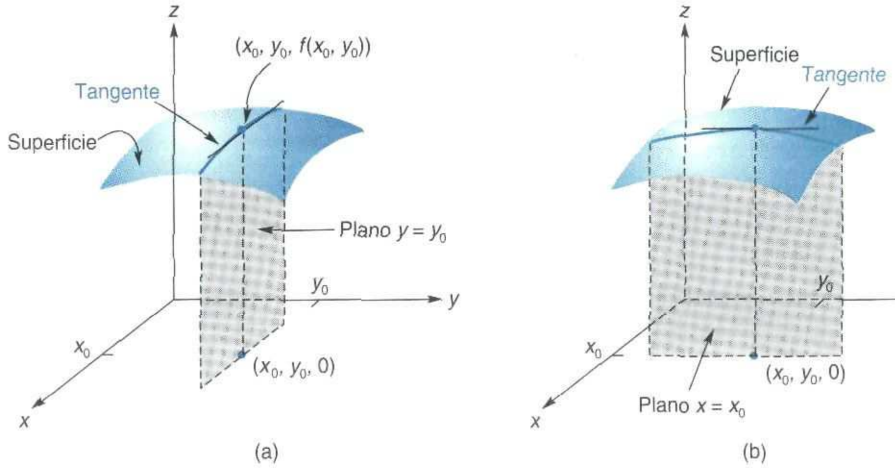


FIGURA 16.13 En el extremo relativo, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$.

de la tangente a la superficie debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_y(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). Como puede hacerse un análisis similar para un mínimo relativo, podemos combinar estos resultados de la manera siguiente:

Regla 1

Si $z = f(x, y)$ tiene un máximo o un mínimo relativo en (x_0, y_0), y si f_x y f_y están definidas para todo punto cercano a (x_0, y_0), es necesario que (x_0, y_0) sea una solución del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Un punto (x_0, y_0) para el cual $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se llama **punto crítico** de f. Así, de la regla 1 inferimos que, para localizar extremos relativos de una función debemos examinar sus puntos críticos.

Advertencia La regla 1 no implica que un extremo deba ser punto crítico. Al igual que en el caso de funciones de una variable, un punto crítico puede resultar ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Un punto crítico sólo es un *candidato* para ser un extremo relativo.

Dos comentarios adicionales: primero, la regla 1, así como el concepto de punto crítico, pueden extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, para localizar posibles extremos de $w = f(x, y, z)$, debemos examinar aquellos puntos para los cuales $w_x = w_y = w_z = 0$. Segundo, para una función cuyo dominio está restringido, un examen completo de los extremos absolutos debe incluir la consideración de los puntos frontera.

EJEMPLO 1 Determinación de puntos críticos

Encontrar los puntos críticos de las funciones siguientes.

a. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$.

Solución: como $f_x(x, y) = 4x - 2y + 5$ y $f_y(x, y) = 2y - 2x - 3$, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ -2x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Esto nos da $x = -1$ y $y = \frac{1}{2}$. Así, $(-1, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico.

b. $f(l, k) = l^3 + k^3 - lk$.

Solución:

$$\begin{cases} f_l(l, k) = 3l^2 - k = 0, & (2) \\ f_k(l, k) = 3k^2 - l = 0. & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (2), $k = 3l^2$. Sustituyendo el valor de k en la ecuación (3) se obtiene

$$0 = 27l^4 - l = l(27l^3 - 1).$$

De aquí que, $l = 0$ o $l = \frac{1}{3}$. Si $l = 0$, entonces $k = 0$; si $l = \frac{1}{3}$, entonces $k = \frac{1}{3}$. Por tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

c. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 100)$.

Solución: al resolver el sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 4x + y - z = 0, \\ f_y(x, y, z) = x + 2y - z = 0, \\ f_z(x, y, z) = -x - y + 100 = 0 \end{cases}$$

se obtiene el punto crítico $(25, 75, 175)$ como puede usted verificar.

EJEMPLO 2 Determinación de puntos críticos

Encontrar los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 4y + 7.$$

Solución: tenemos $f_x(x, y) = 2x - 4$ y $f_y(x, y) = 4y + 4$. El sistema

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

da el punto crítico $(2, -1)$. Observe que podemos escribir la función dada como

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 4x + 4 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + 1, \end{aligned}$$

y $f(2, -1) = 1$. Es claro que si $(x, y) \neq (2, -1)$, entonces $f(x, y) > 1$. De aquí que se tiene un mínimo relativo en $(2, -1)$. Además, se tiene un *mínimo absoluto* en $(2, -1)$, ya que $f(x, y) > f(2, -1)$ para *toda* $(x, y) \neq (2, -1)$.

Si bien en el ejemplo 2 pudimos mostrar que el punto crítico da lugar a un extremo relativo, en muchos casos no es fácil hacer esto. Sin embargo, existe una prueba de la segunda derivada que nos da las condiciones para las cuales un punto crítico será un máximo o un mínimo relativo. A continuación la enunciamos sin demostrarla.

Regla 2
Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Supongamos que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} en todo punto (x, y) cercano al punto crítico (x_0, y_0). Sea D la función definida por

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2.$$

Entonces

a. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);
b. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0);
c. si $D(x_0, y_0) < 0$, f no tiene ni un máximo relativo ni un mínimo relativo en (x_0,y_0);
d. si $D(x_0, y_0) = 0$, ninguna conclusión puede sacarse con respecto a extremos en (x_0, y_0) y requiere que se haga un análisis adicional.

EJEMPLO 3 Aplicación de la prueba de la segunda derivada

Examinar $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ con respecto a máximos y mínimos relativos, usando la prueba de la segunda derivada.

Solución: primero encontramos los puntos críticos:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - x.$$

Igual que en el ejemplo 1(b), al resolver $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, obtenemos los puntos críticos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ahora,

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy}(x, y) = 6y, \quad f_{xy}(x, y) = -1.$$

Por tanto,

$$D(x, y) = (6x)(6y) - (-1)^2 = 36xy - 1.$$

Como $D(0,0) = 36(0)(0) - 1 = -1 < 0$, no hay ningún extremo relativo en $(0, 0)$. Además, como $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 36(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) - 1 = 3 > 0$ y $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3}) = 2 > 0$, hay un mínimo relativo en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En este punto el valor de la función es

$$f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{3})^3 + (\tfrac{1}{3})^3 - (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{1}{27}.$$

EJEMPLO 4 Punto silla

Determine los extremos relativos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solución: al resolver

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2y = 0,$$

obtenemos el punto crítico $(0, 0)$. Aplicamos ahora la prueba de la segunda derivada. En $(0, 0)$ y, en realidad, en cualquier punto,

$$f_{xx}(x, y) = -2, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0.$$

Como $D(0,0) = (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0$, no existe un extremo relativo en $(0, 0)$. En la figura 16.14 se muestra un esbozo de $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Observe que para la curva que resulta de cortar la superficie con el plano $y = 0$, existe un *máximo* en $(0, 0)$; pero para la curva que resulta de cortar la superficie con el plano $x = 0$, existe un *mínimo* en $(0, 0)$. Así, sobre la *superficie* no puede existir ningún extremo relativo en el origen, aunque $(0, 0)$ es un punto crítico. Alrededor del origen la superficie tiene la forma de una silla de montar y $(0, 0)$ se llama *punto silla* de f.

La superficie en la figura 16.14 es llamada paraboloide hiperbólico.

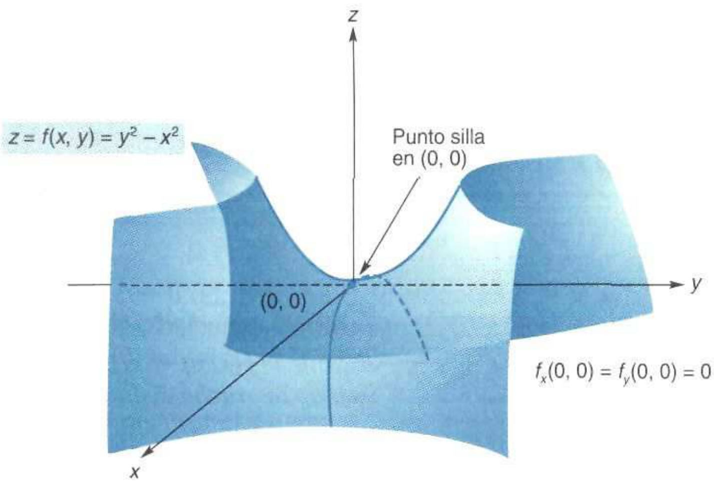


FIGURA 16.14 Punto silla.

EJEMPLO 5 Determinación de extremos relativos

Determinar los extremos relativos de $f(x, y) = x^4 + (x - y)^4$.

Solución: si hacemos

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4(x - y)^3 = 0 \tag{4}$$

y

$$f_y(x, y) = -4(x - y)^3 = 0, \tag{5}$$

entonces, de la ecuación (5) tenemos $x - y = 0$ o $x = y$. Sustituyendo en la ecuación (4) obtenemos $4x^3 = 0$ o $z = 0$. Así, $x = y = 0$, y $(0, 0)$ es el único punto crítico. En $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 12x^2 + 12(x - y)^2 = 0, \\ f_{yy}(x, y) &= 12(x - y)^2 = 0, \\ \text{y} \quad f_{xy}(x, y) &= -12(x - y)^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $D(0,0) = 0$ y la prueba de la segunda derivada no da información. Sin embargo, para toda $(x, y) \neq (0,0)$ tenemos $f(x, y) > 0$, mientras que $f(0, 0) = 0$. Por tanto, en $(0, 0)$ la gráfica de f tiene un punto inferior y concluimos que f tiene un mínimo relativo (y absoluto) en $(0, 0)$.

Aplicaciones

En muchas situaciones que implican funciones de dos variables, y en especial en sus aplicaciones, la naturaleza del problema dado es un indicador de si un punto crítico es realmente un máximo relativo (o absoluto) o un mínimo relativo (o absoluto). En tales casos, la prueba de la segunda derivada no se necesita. A menudo, en estudios matemáticos de problemas de aplicación se supone que se satisfacen las condiciones apropiadas de segundo orden.

EJEMPLO 6 Maximización de la producción

Sea P una función de producción dada por

$$P = f(l, k) = 0.54l^2 - 0.02l^3 + 1.89k^2 - 0.09k^3,$$

donde l y k son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encontrar los valores de l y k que maximizan P.

Solución: para encontrar los puntos críticos resolvemos el sistema $P_l = 0$ y $P_k = 0$.

$$\begin{aligned} P_l &= 1.08l - 0.06l^2 & P_k &= 3.78k - 0.27k^2 \\ &= 0.06l(18 - l) = 0. & &= 0.27k(14 - k) = 0. \\ l &= 0, l = 18. & k &= 0, k = 14. \end{aligned}$$

Hay cuatro puntos críticos: (0, 0), (0, 14), (18, 0) y (18, 14).

Aplicamos ahora la prueba de la segunda derivada a cada punto crítico. Tenemos

$$P_{ll} = 1.08 - 0.12l, \quad P_{kk} = 3.78 - 0.54k, \quad P_{lk} = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} D(l, k) &= P_{ll}P_{kk} - [P_{lk}]^2 \\ &= (1.08 - 0.12l)(3.78 - 0.54k). \end{aligned}$$

En (0, 0),

$$D(0, 0) = 1.08(3.78) > 0.$$

Como $D(0, 0) > 0$ y $P_{ll} = 1.08 > 0$, se tiene un mínimo relativo en (0, 0). En (0, 14),

$$D(0, 14) = 1.08(-3.78) < 0.$$

Como $D(0, 14) < 0$, no hay ningún extremo relativo en (0, 14). En (18, 0),

$$D(18, 0) = (-1.08)(3.78) < 0.$$

Como $D(18, 0) < 0$, no hay ningún extremo relativo en (18, 0). En (18, 14),

$$D(18, 14) = (-1.08)(-3.78) > 0.$$

Como $D(18, 14) > 0$ y $P_{ll} = -1.08 < 0$, se tiene un máximo relativo en (18, 14). Por lo que, la producción máxima se obtiene cuando $l = 18$ y $k = 14$.

EJEMPLO 7 Maximización de la utilidad

Una empresa produce dos tipos de dulces, A *y* B, *para los cuales los costos promedio de producción son, respectivamente, constantes de* \$2 *y* \$3 *por libra. Las* *cantidades q_A y q_B (en libras) de* A y B *que pueden venderse cada semana están dadas por las funciones de demanda conjunta*

$$q_{\mathrm{A}} = 400(p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}})$$

y

$$q_{\mathrm{B}} = 400(9 + p_{\mathrm{A}} - 2p_{\mathrm{B}}),$$

donde p_A y p_B son los precios de venta (en dólares por libra) de A *y* B, *respectivamente. Determinar los precios de venta que maximizan las utilidades de la compañía, P.*

Solución: la utilidad total está dada por

$$P = \begin{pmatrix}\text{utilidad}\\ \text{por libra}\\ \text{de A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{libras}\\ \text{vendidas}\\ \text{de A}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{utilidad}\\ \text{por libra}\\ \text{de B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{libras}\\ \text{vendidas}\\ \text{de B}\end{pmatrix}.$$

Para A y B, la utilidad por libra es $p_{\mathrm{A}} - 2$ y $p_{\mathrm{B}} - 3$, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} P &= (p_{\mathrm{A}} - 2)q_{\mathrm{A}} + (p_{\mathrm{B}} - 3)q_{\mathrm{B}} \\ &= (p_{\mathrm{A}} - 2)[400(p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}})] + (p_{\mathrm{B}} - 3)[400(9 + p_{\mathrm{A}} - 2p_{\mathrm{B}})]. \end{aligned}$$

Note que P está expresada como una función de dos variables, p_{A} y p_{B}. Para maximizar P, hacemos sus derivadas parciales iguales a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p_{\mathrm{A}}} &= (p_{\mathrm{A}} - 2)[400(-1)] + [400(p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}})](1) + (p_{\mathrm{B}} - 3)[400(1)] \\ &= 0 \qquad \text{(regla del producto)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p_{\mathrm{B}}} &= (p_{\mathrm{A}} - 2)[400(1)] + (p_{\mathrm{B}} - 3)[400(-2)] + 400(9 + p_A - 2p_B)](1) \\ &= 0 \qquad \text{(regla del producto)}. \end{aligned}$$

Al simplificar las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\begin{cases} -2p_{\mathrm{A}} + 2p_{\mathrm{B}} - 1 = 0, \\ 2p_{\mathrm{A}} - 4p_{\mathrm{B}} + 13 = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $p_{\mathrm{A}} = 5.5$ y $p_{\mathrm{B}} = 6$. Además, encontramos que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_{\mathrm{A}}^2} = -800, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_{\mathrm{B}}^2} = -1600, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_{\mathrm{B}}\partial p_{\mathrm{A}}} = 800.$$

Por tanto,

$$D(5.5, 6) = (-800)(-1600) - (800)^2 > 0.$$

Como $\partial^2 P/\partial p_{\mathrm{A}}^2 < 0$, tenemos un máximo, y la empresa debería vender el dulce A a \$5.50 por libra y el B a \$6.00 por libra.

[22] **EJEMPLO 8 Maximización de la utilidad de un monopolista**

Supóngase que un monopolista practica discriminación del precio al vender el mismo producto en dos mercados separados, a diferentes precios. Sea q_A el

[22]Omítase si no se estudió la sección 16.6.

número de unidades vendidas en el mercado A, donde la función de demanda es $p_A = f(q_A)$, y sea q_B el número de unidades vendidas en el mercado B, donde la función de demanda es $p_B = g(q_B)$. Entonces las funciones de ingreso para los dos mercados son

$$r_A = q_A f(q_A) \quad \text{y} \quad r_B = q_B g(q_B).$$

Suponga que todas las unidades se producen en una planta, y que la función de costo por producir $q(= q_A + q_B)$ unidades es $c = c(q)$. Tenga en mente que r_A es una función de q_A y r_B es una función de q_B. La utilidad, P, del monopolista es

$$P = r_A + r_B - c.$$

Para maximizar P con respecto a las producciones q_A y q_B, igualamos a 0 sus derivadas parciales. Comenzamos con

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial q_A} &= \frac{dr_A}{dq_A} + 0 - \frac{\partial c}{\partial q_A} \\ &= \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq}\frac{\partial q}{\partial q_A} = 0 \qquad \text{(regla de la cadena).}\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial q}{\partial q_A} = \frac{\partial}{\partial q_A}(q_A + q_B) = 1,$$

tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq} = 0. \tag{6}$$

De modo similar,

$$\frac{\partial P}{\partial q_B} = \frac{dr_B}{dq_B} - \frac{dc}{dq} = 0. \tag{7}$$

De las ecuaciones (6) y (7) obtenemos

$$\frac{dr_A}{dq_A} = \frac{dc}{dq} = \frac{dr_B}{dq_B}.$$

Pero dr_A/dq_A y dr_B/dq_B son ingresos marginales y dc/dq es costo marginal. Por tanto, para maximizar la utilidad, es necesario establecer los precios (y distribuir la producción) de tal manera que los ingresos marginales en ambos mercados sean los mismos y, hablando en términos no muy estrictos, también sean iguales al costo de la última unidad producida en la planta.

Ejercicio 16.7

En los problemas del 1 al 6 encuentre los puntos críticos de las funciones.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x + 4y + xy$.

2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y$.

3. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 + 1.5y^2 - 12x - 90y$.

4. $f(x, y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

5. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 200)$.

6. $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w(x - y + 2z - 6)$.

En los problemas del 7 al 20 encuentre los puntos de las funciones. Para cada punto crítico, determine, por medio de la prueba de la segunda derivada, si corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo, a ninguno de los dos, o si la prueba no da información.

7. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3$.

8. $f(x, y) = -2x^2 + 8x - 3y^2 + 24y + 7$.

9. $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$.

10. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1$.

11. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + y - 5.$

12. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2 - 2x + 2y - 2xy.$

13. $f(x, y) = \dfrac{1}{3}(x^3 + 8y^3) - 2(x^2 + y^2) + 1.$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3.$

15. $f(l, k) = 2lk - l^2 + 264k - 10l - 2k^2.$

16. $f(l, k) = l^3 + k^3 - 3lk.$

17. $f(p, q) = pq - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}.$

18. $f(x, y) = (x - 3)(y - 3)(x + y - 3).$

19. $f(x, y) = (y^2 - 4)(e^x - 1).$

20. $f(x, y) = \ln(xy) + 2x^2 - xy - 6x.$

En los problemas del 21 al 35, a menos que se indique otra cosa, las variables p_A y p_B denotan los precios de venta de los productos A y B, *respectivamente. En forma análoga, q_A y q_B denotan cantidades de* A y B *producidas y vendidas durante algún periodo. En todos los casos se supondrá que las variables usadas son unidades de producción, insumo, dinero, etcétera.*

21. Maximización de la producción Suponga que

$$P = f(l, k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$$

es una función de producción para una empresa. Encuentre las cantidades de entrada, l y k, que maximizan la producción P.

22. Maximización de la producción En cierto proceso manufacturero automatizado, las máquinas M y N se utilizan m y n horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es una función de m y n, dada por

$$Q = 4.5m + 5n - 0.5m^2 - n^2 - 0.25mn,$$

encuentre los valores de m y n que maximizan a Q.

23. Utilidad Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de 60 y 70 (centavos por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por

$$q_A = 5(p_B - p_A) \quad \text{y} \quad q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B).$$

Encuentre los precios de venta p_A y p_B que maximicen la ganancia de la empresa.

24. Utilidad Repita el problema 23, si los costos constantes de producción de A y B son a y b (centavos por libra), respectivamente.

25. Discriminación del precio Suponga que un monopolista practica la discriminación del precio en la venta de un producto, cobrando diferentes precios en dos mercados separados. En el mercado A la función de demanda es

$$p_A = 100 - q_A,$$

y en B es

$$p_B = 84 - q_B,$$

donde q_A y q_B son las cantidades vendidas por semana de A y de B, y p_A y p_B son los precios respectivos por unidad. Si la función de costo del monopolista es

$$c = 600 + 4(q_A + q_B),$$

¿cuánto debe venderse en cada mercado para maximizar la utilidad? ¿Qué precios de venta dan la utilidad máxima? Encuentre la utilidad máxima.

26. Utilidad Un monopolista vende dos productos competitivos A y B, para los cuales las funciones de demanda son

$$q_A = 1 - 2p_A + 4p_B \quad \text{y} \quad q_B = 11 + 2p_A - 6p_B.$$

Si el costo promedio constante de producir una unidad de A es 4 y para una unidad de B es 1, ¿cuántas unidades de A y de B tienen que venderse para maximizar la utilidad del monopolista?

27. Utilidad Para los productos A y B, la función de costos conjuntos es

$$c = 1.5q_A^2 + 4.5q_B^2,$$

y las funciones de demanda son $p_A = 36 - q_A^2$ y $p_B = 30 - q_B^2$. Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

28. Utilidad Para los productos A y B de un monopolista, la función de costos conjuntos es $c = (q_A + q_B)^2$ y las funciones de demanda son $q_A = 26 - p_A$ y $q_B = 10 - 0.25\,p_B$. Encuentre los valores de p_A y p_B que maximizan la utilidad. ¿Cuáles son las cantidades de A y B que corresponden a esos precios? ¿Cuál es la utilidad total?

29. Costo Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 6 pies^3. El costo por pie cuadrado de material es de \$3 para el fondo, \$1 para el frente y la parte de atrás, y \$0.50 para los otros dos lados. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que el costo de los materiales sea mínimo (véase la fig. 16.15).

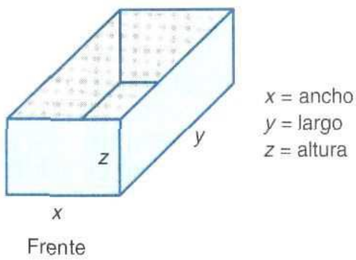


FIGURA 16.15 Diagrama para el problema 29.

30. Colusión Suponga que A y B son las únicas dos empresas en el mercado que venden el mismo producto (decimos que son *duopolistas*). La función de demanda industrial para el producto está dada por

$$p = 92 - q_A - q_B,$$

en donde q_A y q_B denotan la producción y venta de A y B, respectivamente. Para A, la función de costo es $c_A = 10q_A$; para B, es $c_B = 0.5q_B^2$. Suponga que las compañías deciden entrar en un acuerdo sobre el control de precios y producción para actuar en conjunto como un monopolio. En este caso, decimos que entran en una *colusión*. Demuestre que la función de utilidad para el monopolio está dada por

$$P = pq_A - c_A + pq_B - c_B.$$

Exprese P en función de q_A y q_B, y determine cómo debe distribuirse la producción para maximizar la utilidad del monopolio.

31. Suponga que $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$, donde x y y deben satisfacer la ecuación $3x - 2y = 7$. Encuentre los extremos relativos de f sujetos a la condición dada de x y y, despejando primero a y en la segunda ecuación. Sustituya el resultado para y en la ecuación dada. Así, f se expresa como función de una variable para la cual sus extremos pueden encontrarse de la manera usual.

32. Repita el problema 31 con $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6$ sujeta a la condición de que $2x - 8y = 20$.

33. Suponga que la función de costos conjuntos

$$c = q_A^2 + 3q_B^2 + 2q_Aq_B + aq_A + bq_B + d$$

tiene un valor mínimo relativo de 15 cuando $q_A = 3$ y $q_B = 1$. Determine los valores de las constantes a, b y d.

34. Suponga que la función de producción $q = f(k, l)$ tiene un valor máximo relativo cuando $k = 35$ y $l = 30$. También suponga que todas las segundas derivadas de f existen en el punto (35, 30) y que $f_{kk}(35, 30) = 0$.

a. Determine si
(i) $f_{kl}(35, 30)$ es un número positivo,
(ii) $f_{kl}(35, 30)$ es un número negativo, o
(iii) $f_{kl}(35, 30)$ es cero, o
(iv) si es imposible obtener alguna de estas conclusiones.

b. Determine si
(i) $f_{ll}(35, 30)$ debe ser positivo,
(ii) $f_{ll}(35, 30)$ debe ser negativo, o
(iii) $f_{ll}(35, 30)$ debe ser cero, o
(iv) si es imposible obtener alguna de estas conclusiones.

35. Utilidad de productos competitivos Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B, cuyas ecuaciones de demanda son

$$p_A = 35 - 2q_A^2 + q_B$$

y

$$p_B = 20 - q_B + q_A.$$

La función de costos conjuntos es

$$c = -8 - 2q_A^3 + 3q_Aq_B + 30q_A + 12q_B + \tfrac{1}{2}q_A^2.$$

a. ¿Cuántas unidades de A y B tienen que venderse para que el monopolista obtenga una utilidad máxima relativa? Use la prueba de la segunda derivada para justificar su respuesta.

b. Determine los precios de venta requeridos para obtener la utilidad máxima relativa. Encuentre también esta utilidad máxima relativa.

36. Utilidad y publicidad Un detallista ha determinado que el número de aparatos de televisión que puede vender por semana es

$$\frac{4x}{5 + x} + \frac{2y}{10 + y},$$

donde x y y representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y radio, respectivamente. La utilidad es de \$125 por venta menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal P está dada por la fórmula

$$P = 125\left[\frac{4x}{5 + x} + \frac{2y}{10 + y}\right] - x - y.$$

Encuentre los valores de x y de y para los cuales la utilidad es un máximo relativo. Use la prueba de la segunda derivada para verificar que su respuesta corresponde a una utilidad máxima relativa.

37. Utilidad de una cosecha de tomates El rendimiento r (en dólares por metro cuadrado de terreno) obtenido en la venta de una cosecha de tomates cultivados artificialmente en un invernadero está dado por

$$r = 5T(1 - e^{-x}),$$

donde T es la temperatura (en °C) mantenida en el invernadero y x es la cantidad de fertilizante empleado por metro cuadrado. El costo del fertilizante es $20x$ dólares por metro cuadrado y el costo del calentamiento está dado por $0.1T^2$ dólares por metro cuadrado.

a. Encuentre una expresión, en términos de T y x, para la utilidad por metro cuadrado que se obtiene por la venta de la cosecha de tomates.

b. Verifique que las parejas

$$(T, x) = (20, \ln 5) \quad \text{y} \quad (T, x) = (5, \ln \tfrac{5}{4})$$

son puntos críticos de la función de utilidad en la parte (a). [*Nota:* no tiene que obtener los pares.]

c. Los puntos en la parte (b) son los únicos puntos críticos de la función de utilidad de la parte (a). Use la prueba de la segunda derivada para determinar si cualquiera de esos puntos corresponde a una utilidad máxima relativa por metro cuadrado.

OBJETIVO Determinar puntos críticos para una función sujeta a restricciones, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange.

16.8 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ahora encontraremos los máximos y mínimos relativos de una función a la cual se imponen ciertas *restricciones*. Tal situación podría surgir si un fabricante desea minimizar una función de costos conjuntos y obtener un nivel particular de producción.

Suponga que queremos encontrar los extremos relativos de

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \tag{1}$$

sujeta a la restricción de que x, y y z deben satisfacer

$$x - y + 2z = 6. \tag{2}$$

Podemos transformar w, que es una función de tres variables, en una función de dos variables tal que la nueva función refleje la restricción (2). Despejando x en la ecuación (2), obtenemos

$$x = y - 2z + 6, \tag{3}$$

que al sustituirla por x en la ecuación (1), da

$$w = (y - 2z + 6)^2 + y^2 + z^2. \tag{4}$$

Como ahora, w está expresada como función de dos variables, para encontrar los extremos relativos seguimos el procedimiento usual de hacer igual a 0 sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y - 2z + 6) + 2y = 4y - 4z + 12 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -4(y - 2z + 6) + 2z = -4y + 10z - 24 = 0. \tag{6}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (5) y (6) obtenemos $y = -1$ y $z = 2$. Sustituyendo en la ecuación (3), obtenemos $x = 1$. Por tanto, el único punto crítico de la ecuación (1) sujeta a la restricción representada por la ecuación (2) es $(1, -1, 2)$. Si usamos la prueba de la segunda derivada en (4) cuando $y = -1$ y $z = 2$, tenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y} = -4,$$

$$D(-1, 2) = 4(10) - (-4)^2 = 24 > 0.$$

Así, w sujeta a tal restricción, tiene un mínimo relativo en $(1, -1, 2)$.

Esta solución se encontró usando la restricción para expresar una de las variables en la función original en términos de las otras variables. A menudo esto no es práctico, pero existe otro procedimiento llamado método de los **multiplicadores de Lagrange,**[23] que evita este paso y nos permite, no obstante, encontrar los puntos críticos.

El método es como sigue. Suponga que tenemos una función $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Construimos una función nueva, F, de *cuatro* variables, definida por la siguiente expresión (donde λ es la letra griega "lambda"):

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

Puede demostrarse que si (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$, existirá un valor de λ, digamos λ_0, tal que $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es

[23]En honor del matemático francés, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

un punto crítico de F. El número λ_0 se llama **multiplicador de Lagrange.** Además, si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de F, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f, sujeto a la restricción. Así, para encontrar los puntos críticos de f, sujetos a $g(x, y, z) = 0$, buscamos los puntos críticos de F. Éstos se obtienen resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0. \end{cases}$$

A veces debe usarse el ingenio para hacer esto. Una vez que obtenemos un punto crítico $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ de F, podemos concluir que (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f, sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Aunque f y g son funciones de tres variables, el método de los multiplicadores de Lagrange puede extenderse a n variables.

Ilustremos el método de los multiplicadores de Lagrange para el caso original, a saber,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{sujeta a} \quad x - y + 2z = 6.$$

Primero, escribimos la restricción como $g(x, y, z) = x - y + 2z - 6 = 0$. Segundo, formamos la función

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x - y + 2z - 6). \end{aligned}$$

A continuación, hacemos cada derivada parcial de F igual a 0. Por conveniencia escribiremos $F_x(x, y, z, \lambda)$ como F_x, y así sucesivamente:

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda = 0, & (7) \\ F_y = 2y + \lambda = 0, & (8) \\ F_z = 2z - 2\lambda = 0, & (9) \\ F_\lambda = -x + y - 2z + 6 = 0. & (10) \end{cases}$$

De las ecuaciones (7), (8) y (9), de inmediato vemos que

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = -\frac{\lambda}{2}, \quad \text{y} \quad z = \lambda. \tag{11}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (10), obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 2\lambda + 6 &= 0, \\ -3\lambda + 6 &= 0, \\ \lambda &= 2. \end{aligned}$$

Así, de la ecuación (11),

$$x = 1, \quad y = -1, \quad \text{y} \quad z = 2.$$

Por tanto, el único punto crítico de f, sujeto a la restricción, es $(1, -1, 2)$, donde puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. El método de los multiplicadores de Lagrange no indica directamente cuál de estas posibilidades se presentará, aunque por lo visto antes sabemos que se trata de un mínimo relativo. En los problemas de aplicación, la naturaleza del problema puede darnos una idea de cómo considerar un punto crítico. A menudo se supone la existencia ya sea de un mínimo relativo o de un máximo relativo y un punto crítico, se trata de acuerdo con tal hipótesis. En realidad se dispone de condiciones de segundo orden suficientes para los extremos relativos, pero no las consideraremos aquí.

EJEMPLO 1 Método de los multiplicadores de Lagrange

Encontrar los puntos críticos para $z = f(x, y) = 3x - y + 6$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: escribimos la restricción como $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y formamos la función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 3x - y + 6 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Haciendo $F_x = F_y = F_\lambda = 0$, tenemos:

$$\begin{cases} 3 - 2x\lambda = 0, & (12) \\ -1 - 2y\lambda = 0, & (13) \\ -x^2 - y^2 + 4 = 0. & (14) \end{cases}$$

Con las ecuaciones (12) y (13) podemos expresar x y y en términos de λ. Luego sustituimos los valores de x y y en la ecuación (14) y despejamos λ. Conocida λ, podemos encontrar x y y. Para comenzar, de las ecuaciones (12) y (13), tenemos

$$x = \frac{3}{2\lambda} \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Al sustituir en la ecuación (14), obtenemos

$$-\frac{9}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + 4 = 0,$$

$$-\frac{10}{4\lambda^2} + 4 = 0,$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Con estos valores de λ, podemos encontrar x y y. Si $\lambda = \sqrt{10}/4$, entonces

$$x = \frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{10}}{5}, \qquad y = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

De modo similar, si $\lambda = -\sqrt{10}/4$,

$$x = -\frac{3\sqrt{10}}{5}, \qquad y = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Entonces, los puntos críticos de f sujetos a la restricción son $(3\sqrt{10}/5, -\sqrt{10}/5)$ y $(-3\sqrt{10}/5, \sqrt{10}/5)$. Observe que los valores de λ no aparecen en la respuesta; son sólo un medio para obtenerla.

EJEMPLO 2 Método de los multiplicadores de Lagrange

Encontrar los puntos críticos para $f(x, y, z) = xyz$, donde $xyz \neq 0$, sujeta a la restricción $x + 2y + 3z = 36$.

Solución: tenemos

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 36).$$

Si hacemos $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ resulta, respectivamente,

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0, \\ xz - 2\lambda = 0, \\ xy - 3\lambda = 0, \\ -x - 2y - 3z + 36 = 0. \end{cases}$$

Como no podemos expresar directamente a x, y y z sólo en términos de λ, no podemos seguir el procedimiento usado en el ejemplo 1. Sin embargo, observe que podemos expresar los productos yz, xz y xy como múltiplos de λ. Esto sugiere que si nos fijamos en los cocientes de las ecuaciones, podemos obtener una relación entre dos variables que no contengan a λ (las lambdas se cancelarán). Para proceder a hacer esto, escribimos el sistema anterior de la siguiente manera:

$$\begin{cases} yz = \lambda, & (15) \\ xz = 2\lambda, & (16) \\ xy = 3\lambda, & (17) \\ x + 2y + 3z - 36 = 0. & (18) \end{cases}$$

Al dividir cada lado de la ecuación (15) entre el lado correspondiente de la ecuación (16), obtenemos

$$\frac{yz}{xz} = \frac{\lambda}{2\lambda}, \quad \text{o} \quad y = \frac{x}{2}.$$

Esta división es válida ya que $xyz \neq 0$. Similarmente, de las ecuaciones (15) y (17), obtenemos

$$\frac{yz}{xy} = \frac{\lambda}{3\lambda}, \quad \text{o} \quad z = \frac{x}{3}.$$

Ahora que hemos expresado y y z sólo en términos de x, podemos sustituir en la ecuación (18) y despejar x:

$$x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right) - 36 = 0,$$

$$x = 12.$$

Así, $y = 6$ y $z = 4$. De aquí que $(12, 6, 4)$ es el único punto crítico que satisface las condiciones dadas. Note que en este caso encontramos el punto crítico sin tener que calcular el valor de λ.

■

EJEMPLO 3 Minimización de costos

Supóngase que una empresa ha recibido un pedido por 200 unidades de su producto y desea distribuir su fabricación entre dos de sus plantas, planta 1 y planta 2. Sean q_1 y q_2 las producciones de las plantas 1 y 2, respectivamente, y supóngase que la función de costo total está dada por $c = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

Solución: minimizamos $c = f(q_1, q_2)$ dada la restricción $q_1 + q_2 = 200$. Tenemos

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200 - \lambda(q_1 + q_2 - 200),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial q_1} = 4q_1 + q_2 - \lambda = 0, & (19) \\ \dfrac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 2q_2 - \lambda = 0, & (20) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200 = 0. & (21) \end{cases}$$

Podemos eliminar λ de las ecuaciones (19) y (20) y obtener una relación entre q_1 y q_2. Después, al despejar q_2 en términos de q_1 y sustituir en la ecuación (21), podemos encontrar q_1. Comenzamos restando la ecuación (20) de la (19), lo que nos da

$$3q_1 - q_2 = 0, \quad \text{por lo que} \quad q_2 = 3q_1.$$

Al sustituir en la ecuación (21), tenemos

$$\begin{aligned} -q_1 - 3q_1 + 200 &= 0, \\ -4q_1 &= -200, \\ q_1 &= 50. \end{aligned}$$

Así, $q_2 = 150$. La planta 1 debe producir 50 unidades y 150 la planta 2, para minimizar los costos.

Puede hacerse una observación interesante con respecto al ejemplo 3. De la ecuación (19), $\lambda = 4q_1 + q_2 = \partial c/\partial q_1$, que es el costo marginal de la planta 1. De la ecuación (20), $\lambda = q_1 + 2q_2 = \partial c/\partial q_2$ que es el costo marginal de la planta 2. Por consiguiente, $\partial c/\partial q_1 = \partial c/\partial q_2$, y concluimos que para minimizar el costo es necesario que los costos marginales de cada planta sean iguales entre sí.

EJEMPLO 4 Combinación de insumo para tener un costo mínimo

Supóngase que una empresa debe producir una cantidad dada P_0 de un producto de la manera más barata posible. Si se tienen dos factores de entrada, l y k, y sus precios por unidad se fijan en p_l y p_k, respectivamente, analice el significado económico de combinar las entradas (insumos) para lograr el menor costo. Esto es, describa la combinación de insumos para tener un costo mínimo.

Solución: sea $P = f(l, k)$ la función de producción. Entonces, debemos minimizar la función costo

$$c = lp_l + kp_k,$$

sujeta a

$$P_0 = f(l, k).$$

Construimos

$$F(l, k, \lambda) = lp_l + kp_k - \lambda[f(l, k) - P_0].$$

Tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial l} = p_l - \lambda\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] = 0, & (22) \\ \dfrac{\partial F}{\partial k} = p_k - \lambda\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = 0, & (23) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -f(l, k) + P_0 = 0. \end{cases}$$

De las ecuaciones (22) y (23),

$$\lambda = \frac{p_l}{\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l,k)]} = \frac{p_k}{\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l,k)]}. \tag{24}$$

Por consiguiente,

$$\frac{p_l}{p_k} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l,k)]}{\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l,k)]}.$$

Concluimos que cuando se usa la combinación de factores para costo mínimo, la razón de las productividades marginales de los factores de entrada debe ser igual a la de sus precios unitarios correspondientes.

Restricciones múltiples

El método de los multiplicadores de Lagrange no está limitado a problemas con una sola restricción. Por ejemplo, suponga que $f(x, y, z, w)$ está sujeta a las restricciones $g_1(x, y, z, w) = 0$ y $g_2(x, y, z, w) = 0$. Entonces, se tienen dos lambdas, λ_1 y λ_2 (una para cada restricción) y construimos la función $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$. Resolvemos entonces el sistema

$$F_x = F_y = F_z = F_w = F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} = 0.$$

EJEMPLO 5 Método de los multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

Encontrar los puntos críticos para $f(x, y, z) = xy + yz$, sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 8$ y $yz = 8$.

Solución: sea

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 8) - \lambda_2(yz - 8).$$

Entonces

$$\begin{cases} F_x = y - 2x\lambda_1 = 0, \\ F_y = x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0, \\ F_z = y - y\lambda_2 = 0, \\ F_{\lambda_1} = -x^2 - y^2 + 8 = 0, \\ F_{\lambda_2} = -yz + 8 = 0. \end{cases}$$

Probablemente, usted estaría de acuerdo con que este sistema da la impresión de ser difícil de resolver. Sin embargo, con un poco de ingenio puede ser resuelto. Enseguida mostramos una secuencia de operaciones que nos permitirá encontrar los puntos críticos. Podemos escribir el sistema como

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x} = \lambda_1, & (25) \\ x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0, & (26) \\ \lambda_2 = 1, & (27) \\ x^2 + y^2 = 8, & (28) \\ z = \dfrac{8}{y}. & (29) \end{cases}$$

Al sustituir $\lambda_2 = 1$ de la ecuación (27) en la ecuación (26) y simplificar obtenemos la ecuación $x - 2y\lambda_1 = 0$, por lo que

$$\lambda_1 = \frac{x}{2y}.$$

De nuevo sustituimos, ahora en la ecuación (25) y resulta

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y},$$

$$y^2 = x^2. \tag{30}$$

Sustituyendo en la ecuación (28) se obtiene $x^2 + x^2 = 8$, de donde $x = \pm 2$. Si $x = 2$, entonces, de la ecuación (30) tenemos $y = \pm 2$. Similarmente, si $x = -2$, entonces $y = \pm 2$. Así, si $x = 2$, y $y = 2$, entonces de la ecuación (29) obtenemos $z = 4$. Continuando este procedimiento obtenemos cuatro puntos críticos:

$$(2, 2, 4), (2, -2, -4), (-2, 2, 4) \text{ y } (-2, -2, -4).$$

Ejercicio 16.8

En los problemas del 1 al 12 encuentre por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujetas a las restricciones indicadas.

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6$; $2x - 8y = 20$.

2. $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$; $3x - 2y = 7$.

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $2x + y - z = 9$.

4. $f(x, y, z) = x + y + z$; $xyz = 27$.

5. $f(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 + z^2$; $x - 3y - 4z = 16$.

6. $f(x, y, z) = xyz^2$; $x - y + z = 20$ $(xyz^2 \neq 0)$.

7. $f(x, y, z) = xyz$; $x + 2y + 3z = 18$ $(xyz \neq 0)$.

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 3$.

9. $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$; $2x - y = 0$, $y + z = 0$.

10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 4$, $x - y + z = 4$

11. $f(x, y, z) = xyz$; $x + y + z = 12$, $x + y - z = 0 (xyz \neq 0)$.

12. $f(x, y, z, w) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4w^2$; $4x - 8y + 6z + 16w = 6$.

13. Asignación de producción Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$c = f(q_1, q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000,$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? (Suponga que el punto crítico obtenido corresponde al costo mínimo.)

14. Asignación de producción Repita el problema 13, si la función de costo es

$$c = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$$

y deben producirse un total de 200 unidades.

15. Maximización de la producción La función de producción de una empresa es

$$f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2.$$

El costo de l y k para la compañía es de 4 y 8 por unidade, respectivamente. Si la empresa quiere que el costo total de insumos sea 88, encuentre la producción máxima posible sujeta a este control de presupuesto (suponga que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

16. Maximización de la producción Repita el problema 15, considerando que

$$f(l, k) = 60l + 30k - 2l^2 - 3k^2$$

y que la restricción de presupuesto es $2l + 3k = 30$.

17. Presupuesto para publicidad Una compañía de cómputo tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$60,000. Su departamento de mercadotecnia estima que si se gastan x dólares cada mes en publicidad en periódicos, y y dólares cada mes en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por $S = 90x^{1/4}y^{3/4}$ dólares. Si la utilidad es el 10% de las ventas, menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual (suponga que el punto crítico obtenido corresponde a una utilidad máxima).

18. Maximización de la producción Cuando se invierten l unidades de trabajo y k unidades de capital, la producción total, q, de un fabricante está dada por la función Cobb-Douglas de producción $q = 5l^{1/5}k^{4/5}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$22 y cada unidad de capital \$66. Si se van a gastar exactamente \$23,760 en la producción, determine las unidades de trabajo y de capital que deben invertirse para maximizar la producción (suponga que el máximo se presenta en el punto crítico obtenido).

19. Propaganda política La publicidad de los partidos políticos en los periódicos siempre tiene algunos efectos negativos. El partido que fue electo recientemente, supuso que los tres temas más importantes, X, Y y Z, para la elección, debían mencionarse cada uno en un anuncio publicitario con espacios de x, y y z unidades, respectivamente. El efecto adverso combinado de esta publicidad se estimó como

$$B(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

Consideraciones estéticas determinaron que el espacio total para X y Y juntos debía ser 20, y consideraciones objetivas sugirieron que el espacio total asignado a Y y Z juntos debía ser también de 20 unidades. ¿Qué valores de x, y y z en cada anuncio produciría el menor efecto negativo? (Suponga que cualquier punto crítico obtenido representa un efecto mínimo.)

20. Maximización de la utilidad Suponga que la función de producción de un fabricante está dada por

$$16q = 65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2,$$

y que el costo para el fabricantes es de \$8 por unidad de trabajo y de \$16 por unidad de capital, de manera que el costo total (en dólares) es $8l + 16k$. El precio de venta del producto es de \$64 por unidad.

a. Exprese la utilidad en función del l y k. Dé su respuesta en forma desarrollada.
b. Encuentre todos los puntos críticos de la función de utilidad obtenida en la parte (a). Aplique la prueba de la segunda derivada en cada punto crítico. Si la utilidad es un máximo relativo en un punto crítico, calcule la utilidad máxima relativa correspondiente.
c. La utilidad puede considerarse como una función de l, k y q (esto es, $P = 64q - 8l - 16k$) sujeta a la restricción

$$16q = 65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2.$$

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar todos los puntos críticos de $P = 64q - 8l - 16k$, sujeta a la restricción.

En los problemas del 21 al 24 remítase a la definición siguiente. Una función de utilidad (o satisfacción) es una función que asocia una medida a la utilidad o satisfacción que un cliente obtiene del consumo de productos por unidad de tiempo. Suponga que $U = f(x, y)$ es una función de este tipo, donde x y y son las cantidades de los dos productos, X y Y. La utilidad marginal de X es $\partial U/\partial x$ y representa, en forma aproximada, el cambio en la utilidad total que resulta al cambiar en una unidad el consumo del producto X por unidad de tiempo. Definimos la utilidad marginal de Y de manera similar. Si los precios de X y Y son p_x y p_y, respectivamente, y el consumidor tiene un ingreso o presupuesto de I para gastar, entonces la restricción por el presupuesto es

$$xp_x + yp_y = I.$$

En los problemas del 21 al 23 encuentre las cantidades de cada producto que el consumidor deberá comprar, sujeto al presupuesto, que le dará una satisfacción máxima. Esto es, en los problemas 21 y 22, encuentre valores de x y y que maximicen $U = f(x, y)$, sujeta a la restricción $xp_x + yp_y = I$. En el problema 23 lleve a cabo un procedimiento similar. Suponga que tal máximo existe.

21. $U = x^3y^3$; $p_x = 2$, $p_y = 3$, $I = 48$ ($x^3y^3 \neq 0$).

22. $U = 46x - (5x^2/2) + 34y - 2y^2$; $p_x = 5$, $p_y = 2$, $I = 30$.

23. $U = f(x, y, z) = xyz$; $p_x = 2$, $p_y = 1$, $p_z = 4$, $I = 60$ ($xyz \neq 0$).

---

24. Sea $U = f(x, y)$ una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria $xp_x + yp_y = I$, donde p_x, p_y e I son constantes. Demuestre que para maximizar la satisfacción es necesario que

$$\lambda = \frac{f_x(x, y)}{p_x} = \frac{f_y(x, y)}{p_y},$$

donde $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son las utilidades marginales de X y Y, respectivamente. Demuestre que $f_x(x, y)/p_x$ es la utilidad marginal del valor de un dólar de X. Por tanto, la satisfacción máxima se obtiene cuando el consumidor ajusta su presupuesto de manera que la utilidad marginal de un dólar de X sea igual a la utilidad marginal por dólar de Y. Procediendo igual que antes, verifique si esto es cierto para $U = f(x, y, z, w)$ sujeta a la correspondiente ecuación presupuestaria. En cada caso, λ se llama *utilidad marginal del ingreso*.

OBJETIVO Desarrollar el método de mínimos cuadrados e introducir los números índices.

16.9 Rectas de regresión[24]

Para estudiar la influencia de la publicidad en las ventas, una empresa recopiló los datos mostrados en la tabla 16.4. La variable x denota los gastos de publicidad en cientos de dólares y la variable y denota el ingreso por ventas en miles de dólares. Si se grafica en un plano cada pareja (x, y) de datos, el resultado se llama **diagrama de dispersión** [véase la fig. 16.16(a)].

TABLA 16.4

Gastos, x	2	3	4.5	5.5	7
Ingresos, y	3	6	8	10	11

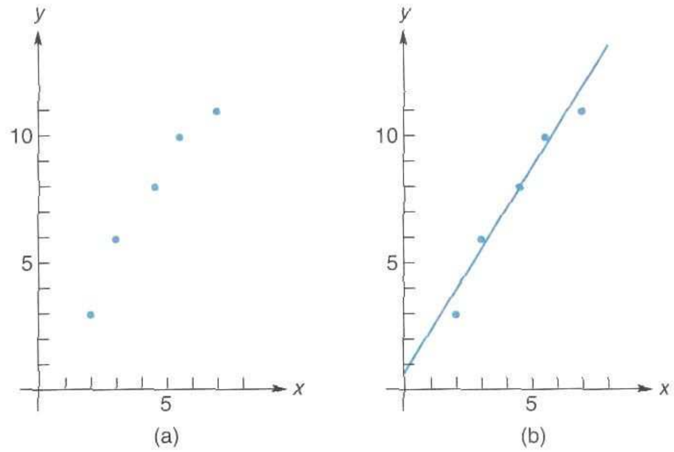


FIGURA 16.16 Diagrama de dispersión y la recta que aproxima los puntos de datos.

Al observar la distribución de los puntos, es razonable suponer que existe una relación aproximadamente lineal entre x y y. Con base en esto, podemos ajustar "a ojo" una recta que aproxime los datos dados [véase la fig. 16.16(b)] y con ella predecir un valor de y para un valor dado de x. Esta recta parece ser consistente con la tendencia de los datos, aunque igualmente podrían dibujarse otras rectas. Por desgracia, la determinación de una recta "a ojo" no es un procedimiento muy objetivo. Queremos aplicar criterios que especifiquen lo que entenderemos por la recta de "mejor ajuste". Una técnica usada con frecuencia es el **método de mínimos cuadrados.**

Para aplicar el método de los mínimos cuadrados a los datos de la tabla 16.4, suponemos primero que x y y están relacionados en una forma casi lineal

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \tag{1}$$

[24]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

que aproxima los puntos dados si se escogen adecuadamente las constantes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ (que se lee "*a* testada" y "*b* testada", respectivamente). Para un valor dado de x en la ecuación (1), $\hat{y}$ es el valor correspondiente predicho para y, y $(x, \hat{y})$ estará sobre la línea. Nuestro objetivo es que $\hat{y}$ esté cerca de y.

Cuando $x = 2$, el valor observado de y es 3. Nuestro valor predicho para y se obtiene sustituyendo $x = 2$ en la ecuación (1), lo que da $\hat{y} = \hat{a} + 2\hat{b}$. El error de estimación, o desviación vertical del punto, (2, 3) respecto a la recta, es $\hat{y} - y$, o

$$\hat{a} + 2\hat{b} - 3.$$

Esta desviación vertical se indica (en forma exagerada para mayor claridad) en la figura 16.17. Similarmente, la desviación vertical de (3, 6) respecto a la línea es $\hat{a} + 3\hat{b} - 6$, como también se ilustra. Para evitar posibles dificultades

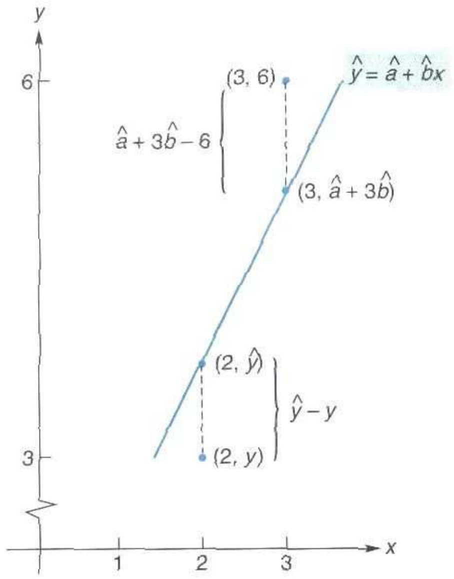


FIGURA 16.17 Desviación vertical de los puntos de datos de la recta de aproximación.

asociadas con las desviaciones positivas y negativas, consideraremos los cuadrados de las desviaciones y formaremos la suma S de todos esos cuadrados para los datos dados:

$$S = (\hat{a} + 2\hat{b} - 3)^2 + (\hat{a} + 3\hat{b} - 6)^2 + (\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8)^2 +$$

$$(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10)^2 + (\hat{a} + 7\hat{b} - 11)^2.$$

El método de mínimos cuadrados requiere que se escoja como *línea* de "mejor ajuste" la obtenida al seleccionar $\hat{a}$ y $\hat{b}$ de manera que minimicen S. Podemos minimizar S con respecto a $\hat{a}$ y $\hat{b}$ si resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 0. \end{cases}$$

Tenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 2(\hat{a} + 2\hat{b} - 3) + 2(\hat{a} + 3\hat{b} - 6) + 2(\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8) + 2(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10) + 2(\hat{a} + 7\hat{b} - 11) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 4(\hat{a} + 2\hat{b} - 3) + 6(\hat{a} + 3\hat{b} - 6) + 9(\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8) + 11(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10) + 14(\hat{a} + 7\hat{b} - 11) = 0,$$

que al simplificarlo queda

$$\begin{cases} 5\hat{a} + 22\hat{b} = 38, \\ 44\hat{a} + 225\hat{b} = 384. \end{cases}$$

Despejando $\hat{a}$ y $\hat{b}$ obtenemos

$$\hat{a} = \frac{102}{157} \approx 0.65, \quad \hat{b} = \frac{248}{157} \approx 1.58.$$

Puede demostrarse que estos valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ conducen a un valor mínimo de S. Por tanto, desde el punto de vista de mínimos cuadrados, la línea de mejor ajuste $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ es

$$\hat{y} = 0.65 + 1.58x. \qquad (2)$$

Ésta es, de hecho, la recta indicada en la figura 16.16(b). Se llama **recta de mínimos cuadrados de y sobre x** o **recta de regresión de y sobre x.** Las constantes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se llaman **coeficientes de regresión lineal.** Con la ecuación (2) podemos predecir que cuando $x = 5$, el valor correspondiente de y es $\hat{y} = 0.65 + 1.58(5) = 8.55$.

En general, suponga que nos dan los siguientes pares n de observaciones:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Si suponemos que x y y están más o menos relacionadas en forma lineal y que podemos ajustarlas a una recta

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

que se aproxime a los datos, la suma de los cuadrados de los errores $\hat{y} - y$ es

$$S = (\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1)^2 + (\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2)^2 + \cdots + (\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n)^2.$$

Como S debe minimizarse con respecto a $\hat{a}$ y $\hat{b}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 2(\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1) + 2(\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2) + \cdots + 2(\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 2x_1(\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1) + 2x_2(\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2) + \cdots + 2x_n(\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n) = 0. \end{cases}$$

Al dividir ambas ecuaciones entre 2 y usando la notación sigma, tenemos

$$\begin{cases} \hat{a}n + \hat{b}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \\ \hat{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0. \end{cases}$$

En forma equivalente, tenemos el sistema de las llamadas *ecuaciones normales:*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{a}n + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i, & (3) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. & (4) \end{cases}$$

Para despejar $\hat{b}$ multiplicamos primero la ecuación (3) por $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y la ecuación (4) por n:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \hat{a}n\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, & (5) \\ n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{a}n\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}n\sum_{i=1}^{n} x_i^2. & (6) \end{cases}$$

Restamos la ecuación (5) de la (6) y obtenemos

$$\begin{aligned} n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) &= \hat{b}n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\ &= \hat{b}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (7)$$

Al despejar $\hat{a}$ de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (8)$$

Puede demostrarse que esos valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ minimizan a S.

Si calculamos los coeficientes de regresión lineal $\hat{a}$ y $\hat{b}$ con las fórmulas de las ecuaciones (7) y (8), obtendremos la recta de regresión de y sobre x, esto es, $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, que puede usarse para estimar y para un valor dado de x.

En el siguiente ejemplo, así como en los ejercicios, usted encontrará **números índice.** Éstos se usan para relacionar una variable en un periodo con la misma variable en otro periodo; este último es llamado *periodo base*. Un número índice es un número *relativo* para describir datos que cambian con el tiempo. Tales datos se denominan *series de tiempo*.

TABLA 16.5

Año	Producción (en miles)	Índice [1994=100]
1993	828	92
1994	900	100
1995	936	104
1996	891	99
1997	954	106

Por ejemplo, considere los datos de la serie de tiempo de la producción total de dispositivos mecánicos en Estados Unidos de 1993 a 1997, que se muestran en la tabla 16.5. Si escogemos 1994 como el año base y le asignamos el número índice 100, entonces los otros números se obtienen dividiendo cada producción anual entre la producción de 1994, que fue 900, y multiplicando el resultado por 100. Por ejemplo, podemos interpretar el índice 106 de 1997 con el significado de que la producción en ese año fue del 106% en relación con la de 1994.

En los análisis de series de tiempo, los números índice son obviamente de gran utilidad cuando los datos implican números de gran magnitud. Pero en forma independiente de la magnitud de los datos, los números índices simplifican la tarea de comparar cambios en los datos a lo largo de periodos.

EJEMPLO 1 Determinación de una recta de regresión

Por medio de la recta de regresión lineal, usar los datos de la tabla siguiente para representar la tendencia del índice de compras de bienes y servicios del gobierno de Estados Unidos entre 1995 *y* 2000 (1995 = 100).

Año	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**
Índice	100	107	117	127	135	150

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 2001, Oficina de Prensa del Gobierno de Estados Unidos, Washington, DC, 2001.

Solución: denotaremos con x el tiempo y con y el índice, y trataremos a y como una función lineal de x. Además designaremos 1995 con $x = 1$, 1996 con $x = 2$, y así sucesivamente. Hay $n = 6$ pares de mediciones. Para determinar los coeficientes de regresión lineal usando las ecuaciones (7) y (8), efectuamos primero las siguientes operaciones aritméticas:

Año	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1995	1	100	100	1
1996	2	107	214	4
1997	3	117	351	9
1998	4	127	508	16
1999	5	135	675	25
2000	6	150	900	36
Total	21	736	2748	91
	$= \sum_{i=1}^{6} x_i$	$= \sum_{i=1}^{6} y_i$	$= \sum_{i=1}^{6} x_iy_i$	$= \sum_{i=1}^{6} x_i^2$

De aquí que, por la ecuación (8)

$$\hat{a} = \frac{91(736) - 21(2748)}{6(91) - (21)^2} \approx 88.3,$$

y por la ecuación (7),

$$\hat{b} = \frac{6(2748) - 21(736)}{6(91) - (21)^2} \approx 9.83.$$

Por tanto, la recta de regresión de y sobre x es

$$\hat{y} = 88.3 + 9.83x,$$

cuya gráfica, así como un diagrama de dispersión, se muestran en la figura 16.18.

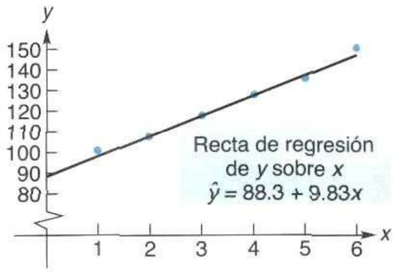


FIGURA 16.18 Recta de regresión lineal para el déficit presupuestario.

Tecnología

La calculadora TI-83 tiene una función que calcula la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para un conjunto de datos. Ilustraremos esto dando el procedimiento para los seis puntos dados (x_i, y_i) del ejemplo 1. Después de oprimir STAT y ENTER, introducimos todos los valores x y y (véase la fig. 16.19). A continuación oprimimos STAT y nos movemos a CALC. Por último, presionamos 8 y ENTER, y obtenemos los resultados que se muestran en la figura 16.20 [el número $r \approx 0.99448$ se llama *coeficiente de correlación* y es una medida del grado en que están relacionados linealmente los datos dados].

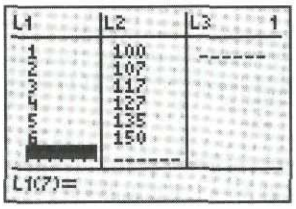


FIGURA 16.19 Datos del ejemplo 1.

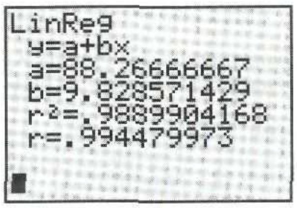


FIGURA 16.20 Ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

Ejercicio 16.9

Para este conjunto de ejercicios, utilice una calculadora gráfica si se lo permite su profesor.

En los problemas del 1 al 4 encuentre una ecuación de la recta de regresión lineal por mínimos cuadrados de y sobre x para los datos dados, y esboce la recta y los datos. Prediga el valor de y correspondiente a $x = 3.5$.

1.

x	1	2	3	4	5	6
y	1.5	2.3	2.6	3.7	4.0	4.5

2.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	1.8	2	4	4.5	7	9

3.

x	2	3	4.5	5.5	7
y	3	5	8	10	11

4.

x	2	3	4	5	6	7
y	2.4	2.9	3.3	3.8	4.3	4.9

5. **Demanda** Una empresa encuentra que cuando el precio de su producto es p dólares por unidad, el número de unidades vendidas es q, como se indica en la tabla siguiente:

Precio, p	10	30	40	50	60	70
Demanda, q	70	68	63	50	46	32

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de q sobre p.

6. **Agua y rendimiento de una cosecha** En una granja, un ingeniero agrónomo determina que la cantidad de agua aplicada (en pulgadas) y el rendimiento correspondiente de cierta cosecha (en toneladas por acre) son como se indica en la tabla siguiente:

Agua, x	8	16	24	32
Rendimiento, y	4.1	4.5	5.1	6.1

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x. Prediga y cuando $x = 12$.

7. **Virus** Un conejo fue inoculado con un virus y x horas después de que fue aplicada la inyección, se midió su temperatura y (en grados Fahrenheit).[25] Los datos están en la tabla siguiente:

Tiempo transcurrido, x	24	32	48	56
Temperatura, y	102.8	104.5	106.5	107.0

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x y estime la temperatura del conejo 40 horas después de inyectado.

8. **Psicología** En un experimento psicológico, cuatro personas se sometieron a un estímulo. Antes y después del estímulo, se midió su presión sanguínea sistólica (en milímetros de mercurio). Los datos se muestran en la tabla siguiente:

	Presión sanguínea			
Antes del estímulo, x	130	132	136	141
Después del estímulo, y	139	140	144	148

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x, donde x y y se definen en la tabla.

Para las series de tiempo en los problemas 9 y 10 ajuste una recta de regresión lineal por medio de mínimos cuadrados; esto es, encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x. En cada caso haga corresponder el primer año en la tabla con $x = 1$.

9.

PRODUCCIÓN DEL PRODUCTO A, 1993–1997 (en miles de unidades)

Año	**Producción**
1993	10
1994	15
1995	16
1996	18
1997	21

10. **Producción industrial** En la tabla siguiente, haga corresponder $x = 1$ al año 1975, $x = 3$ a 1977 y así sucesivamente:

ÍNDICE DE PRODUCCIÓN INDUSTRIAL – MAQUINARIA ELÉCTRICA (1997 = 100)

Año	**Índice**
1975	77
1977	100
1979	126
1981	134

Fuente: Reporte Económico del Presidente 1988, Oficina de Prensa del Gobierno de los Estados Unidos, Washington, DC, 1988.

[25] R.R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W.H. Freeman & Company, Publishers, 1973).

11. Embarque de computadoras

a. Encuentre una ecuación de la recta de mínimos cuadrados de y sobre x para los siguientes datos (considere el año 1994 como $x = 1$, y así sucesivamente):

ENVÍOS AL EXTRANJERO DE COMPUTADORAS DE LA COMPAÑIA COMPUTADORAS ACME (en miles)

Año	Cantidad
1994	35
1995	31
1996	26
1997	24
1998	26

b. Para los datos en la parte (a), considere el año 1994 como $x = -2$, 1995 como año $x = -1$, 1996 como año $x = 0$ y así sucesivamente. Entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$. Ajuste una recta de mínimos cuadrados y observe cómo se simplifica el cálculo.

12. Atención médica Para la siguiente serie de tiempo, encuentre una ecuación de la recta de regresión que ajuste mejor los datos (refiérase a 1983 como año $x = -2$, 1984 como año $x = -1$ y así sucesivamente):

ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR–ATENCIÓN MÉDICA, 1983–1987 (1967 = 100)

Año	Índice
1983	357
1984	380
1985	403
1986	434
1987	462

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 1988, Oficina de Prensa del Gobierno de los Estados Unidos, Washington, DC, 1988.

OBJETIVO Desarrollar algunas propiedades de funciones homogéneas, incluido el teorema de Euler.

16.10 UN COMENTARIO SOBRE FUNCIONES HOMOGÉNEAS[26]

Muchas de las funciones que son útiles en el análisis económico comparten la propiedad de ser homogéneas.

Definición

Se dice que una función $z = f(x, y)$ es ***homogénea de grado n*** (n es una constante), si para ***todo*** valor real positivo de λ,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

En palabras, si tanto x como y se multiplican por el mismo número real positivo, entonces el valor de la función resultante es una potencia del número multiplicada por el valor de la función $f(x, y)$. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x y^2 \\ &= \lambda^3(x^3 - 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y). \end{aligned}$$

Así, f es homogénea de tercer grado.

Una función homogénea importante en economía es la función de producción de Cobb-Douglas:

$$P = f(l, k) = Al^{\alpha}k^{1-\alpha} \qquad (\alpha \text{ y } A \text{ son constantes}).$$

[26]Esta sección contiene material de la sección 16.6 y puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Tenemos,

$$\begin{aligned} f(\lambda l, \lambda k) &= A(\lambda l)^{\alpha}(\lambda k)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha}l^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}k^{1-\alpha} \\ &= \lambda A l^{\alpha}k^{1-\alpha} = \lambda f(l, k). \end{aligned}$$

Por tanto, f es homogénea de grado 1. Por ejemplo, $f(l, k) = 2l^{0.3}k^{0.7}$ es una función homogénea de grado 1.

Las funciones de producción que son homogéneas de grado 1 tienen una propiedad interesante. Si f es una función así, entonces

$$f(\lambda l, \lambda k) = \lambda f(l, k).$$

Por ejemplo, cuando todos los insumos se duplican, entonces

$$f(2l, 2k) = 2f(l, k),$$

y la producción se duplica. Similarmente, si todos los insumos se triplican, la producción se triplica, etc. En resumen, un cambio proporcional en cada factor de entrada de producción conduce al mismo cambio proporcional en la producción.

Al considerar las derivadas parciales de una función homogénea puede obtenerse un resultado importante. Sea $f(l, k)$ una función de producción homogénea de grado n. Tenemos entonces la identidad

$$f(\lambda l, \lambda k) = \lambda^{n} f(l, k). \tag{1}$$

Considere el lado izquierdo de la ecuación (1). Si hacemos $r = \lambda l$ y $s = \lambda k$, entonces la ecuación (1) adquirirá la forma

$$f(r, s) = \lambda^{n} f(l, k). \tag{2}$$

Ahora tomaremos la derivada parcial en cada lado con respecto a λ. Para el lado izquierdo, $f(r, s)$, por la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}[f(r, s)] &= \frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)]\frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)]\frac{\partial s}{\partial \lambda} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)]l + \frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)]k. \end{aligned} \tag{3}$$

Para el lado derecho de la ecuación (2),

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda^{n} f(l, k)] = n\lambda^{n-1} f(l, k). \tag{4}$$

Al usar las ecuaciones (3) y (4), hacemos $\frac{\partial}{\partial \lambda}[f(r, s)]$ igual a $\frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda^{n} f(l, k)]$:

$$l\frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)] + k\frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)] = n\lambda^{n-1} f(l, k).$$

En particular, si $\lambda = 1$, entonces $r = l$ y $s = k$, por lo que $f(r, s) = f(l, k)$. Así, $\frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]$ y $\frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]$. Por lo que, tenemos el denominado *teorema de Euler* para funciones homogéneas:

$$l\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] + k\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = nf(l, k). \tag{5}$$

Ahora, si f es homogénea de grado 1, como la función Cobb-Douglas, entonces $n = 1$ y la ecuación (5) se transforma en

$$l\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] + k\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = f(l, k).$$

Concluimos que si multiplicamos el producto marginal de cada insumo por la cantidad de insumo, la suma es igual a la producción total.

OBJETIVO Calcular integrales dobles y triples.

16.11 Integrales múltiples

Recuerde que la integral definida de una función de una variable tiene que ver con integración sobre un *intervalo*. Existen también integrales definidas de funciones de dos variables, llamadas **integrales dobles** (definidas). Éstas tienen que ver con la integración sobre una *región* en el plano.

Por ejemplo, el símbolo

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy, \quad \text{o equivalentemente,} \quad \int_0^2 \left[\int_3^4 xy\,dx\right] dy,$$

es la integral doble de $f(x, y) = xy$ sobre una región determinada por los límites de integración. La región consiste en todos los puntos (x, y) en el plano xy, tales que $3 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 2$ (véase la fig. 16.21).

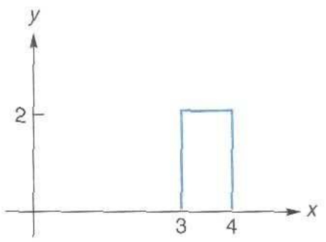


FIGURA 19.21 Región sobre la cual se evalúa $\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy$.

En esencia, una integral doble es el límite de una suma de la forma $\sum f(x, y)\Delta x \Delta y$· donde en nuestro caso los puntos (x, y) están en la región sombreada. Más adelante daremos una interpretación geométrica de una integral doble.

Para evaluar

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy \quad \text{o} \quad \int_0^2 \left[\int_3^4 xy\,dx\right] dy,$$

usamos integraciones sucesivas comenzando con la integral interna. Primero evaluamos

$$\int_3^4 xy\,dx$$

tratando a y como constante e integrando con respecto a x entre los límites 3 y 4:

$$\int_3^4 xy\,dx = \left.\frac{x^2y}{2}\right|_3^4.$$

Al sustituir los límites para la variable x, tenemos

$$\frac{4^2 \cdot y}{2} - \frac{3^2 \cdot y}{2} = \frac{16y}{2} - \frac{9y}{2} = \frac{7}{2}y.$$

Ahora integramos este resultado con respecto a y entre los límites 0 y 2:

$$\int_0^2 \frac{7}{2}y\,dy = \left.\frac{7y^2}{4}\right|_0^2 = \frac{7 \cdot 2^2}{4} - 0 = 7.$$

Así,

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy = 7.$$

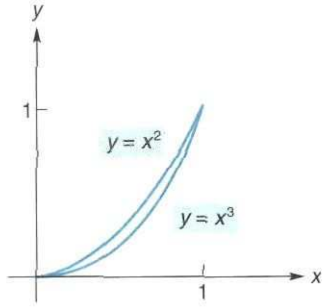


FIGURA 16.22 Región sobre la cual se evalúa $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx$.

Ahora consideramos la integral doble

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx, \quad \text{o} \quad \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy \right] dx.$$

Aquí integramos primero con respecto a y y luego con respecto a x. La región sobre la que tiene lugar la integración está constituida por todos los puntos (x, y) para los cuales $x^3 \leq y \leq x^2$ y $0 \leq x \leq 1$ (véase la fig. 16.22). Esta integral doble se evalúa tratando primero a x como constante e integrando $x^3 - xy$ con respecto a y entre x^3 y x^2, y luego integramos el resultado con respecto a x entre 0 y 1:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left(x^3 y - \frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[x^3(x^2) - \frac{x(x^2)^2}{2} \right] - \left[x^3(x^3) - \frac{x(x^3)^2}{2} \right] \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^5 - \frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx \\
&= \left(\frac{x^6}{12} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{16} \right) \Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16} \right) - 0 = \frac{1}{336}.
\end{aligned}$$

■ **EJEMPLO 1 Evaluación de una integral doble**

Encontrar $\int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (2x + 1)\, dy\, dx.$

Solución: aquí integramos primero con respecto a y y luego integramos el resultado con respecto a x:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (2x + 1)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[\int_0^{1-x} (2x + 1)\, dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^1 (2xy + y) \Bigg|_0^{1-x} dx = \int_{-1}^1 \{[2x(1 - x) + (1 - x)] - 0\}\, dx \\
&= \int_{-1}^1 (-2x^2 + x + 1)\, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-1}^1 \\
&= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

■

■ **EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble**

Encontrar $\int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx\, dy.$

Solución: aquí integramos primero con respecto a x y luego integramos el resultado con respecto a y:

$$\begin{aligned}\int_1^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} dx\,dy &= \int_1^{\ln 2}\left[\int_{e^y}^{2} dx\right] dy = \int_1^{\ln 2} x\Big|_{e^y}^{2} dy\\ &= \int_1^{\ln 2}(2-e^y)\,dy = (2y-e^y)\Big|_1^{\ln 2}\\ &= (2\ln 2-2)-(2-e) = 2\ln 2-4+e\\ &= \ln 4-4+e.\end{aligned}$$

Una integral doble puede interpretarse en términos del volumen de una región entre el plano xy y una superficie $z = f(x, y)$, si $z \geq 0$. En la figura 16.23 se muestra una región cuyo volumen consideraremos. El elemento de

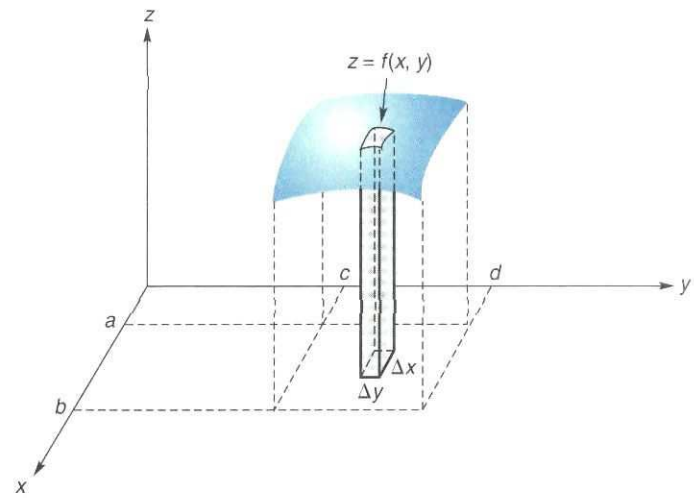


FIGURA 16.23 Interpretación de $\int_a^b\int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$ en términos del volumen, donde $f(x, y) \geq 0$.

volumen para esta región es una columna vertical con una altura aproximada de $z = f(x, y)$, y el área de su base es $\Delta y\Delta x$. Así, su volumen es aproximadamente $f(x, y)\Delta y\Delta x$. El volumen de la región entera puede encontrarse sumando los volúmenes de todos los elementos de este tipo para $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ por medio de una integral doble:

$$\text{volumen} = \int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dy\,dx.$$

Las **integrales triples** se resuelven evaluando, de manera sucesiva, tres integrales, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Evaluación de una integral triple

Encontrar $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx.$

Solución:

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\int_0^{x-y} x\,dz\right] dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (xz)\Big|_0^{x-y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x [x(x-y) - 0]\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 - xy)\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y - \frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^x dx = \int_0^1 \left[\left(x^3 - \frac{x^3}{2}\right) - 0\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

Ejercicio 16.11

En los problemas del 1 al 22 evalúe las integrales múltiples.

1. $\int_0^3 \int_0^4 x\;dy\;dx.$
2. $\int_0^2 \int_1^2 y\;dy\;dx.$
3. $\int_0^1 \int_0^1 xy\;dx\;dy.$
4. $\int_0^2 \int_0^3 x^2\;dy\;dx.$
5. $\int_1^3 \int_1^2 (x^2 - y)\;dx\;dy.$
6. $\int_{-1}^2 \int_1^4 (x^2 - 2xy)\;dy\;dx.$
7. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\;dy\;dx.$
8. $\int_0^3 \int_0^x (x^2 + y^2)\;dy\;dx.$
9. $\int_0^6 \int_0^{3x} y\;dy\;dx.$
10. $\int_1^2 \int_0^{x-1} 2y\;dy\;dx.$
11. $\int_0^1 \int_{3x}^{x^2} 14x^2y\;dy\;dx.$
12. $\int_0^2 \int_0^{x^2} xy\;dy\;dx.$
13. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\;dx\;dy.$
14. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy.$
15. $\int_{-1}^1 \int_x^{1-x} 3(x + y)\;dy\;dx.$
16. $\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} 5x\;dx\;dy.$
17. $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y}\,dx\,dy.$
18. $\int_2^3 \int_0^2 e^{x-y}\,dx\,dy.$
19. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2z^3\;dx\;dy\;dz.$
20. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\;dz\;dy\;dx.$
21. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dz\;dy\;dx.$
22. $\int_0^2 \int_{y^2}^{3y} \int_0^x dz\,dx\,dy.$

23. **Estadística** En el estudio de la estadística, una función de densidad conjunta $z = f(x, y)$ definida sobre una región del plano x, y, se representa por una superficie en el espacio. La probabilidad de que

$$a \le x \le b \quad \text{y} \quad c \le y \le d$$

está dada por

$$P(a \le x \le b, c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\;dx\;dy$$

y representada mediante el volumen entre la gráfica de f y la región rectangular dada por

$$a \le x \le b \quad \text{y} \quad c \le y \le d.$$

Si $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ es una función de densidad conjunta, donde $x \ge 0$ y $y \ge 0$, encuentre

$$P(0 \le x \le 2,\; 1 \le y \le 2),$$

y dé su respuesta en términos de e.

24. Estadística En el problema 23, sea $f(x, y) = 12e^{-4x-3y}$ para $x, y \geq 0$. Encuentre

$$P(3 \leq x \leq 4,\ 2 \leq y \leq 6),$$

y dé su respuesta en términos de e.

25. Estadística En el problema 23, sea $f(x, y) = x/8$, donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 4$. Encuentre $P(x \geq 1, y \geq 2)$.

26. Estadística En el problema 23, sea f la función de densidad uniforme $f(x, y) = 1$, definida en el cuadrado unitario, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Determine la probabilidad de que $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}$.

16.12 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 16.1 sistema coordenado tridimensional $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ función de n variables plano x,y plano x,z plano y,z octante trazas

Sección 16.2 derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $f_x(x, y)$ $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ $f_x(x_0, y_0)$

Sección 16.3 función de costos conjuntos función de producción productividad marginal productos competitivos productos complementarios

Sección 16.4 diferenciación parcial implícita

Sección 16.5 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ f_{xy} f_{yx} f_{xx} f_{yy}

Sección 16.6 regla de la cadena variable intermedia

Sección 16.7 máximos y mínimos relativos punto crítico prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Sección 16.8 multiplicadores de Lagrange

Sección 16.9 diagrama de dispersión método de mínimos cuadrados recta de regresión de y sobre x números índices

Sección 16.10 función homogénea de grado n

Sección 16.11 integral doble integral triple

Resumen

Podemos extender el concepto de función de una variable a funciones de varias variables. Las entradas de funciones de n variables son n-adas. Por lo general, la gráfica de una función de dos variables es una superficie en un sistema coordenado tridimensional. Las funciones de más de dos variables no pueden representarse geométricamente.

Para una función de n variables, podemos considerar n derivadas parciales. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, tenemos las derivadas parciales de f con respecto a x, de f con respecto a y y la derivada de f con respecto a z, denotadas como f_x, f_y y f_z o $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, y $\partial f/\partial z$, respectivamente. Para encontrar $f_x(x, y, z)$, tratamos a y y z como constantes y derivamos a f con respecto a x de la manera usual. Las otras derivadas parciales se encuentran de manera similar. Podemos interpretar $f_x(x, y, z)$ como el cambio aproximado en w que resulta al cambiar x en una unidad mientras se mantienen constantes y y z. Las otras derivadas parciales se pueden interpretar de modo similar. Una función de varias variables puede estar definida implícitamente. En este caso, sus derivadas parciales se encuentran por diferenciación parcial implícita.

Las funciones de varias variables aparecen con frecuencia en análisis económicos y de negocios, así como en otras áreas de estudio. Si un fabricante produce x unidades del producto X y y unidades del producto Y, entonces el costo total c de estas unidades es una función de x y de y denominada función de costos conjuntos. Las derivadas parciales $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ se llaman costos marginales con respecto a x y a y, respectivamente. Por ejemplo, podemos interpretar $\partial c/\partial x$ como el costo aproximado de producir una unidad adicional de X mientras se mantiene fijo el nivel de producción de Y.

Si se usan l unidades de trabajo y k unidades de capital para producir P unidades de un producto, la función $P = f(l, k)$ se llama función de producción. Las derivadas parciales de P se llaman funciones de productividad marginal.

Suponga que dos productos, A y B, son tales que la cantidad demandada de cada uno es dependiente de los precios de ambos. Si q_A y q_B son cantidades de A y B demandadas cuando los precios de A y B son p_A y p_B, respectivamente, entonces q_A y q_B cada una son funciones de p_A y p_B. Cuando $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$, entonces A y B se llaman productos competitivos (o sustitutos). Cuando $\partial q_A/\partial p_B < 0$ y $\partial q_B/\partial p_A < 0$, entonces A y B se llaman productos complementarios.

Si $z = f(x, y)$, donde $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$, z puede considerarse como una función de r y s. Por ejemplo, para encontrar $\partial z/\partial r$, puede usarse una regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Una derivada parcial de una función de n variables es en sí misma una función de n variables. Tomando derivadas parciales sucesivas de derivadas parciales, obtenemos derivadas parciales de orden superior. Por ejemplo, si f es una función de x y y, entonces f_{xy} denota la derivada parcial de f_x con respecto *a* y; f_{xy} se llama segunda derivada parcial de f, primero con respecto a x y luego con respecto a y.

Si la función $f(x, y)$ tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) debe ser una solución del sistema

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.$$

Cualquier solución de este sistema se llama punto crítico de f. Así, los puntos críticos son los candidatos en donde un extremo relativo puede presentarse. La prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables nos da las condiciones bajo las cuales un punto crítico corresponde a un máximo relativo o a un mínimo relativo. Establece que si (x_0, y_0) es un punto crítico de f y

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2,$$

entonces

1. Si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);
2. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0);
3. si $D(x_0, y_0) < 0$, f no tiene ni un máximo relativo ni un mínimo relativo en (x_0, y_0);
4. si $D(x_0, y_0) = 0$, ninguna conclusión puede obtenerse sobre los extremos en (x_0, y_0) y entonces se requiere de un análisis ulterior.

Para encontrar los puntos críticos de una función de varias variables sujetas a una restricción, podemos usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Por ejemplo, para encontrar los puntos críticos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, primero formamos la función

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

Al resolver el sistema

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_\lambda = 0,$$

obtenemos los puntos críticos de F. Si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es uno de esos puntos críticos, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeta a la restricción. Es importante escribir la restricción en la forma $g(x, y, z) = 0$. Por ejemplo, si la restricción es $2x + 3y - z = 4$, entonces $g(x, y, z,) = 2x + 3y - z - 4$ [o $g(x, y, z) = 4 - 2x - 3y + z$]. Si $f(x, y, z)$ está sujeta a dos restricciones, $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, formamos entonces la función $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ y resolvemos el sistema.

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_{\lambda_1} = 0, \quad F_{\lambda_2} = 0.$$

Algunas veces dos variables, digamos x y y, pueden estar relacionadas de manera que la relación sea casi lineal. Cuando los puntos (x_i, y_i), donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, nos son dados, podemos ajustarlos con una recta que los aproxime. Tal recta es la recta de regresión lineal (o recta de mínimos cuadrados) de y sobre x, que está dada por

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

donde

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

y

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Los valores $\hat{y}$ pueden usarse para predecir los valores de y para valores dados de x.

Al trabajar con funciones de varias variables podemos considerar sus integrales múltiples. Éstas se determinan por integración sucesiva. Por ejemplo, la integral doble

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y)\, dx\, dy$$

se evalúa tratando primero a y como constante e integrando $x + y$ con respecto a x. Después de evaluarla entre los límites 0 y y, integramos ese resultado con respecto a y entre $y = 1$ y $y = 2$. Así,

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^y (x + y)\, dx\right] dy.$$

Las integrales triples implican funciones de tres variables y se evalúan también por integración sucesiva.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 4 esboce las superficies dadas.

1. $2x + 3y + z = 9$.
2. $z = x$.
3. $z = y^2$.
4. $x^2 + z^2 = 1$.

En los problemas del 5 al 16 encuentre las derivadas parciales indicadas.

5. $f(x, y) = 4x^2 + 6xy + y^2 - 1$; $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$.
6. $P = l^3 + k^3 - lk$; $\partial P/\partial l$, $\partial P/\partial k$.
7. $z = \dfrac{x}{x + y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
8. $f(p_A, p_B) = 2(p_A - 20) + 3(p_B - 30)$; $f_{p_A}(p_A, p_B)$.
9. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$.
10. $w = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$; $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.
11. $w = e^{x^2yz}$; $w_{xy}(x, y, z)$.
12. $f(x, y) = xy\ln(xy)$; $f_{xy}(x, y)$.
13. $f(x, y, z) = (x + y)(y + z^2)$; $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}[f(x, y, z)]$.
14. $z = (x^2 - y)(y^2 - 2xy)$; $\partial^2 z/\partial y^2$.
15. $w = xe^{yz}\ln z$; $\partial w/\partial y$, $\partial^2 w/\partial x\,\partial z$.
16. $P = 100l^{0.11}k^{0.89}$; $\partial^2 P/\partial k\,\partial l$.

En los problemas 17 y 18 encuentre el valor indicado.

17. Si $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{xz}$, encuentre $f_{xyz}(2, 7, 4)$.
18. Si $f(x, y, z) = (6x + 1)e^{y^2\ln(z+1)}$, encuentre $f_{xyz}(0, 1, 0)$.

---

[27]**19.** Si $w = x^2 + 2xy + 3y^2$, $x = e^r$ y $y = \ln(r + s)$, encuentre $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$.

[27]**20.** Si $z = \ln(x/y) + e^y - xy$, $x = r^2s^2$ y $y = r + s$, determine $\partial z/\partial s$.

[27]**21.** Si $x^2 + 2xy - 2z^2 + xz + 2 = 0$, determine $\partial z/\partial x$.

[27]**22.** Si $z^2 - e^{yz} + \ln z + e^{xz} = 0$, determine $\partial z/\partial y$.

---

23. **Función de producción** Si la función de producción de un fabricante está definida por $P = 20l^{0.7}k^{0.3}$, determine las funciones de productividad marginal.

24. **Función de costos conjuntos** El costo de producir x unidades del producto X y y unidades del producto Y está dado por

$$c = 5x + 0.03xy + 7y + 200.$$

Determine el costo marginal (parcial) con respecto a x cuando $x = 100$ y $y = 200$.

25. **Productos competitivos y complementarios** *Si* $q_A = 200 - 3p_A + p_B$ y $q_B = 50 - 5p_B + p_A$, donde q_A y q_B son las unidades demandadas de los productos A y B, respectivamente, y p_A y p_B son sus precios por unidad respectivos, determine si A y B son productos competitivos o complementarios.

26. **Innovación** Para la industria, el modelo siguiente describe la tasa α (letra griega "alfa") a la que una innovación sustituye un proceso establecido:[28]

$$\alpha = Z + 0.530P - 0.027S.$$

Aquí, Z es una constante que depende de la industria particular considerada, P un índice de provecho de la innovación y S un índice de la magnitud de la inversión necesaria para hacer uso de la innovación. Encuentre $\partial\alpha/\partial P$ y $\partial\alpha/\partial S$.

27. Analice los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 3$.

28. Analice los extremos relativos de la función $f(w, z) = 2w^3 + 2z^3 - 6wz + 7$.

29. **Minimización de material** Una caja rectangular de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32 pies cúbicos. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que la cantidad de cartón usado sea mínima.

30. La función

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy - 10x - 20y$$

tiene un punto crítico en $(x, y) = (1, 2)$, y la prueba de la segunda derivada no es concluyente en este punto. Determine los valores de las constantes a, b y c.

31. **Maximización de la utilidad** Una granja produce dos tipos de queso, A y B, a un costo promedio constante de 50 y 60 centavos por libra, respectivamente. Cuando el precio de venta por libra de A es p_A centavos y el de B es p_B centavos, las demandas (en libras) para A y B, son

$$q_A = 250(p_B - p_A)$$

[27]Refiérase a las secciones 16.4 o 16.6.

[28]A. P. Hurter, Jr. A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

y

$$q_B = 32{,}000 + 250(p_A - 2p_B).$$

Encuentre los precios de venta que dan una utilidad máxima. Verifique que la utilidad tiene un máximo relativo con esos precios.

32. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = xyz$, con la condición de que

$$3x + 2y + 4z - 120 = 0 \quad (xyz \neq 0).$$

33. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, con la restricción de que $3x + 2y + z = 14$.

34. Sobrevivencia a una infección En un experimento,[29] un grupo de peces fueron inoculados con bacterias vivas. De aquellos peces que se mantuvieron a 28°C, el porcentaje p de los peces que sobrevivieron la infección t horas después de inyectados, se da en la tabla siguiente:

t	8	10	18	20	48
p	82	79	78	78	64

Determine la recta de regresión lineal de p sobre t.

35. Gastos de equipo Encuentre la recta de regresión lineal de mínimos cuadrados de y sobre x para los datos dados en la tabla siguiente (refiérase al año 1993 como el año $x = 1$, etc.):

GASTOS EN EQUIPO DE UNA COMPAÑÍA DE COMPUTADORAS, 1993–1998 (en millones de dólares)

Año	Índice
1993	15
1994	22
1995	21
1996	26
1997	27
1998	34

En los problemas del 36 al 39 evalúe las integrales dobles.

36. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^y x^2y^2\,dx\,dy.$

37. $\displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy\,dx\,dy.$

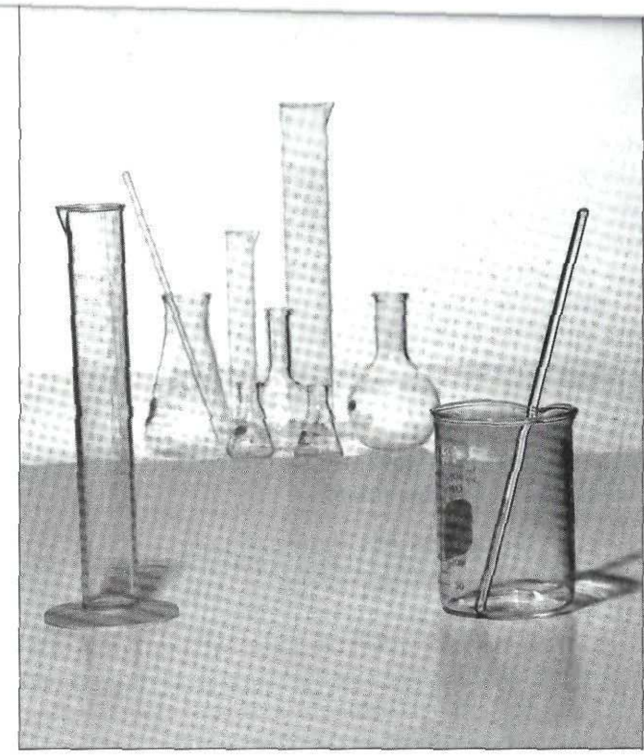
38. $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x\,dx\,dy.$

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} 7(x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy\,dx.$

[29] J. B. Covert y W. W. Reynolds, "Survival Value of Fever in Fish", *Nature*, 267, núm. 5606 (1977), 43-45.

Aplicación práctica

Análisis de datos para un modelo de enfriamiento[30]



En el capítulo 15 se trabajó con la ley del enfriamiento de Newton, la cual puede usarse para describir la temperatura de un cuerpo al enfriarse en función del tiempo. Aquí se determinará esa relación de manera empírica por medio del análisis de datos. Esto ilustrará cómo se diseñan los modelos matemáticos en muchas situaciones reales.

Supongamos que usted quiere crear un modelo matemático acerca del enfriamiento de té caliente después de ponerlo en un refrigerador. Para ello coloca una jarra de té caliente y un termómetro en un refrigerador; luego periódicamente, lee y registra la temperatura del té. La tabla 16.6 muestra los datos obtenidos, donde T es la temperatura en grados Fahrenheit t minutos después de que se colocó la jarra en el refrigerador. Inicialmente, esto es, en $t = 0$, la temperatura es de 124°F; cuando $t = 391$, $T = 47°F$. Después de haber estado en el refrigerador toda una noche, la temperatura es de 45°F. La figura 16.24 da una gráfica de los puntos correspondientes a los datos (t, T) desde $t = 0$ hasta $t = 391$.

TABLA 16.6

Tiempo t	Temperatura T	Tiempo t	Temperatura T
0 min	124°F	128 min	64°F
5	118	144	62
10	114	178	59
16	109	208	55
20	106	244	51
35	97	299	50
50	89	331	49
65	82	391	47
85	74	Toda una noche	45

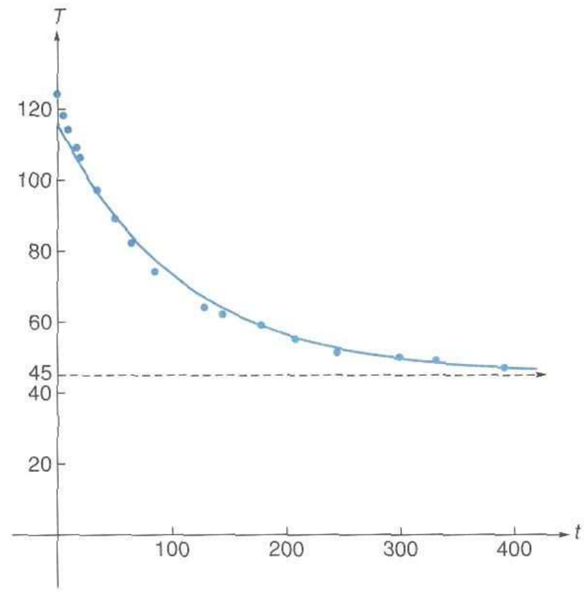


FIGURA 16.24 Puntos de datos y aproximación exponencial.

La tendencia de estos puntos sugiere fuertemente que se encuentran sobre la gráfica de una función exponencial decreciente, como la mostrada en la figura 16.24. En particular, como la temperatura después de una noche es de 45°F, esta función exponencial debería tener $T = 45$ como asíntota horizontal. Tal función tiene la forma

$$\hat{T} = Ce^{at} + 45, \tag{1}$$

[30]Adaptado de Gloria Barrett, Dot Doyle Dan Teague, "Using Data Analysis in Precalculus to Model Cooling", *The Mathematics Teacher*, 81, núm. 8 (nov. de 1988), 680-684. Con autorización del National Council of Teachers of Mathematics.

donde $\hat{T}$ da la temperatura estimada en el tiempo t, y C y a son constantes con $a < 0$ (note que como $a < 0$, entonces cuando $t \to \infty$, se tiene $Ce^{at} \to 0$, por lo que $Ce^{at} + 45 \to 45$).

Ahora el problema es encontrar los valores de C y a tales que la curva dada por la ecuación (1) se ajuste a los datos de la mejor manera posible. Al escribir la ecuación (1) como

$$\hat{T} - 45 = Ce^{at}$$

y tomando luego logaritmos naturales en ambos lados, se obtiene una forma lineal:

$$\ln(\hat{T} - 45) = \ln(Ce^{at}),$$

$$\ln(\hat{T} - 45) = \ln C + \ln e^{at},$$

$$\ln(\hat{T} - 45) = \ln C + at. \tag{2}$$

Haciendo $\hat{T}_l = \ln(\hat{T} - 45)$, la ecuación (2) queda expresada como

$$\hat{T}_l = at + \ln C. \tag{3}$$

Como a y $\ln C$ son constantes, la ecuación (3) es una ecuación lineal en $\hat{T}_l$ y t. Esto significa para los datos originales, que si se grafican los puntos $(t, \ln(T - 45))$, deberán quedar aproximadamente sobre una recta. Esos puntos se muestran en la figura 16.25, donde T_l representa $\ln(T - 45)$. Así, la recta dada por la ecuación (3), que aproxima T_l, puede suponerse que es la recta de regresión lineal de T_l sobre t. Esto es, a y $\ln C$ son los coeficientes de regresión lineal. Usando las fórmulas para esos coeficientes y una calculadora, se determina que

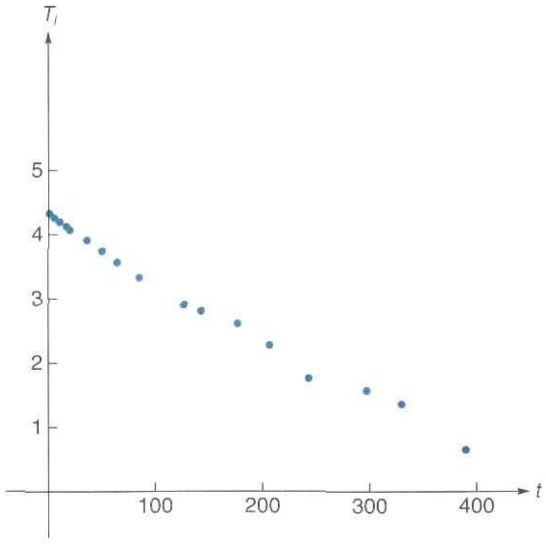


FIGURA 16.25 Los puntos (t, T_l), en donde $T_l = \ln(T - 45)$, está cerca de una recta.

$$a = \frac{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{17} T_{l_i}\right)}{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)^2} \approx -0.00921$$

y

$$\ln C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{17} T_{l_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i}\right)}{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)^2}$$

$$\approx 4.260074.$$

Como $\ln C \approx 4.260074$, entonces $C \approx e^{4.260074} \approx 70.82$. Así, de la ecuación (1),

$$\hat{T} = 70.82e^{-0.00921t} + 45,$$

el cual es un modelo que predice la temperatura del té al enfriarse. La gráfica de esta función es la curva que se muestra en la figura 16.24.

Ejercicios

1. Trace los puntos correspondientes a los datos que se dan enseguida sobre un plano coordenado x, y:

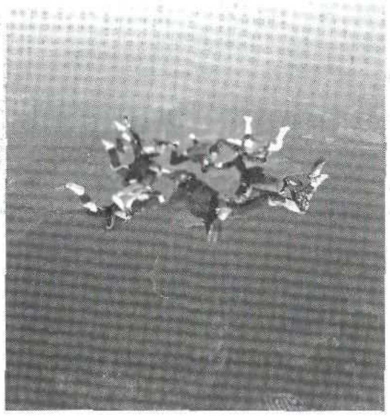
x	0	1	4	7	10
y	15	12	9	7	6

Suponga que esos puntos se encuentran, aproximadamente, sobre la gráfica de una función exponencial decreciente con asíntota horizontal $y = 5$. Use el procedimiento analizado en esta aplicación práctica para determinar la función.

2. Suponga que ciertos datos observados siguen una relación dada por $y = C/x^r$, donde $x, y, C > 0$. Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de la ecuación, demuestre que $\ln x$ y $\ln y$ están relacionados de manera lineal. Así, los puntos $(\ln x, \ln y)$ se encuentran sobre una recta.

3. Use la ley del enfriamiento de Newton (véase la sección 15.7) y los puntos (0, 124) y (128, 64) para determinar la temperatura T del té, en la aplicación práctica, en el tiempo t. Suponga que la temperatura del medio ambiente es de 45°F.

4. Trate de obtener la ecuación final de regresión obtenida en la aplicación práctica, usando la capacidad de regresión de una calculadora gráfica. Primero utilice regresión lineal. ¿Cómo es su resultado comparado con el de la aplicación? Después trate de omitir la transformación a la forma lineal y realice una regresión exponencial. ¿Qué dificultades encuentra, si es que hay dificultades? ¿Cómo superaría estas dificultades?



APÉNDICE A

Conjuntos

Agrupaciones y lo que se puede hacer con ellas

En la vida diaria y en la profesional, nos encontramos ante situaciones en las cuales de manera natural agrupamos objetos, personas, proyectos, etc., que tienen alguna cualidad en común. Por ejemplo: los compañeros del grupo de la escuela, las enfermedades del corazón, los contribuyentes menores, los proyectos de inversión de un portafolio financiero, entre otros. Además, nos hacemos preguntas con respecto a esas agrupaciones y sus componentes. Tales agrupaciones y lo que se puede realizar con ellas y sus componentes es materia de estudio de una parte de las matemáticas conocida como teoría de conjuntos.

A.1 Idea intuitiva de conjunto

OBJETIVO Proporcionar la idea intuitiva de conjunto y utilizar métodos para describir conjuntos.

De manera intuitiva diremos que un conjunto es una colección bien definida de objetos. A cada uno de estos objetos les denominaremos elementos del conjunto.

Básicamente existen dos formas de definir a un conjunto:

La primera, denominada definición por extensión, es aquella en la que listamos todos los elementos del conjunto. Esta lista de elementos la escribimos entre llaves.

EJEMPLO 1

Los conjuntos siguientes están escritos por medio del método de extensión.

A = {Mercurio, Venus, Tierra, Marte}
B = {Bonos, Acciones, Certificados de Tesorería}
C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

La segunda, conocida como definición por comprensión o construcción, es en la que escribimos una propiedad que deben cumplir los elementos que pertenecen al conjunto.

EJEMPLO 2

Los conjuntos siguientes se escriben por medio del método de construcción.

C = {x|x es un número natural par menor que 20}
D = {x|x es la capital de un país de Norteamérica}

E = {x|x es un planeta del sistema solar comprendido entre el Sol y los Asteroides}
F = {x|x es uno de los primeros diez números pares naturales}
G = {x|x es el resultado del tiro de un dado}

Además de los dos métodos anteriores, podemos mencionar una tercera forma de describir o definir conjuntos, la cual es una combinación de las dos anteriores. Se dan los primeros y/o los últimos elementos, a partir de los cuales se infiere cuáles elementos pertenecen al conjunto.

EJEMPLO 3

Para definir los conjuntos siguientes, hicimos uso de una combinación de los métodos de comprensión y extensión

H = {2, 4, 6, . . . , 18, 20}
I = {Argentina, Antigua y Barbuda, Bahamas, . . . , Uruguay, Venezuela}
J = {Mercurio, Venus, Tierra, . . . , Neptuno, Plutón}

Al emplear este método se debe ser cuidadoso al escribir los elementos y del contexto del problema que se trate, ya que puede sugerir más de una respuesta correcta.

Revise la sección 0.2 para un repaso sobre conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

Ejercicio A.1

En los problemas del 1 al 6 escriba cada conjunto utilizando el método de extensión.

1. El conjunto de los números enteros positivos que son divisores de 24.

2. R es el conjunto de los huesos del cráneo.

3. El conjunto de los países de Europa cuyo nombre de su capital inicia con P.

4. S es el conjunto de nombres de ganadores del premio Nobel de Economía.

5. El conjunto de países que han ganado la copa mundial de fútbol.

6. T es el conjunto de números primos menores que 20.

En los problemas del 7 al 12 escriba cada conjunto y utilice el método de construcción o comprensión.

7. {1, 3, 5, 7, 9}.

8. {España, Portugal}.

9. {2, 4, 6, 8, 10, 12, . . . }.

10. {r, o, m, a}.

11. {7, 14, 21, 28, . . . , 693, 700}.

12. El conjunto de los enteros entre –6 y 6.

En los problemas del 13 al 20 se da un conjunto si utiliza un método, escriba el mismo conjunto utilizando otro método.

13. {1, 2, 3, 4, 6, 12}

14. {x|x es una persona viva que ha sido presidente de Argentina}

15. {Panamá, Costa Rica, . . . , Belice, Guatemala, México}

16. {x|x es un número primo menor a 20}

17. R es el conjunto cuyos elementos son los números enteros mayores a 60.

18. S es el conjunto que consiste en los recíprocos de todos los números naturales menores a 10.

19. T es el conjunto formado por las letras del abecedario español.

20. {k|k es un entero y $k^2 < 10$}

OBJETIVO *Introducir la notación usual de conjuntos. Definir conjuntos vacío y universal. Introducir el concepto de subconjunto, la igualdad de conjuntos. Emplear los diagramas de Venn para representar conjuntos.*

A.2 Conceptos básicos

En la sección anterior introdujimos la noción de conjunto y sus elementos. El primer conjunto que escribimos fue A = {Mercurio, Venus, Tierra, Marte}, cuyos elementos son los planetas del sistema solar: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Así, podemos decir que "Venus es elemento del conjunto A" y "Júpiter no es elemento del conjunto A". Reemplazamos "es elemento del conjunto" con el símbolo $\in$ y con $\notin$ a la frase "no es elemento del conjunto". Con lo anterior, podemos escribir:

$$\text{Venus} \in A \text{ y Júpiter} \notin A$$

EJEMPLO 1

Considere el conjunto $C = \{x|x \text{ es un número natural par menor que } 20\}$ *decida si cada uno de los números siguientes es o no elemento del conjunto* C *y represente esto por medio de la notación de pertenencia* $\in$ o $\notin$.

a. 4.
b. 20.
c. 0
d. -4
e. 3.

Solución:

a. Puesto que 4 es un número natural par y es menor que 20, entonces pertenece al conjunto C. Escribimos $4 \in C$.

b. Aunque 20 es un número par, no es menor que 20, por lo tanto, $20 \notin C$.

c. El 0 es par, y aunque es menor que 20 no es un número natural, por tanto, no pertenece a C, lo cual escribimos así, $0 \notin C$.

d. El -4 es un número par menor que 20 pero no es un número natural, por lo que no pertenece a C. Escribimos $-4 \notin C$

e. Si bien 3 es un número natural menor que 20, no pertenece al conjunto C ya que 3 no es par, por lo tanto, escribimos $3 \notin C$.

Conjunto universal y conjunto vacío

Al trabajar con conjuntos es necesario indicar el universo del discurso que está formado por un conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los cuales estemos trabajando en un problema en particular. A este conjunto se le conoce como **conjunto universal.** Este conjunto se denota típicamente por medio de la letra U o la letra griega omega mayúscula, Ω.

En un problema, el conjunto universal podría ser el conjunto de todos los planetas del sistema solar, mientras que en otro podría ser el conjunto de todas las mujeres menores de 24 años que estudian medicina.

Es muy importante dejar claro cual es el conjunto universal, ya que eso determinará nuestro marco de referencia. Así como es necesario tener un conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se está trabajando, también lo es definir un conjunto el cual carece de elementos, dicho conjunto se conoce como **conjunto vacío.** A este conjunto lo denotamos con $\varnothing$ o { }.

EJEMPLO 2

Determine cuál(es) de las proposiciones siguientes define a un conjunto vacío.

a. $\{m|m \text{ es un número primo par}\}$
b. $\{x|x \text{ es un número real tal que } x^2 < 0\}$

c. $\{y|y$ es un número entero entre 4 y $5\}$

d. $\{\varnothing\}$

Solución:

a. 2 es un número par y es primo, por lo tanto, este conjunto no es vacío.

b. Sabemos que no existe número real que al elevarlo al cuadrado nos dé un número negativo, por lo tanto, el conjunto es $\varnothing$.

c. No existe número entero entre 4 y 5, así este conjunto es vacío $\varnothing$.

d. $\{\varnothing\}$ no es el conjunto vacío, es un conjunto que tiene un elemento (el elemento es el conjunto vacío).

Subconjunto

Suponga que en un problema particular estamos interesados en calificaciones determinadas con números enteros del 5 al 10, eso nos sugiere que el conjunto universal es

$$U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Ahora bien, si $A = \{5, 6, 9\}$ es un conjunto bajo estudio. Podemos observar que todo elemento de A también es un elemento de U. Decimos que A es un subconjunto del conjunto U. Esto nos lleva a la siguiente:

Definición:
Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B, si y sólo si cada elemento de A también es elemento de B. Esto lo escribimos $A \subseteq B$. Por otro lado, si A no es subconjunto de B, lo denotamos con $A \supseteq B$.

Cuando $A \subseteq B$, también decimos que "A está contenido en B".

Observe que para demostrar que un conjunto, A, *no* es subconjunto de un conjunto B, con base en la definición debemos demostrar que no todo elemento de A pertenece a B, es decir, debemos encontrar **un** elemento en A tal que ese elemento **no** pertenezca a B. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 3\} \supseteq \{2, 3, 4, 5\}$, ya que $1 \in A$, pero $1 \notin B$.

El conjunto vacío, $\varnothing$, es subconjunto de todo conjunto A. (Véase el problema 15.)

EJEMPLO 3

Haga una lista con todos los subconjuntos del conjunto

$$M = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Solución: para hacer la lista procedemos de manera ordenada, primero escribimos los conjuntos con cero elementos, es decir, sin elementos. Sólo existe uno, el vacío. $\varnothing \subseteq M$.

La lista de conjuntos con un elemento es:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \text{ y } \{4\}$$

Los subconjuntos de M con 2 elementos son:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \text{ y } \{3, 4\}.$$

Hay cuatro subconjuntos de M con 3 elementos:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\} \text{ y } \{2, 3, 4\}.$$

Y sólo existe un subconjunto de M con cuatro elementos, éste es el mismo M.

Observe que en el ejemplo anterior tenemos 16 subconjuntos de H. En la lista están incluidos dos ($\varnothing$ y M), que se denominan subconjuntos impropios o triviales de M, los restantes 14 se les conoce como **subconjuntos propios** de M.

Igualdad de conjuntos

Decimos que dos conjuntos son iguales si **tienen los mismos elementos.** Cuando dos conjuntos, A y B, son iguales escribimos $A = B$. Para demostrar que A y B son iguales, tenemos que demostrar que todos los elementos de A pertenecen a B y también que todos los elementos de B pertenece a A. Es decir, se debe cumplir que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Si alguna de las contenciones anteriores no se cumple escribimos $A \neq B$, que se lee "A es diferente de B".

EJEMPLO 4

a. El conjunto $\{1, 2, 3\}$ es igual al conjunto $\{3, 1, 2\}$, ya que tienen los mismos elementos. Observe que esto nos indica que el orden en que escribimos los elementos de un conjunto no importa.

b. El conjunto $T = \{2, 4, 6\}$ es igual al conjunto $P = \{2, 4, 2, 6, 2, 4\}$. Note que todos los elementos de T pertenecen a P, y recíprocamente, todos los elementos de P pertenecen a T. Esto nos dice que en un conjunto basta con escribir una sola vez cada elemento.

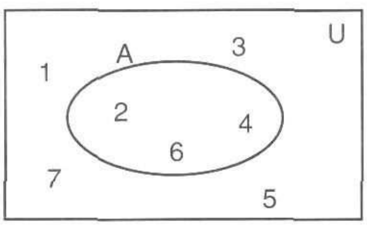
Diagrama de Venn-Euler

Un dibujo dice más que mil palabras, reza un refrán, y las matemáticas no son la excepción. Muchas veces un dibujo o una gráfica nos ayudan a clarificar algunas ideas, en el caso de la teoría de conjuntos se emplean los diagramas de Venn-Euler, o simplemente diagramas de Venn. Por lo regular, en estos diagramas el conjunto universal se representa por medio de un rectángulo y los demás conjuntos de interés por medio de óvalos, círculos u otras formas. En esta sección y la siguiente haremos uso de los diagramas de Venn para ilustrar muchos de los conceptos.

EJEMPLO 5

Represente por medio de un diagrama de Venn al conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, *y considere el conjunto universal* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Solución:

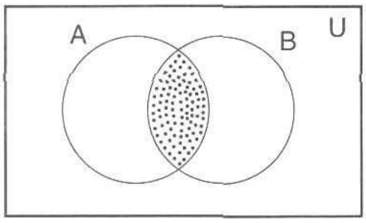


EJEMPLO 6

Por medio de un diagrama de Venn represente a los conjuntos

U = {x|x es una persona que se encuentra en América}
A = {x|x es una persona que padece de miopía}
B = {x|x es una persona que padece de astigmatismo}

Solución:
Representamos por medio de un rectángulo al conjunto universal y por medio de círculos a los conjuntos A y B.



En el diagrama anterior, traslapamos los círculos que representan a los conjuntos A y B, ¿Por qué?

Ejercicio A.2

En los ejercicios del 1 al 6 escriba $\in$ o $\notin$ para que la expresión dada sea verdadera.

1. 4 _____ {1, 2, 3, 4}
2. Júpiter _____ {x|x es un planeta}
3. 5 _____ $\varnothing$
4. Luna _____ {x|x es un planeta}
5. {4} _____ {1, 2, 3, 4}
6. 5 _____ Ω

En los ejercicios del 7 al 14 decida si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes.

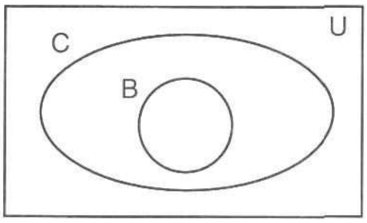
7. {3, 4} = {4, 3}
8. a $\in$ {h, o, l ,a}
9. {Marte} $\subseteq$ {k|k es un planeta del sistema solar}
10. {a, m, a, b, a} = {a, b, m}
11. 3 $\notin$ {2, 4, 6}
12. {2, 3} $\supseteq$ {2, 4, 6, 8}
13. {m|m es un número natural menor a 2} = {1}
14. {Belice, Honduras, Cuba} $\subseteq$ {c|c es un país del Continente Americano}.
15. Demuestre que el conjunto vacío, $\varnothing$, es subconjunto de cualquier conjunto, A. *Sugerencia:* Suponga que $\varnothing \supseteq$ A y muestre que esto no es posible.

Para los problemas del 16 al 24, decida si la proposición dada es verdadera o falsa. Considere los conjuntos siguientes:

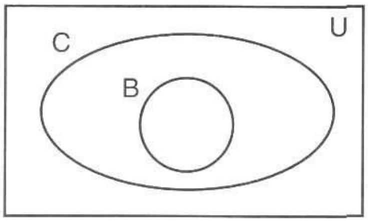
U = {a, b, c, d, f, g, h, i}
A = {a, c, d}
B = {f, g}
C = {a, b, f, g}

16. {g, f, b} $\subseteq$ B
17. $\varnothing \subseteq$ B
18. A $\subseteq$ U
19. C $\supseteq$ A
20. A $\supseteq$ C
21. El conjunto B tiene exactamente 2 subconjuntos propios.
22. El conjunto C tiene exactamente 32 subconjuntos.

23. El diagrama siguiente ilustra de manera correcta la relación entre U, A y B.



24. El diagrama siguiente ilustra de manera correcta la relación entre U, B y C.



OBJETIVO Definir las operaciones básicas con conjuntos, unión, intersección, complemento y diferencia; ilustrar el uso de las operaciones de conjuntos en diversas situaciones, y representar las operaciones entre conjuntos por medio de diagramas de Venn.

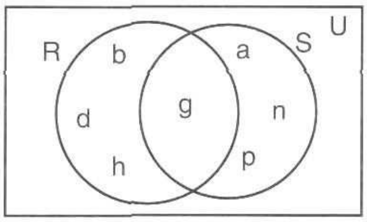
A.3 Operaciones con conjuntos

En un estudio sobre enfermedades en dos regiones del país, se encontró la información que aparece en la tabla siguiente, con respecto a las principales enfermedades en la población de cada región.

Región norte	Región sur
Bocio, b	Anemia, a
Diabetes, d	Gripe. g
Gripe, g	Neumonía, n
Hepatitis, h	Paludismo, p

La única enfermedad de mayor incidencia en común a las dos regiones es la g, gripe. Ahora, si representamos las enfermedades de cada región como un conjunto, entonces el conjunto de enfermedades con mayor incidencia en la región norte del país forman el conjunto R = {b, d, g, h}. Mientras que para la región sur tenemos S = {a, g, n, p}.

Estos conjuntos los podemos representar por medio de un diagrama de Venn, como se muestra a continuación, en donde el único elemento común a los dos conjuntos es *g*. Este elemento pertenece a la *intersección* de los conjuntos.



La **intersección** de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que se forma con los elementos que son comunes a ambos conjuntos, es decir

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

En el siguiente diagrama de Venn la parte sombreada, que es común a ambos conjuntos, representa la intersección de ellos.

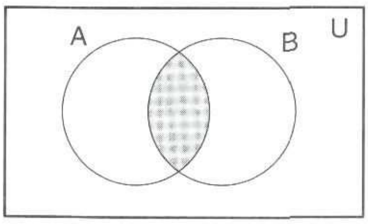


FIGURA A.1 Intersección de los conjuntos A y B, $A \cap B$.

Para el caso de las enfermedades tenemos

$$R \cap S = \{g\}$$

EJEMPLO 1

Determine la intersección de los conjuntos siguientes:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 8, 16\}$

b. $C = \{x|x$ es un planeta del sistema solar$\}$ y $D = \{x|x$ es un planeta que está más próximo al Sol que la Tierra$\}$

c. $E = \{h, o, l, a\}$ y $\varnothing$

d. $F = \{3, 6, 9, 12\}$ y $G = \{5, 10, 15\}$

Solución:

a. Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 2 y 4, tenemos

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 8, 16\} = \{2, 4\}.$$

b. En este caso tenemos que $C \cap D = \{$Mercurio, Venus$\}$, ya que éstos son los únicos planetas del sistema solar que están más próximos al Sol que a la Tierra.

c. Puesto que $\varnothing$ no tiene elementos, no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos, por lo tanto,

$$\{h, o, l, a\} \cap \varnothing = \varnothing.$$

d. Como se puede observar, los conjuntos F y G no tienen elementos en común, por lo que,

$$F \cap G = \varnothing.$$

Los dos últimos nos muestran, en cada caso, dos conjuntos que no tienen elementos en común, éstos conjuntos reciben el nombre de **conjuntos disjuntos.** Con mayor formalidad decimos que los conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \varnothing$.

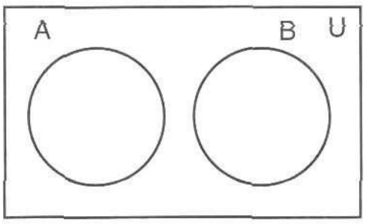


FIGURA A.2 Conjuntos disjuntos, $A \cap B = \varnothing$.

EJEMPLO 2

En un estudio realizado en una universidad se clasificó a los estudiantes en los conjuntos siguientes:

$$S = \{x|x \text{ tiene automóvil}\}$$
$$T = \{x|x \text{ juega baloncesto}\}$$

Describa la intersección de los conjuntos S y T e ilústrelo en un diagrama de Venn

Solución: la intersección está formada por los elementos que cumplen las dos condiciones así que

$$S \cap T = \{x|x \text{ tiene automóvil y juega baloncesto}\}$$

El siguiente diagrama de Venn ilustra lo anterior.

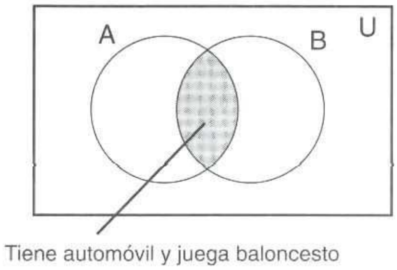


FIGURA A.3

Al inicio de la sección se presentó una tabla con las cuatro enfermedades principales en cada una de las regiones del país (norte y sur). Si un estudiante desea realizar un reporte de las principales enfermedades de las dos regiones, entonces necesita analizar cada una de las enfermedades que tienen una alta incidencia en la región norte o en la región sur, es decir, el conjunto

$$\{a, b, d, g, h, n, p\}$$

que es la *unión* de los conjuntos de enfermedades, este conjunto se representa mediante el siguiente diagrama de Venn.

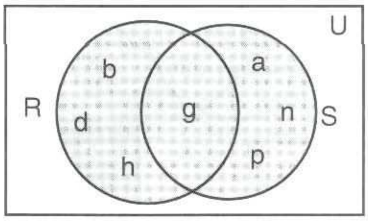


FIGURA A.4 Unión de los conjuntos R y S, $R \cup S$.

Formalizando lo anterior, decimos que la **unión** de los conjuntos A y B, denotado por $A \cup B$, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos. Es decir,

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$$

EJEMPLO 3

Determine la unión de los conjuntos siguientes:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 8, 16\}$

b. $C = \{x|x$ es un planeta del sistema solar$\}$ y $D = \{x|x$ es un planeta que está más próximo al Sol que la Tierra$\}$

c. $E = \{h, o, l, a\}$ y $\varnothing$

Solución:

a. Para obtener la unión comenzamos por enumerar a todos los elementos del primer conjunto y a continuación escribimos los elementos del segundo conjunto que no hayamos escrito, es decir,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16\}.$$

b. Note que en este caso, al listar todos los elementos del conjunto C, nos damos cuenta que ya incluimos a todos los del conjunto D, por lo que,

$$C \cup D = \{x|x \text{ es un planeta del sistema solar}\}.$$

Observe que es el mismo conjunto C, ¿por qué?, ¿bajo qué circunstancia se cumple lo anterior?, es decir, ¿cuáles son las condiciones para que al unir dos conjuntos el resultado sea uno de ellos? Véase el problema 27.

c. $E \cup \varnothing = \{h, o, l, a\}$. Note que el resultado fue el conjunto E. Véase el problema 30.

Regresando con el ejemplo dado al inicio de la sección el total de enfermedades que se encontraron en las dos regiones fue de siete. Incluimos Cirrosis hepática, Diabetes y Tuberculosis para formar el conjunto universal para este caso. A continuación, mostramos la tabla con las diez enfermedades bajo estudio.

TABLA A.1 Padecimientos en el estudio de las dos regiones del país

Anemia, a	Gripe, g
Bocio, b	Hepatitis, h
Cirrosis hepática, c	Neumonía, n
Diabetes, d	Paludismo, p
Epilepsia, e	Tuberculosis, t

Con la notación dada en la tabla para las enfermedades, tenemos que

$$U = \{a, b, c, d, e, g, h, n, p, t\}.$$

En el siguiente diagrama de Venn mostramos a los conjuntos U y R definido con anterioridad.

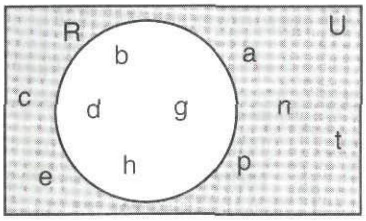


FIGURA A.5

Observe la región sombreada, también forma un conjunto, llamado el **complemento** de R, y se representa por R^c, R' o con $\bar{R}$. Aquí emplearemos la primera de las notaciones. Formalizando lo anterior, tenemos:

El conjunto complemento de A, denotado A^c, es el conjunto que contiene a todos los elementos del universo, U, que no pertenecen al conjunto A. Es decir,

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

EJEMPLO 4

Considerando el caso de las principales enfermedades en las dos regiones del país, determine:

a. R^c,

b. S^c.

Solución:

a. Para escribir el complemento del conjunto R, basta con listar a todos los elementos del universo y quitar aquellos que pertenezcan a R. Es decir,

$$R^c = \{a, c, e, n, p, t\}.$$

Véase la figura A.5.

b. De manera análoga obtenemos $S^c = \{b, c, d, e, h, t\}$.

Una operación más entre conjuntos es la *diferencia* entre dos conjuntos. ésta la utilizamos cuando nos interesa conocer los elementos de un conjunto que no se encuentran en el otro. En el caso de las enfermedades, la diferencia entre los conjuntos R y S, denotada por R − S es el conjunto

$$R - S = \{b, d, h\}.$$

El conjunto anterior representa a las principales enfermedades en la región norte que no son enfermedades principales en la región sur. Formalizamos lo anterior en la definición siguiente.

La **diferencia** de los conjuntos A y B, denotada por A − B, es el conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto A pero no pertenecen al conjunto B, es decir,

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En un diagrama de Venn la diferencia anterior se representa en la figura siguiente

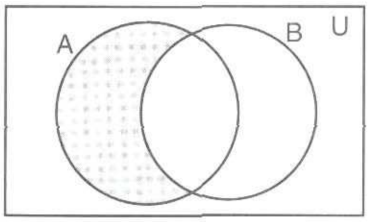


FIGURA A.6 Diferencia de conjuntos, A − B.

EJEMPLO 5

Determine la diferencia de los conjuntos siguientes.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 8, 10\}$$

Solución: para obtener la diferencia, A − B, listamos todos los elementos de A y eliminamos de esa lista a los elementos que tenga en común con B. Al hacer lo anterior, tenemos

$$A - B = \{1, 3, 5, 6\}.$$

EJEMPLO 6

Se clasificó a estudiantes de la universidad estatal en:

$$\begin{aligned} F &= \{x | x \text{ fuma}\} \\ T &= \{x | x \text{ tiene automóvil}\} \\ M &= \{x | x \text{ es mujer}\} \end{aligned}$$

En este caso, el conjunto universal, U, *es el de todos los estudiantes (hombres y mujeres) de esa universidad.*

Describa con palabras a cada uno de los conjuntos siguientes:

a. F − T.
b. M − T.
c. T − F.

Solución:

a. F − T, representa al conjunto de estudiantes que fuma y no tiene automóvil.
b. M − F, es el conjunto de estudiantes mujeres que no fuman.
c. T − F, son los estudiantes de la universidad que tienen automóvil pero no fuman. Compare esto con la parte (a).

Las operaciones entre conjuntos tienen propiedades algebraicas interesantes, y éstas se pueden demostrar a partir de sus definiciones, sin embargo, sólo ilustraremos algunas por medio de diagramas de Venn.

La unión y la intersección son conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A.$$

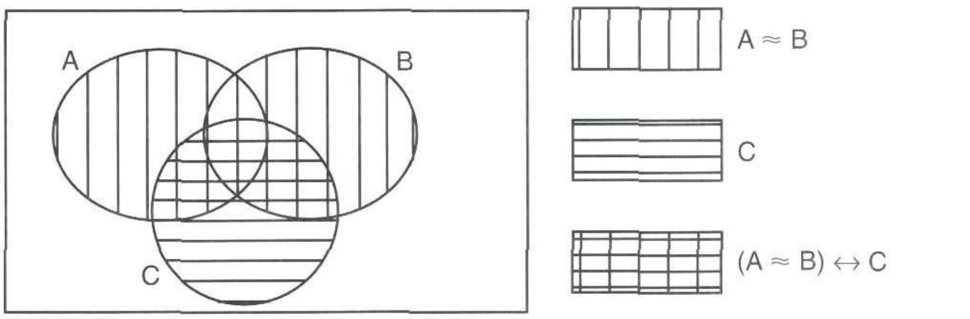
La unión y la intersección son asociativas:

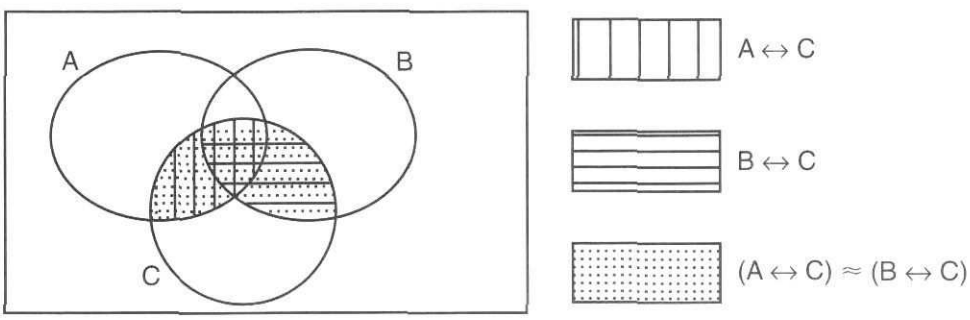
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

También satisfacen propiedades distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Para ilustrar $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, mostramos los diagramas de Venn siguientes:





Como se puede observar, el resultado final es el mismo por lo que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

De forma análoga se pueden ilustrar las otras propiedades.

Ejercicio A.3

En los problemas del 1 al 12, realice las operaciones que se indican. Considere los conjuntos siguientes.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$

$D = \{3, 6, 9\}$

1. $A \cup B$ **2.** $C \cap B$

3. $A \cup (B \cap C)$ **4.** $A^c \cap B$

5. $D \cap A^c$ **6.** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

7. $D^c \cup C^c$ **8.** $D - C$

9. $C -(A \cup B)$ **10.** $(A - C) - (B - D)$

11. $A^c - B^c$ **12.** $D - A^c$

En los problemas del 13 al 20, ilustre por medio de diagramas de Venn las igualdades que se dan.

13. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. **14.** $A - B = A \cap B^c$.

15. $A \cap B = B \cap A$ **16.** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

17. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **18.** $(A - B) \cap C = A \cap (C - B)$.

19. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ **20.** $A^c - B = (A \cup B)^c$.

Se clasificó a estudiantes de la universidad estatal en:

$F = \{x|x \text{ fuma}\}$

$T = \{x|x \text{ tiene automóvil}\}$

$M = \{x|x \text{ es mujer}\}$

$H = \{x|x \text{ es hombre}\}$

Describa con palabras cada uno de los conjuntos dados en los problemas del 21 al 26.

21. T^c **22.** $M \cap (T \cap H)$

23. $H \cap F^c$ **24.** $(M \cap T^c) \cup (H \cap F^c)$

25. $H - F$ **26.** $M - (T \cup F)$

27. ¿Qué condiciones se debe(n) cumplir para que $A \cup B = B$ sea cierta?

28. ¿Qué condiciones se debe(n) cumplir para que $A \cap B = B$ sea cierta?

29. ¿Qué condiciones se debe(n) cumplir para que $A - B = A$ sea cierta?

30. Justifique por medio de diagramas de Venn las igualdades siguientes, que se cumplen para cualquier conjunto A.

a. $A \cup \varnothing = A$ **b.** $A \cap U = A$

c. $A \cup U = U$ **d.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

OBJETIVO Estudiar la cardinalidad de conjuntos. Obtener expresiones para la cardinalidad de la unión de conjuntos.

A.4 CARDINALIDAD DE CONJUNTOS

En diversas situaciones, es importante conocer el número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, cuando se hacen encuestas o se estudia probabilidad con el enfoque frecuencial. Al número de elementos de un conjunto se le llama **número cardinal** o **cardinalidad** del conjunto, la cardinalidad del conjunto A se denota por medio del símbolo $n(A)$.

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero no negativo particular, decimos que el conjunto es **finito,** en caso contrario le llamamos conjunto infinito.

EJEMPLO 1

Determine el número cardinal de cada uno de los conjuntos siguientes.

a. $\{1, 3, 5, 7\}$
b. $\{x|x$ es un país de Norteamérica$\}$
c. $\{x|x$ es un planeta del sistema solar ubicado entre el Sol y los asteroides$\}$
d. $\varnothing$
e. $\{\varnothing\}$

Solución:

a. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ tiene 4 elementos, por lo que $n(A) = 4$.
b. $B = \{x|x$ es un país de Norteamérica$\} = \{$Canadá, Estados Unidos, México$\}$, así $n(B) = 3$.
c. $C = \{x|x$ es un planeta del sistema solar ubicado entre el Sol y los asteroides$\} = \{$Mercurio, Venus, Tierra$\}$, por lo tanto, $n(C) = 3$.
d. $\varnothing$, el vacío no tiene elementos y así $n(\varnothing) = 0$.
e. $E = \{\varnothing\}$, este conjunto tiene un elemento, por lo tanto, $n(E) = 1$.

En muchos problemas en los que de manera natural aparecen conjuntos, se requiere de un análisis de la información conocida acerca de determinados subconjuntos y con esta información determinar la cardinalidad de otros subconjuntos, o bien el total de elementos bajo estudio.

Existen diferentes técnicas para resolver este tipo de problemas, una de las cuales hace uso de los diagramas de Venn, otra de ellas emplea tablas, en donde se representa la información pertinente y una tercer técnica es por medio de fórmulas para obtener el número de elementos. En esta sección analizaremos cada una de ellas.

EJEMPLO 2

En una encuesta realizada a jóvenes acerca de sus preferencias con respecto a los deportes, se obtuvo la información siguiente:

69 prefieren el fútbol.
46 prefieren el béisbol.
32 prefieren el rugby.
18 prefieren el fútbol y el rugby.
9 prefieren el béisbol y el fútbol.
12 prefieren el béisbol y el rugby.
3 prefieren los tres deportes.
19 no les gustan esos tres deportes.

Con base en la información anterior, responda cada una de las preguntas siguientes:

a. *¿Cuántos jóvenes se encuestaron?*
b. *¿Cuántos jóvenes sólo prefieren el rugby y ninguno de los otros dos?*
c. *¿Cuántos prefieren béisbol y rugby pero no fútbol?*
d. *¿Cuántos jóvenes prefieren exactamente uno de los tres deportes?*

Solución:
Debe tener precaución, pues no basta con sumar los 8 números dados ya que existen conjuntos traslapados, como se muestra en el diagrama siguiente, en el que:

$U = \{$jóvenes que participaron en la encuesta$\}$
$F = \{$prefieren fútbol$\}$
$B = \{$prefieren béisbol$\}$
$R = \{$prefieren rugby$\}$

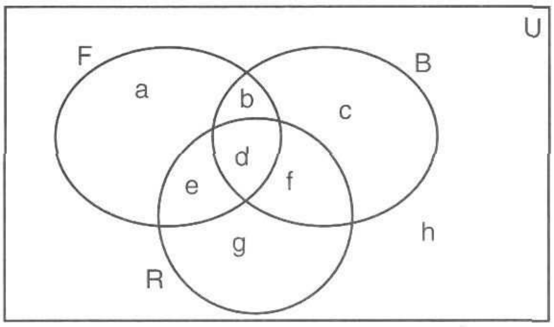


FIGURA A.7 Regiones en que se dividen tres conjuntos traslapados.

Observe que en el diagrama aparecen 8 sectores, cada uno de los cuales lo podemos expresar con palabras. Por ejemplo, el sector f representa a aquellos jóvenes que prefieren el béisbol y el rugby pero no el fútbol; el sector d representa a los que prefieren los tres deportes, mientras que el sector h a los que no les gusta estos tres deportes.

Observe que F está compuesto de cuatro sectores (a, b, d y e) y, por tanto, debemos distribuir a los 69 que prefieren el fútbol en estos sectores, pero, ¿cómo? Notando que el sector d es de aquellos que prefieren los tres deportes (3), nos permite encontrar los valores de b, f y e, ya que las regiones b y d componen a los que prefieren fútbol y béisbol (9); por tanto, en b debe haber 6 (=9 − 3). De forma análoga, en las regiones d y e debe haber 18, por tanto, en e habrá 15 (=18 − 3). Y en la región f debe haber 9.

Ahora bien, el conjunto F lo conforman las regiones a, b, d y e. Y de estas sólo falta por saber cuántos debe haber en la región a. Como en F hay 69, tenemos que en a debe haber 45 (=69 − 6 − 15 − 3). De forma similar, calculamos el número que debe ir en la región c, que es 28 (=46 − 6 . 9 − 3) y en la región g, el cual es 5 (=29 –15 − 3 − 9). El diagrama con el número de jóvenes en cada región se da a continuación.

Con ayuda del diagrama anterior, las respuestas a las preguntas planteadas son fáciles de obtener.

a. El total de encuestados es 45 + 6 + 3 + 15 + 28 + 9 + 5 + 9 = 120.

b. Los que sólo prefieren el rugby y ninguno de los otros dos, se encuentran en la región g, por tanto hay 5.

c. Los que prefieren béisbol y rugby pero no fútbol, están en la región f, así que hay 9.

d. Los jóvenes que prefieren exactamente uno de los tres deportes, son los que están en la región b, en la e o en la f, que en total son 6 + 15 + 9 = 30.

Con base en el ejemplo anterior y en la figura siguiente, podemos deducir una fórmula para $n(A \cup B)$.

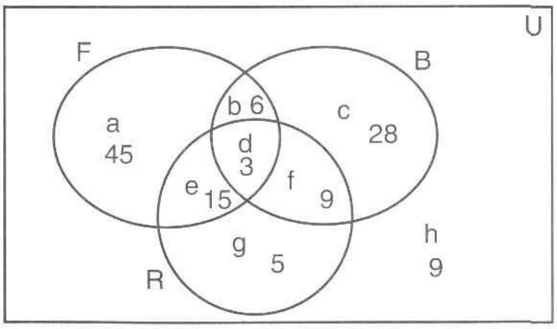


FIGURA A.8 Regiones en que se dividen dos conjuntos que se traslapan.

En general, $n(A \cup B)$ no es igual a $n(A) + n(B)$. Primero vea que

$$n(A \cup B) = a + b + c.$$

Ahora bien, $n(A) = a + b$ y $n(B) = b + c$, si sumamos lo anterior, habremos sumado dos veces b, así que para obtener $a + b + c$, es necesario restar una vez b, que es $n(A \cap B)$, así obtenemos

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Con ayuda del diagrama de la figura A.7, podemos deducir una fórmula análoga para $n(A \cup B \cup C)$, véase el ejercicio 15.

EJEMPLO 3

Si $n(A) = 40$, $n(A \cap B) = 25$ *y* $n(A \cup B) = 70$, *determine* $n(B)$.

Solución:
De la fórmula obtenida antes de este ejemplo, al despejar $n(B)$, tenemos

$$n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) - n(A).$$

Sustituyendo

$$n(B) = 70 + 25 - 40 = 55.$$

En ocasiones, se muestra la información en forma de tabla como en el ejemplo siguiente, y a partir de esa tabla podemos obtener información valiosa aplicando las ideas básicas de unión e intersección.

EJEMPLO 4

La tabla siguiente muestra el número de defunciones por grupo de edad y sexo en una muestra de 500 fallecimientos de cierta región del planeta.

	Grupo de edad (años)				
	0-10 (D)	**11-30 (T)**	**30-50 (C)**	**Mayor a 50 (V)**	**Totales**
Hombres (H)	200	20	25	60	305
Mujeres (M)	120	15	20	40	195
Totales	320	35	45	100	500

Con base en la tabla anterior, determine el número de elementos en cada uno de los conjuntos siguientes y describa con palabras cada conjunto.

a. $H \cap T$
b. H^c
c. $M \cap (T \cup V)$
d. $T^c \cup H^c$.

Solución:

a. $H \cap T$, representa a los hombres en el grupo de 11 a 30 años. $n(H \cap T)$ se obtiene en la intersección de la fila H con la columna T, es decir, $n(H \cap T) = 20$

b. H^c, representa a los individuos que no son hombres, es decir, a las mujeres. H^c, excluye a la fila H, por lo tanto $n(H^c) = 195$, que se lee al final de la fila M.

c. $M \cap (T \cup V)$ son las mujeres que están en el rango de 11 a 30 o bien mayores de 50 años. El conjunto $T \cup V$ incluye las columnas T y V, al intersecarlas con la fila de M tenemos los números 15 y 40, por tanto,

$$n\varnothing M \cap (T \cup V)] = 55.$$

d. $T^c \cup H^c$, representa a los individuos que no están en el rango de 11 a 30 o bien aquellos que no son hombres. T^c excluye la columna de T, es decir, se consideran las columnas D, C y V, así, $n(T^c) = 320 + 45 + 100 = 465$. Por otro lado, tenemos que H^c es la fila M, ya que excluye la fila H. Se debe tener cuidado de no contar dos veces las regiones que ya se contabilizaron. La única región que falta por agregar de la fila M es el de las mujeres del rango 11 a 30, que son 15. Por lo tanto, $n(T^c \cup H^c) = 465 + 15 = 480$. Observe que del problema 16 de la sección anterior, sabemos que

$$T^c \cup H^c = (T \cap H)^c$$

Y si del total, 500, restamos $n(T \cap H) = 20$, obtenemos $n(T^c \cup H^c) = 500 - 20 = 480$, como antes.

Para concluir, diremos que si dividimos el número cardinal de cada conjunto entre el número cardinal del universo, obtenemos la fracción que representa el conjunto del total, que siempre será un número entre 0 y 1, incluyendo a ambos. Esta fracción se puede considerar como la probabilidad de que al tomar un elemento al azar del universo, éste elemento pertenezca al conjunto dado. Éste enfoque de la probabilidad se le conoce como enfoque frecuencial.

Ejercicio A.4

En los problemas del 1 al 6 clasifique cada conjunto como finito o infinito.

1. {3, 6, 9, 12, . . . , 30}

2. {x|x es un número entero menor a 42}

3. {x|x es un número entero mayor a 42}

4. {x|x es una persona viva al final del año 2002}

5. {x|x es un múltiplo entero de 1000}

6. {x|x es el nombre de un departamento de Colombia}

En los problemas del 7 al 12 determine n(D) para cada conjunto.

7. D = {x|x es una vocal del abecedario español}

8. D = {x|x es departamento de Perú}

9. D = {x|x es un estado de México}

10. D = {x|x es un entero tal que $x^2 = 3$}

11. D = {x|x es un número real tal que $x^2 = 3$}

12. D = {x|x es una letra de la palabra "Venezuela"}

13. En una clínica comunitaria se entrevistó a 100 pacientes y se recabó la información siguiente:

60 iban por problemas respiratorios.

50 asistían por problemas gastrointestinales.

20 iban por ambos problemas.

Emplee un diagrama de Venn para responder las preguntas siguientes:

a. ¿Cuántos iban a consulta por problemas que no fuesen respiratorios ni gastrointestinales?

b. ¿Cuántos asistieron sólo por problemas respiratorios?

14. En una encuesta realizada a adultos de la región norte del país, con respecto al género de cine que preferían, se obtuvo la información siguiente:

120 prefieren la comedia.

100 prefieren el género erótico.

50 les gusta el suspenso.

10 prefieren los géneros erótico y comedia.

16 prefieren comedia y suspenso.

16 prefieren suspenso y erotismo.

6 les agradan los tres géneros.

Se entrevistó a un total de 290 personas adultas.

Responda las preguntas siguientes:

a. ¿Cuántos optan por un género que no es de los tres mencionados?

b. ¿Cuántos prefieren comedia y suspenso pero no cine de erotismo?

c. ¿Cuántos optan por uno sólo de estos géneros?

d. ¿Cuántos sólo prefieren la comedia?

15. Con base en la figura A.7 demuestre que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B) - n(A \cup C) - n(B \cup C) + n(A \cap B \cap C)$$

16. En la tabla siguiente se presenta la información que se recopiló en una población de jóvenes con respecto a sus preferencias musicales.

	Grupo de edad (años)				
	11-14 (C)	15-17 (S)	18-20 (D)	20 a 30 (V)	Totales
Rock (R)	22	25	20	15	82
Tropical (T)	8	4	5	9	26
Balada (B)	4	10	8	20	42
Totales	34	39	33	44	150

Determine el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

a. $R \cap (D \cup V)$.

b. $(R \cup B) \cap S$.

c. $T^c \cap S$

d. $V^c \cup B^c$.

A.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección A.1 conjunto elemento método por extensión y método por comprensión

Sección A.2 conjunto vacío, $\varnothing$ conjunto universal, U, Ω diagrama de Venn-Euler subconjunto, $\subset$ y $\subseteq$

Sección A.3 unión, $\cup$ intersección, $\cap$ complemento, A^c diferencia

Sección A.4 número cardinal $n(A)$, conjunto finito conjunto infinito

Resumen

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados los elementos del conjunto. Si un conjunto no tiene elementos se denomina conjunto vacío. El conjunto al cual, se considera que pertenecen todos los elementos con los que se trabaja, se denomina conjunto universal, o en ocasiones universo del discurso. Un apoyo esquemático para representar conjuntos es el diagrama de Venn-Euler.

Un conjunto A está contenido en otro, B, si todos los elementos de A también pertenece al conjunto B. Escribimos $A \subseteq B$, y decimos que A es subconjunto de B.

Dos conjuntos, A y B son iguales, si se cumple $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Existen varias operaciones básicas entre conjuntos que dan lugar a un nuevo conjunto, éstas son la unión, intersección, complemento y diferencia de conjuntos. La unión de dos conjuntos está formada por los elementos que pertenecen a almenos uno de los conjuntos dados. Mientras que la intersección de dos conjuntos está constituida por aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos. El conjunto complemento de otro está formado por los elementos del conjunto universal pero que no pertenecen al conjunto dado. Y la diferencia de dos conjuntos la constituyen los elementos que pertenecen al primer conjunto pero no al segundo.

El número de elementos que tiene un conjunto, A, se llama cardinalidad del conjunto, se denota con $n(A)$.

La cardinalidad de la unión de dos conjuntos, $n(A \cup B)$, está dada por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

El conteo del número de elementos en un conjunto es una parte importante en la comprensión de la probabilidad clásica de eventos.

Problemas de repaso

En los problemas 1 y 2 escriba cada conjunto utilizando el método de extensión.

1. El conjunto de los números enteros positivos que son divisores de 12.

2. El conjunto de los países de América cuyo nombre de su capital inicia con B.

En los problemas del 3 al 6 decida si está o no bien definido el conjunto. Discuta las respuestas con sus compañeros.

3. El conjunto de cantantes de éxito.

4. El conjunto de personas con más de 120 años de edad nacidas el siglo pasado en América.

5. El conjunto de materias difíciles en la escuela.

6. $\{x|x \text{ es un número racional}\}$

7. Construya un diagrama de Venn que ilustre conjuntos A, B y C que cumplan:

$$A \subseteq B \text{ y } A \subseteq C.$$

Hay más de una respuesta correcta.

Para los problemas del 8 al 21 considere:

$U = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, e, d, a\}$

$C = \{a, f\}$

$D = \{d, e, f\}$

Determine cada uno de los conjuntos siguientes.

8. $A \cup D$

9. $B \cap C$

10. $B \cup (A \cap D)$

11. C^c

12. $D \cap (B \cup A^c)$

13. $C - A$

14. $(A \cap C) - (D \cap B)$

15. $U - B$

Determine si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera *o* falsa.

16. $\{b\} \in B$

17. $A \cap D = \varnothing$

18. $n(A \cap B) = 1$

19. $c \in C$

20. $n(A^c \cup B^c) = 5$

21. $A \cap C^c \subseteq B$

Por medio de un práctico diagrama de Venn, sombree la región que corresponde a cada uno de los conjuntos siguientes:

22. $D \cup E^c$

23. $D^c \cap E$

24. $E \cap (D^c \cup F)$

25. $(E \cup D) - (E \cap F^c)$

El año pasado se recibieron quejas de parte de los usuarios de servicio de televisión de paga. La información de las cuatro principales causas de reporte se resume en la tabla siguiente.

Compañía	Cambio de programación	Pérdida de señal	Menos canales de los prometidos	Cobro indebido	Totales
TVO (V)	10	15	18	22	65
CAT (C)	20	14	20	18	72
MVCT (T)	15	20	30	15	80
Totales	45	49	68	55	217

26. Cuántos de los reportes:

a. ¿Son de TVO debido a fallas en la señal?

b. ¿Son de MVCT o TVO debido a cobros indebidos?

Determine el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

27. $(V \cup T) \cap I^c$.

28. $V^c \cap P^c$

29. C^c

30. $(M \cup V) \cap (S \cup M)$

31. En una encuesta realizada a personas que se encontraban de vacaciones en un centro turístico, se obtuvo la información siguiente:

30 prefieren destino de playa.

28 prefieren destino de montaña.

39 prefieren esquiar en nieve.

15 prefieren destino de playa o esquiar en nieve.

13 prefieren destino de playa o de montaña.

11 prefieren destino de montaña o esquiar en nieve.

20 prefieren un destino distinto a los tres anteriores.

Se entrevistó a un total de 86 personas.

Responda las preguntas siguientes:

a. ¿Cuántos prefieren los tres destinos?

b. ¿Cuántos prefieren sólo un tipo de destino, de los tres mencionados?

c. ¿Cuántos optan por exactamente dos de los tres destinos mencionados?

d. ¿Cuántos sólo prefieren el destino de playa?

e. ¿Cuántos se deciden por alguno de los tres destinos mencionados?

Soluciones

EJERCICIO A.1

1. {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

3. {Praga, París}

5. {Alemania, Argentina, Brasil, Francia, Inglaterra, Italia, Uruguay}

7. {x|x es un número natural impar menor a 10}

9. {x|x es un número natural par}

11. {x|x es un múltiplo positivo de 7, menor o igual a 700}

13. {x|x es un divisor positivo de 12}

15. {x|x es país de Centroamérica}

17. $R = \{61, 62, 63, 64, 65, \ldots\}$

19. $T = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$

EJERCICIO A.2

1. $\in$

3. $\notin$

5. $\notin$

7. Verdadera

9. Verdadera

11. Verdadera

13. Verdadera

17. Verdadera

19. Verdadera

21. Verdadera

23. Falsa

EJERCICIO A.3

1. U

3. {1, 2, 3, 5, 7, 9}

5. {6}

7. {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

9. $\varnothing$

11. {2, 4, 6, 8, 10}

21. T^c, es el conjunto de estudiantes que no tiene automóvil.

23. $H \cap F^c$, es el conjunto de estudiantes hombres que no fuman.

25. $H - F$, es el conjunto de estudiantes hombres que no fuman. Igual que el problema 23.

27. Se debe cumplir que $A \subseteq B$

29. Se debe cumplir que $A \cap B = \varnothing$

EJERCICIO A.4

1. Finito

3. Infinito

5. Infinito

7. $n(D) = 5$

9. $n(D) = 31$

11. $n(D) = 2$

13. **a.** 10, **b.** 40

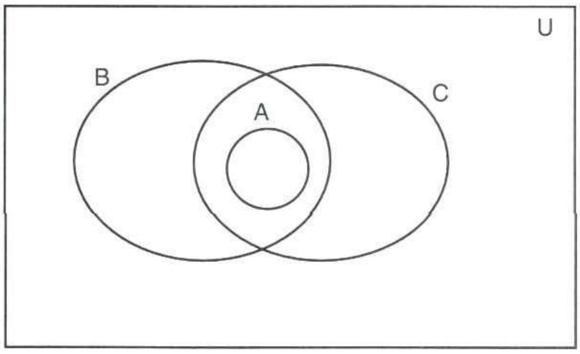
EJERCICIO DE REPASO

1. {1, 2, 3, 4, 6, 12}

3. No está bien definido

5. No está bien definido

7.



Hay más respuestas correctas posibles.

9. {a}

11. {b, c, d, e}

13. {f}

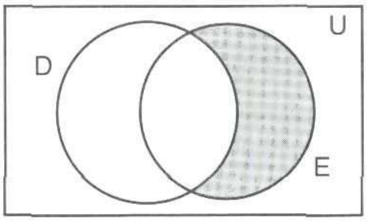
15. {c, f}

17. Verdadera

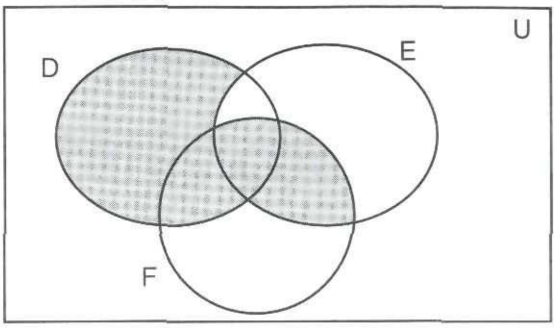
19. Falsa

21. Falsa

23.



25.



27. 108

29. 72

31. **a.** 8, **b.** 43, **c.** 15, **d.** 10, **e.** 66.

APÉNDICE B

Tablas de interés compuesto

$r = 0.005$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.005000	0.995025	0.995025	1.000000
2	1.010025	0.990075	1.985099	2.005000
3	1.015075	0.985149	2.970248	3.015025
4	1.020151	0.980248	3.950496	4.030100
5	1.025251	0.975371	4.925866	5.050251
6	1.030378	0.970518	5.896384	6.075502
7	1.035529	0.965690	6.862074	7.105879
8	1.040707	0.960885	7.822959	8.141409
9	1.045911	0.956105	8.779064	9.182116
10	1.051140	0.951348	9.730412	10.228026
11	1.056396	0.946615	10.677027	11.279167
12	1.061678	0.941905	11.618932	12.335562
13	1.066986	0.937219	12.556151	13.397240
14	1.072321	0.932556	13.488708	14.464226
15	1.077683	0.927917	14.416625	15.536548
16	1.083071	0.923300	15.339925	16.614230
17	1.088487	0.918707	16.258632	17.697301
18	1.093929	0.914136	17.172768	18.785788
19	1.099399	0.909588	18.082356	19.879717
20	1.104896	0.905063	18.987419	20.979115
21	1.110420	0.900560	19.887979	22.084011
22	1.115972	0.896080	20.784059	23.194431
23	1.121552	0.891622	21.675681	24.310403
24	1.127160	0.887186	22.562866	25.431955
25	1.132796	0.882772	23.445638	26.559115
26	1.138460	0.878380	24.324018	27.691911
27	1.144152	0.874010	25.198028	28.830370
28	1.149873	0.869662	26.067689	29.974522
29	1.155622	0.865335	26.933024	31.124395
30	1.161400	0.861030	27.794054	32.280017
31	1.167207	0.856746	28.650800	33.441417
32	1.173043	0.852484	29.503284	34.608624
33	1.178908	0.848242	30.351526	35.781667
34	1.184803	0.844022	31.195548	36.960575
35	1.190727	0.839823	32.035371	38.145378
36	1.196681	0.835645	32.871016	39.336105
37	1.202664	0.831487	33.702504	40.532785
38	1.208677	0.827351	34.529854	41.735449
39	1.214721	0.823235	35.353089	42.944127
40	1.220794	0.819139	36.172228	44.158847
41	1.226898	0.815064	36.987291	45.379642
42	1.233033	0.811009	37.798300	46.606540
43	1.239198	0.806974	38.605274	47.839572
44	1.245394	0.802959	39.408232	49.078770
45	1.251621	0.798964	40.207196	50.324164
46	1.257879	0.794989	41.002185	51.575785
47	1.264168	0.791034	41.793219	52.833664
48	1.270489	0.787098	42.580318	54.097832
49	1.276842	0.783182	43.363500	55.368321
50	1.283226	0.779286	44.142786	56.645163

$r = 0.0075$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.007500	0.992556	0.992556	1.000000
2	1.015056	0.985167	1.977723	2.007500
3	1.022669	0.977833	2.955556	3.022556
4	1.030339	0.970554	3.926110	4.045225
5	1.038067	0.963329	4.889440	5.075565
6	1.045852	0.956158	5.845598	6.113631
7	1.053696	0.949040	6.794638	7.159484
8	1.061599	0.941975	7.736613	8.213180
9	1.069561	0.934963	8.671576	9.274779
10	1.077583	0.928003	9.599580	10.344339
11	1.085664	0.921095	10.520675	11.421922
12	1.093807	0.914238	11.434913	12.507586
13	1.102010	0.907432	12.342345	13.601393
14	1.110276	0.900677	13.243022	14.703404
15	1.118603	0.893973	14.136995	15.813679
16	1.126992	0.887318	15.024313	16.932282
17	1.135445	0.880712	15.905025	18.059274
18	1.143960	0.874156	16.779181	19.194718
19	1.152540	0.867649	17.646830	20.338679
20	1.161184	0.861190	18.508020	21.491219
21	1.169893	0.854779	19.362799	22.652403
22	1.178667	0.848416	20.211215	23.822296
23	1.187507	0.842100	21.053315	25.000963
24	1.196414	0.835831	21.889146	26.188471
25	1.205387	0.829609	22.718755	27.384884
26	1.214427	0.823434	23.542189	28.590271
27	1.223535	0.817304	24.359493	29.804698
28	1.232712	0.811220	25.170713	31.028233
29	1.241957	0.805181	25.975893	32.260945
30	1.251272	0.799187	26.775080	33.502902
31	1.260656	0.793238	27.568318	34.754174
32	1.270111	0.787333	28.355650	36.014830
33	1.279637	0.781472	29.137122	37.284941
34	1.289234	0.775654	29.912776	38.564578
35	1.298904	0.769880	30.682656	39.853813
36	1.308645	0.764149	31.446805	41.152716
37	1.318460	0.758461	32.205266	42.461361
38	1.328349	0.752814	32.958080	43.779822
39	1.338311	0.747210	33.705290	45.108170
40	1.348349	0.741648	34.446938	46.446482
41	1.358461	0.736127	35.183065	47.794830
42	1.368650	0.730647	35.913713	49.153291
43	1.378915	0.725208	36.638921	50.521941
44	1.389256	0.719810	37.358730	51.900856
45	1.399676	0.714451	38.073181	53.290112
46	1.410173	0.709133	38.782314	54.689788
47	1.420750	0.703854	39.486168	56.099961
48	1.431405	0.698614	40.184782	57.520711
49	1.442141	0.693414	40.878195	58.952116
50	1.452957	0.688252	41.566447	60.394257

$r = 0.01$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	$s_{\overline{n}\rceil r}$
1	1.010000	0.990099	0.990099	1.000000
2	1.020100	0.980296	1.970395	2.010000
3	1.030301	0.970590	2.940985	3.030100
4	1.040604	0.960980	3.901966	4.060401
5	1.051010	0.951466	4.853431	5.101005
6	1.061520	0.942045	5.795476	6.152015
7	1.072135	0.932718	6.728195	7.213535
8	1.082857	0.923483	7.651678	8.285671
9	1.093685	0.914340	8.566018	9.368527
10	1.104622	0.905287	9.471305	10.462213
11	1.115668	0.896324	10.367628	11.566835
12	1.126825	0.887449	11.255077	12.682503
13	1.138093	0.878663	12.133740	13.809328
14	1.149474	0.869963	13.003703	14.947421
15	1.160969	0.861349	13.865053	16.096896
16	1.172579	0.852821	14.717874	17.257864
17	1.184304	0.844377	15.562251	18.430443
18	1.196147	0.836017	16.398269	19.614748
19	1.208109	0.827740	17.226008	20.810895
20	1.220190	0.819544	18.045553	22.019004
21	1.232392	0.811430	18.856983	23.239194
22	1.244716	0.803396	19.660379	24.471586
23	1.257163	0.795442	20.455821	25.716302
24	1.269735	0.787566	21.243387	26.973465
25	1.282432	0.779768	22.023156	28.243200
26	1.295256	0.772048	22.795204	29.525631
27	1.308209	0.764404	23.559608	30.820888
28	1.321291	0.756836	24.316443	32.129097
29	1.334504	0.749342	25.065785	33.450388
30	1.347849	0.741923	25.807708	34.784892
31	1.361327	0.734577	26.542285	36.132740
32	1.374941	0.727304	27.269589	37.494068
33	1.388690	0.720103	27.989693	38.869009
34	1.402577	0.712973	28.702666	40.257699
35	1.416603	0.705914	29.408580	41.660276
36	1.430769	0.698925	30.107505	43.076878
37	1.445076	0.692005	30.799510	44.507647
38	1.459527	0.685153	31.484663	45.952724
39	1.474123	0.678370	32.163033	47.412251
40	1.488864	0.671653	32.834686	48.886373
41	1.503752	0.665003	33.499689	50.375237
42	1.518790	0.658419	34.158108	51.878989
43	1.533978	0.651900	34.810008	53.397779
44	1.549318	0.645445	35.455454	54.931757
45	1.564811	0.639055	36.094508	56.481075
46	1.580459	0.632728	36.727236	58.045885
47	1.596263	0.626463	37.353699	59.626344
48	1.612226	0.620260	37.973959	61.222608
49	1.628348	0.614119	38.588079	62.834834
50	1.644632	0.608039	39.196118	64.463182

$r = 0.0125$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\mid r}$	$s_{\overline{n}\mid r}$
1	1.012500	0.987654	0.987654	1.000000
2	1.025156	0.975461	1.963115	2.012500
3	1.037971	0.963418	2.926534	3.037656
4	1.050945	0.951524	3.878058	4.075627
5	1.064082	0.939777	4.817835	5.126572
6	1.077383	0.928175	5.746010	6.190654
7	1.090850	0.916716	6.662726	7.268038
8	1.104486	0.905398	7.568124	8.358888
9	1.118292	0.894221	8.462345	9.463374
10	1.132271	0.883181	9.345526	10.581666
11	1.146424	0.872277	10.217803	11.713937
12	1.160755	0.861509	11.079312	12.860361
13	1.175264	0.850873	11.930185	14.021116
14	1.189955	0.840368	12.770553	15.196380
15	1.204829	0.829993	13.600546	16.386335
16	1.219890	0.819746	14.420292	17.591164
17	1.235138	0.809626	15.229918	18.811053
18	1.250577	0.799631	16.029549	20.046192
19	1.266210	0.789759	16.819308	21.296769
20	1.282037	0.780009	17.599316	22.562979
21	1.298063	0.770379	18.369695	23.845016
22	1.314288	0.760868	19.130563	25.143078
23	1.330717	0.751475	19.882037	26.457367
24	1.347351	0.742197	20.624235	27.788084
25	1.364193	0.733034	21.357269	29.135435
26	1.381245	0.723984	22.081253	30.499628
27	1.398511	0.715046	22.796299	31.880873
28	1.415992	0.706219	23.502518	33.279384
29	1.433692	0.697500	24.200018	34.695377
30	1.451613	0.688889	24.888906	36.129069
31	1.469759	0.680384	25.569290	37.580682
32	1.488131	0.671984	26.241274	39.050441
33	1.506732	0.663688	26.904962	40.538571
34	1.525566	0.655494	27.560456	42.045303
35	1.544636	0.647402	28.207858	43.570870
36	1.563944	0.639409	28.847267	45.115505
37	1.583493	0.631515	29.478783	46.679449
38	1.603287	0.623719	30.102501	48.262942
39	1.623328	0.616019	30.718520	49.866229
40	1.643619	0.608413	31.326933	51.489557
41	1.664165	0.600902	31.927835	53.133177
42	1.684967	0.593484	32.521319	54.797341
43	1.706029	0.586157	33.107475	56.482308
44	1.727354	0.578920	33.686395	58.188337
45	1.748946	0.571773	34.258168	59.915691
46	1.770808	0.564714	34.822882	61.664637
47	1.792943	0.557742	35.380624	63.435445
48	1.815355	0.550856	35.931481	65.228388
49	1.838047	0.544056	36.475537	67.043743
50	1.861022	0.537339	37.012876	68.881790

$r = 0.015$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rvert r}$	$s_{\overline{n}\rvert r}$
1	1.015000	0.985222	0.985222	1.000000
2	1.030225	0.970662	1.955883	2.015000
3	1.045678	0.956317	2.912200	3.045225
4	1.061364	0.942184	3.854385	4.090903
5	1.077284	0.928260	4.782645	5.152267
6	1.093443	0.914542	5.697187	6.229551
7	1.109845	0.901027	6.598214	7.322994
8	1.126493	0.887711	7.485925	8.432839
9	1.143390	0.874592	8.360517	9.559332
10	1.160541	0.861667	9.222185	10.702722
11	1.177949	0.848933	10.071118	11.863262
12	1.195618	0.836387	10.907505	13.041211
13	1.213552	0.824027	11.731532	14.236830
14	1.231756	0.811849	12.543382	15.450382
15	1.250232	0.799852	13.343233	16.682138
16	1.268986	0.788031	14.131264	17.932370
17	1.288020	0.776385	14.907649	19.201355
18	1.307341	0.764912	15.672561	20.489376
19	1.326951	0.753607	16.426168	21.796716
20	1.346855	0.742470	17.168639	23.123667
21	1.367058	0.731498	17.900137	24.470522
22	1.387564	0.720688	18.620824	25.837580
23	1.408377	0.710037	19.330861	27.225144
24	1.429503	0.699544	20.030405	28.633521
25	1.450945	0.689206	20.719611	30.063024
26	1.472710	0.679021	21.398632	31.513969
27	1.494800	0.668986	22.067617	32.986678
28	1.517222	0.659099	22.726717	34.481479
29	1.539981	0.649359	23.376076	35.998701
30	1.563080	0.639762	24.015838	37.538681
31	1.586526	0.630308	24.646146	39.101762
32	1.610324	0.620993	25.267139	40.688288
33	1.634479	0.611816	25.878954	42.298612
34	1.658996	0.602774	26.481728	43.933092
35	1.683881	0.593866	27.075595	45.592088
36	1.709140	0.585090	27.660684	47.275969
37	1.734777	0.576443	28.237127	48.985109
38	1.760798	0.567924	28.805052	50.719885
39	1.787210	0.559531	29.364583	52.480684
40	1.814018	0.551262	29.915845	54.267894
41	1.841229	0.543116	30.458961	56.081912
42	1.868847	0.535089	30.994050	57.923141
43	1.896880	0.527182	31.521232	59.791988
44	1.925333	0.519391	32.040622	61.688868
45	1.954213	0.511715	32.552337	63.614201
46	1.983526	0.504153	33.056490	65.568414
47	2.013279	0.496702	33.553192	67.551940
48	2.043478	0.489362	34.042554	69.565219
49	2.074130	0.482130	34.524683	71.608698
50	2.105242	0.475005	34.999688	73.682828

$r = 0.02$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\mid r}$	$s_{\overline{n}\mid r}$
1	1.020000	0.980392	0.980392	1.000000
2	1.040400	0.961169	1.941561	2.020000
3	1.061208	0.942322	2.883883	3.060400
4	1.082432	0.923845	3.807729	4.121608
5	1.104081	0.905731	4.713460	5.204040
6	1.126162	0.887971	5.601431	6.308121
7	1.148686	0.870560	6.471991	7.434283
8	1.171659	0.853490	7.325481	8.582969
9	1.195093	0.836755	8.162237	9.754628
10	1.218994	0.820348	8.982585	10.949721
11	1.243374	0.804263	9.786848	12.168715
12	1.268242	0.788493	10.575341	13.412090
13	1.293607	0.773033	11.348374	14.680332
14	1.319479	0.757875	12.106249	15.973938
15	1.345868	0.743015	12.849264	17.293417
16	1.372786	0.728446	13.577709	18.639285
17	1.400241	0.714163	14.291872	20.012071
18	1.428246	0.700159	14.992031	21.412312
19	1.456811	0.686431	15.678462	22.840559
20	1.485947	0.672971	16.351433	24.297370
21	1.515666	0.659776	17.011209	25.783317
22	1.545980	0.646839	17.658048	27.298984
23	1.576899	0.634156	18.292204	28.844963
24	1.608437	0.621721	18.913926	30.421862
25	1.640606	0.609531	19.523456	32.030300
26	1.673418	0.597579	20.121036	33.670906
27	1.706886	0.585862	20.706898	35.344324
28	1.741024	0.574375	21.281272	37.051210
29	1.775845	0.563112	21.844385	38.792235
30	1.811362	0.552071	22.396456	40.568079
31	1.847589	0.541246	22.937702	42.379441
32	1.884541	0.530633	23.468335	44.227030
33	1.922231	0.520229	23.988564	46.111570
34	1.960676	0.510028	24.498592	48.033802
35	1.999890	0.500028	24.998619	49.994478
36	2.039887	0.490223	25.488842	51.994367
37	2.080685	0.480611	25.969453	54.034255
38	2.122299	0.471187	26.440641	56.114940
39	2.164745	0.461948	26.902589	58.237238
40	2.208040	0.452890	27.355479	60.401983
41	2.252200	0.444010	27.799489	62.610023
42	2.297244	0.435304	28.234794	64.862223
43	2.343189	0.426769	28.661562	67.159468
44	2.390053	0.418401	29.079963	69.502657
45	2.437854	0.410197	29.490160	71.892710
46	2.486611	0.402154	29.892314	74.330564
47	2.536344	0.394268	30.286582	76.817176
48	2.587070	0.386538	30.673120	79.353519
49	2.638812	0.378958	31.052078	81.940590
50	2.691588	0.371528	31.423606	84.579401

$r = 0.025$				
n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.025000	0.975610	0.975610	1.000000
2	1.050625	0.951814	1.927424	2.025000
3	1.076891	0.928599	2.856024	3.075625
4	1.103813	0.905951	3.761974	4.152516
5	1.131408	0.883854	4.645828	5.256329
6	1.159693	0.862297	5.508125	6.387737
7	1.188686	0.841265	6.349391	7.547430
8	1.218403	0.820747	7.170137	8.736116
9	1.248863	0.800728	7.970866	9.954519
10	1.280085	0.781198	8.752064	11.203382
11	1.312087	0.762145	9.514209	12.483466
12	1.344889	0.743556	10.257765	13.795553
13	1.378511	0.725420	10.983185	15.140442
14	1.412974	0.707727	11.690912	16.518953
15	1.448298	0.690466	12.381378	17.931927
16	1.484506	0.673625	13.055003	19.380225
17	1.521618	0.657195	13.712198	20.864730
18	1.559659	0.641166	14.353364	22.386349
19	1.598650	0.625528	14.978891	23.946007
20	1.638616	0.610271	15.589162	25.544658
21	1.679582	0.595386	16.184549	27.183274
22	1.721571	0.580865	16.765413	28.862856
23	1.764611	0.566697	17.332110	30.584427
24	1.808726	0.552875	17.884986	32.349038
25	1.853944	0.539391	18.424376	34.157764
26	1.900293	0.526235	18.950611	36.011708
27	1.947800	0.513400	19.464011	37.912001
28	1.996495	0.500878	19.964889	39.859801
29	2.046407	0.488661	20.453550	41.856296
30	2.097568	0.476743	20.930293	43.902703
31	2.150007	0.465115	21.395407	46.000271
32	2.203757	0.453771	21.849178	48.150278
33	2.258851	0.442703	22.291881	50.354034
34	2.315322	0.431905	22.723786	52.612885
35	2.373205	0.421371	23.145157	54.928207
36	2.432535	0.411094	23.556251	57.301413
37	2.493349	0.401067	23.957318	59.733948
38	2.555682	0.391285	24.348603	62.227297
39	2.619574	0.381741	24.730344	64.782979
40	2.685064	0.372431	25.102775	67.402554
41	2.752190	0.363347	25.466122	70.087617
42	2.820995	0.354485	25.820607	72.839808
43	2.891520	0.345839	26.166446	75.660803
44	2.963808	0.337404	26.503849	78.552323
45	3.037903	0.329174	26.833024	81.516131
46	3.113851	0.321146	27.154170	84.554034
47	3.191697	0.313313	27.467483	87.667885
48	3.271490	0.305671	27.773154	90.859582
49	3.353277	0.298216	28.071369	94.131072
50	3.437109	0.290942	28.362312	97.484349

$r = 0.03$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\mid r}$	$s_{\overline{n}\mid r}$
1	1.030000	0.970874	0.970874	1.000000
2	1.060900	0.942596	1.913470	2.030000
3	1.092727	0.915142	2.828611	3.090900
4	1.125509	0.888487	3.717098	4.183627
5	1.159274	0.862609	4.579707	5.309136
6	1.194052	0.837484	5.417191	6.468410
7	1.229874	0.813092	6.230283	7.662462
8	1.266770	0.789409	7.019692	8.892336
9	1.304773	0.766417	7.786109	10.159106
10	1.343916	0.744094	8.530203	11.463879
11	1.384234	0.722421	9.252624	12.807796
12	1.425761	0.701380	9.954004	14.192030
13	1.468534	0.680951	10.634955	15.617790
14	1.512590	0.661118	11.296073	17.086324
15	1.557967	0.641862	11.937935	18.598914
16	1.604706	0.623167	12.561102	20.156881
17	1.652848	0.605016	13.166118	21.761588
18	1.702433	0.587395	13.753513	23.414435
19	1.753506	0.570286	14.323799	25.116868
20	1.806111	0.553676	14.877475	26.870374
21	1.860295	0.537549	15.415024	28.676486
22	1.916103	0.521893	15.936917	30.536780
23	1.973587	0.506692	16.443608	32.452884
24	2.032794	0.491934	16.935542	34.426470
25	2.093778	0.477606	17.413148	36.459264
26	2.156591	0.463695	17.876842	38.553042
27	2.221289	0.450189	18.327031	40.709634
28	2.287928	0.437077	18.764108	42.930923
29	2.356566	0.424346	19.188455	45.218850
30	2.427262	0.411987	19.600441	47.575416
31	2.500080	0.399987	20.000428	50.002678
32	2.575083	0.388337	20.388766	52.502759
33	2.652335	0.377026	20.765792	55.077841
34	2.731905	0.366045	21.131837	57.730177
35	2.813862	0.355383	21.487220	60.462082
36	2.898278	0.345032	21.832252	63.275944
37	2.985227	0.334983	22.167235	66.174223
38	3.074783	0.325226	22.492462	69.159449
39	3.167027	0.315754	22.808215	72.234233
40	3.262038	0.306557	23.114772	75.401260
41	3.359899	0.297628	23.412400	78.663298
42	3.460696	0.288959	23.701359	82.023196
43	3.564517	0.280543	23.981902	85.483892
44	3.671452	0.272372	24.254274	89.048409
45	3.781596	0.264439	24.518713	92.719861
46	3.895044	0.256737	24.775449	96.501457
47	4.011895	0.249259	25.024708	100.396501
48	4.132252	0.241999	25.266707	104.408396
49	4.256219	0.234950	25.501657	108.540648
50	4.383906	0.228107	25.729764	112.796867

$r = 0.035$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.035000	0.966184	0.966184	1.000000
2	1.071225	0.933511	1.899694	2.035000
3	1.108718	0.901943	2.801637	3.106225
4	1.147523	0.871442	3.673079	4.214943
5	1.187686	0.841973	4.515052	5.362466
6	1.229255	0.813501	5.328553	6.550152
7	1.272279	0.785991	6.114544	7.779408
8	1.316809	0.759412	6.873956	9.051687
9	1.362897	0.733731	7.607687	10.368496
10	1.410599	0.708919	8.316605	11.731393
11	1.459970	0.684946	9.001551	13.141992
12	1.511069	0.661783	9.663334	14.601962
13	1.563956	0.639404	10.302738	16.113030
14	1.618695	0.617782	10.920520	17.676986
15	1.675349	0.596891	11.517411	19.295681
16	1.733986	0.576706	12.094117	20.971030
17	1.794676	0.557204	12.651321	22.705016
18	1.857489	0.538361	13.189682	24.499691
19	1.922501	0.520156	13.709837	26.357180
20	1.989789	0.502566	14.212403	28.279682
21	2.059431	0.485571	14.697974	30.269471
22	2.131512	0.469151	15.167125	32.328902
23	2.206114	0.453286	15.620410	34.460414
24	2.283328	0.437957	16.058368	36.666528
25	2.363245	0.423147	16.481515	38.949857
26	2.445959	0.408838	16.890352	41.313102
27	2.531567	0.395012	17.285365	43.759060
28	2.620172	0.381654	17.667019	46.290627
29	2.711878	0.368748	18.035767	48.910799
30	2.806794	0.356278	18.392045	51.622677
31	2.905031	0.344230	18.736276	54.429471
32	3.006708	0.332590	19.068865	57.334502
33	3.111942	0.321343	19.390208	60.341210
34	3.220860	0.310476	19.700684	63.453152
35	3.333590	0.299977	20.000661	66.674013
36	3.450266	0.289833	20.290494	70.007603
37	3.571025	0.280032	20.570525	73.457869
38	3.696011	0.270562	20.841087	77.028895
39	3.825372	0.261413	21.102500	80.724906
40	3.959260	0.252572	21.355072	84.550278
41	4.097834	0.244031	21.599104	88.509537
42	4.241258	0.235779	21.834883	92.607371
43	4.389702	0.227806	22.062689	96.848629
44	4.543342	0.220102	22.282791	101.238331
45	4.702359	0.212659	22.495450	105.781673
46	4.866941	0.205468	22.700918	110.484031
47	5.037284	0.198520	22.899438	115.350973
48	5.213589	0.191806	23.091244	120.388257
49	5.396065	0.185320	23.276564	125.601846
50	5.584927	0.179053	23.455618	130.997910

$r = 0.04$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\|r}$	$s_{\overline{n}\|r}$
1	1.040000	0.961538	0.961538	1.000000
2	1.081600	0.924556	1.886095	2.040000
3	1.124864	0.888996	2.775091	3.121600
4	1.169859	0.854804	3.629895	4.246464
5	1.216653	0.821927	4.451822	5.416323
6	1.265319	0.790315	5.242137	6.632975
7	1.315932	0.759918	6.002055	7.898294
8	1.368569	0.730690	6.732745	9.214226
9	1.423312	0.702587	7.435332	10.582795
10	1.480244	0.675564	8.110896	12.006107
11	1.539454	0.649581	8.760477	13.486351
12	1.601032	0.624597	9.385074	15.025805
13	1.665074	0.600574	9.985648	16.626838
14	1.731676	0.577475	10.563123	18.291911
15	1.800944	0.555265	11.118387	20.023588
16	1.872981	0.533908	11.652296	21.824531
17	1.947900	0.513373	12.165669	23.697512
18	2.025817	0.493628	12.659297	25.645413
19	2.106849	0.474642	13.133939	27.671229
20	2.191123	0.456387	13.590326	29.778079
21	2.278768	0.438834	14.029160	31.969202
22	2.369919	0.421955	14.451115	34.247970
23	2.464716	0.405726	14.856842	36.617889
24	2.563304	0.390121	15.246963	39.082604
25	2.665836	0.375117	15.622080	41.645908
26	2.772470	0.360689	15.982769	44.311745
27	2.883369	0.346817	16.329586	47.084214
28	2.998703	0.333477	16.663063	49.967583
29	3.118651	0.320651	16.983715	52.966286
30	3.243398	0.308319	17.292033	56.084938
31	3.373133	0.296460	17.588494	59.328335
32	3.508059	0.285058	17.873551	62.701469
33	3.648381	0.274094	18.147646	66.209527
34	3.794316	0.263552	18.411198	69.857909
35	3.946089	0.253415	18.664613	73.652225
36	4.103933	0.243669	18.908282	77.598314
37	4.268090	0.234297	19.142579	81.702246
38	4.438813	0.225285	19.367864	85.970336
39	4.616366	0.216621	19.584485	90.409150
40	4.801021	0.208289	19.792774	95.025516
41	4.993061	0.200278	19.993052	99.826536
42	5.192784	0.192575	20.185627	104.819598
43	5.400495	0.185168	20.370795	110.012382
44	5.616515	0.178046	20.548841	115.412877
45	5.841176	0.171198	20.720040	121.029392
46	6.074823	0.164614	20.884654	126.870568
47	6.317816	0.158283	21.042936	132.945390
48	6.570528	0.152195	21.195131	139.263206
49	6.833349	0.146341	21.341472	145.833734
50	7.106683	0.140713	21.482185	152.667084

$r = 0.05$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.050000	0.952381	0.952381	1.000000
2	1.102500	0.907029	1.859410	2.050000
3	1.157625	0.863838	2.723248	3.152500
4	1.215506	0.822702	3.545951	4.310125
5	1.276282	0.783526	4.329477	5.525631
6	1.340096	0.746215	5.075692	6.801913
7	1.407100	0.710681	5.786373	8.142008
8	1.477455	0.676839	6.463213	9.549109
9	1.551328	0.644609	7.107822	11.026564
10	1.628895	0.613913	7.721735	12.577893
11	1.710339	0.584679	8.306414	14.206787
12	1.795856	0.556837	8.863252	15.917127
13	1.885649	0.530321	9.393573	17.712983
14	1.979932	0.505068	9.898641	19.598632
15	2.078928	0.481017	10.379658	21.578564
16	2.182875	0.458112	10.837770	23.657492
17	2.292018	0.436297	11.274066	25.840366
18	2.406619	0.415521	11.689587	28.132385
19	2.526950	0.395734	12.085321	30.539004
20	2.653298	0.376889	12.462210	33.065954
21	2.785963	0.358942	12.821153	35.719252
22	2.925261	0.341850	13.163003	38.505214
23	3.071524	0.325571	13.488574	41.430475
24	3.225100	0.310068	13.798642	44.501999
25	3.386355	0.295303	14.093945	47.727099
26	3.555673	0.281241	14.375185	51.113454
27	3.733456	0.267848	14.643034	54.669126
28	3.920129	0.255094	14.898127	58.402583
29	4.116136	0.242946	15.141074	62.322712
30	4.321942	0.231377	15.372451	66.438848
31	4.538039	0.220359	15.592811	70.760790
32	4.764941	0.209866	15.802677	75.298829
33	5.003189	0.199873	16.002549	80.063771
34	5.253348	0.190355	16.192904	85.066959
35	5.516015	0.181290	16.374194	90.320307
36	5.791816	0.172657	16.546852	95.836323
37	6.081407	0.164436	16.711287	101.628139
38	6.385477	0.156605	16.867893	107.709546
39	6.704751	0.149148	17.017041	114.095023
40	7.039989	0.142046	17.159086	120.799774
41	7.391988	0.135282	17.294368	127.839763
42	7.761588	0.128840	17.423208	135.231751
43	8.149667	0.122704	17.545912	142.993339
44	8.557150	0.116861	17.662773	151.143006
45	8.985008	0.111297	17.774070	159.700156
46	9.434258	0.105997	17.880066	168.685164
47	9.905971	0.100949	17.981016	178.119422
48	10.401270	0.096142	18.077158	188.025393
49	10.921333	0.091564	18.168722	198.426663
50	11.467400	0.087204	18.255925	209.347996

$r = 0.06$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\mid r}$	$s_{\overline{n}\mid r}$
1	1.060000	0.943396	0.943396	1.000000
2	1.123600	0.889996	1.833393	2.060000
3	1.191016	0.839619	2.673012	3.183600
4	1.262477	0.792094	3.465106	4.374616
5	1.338226	0.747258	4.212364	5.637093
6	1.418519	0.704961	4.917324	6.975319
7	1.503630	0.665057	5.582381	8.393838
8	1.593848	0.627412	6.209794	9.897468
9	1.689479	0.591898	6.801692	11.491316
10	1.790848	0.558395	7.360087	13.180795
11	1.898299	0.526788	7.886875	14.971643
12	2.012196	0.496969	8.383844	16.869941
13	2.132928	0.468839	8.852683	18.882138
14	2.260904	0.442301	9.294984	21.015066
15	2.396558	0.417265	9.712249	23.275970
16	2.540352	0.393646	10.105895	25.672528
17	2.692773	0.371364	10.477260	28.212880
18	2.854339	0.350344	10.827603	30.905653
19	3.025600	0.330513	11.158116	33.759992
20	3.207135	0.311805	11.469921	36.785591
21	3.399564	0.294155	11.764077	39.992727
22	3.603537	0.277505	12.041582	43.392290
23	3.819750	0.261797	12.303379	46.995828
24	4.048935	0.246979	12.550358	50.815577
25	4.291871	0.232999	12.783356	54.864512
26	4.549383	0.219810	13.003166	59.156383
27	4.822346	0.207368	13.210534	63.705766
28	5.111687	0.195630	13.406164	68.528112
29	5.418388	0.184557	13.590721	73.639798
30	5.743491	0.174110	13.764831	79.058186
31	6.088101	0.164255	13.929086	84.801677
32	6.453387	0.154957	14.084043	90.889778
33	6.840590	0.146186	14.230230	97.343165
34	7.251025	0.137912	14.368141	104.183755
35	7.686087	0.130105	14.498246	111.434780
36	8.147252	0.122741	14.620987	119.120867
37	8.636087	0.115793	14.736780	127.268119
38	9.154252	0.109239	14.846019	135.904206
39	9.703507	0.103056	14.949075	145.058458
40	10.285718	0.097222	15.046297	154.761966
41	10.902861	0.091719	15.138016	165.047684
42	11.557033	0.086527	15.224543	175.950545
43	12.250455	0.081630	15.306173	187.507577
44	12.985482	0.077009	15.383182	199.758032
45	13.764611	0.072650	15.455832	212.743514
46	14.590487	0.068538	15.524370	226.508125
47	15.465917	0.064658	15.589028	241.098612
48	16.393872	0.060998	15.650027	256.564529
49	17.377504	0.057546	15.707572	272.958401
50	18.420154	0.054288	15.761861	290.335905

$r = 0.07$				
n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\|r}$	$s_{\overline{n}\|r}$
1	1.070000	0.934579	0.934579	1.000000
2	1.144900	0.873439	1.808018	2.070000
3	1.225043	0.816298	2.624316	3.214900
4	1.310796	0.762895	3.387211	4.439943
5	1.402552	0.712986	4.100197	5.750739
6	1.500730	0.666342	4.766540	7.153291
7	1.605781	0.622750	5.389289	8.654021
8	1.718186	0.582009	5.971299	10.259803
9	1.838459	0.543934	6.515232	11.977989
10	1.967151	0.508349	7.023582	13.816448
11	2.104852	0.475093	7.498674	15.783599
12	2.252192	0.444012	7.942686	17.888451
13	2.409845	0.414964	8.357651	20.140643
14	2.578534	0.387817	8.745468	22.550488
15	2.759032	0.362446	9.107914	25.129022
16	2.952164	0.338735	9.446649	27.888054
17	3.158815	0.316574	9.763223	30.840217
18	3.379932	0.295864	10.059087	33.999033
19	3.616528	0.276508	10.335595	37.378965
20	3.869684	0.258419	10.594014	40.995492
21	4.140562	0.241513	10.835527	44.865177
22	4.430402	0.225713	11.061240	49.005739
23	4.740530	0.210947	11.272187	53.436141
24	5.072367	0.197147	11.469334	58.176671
25	5.427433	0.184249	11.653583	63.249038
26	5.807353	0.172195	11.825779	68.676470
27	6.213868	0.160930	11.986709	74.483823
28	6.648838	0.150402	12.137111	80.697691
29	7.114257	0.140563	12.277674	87.346529
30	7.612255	0.131367	12.409041	94.460786
31	8.145113	0.122773	12.531814	102.073041
32	8.715271	0.114741	12.646555	110.218154
33	9.325340	0.107235	12.753790	118.933425
34	9.978114	0.100219	12.854009	128.258765
35	10.676581	0.093663	12.947672	138.236878
36	11.423942	0.087535	13.035208	148.913460
37	12.223618	0.081809	13.117017	160.337402
38	13.079271	0.076457	13.193473	172.561020
39	13.994820	0.071455	13.264928	185.640292
40	14.974458	0.066780	13.331709	199.635112
41	16.022670	0.062412	13.394120	214.609570
42	17.144257	0.058329	13.452449	230.632240
43	18.344355	0.054513	13.506962	247.776496
44	19.628460	0.050946	13.557908	266.120851
45	21.002452	0.047613	13.605522	285.749311
46	22.472623	0.044499	13.650020	306.751763
47	24.045707	0.041587	13.691608	329.224386
48	25.728907	0.038867	13.730474	353.270093
49	27.529930	0.036324	13.766799	378.999000
50	29.457025	0.033948	13.800746	406.528929

$r = 0.08$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\mid r}$	$s_{\overline{n}\mid r}$
1	1.080000	0.925926	0.925926	1.000000
2	1.166400	0.857339	1.783265	2.080000
3	1.259712	0.793832	2.577097	3.246400
4	1.360489	0.735030	3.312127	4.506112
5	1.469328	0.680583	3.992710	5.866601
6	1.586874	0.630170	4.622880	7.335929
7	1.713824	0.583490	5.206370	8.922803
8	1.850930	0.540269	5.746639	10.636628
9	1.999005	0.500249	6.246888	12.487558
10	2.158925	0.463193	6.710081	14.486562
11	2.331639	0.428883	7.138964	16.645487
12	2.518170	0.397114	7.536078	18.977126
13	2.719624	0.367698	7.903776	21.495297
14	2.937194	0.340461	8.244237	24.214920
15	3.172169	0.315242	8.559479	27.152114
16	3.425943	0.291890	8.851369	30.324283
17	3.700018	0.270269	9.121638	33.750226
18	3.996019	0.250249	9.371887	37.450244
19	4.315701	0.231712	9.603599	41.446263
20	4.660957	0.214548	9.818147	45.761964
21	5.033834	0.198656	10.016803	50.422921
22	5.436540	0.183941	10.200744	55.456755
23	5.871464	0.170315	10.371059	60.893296
24	6.341181	0.157699	10.528758	66.764759
25	6.848475	0.146018	10.674776	73.105940
26	7.396353	0.135202	10.809978	79.954415
27	7.988061	0.125187	10.935165	87.350768
28	8.627106	0.115914	11.051078	95.338830
29	9.317275	0.107328	11.158406	103.965936
30	10.062657	0.099377	11.257783	113.283211
31	10.867669	0.092016	11.349799	123.345868
32	11.737083	0.085200	11.434999	134.213537
33	12.676050	0.078889	11.513888	145.950620
34	13.690134	0.073045	11.586934	158.626670
35	14.785344	0.067635	11.654568	172.316804
36	15.968172	0.062625	11.717193	187.102148
37	17.245626	0.057986	11.775179	203.070320
38	18.625276	0.053690	11.828869	220.315945
39	20.115298	0.049713	11.878582	238.941221
40	21.724521	0.046031	11.924613	259.056519
41	23.462483	0.042621	11.967235	280.781040
42	25.339482	0.039464	12.006699	304.243523
43	27.366640	0.036541	12.043240	329.583005
44	29.555972	0.033834	12.077074	356.949646
45	31.920449	0.031328	12.108402	386.505617
46	34.474085	0.029007	12.137409	418.426067
47	37.232012	0.026859	12.164267	452.900152
48	40.210573	0.024869	12.189136	490.132164
49	43.427419	0.023027	12.212163	530.342737
50	46.901613	0.021321	12.233485	573.770156

Tabla de integrales seleccionadas

Formas racionales que contienen $(a + bu)$

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b}\ln|a+bu| + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{u}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bu| + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{u^2}{2b} - \frac{au}{b^2} + \frac{a^2}{b^3}\ln|a+bu| + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{u}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a+bu)} - \frac{2a}{b^3}\ln|a+bu| + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \frac{2b}{a^3}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{du}{(a+bu)(c+ku)} = \frac{1}{bc-ak}\ln\left|\frac{a+bu}{c+ku}\right| + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)(c+ku)} = \frac{1}{bc-ak}\left[\frac{c}{k}\ln|c+ku| - \frac{a}{b}\ln|a+bu|\right] + C.$

Formas que contienen $\sqrt{a + bu}$

13. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}}{15b^2} + C.$

14. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{3/2}}{105b^3} + C.$

15. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C.$$

16. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C.$$

17. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad a>0.$$

18. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}.$$

Formas que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$

19. $$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C.$$

20. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C.$$

21. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C.$$

22. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C, \quad a>0.$$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23. $$\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|\right) + C.$$

24. $$\int u^2\sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2\pm a^2)\sqrt{u^2\pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$$

25. $$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C.$$

26. $$\int \frac{\sqrt{u^2\pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2\pm a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$$

28. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right| + C.$$

29. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C.$

30. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\pm\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2u} + C.$

31. $\displaystyle\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

32. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$

33. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

Formas racionales que contienen $a^2 - u^2$ y $u^2 - a^2$

34. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C.$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C.$

Formas exponenciales y logarítmicas

36. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C.$

37. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

38. $\displaystyle\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C.$

39. $\displaystyle\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du.$

40. $\displaystyle\int \frac{e^{au}\,du}{u^n} = -\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{au}\,du}{u^{n-1}}.$

41. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C.$

42. $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}\ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1.$

43. $\displaystyle\int u^n \ln^m u\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\ln^m u - \frac{m}{n+1}\int u^n \ln^{m-1}u\,du, \quad m, n \neq -1.$

44. $\displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = \ln\left|\ln u\right| + C.$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{a + be^{cu}} = \frac{1}{ac}\left(cu - \ln\left|a + be^{cu}\right|\right) + C.$

Formas diversas

46. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a + u}{b + u}}\,du = \sqrt{(a + u)(b + u)} + (a - b)\ln(\sqrt{a + u} + \sqrt{b + u}) + C.$

47. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln\left|\frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)}\right| + C.$

48. $\displaystyle\int \sqrt{a+bu+cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} -$

$\displaystyle\frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}} \ln\left|2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right| + C, \quad c > 0.$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

EJERCICIO 0.2 (página 3)

1. Verdadero. **3.** Falso; los números naturales son 1, 2, 3..., etc. **5.** Verdadero. **7.** Falso; $\sqrt{25} = 5$, un entero positivo. **9.** Verdadero. **11.** Verdadero.

EJERCICIO 0.3 (página 7)

1. Falso. **3.** Falso. **5.** Falso. **7.** Verdadero. **9.** Falso. **11.** Distributiva. **13.** Asociativa. **15.** Conmutativa. **17.** Definición de resta. **19.** Distributiva.

EJERCICIO 0.4 (página 10)

1. -6. **3.** 2. **5.** 11. **7.** -2. **9.** -63. **11.** -6. **13.** $6 - x$. **15.** $-12x + 12y$ (o $12y - 12x$). **17.** $-\frac{1}{5}$. **19.** -2. **21.** 18. **23.** 64. **25.** $3x - 12$. **27.** $-x + 2$. **29.** $\frac{8}{11}$. **31.** $-\frac{5x}{7y}$. **33.** $\frac{2}{3x}$. **35.** 3. **37.** $\frac{7}{xy}$. **39.** $\frac{5}{6}$. **41.** $-\frac{1}{6}$. **43.** $\frac{x-y}{9}$. **45.** $\frac{1}{40}$. **47.** $\frac{k}{9n}$. **49.** No definida. **51.** No definida.

EJERCICIO 0.5 (página 16)

1. 2^5 $(= 32)$. **3.** w^{12}. **5.** $\frac{x^8}{x^{17}}$. **7.** $\frac{a^{21}}{b^{20}}$. **9.** $8x^6y^9$. **11.** x^6. **13.** x^{14}. **15.** 5. **17.** -2. **19.** $\frac{1}{2}$. **21.** 7. **23.** 8. **25.** $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{16}$. **29.** $4\sqrt{2}$. **31.** $x\sqrt[3]{2}$. **33.** $4x^2$. **35.** $-2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2}$. **37.** $3z^2$. **39.** $\frac{9t^2}{4}$. **41.** $\frac{x^3}{y^2z^2}$. **43.** $\frac{5}{m^9}$. **45.** $\frac{1}{9t^2}$. **47.** $7^{1/3}s^{2/3}$. **49.** $x^{1/2} - y^{1/2}$. **51.** $\frac{x^{9/4}z^{3/4}}{y^{1/2}}$. **53.** $\sqrt[5]{(8x-y)^4}$. **55.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. **57.** $\frac{3}{\sqrt[5]{w^3}} - \frac{1}{\sqrt[5]{27w^3}}$. **59.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$. **61.** $\frac{2\sqrt{2x}}{x}$. **63.** $\frac{\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$. **65.** 4. **67.** $\frac{\sqrt[20]{16a^{10}b^{15}}}{ab}$. **69.** $\frac{2x^6}{y^3}$. **71.** $t^{2/3}$. **73.** $\frac{64y^6x^{1/2}}{x^2}$. **75.** xyz. **77.** $\frac{1}{3}$. **79.** $\frac{4y^4}{x^2}$. **81.** $x^2y^{5/2}$. **83.** $\frac{y^{10}}{z^2}$. **85.** x^8. **87.** $-\frac{4}{s^5}$. **89.** $\frac{4x^4z^4}{9y^4}$.

EJERCICIO 0.6 (página 22)

1. $11x - 2y - 3$. **3.** $6t^2 - 2s^2 + 6$. **5.** $2\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{3z}$. **7.** $6x^2 - 9xy - 2z + \sqrt{2} - 4$. **9.** $\sqrt{2y} - \sqrt{3z}$. **11.** $-15x + 15y - 27$. **13.** $x^2 + 9y^2 + xy$. **15.** $6x^2 + 96$. **17.** $-6x^2 - 18x - 18$. **19.** $x^2 + 9x + 20$. **21.** $w^2 - 3w - 10$. **23.** $10x^2 + 19x + 6$. **25.** $x^2 + 6x + 9$. **27.** $x^2 - 10x + 25$. **29.** $2y + 6\sqrt{2y} + 9$. **31.** $4s^2 - 1$. **33.** $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$. **35.** $3x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 8x + 4$. **37.** $5x^3 + 5x^2 + 6x$. **39.** $3x^2 + 2y^2 + 5xy + 2x - 8$. **41.** $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$. **43.** $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$. **45.** $z - 18$. **47.** $3x^3 + 2x - \frac{1}{2x^2}$. **49.** $x + \frac{-1}{x+3}$. **51.** $3x^2 - 8x + 17 + \frac{-37}{x+2}$. **53.** $t + 8 + \frac{64}{t-8}$. **55.** $x - 2 + \frac{7}{3x+2}$.

EJERCICIO 0.7 (página 25)

1. $2(3x + 2)$. **3.** $5x(2y + z)$. **5.** $4bc(2a^3 - 3ab^2d + b^3cd^2)$. **7.** $(z + 7)(z - 7)$. **9.** $(p + 3)(p + 1)$. **11.** $(4x + 3)(4x - 3)$. **13.** $(z + 4)(z + 2)$. **15.** $(x + 3)^2$. **17.** $5(x + 3)(x + 2)$. **19.** $3(x - 1)(x + 1)$. **21.** $(6y + 1)(y + 2)$. **23.** $2s(3s + 4)(2s - 1)$. **25.** $x^{2/3}y(1 + 2xy)(1 - 2xy)$. **27.** $2x(x + 3)(x - 2)$. **29.** $4(2x + 1)^2$. **31.** $x(xy - 7)^2$. **33.** $(x - 2)^2(x + 2)$. **35.** $(y + 4)^2(y + 1)(y - 1)$. **37.** $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. **39.** $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$. **41.** $2(x + 3)^2(x + 1)(x - 1)$. **43.** $P(1 + r)^2$. **45.** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$. **47.** $(y^4 + 1)(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$. **49.** $(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$. **51.** $y(x + 1)^2(x - 1)^2$.

EJERCICIO 0.8 (página 31)

1. $\frac{x+2}{x}$. **3.** $\frac{x-5}{x+5}$. **5.** $\frac{3x+2}{x+2}$. **7.** $-\frac{y^2}{(y-3)(y+2)}$. **9.** $\frac{3-2x}{3+2x}$. **11.** $\frac{2(x+4)}{(x-4)(x+2)}$. **13.** $\frac{x}{2}$. **15.** $\frac{n}{3}$. **17.** $\frac{2}{3}$.

19. $-27x^2$. **21.** 1. **23.** $\frac{2x^2}{x-1}$. **25.** 1.

27. $-\frac{(2x+3)(1+x)}{x+4}$. **29.** $x+2$. **31.** $\frac{7}{3t}$.

33. $\frac{1}{1-p^2}$. **35.** $\frac{2x^2+3x+12}{(2x-1)(x+3)}$.

37. $\frac{2x-3}{(x-2)(x+1)(x-1)}$. **39.** $\frac{35-8x}{(x-1)(x+5)}$.

41. $\frac{x^2+2x+1}{x^2}$. **43.** $\frac{x}{1-xy}$. **45.** $\frac{4x+1}{3x}$.

47. $\frac{(x+2)(6x-1)}{2x^2(x+3)}$. **49.** $\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$.

51. $2-\sqrt{3}$. **53.** $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$. **55.** $-4-2\sqrt{6}$.

57. $\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$. **59.** $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}+14$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 0 (página 33)

1. Los resultados coinciden. **3.** Los resultados coinciden.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.1

1. $P = 2(w+2) + 2w = 2w + 4 + 2w = 4w + 4$. **2.** 200 cafés especiales. **3.** 46 semanas; \$1715.
4. $r = \frac{d}{t}$. **5.** $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

EJERCICIO 1.1 (página 41)

1. 0. **3.** $\frac{10}{3}$. **5.** -2.

7. Sumando 5 a ambos lados; se garantiza la equivalencia.
9. Elevando ambos lados a la cuarta potencia; la equivalencia *no* se garantiza.
11. Dividiendo ambos lados entre x; la equivalencia *no* se garantiza.
13. Multiplicando ambos lados por $x-1$; la equivalencia *no* se garantiza.
15. Multiplicando ambos lados por $(x-5)/x$; la equivalencia *no* se garantiza.

17. $\frac{5}{2}$. **19.** 0. **21.** 1. **23.** $\frac{12}{5}$. **25.** -1.

27. 2. **29.** $\frac{10}{3}$. **31.** 126. **33.** 8. **35.** $-\frac{26}{9}$.

37. $-\frac{37}{18}$. **39.** $\frac{60}{17}$. **41.** $\frac{14}{3}$. **43.** 3. **45.** $\frac{7}{8}$.

47. $P = \frac{I}{rt}$. **49.** $q = \frac{p+1}{8}$. **51.** $r = \frac{S-P}{Pt}$.

53. $a_1 = \frac{2S - na_n}{n}$. **55.** 120 m.

57. $c = x + 0.0825x = 1.0825x$. **59.** 3 años.

61. 31 horas. **63.** 0.00001. **65.** $\frac{1}{8}, -\frac{1}{14}$. **67.** $\frac{14}{61}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.2

1. $\frac{10}{r+2} = \frac{6}{r-2}$; 8 mi/h. **2.** $t = \frac{d}{r+w}$; $w = \frac{d}{t} - r$.
3. $\sqrt{x^2+16} - x = 2$; $x = 3$; la rampa es de 5 pies de largo.

EJERCICIO 1.2 (página 46)

1. $\frac{1}{5}$. **3.** $\emptyset$. **5.** $\frac{8}{3}$. **7.** 2. **9.** 0. **11.** $\frac{5}{3}$.

13. $\frac{1}{8}$. **15.** 3. **17.** $\frac{5}{13}$. **19.** $\emptyset$. **21.** 11.

23. $\frac{262}{5}$. **25.** $-\frac{10}{9}$. **27.** 2. **29.** 7. **31.** $\frac{49}{36}$.

33. $-\frac{9}{4}$. **35.** $t = \frac{r-d}{rd}$. **37.** $n = \frac{2mI}{rB} - 1$.

39. 20. **41.** $t = \frac{d}{r-c}$; $r = \frac{d}{t} + c$.

43. La antena B: 4 m; la antena A: 12.25 m.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.3

1. El número es -5 o 6. **2.** 50 pies por 60 pies.
3. $1 \times 1 \times 5$. **4.** 15 artículos a \$15 por artículo.
5. 2.5 segundos y 7.5 segundos. **6.** \$100 **7.** Nunca.

EJERCICIO 1.3 (página 53)

1. 2. **3.** 4, 3. **5.** 3, -1. **7.** 4, 9. **9.** ± 2.

11. 0, 8. **13.** $\frac{1}{2}$. **15.** $1, -\frac{5}{2}$. **17.** 5, -2. **19.** $0, \frac{3}{2}$.

21. 0, 1, -4. **23.** 0, ± 8. **25.** $0, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$. **27.** $-3, -1, 2$.

29. 3, 4. **31.** 4, -6. **33.** $\frac{3}{2}$. **35.** $\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$.

37. No tiene raíces reales. **39.** $\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$. **41.** 40, -25.

43. $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$. **45.** $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$. **47.** $2, -\frac{1}{2}$.

49. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{1}{2}$. **51.** -4, 1. **53.** $\frac{15}{7}, \frac{11}{5}$. **55.** $\frac{3}{2}, -1$.

57. 6, -2. **61.** 5, -2. **63.** $\frac{3}{2}$. **65.** -2. **67.** 6.

69. 4, 8. **71.** 2. **73.** 0, 4. **75.** 4. **77.** 64.15, 3.35.
79. 6 pulgadas por 8 pulgadas. **83.** 1 año y 10 años.
85. 86.8 cm o 33.2 cm. **87.** **a.** 9 s; **b.** 3 s o 6 s.
89. 1.5, 0.75. **91.** No tiene raíces reales. **93.** 1.999, 0.963.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 1 (página 56)

1. $\frac{1}{4}$. **3.** $-\frac{2}{15}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $\emptyset$. **9.** $\frac{5}{2}$. **11.** $\frac{1}{3}$.

13. $-\frac{9}{7}$. **15.** $-\frac{5}{3}, 1$. **17.** $0, \frac{7}{5}$. **19.** 5. **21.** $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

23. $\frac{5}{8}, -3$. **25.** $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. **27.** $\pm 2, \pm 3$. **29.** $\frac{1}{2}$.

31. $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$. **33.** 9. **35.** 5. **37.** No tiene solución.

39. 10. **41.** 4, 8. **43.** -8, 1. **45.** $Q = \frac{EA}{4\pi k}$.

47. $C' = \lambda^2(n - 1 - C)$. **49.** $T = \pm 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

51. $\omega = \pm\sqrt{\frac{2mgh - mv^2}{I}}$. **55.** $6, \frac{5}{4}$.

57. -0.757, 0.384.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 1 (página 58)

1. a. \$107.15; **b.** \$10.26; **c.** 10 lb; **d.** 10.44 lb; **e.** 4.4%
3. -1.9%.

EJERCICIO 2.1 (página 66)

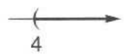
1. 120. **3.** 48 de A, 80 de B. **5.** $5\frac{1}{3}$. **7.** 1 m.
9. 13,000. **11.** \$4000 al 6%, \$16,000 al $7\frac{1}{2}\%$.
13. \$4.25. **15.** 4%. **17.** 80. **19.** \$8000.
21. 1138. **23.** \$116.25. **25.** 40. **27.** 46,000.
29. \$440 o \$460. **31.** \$100. **33.** 77.
35. 80 pies por 140 pies. **37.** 9 cm de largo, 4 cm de ancho.
39. \$112,000. **41.** 60. **43.** 125 unidades de A y 100 unidades de B o bien 150 unidades de A y 125 unidades de B.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.2

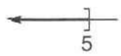
1. 5375.
2. $150 - x_4 \geq 0; 3x_4 - 210 \geq 0; x_4 + 60 \geq 0; x_4 \geq 0$.

EJERCICIO 2.2 (página 74)

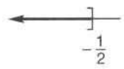
1. $(4, \infty)$.



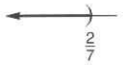
3. $(-\infty, 5]$.



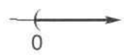
5. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.



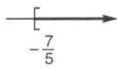
7. $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$.



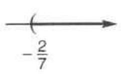
9. $(0, \infty)$.



11. $\left[-\frac{7}{5}, \infty\right)$.

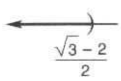


13. $\left(-\frac{2}{7}, \infty\right)$.

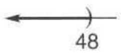


15. $\varnothing$.

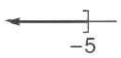
17. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$.



19. $(-\infty, 48)$.

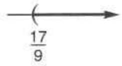


21. $(-\infty, -5]$.

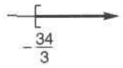


23. $(-\infty, \infty)$.

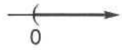
25. $\left(\frac{17}{9}, \infty\right)$.



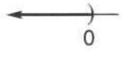
27. $\left[-\frac{34}{3}, \infty\right)$.



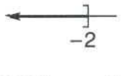
29. $(0, \infty)$.



31. $(-\infty, 0)$.



33. $(-\infty, -2]$.



35. $444{,}000 < S < 636{,}000$. **37.** $x < 70$ grados.

EJERCICIO 2.3 (página 78)

1. 120,001. **3.** 17,000. **5.** 60,000. **7.** \$25,714.29.
9. 1000. **11.** $t > 36.5$. **13.** Al menos \$67,400.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.4

1. $|w - 22 \text{ oz}| \leq 0.3$ oz.

EJERCICIO 2.4 (página 82)

1. 13. **3.** 6. **5.** 5. **7.** $-4 < x < 4$.
9. $\sqrt{5} - 2$. **11. a.** $|x - 7| < 3$; **b.** $|x - 2| < 3$;
c. $|x - 7| \leq 5$; **d.** $|x - 7| = 4$; **e.** $|x + 4| < 2$;
f. $|x| < 3$; **g.** $|x| > 6$; **h.** $|x - 6| > 4$; **i.** $|x - 105| < 3$;
j. $|x - 850| < 100$. **13.** $|p_1 - p_2| \leq 8$. **15.** ± 7.
17. ± 6. **19.** $13, -3$. **21.** $\frac{2}{5}$. **23.** $\frac{1}{2}, 3$.
25. $(-4, 4)$. **27.** $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. **29.** $(-9, -5)$.
31. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. **33.** $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.
35. $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{16}{3}, \infty\right)$. **37.** $|d - 17.2| \leq 0.03$ m
39. $(-\infty, \mu - h\sigma) \cup (\mu + h\sigma, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 2 (página 84)

1. $(-\infty, 0]$. **3.** $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **5.** $\varnothing$. **7.** $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.
9. $(-\infty, \infty)$. **11.** $-2, 5$. **13.** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
15. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$. **17.** 542. **19.** 6000.
21. $c <$ \$212,814.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 2 (página 85)

1. 1 hora. **3.** 1 hora. **5.** 600; 310.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.1

1. a. $a(r) = \pi r^2$; **b.** Todos los números reales; **c.** $r \geq 0$.
2. a. $t(r) = \frac{300}{r}$; **b.** Todos los números reales excepto 0;
c. $r > 0$;
d. $t(x) = \frac{300}{x}; t\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{600}{x}; t\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1200}{x}$;
e. El tiempo está escalado por un factor de c; $t\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{300c}{x}$.
3. a. 300 pizzas; **b.** \$21.00 por pizza; **c.** \$16.00 por pizza.

EJERCICIO 3.1 (página 93)

1. Todos los números reales excepto 0.
3. Todos los números reales ≥ 3.
5. Todos los números reales.
7. Todos los números reales excepto $-\frac{7}{2}$.
9. Todos los números reales excepto 0 y 1.
11. Todos los números reales excepto 4 y $-\frac{1}{2}$.
13. $1, 7, -7$. **15.** $-62, 2 - u^2, 2 - u^4$.
17. $2, (2v)^2 + 2v = 4v^2 + 2v, (-x^2)^2 + (-x^2) = x^4 - x^2$.
19. $4, 0, (x + h)^2 + 2(x + h) + 1$
$= x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1$.
21. $\frac{1}{30}, \frac{3x - 4}{(3x)^2 + 5} = \frac{3x - 4}{9x^2 + 5}$
$\frac{(x + h) - 4}{(x + h)^2 + 5} = \frac{x + h - 4}{x^2 + 2xh + h^2 + 5}$.

23. $0, 256, \frac{1}{16}$. **25. a.** $4x + 4h - 5$; **b.** 4.
27. a. $x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h$; **b.** $2x + h + 2$.
29. a. $2 - 4x - 4h - 3x^2 - 6hx - 3h^2$;
b. $-4 - 6x - 3h$. **31. a.** $\frac{1}{x+h}$; **b.** $-\frac{1}{x(x+h)}$.
33. 9. **35.** y es una función de x; x es una función de y.
37. y es una función de x; x no es una función de y.
39. Sí. **41.** $V = f(t) = 20{,}000 + 800t$.
43. Sí; P; q. **45.** 400 libras por semana; 1000 libras por semana; la cantidad suministrada aumenta cuando el precio aumenta.
47. a. 4; **b.** $8\sqrt[3]{2}$; **c.** $f(2I_0) = 2\sqrt[3]{2}\,f(I_0)$; al duplicar la intensidad la respuesta se incrementa por un factor de $2\sqrt[3]{2}$.
49. a. 3000, 2900, 2300, 2000; 12, 10;
b. 10, 12, 17, 20; 3000, 2300. **51. a.** -5.13; **b.** 2.64;
c. -17.43. **53. a.** 11.33; **b.** 50.62; **c.** 2.29.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.2

1. a. $p(n) = \$125$; **b.** Las primas no cambian;
c. Función constante.
2. a. Función cuadrática; **b.** 2; **c.** 3.
3. $c(n) = \begin{cases} 3.50n & \text{si } n \le 5, \\ 3.00n & \text{si } 5 < n \le 10, \\ 2.75n & \text{si } n > 10. \end{cases}$ **4.** $7! = 5040$.

EJERCICIO 3.2 (página 98)

1. Sí. **3.** No. **5.** Sí. **7.** No.
9. Todos los números reales. **11.** Todos los números reales.
13. a. 3; **b.** 7. **15. a.** 4; **b.** -3. **17.** 8, 8, 8.
19. $1, -1, 0, -1$. **21.** 8, 3, 1, 1. **23.** 720. **25.** 2.
27. 5. **29.** $c(i) = \$4.50$; función constante.
31. a. $C = 850 + 3q$; **b.** 250.
33. $c(n) = \begin{cases} 8.50n & \text{si } n < 10, \\ 8.00n & \text{si } n \ge 10. \end{cases}$ **35.** $\frac{9}{64}$.
37. a. Toda T tal que $30 \le T \le 39$; **b.** $4, \frac{17}{4}, \frac{33}{4}$.
39. a. 237,077.34; **b.** -434.97; **c.** 52.19.
41. a. 2.21; **b.** 9.98; **c.** -14.52.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.3

1. $c(s(x)) = c(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$.
2. Si la longitud de un lado es representada por la función $l(x) = x + 3$ y el área de un cuadrado con lados de longitud x es representada por $a(x) = x^2$. Entonces $g(x) = (x + 3)^2 = [l(x)]^2 = a(l(x))$.

EJERCICIO 3.3 (página 103)

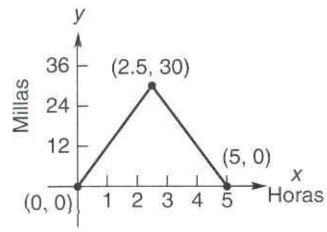
1. a. $2x + 8$; **b.** 8; **c.** -2; **d.** $x^2 + 8x + 15$; **e.** 3;
f. $\frac{x+3}{x+5}$; **g.** $x + 8$; **h.** 11; **i.** $x + 8$. **3. a.** $2x^2 + x$;
b. $-x$; **c.** $\frac{1}{2}$; **d.** $x^4 + x^3$; **e.** $\frac{x^2}{x^2 + x} = \frac{x}{x+1}$ (para $x \neq 0$);
f. -1; **g.** $(x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$; **h.** $x^4 + x^2$; **i.** 90.
5. 6; -32. **7.** $\frac{4}{(t-1)^2} + \frac{14}{t-1} + 1$; $\frac{2}{t^2 + 7t}$.

9. $\frac{1}{v+3}$; $\sqrt{\frac{2w^2 + 3}{w^2 + 1}}$. **11.** $f(x) = x^5, g(x) = 4x - 3$.
13. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 2$.
15. $f(x) = \sqrt[5]{x}, g(x) = \frac{x+1}{3}$.
17. a. $r(x) = 9.75x$; **b.** $e(x) = 4.25x + 4500$;
c. $(r - e)(x) = 5.5x - 4500$.
19. $400m - 10m^2$; el ingreso total recibido cuando se vende la producción total de m empleados.
21. a. 14.05; **b.** 1169.64. **23. a.** 345.03; **b.** -1.94.

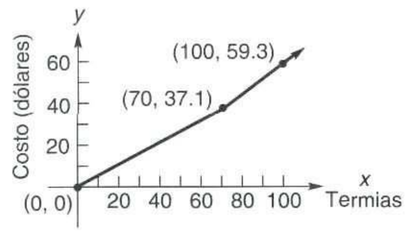
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.4

1. $y = -600x + 7250$; intersección x $\left(12\frac{1}{12}, 0\right)$; intersección y $(0, 7250)$.
2. $y = 24.95$; recta horizontal; no hay intersección con el eje x; intersección con el eje y $(0, 24.95)$.

3.

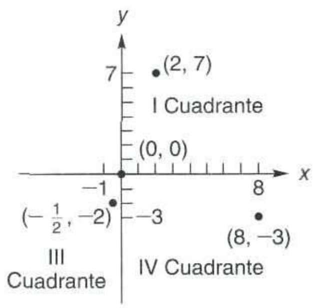


4.



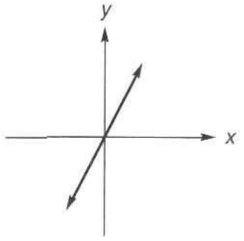
EJERCICIO 3.4 (página 112)

1.

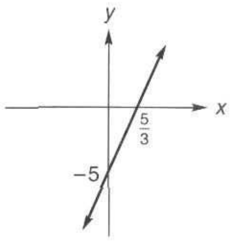


3. a. 1, 2, 3, 0; **b.** Todos los números reales;
c. Todos los números reales;
d. -2. **5. a.** $0, -1, -1$; **b.** Todos los números reales;
c. Todos los números reales no positivos; **d.** 0.

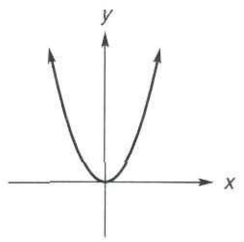
7. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



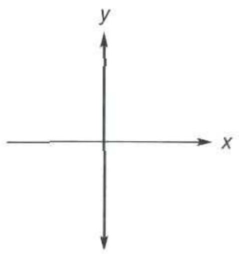
9. $(0, -5), \left(\frac{5}{3}, 0\right)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



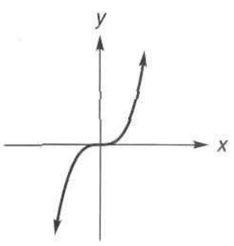
11. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales no negativos.



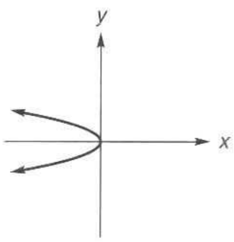
13. Todo punto en el eje y; no es función de x.



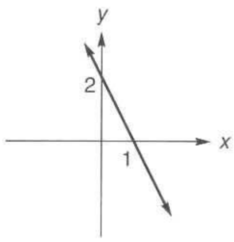
15. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



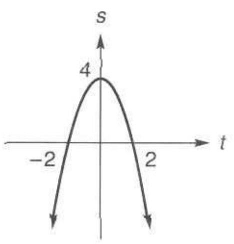
17. $(0, 0)$; no es una función de x.



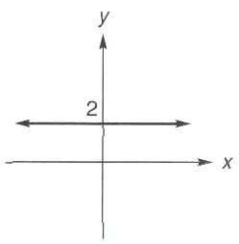
19. $(0, 2), (1, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



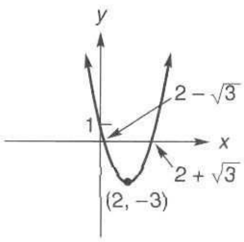
21. Todos los números reales; todos los números reales ≤ 4; $(0, 4), (2, 0), (-2, 0)$.



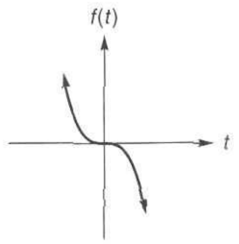
23. Todos los números reales; 2; $(0, 2)$.



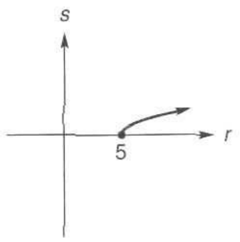
25. Todos los números reales; todos los números reales ≥ -3; $(0, 1), (2 \pm \sqrt{3}, 0)$.



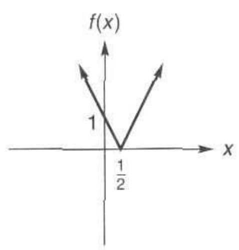
27. Todos los números reales; todos los números reales; $(0, 0)$.



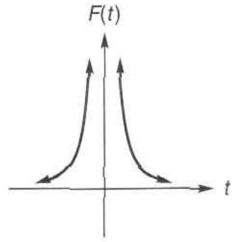
29. Todos los números reales ≥ 5; todos los números reales no negativos; $(5, 0)$.



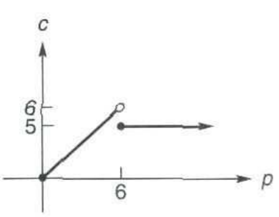
31. Todos los números reales; todos los números reales no negativos; $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



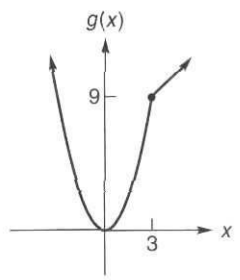
33. Todos los números reales distintos de cero; todos los números reales positivos; no hay intersecciones.



35. Todos los números reales no negativos; todos los números reales c, donde $0 \leq c < 6$.

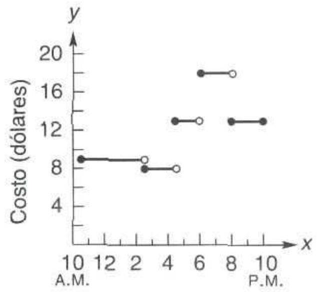


37. Todos los números reales; todos los números reales no negativos.

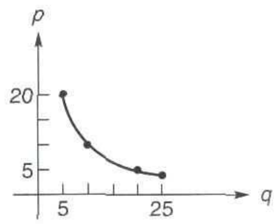


39. (a), (b), (d).

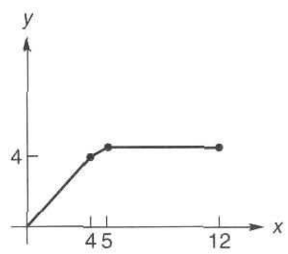
41.



43. Cuando el precio disminuye, la cantidad aumenta; p es una función de q.



45.

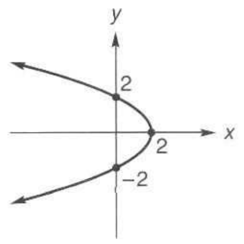


47. $-1, -0.35$. **49.** $0.62, 1.73, 4.65$. **51.** $-0.84, 2.61$.
53. $-0.49, 0.52, 1.25$. **55. a.** 3.94; **b.** -1.94.
57. a. $(-\infty, \infty)$; **b.** $(-1.73, 0)$, $(0, 4.00)$.
59. a. 2.07; **b.** $[2.07, \infty)$; **c.** $(0, 2.39)$; **d.** no.

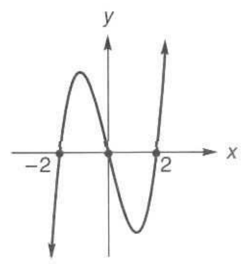
EJERCICIO 3.5 (página 119)

1. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen.
3. $(\pm 2, 0)$, $(0, 8)$; simétrica con respecto al eje y.
5. $(\pm 2, 0)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.
7. $(-2, 0)$; simétrica con respecto al eje x.
9. Simétrica con respecto al eje x.
11. $(-21, 0)$, $(0, -7)$, $(0, 3)$.
13. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen. **15.** $\left(0, \frac{3}{8}\right)$.

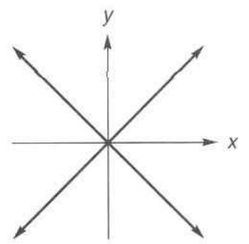
17. (2, 0), (0, ±2); simétrica con respecto al eje x.



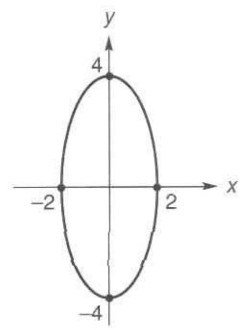
19. (±2, 0), (0, 0); simétrica con respecto al origen.



21. (0, 0); simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



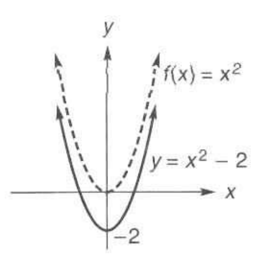
23. (±2, 0), (0, ±4); simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



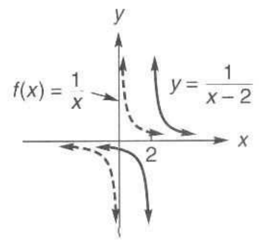
25. a. (±1.18, 0), (0, 2); **b.** 2; **c.** (−∞, 2].

EJERCICIO 3.6 (página 122)

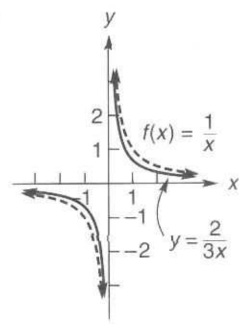
1.



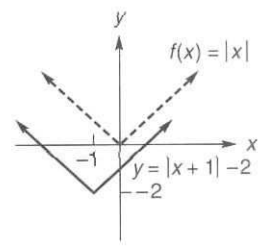
3.



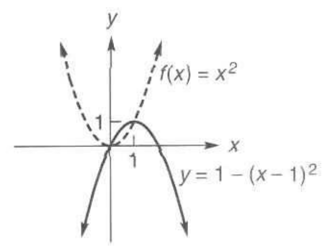
5.



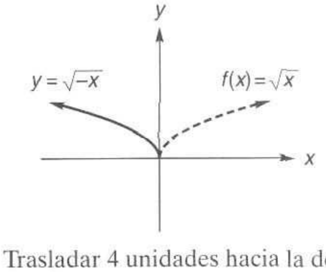
7.



9.



11.



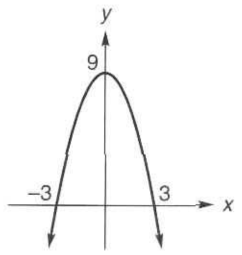
13. Trasladar 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

15. Reflejar con respecto al eje y y trasladar 5 unidades hacia abajo.

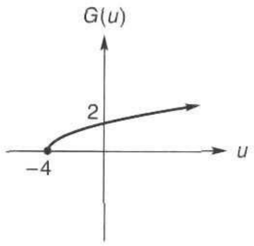
PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 3 (página 123)

1. Todos los números reales excepto 1 y 2.
3. Todos los números reales.
5. Todos los números reales no negativos excepto 1.
7. $7, 46, 62, 3t^2 - 4t + 7$. **9.** $0, 2, \sqrt{t}, \sqrt{x^3 - 1}$.
11. $\frac{3}{5}, 0, \frac{\sqrt{x+4}}{x}, \frac{\sqrt{u}}{u-4}$. **13.** −8, 4, 4, −92.

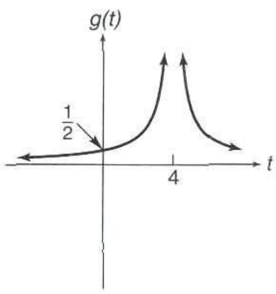
15. **a.** $3 - 7x - 7h$; **b.** -7.
17. **a.** $4x^2 + 8hx + 4h^2 + 2x + 2h - 5$;
b. $8x + 4h + 2$. **19.** **a.** $5x + 2$; **b.** 22; **c.** $x - 4$;
d. $6x^2 + 7x - 3$; **e.** 10; **f.** $\frac{3x - 1}{2x + 3}$;
g. $3(2x + 3) - 1 = 6x + 8$; **h.** 38;
i. $2(3x - 1) + 3 = 6x + 1$.
21. $\frac{1}{x - 1}, \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$. **23.** $\sqrt{x^3 + 2}$, $(x + 2)^{3/2}$.
25. $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2/3}, 0)$; simétrica con respecto al origen.
27. $(0, 9)$, $(\pm 3, 0)$; simétrica con respecto al eje y.



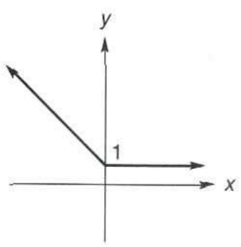
29. $(0, 2)$, $(-4, 0)$; toda $u \geq -4$; todos los números reales ≥ 0.



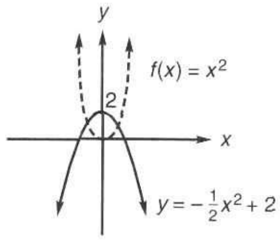
31. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; toda $t \neq 4$; todos los números reales positivos.



33. Todos los números reales; todos los números reales ≥ 1.



35.



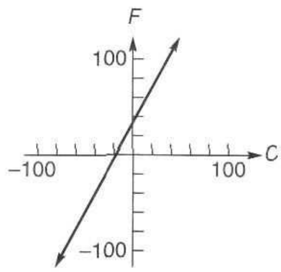
37. a, c. **39.** $-0.67, 0.34, 1.73$.
41. $-1.50, -0.88, -0.11, 1.09, 1.40$.
43. **a.** $(-\infty, \infty)$; **b.** $(1.92, 0)$, $(0, 7)$
45. **a.** Ninguna; **b.** 1, 3.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 3 (página 125)

1. \$28,321. **3.** \$87,507.90. **5.** Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.1

1. -2000; el automóvil se deprecia \$2000 por año.
2. $S = 14T + 8$. **3.** $F = \frac{9}{5}C + 32$.
4. Pendiente $= \frac{125}{3}$; intersección $y = \frac{125}{3}$.
5. $9C - 5F + 160 = 0$.
6.



7. La pendiente de $\overline{AB}$ es 0; la pendiente de $\overline{BC}$ es 7; la pendiente de $\overline{CA}$ es 1. Ninguna de las pendientes es el recíproco negativo de alguna otra, de modo que el triángulo no tiene un ángulo recto. Los puntos no definen un triángulo rectángulo.

EJERCICIO 4.1 (página 134)

1. 3. **3.** $-\frac{1}{2}$. **5.** Indefinida. **7.** 0.
9. $6x - y - 4 = 0$. **11.** $x + 4y - 18 = 0$.
13. $3x - 7y + 25 = 0$. **15.** $8x - 5y - 29 = 0$.
17. $2x - y + 4 = 0$. **19.** $x + 2y + 6 = 0$.
21. $y + 2 = 0$. **23.** $x - 2 = 0$. **25.** 4; -6.
27. $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$. **29.** La pendiente está indefinida; no hay intersección con el eje y.
31. 3; 0. **33.** 0; 1.
35. $2x + 3y - 5 = 0$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.
37. $4x + 9y - 5 = 0$; $y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$.
39. $3x - 2y + 24 = 0$; $y = \frac{3}{2}x + 12$.
41. Paralelas. **43.** Paralelas. **45.** Ninguna.
47. Perpendiculares. **49.** Perpendiculares.

51. $y = 4x + 14$. **53.** $y = 1$. **55.** $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

57. $x = 7$. **59.** $y = -\frac{2}{3}x - \frac{29}{3}$. **61.** $(5, -4)$.

63. -2; el precio de la acción cae un promedio de \$2 por año. **65.** $y = 3x + 5$. **67.** Pendiente ≈ 0.65; intersección $y \approx 4.38$.

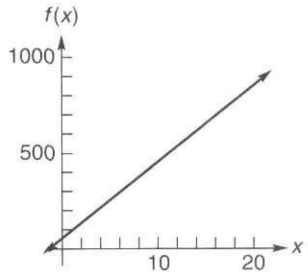
69. a. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$; **b.** $y = 3x - \frac{3}{2}$.

71. $y = -x + 3300$; sin modificación, el ángulo de acercamiento causa que el aeroplano choque 700 pies antes del aeropuerto. **73.** $R = 50{,}000T + 80{,}000$.

75. Las rectas son paralelas. Esto se esperaba ya que cada una tiene pendiente de 1.5.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.2

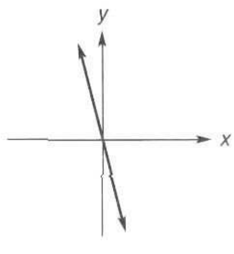
1. x = número de esquís producidos; y = número de botas fabricadas; $8x + 14y = 1000$.
2. $p = -\frac{3}{8}q + 1025$.
3. Las respuestas pueden variar, pero dos posibles puntos son $(0, 60)$ y $(2, 140)$.

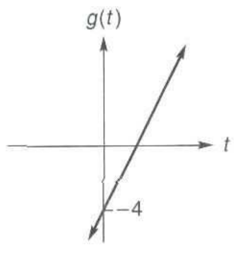


4. $f(t) = 2.3t + 32.2$. **5.** $f(x) = 70x + 150$.

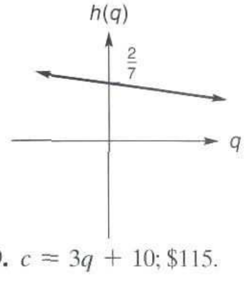
EJERCICIO 4.2 (página 141)

1. -4; 0. **3.** 2; -4.





5. $-\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$.



7. $f(x) = 4x$.

9. $f(x) = -2x + 4$.

11. $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

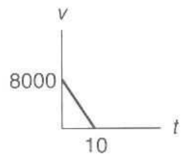
13. $f(x) = x + 1$.

15. $p = -\frac{2}{5}q + 28$; \$16.

17. $p = \frac{1}{4}q + 190$.

19. $c = 3q + 10$; \$115. **21.** $f(x) = 0.125x + 4.15$.

23. $v = -800t + 8000$; pendiente $= -800$.



25. $f(x) = 45{,}000x + 735{,}000$. **27.** $f(x) = 65x + 85$.

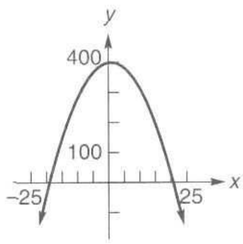
29. $x + 10y = 100$. **31. a.** $y = \frac{5}{11}$, $x = \frac{600}{11}$; **b.** 12.

33. a. $p = 0.059t + 0.025$; **b.** 0.556.

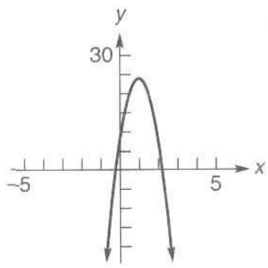
35. a. $t = \frac{1}{4}c + 37$; **b.** Sume 37 al número de chirridos en 15 segundos. **37.** $P = \frac{T}{4} + 80$. **39. a.** Sí; **b.** 1.8704.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.3

1. Vértice: $(1, 400)$; intersección y: $(0, 399)$; intersecciones x: $(-19, 0)$, $(21, 0)$.



2. Vértice: $(1, 24)$; intersección y: $(0, 8)$; intersecciones x: $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$.

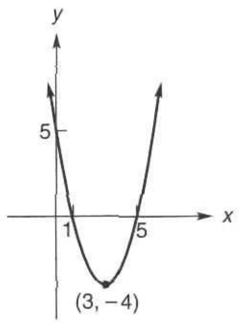


3. 1000 unidades; \$3000 de ingreso máximo.

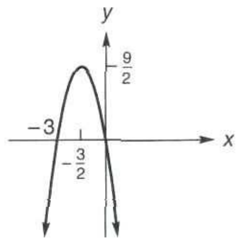
EJERCICIO 4.3 (página 149)

1. Cuadrática. **3.** No es cuadrática. **5.** Cuadrática.
7. Cuadrática. **9. a.** $(1, 11)$; **b.** Más alto.
11. a. -8; **b.** $-4, 2$; **c.** $(-1, -9)$.

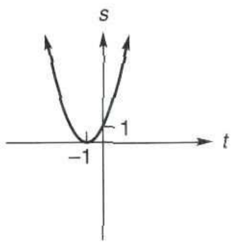
13. Vértice: $(3, -4)$; intersecciones: $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$; rango: toda $y \geq -4$.



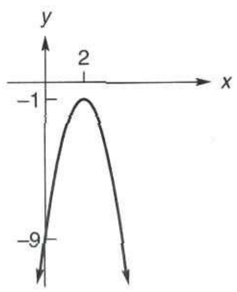
15. Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; intersecciones: $(0, 0)$, $(-3, 0)$; rango: toda $y \leq \frac{9}{2}$.



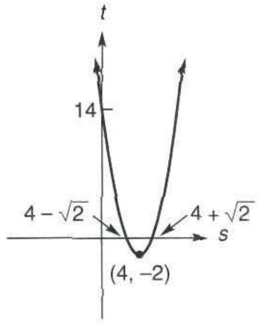
17. Vértice: $(-1, 0)$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(0, 1)$; rango: toda $s \geq 0$.



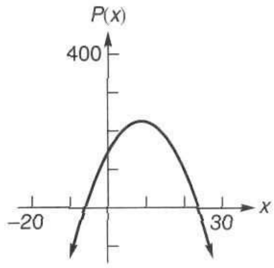
19. Vértice: $(2, -1)$; intersecciones: $(0, -9)$; rango: toda $y \leq -1$.



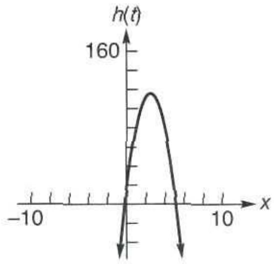
21. Vértice: $(4, -2)$; intersecciones: $(4 + \sqrt{2}, 0)$, $(4 - \sqrt{2}, 0)$, $(0, 13)$; rango: toda $t \geq -3$.



23. Mínimo; 24. **25.** Máximo; -10.
27. $q = 200$; $r = \$120{,}000$.
29. 200 unidades; ingreso máximo \$240,000.
31. Vértice: $(9, 225)$; intersección y: $(0, 144)$; intersecciones x: $(-6, 0)$, $(24, 0)$.



33. 70 gramos. **35.** 132 pies; 2.5 segundos.
37. Vértice: $\left(\frac{5}{2}, 116\right)$; intersección y: $(0, 16)$, intersecciones x: $\left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right)$.



39. **a.** 2.5; **b.** 8.7 m. **41.** **a.** $\frac{l}{2}$; **b.** $\frac{wl^2}{8}$; **c.** 0 y l.
43. 50 pies $\times$ 100 pies. **45.** $(1.11, 2.88)$.
47. **a.** 0; **b.** 1; **c.** 2. **49.** 4.89.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.4

1. \$120,000 al 9% y \$80,000 al 8%.
2. 500 especies A y 1000 especies B.
3. Un número infinito de soluciones de la forma $A = \frac{20{,}000}{3} - \frac{4}{3}r$, $B = r$ donde $0 \leq r \leq 5000$.
4. $\frac{1}{6}$ lb de A; $\frac{1}{3}$ lb de B; $\frac{1}{2}$ lb de C.

EJERCICIO 4.4 (página 161)

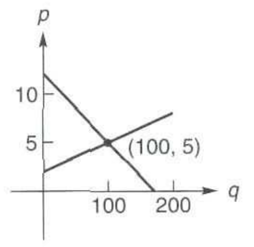
1. $x = -1, y = 1.$ **3.** $x = 3, y = -1.$
5. $v = 0, w = 18.$ **7.** $x = -3, y = 2.$
9. No hay solución. **11.** $x = 12, y = -12.$
13. $p = \frac{3}{2} - 3r, q = r$; r es cualquier número real.
15. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}.$ **17.** $x = 1, y = 1, z = 1.$
19. $x = 1 + 2r, y = 3 - r, z = r$; r es cualquier número real.
21. $x = -\frac{1}{3}r, y = \frac{5}{3}r, z = r$; r es cualquier número real.
23. $x = \frac{3}{2} - r + \frac{1}{2}s, y = r, z = s$; r y s son cualesquiera números reales.
25. 420 galones de solución al 20%, 280 galones de solución al 30%.
27. 0.5 lb de algodón; 0.25 lb de poliéster; 0.25 lb de nylon.
29. 275 mi/h (velocidad del aeroplano en aire calmo), 21 mi/h (velocidad del viento).
31. 240 unidades (Early American), 200 unidades (Contemporáneo).
33. 800 calculadoras de la planta Exton, 700 de la planta Whyton.
35. 4% sobre los primeros $100,000, 6% sobre el resto.
37. 60 unidades de Argón I, 40 unidades de Argón II.
39. 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sillones reclinables.
41. 40 trabajadores semicalificados, 20 trabajadores calificados y 10 empleados de envíos. **45.** $x = 3, y = 2.$
47. $x = 8.3, y = 14.0.$

EJERCICIO 4.5 (página 165)

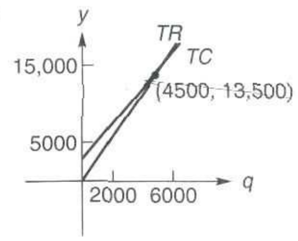
1. $x = 4, y = -12; x = -1, y = 3.$
3. $p = -3, q = -4; p = 2, q = 1.$
5. $x = 0, y = 0; x = 1, y = 1.$
7. $x = 4, y = 8; x = -1, y = 3.$
9. $p = 0, q = 0; p = 1, q = 1.$
11. $x = \sqrt{17}, y = 2;\ x = -\sqrt{17}, y = 2; x = \sqrt{14}, y = -1; x = -\sqrt{14}, y = -1.$ **13.** $x = 21, y = 15.$
15. En (10, 8.1) y (−10, 7.9). **17.** Tres.
19. $x = -1.3, y = 5.1.$ **21.** $x = 1.76.$ **23.** $x = -1.46.$

EJERCICIO 4.6 (página 174)

1.



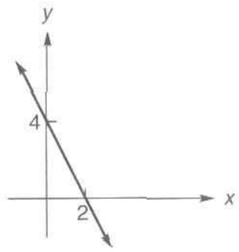
3. (5, 212.50). **5.** (9, 38). **7.** (15, 5).
9.



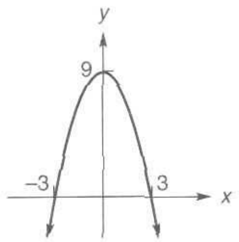
11. No puede tener punto de equilibrio para ningún nivel de producción.
13. 15 unidades o 45 unidades. **15. a.** \$12; **b.** \$12.18.
17. 5840 unidades; 840 unidades; 1840 unidades. **19.** \$4.
21. El costo total siempre excede al ingreso total, no hay punto de equilibrio. **23.** Disminuye en \$0.70.
25. $p_A = 5; p_B = 10.$ **27.** 2.4 y 11.3.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 4 (página 176)

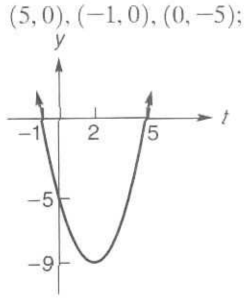
1. 9. **3.** $y = -x + 1; x + y - 1 = 0.$
5. $y = \frac{1}{2}x - 1; x - 2y - 2 = 0.$ **7.** $y = 4; y - 4 = 0.$
9. $y = \frac{1}{3}x + 2; x - 3y + 6 = 0.$
11. Perpendiculares. **13.** Ninguna. **15.** Paralelas.
17. $y = \frac{3}{2}x - 2; \frac{3}{2}.$ **19.** $y = \frac{4}{3}; 0.$
21. −2; (0, 4).



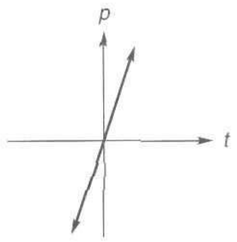
23. (3, 0), (−3, 0), (0, 9); (0, 9).



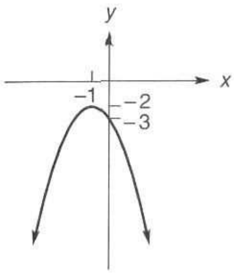
25. (5, 0), (−1, 0), (0, −5); (2, −9).



27. 3; (0, 0).



29. $(0, -3)$; $(-1, -2)$.



31. $x = \frac{17}{7}, y = -\frac{8}{7}$. **33.** $x = 2, y = -1$.
35. $x = 8, y = 4$. **37.** $x = 0, y = 1, z = 0$.
39. $x = -3, y = -4$; $x = 2, y = 1$.
41. $x = -2 - 2r, y = 7 + r, z = r$; r es cualquier número real.
43. $x = r, y = r, z = 0$; r es cualquier número real.
45. $a + b - 3 = 0$; 0. **47.** $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$.
49. 50 unidades; \$5000. **51.** 6.
53. 1250 unidades; \$20,000.
55. 2.36 toneladas por km cuadrado.
57. $x = 230, y = -130$. **59.** $x = 0.75, y = 1.43$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 4 (página 179)

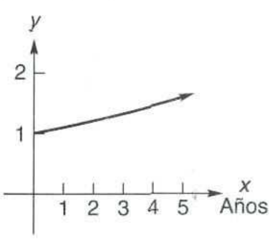
1. Advantage I es el mejor plan para tiempo aire de 85 a $153\frac{1}{3}$ minutos. Advantage II es el mejor plan para tiempo aire de $153\frac{1}{3}$ a $233\frac{1}{3}$ minutos.
3. Si la aproximación inicial está sobre la parte horizontal de ambas gráficas, la calculadora no puede determinar el punto de intersección.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.1

1. La forma de las gráficas es la misma. El valor de A escala la ordenada de cualquier punto en A.
2.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	1.1^0
1	1.1	1.1^1
2	1.21	1.1^2
3	1.33	1.1^3
4	1.46	1.1^4

1.1; la inversión aumenta en 10% cada año $(1 + 1(0.1) = 1 + 0.1 = 1.1)$.

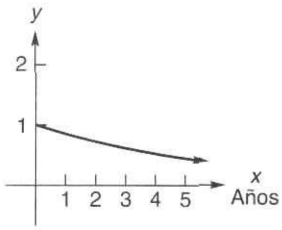


Entre 7 y 8 años.

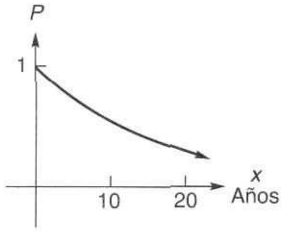
3.

Año	Disminución multiplicativa	Expresión
0	1	0.85^0
1	0.85	0.85^1
2	0.72	0.85^2
3	0.61	0.85^3

0.85; el automóvil se deprecia en 15% cada año $(1 - 1(0.15) = 1 - 0.15 = 0.85)$.

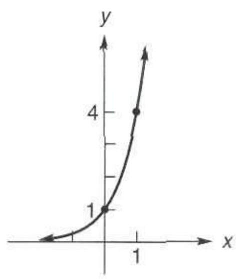


Entre 4 y 5 años.
4. $y = 1.08^{t-3}$; recorra la gráfica 3 unidades hacia la derecha.
5. \$3684.87; \$1684.87. **6.** \$2753.79; \$753.79.
7. 117 empleados.
8.

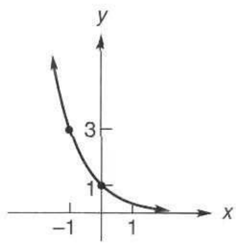


EJERCICIO 5.1 (página 192)

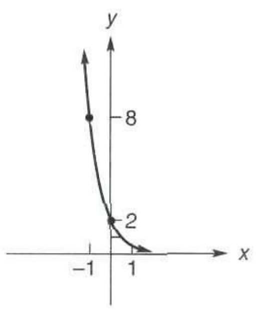
1.



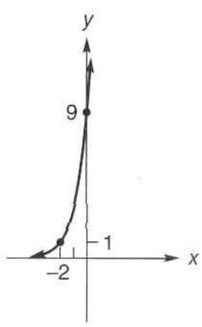
3.



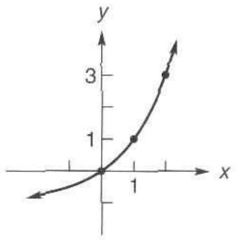
5.



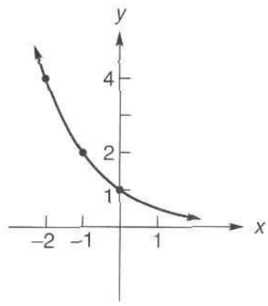
7.



9.



11.



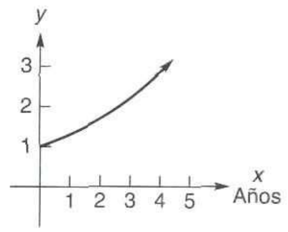
13. *B*. **15.** 138,750. **17.** $\frac{1}{2}$.

19. a. \$6014.52; **b.** \$2014.52.
21. a. \$1964.76; **b.** \$1264.76.
23. a. \$14,124.86; **b.** \$10,124.86.
25. a. \$6256.36; **b.** \$1256.36.
27. a. \$9649.69; **b.** \$1649.69.
29. \$10,446.15.
31. a. $N = 400(1.05)^t$; **b.** 420; **c.** 486.

33.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	1.3^0
1	1.3	1.3^1
2	1.69	1.3^2
3	2.20	1.3^3

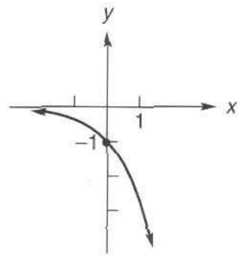
1.3; el reciclado aumenta en 30% cada año $(1 + 1(0.3) = 1 + 0.3 = 1.3)$.



Entre 4 y 5 años.

35. 97,030. **37.** 4.4817. **39.** 0.4966.

41.

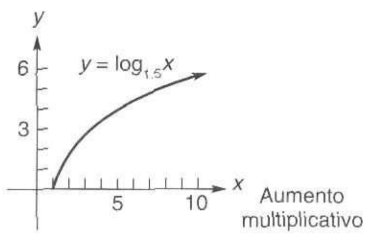


43. 0.2240.
45. $(e^k)^t$, donde $b = e^k$.
47. a. 10; **b.** 7.6; **c.** 2.5; **d.** 25 horas.
49. 32 años.
51. 0.1465.
55. 3.17.
57. 4.2 min.
59. 16.

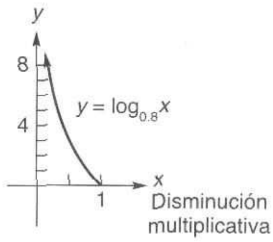
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.2

1. $t = \log_2 16$; t = número de veces que el número de bacterias se ha duplicado. **2.** $\frac{I}{I_0} = 10^{8.3}$.

3.



4.

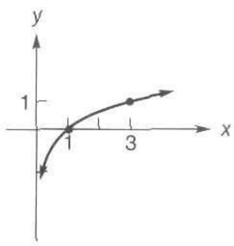


5. Aproximadamente 13.9%.
6. Aproximadamente 9.2%.

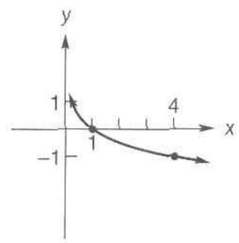
EJERCICIO 5.2 (página 201)

1. $\log 10{,}000 = 4$. **3.** $2^6 = 64$. **5.** $\ln 7.3891 = 2$.
7. $e^{1.09861} = 3$.

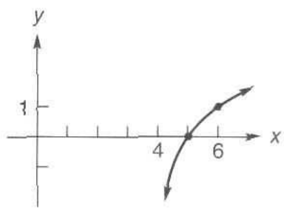
9.



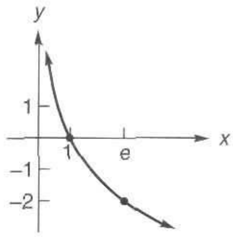
11.



13.



15.



17. 2. **19.** 3.
21. 1. **23.** −2.
25. 0. **27.** −3.
29. 9. **31.** 125.
33. $\frac{1}{10}$. **35.** e^{-3}.
37. 2. **39.** 6.
41. $\frac{1}{81}$. **43.** 2.

45. $\frac{5}{3}$. **47.** 4. **49.** $\frac{\ln 2}{3}$. **51.** $\frac{5 + \ln 3}{2}$.

53. 1.60944. **55.** 2.00013. **57.** $\frac{1}{h} = 10^{5.5}$.

59. 41.50. **61.** $E = 2.5 \times 10^{11+1.5M}$.
63. a. 305.2 mm de mercurio; **b.** 5.13 km.
65. $e^{[u_0 - (x_2^2/2)]/A}$. **67.** 21.7 años.
69. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{10 - x}{2}$. **71.** (1, 0). **73.** 7.39.

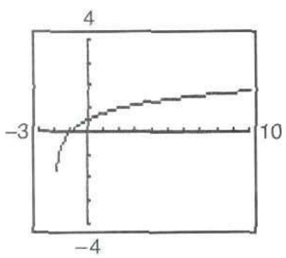
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.3

1. $\log(900{,}000) - \log(9000) = \log\left(\frac{900{,}000}{9000}\right)$
$= \log(100) = 2.$

2. $\log(10{,}000) = \log(10^4) = 4.$

EJERCICIO 5.3 (página 208)

1. $b + c$. **3.** $a - b$. **5.** $3a - b$. **7.** $2(a + b)$.
9. $\frac{b}{a}$. **11.** 48. **13.** −4. **15.** 5.01. **17.** −2.
19. 2. **21.** $\ln x + 2\ln(x + 1)$.
23. $2\ln x - 3\ln(x + 1)$. **25.** $3[\ln x - \ln(x + 1)]$.
27. $\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
29. $\frac{1}{2}\ln x - 2\ln(x + 1) - 3\ln(x + 2)$.
31. $\frac{2}{5}\ln x - \frac{1}{5}\ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
33. $\log 24$. **35.** $\log_2 \frac{2x}{x + 1}$. **37.** $\log[7^9(23)^5]$.
39. $\log[100(1.05)^{10}]$. **41.** $\frac{81}{64}$. **43.** 1. **45.** $\frac{5}{2}$.
47. ± 2. **49.** $\frac{\ln(x + 6)}{\ln 10}$. **51.** $\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 3}$.
53. $y = \ln\frac{z}{7}$. **57. a.** 3; **b.** $2 + M_1$. **59.** 3.5229.
61. 12.4771.
63.



65. ln 4.

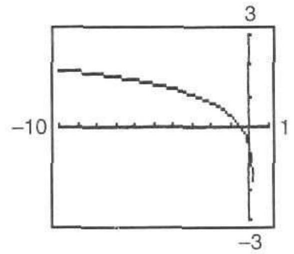
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.4

1. 18. **2.** Día 20. **3.** El otro sismo es 67.5 veces más intenso que un sismo de nivel cero.

EJERCICIO 5.4 (página 214)

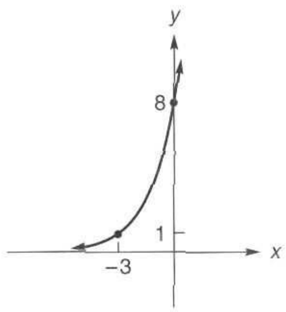
1. 5.000. **3.** 2.750. **5.** −3.000. **7.** 2.000.
9. 0.083. **11.** 1.099. **13.** 0.203. **15.** 5.140.
17. −0.073. **19.** 2.322. **21.** 3.183. **23.** 0.483.
25. 2.496. **27.** 1003.000. **29.** 2.222. **31.** 3.082.
33. 3.000. **35.** 0.500. **37.** $S = 12.4A^{0.26}$.
39. a. 100; **b.** 46. **41.** 20.5.
43. $p = \frac{\log(80 - q)}{\log 2}$; 4.32. **45.** 7.
47. a. 91; **b.** 432; **c.** 8. **49.** 1.20.

51.

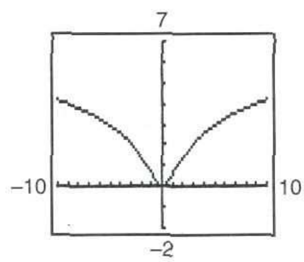


PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 5 (página 216)

1. $\log_3 243 = 5$. **3.** $16^{1/4} = 2$. **5.** $\ln 54.598 = 4$.
7. 3. **9.** −4. **11.** −2. **13.** 4. **15.** $\frac{1}{100}$.
17. −1. **19.** $3(a + 1)$. **21.** $\log\frac{25}{27}$. **23.** $\ln\frac{x^2y}{z^3}$.
25. $\log_2 \frac{x^{9/2}}{(x + 1)^3(x + 2)^4}$. **27.** $2\ln x + \ln y - 3\ln z$.
29. $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z)$. **31.** $\frac{1}{2}(\ln y - \ln z) - \ln x$.
33. $\frac{\ln(x + 5)}{\ln 3}$. **35.** 1.8295. **37.** $2x + \frac{1}{2}x$.
39. $2x$. **41.** $y = e^{x^2+2}$.
43.



45. $\frac{1}{3}$.
47. 1.
49. 10.
51. 2^e.
53. 0.880.
55. −3.222.
57. −1.596.
59. a. \$3829.04; **b.** \$1229.04.
61. 14%.
63. a. $P = 8000(1.02)^t$; **b.** 8323.
65. a. 10 mg; **b.** 4.4; **c.** 0.2; **d.** 1.7; **e.** 5.6.
67. a. 6; **b.** 28. **71.** $(-\infty, 0.37]$. **73.** 2.93.
75.



APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 5 (página 220)

1. a. $P = \frac{T(e^{kI} - 1)}{- e^{-dkI}}$; **b.** $d = \frac{1}{kI}\ln\left[\frac{P}{P - T(e^{kI} - 1)}\right]$.
3. a. 156; **b.** 65.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.1

1. 3×2 o 2×3. **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6.1 (página 229)

1. a. $2 \times 3, 3 \times 3, 3 \times 2, 2 \times 2, 4 \times 4, 1 \times 2, 3 \times 1, 3 \times 3, 1 \times 1$; **b. B, D, E, H, J; c. H, J** triangulares superiores; **D, J** triangulares inferiores; **d. F, J; e. G, J.**
3. 2. **5.** 4. **7.** 0. **9.** 7, 2, 1, 0.
11. $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}$. **13.** 120 entradas, 1, 0, 1, 0.
15. a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
17. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
21. a. A y **C; b.** Todas.
25. $x = 6, y = \frac{2}{3}, z = \frac{7}{2}$. **27.** $x = 0, y = 0$.
29. a. 7; **b.** 3; **c.** Febrero; **d.** Azul de lujo; **e.** Febrero; **f.** Febrero; **g.** 38. **31.** -2001. **33.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.2

1. $\begin{bmatrix} 230 & 220 \\ 190 & 255 \end{bmatrix}$. **2.** $x_1 = 670, x_2 = 835, x_3 = 1405$.

EJERCICIO 6.2 (página 237)

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -9 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$. **5.** $[-9 \quad -7 \quad 11]$.
7. No definida. **9.** $\begin{bmatrix} -12 & 36 & -42 & -6 \\ -42 & -6 & -36 & 12 \end{bmatrix}$.
11. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 13 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. **15. O.**
17. $\begin{bmatrix} 28 & 22 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. **19.** No definida. **21.** $\begin{bmatrix} -22 & -15 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$.
23. $\begin{bmatrix} 21 & \frac{29}{2} \\ \frac{19}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 20 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. **31.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.
33. Imposible. **35.** $x = \frac{146}{13}, y = -\frac{28}{13}$.
37. $x = 6, y = \frac{4}{3}$. **39.** $x = -6, y = -14, z = 1$.

41. $\begin{bmatrix} 35 & 65 \\ 75 & 55 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$. **43.** 1.1. **45.** $\begin{bmatrix} 15 & -4 & 26 \\ 4 & 7 & 30 \end{bmatrix}$.
47. $\begin{bmatrix} -10 & 22 & 12 \\ 24 & 36 & -44 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.3

1. \$5780. **2.** \$22,843.75. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6.3 (página 249)

1. -12. **3.** 19. **5.** 7. **7.** 2×2; 4.
9. 3×5; 15. **11.** 2×1; 2. **13.** 3×3; 9.
15. 3×1; 3. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$.
21. $\begin{bmatrix} 23 \\ 50 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **25.** $[-6 \quad 16 \quad 10 \quad -6]$.
27. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 & 6 \\ 6 & 9 & -6 & 9 \\ -8 & -12 & 8 & -12 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 78 & 84 \\ -21 & -12 \end{bmatrix}$.
31. $\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$. **33.** $\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$. **35.** $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$.
37. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **39.** $\begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 23 \end{bmatrix}$. **41.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.
43. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 17 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$. **45.** Imposible. **47.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.
49. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. **51.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
53. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **55.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **57.** $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.
59. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.
61. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$. **63.** \$2075. **65.** \$1,133,850.
67. a. \$180,000, \$520,000, \$400,000, \$270,000, \$380,000, \$640,000; **b.** \$390,000, \$100,000, \$800,000; **c.** \$2,390,000; **d.** $\frac{110}{239}, \frac{129}{239}$. **71.** $\begin{bmatrix} 72.82 & -9.8 \\ 51.32 & -36.32 \end{bmatrix}$.
73. $\begin{bmatrix} 15.606 & 64.08 \\ -739.428 & 373.056 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.4

1. 5 bloques de A, 2 bloques de B y 1 bloque de C.
2. 3 de X; 4 de Y; 2 de Z. **3.** A = 3D; B = 1000 − 2D; C = 500 − D; D = cualquier cantidad (≤ 500).

EJERCICIO 6.4 (página 261)

1. No reducida. **3.** Reducida. **5.** No reducida.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. $x = 2, y = 1$. **15.** No hay solución.

17. $x = -\frac{2}{3}r + \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{6}r + \frac{7}{6}, z = r$, en donde r es cualquier número real. **19.** No hay solución.

21. $x = -3, y = 2, z = 0$. **23.** $x = 2, y = -5, z = -1$.

25. $x_1 = 0, x_2 = -r, x_3 = -r, x_4 = -r, x_5 = r$, donde r es cualquier número real. **27.** Federal, \$72,000; estatal, \$24,000.

29. A, 2000; B, 4000; C, 5000. **31. a.** 3 de X, 4 de Z; 2 de X, 1 de Y, 5 de Z; 1 de X; 2 de Y, 6 de Z; 3 de Y, 7 de Z; **b.** 3 de X, 4 de Z; **c.** 3 de X, 4 de Z; 3 de Y, 7 de Z.

33. a. Sean s, d, g el número de unidades de S, D y G, *respectivamente. Las seis combinaciones están dadas por:*

s	5	4	3	2	1	0
d	8	7	6	5	4	3
g	0	1	2	3	4	5

b. La combinación $s = 0$, $d = 3, g = 5$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.5

1. Un número infinito de soluciones: $x + \frac{1}{2}z = 0, y + \frac{1}{2}z = 0$; en forma paramétrica: $x = -\frac{1}{2}r, y = -\frac{1}{2}r, z = r$, donde r es cualquier número real.

EJERCICIO 6.5 (página 267)

1. $w = -r - 3s + 2, x = -2r + s - 3, y = r, z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).
3. $w = -s, x = -3r - 4s + 2, y = r, z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).
5. $w = -2r + s - 2, x = -r + 4, y = r, z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).
7. $x_1 = -2r + s - 2t + 1, x_2 = -r - 2s + t + 4, x_3 = r, x_4 = s, x_5 = t$ (donde r, s y t son cualesquiera números reales).
9. Un número infinito de soluciones. **11.** Solución trivial.
13. Un número infinito de soluciones. **15.** $x = 0, y = 0$.
17. $x = -\frac{6}{5}r, y = \frac{8}{15}r, z = r$. **19.** $x = 0, y = 0$.
21. $x = r, y = -2r, z = r$.
23. $w = -2r, x = -3r, y = r, z = r$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.6

1. Sí. **2.** TE VERÉ EL VIERNES.

3. $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; **F** no es invertible.

4. A: 5000 acciones; B: 2500 acciones; C: 2500 acciones.

EJERCICIO 6.6 (página 275)

1. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$. **3.** No es invertible. **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

7. No es invertible.
9. No es invertible (no es una matriz cuadrada).

11. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

19. $x_1 = 10, x_2 = 20$. **21.** $x = 17, y = -20$.
23. $x = 1, y = 3$. **25.** $x = -3r + 1, y = r$.
27. $x = 0, y = 1, z = 2$. **29.** $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.
31. No hay solución. **33.** $w = 1, x = 3, y = -2, z = 7$.

35. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **37. a.** 40 del modelo A, 60 del modelo B; **b.** 45 del modelo A, 50 del modelo B. **39. b.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$.

41. Sí. **43.** D: 5000 acciones; E: 1000 acciones; F: 4000 acciones.

45. a. $\begin{bmatrix} 1.46 & 0.56 \\ 0.51 & 1.35 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{bmatrix}$.

47. $\begin{bmatrix} 1.80 & 1.10 & -0.46 \\ 0.35 & 1.31 & -0.17 \\ 0.44 & 0.42 & 0.59 \end{bmatrix}$.

49. $w = 14.44, x = 0.03, y = -0.80, z = 10.33$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.7

1. 6.

EJERCICIO 6.7 (página 285)

1. 1. **3.** -16. **5.** y. **7.** $-\frac{2}{7}$. **9.** 12.

11. -12. **13.** 6. **15.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$. **19.** -16. **21.** 98. **23.** -89.

25. -1. **27.** 2. **29.** -90. **31.** 1. **33.** 24.

35. 0. **37.** 0. **39.** 3, 4. **41.** 192. **43. b.** $\frac{1}{3}$.

45. $c = -1$ o $c = 4$. **47.** -1630. **49.** -3864.

EJERCICIO 6.8 (página 290)

1. $x = \frac{3}{2}, y = -1$. **3.** $x = \frac{7}{16}, y = \frac{13}{8}$.
5. $x = -\frac{1}{3}, y = -1$. **7.** $x = \frac{6}{5}, z = \frac{16}{5}$.
9. $x = 4, y = 2, z = 0$. **11.** $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{28}{15}, z = -\frac{26}{15}$.
13. $x = 3 - r, y = 0, z = r$. **15.** $x = 1, y = 3, z = 5$.

17. $y = 6, w = 1.$ **19.** Ya que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ no es aplicable la regla de Cramer. Pero la ecuación en $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = -3, \end{cases}$ representa rectas paralelas distintas y por tanto no existe solución. **21.** Cuatro juegos.
23. $x = 17.85, y = -0.42, z = -24.09.$

EJERCICIO 6.9 (página 294)

1. $\begin{bmatrix} 1290 \\ 1425 \end{bmatrix}$; 1405. **3.** **a.** $\begin{bmatrix} 297.80 \\ 349.54 \\ 443.12 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 102.17 \\ 125.28 \\ 175.27 \end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix} 1301 \\ 1215 \\ 1188 \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} 1073 \\ 1016 \\ 952 \end{bmatrix}$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 6 (página 296)

1. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -16 & -10 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 42 & 5 \\ 2 & -18 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$.
7. $\begin{bmatrix} 6 \\ 32 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$.
13. $x = 3, y = 21.$ **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
19. $x = 0, y = 0.$ **21.** No hay solución. **23.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.
25. No existe la inversa. **27.** $x = 0, y = 1, z = 0.$
29. 18. **31.** 3. **33.** *rich*. **35.** $x = 1, y = 2.$
37. $-2.$ **39.** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_3, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^{2000} = \mathbf{I}_3.$
41. $x = 2 - \frac{c}{a}, y = \frac{c}{a} - 1, z = 1 - \frac{a}{c}.$
43. **a.** Sean x, y, z las dosis de cápsulas semanales de las marcas I, II, III, respectivamente. Las combinaciones están dadas por:

	x	y	z
combinación 1	4	9	0
combinación 2	3	6	1
combinación 3	2	3	2
combinación 4	1	0	3

b. Combinación 4: $x = 1, y = 0, z = 3.$

45. $\begin{bmatrix} 215 & 87 \\ 89 & 141 \end{bmatrix}$. **47.** $\begin{bmatrix} 40.8 \\ 40.56 \end{bmatrix}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 6 (página 298)

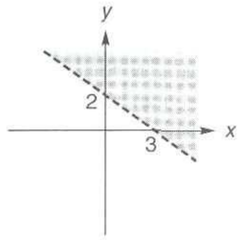
1. \$151.40. **3.** No es posible, ya que los huéspedes 3 y 4 le cuestan a la posada la misma cantidad por día.

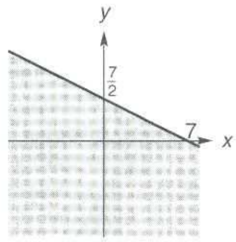
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.1

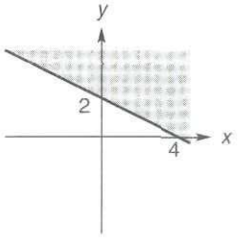
1. $2x + 1.5y > 0.9x + 0.7y + 50, y > -1.375x + 62.5$; haga el bosquejo de la recta punteada $y = -1.375x + 62.5$ y sombree el semiplano por arriba de la recta. Para producir una utilidad, el número de imanes producidos y vendidos de tipos A y B, debe ser un par ordenado en la región.

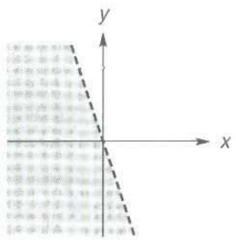
2. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 50, x \geq 2y$. La región consiste en los puntos en o por arriba del eje x, y en o a la derecha del eje y, los puntos deben estar en o por arriba de la recta $x + y = 50$, y en o por debajo de la recta $x = 2y$.

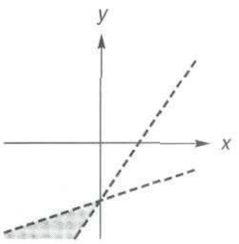
EJERCICIO 7.1 (página 306)

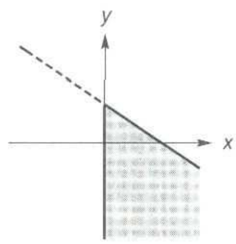
1.


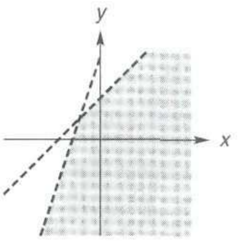
3.


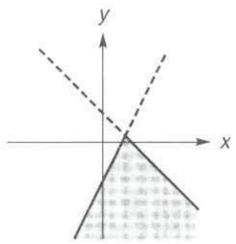
5.


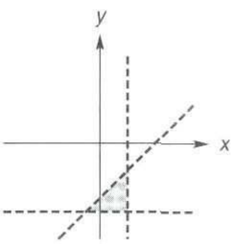
7.


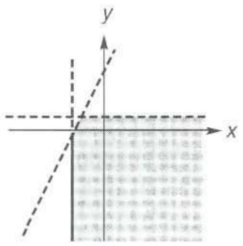
9.


11.


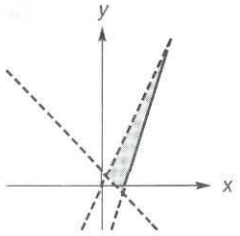
13.


15.


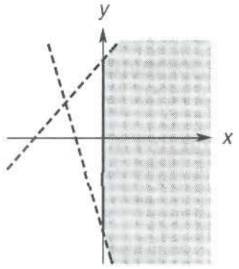
17.


19.


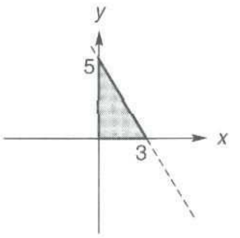
21.



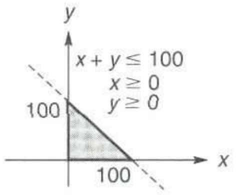
23.



25.



27.



x: número de libras de A
y: número de libras de B

29. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 240$, $0.5x + y \leq 80$.

EJERCICIO 7.2 (página 315)

1. $P = 640$ cuando $x = 40$, $y = 20$.
3. $Z = -10$ cuando $x = 2$, $y = 3$.
5. No tiene solución óptima (la región factible es vacía).
7. $Z = 3$ cuando $x = 0$, $y = 1$.
9. $C = 2.4$ cuando $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{6}{5}$.
11. No tiene solución óptima (no acotado).
13. 15 muñecas, 25 soldados; $210.
15. 4 unidades de alimento A, 4 unidades de alimento B; $8.
17. 10 toneladas de la mina I, 10 toneladas de la mina II; $1100.
19. 6 cámaras de tipo A y 10 cámaras de tipo B.
21. c. $x = y = 75$.
23. $Z = 15.54$ cuando $x = 2.56$, $y = 6.74$.
25. $Z = -75.98$ cuando $x = 9.48$, $y = 16.67$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.3

1. Enviar $10t + 15$ televisores de C a A, $-10t + 30$ televisores de C a B, $-10t + 10$ televisores de D a A y $10t$ televisores de D a B, para $0 \leq t \leq 1$; costo mínimo $780.

EJERCICIO 7.3 (página 318)

1. $Z = 33$ cuando $x = (1 - t)(2) + 5t = 2 + 3t$, $y = (1 - t)(3) + 2t = 3 - t$ y $0 \leq t \leq 1$.
3. $Z = 72$ cuando $x = (1 - t)(3) + 4t = 3 + t$, $y = (1 - t)(2) + 0t = 2 - 2t$ y $0 \leq t \leq 1$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.4

1. 0 aparatos de tipo 1, 72 aparatos de tipo 2, 12 aparatos de tipo 3; utilidad máxima de $20,400.

EJERCICIO 7.4 (página 330)

1. $Z = 8$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.
3. $Z = 14$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
5. $Z = 28$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
7. $Z = 20$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$.
9. $Z = 2$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
11. $Z = \frac{16}{3}$ cuando $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{14}{3}$.
13. $W = 13$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.
15. $Z = 600$ cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$.
17. 0 de A, 2400 de B; $1200.
19. 0 sillas, 300 mecedoras, 100 sillones; $10,800.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.5

1. $35 - 7t$ dispositivos 1, $6t$ dispositivos 2, 0 dispositivos 3 para $0 \leq t \leq 1$.

EJERCICIO 7.5 (página 337)

1. Sí; para la tabla, x_2 es la variable que entra y los cocientes $\frac{6}{2}$ y $\frac{3}{1}$ empatan como los más pequeños.
3. No existe solución óptima (no acotado).
5. $Z = 12$ cuando $x_1 = 4 + t$, $x_2 = t$ y $0 \leq t \leq 1$.
7. No tiene solución óptima (no acotado).
9. $Z = 13$ cuando $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t$, $x_2 = 6t$, $x_3 = 4 - 3t$, y $0 \leq t \leq 1$.
11. $15,200. Si x_1, x_2, x_3 denotan a los números de sillas, mecedoras y sillones producidos, respectivamente, entonces
$x_1 = 100 - 100t$,
$x_2 = 100 + 150t$,
$x_3 = 200 - 50t$, y
$0 \leq t \leq 1$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.6

1. Planta I: 500 estándar, 700 de lujo; planta II: 500 estándar, 100 de lujo; utilidad máxima $89,500.

EJERCICIO 7.6 (página 348)

1. $Z = 7$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
3. $Z = 4$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.
5. $Z = \frac{58}{3}$ cuando $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$.
7. $Z = -17$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
9. No tiene solución óptima (región factible vacía).
11. $Z = 2$ cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 10$.
13. 255 libreros estándar, 0 libreros ejecutivos.
15. 30% en A, 0% en AA, 70% en AAA; 6.6%.

EJERCICIO 7.7 (página 352)

1. $Z = 54$ cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.
3. $Z = 216$ cuando $x_1 = 18$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
5. $Z = 4$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$.
7. $Z = 0$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.
9. $Z = 28$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$.
11. Instalar el dispositivo A en los hornos produce 700,000 barriles anualmente y el dispositivo B en los hornos produce 2,600,000 barriles al año. **13.** A Exton, 5 de A y 10 de B; a Whyton, 15 de A; $380. **15. a.** Columna 3: 1, 3, 3; columna 4: 0, 4, 8; **b.** $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$, $x_4 = 0$; **c.** 90 pulgadas.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.8

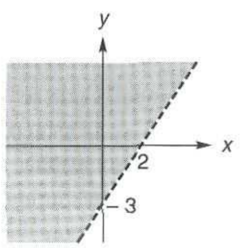
1. Minimizar $W = 60{,}000y_1 + 2000y_2 + 120y_3$ sujeta a
$300y_1 + 20y_2 + 3y_3 \geq 300$,
$220y_1 + 40y_2 + y_3 \geq 200$,
$180y_1 + 20y_2 + 2y_3 \geq 200$,
y $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
2. Maximizar $W = 98y_1 + 80y_2$ sujeta a
$20y_1 + 8y_2 \leq 6$,
$6y_1 + 16y_2 \leq 2$,
y $y_1, y_2 \geq 0$.
3. 5 dispositivos 1, 0 dispositivos 2, 15 dispositivos 3.

EJERCICIO 7.8 (página 361)

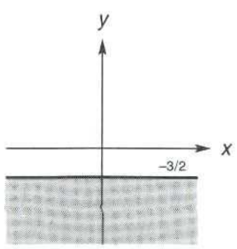
1. Minimizar $W = 6y_1 + 4y_2$ sujeta a
$y_1 - y_2 \geq 2$,
$y_1 + y_2 \geq 3$,
$y_1, y_2 \geq 0$.
3. Maximizar $W = 8y_1 + 2y_2$ sujeta a
$y_1 - y_2 \leq 1$,
$y_1 + 2y_2 \leq 8$,
$y_1 + y_2 \leq 5$,
$y_1, y_2 \geq 0$.
5. Minimizar $W = 13y_1 - 3y_2 - 11y_3$ sujeta a
$-y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$,
$2y_1 - y_2 - y_3 \geq -1$,
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
7. Maximizar $W = -3y_1 + 3y_2$ sujeta a
$-y_1 + y_2 \leq 4$,
$y_1 - y_2 \leq 4$,
$y_1 + y_2 \leq 6$,
$y_1, y_2 \geq 0$.
9. $Z = 11$ cuando $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2}$.
11. $Z = 26$ cuando $x_1 = 6, x_2 = 1$.
13. $Z = 14$ *cuando* $x_1 = 1, x_2 = 2$.
15. \$250 en publicidad en periódico, \$1400 en publicidad en radio; \$1650.
17. 20 aprendices de embarque, 40 trabajadores de embarque, 90 trabajadores semicalificados, 0 trabajadores calificados; \$1200.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 7 (página 362)

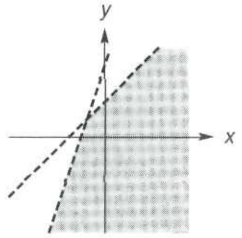
1.



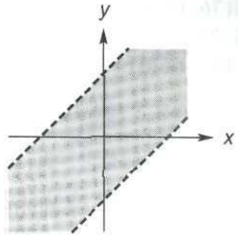
3.



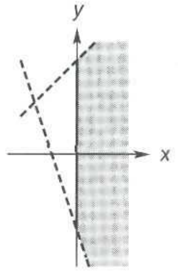
5.



7.



9.



11. $Z = 3$ cuando $x = 3, y = 0$.
13. $Z = -2$ cuando $x = 0, y = 2$.
15. No existe solución óptima (región factible vacía).
17. $Z = 36$ cuando $x = 2 + 2t$, $y = 3 - 3t$, y $0 \leq t \leq 1$.
19. $Z = 32$ cuando $x_1 = 8, x_2 = 0$.
21. $Z = 2$ cuando $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2$.
23. $Z = 24$ cuando $x_1 = 0, x_2 = 12$.
25. $Z = \frac{7}{2}$ cuando $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{9}{4}$.
27. No tiene solución óptima (no acotado).
29. $Z = 70$ cuando $x_1 = 35, x_2 = 0, x_3 = 0$.
31. 0 unidades de X, 6 unidades de Y, 14 unidades de Z; \$398.
33. 500,000 galones de A a D, 100,000 galones de A a C, 400,000 galones de B a C; \$19,000.
35. Sólo 10 kg del alimento A.
37. $Z = 117.88$ cuando $x = 7.23, y = 3.40$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 7 (página 365)

1. 2 minutos de radiación. **3.** Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 8.1

1. 4.9%. **2.** 7 años, 16 días. **3.** 7.7208%.
4. La inversión a 20 años de \$10,000 es ligeramente mejor.

EJERCICIO 8.1 (página 372)

1. a. \$11,105.58; **b.** \$5105.58. **3.** 4.060%. **5.** 4.081%.
7. a. 10%; **b.** 10.25%; **c.** 10.381%; **d.** 10.471%; **e.** 10.516%.
9. 8.08%. **11.** 9.0 años. **13.** \$10,282.95.
15. \$38,503.23. **17. a.** 18%; **b.** 19.56%.
19. \$3198.54. **21.** 8% compuesto anualmente.
23. a. 5.47%; **b.** 5.39%. **25.** 11.61%. **27.** 6.29%.

EJERCICIO 8.2 (página 376)

1. \$2261.34. **3.** \$1751.83. **5.** \$5118.10.
7. \$4862.31. **9.** \$6838.95. **11.** \$9419.05.
13. \$14,091.10. **15.** \$1238.58. **17.** \$3244.63
19. a. \$515.62; **b.** Rentable. **21.** Cuenta de ahorros.
23. \$226.25. **25.** 9.55%.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 8.3

1. 48 pies, 36 pies, 27 pies, $20\frac{1}{4}$ pies, $15\frac{3}{16}$ pies.
2. 750, 1125, 1688, 2531, 3797, 5695. **3.** 35.72 m.

4. \$176,994.65. **5.** 6.20%. **6.** \$101,925; \$121,925.
7. \$723.03. **8.** \$13,962.01. **9.** \$45,502.06.
10. \$48,095.67.

EJERCICIO 8.3 (página 386)

1. 64, 32, 16, 8, 4. **3.** 100, 102, 104.04. **5.** $\frac{422}{243}$.
7. 1.11111. **9.** 18.664613. **11.** 8.213180.
13. \$2050.10. **15.** \$29,984.06. **17.** \$8001.24.
19. \$90,231.01. **21.** \$204,977.46. **23.** \$24,594.36.
25. \$1937.14. **27.** \$458.40.
29. a. \$3048.85; **b.** \$648.85. **31.** \$3474.12.
33. \$1725. **35.** 102.91305. **37.** 55,360.30.
39. \$131.34. **41.** \$1,872,984.02.
43. \$205,073; \$142,146.

EJERCICIO 8.4 (página 391)

1. \$69.33. **3.** \$502.84.
5. a. \$221.43; **b.** \$25; **c.** \$196.43.

7.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	5000.00	350.00	1476.14	1126.14
2	3873.86	271.17	1476.14	1204.97
3	2668.89	186.82	1476.14	1289.32
4	1379.57	96.57	1476.14	1379.57
Total		904.56	5904.56	5000.00

9.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	900.00	22.50	193.72	171.22
2	728.78	18.22	193.72	175.50
3	553.28	13.83	193.72	179.89
4	373.39	9.33	193.72	184.39
5	189.00	4.73	193.73	189.00
Total		68.61	968.61	900.00

11. 11. **13.** \$1273.
15. a. \$2089.69; **b.** \$1878.33; **c.** \$211.36; **d.** \$381,907.
17. 23. **19.** \$113,302.45. **21.** \$38.64.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 8 (página 394)

1. $\frac{63}{16}$. **3.** 8.5% compuesto anualmente.
5. \$586.60. **7. a.** \$1997.13; **b.** \$3325.37.
9. \$936.85. **11.** \$886.98. **13.** \$314.00.

15.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	15,000.00	112.50	3067.84	2955.34
2	12,044.66	90.33	3067.84	2977.51
3	9067.15	68.00	3067.84	2999.84
4	6067.31	45.50	3067.84	3022.34
5	3044.97	22.84	3067.81	3044.97
Total		339.17	15,339.17	15,000.00

17. \$1279.36.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 8 (página 395)

1. \$15,597.85. **3.** Cuando los inversionistas esperan una caída en las tasas de interés, las inversiones a largo plazo son más atractivas que las de corto plazo.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.1

1. El límite cuando $x \to a$ no existe, si a es un entero, pero existe si a es cualquier otro valor.
2. 36π cc. **3.** 3616. **4.** 20. **5.** 2.

EJERCICIO 9.1 (página 406)

1. a. 1; **b.** 0; **c.** 1. **3. a.** 1; **b.** no existe; **c.** 3.
5. $f(0.9) = 2.8, f(0.99) = 2.98, f(0.999) = 2.998, f(1.001) = 3.002, f(1.01) = 3.02, f(1.1) = 3.2$; 3.
7. $f(-0.1) \approx 0.9516, f(-0.01) \approx 0.9950, f(-0.001) \approx 0.9995, f(0.001) \approx 1.0005, f(0.01) \approx 1.0050. f(0.1) \approx 1.0517$; 1.
9. 16. **11.** 20. **13.** -1. **15.** $-\frac{5}{2}$. **17.** 0.
19. 5. **21.** -2. **23.** 3. **25.** 0. **27.** $\frac{1}{6}$.
29. $-\frac{1}{5}$. **31.** $\frac{11}{9}$. **33.** 4. **35.** $2x$. **37.** -1.
39. $2x$. **41.** $2x - 3$. **43.** $\frac{1}{4}$. **45. a.** 1; **b.** 0.
47. 11.00. **49.** -7.00.

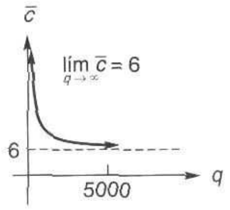
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.2

1. $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$. La gráfica inicia arriba y rápidamente desciende hacia cero. De acuerdo con esto, los consumidores están dispuestos a comprar cantidades grandes del producto a precios cercanos a cero.
2. $\lim_{x\to\infty} y(x) = 500$. Las mayores ventas anuales que se pueden esperar con publicidad ilimitada es de \$500,000.
3. $\lim_{x\to\infty} C(x) = \infty$. Esto significa que el costo continúa aumentando sin cota conforme se fabrican más unidades.
4. El límite no existe; \$250.

EJERCICIO 9.2 (página 417)

1. a. 2; **b.** 3; **c.** No existe; **d.** $-\infty$; **e.** ∞; **f.** ∞; **g.** ∞; **h.** 0; **i.** 1; **j.** 1; **k.** 1. **3.** 1. **5.** $-\infty$. **7.** $-\infty$.
9. ∞. **11.** 0. **13.** No existe. **15.** 0.
17. ∞. **19.** 0. **21.** 1. **23.** 0. **25.** ∞.
27. 0. **29.** $-\frac{2}{5}$. **31.** $-\infty$. **33.** $\frac{2}{5}$. **35.** $-\infty$.

37. $\frac{11}{5}$. **39.** $-\frac{1}{2}$. **41.** ∞. **43.** ∞. **45.** ∞.
47. No existe. **49.** $-\infty$. **51.** 0. **53.** 1.
55. a. 1; **b.** 2; **c.** No existe; **d.** 1; **e.** 2.
57. a. 0; **b.** 0; **c.** 0; **d.** $-\infty$; **e.** $-\infty$.
59.



61. 20,000. **63.** 20.

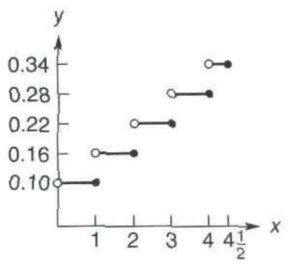
65. 1, 0.5, 0.525, 0.631, 0.912, 0.986, 0.998; se concluye que el límite es 1.
67. 0. **69. a.** 11; **b.** 9; **c.** No existe.

EJERCICIO 9.3 (página 421)

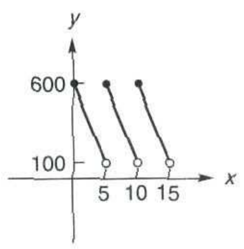
1. \$5563.87; \$1563.87. **3.** \$1456.87. **5.** 4.08%.
7. 3.05%. **9.** \$109.42. **11.** \$778,800.78.
13. a. \$21,911; **b.** \$6599. **15.** \$4.88%.
17. \$1264. **19.** 16 años.
21. Opción (a): \$1072.51; Opción (b): \$1093.30; Opción (c): \$1072.18.
23. a. \$9458.51; **b.** Esta estrategia es mejor por \$26.90.

EJERCICIO 9.4 (página 429)

7. Continua en -2 y 0. **9.** Discontinua en ± 3.
11. Continua en 2 y 0. **13.** f es una función polinomial.
15. f es una función racional y el denominador nunca es cero.
17. Ninguna. **19.** $x = -4$. **21.** Ninguna.
23. $x = -5, 3$. **25.** $x = 0, \pm 1$. **27.** Ninguna.
29. $x = 0$. **31.** Ninguna. **33.** $x = 2$.
35. Discontinuidades en $t = 1, 2, 3, 4$.



37. Sí, no, no.



PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.5

1. $0 < x < 4$.

EJERCICIO 9.5 (página 433)

1. $(-\infty, -1), (4, \infty)$. **3.** $[2, 3]$. **5.** $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$.
7. No hay solución. **9.** $(-\infty, -6], [-2, 3]$.
11. $(-\infty, -4), (0, 5)$. **13.** $[0, \infty)$. **15.** $(-3, 0), (1, \infty)$.
17. $(-\infty, -3), (0, 3)$. **19.** $(1, \infty)$.
21. $(-\infty, -5), [-2, 1), [3, \infty)$. **23.** $(-5, -1)$.
25. $(-\infty, -1 - \sqrt{3}], [-1 + \sqrt{3}, \infty)$.
27. Entre 50 y 150, inclusive. **29.** 17 pulgadas por 17 pulgadas.
31. $(-\infty, -7.72]$. **33.** $(-\infty, -0.5), (0.667, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 9 (página 436)

1. -5. **3.** 2. **5.** x. **7.** $-\frac{8}{3}$. **9.** 0. **11.** $\frac{3}{7}$.
13. No existe. **15.** -1. **17.** $\frac{1}{9}$. **19.** $-\infty$.
21. ∞. **23.** $-\infty$. **25.** 1. **27.** $-\infty$. **29.** 8.
31. 23. **33. a.** \$5034.38; **b.** \$1241.46. **35.** 6.18%.
37. 20 ln 2.
41. Continua en todas partes; f es una función polinomial.
43. $x = -3$. **45.** Ninguna. **47.** $x = -4, 1$.
49. $x = -2$. **51.** $(-\infty, -6), (2, \infty)$.
53. $[2, \infty), x = 0$. **55.** $(-\infty, -5), (-1, 1)$.
57. $(-\infty, -4), [-3, 0], (2, \infty)$. **59.** 1.00.
61. 0. **63.** $[2.00, \infty)$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 9 (página 438)

1. 17%.
3. Un modelo exponencial supone una tasa de pago fija.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.1

1. $\frac{dH}{dt} = 40 - 32t$.

EJERCICIO 10.1 (página 450)

1. a.

Valor x de Q	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001
m_{PQ}	19	15.25	13.24	12.61	12.0601	12.0060

b. Estimamos que $m_{\tan} = 12$.
3. 1. **5.** 4. **7.** -4. **9.** 0. **11.** $2x + 4$.
13. $4q + 5$. **15.** $-\frac{6}{x^2}$. **17.** $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$. **19.** -4.
21. 0. **23.** $y = x + 4$. **25.** $y = -3x - 7$.
27. $y = -3x + 9$. **29.** $\dfrac{r}{r_L - r - \dfrac{dC}{dD}}$.
31. $-3.000, 13.445$. **33.** $-5.120, 0.038$.
35. Para los valores x de los puntos en donde la tangente a la gráfica de f es horizontal, los valores correspondientes de $f'(x)$ son cero. Esto es de esperarse, ya que la pendiente de una recta horizontal es cero y la derivada da la pendiente de la recta tangente.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.2

1. $50 - 0.6q$.

EJERCICIO 10.2 (página 457)

1. 0. **3.** $6x^5$. **5.** $80x^{79}$. **7.** $18x$. **9.** $20w^4$.

11. $\frac{8}{3}x^3$. **13.** $\frac{1}{2}t^8$. **15.** 1. **17.** $8x - 2$.

19. $4p^3 - 9p^2$. **21.** $-8x^7 + 5x^4$.

23. $-39x^2 + 28x - 2$. **25.** $-8x^3$. **27.** $-\frac{4}{3}x^3$.

29. $16x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. **31.** $\frac{6}{5}x^3 + 7x^2$. **33.** $\frac{7}{2}x^{5/2}$.

35. $\frac{3}{4}x^{-1/4} + \frac{10}{3}x^{2/3}$. **37.** $\frac{11}{2}x^{-1/2}$ o $\frac{11}{2\sqrt{x}}$. **39.** $2r^{-2/3}$.

41. $-4x^{-5}$. **43.** $-3x^{-4} - 5x^{-6} + 12x^{-7}$.

45. $-x^{-2}$ o $-\frac{1}{x^2}$. **47.** $-40x^{-6}$. **49.** $-4x^{-4}$.

51. $-\frac{1}{2}t^{-2}$. **53.** $\frac{1}{7} - 7x^{-2}$. **55.** $-3x^{-2/3} - 2x^{-7/5}$.

57. $-\frac{1}{5}x^{-6/5}$. **59.** $-x^{-3/2}$. **61.** $\frac{5}{2}x^{3/2}$.

63. $9x^2 - 20x + 7$. **65.** $45x^4$.

67. $\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{10}{3}x^{-5/3} = \frac{1}{3}x^{-5/3}(x - 10)$. **69.** $8q + \frac{4}{q^2}$.

71. $2(x + 2)$. **73.** 1. **75.** $4, 16, -14$. **77.** $0, 0, 0$.

79. $y = 13x + 2$. **81.** $y = -4x + 6$.

83. $y = x + 3$. **85.** $(0, 0), \left(2, -\frac{4}{3}\right)$. **87.** $(3, -3)$.

89. 0. **91.** La recta tangente es $y = 9x - 16$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.3

1. 2.5 unidades. **2.** $\frac{dy}{dt} = 16 - 32t$. $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.5} = 0$ pies/s.
Cuando $t = 0.5$ el objeto alcanza su altura máxima.
3. 1.2 y 120%.

EJERCICIO 10.3 (página 468)

1.

Δt	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$	9	6.75	5.64	5.31	5.0301	5.003001

Estimamos la velocidad en $t = 1$, como 5.0000 m/s.
Con diferenciación la velocidad es 5 m/s.

3. **a.** 4 m; **b.** 5.5 m/s; **c.** 5 m/s.
5. **a.** 8 m; **b.** 6.1208 m/s; **c.** 6 m/s.
7. **a.** 2 m; **b.** 10.261 m/s; **c.** 9 m/s. **9.** 0.65.
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{25}{2}x^{3/2}$; 337.50. **13.** 0.27.
15. $dc/dq = 10$; 10. **17.** $dc/dq = 0.6q + 2$; 3.8.
19. $dc/dq = 2q + 50$; 80, 82, 84.
21. $dc/dq = 0.02q + 5$; 6, 7.
23. $dc/dq = 0.00006q^2 - 0.02q + 6$; 4.6, 11.
25. $dr/dq = 0.7$; 0.7, 0.7, 0.7.
27. $dr/dq = 250 + 90q - 3q^2$; 625, 850, 625.
29. $dc/dq = 6.750 - 0.000656q$; 3.47.
31. $dP/dR = -4{,}650{,}000R^{-1.93}$. **33.** **a.** -7.5; **b.** 4.5.
35. **a.** 1; **b.** $\frac{1}{x + 4}$; **c.** 1; **d.** $\frac{1}{9} \approx 0.111$; **e.** 11.1%.

37. **a.** $6x$; **b.** $\frac{6x}{3x^2 + 7}$; **c.** 12; **d.** $\frac{12}{19} \approx 0.632$; **e.** 63.2%.
39. **a.** $-3x^2$; **b.** $-\frac{3x^2}{8 - x^3}$; **c.** -3; **d.** $-\frac{3}{7} \approx -0.429$;
e. -42.9%. **41.** 3.2; 21.3%.
43. **a.** $dr/dq = 30 - 0.6q$; **b.** $\frac{4}{45} \approx 0.089$; **c.** 9%.
45. $\frac{0.432}{t}$. **47.** \$3125. **49.** \$5.07/unidad.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.5

1. $\frac{dR}{dx} = 6.25 - 6x$. **2.** $T'(x) = 2x - x^2$; $T'(1) = 1$.

EJERCICIO 10.5 (página 480)

1. $(4x + 1)(6) + (6x + 3)(4) = 48x + 18 = 6(8x + 3)$.
3. $(8 - 7t)(2t) + (t^2 - 2)(-7) = 14 + 16t - 21t^2$.
5. $(3r^2 - 4)(2r - 5) + (r^2 - 5r + 1)(6r)$
$= 12r^3 - 45r^2 - 2r + 20$.
7. $8x^3 - 10x$.
9. $(x^2 + 3x - 2)(4x - 1) + (2x^2 - x - 3)(2x + 3)$
$= 8x^3 + 15x^2 - 20x - 7$.
11. $(8w^2 + 2w - 3)(15w^2) + (5w^3 + 2)(16w + 2)$
$= 200w^4 + 40w^3 - 45w^2 + 32w + 4$.
13. $(x^2 - 1)(9x^2 - 6) + (3x^3 - 6x + 5)(2x) - 4(8x + 2)$
$= 15x^4 - 27x^2 - 22x - 2$.
15. $\frac{3}{2}\left[(p^{1/2} - 4)(4) + (4p - 5)\left(\frac{1}{2}p^{-1/2}\right)\right]$
$= \frac{3}{4}(12p^{1/2} - 5p^{-1/2} - 32)$.
17. 0. **19.** $18x^2 + 94x + 31$.
21. $\frac{(x - 1)(5) - (5x)(1)}{(x - 1)^2} = -\frac{5}{(x - 1)^2}$.
23. $-\frac{9}{x^7}$. **25.** $\frac{(x - 1)(1) - (x + 2)(1)}{(x - 1)^2} = -\frac{3}{(x - 1)^2}$.
27. $\frac{(z^2 - 4)(-2) - (6 - 2z)(2z)}{(z^2 - 4)^2} = \frac{2(z^2 - 6z + 4)}{(z^2 - 4)^2}$.
29. $\frac{(x^2 - 5x)(16x - 2) - (8x^2 - 2x + 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x)^2}$
$= \frac{-38x^2 - 2x + 5}{(x^2 - 5x)^2}$.
31. $\frac{(2x^2 - 3x + 2)(2x - 4) - (x^2 - 4x + 3)(4x - 3)}{(2x^2 - 3x + 2)^2}$
$= \frac{5x^2 - 8x + 1}{(2x^2 - 3x + 2)^2}$.
33. $-\frac{100x^{99}}{(x^{100} + 7)^2}$. **35.** $\frac{4(v^5 + 2)}{v^2}$.
37. $\frac{15x^2 - 2x + 1}{3x^{4/3}}$. **39.** $\frac{4}{(x - 8)^2} + \frac{2}{(3x + 1)^2}$.
41. $\frac{[(x + 2)(x - 4)](1) - (x - 5)(2x - 2)}{[(x + 2)(x - 4)]^2}$
$= \frac{-(x^2 - 10x + 18)}{[(x + 2)(x - 4)]^2}$.

43. $\dfrac{[(t^2-1)(t^3+7)](2t+3)-(t^2+3t)(5t^4-3t^2+14t)}{[(t^2-1)(t^3+7)]^2}$

$= \dfrac{-3t^6-12t^5+t^4+6t^3-21t^2-14t-21}{[(t^2-1)(t^3+7)]^2}$.

45. $3-\dfrac{2x^3+3x^2-12x+4}{[x(x-1)(x-2)]^2}$. **47.** $-\dfrac{2a}{(a+x)^2}$.

49. -6. **51.** $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{15}{2}$. **53.** $y=16x+24$.

55. 1.5. **57.** 1 m, −1.5 m/s. **59.** $\dfrac{dr}{dq}=25-0.04q$.

61. $\dfrac{dr}{dq}=\dfrac{216}{(q+2)^2}-3$. **63.** $\dfrac{dC}{dI}=0.672$.

65. $\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}$. **67.** 0.615; 0.385. **69. a.** 0.32; **b.** 0.026.

71. $\dfrac{dc}{dq}=\dfrac{5q(q+6)}{(q+3)^2}$. **73.** $\dfrac{9}{10}$. **75.** $\dfrac{0.7355}{(1+0.02744x)^2}$.

77. $-\dfrac{1}{120}$. **79.** $6x^2+2x-13$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.6

1. $288t$.

EJERCICIO 10.6 (página 490)

1. $(2u-2)(2x-1)=4x^3-6x^2-2x+2$.

3. $\left(-\dfrac{2}{w^3}\right)(-1)=\dfrac{2}{(2-x)^3}$. **5.** -2. **7.** 0.

9. $18(3x+2)^5$. **11.** $-6x(5-x^2)^2$.

13. $200(3x^2-16x+1)(x^3-8x^2+x)^{99}$.

15. $-6x(x^2-x)^{-4}$.

17. $-10(4x-3)(2x^2-3x-1)^{-13/3}$.

19. $\dfrac{1}{2}(10x-1)(5x^2-x)^{-1/2}$. **21.** $\dfrac{1}{2}(2x-1)^{-3/4}$.

23. $\dfrac{12}{5}x^2(x^3+1)^{-3/5}$. **25.** $-6(4x-1)(2x^2-x+1)^{-2}$.

27. $-2(2x-3)(x^2-3x)^{-3}$. **29.** $-8(8x-1)^{-3/2}$.

31. $\dfrac{7}{3}(7x)^{-2/3}+\sqrt[3]{7}$.

33. $(x^2)[5(x-4)^4(1)]+(x-4)^5(2x)$
$=x(x-4)^4(7x-8)$.

35. $(2x)\left[\dfrac{1}{2}(6x-1)^{-1/2}(6)\right]+(\sqrt{6x-1})(2)$
$=6x(6x-1)^{-1/2}+2\sqrt{6x-1}$.

37. $(x^2+2x-1)^3(5)+(5x)[3(x^2+2x-1)^2(2x+2)]$
$=5(x^2+2x-1)^2(7x^2+8x-1)$.

39. $(8x-1)^3[4(2x+1)^3(2)]+(2x+1)^4[3(8x-1)^2(8)]$
$=16(8x-1)^2(2x+1)^3(7x+1)$.

41. $10\left(\dfrac{x-7}{x+4}\right)^9\left[\dfrac{(x+4)(1)-(x-7)(1)}{(x+4)^2}\right]$
$=\dfrac{110(x-7)^9}{(x+4)^{11}}$.

43. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-1/2}\left[\dfrac{(x+3)(1)-(x-2)(1)}{(x+3)^2}\right]$
$=\dfrac{5}{2(x+3)^2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-1/2}$.

45. $\dfrac{(x^2+4)^3(2)-(2x-5)[3(x^2+4)^2(2x)]}{(x^2+4)^6}$
$=\dfrac{-2(5x^2-15x-4)}{(x^2+4)^4}$.

47. $\dfrac{(3x-1)^3[40(8x-1)^4]-(8x-1)^5[9(3x-1)^2]}{(3x-1)^6}$
$=\dfrac{(8x-1)^4(48x-31)}{(3x-1)^4}$.

49. $6\{(5x^2+2)[2x^3(x^4+5)^{-1/2}]+(x^4+5)^{1/2}(10x)\}$
$=12x(x^4+5)^{-1/2}(10x^4+2x^2+25)$.

51. $8+\dfrac{5}{(t+4)^2}-(8t-7)=15-8t+\dfrac{5}{(t+4)^2}$.

53. $\dfrac{(x^2-7)^4[(2x+1)(2)(3x-5)(3)+(3x-5)^2(2)]-(2x+1)(3x-5)^2[4(x^2-7)^3(2x)]}{(x^2-7)^8}$.

55. 0. **57.** 0. **59.** $y=4x-11$.

61. $y=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{5}{3}$. **63.** 96%. **65.** 20. **67.** 13.99.

69. a. $-\dfrac{q}{\sqrt{q^2+20}}$; **b.** $-\dfrac{q}{100\sqrt{q^2+20}-q^2-20}$;
c. $100-\dfrac{q^2}{\sqrt{q^2+20}}-\sqrt{q^2+20}$.

71. -325. **73.** $\dfrac{dc}{dq}=\dfrac{5q(q^2+6)}{(q^2+3)^{3/2}}$. **75.** $48\pi(10)^{-19}$.

77. a. $-0.001424x^3+0.01338x^2+1.692x-34.8$; -22.986; **b.** -0.001. **79.** -4. **81.** 40. **83.** 86,111.22.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 10 (página 494)

1. $-2x$. **3.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$. **5.** 0.

7. $28x^3-18x^2+10x=2x(14x^2-9x+5)$.

9. $4s^3+4s=4s(s^2+1)$. **11.** $\dfrac{2x}{5}$.

13. $(x^2+6x)(3x^2-12x)+(x^3-6x^2+4)(2x+6)$
$=5x^4-108x^2+8x+24$.

15. $100(2x^2+4x)^{99}(4x+4)$
$=400(x+1)[(2x)(x+2)]^{99}$.

17. $-\dfrac{6}{(2x+1)^2}$.

19. $(8+2x)(4)(x^2+1)^3(2x)+(x^2+1)^4(2)$
$=2(x^2+1)^3(9x^2+32x+1)$.

21. $\dfrac{(z^2+4)(2z)-(z^2-1)(2z)}{(z^2+4)^2}=\dfrac{10z}{(z^2+4)^2}$.

23. $\dfrac{4}{3}(4x-1)^{-2/3}$.

25. $-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}(-1)=\dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$.

27. $(x-6)^4[3(x+5)^2]+(x+5)^3[4(x-6)^3]$
$=(x-6)^3(x+5)^2(7x+2)$.

29. $\dfrac{(x+6)(5)-(5x-4)(1)}{(x+6)^2}=\dfrac{34}{(x+6)^2}$.

31. $2\left(-\dfrac{3}{8}\right)x^{-11/8}+\left(-\dfrac{3}{8}\right)(2x)^{-11/8}(2)$
$=-\dfrac{3}{4}(1+2^{-11/8})x^{-11/8}$.

33. $\dfrac{\sqrt{x^2+5}(2x)-(x^2+6)(1/2)(x^2+5)^{-1/2}(2x)}{x^2+5}$
$=\dfrac{x(x^2+4)}{(x^2+5)^{3/2}}.$

35. $\left(\dfrac{3}{5}\right)(x^3+6x^2+9)^{-2/5}(3x^2+12x).$
$=\dfrac{9}{5}x(x+4)(x^3+6x^2+9)^{-2/5}.$

37. $7(1-2z).$ **39.** $y=-4x+3.$

41. $y=\dfrac{1}{12}x+\dfrac{4}{3}.$ **43.** $\dfrac{5}{7}\approx 0.714; 71.4\%.$

45. $dr/dq=20-0.2q.$ **47.** 0.569, 0.431.

49. $dr/dq=450-q.$

51. $dc/dq=0.125+0.00878q; 0.7396.$

53. 84 huevos/mm. **55. a.** $\dfrac{4}{3}$; **b.** $\dfrac{1}{24}.$

57. 8π pies^3/pie.

59. $4q-\dfrac{10{,}000}{q^2}.$ **61. a.** 240; **b.** $\dfrac{1}{100}$;
c. No, como $dr/dm < 300$ cuando $m=80$. **63.** 0.305.
65. $-0.32.$

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 10 (página 497)

1. La pendiente es mayor, por arriba de 0.9. Más de eso es gasto, menos es ahorro. **3.** Gasto \$705, ahorro \$295.
5. Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.1

1. $\dfrac{dq}{dp}=\dfrac{12p}{3p^2+4}.$ **2.** $\dfrac{dR}{dI}=\dfrac{1}{I\ln 10}.$

EJERCICIO 11.1 (página 504)

1. $\dfrac{4}{x}.$ **3.** $\dfrac{3}{3x-7}.$ **5.** $\dfrac{2}{x}.$ **7.** $-\dfrac{2x}{1-x^2}.$

9. $\dfrac{6p^2+3}{2p^3+3p}=\dfrac{3(2p^2+1)}{p(2p^2+3)}.$

11. $t\left(\dfrac{1}{t}\right)+(\ln t)=1+\ln t.$

13. $\dfrac{4x^2}{4x+3}+2x\ln(4x+3).$ **15.** $\dfrac{8}{(\ln 3)(8x-1)}.$

17. $2x\left[1+\dfrac{1}{(\ln 2)(x^2+4)}\right].$

19. $\dfrac{z\left(\dfrac{1}{z}\right)-(\ln z)(1)}{z^2}=\dfrac{1-\ln z}{z^2}.$

21. $\dfrac{(\ln x)(2x)-(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{x\ln^2 x}.$

23. $\dfrac{3(2x+4)}{x^2+4x+5}=\dfrac{6(x+2)}{x^2+4x+5}.$ **25.** $\dfrac{9x}{1+x^2}.$

27. $\dfrac{2}{1-t^2}.$ **29.** $\dfrac{x}{1-x^4}.$ **31.** $\dfrac{4x}{x^2+2}+\dfrac{3x^2+1}{x^3+x-1}.$

33. $\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{2x+1}.$ **35.** $\dfrac{2(x^2+1)}{2x+1}+2x\ln(2x+1).$

37. $\dfrac{3(1+\ln^2 x)}{x}.$ **39.** $\dfrac{4\ln^3(ax)}{x}.$

41. $\dfrac{x}{2(x-1)}+\ln\sqrt{x-1}.$ **43.** $\dfrac{3}{2x\sqrt{4+3\ln x}}.$

45. $y=4x-12.$ **47.** $\dfrac{\ln(3)-1}{\ln^2 3}.$ **49.** $\dfrac{25}{7}.$

51. $\dfrac{dq}{dp}=\dfrac{20}{2p+1}.$ **53.** $\dfrac{6a}{(T-a^2+aT)(a-T)}.$

57. 1.36.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.2

1. $\dfrac{dT}{dt}=Cke^{kt}.$

EJERCICIO 11.2 (página 509)

1. $7e^x.$ **3.** $2xe^{x^2+4}.$ **5.** $-5e^{9-5x}.$

7. $(6r+4)e^{3r^2+4r+4}=2(3r+2)e^{3r^2+4r+4}.$

9. $x(e^x)+e^x(1)=e^x(x+1).$ **11.** $2xe^{-x^2}(1-x^2).$

13. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{3}.$ **15.** $(6x)4^{3x^2}\ln 4.$ **17.** $\dfrac{2e^{2w}(w-1)}{w^3}.$

19. $\dfrac{e^{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$ **21.** $5x^4-5^x\ln 5.$ **23.** $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$

25. 1. **27.** $(1+\ln x)e^{x\ln x}.$ **29.** $-e.$

31. $y-e^{-2}=e^{-2}(x+2)$ o $y=e^{-2}x+3e^{-2}.$

33. $dp/dq=-0.015e^{-0.001q}, -0.015e^{-0.5}.$

35. $dc/dq=10e^{q/700}; 10e^{0.5}; 10e.$ **37.** $-5.$

39. $e.$ **41.** $100e^{-2}.$ **47.** $-b(10^{A-6M})\ln 10.$

51. 0.0036. **53.** 0.68.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.3

1. $\dfrac{dP}{dt}=0.5(P-P^2).$

2. $\dfrac{dV}{dt}=4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$ y $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{r=12}=2880\pi$ pulgadas/minuto.

3. La parte superior de la escalera está resbalando a una velocidad de $\dfrac{9}{4}$ pies/segundo.

EJERCICIO 11.3 (página 516)

1. $-\dfrac{x}{4y}.$ **3.** $\dfrac{7}{12y^3}.$ **5.** $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$ **7.** $-\dfrac{y^{1/4}}{x^{1/4}}.$ **9.** $-\dfrac{y}{x}.$

11. $\dfrac{11-y}{x-1}.$ **13.** $\dfrac{4y-2x^2}{y^2-4x}.$ **15.** $\dfrac{6y^{2/3}}{3y^{1/6}+2}.$

17. $\dfrac{1-6xy^3}{1+9x^2y^2}.$ **19.** $\dfrac{xe^y-y}{x(\ln x-xe^y)}.$ **21.** $-\dfrac{e^y}{xe^y+1}.$

23. $6e^{3x}(1+e^{3x})(x+y)-1.$ **25.** $-\dfrac{3}{5}.$

27. $0; -\dfrac{4x_0}{9y_0}.$ **29.** $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}.$ **31.** $\dfrac{dq}{dp}=-\dfrac{1}{2q}.$

33. $\dfrac{dq}{dp}=-\dfrac{(q+5)^3}{40}.$ **35.** $-\lambda I.$ **37.** $1.5E\ln 10.$

39. $-\dfrac{V}{0.4T}=-2.5\dfrac{V}{T}.$ **41.** $\dfrac{3}{8}.$

EJERCICIO 11.4 (página 520)

1. $(x+1)^2(x-2)(x^2+3)\left[\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2x}{x^2+3}\right].$

3. $(3x^2-1)^2(2x+5)^3\left[\dfrac{18x^2}{3x^3-1}+\dfrac{6}{2x+5}\right]$.

5. $\dfrac{\sqrt{x+1}\,\sqrt{x^2-2}\,\sqrt{x+4}}{2}$.
$\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-2}+\dfrac{1}{x+4}\right]$.

7. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}\left[\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{2}{1-2x}\right]$.

9. $\dfrac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}\left[\dfrac{4x}{x^2+1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{3x+2}\right]$.

11. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{3x-4}}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{3x-4}\right]$.

13. $x^{2x+1}\left(\dfrac{2x+1}{x}+2\ln x\right)$. **15.** $\dfrac{x^{1/x}(1-\ln x)}{x^2}$.

17. $2(3x+1)^{2x}\left[\dfrac{3x}{3x+1}+\ln(3x+1)\right]$.

19. $4e^x x^{3x}(4+3\ln x)$. **21.** 12. **23.** $y=96x+36$.

25. $y=6ex-3e$. **27.** $\dfrac{1}{3e^{13}}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.5

1. $\dfrac{d^2h}{dt^2}=-32$ pies/seg^2. (*Nota*: valores negativos indican la dirección hacia abajo.)
2. $c''(3)=14$ dólares/unidad^2.

EJERCICIO 11.5 (página 524)

1. 24. **3.** 0. **5.** e^x. **7.** $3+2\ln x$. **9.** $-\dfrac{10}{p^6}$.

11. $-\dfrac{1}{4(9-r)^{3/2}}$. **13.** $\dfrac{50}{(5x-6)^3}$. **15.** $\dfrac{4}{(x-1)^3}$.

17. $-\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+6)^2}\right]$. **19.** $e^z(z^2+4z+2)$.

21. 32. **23.** $-\dfrac{1}{y^3}$. **25.** $-\dfrac{4}{y^3}$. **27.** $\dfrac{1}{8x^{3/2}}$.

29. $\dfrac{2(y-1)}{(1+x)^2}$. **31.** $\dfrac{y}{(1-y)^3}$. **33.** $-\dfrac{16}{125}$.

35. $300(5x-3)^2$. **37.** 0.6. **39.** ± 1.
41. -4.99 y 1.94.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 11 (página 526)

1. $2e^x+e^{x^2}(2x)=2(e^x+xe^{x^2})$.

3. $\dfrac{1}{r^2+5r}(2r+5)=\dfrac{2r+5}{r(r+5)}$.

5. $e^{x^2+4x+5}(2x+4)=2(x+2)e^{x^2+4x+5}$.

7. $e^x(2x)+(x^2+2)e^x=e^x(x^2+2x+2)$.

9. $\dfrac{\sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)}}{2}\left[\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x-9}\right]$.

11. $\dfrac{e^x\left(\dfrac{1}{x}\right)-(\ln x)(e^x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x\ln x}{xe^x}$.

13. $\dfrac{2}{q+1}+\dfrac{3}{q+2}$. **15.** $-7(\ln 10)2^{-7x}$.

17. $\dfrac{4e^{2x+1}(2x-1)}{x^2}$. **19.** $\dfrac{16}{(8x+5)\ln 2}$.

21. $\dfrac{1+2t+3t^2}{1+t+t^2+t^3}$. **23.** $(x+1)^{x+1}[1+\ln(x+1)]$.

25. $2\left(\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2-t}\right)(-1)=\dfrac{5t-8}{2t(t-2)}$.

27. $y\left[\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)(2x)+\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{1}{x^2+9}\right)(2x)-\dfrac{4}{11}\left(\dfrac{1}{x^3+6x}\right)(3x^2+6)\right]$
$=y\left[\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{8x}{9(x^2+9)}-\dfrac{12(x^2+2)}{11(x^3+6x)}\right]$,
donde y es como se dio en el problema.

29. $(x^x)^x(x+2x\ln x)$. **31.** 4. **33.** -2.

35. $y=6x+6(1-\ln 2)$ o $y=6x+6-\ln 64$.

37. $(0, 4\ln 2)$. **39.** 18. **41.** 2. **43.** $-\dfrac{y}{x+y}$.

45. $\dfrac{xy^2-y}{2x-x^2y}$. **47.** $\dfrac{4}{9}$.

49. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{y}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{y+1}{y^3}$.

51. $f'(t)=0.008e^{-0.01t}+0.00004e^{-0.0002t}$. **53.** 0.90.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 11 (página 528)

1. La figura 11.5 muestra que la población alcanza su tamaño final en alrededor de 45 días.
3. La recta tangente no coincidirá de manera exacta con la curva en la primera vez. Pasos más pequeños de tiempo podrían reducir el error.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.1

1. Existe un máximo relativo cuando $x=1$, y un mínimo relativo cuando $x=3$.
2. La droga está en su concentración máxima 2 horas después de su aplicación.

EJERCICIO 12.1 (página 541)

1. Decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(3,\infty)$; creciente en $(-1,3)$; mínimo relativo $(-1,-1)$; máximo relativo $(3,4)$.
3. Decreciente en $(-\infty,-2)$ y $(0,2)$; creciente en $(-2,0)$ y $(2,\infty)$; mínimo relativo $(-2,1)$ y $(2,1)$; no hay máximo relativo.
5. Creciente en $(-\infty,-1)$ y $(3,\infty)$; decreciente en $(-1,3)$; máximo relativo cuando $x=-1$; mínimo relativo cuando $x=3$.
7. Decreciente en $(-\infty,-1)$; creciente en $(-1,3)$ y $(3,\infty)$; mínimo relativo cuando $x=-1$.
9. Creciente en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$; no hay mínimo relativo ni máximo relativo.
11. Creciente en $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$; decreciente en $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$; máximo relativo cuando $x=\dfrac{1}{2}$.
13. Decreciente en $(-\infty,-5)$ y $(1,\infty)$; creciente en $(-5,1)$; mínimo relativo cuando $x=-5$; máximo relativo cuando $x=1$.
15. Decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$; creciente en $(-1,0)$ y $(1,\infty)$; máximo relativo cuando $x=0$; mínimo relativo cuando $x=\pm 1$.

17. Creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$; decreciente en $(1, 3)$; máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 3$.

19. Creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$; decreciente en $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$; máximo relativo cuando $x = -\frac{2}{3}$; mínimo relativo cuando $x = \frac{5}{2}$.

21. Creciente en $\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$ y $\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$; decreciente en $\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$; mínimo relativo cuando $x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

23. Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$; máximo relativo cuando $x = -1$; mínimo relativo cuando $x = 1$.

25. Decreciente en $(-\infty, -4)$ y $(0, \infty)$; creciente en $(-4, 0)$; mínimo relativo cuando $x = -4$; máximo relativo cuando $x = 0$.

27. Creciente en $(-\infty, -\sqrt{2})$ y $(0, \sqrt{2})$; decreciente en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = \pm\sqrt{2}$; mínimo relativo cuando $x = 0$.

29. Creciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$; nunca es decreciente; no tiene extremos relativos.

31. Decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$; no tiene extremos relativos.

33. Decreciente en $(0, \infty)$; no tiene extremos relativos.

35. Decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(4, \infty)$; creciente en $(0, 2)$ y $(2, 4)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = 4$.

37. Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(-1, \infty)$; decreciente en $(-3, -2)$ y $(-2, -1)$; máximo relativo cuando $x = -3$; mínimo relativo cuando $x = -1$.

39. Decreciente en $\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{29}}{5}\right)$ y $\left(\frac{-2+\sqrt{29}}{5}, \infty\right)$; creciente en $\left(\frac{-2-\sqrt{29}}{5}, \frac{-2+\sqrt{29}}{5}\right)$; mínimo relativo cuando $x = \frac{-2-\sqrt{29}}{5}$; máximo relativo cuando $x = \frac{-2+\sqrt{29}}{5}$.

41. Creciente en $(-\infty, -2)$, $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$ y $(5, \infty)$; decreciente en $\left(\frac{11}{5}, 5\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{11}{5}$; mínimo relativo cuando $x = 5$.

43. Creciente en $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{18}{7}\right)$ y $(6, \infty)$; decreciente en $\left(\frac{18}{7}, 6\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{18}{7}$; mínimo relativo cuando $x = 6$.

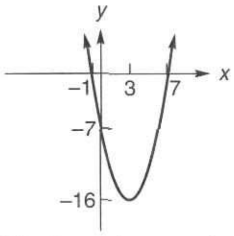
45. Decreciente en $(-\infty, \infty)$; no tiene extremos relativos.

47. Decreciente en $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; creciente en $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$; mínimo relativo cuando $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

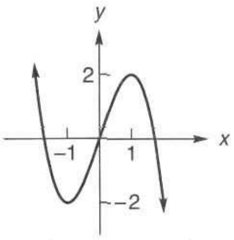
49. Decreciente en $(-\infty, 0)$; creciente en $(0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 0$.

51. Decreciente en $(0, 1)$; creciente en $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; no tiene máximos relativos.

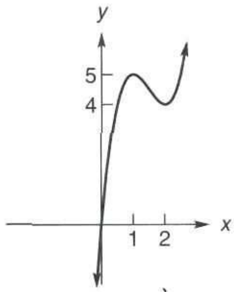
53. Decreciente en $(-\infty, 3)$; creciente en $(3, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 3$; intersecciones: $(7, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -7)$.



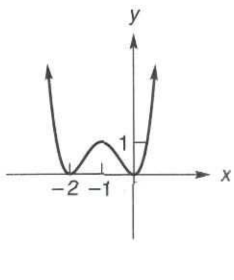
55. Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; creciente en $(-1, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; máximo relativo cuando $x = 1$; simétrica con respecto al origen; intersecciones: $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$.



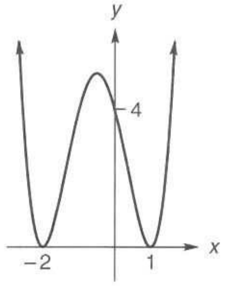
57. Creciente en $(-\infty, 1)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(1, 2)$; máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 2$; intersección: $(0, 0)$.



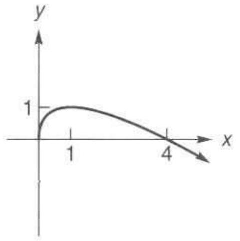
59. Creciente en $(-2, -1)$ y $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-1, 0)$; máximo relativo cuando $x = -1$; mínimo relativo cuando $x = -2, 0$; intersecciones $(0, 0)$, $(-2, 0)$.



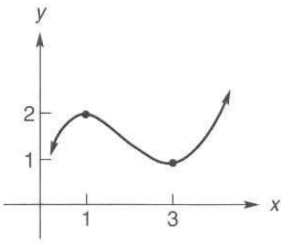
61. Decreciente en $(-\infty, -2)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; creciente en $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -2, 1$; máximo relativo cuando $x = -\frac{1}{2}$; intersecciones: $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$.



63. Decreciente en $(1, \infty)$; creciente en $(0, 1)$; máximo relativo cuando $x = 1$; intersecciones: $(0, 0)$, $(4,0)$.



65.



69. Nunca.

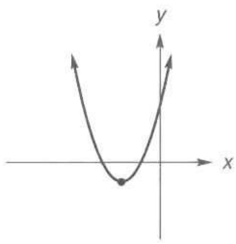
71. 40. **75. a.** 25,300; **b.** 4; **c.** 17,200.
77. Mínimo relativo: $(-4.10, -2.21)$.
79. Máximo relativo: $(2.74, 3.74)$; mínimo relativo: $(-2.74, -3.74)$.
81. Mínimo relativo: 0, 1.50, 2.00; máximo relativo: 0.57, 1.77.
83. a. $f'(x) = 4 - 6x - 3x^2$.
c. Decreciente: $(-\infty, -2.53)$, $(0.53, \infty)$; creciente: $(-2.53, 0.53)$.

EJERCICIO 12.2 (página 546)

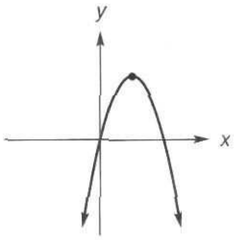
1. Máximo: $f(3) = 6$; mínimo: $f(1) = 2$.
3. Máximo: $f(0) = 1$; mínimo: $f(2) = -\frac{19}{3}$.
5. Máximo: $f(3) = 84$; mínimo: $f(1) = -8$.
7. Máximo: $f(-2) = 56$; mínimo: $f(-1) = -2$.
9. Máximo: $f(\sqrt{2}) = 4$; mínimo $f(2) = -16$.
11. Máximo: $f(0) = f(3) = 2$; mínimo: $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{73}{4}$.
13. Máximo: $f(3) \approx 2.08$; mínimo: $f(0) = 0$.
15. a. $-3.22, -0.78$; **b.** 2.75; **c.** 9; **d.** 14,283.

EJERCICIO 12.3 (página 552)

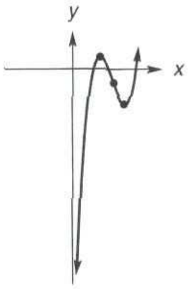
1. Cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(0, \frac{3}{2}\right)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, \frac{3}{2}$.
3. Cóncava hacia arriba $(-\infty, 1)$, $(1, 7)$; cóncava hacia abajo $(7, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 7$.
5. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; no tiene puntos de inflexión.
7. Cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$.
9. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -1)$; cóncava hacia arriba $(-1, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = -1$.
11. Cóncava hacia abajo $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(\frac{7}{4}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = \frac{7}{4}$.
13. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$; puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.
15. Cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$.
17. Cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$; puntos de inflexión cuando $x = -\frac{7}{2}, \frac{1}{3}$.
19. Cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = 0, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
21. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{5}, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$; puntos de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}$.
23. Cóncava hacia abajo $(-\infty, 1)$; cóncava hacia arriba $(1, \infty)$.
25. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; puntos de inflexión cuando $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
27. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -3)$, $\left(-3, \frac{2}{7}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(\frac{2}{7}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = \frac{2}{7}$.
29. Cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.
31. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -2)$; cóncava hacia arriba $(-2, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = -2$.
33. Cóncava hacia abajo $(0, e^{3/2})$; cóncava hacia arriba $(e^{3/2}, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = e^{3/2}$.
35. Intersecciones $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$; decreciente en $(-\infty, -2)$; creciente en $(-2, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.



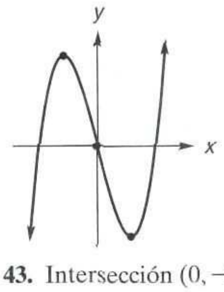
37. Intersecciones $(0, 0)$, $(4, 0)$; creciente en $(-\infty, 2)$; decreciente en $(2, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$.



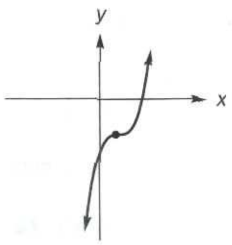
39. Intersección $(0, -19)$; creciente en $(-\infty, 2)$, $(4, \infty)$; decreciente en $(2, 4)$; máximo relativo cuando $x = 2$; mínimo relativo cuando $x = 4$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 3)$; cóncava hacia arriba $(3, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 3$.



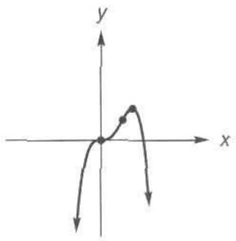
41. Intersecciones $(0, 0)$, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; creciente en $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; decreciente en $(-2, 2)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



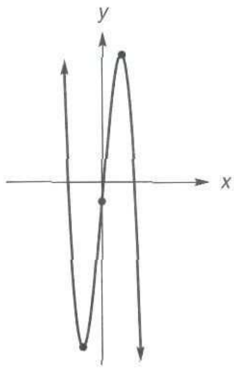
43. Intersección $(0, -3)$; creciente en $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$; no tiene máximos ni mínimos relativos; cóncava hacia abajo $(-\infty, 1)$; cóncava hacia arriba $(1, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 1$.



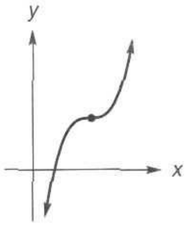
45. Intersecciones $(0, 0)$, $(4/3, 0)$; creciente en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$; decreciente en $(1, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(0, 2/3)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$, $(2/3, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, x = 2/3$.



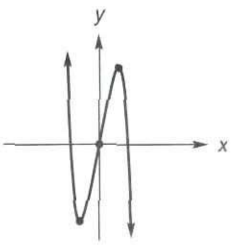
47. Intersección $(0, -2)$; decreciente en $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; creciente en $(-2, 2)$; mínimo relativo cuando $x = -2$; máximo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$.



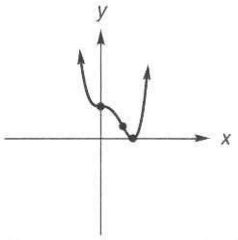
49. Intersección $(0, -6)$; creciente en $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 2)$; cóncava hacia arriba $(2, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 2$.



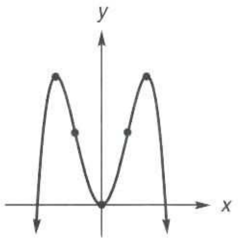
51. Intersecciones $(0, 0)$, $(\pm \sqrt[4]{5}, 0)$; decreciente en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; creciente en $(-1, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; máximo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



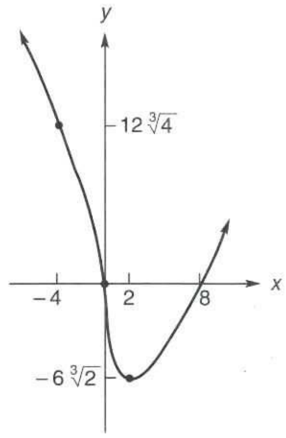
53. Intersecciones $(0, 1), (1, 0)$; decreciente en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$; creciente en $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0), (2/3, \infty)$; cóncava hacia abajo $(0, 2/3)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, x = 2/3$.



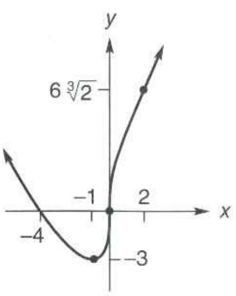
55. Intersecciones $(0, 0), (\pm 2, 0)$; creciente en $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$; decreciente en $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = \pm\sqrt{2}$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$; puntos de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{2/3}$; simétrica con respecto al eje y.



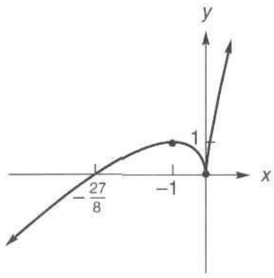
57. Intersecciones $(0, 0), (8, 0)$; decreciente en $(-\infty, 0), (0, 2)$; creciente en $(2, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -4), (0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-4, 0)$; puntos de inflexión cuando $x = -4, x = 0$.



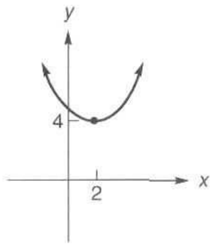
59. Intersecciones $(0, 0), (-4, 0)$; decreciente en $(-\infty, -1)$; creciente en $(-1, 0), (0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0), (2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(0, 2)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, x = 2$.



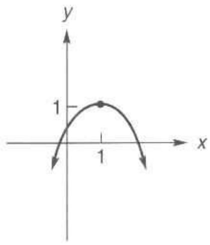
61. Intersecciones $(0, 0)$, $\left(-\dfrac{27}{8}, 0\right)$; creciente en $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$; decreciente en $(-1, 0)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = -1$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0), (0, \infty)$.



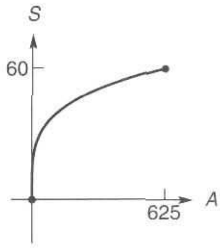
63.



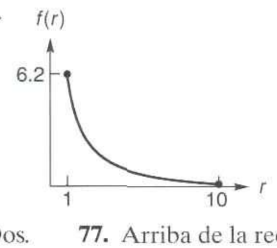
65.



69.



73. b.



c. 0.26.

75. Dos. **77.** Arriba de la recta tangente; cóncava hacia arriba. **79.** $-2.61, -0.26$.

EJERCICIO 12.4 (página 556)

1. Mínimo relativo cuando $x = \dfrac{5}{2}$; mínimo absoluto.

3. Máximo relativo cuando $x = \dfrac{1}{4}$; máximo absoluto.

5. Máximo relativo cuando $x = -3$; mínimo relativo cuando $x = 3$.

7. Mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = 2$.

9. La prueba falla, cuando $x = 0$ existe un mínimo relativo por la prueba de la primera derivada.

11. Máximo relativo cuando $x = -\dfrac{1}{3}$; mínimo relativo cuando $x = \dfrac{1}{3}$.

13. Mínimos relativos cuando $x = -5, -2$; máximo relativo cuando $x = -\dfrac{7}{2}$.

EJERCICIO 12.5 (página 564)

1. $y = 1, x = 1.$ **3.** $y = \frac{1}{2}, x = -\frac{3}{2}.$

5. $y = 0, x = 0.$ **7.** $y = 0, x = 1, x = -1.$

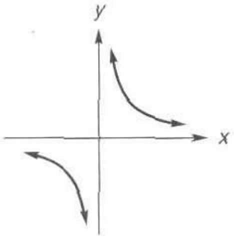
9. Ninguna. **11.** $y = 2, x = 2, x = -3.$

13. $y = -7, x = -2\sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}.$ **15.** $y = 7, x = 6.$

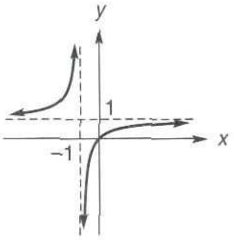
17. $x = 0, x = -1.$ **19.** $y = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{2}.$

21. $y = \frac{1}{2}, x = -\frac{4}{3}.$ **23.** $y = 4.$

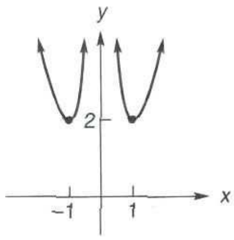
25. Decreciente $(-\infty, 0), (0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; simétrica con respecto al origen; asíntotas $x = 0, y = 0.$



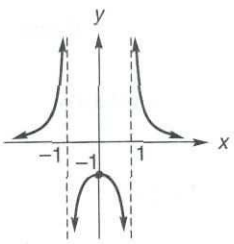
27. Intersección $(0, 0)$; creciente en $(-\infty, -1), (-1, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$; cóncava hacia abajo $(-1, \infty)$; asíntotas $x = -1, y = 1.$



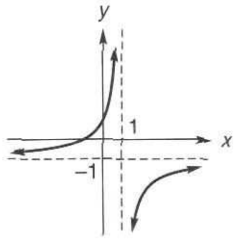
29. Decreciente en $(-\infty, -1), (0, 1)$; creciente en $(-1, 0), (1, \infty)$; mínimos relativos cuando $x = \pm 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0), (0, \infty)$; simétrica con respecto al eje y; asíntota $x = 0.$



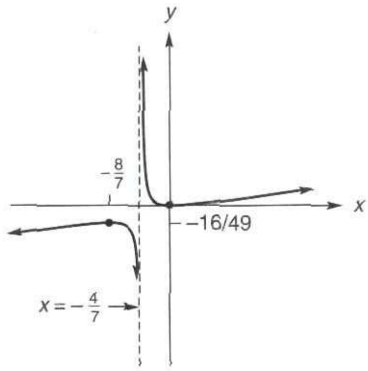
31. Intersección $(0, -1)$; creciente en $(-\infty, -1), (-1, 0)$; decreciente en $(0, 1), (1, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -1), (1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$; asíntotas $x = 1, x = -1, y = 0$; simétrica con respecto al eje y.



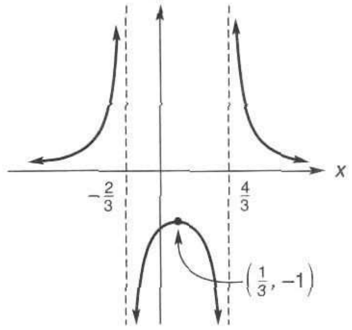
33. Intersecciones $(-1, 0), (0, 1)$; creciente en $(-\infty, 1), (1, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 1)$; cóncava hacia abajo $(1, \infty)$; asíntotas $x = 1, y = -1.$



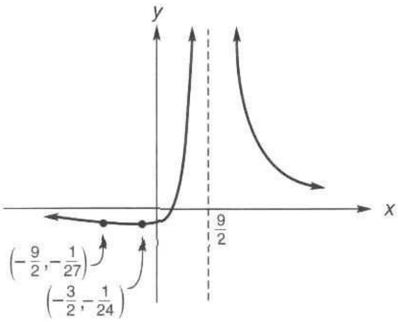
35. Intersección $(0, 0)$; creciente en $\left(-\infty, -\frac{8}{7}\right), (0, \infty)$; decreciente en $\left(-\frac{8}{7}, -\frac{4}{7}\right), \left(-\frac{4}{7}, 0\right)$; máximo relativo cuando $x = -\frac{8}{7}$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $\left(-\infty, -\frac{4}{7}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{4}{7}, \infty\right)$; asíntotas $x = -\frac{4}{7}.$



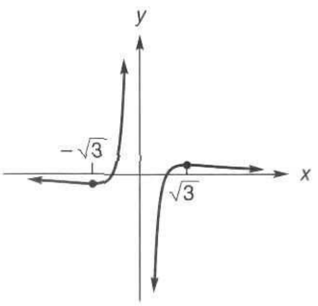
37. Intersección $\left(0, -\frac{9}{8}\right)$; creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; decreciente en $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{1}{3}$; cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$; asíntotas $y = 0$, $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}.$



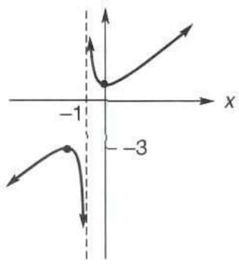
39. Intersección $\left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{27}\right)$; decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$; creciente en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; mínimo relativo cuando $x = -\frac{3}{2}$; cóncava hacia abajo $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = -\frac{9}{2}$; asíntotas $x = \frac{9}{2}$, $y = 0$.



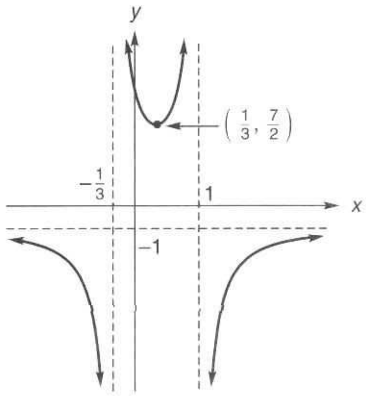
41. Intersección $(-1, 0), (1, 0)$; creciente en $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$; decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = \sqrt{3}$; mínimo relativo cuando $x = -\sqrt{3}$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{6}), (0, \sqrt{6})$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{6}, 0), (\sqrt{6}, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{6}$; asíntotas $x = 0$, $y = 0$; simétrica con respecto al origen.



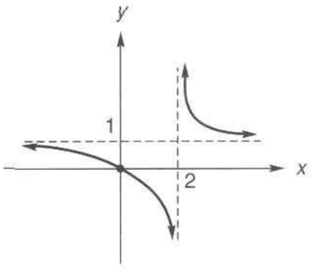
43. Intersección $(0, 1)$; creciente en $(-\infty, -2), (0, \infty)$; *decreciente en* $(-2, -1), (-1, 0)$; *máximo relativo cuando* $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -1)$; cóncava hacia arriba $(-1, \infty)$; asíntota $x = -1$.



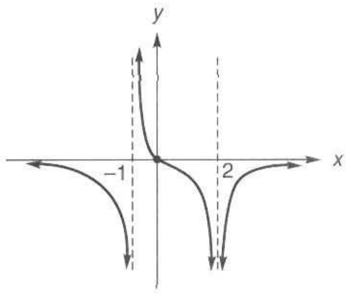
45. Intersección $(0, 5)$; decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; creciente en $\left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = \frac{1}{3}$; cóncava hacia abajo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right), (1, \infty)$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; asíntotas $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$, $y = -1$.



47.



49.



55. $x \approx \pm 2.45$, $x \approx 0.67$, $y = 2$. **57.** $y \approx 0.48$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 12 (página 567)

1. $y = 3, x = 4, x = -4$. **3.** $y = \frac{5}{9}, x = -\frac{2}{3}$.

5. $x = 0, 4$. **7.** $x = -\frac{15}{8}, -1$.

9. Creciente en $(1, 3)$; decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$.
11. Decreciente en $(-\infty, -\sqrt{6}), (0, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \sqrt{6})$; creciente en $(-\sqrt{6}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{6}, \infty)$.
13. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

15. Cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

17. Cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

19. Máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 2$. **21.** Mínimo relativo cuando $x = -1$.

23. Máximo relativo cuando $x = -\frac{2}{5}$; mínimo relativo cuando $x = 0$. **25.** En $x = 3$. **27.** En $x = 1$.

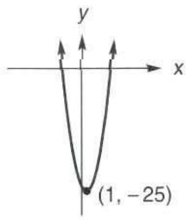
29. En $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

31. Máximo: $f(2) = 16$; mínimo: $f(1) = -1$.

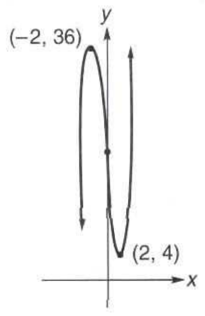
33. Máximo: $f(0) = 0$; mínimo: $f\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{1}{120}$.

35. a. f no tiene extremos relativos.
b. f es cóncava hacia abajo en $(1, 3)$; puntos de inflexión: $(1, 2e^{-1}), (3, 10e^{-3})$.

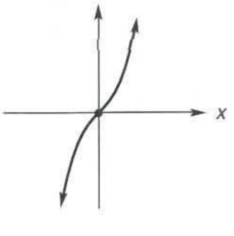
37. Intersecciones $(-4, 0), (6, 0), (0, -24)$; creciente en $(1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 1)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.



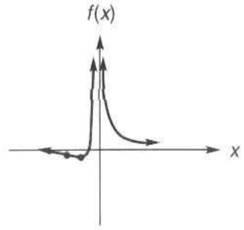
39. Intersección $(0, 20)$; creciente en $(-\infty, -2), (2, \infty)$; decreciente en $(-2, 2)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; punto de inflexión cuando $x = 0$.



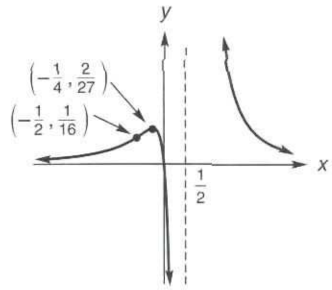
41. Intersección $(0, 0)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



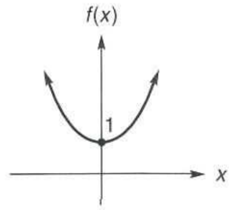
43. Intersección $(-5, 0)$; creciente en $(-10, 0)$; decreciente en $(-\infty, -10), (0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -10$; cóncava hacia arriba $(-15, 0), (0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -15)$; punto de inflexión cuando $x = -15$; asíntota horizontal $y = 0$; asíntota vertical $x = 0$.



45. Intersecciones $(0, 0)$; creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$; decreciente en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; máximo relativo cuando $x = -\frac{1}{4}$; cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; punto de inflexión cuando $x = -\frac{1}{2}$; asíntota horizontal $y = 0$; asíntota vertical $x = \frac{1}{2}$.



47. Intersecciones $(0, 1)$; creciente en $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$; simétrica con respecto al eje y.



49. a. Falso; **b.** Falso; **c.** Verdadero; **d.** Falso; **e.** Falso.
51. $q > 2$.
57. Máximo relativo $(-1.32, 12.28)$; mínimo relativo $(0.44, 1.29)$. **59.** $x = -0.60$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 12 (página 570)

1. Los datos para 1998-2000 caen en el mismo patrón que los datos para 1959-1969.

EJERCICIO 13.1 (página 582)

1. 13 y 13. **3.** 300 pies por 250 pies. **5.** 100 unidades.
7. \$15. **9. a.** 110 gramos; **b.** $51\frac{9}{11}$ gramos.
11. 525 unidades; precio = \$51; utilidad = \$10,525.
13. \$22. **15.** 120 unidades; \$86,000. **17.** 625 unidades; \$4.

19. \$17; \$86,700. **21.** 4 pies por 4 pies por 2 pies.
23. 2 pulgadas; 128 pulgadas^3.
27. 130 unidades, $p = \$340$, $P = \$36,980$; 125 unidades, $p = \$350$, $P = \$34,175$. **29.** 250 por lote (4 lotes). **31.** 35.
33. 60 mi/h. **35.** 7; \$1000.
37. $5 - \sqrt{3}$ toneladas; $5 - \sqrt{3}$ toneladas.
41. 10 cajas; \$50.55.

EJERCICIO 13.2 (página 591)

1. $3\,dx$. **3.** $\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+6}}\,dx$. **5.** $-\frac{2}{x^3}\,dx$.
7. $\frac{2x}{x^2+7}\,dx$. **9.** $3e^{2x^2+3}(12x^2+4x+3)\,dx$.
11. $\Delta y = -0.14$, $dy = -0.14$.
13. $\Delta y = -2.5$, $dy = -2.75$.
15. $\Delta y \approx 0.073$, $dy = \frac{3}{40} = 0.075$. **17. a.** -1; **b.** 2.9.
19. 9.95. **21.** $4\frac{1}{32}$. **23.** -0.03. **25.** 1.01.
27. $\frac{1}{2}$. **29.** $\frac{1}{6p(p^2+5)^2}$. **31.** $-p^2$. **33.** $\frac{1}{33}$.
35. $-\frac{4}{5}$. **37.** 44; 41.80. **39.** 2.04. **41.** 0.7.
43. $(1.69 \times 10^{-11})\pi$ cm^3. **45. c.** 42 unidades.

EJERCICIO 13.3 (página 597)

1. -3, elástica. **3.** -1, elasticidad unitaria.
5. $-\frac{53}{52}$, elástica. **7.** $-\left(\frac{150}{e}-1\right)$, elástica.
9. -1, elasticidad unitaria. **11.** $-\frac{9}{32}$, inelástica.
13. $-\frac{1}{2}$, inelástica.
15. $|\eta| = \frac{10}{3}$ cuando $p = 10$, $|\eta| = \frac{3}{10}$ cuando $p = 3$, $|\eta| = 1$ cuando $p = 6.50$. **17.** -1.2, 0.6% disminuye.
23. b. $\eta = -2.5$, elástica; **c.** 1 unidad;
d. Aumenta, ya que la demanda es elástica.
25. a. $\eta = -\frac{207}{15} \approx -13.8$, elástica; **b.** 27.6%; **c.** Ya que la demanda es elástica, la disminución del precio tiene como resultado un aumento de los ingresos.
27. $\eta = -1.6$; $\frac{dr}{dq} = 30$.
29. Máximo en $q = 5$; mínimo en $q = 95$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 13.4

1. 43 y 1958.

EJERCICIO 13.4 (página 602)

1. 0.25410. **3.** 1.32472. **5.** -2.38769. **7.** 0.33767.
9. 1.90785. **11.** 4.141. **13.** -4.99 y 1.94.
15. 13.33. **17.** 2.880. **19.** 3.45.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 13 (página 604)

1. 20. **3.** 300. **5.** \$2800. **7.** 200 pies por 100 pies.
9. a. 200, \$120; **b.** 300.
11. $\left[\frac{x^2}{x+5} + 2x\ln(x+5)\right]dx$. **13.** $\left(\frac{9}{10}\right)^0$.
15. 0.99. **17.** $\frac{1}{8y+7}$. **19.** Elástica. **21. a.** -1.
23. a. $\frac{200}{3} < p < 100$;
b. $\eta = -\frac{1}{3}$; la demanda disminuye en aproximadamente 1.67%.
25. 0.619 y 1.512.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 13 (página 606)

1. $F = \$40$, $V = \$20$; sí. **3.** No hay diferencia.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.1

1. $\int 28.3\,dq = 28.3q + C$.
2. $\int 0.12t^2\,dt = 0.04t^3 + C$.
3. $\int -\frac{480}{t^3}\,dt = \frac{240}{t^2} + C$.
4. $\int (500 + 300\sqrt{t})dt = 500t + 200t^{3/2} + C$.
5. $S(t) = 0.7t^3 - 32.7t^2 + 491.6t + C$.

EJERCICIO 14.1 (página 616)

1. $5x + C$. **3.** $\frac{x^9}{9} + C$. **5.** $-\frac{5}{6x^6} + C$.
7. $-\frac{2}{9x^9} + C$. **9.** $-\frac{5}{6y^{6/5}} + C$. **11.** $8u + \frac{u^2}{2} + C$.
13. $\frac{y^6}{6} - \frac{5y^2}{2} + C$. **15.** $t^3 - 2t^2 + 5t + C$.
17. $(7 + e)x + C$. **19.** $\frac{x^2}{14} - \frac{3x^5}{20} + C$.
21. $6e^x + C$. **23.** $\frac{x^{9.3}}{9.3} - \frac{9x^7}{7} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + C$.
25. $-\frac{4x^{3/2}}{9} + C$. **27.** $2\sqrt[8]{x} + C$.
29. $\frac{x^4}{12} + \frac{3}{2x^2} + C$. **31.** $\frac{w^3}{2} + \frac{2}{3w} + C$.
33. $\frac{1}{7}(z^2 - 5z) + C$. **35.** $\frac{x^{e+1}}{e+1} + 10e^x + C$.
37. $\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{12x^{5/4}}{5} + C$.
39. $-\frac{3x^{5/3}}{25} - 7x^{1/2} + 3x^2 + C$.
41. $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 15x + C$. **43.** $\frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$.
45. $\frac{4u^3}{3} + 2u^2 + u + C$. **47.** $\frac{2v^3}{3} + 3v + \frac{1}{2v^4} + C$.
49. $\frac{z^3}{6} + \frac{5z^2}{2} + C$. **51.** $x + e^x + C$.
53. No, $F(x) - G(x)$ debe ser una constante.
55. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.2

1. $N(t) = 800t + 200e^t + 6317.37$.
2. $y(t) = 14t^3 + 12t^2 + 11t + 3$.

EJERCICIO 14.2 (página 621)

1. $y = \frac{3x^2}{2} - 4x + 1$. **3.** 18.
5. $y = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{12}$.
7. $y = \frac{x^4}{12} + x^2 - 5x + 13$. **9.** $p = 0.7$.
11. $p = 275 - 0.5q - 0.1q^2$. **13.** $c = 1.35q + 200$.
15. 7715. **17.** $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$.
21. \$80 ($dc/dq = 27.50$ cuando $q = 50$ no es relevante para el problema).

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.3

1. $T(t) = 10e^{-0.5t} + C$. **2.** $35 \ln|t + 1| + C$.

EJERCICIO 14.3 (página 629)

1. $\frac{(x+5)^8}{8} + C$. **3.** $\frac{(x^2+3)^6}{6} + C$.
5. $\frac{3}{5}(y^3 + 3y^2 + 1)^{5/3} + C$. **7.** $-\frac{5(3x-1)^{-2}}{6} + C$.
9. $\frac{1}{3}(2x - 1)^{3/2} + C$. **11.** $\frac{(7x-6)^5}{35} + C$.
13. $\frac{(x^2+3)^{13}}{26} + C$. **15.** $\frac{3}{5}(27 + x^5)^{4/3} + C$.
17. $e^{3x} + C$. **19.** $e^{t^2+t} + C$. **21.** $\frac{1}{14}e^{7x^2} + C$.
23. $-3e^{-2x} + C$. **25.** $\ln|x + 5| + C$.
27. $\ln|x^3 + x^4| + C$. **29.** $-\frac{3}{4}(z^2 - 6)^{-4} + C$.
31. $4 \ln|x| + C$. **33.** $\frac{1}{3}\ln|s^3 + 5| + C$.
35. $-\frac{8}{3}\ln|5 - 3x| + C$.
37. $\frac{2}{15}(5x)^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{5}}{3}x^{3/2} + C$.
39. $\sqrt{x^2 - 4} + C$. **41.** $\frac{1}{2}e^{y^4+1} + C$.
43. $-\frac{1}{6}e^{-2v^3+1} + C$. **45.** $-\frac{1}{5}e^{-5x} + 2e^x + C$.
47. $-\frac{1}{24}(3 - 3x^2 - 6x)^4 + C$. **49.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 6x| + C$.
51. $2 \ln|3 - 2s + 4s^2| + C$. **53.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2 + 1) + C$.
55. $\frac{1}{27}(x^3 - x^6)^{-9} + C$. **57.** $\frac{1}{4}(x^4 + x^2)^2 + C$.
59. $\frac{1}{2}(4 - 9x - 3x^2)^{-4} + C$. **61.** $\frac{1}{6}e^{4x^3+3x^2-4} + C$.
63. $-\frac{1}{25}(8 - 5x^2)^{5/2} + C$.
65. $\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \sqrt{2x} + C = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \sqrt{2}x^{1/2} + C$.
67. $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$.
69. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{6(x^6+1)} + C$.
71. $\frac{1}{3}\ln|3x - 5| + \frac{1}{27}(x^3 - x^6)^{-9} + C$.
73. $\frac{2}{9}(3x + 1)^{3/2} - \ln\sqrt{x^2 + 3} + C$. **75.** $2e^{\sqrt{x}} + C$.
77. $-\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + C$. **79.** $\frac{1}{4}\ln^2(x^2 + 2x) + C$.
81. $y = -\frac{1}{6}(3 - 2x)^3 + \frac{11}{2}$.
83. $y = -\ln|x| = \ln|1/x|$. **85.** $160e^{0.05t} + 190$.
87. $\frac{Rr^2}{4K} + B_1 \ln|r| + B_2$.

EJERCICIO 14.4 (página 635)

1. $x^2 + 3x - \ln|x| + C$. **3.** $\frac{1}{3}(2x^3 + 4x + 1)^{3/2} + C$.
5. $-6\sqrt{4 - 5x} + C$. **7.** $\frac{4^{7x}}{7 \ln 4} + C$.
9. $7x^2 - 4e^{(1/4)x^2} + C$.
11. $x^2 - 3x + \frac{2}{3}\ln|3x - 1| + C$.
13. $\frac{3}{2}\ln(e^{2x} + 1) + C$. **15.** $-\frac{1}{7}e^{7/x} + C$.
17. $x^2 + 4 \ln|x^2 - 4| + C$. **19.** $\frac{2}{9}(\sqrt{x} + 2)^3 + C$.
21. $3(x^{1/3} + 2)^5 + C$. **23.** $\frac{1}{2}(\ln^2 x) + C$.
25. $\frac{1}{3}\ln^3(r + 1) + C$. **27.** $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3} + C$.
29. $e^{(x^2+3)/2} + C$. **31.** $8 \ln|\ln(x + 3)| + C$.
33. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2 - 3| + C$.
35. $\ln^{3/2}[(x^2 + 1)^2] + C$.
37. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 1} - (\ln 4)x + C$.
39. $x^2 - 8x - 6 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$.
41. $x + \ln|x - 1| + C$. **43.** $\sqrt{e^{x^2} + 2} + C$.
45. $-\frac{(e^{-x}+6)^3}{3} + C$. **47.** $\frac{1}{5}(x^2 + e)^{5/2} + C$.
49. $\frac{1}{36\sqrt{2}}[(8x)^{3/2} + 3]^{3/2} + C$.
51. $-\frac{2}{3}e^{-\sqrt{s^3}} + C$. **53.** $\frac{x^2}{2} + 2x + C$.
55. $\frac{\ln^2 x}{2} + x + C$. **57.** $p = \frac{100}{q+2}$.
59. $c = 20 \ln|(q + 5)/5| + 2000$.
61. $C = 2(\sqrt{I} + 1)$. **63.** $C = \frac{3}{4}I - \frac{1}{3}\sqrt{I} + \frac{71}{12}$.

65. **a.** \$150 por unidad; **b.** \$15,000; **c.** \$15,300.
67. $2500 - 800\sqrt{5} \approx$ \$711 por acre. **69.** $I = 3$.

EJERCICIO 14.5 (página 640)

1. 35. **3.** 0. **5.** 25. **7.** $-\frac{3}{16}$. **9.** $-\frac{7}{6}$.

11. $\sum_{k=1}^{19} k$. **13.** $\sum_{k=1}^{4} (2k - 1)$. **15.** $\sum_{k=1}^{10} k^2$.

17. 101,475. **19.** 84. **21.** 273. **23.** 8; \$850.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.6

1. \$5975.

EJERCICIO 14.6 (página 648)

1. $\frac{2}{3}$ unidades cuadradas. **3.** $\frac{14}{27}$ unidades cuadradas.

5. $S_n = \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{1}{n}\right) + 4\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 4\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \frac{2(n+1)}{n}$.

7. **a.** $S_n = \frac{n+1}{2n} + 1$; **b.** $\frac{3}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

11. $\frac{1}{3}$ unidades cuadradas. **13.** $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

15. 6. **17.** -18. **19.** $\frac{5}{6}$. **21.** 0. **23.** $\frac{11}{4}$.

25. 4.3 unidades cuadradas. **27.** 2.4. **29.** -25.5.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.7

1. \$32,830. **2.** \$28,750.

EJERCICIO 14.7 (página 657)

1. 14. **3.** $\frac{15}{2}$. **5.** -20. **7.** $\frac{7}{3}$. **9.** $\frac{15}{2}$.

11. $-\frac{7}{6}$. **13.** 0. **15.** $\frac{5}{3}$. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** $-\frac{1}{6}$.

21. $4 \ln 8$. **23.** e^5. **25.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$. **27.** $\frac{3}{4}$.

29. $\frac{38}{9}$. **31.** $\frac{15}{28}$. **33.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **35.** $e + \frac{1}{2e^2} - \frac{3}{2}$.

37. $3 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$. **39.** $\frac{e^3}{2}(e^{12} - 1)$. **41.** $6 + \ln 19$.

43. $\frac{47}{12}$. **45.** $6 - 3e$. **47.** 7. **49.** 0. **51.** $\alpha^{5/2}T$.

53. $\int_b^a -Ax^{-B}dx$. **55.** \$8639. **57.** 1,973,333.

59. \$220. **61.** \$2000. **63.** 696; 492. **65.** $2Ri$.
69. 0.05. **71.** 3.52. **73.** 55.39.

EJERCICIO 14.8 (página 663)

En los problemas del **1** *al* **33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

1. 8. **3.** $\frac{19}{2}$. **5.** 8. **7.** $\frac{19}{3}$. **9.** 9. **11.** $\frac{50}{3}$.

13. 36. **15.** 8. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** 1. **21.** 18.

23. $\frac{26}{3}$. **25.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. **27.** $e^2 - 1$.

29. $\frac{3}{2} + 2\ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4$. **31.** 68. **33.** 2.

35. 19 unidades cuadradas. **37.** **a.** $\frac{1}{16}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{7}{16}$.

39. **a.** $\ln \frac{5}{3}$; **b.** $\ln(4) - 1$; **c.** $2 - \ln 3$.

41. 1.89 unidades cuadradas.
43. 11.41 unidades cuadradas.

EJERCICIO 14.9 (página 670)

1. Área $= \int_{-2}^{3}[(x + 6) - x^2]dx$.

3. Área $=$

$$\int_0^3 [2x - (x^2 - x)]dx + \int_3^4 [(x^2 - x) - 2x]dx.$$

5. Área $= \int_0^1 [(y + 1) - \sqrt{1 - y}]dy$.

7. Área $= \int_{-\sqrt{5}}^{2} [(11 - 2x^2) - (x^2 - 4)]dx$.

En los problemas del **9** *al* **33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

9. $\frac{4}{3}$. **11.** $\frac{16}{3}$. **13.** $8\sqrt{6}$. **15.** 40. **17.** $\frac{125}{6}$.

19. $\frac{9}{2}$. **21.** $\frac{125}{12}$. **23.** $\frac{32}{81}$. **25.** $\frac{44}{3}$.

27. $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. **29.** $\frac{1}{2}$. **31.** $\frac{255}{32} - 4\ln 2$.

33. 12. **35.** $\frac{20}{63}$. **37.** $\frac{8}{3m^3}$ unidades cuadradas.

39. $2^{4/3}$. **41.** 4.76 unidades cuadradas.
43. 7.26 unidades cuadradas.

EJERCICIO 14.10 (página 674)

1. EC = 25.6, EP = 38.4.
3. EC = $50 \ln(2) - 25$, EP = 1.25.
5. EC = 800, EP = 1000. **7.** \$426.67. **9.** \$254,000.
11. EC $\approx$ 1197, EP $\approx$ 477.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 14 (página 677)

1. $\frac{x^4}{4} + x^2 - 7x + C$. **3.** $\frac{117}{2}$.

5. $-3(x + 5)^{-2} + C$. **7.** $2\ln|x^3 - 6x + 1| + C$.

9. $\frac{11\sqrt[3]{11}}{4} - 4$. **11.** $\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$.

13. $\frac{4z^{3/4}}{3} - \frac{6z^{5/6}}{5} + C$. **15.** $\frac{1}{3}\ln\frac{10}{3}$.

17. $\frac{2}{27}(3x^3 + 2)^{3/2} + C$. **19.** $\frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}) + C$.

21. $\ln|x| - \frac{2}{x} + C$. **23.** 111. **25.** $\frac{7}{3}$.

27. $4 - 3\sqrt[3]{2}$. **29.** $\frac{3}{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$. **31.** $\frac{3}{2} - 5\ln 2$.

33. $4(x^{3/2} + 1)^{3/2} + C$. **35.** 1. **37.** $\frac{(1 + e^{3x})^3}{9} + C$.

39. $\dfrac{2\sqrt{10^{3x}}}{\ln 10} + C.$ **41.** $y = \dfrac{1}{2}e^{2x} + 3x - 1.$

*En los problemas del **43** al **57** se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

43. $\dfrac{4}{3}.$ **45.** $\dfrac{16}{3}.$ **47.** $\dfrac{125}{6}.$ **49.** $6 + \ln 3.$ **51.** $\dfrac{2}{3}.$

53. 36. **55.** $\dfrac{125}{3}.$ **57.** $e - 1.$

59. $p = 100 - \sqrt{2q}.$ **61.** \$1900. **63.** 0.5507.

65. 15 unidades cuadradas. **67.** $\text{EC} = 166\frac{2}{3}$, $\text{EP} = 53\frac{1}{3}.$

73. 24.71 unidades cuadradas. **75.** $\text{EC} \approx 1148$, $\text{EP} \approx 251.$

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 14 (página 680)

1. a. 225; **b.** 125.
3. a. \$2,002,500; **b.** 18,000; **c.** \$111.25.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.1

1. $S(t) = -40te^{0.1t} + 400e^{0.1t} + 4600.$
2. $P(t) = 0.025t^2 - 0.05t^2 \ln t + 0.05t^2(\ln t)^2 + C.$

EJERCICIO 15.1 (*página 688*)

1. $\dfrac{2}{3}x(x + 5)^{3/2} - \dfrac{4}{15}(x + 5)^{5/2} + C.$

3. $-e^{-x}(x + 1) + C.$ **5.** $\dfrac{y^4}{4}\left[\ln(y) - \dfrac{1}{4}\right] + C.$

7. $x[\ln(4x) - 1] + C.$

9. $10x(x + 1)^{3/2} - 4(x + 1)^{5/2} + C = 2(x + 1)^{3/2}(3x - 2) + C.$

11. $-\dfrac{x}{2(2x + 1)} + \dfrac{1}{4}\ln|2x + 1| + C.$

13. $-\dfrac{1}{x}(1 + \ln x) + C.$ **15.** $e^2(3e^2 - 1).$

17. $\dfrac{1}{2}(1 - e^{-1})$, no se necesita integración por partes.

19. $2(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2}).$

21. $2x(x - 1)\ln(x - 1) - x^2 + C.$

23. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

25. $\dfrac{x^3}{3} + 2e^{-x}(x + 1) - \dfrac{e^{-2x}}{2} + C.$

27. $\dfrac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C.$

29. $\dfrac{2^{2x-1}}{\ln 2} + \dfrac{2^{x+1}x}{\ln 2} - \dfrac{2^{x+1}}{\ln^2 2} + \dfrac{x^3}{3} + C.$

31. $2e^3 + 1$ unidades cuadradas.

33. $\dfrac{298}{15}$ unidades cuadradas.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.2

1. $r(q) = \dfrac{5}{2}\ln\left|\dfrac{3(q + 1)^3}{q + 3}\right|.$
2. $V(t) = 150t^2 - 900\ln(t^2 + 6) + C.$

EJERCICIO 15.2 (página 695)

1. $\dfrac{12}{x + 6} - \dfrac{2}{x + 1}.$ **3.** $1 + \dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{8}{x + 4}.$

5. $\dfrac{4}{x + 1} - \dfrac{9}{(x + 1)^2}.$ **7.** $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}.$

9. $2\ln|x| + 3\ln|x - 1| + C = \ln|x^2(x - 1)^3| + C.$

11. $-3\ln|x + 1| + 4\ln|x - 2| + C = \ln\left|\dfrac{(x - 2)^4}{(x + 1)^3}\right| + C.$

13. $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3x^2}{2} + 2\ln|x - 1| - 2\ln|x + 1|\right] + C = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3x^2}{2} + \ln\left[\dfrac{x - 1}{x + 1}\right]^2\right) + C.$

15. $\ln|x| + 2\ln|x - 4| - 3\ln|x + 3| + C = \ln\left|\dfrac{x(x - 4)^2}{(x + 3)^3}\right| + C.$

17. $\ln|x^6 + 2x^4 - x^2 - 2| + C$, no se requiere de fracciones parciales.

19. $\dfrac{4}{x - 2} - 5\ln|x - 1| + 7\ln|x - 2| + C = \dfrac{4}{x - 2} + \ln\left|\dfrac{(x - 2)^7}{(x - 1)^5}\right| + C.$

21. $4\ln|x| - \ln(x^2 + 4) + C = \ln\left[\dfrac{x^4}{x^2 + 4}\right] + C.$

23. $-\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \dfrac{2}{x - 3} + C.$

25. $5\ln(x^2 + 1) + 2\ln(x^2 + 2) + C = \ln[(x^2 + 1)^5(x^2 + 2)^2] + C.$

27. $\dfrac{3}{2}\ln(x^2 + 1) + \dfrac{1}{x^2 + 1} + C.$

29. $18\ln(4) - 10\ln(5) - 8\ln(3).$

31. $11 + 24\ln\dfrac{2}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 15.3 (página 701)

1. $\dfrac{x}{9\sqrt{9 - x^2}} + C.$ **3.** $-\dfrac{\sqrt{16x^2 + 3}}{3x} + C.$

5. $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x}{6 + 7x}\right| + C.$ **7.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x}\right| + C.$

9. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{4}{5}\ln|4 + 5x| - \dfrac{2}{3}\ln|2 + 3x|\right] + C.$

11. $\dfrac{1}{8}(2x - \ln[4 + 3e^{2x}]) + C.$

13. $2\left[\dfrac{1}{1 + x} + \ln\left|\dfrac{x}{1 + x}\right|\right] + C.$ **15.** $1 + \ln\dfrac{4}{9}.$

17. $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - 3} - 3\ln|x + \sqrt{x^2 - 3}|) + C.$

19. $\dfrac{1}{144}.$ **21.** $e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

23. $2\left(-\dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x} + \ln|2x + \sqrt{4x^2 + 1}|\right) + C.$

25. $\dfrac{1}{9}\left(\ln|1 + 3x| + \dfrac{1}{1 + 3x}\right) + C.$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}x}{\sqrt{7} - \sqrt{5}x}\right|\right) + C.$

29. $\frac{4}{81}\left[\frac{(3x)^6\ln(3x)}{6}-\frac{(3x)^6}{36}\right]+C$

$= x^6[6\ln(3x)-1]+C.$

31. $4(9x-2)(1+3x)^{3/2}+C.$

33. $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-13}|+C.$

35. $-\frac{\sqrt{9-4x^2}}{9x}+C.$

37. $\frac{1}{2\pi}(4\sqrt{x}-\ln|\pi+7e^{4\sqrt{x}}|)+C.$

39. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$ **41.** $(2x^2+1)^{3/2}+C.$

43. $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$ **45.** $\frac{x^4}{4}\left[\ln(x)-\frac{1}{4}\right]+C.$

47. $e^{2x}(2x-1)+C.$

49. $x(\ln x)^2-2x\ln(x)+2x+C.$

51. $\frac{2}{3}(9\sqrt{3}-10\sqrt{2}).$ **53.** $2(2\sqrt{2}-\sqrt{7}).$

55. $\frac{7}{2}\ln(2)-\frac{3}{4}.$ **57.** $\ln\left|\frac{q_n(1-q_0)}{q_0(1-q_n)}\right|.$

59. a. \$37,599; **b.** \$4924. **61. a.** \$5481; **b.** \$535.

EJERCICIO 15.4 (página 704)

1. $\frac{16}{3}.$ **3.** $-1.$ **5.** 0. **7.** 13. **9.** \$12,400.

11. \$3155.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.5

1. 76.90 pies. **2.** 5.77 gramos.

EJERCICIO 15.5 (página 709)

1. 413. **3.** 0.340; $\frac{1}{3}\approx 0.333.$ **5.** 1.388; $\ln 4\approx 1.386.$

7. 0.883. **9.** 2,361,375. **11.** 3.0 unidades cuadradas.

13. $\frac{8}{3}.$ **15.** 0.771. **17.** $\frac{35}{6}$ km^2.

19. a. \$29,750; **b.** \$36,600; **c.** \$5350.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.6

1. $I=I_0e^{-0.0085x}.$

EJERCICIO 15.6 (página 716)

1. $y=-\frac{1}{x^2+C}.$ **3.** $y=(x^2+1)^{3/2}+C.$

5. $y=Ce^x, C>0.$ **7.** $y=Cx, C>0.$

9. $y=\sqrt{2x}.$ **11.** $y=\ln\frac{x^3+3}{3}.$

13. $y=\frac{4x^2+3}{2(x^2+1)}.$ **15.** $y=\sqrt{\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{2}\right)^2-1}.$

17. $y=\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}\right).$ **19.** $c=(q+1)e^{1/(q+1)}.$

21. 46 semanas.

23. $N=40{,}000e^{0.018t}$; $N=40{,}000(1.2)^{t/10}$; 57,600.

25. $2e^{1.08124}$ miles de millones. **27.** 0.01204; 57.57 segundos.

29. 2900 años. **31.** $N=N_0e^{k(t-t_0)}, t\geq t_0.$

33. 12.6 unidades. **35.** $A=400(1-e^{-t/2})$, 157 gramos.

37. a. $V=21{,}000e^{(2\ln 0.9)t}$; **b.** Junio de 2002.

EJERCICIO 15.7 (página 724)

1. 58,800. **3.** 860,000. **5.** 1990. **7. b.** 375.

9. 1:06 A.M. **11.** \$62,500.

13. $N=M-(M-N_0)e^{-kt}.$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.8

1. 20 ml.

EJERCICIO 15.8 (página 729)

1. $\frac{1}{3}.$ **3.** Div. **5.** $\frac{1}{e}.$ **7.** Div. **9.** $-\frac{1}{2}.$ **11.** 0.

13. a. 800; **b.** $\frac{2}{3}.$ **15.** 4,000,000.

17. $\frac{1}{2}$ unidad cuadrada.

19. 20,000 de aumento.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 15 (página 732)

1. $\frac{x^2}{4}[2\ln(x)-1]+C.$ **3.** $5+\frac{9}{4}\ln 3.$

5. $9\ln|3+x|-2\ln|2+3x|+C.$

7. $\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C.$

9. $-\frac{\sqrt{9-16x^2}}{9x}+C.$ **11.** $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$

13. $e^{7x}(7x-1)+C.$ **15.** $\frac{1}{2}\ln|\ln 2x|+C.$

17. $x-\frac{3}{2}\ln|3+2x|+C.$

19. $2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+C.$

21. $2\sqrt{x+1}[\ln(x+1)-2]+C.$ **23.** 34.

25. a. 1.405; **b.** 1.388. **27.** $y=Ce^{x^3+x^2}, C>0.$

29. $\frac{1}{18}.$ **31.** Div. **33.** 144,000. **35.** 0.0005; 90%.

37. $N=\frac{450}{1+224e^{-1.02t}}.$ **39.** 4:16 P.M. **41.** 1.

43. a. 207, 208; **b.** 157, 165; **c.** 41, 41.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 15 (página 734)

1. 114; 69. **5.** Las respuestas pueden variar.

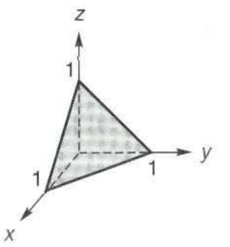
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 16.1

1. a. \$3260; **b.** \$4410.

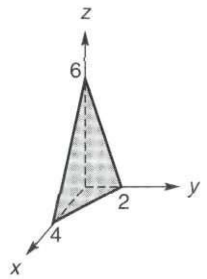
EJERCICIO 16.1 (página 743)

1. 3. **3.** −2. **5.** −1. **7.** 88. **9.** 3.
11. $2x_0 + 2h - 5y_0 + 4$. **13.** 2000. **15.** $y = -4$.
17. $z = 6$.

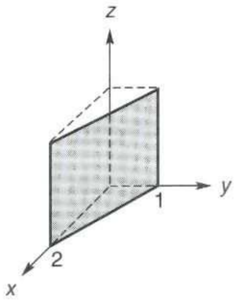
19.



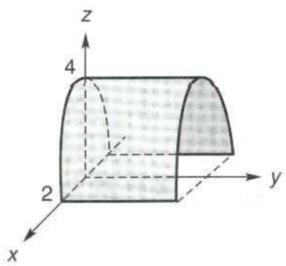
21.



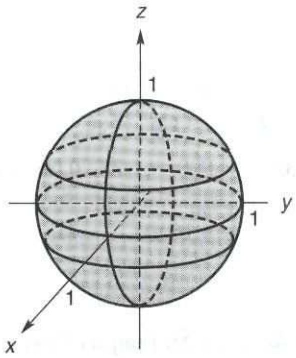
23.



25.



27.



EJERCICIO 16.2 (página 749)

1. $f_x(x, y) = 8x; f_y(x, y) = 6y$.
3. $f_x(x, y) = 0; f_y(x, y) = 2$.
5. $g_x(x, y) = 3x^2y^2 + 4xy - 4y;$
$g_y(x, y) = 2x^3y + 2x^2 - 4x + 3$.
7. $g_p(p, q) = \dfrac{q}{2\sqrt{pq}}; g_q(p, q) = \dfrac{p}{2\sqrt{pq}}$.
9. $h_s(s, t) = \dfrac{2s}{t-3}; h_t(s, t) = -\dfrac{s^2+4}{(t-3)^2}$.
11. $u_{q_1}(q_1, q_2) = \dfrac{3}{4q_1}; u_{q_2}(q_1, q_2) = \dfrac{1}{4q_2}$.
13. $h_x(x, y) = (x^3 + xy^2 + 3y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2};$
$h_y(x, y) = (3x^3 + x^2y + y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2}$.
15. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5ye^{5xy}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 5xe^{5xy}$.
17. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5\left[\dfrac{2x^2}{x^2+y} + \ln(x^2+y)\right]; \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{5x}{x^2+y}$.
19. $f_r(r, s) = \sqrt{r+2s}\,(3r^2 - 2s) + \dfrac{r^3 - 2rs + s^2}{2\sqrt{r+2s}};$
$f_s(r, s) = 2(s - r)\sqrt{r+2s} + \dfrac{r^3 - 2rs + s^2}{\sqrt{r+2s}}$.
21. $f_r(r, s) = -e^{3-r}\ln(7 - s); f_s(r, s) = \dfrac{e^{3-r}}{s-7}$.
23. $g_x(x, y, z) = 6xy + 2y^2z; g_y(x, y, z) = 3x^2 + 4xyz;$
$g_z(x, y, z) = 2xy^2 + 9z^2$.
25. $g_r(r, s, t) = 2re^{s+t};$
$g_s(r, s, t) = (7s^3 + 21s^2 + r^2)e^{s+t};$
$g_t(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$.
27. 50. **29.** $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. **31.** 0. **33.** 26.

39. $-\dfrac{ra}{2\left[1 + a\dfrac{n-1}{2}\right]^2}$.

EJERCICIO 16.3 (página 755)

1. 20. **3.** 1374.5.
5. $\dfrac{\partial P}{\partial k} = 1.208648l^{0.192}k^{-0.236}; \dfrac{\partial P}{\partial l} = 0.303744l^{-0.808}k^{0.764}$.
7. $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A} = -50; \dfrac{\partial q_A}{\partial p_B} = 2; \dfrac{\partial q_B}{\partial p_A} = 4; \dfrac{\partial q_B}{\partial p_B} = -20;$
competitivos .

9. $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A} = -\dfrac{100}{p_A^2 p_B^{1/2}}; \dfrac{\partial q_A}{\partial p_B} = -\dfrac{50}{p_A p_B^{3/2}};$
$\dfrac{\partial q_B}{\partial p_A} = -\dfrac{500}{3p_B p_A^{4/3}}; \dfrac{\partial q_B}{\partial p_B} = -\dfrac{500}{p_B^2 p_A^{1/3}}$; complementarios.
11. $\dfrac{\partial P}{\partial B} = 0.01A^{0.27}B^{-0.99}C^{0.01}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27};$
$\dfrac{\partial P}{\partial C} = 0.01A^{0.27}B^{0.01}C^{-0.99}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27}$.
13. 4480; si un gerente con grado de MAN tiene un año adicional de experiencia en el trabajo antes del grado, el gerente recibiría $4480 por año adicionales de compensación.
15. **a.** −1.015; −0.846;
b. Uno para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$.
17. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{V_F} > 0$ para $V_F > 0$. Así, si x aumenta y V_F y V_S están fijas, entonces g aumenta.

19. a. Cuando $p_A = 8$ y $p_B = 64$, $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -5$ y $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{15}{32}$;
b. La demanda de A disminuye en aproximadamente $\frac{15}{8}$ unidades.

21. a. No; **b.** 70%. **23.** $\eta_{p_A} = -\frac{5}{46}$, $\eta_{p_B} = \frac{1}{46}$.

25. $\eta_{p_A} = -1$, $\eta_{p_B} = -\frac{1}{2}$.

EJERCICIO 16.4 (página 760)

1. $-\frac{x}{z}$. **3.** $\frac{4y}{3z^2}$. **5.** $\frac{x(yz^2 + 1)}{z(1 - x^2y)}$. **7.** $-e^{y-z}$.
9. $\frac{yz}{9 + z}$. **11.** $-\frac{3x}{z}$. **13.** $-\frac{9}{10}$. **15.** $-\frac{4}{e^2}$.
17. 4. **19.** $\frac{5}{2}$.

21. a. 36; **b.** Con respecto a q_A, $\frac{60}{13}$; con respecto a q_B, $\frac{288}{65}$.

EJERCICIO 16.5 (página 763)

1. $8xy$; $8x$. **3.** 3; 0; 0.
5. $18xe^{2xy}$; $18e^{2xy}(2xy + 1)$; $72x(1 + xy)e^{2xy}$.
7. $3x^2y + 4xy^2 + y^3$; $3xy^2 + 4x^2y + x^3$; $6xy + 4y^2$; $6xy + 4x^2$. **9.** $x(x^2 + y^2)^{-1/2}$; $y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$.
11. 0. **13.** 28,758. **15.** $2e$.
17. $-\frac{1}{8}$. **23.** $-\frac{y^2 + z^2}{z^3} = -\frac{3x^2}{z^3}$.

EJERCICIO 16.6 (página 767)

1. $\frac{\partial z}{\partial r} = 13$; $\frac{\partial z}{\partial s} = 9$. **3.** $\left[2t + \frac{3\sqrt{t}}{2}\right]e^{x+y}$.
5. $5(2xz^2 + yz) + 2(xz + z^2) - (2x^2z + xy + 2yz)$.
7. $3(x^2 + xy^2)^2(2x + y^2 + 16xy)$.
9. $-2s(2x + yz) + r(xz + 3y^2z^2) - 5(xy + 2y^3z)$.
11. $19s(2x - 7)$. **13.** 324. **15.** -1.
17. Cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$, $\frac{\partial c}{\partial p_A} = -\frac{1}{4}$ y $\frac{\partial c}{\partial p_B} = \frac{5}{4}$.
19. a. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$; **b.** -15.

EJERCICIO 16.7 (página 775)

1. $\left(\frac{14}{3}, -\frac{13}{3}\right)$. **3.** $(2, 5), (2, -6), (-1, 5), (-1, -6)$.
5. $(50, 150, 350)$. **7.** $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, mínimo relativo.
9. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, máximo relativo.
11. $(1, 1)$, mínimo relativo; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ninguno.
13. $(0, 0)$, máximo relativo; $\left(4, \frac{1}{2}\right)$, mínimo relativo; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(4, 0)$, ninguno.
15. $(122, 127)$, máximo relativo.
17. $(-1, -1)$, mínimo relativo.
19. $(0, -2), (0, 2)$, ninguno. **21.** $l = 24, k = 14$.
23. $p_A = 80, p_B = 85$.
25. $q_A = 48, q_B = 40, p_A = 52, p_B = 44$, utilidad $= 3304$.
27. $q_A = 3, q_B = 2$. **29.** 1 pie por 2 pies por 3 pies.
31. $\left(\frac{105}{37}, \frac{28}{37}\right)$, mínimo relativo. **33.** $a = -8, b = -12, d = 33$.

35. a. 2 unidades de A y 3 unidades de B;
b. El precio de venta para A es 30 y el precio de venta para B es 19. La utilidad máxima relativa es 25.
37. a. $P = 5T(1 - e^{-x}) - 20x - 0.1T^2$;
c. Máximo relativo en $(20, \ln 5)$; no hay extremo relativo en $\left(5, \ln\frac{5}{4}\right)$.

EJERCICIO 16.8 (página 784)

1. $(2, -2)$. **3.** $\left(3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **5.** $\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.
7. $(6, 3, 2)$. **9.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. **11.** $(3, 3, 6)$.
13. Planta 1, 40 unidades; planta 2, 60 unidades.
15. 74 unidades (cuando $l = 8, k = 7$).
17. $15,000 en publicidad en periódicos y $45,000 en publicidad en televisión.
19. $x = 5, y = 15, z = 5$.
21. $x = 12, y = 8$. **23.** $x = 10, y = 20, z = 5$.

EJERCICIO 16.9 (página 791)

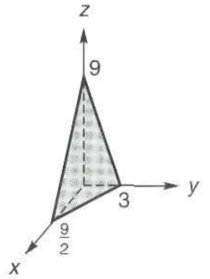
1. $\hat{y} = 0.98 + 0.61x$; 3.12. **3.** $\hat{y} = 0.057 + 1.67x$; 5.90.
5. $\hat{q} = 82.6 - 0.641p$. **7.** $\hat{y} = 100 + 0.13x$; 105.2.
9. $\hat{y} = 8.5 + 2.5x$.
11. a. $\hat{y} = 35.9 - 2.5x$; **b.** $\hat{y} = 28.4 - 2.5x$.

EJERCICIO 16.11 (página 798)

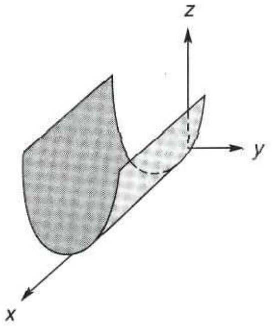
1. 18. **3.** $\frac{1}{4}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **7.** 3. **9.** 324. **11.** $-\frac{58}{5}$.
13. $\frac{8}{3}$. **15.** -1. **17.** $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$. **19.** $-\frac{27}{4}$.
21. $\frac{1}{24}$. **23.** $e^{-4} - e^{-2} - e^{-3} + e^{-1}$. **25.** $\frac{3}{8}$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 16 (página 801)

1.



3.



5. $8x + 6y; 6x + 2y$. **7.** $\frac{y}{(x+y)^2}; -\frac{x}{(x+y)^2}$.

9. $\frac{y}{x^2+y^2}$. **11.** $2xze^{x^2yz}(1 + x^2yz)$. **13.** $2(x + y)$.

15. $xze^{yz}\ln z; \frac{e^{yz}}{z} + ye^{yz}\ln z = e^{yz}\left(\frac{1}{z} + y\ln z\right)$.

17. $\frac{1}{64}$. **19.** $2(x + y)e^r + 2\left(\frac{x+3y}{r+s}\right); 2\left(\frac{x+3y}{r+s}\right)$.

21. $\frac{2x + 2y + z}{4z - x}$. **23.** $\frac{\partial P}{\partial l} = 14l^{-0.3}k^{0.3}; \frac{\partial P}{\partial k} = 6l^{0.7}k^{-0.7}$.

25. Competitivos. **27.** $(2, 2)$, mínimo relativo.

29. 4 pies por 4 pies por 2 pies.

31. A, 89 centavos por libra; B, 94 centavos por libra.

33. $(3, 2, 1)$. **35.** $\hat{y} = 12.67 + 3.29x$.

37. 8. **39.** $\frac{1}{30}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 16 (página 803)

1. $y = 9.50e^{-0.22399x} + 5$. **3.** $T = 79e^{-0.01113t} + 45$.

ÍNDICE

Relaciones de negocios

$$\text{Interés} = (\text{capital})(\text{tasa})(\text{tiempo})$$

$$\text{Costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

$$\text{Costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$$

$$\text{Ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

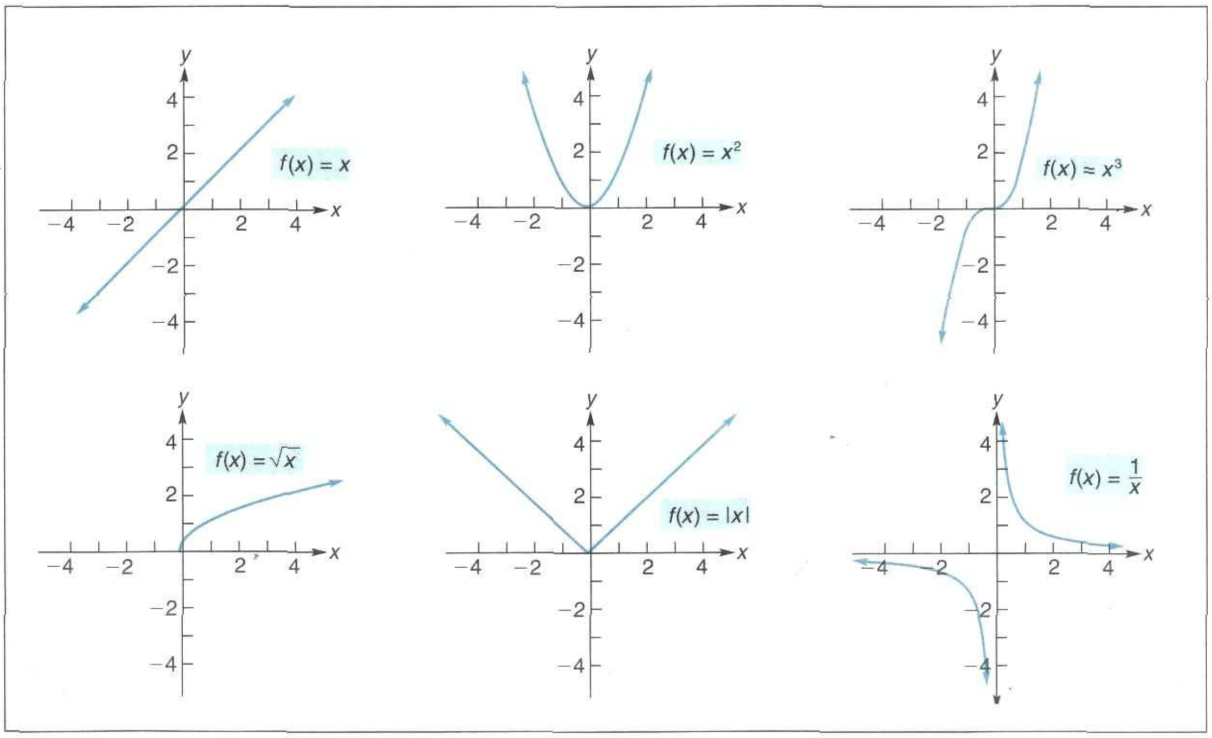
$$\text{Utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Fórmulas de anualidades ordinarias

$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = Ra_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor presente)}$$

$$S = R\frac{(1+r)^{n}-1}{r} = Rs_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor futuro)}$$

Gráficas de funciones elementales



Fórmulas de derivación

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$	$\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$	$\dfrac{d}{dx}(\log_b u) = \dfrac{1}{(\ln b)u} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	$\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\dfrac{du}{dx}$

Fórmulas de integración

Suponemos que u es una función diferenciable de x.

$\int k\,dx = kx + C$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	$\int \dfrac{1}{u}\,du = \ln\|u\| + C, \quad u \neq 0$

Relaciones de negocios

$$\text{Interés} = (\text{capital})(\text{tasa})(\text{tiempo})$$

$$\text{Costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

$$\text{Costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$$

$$\text{Ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

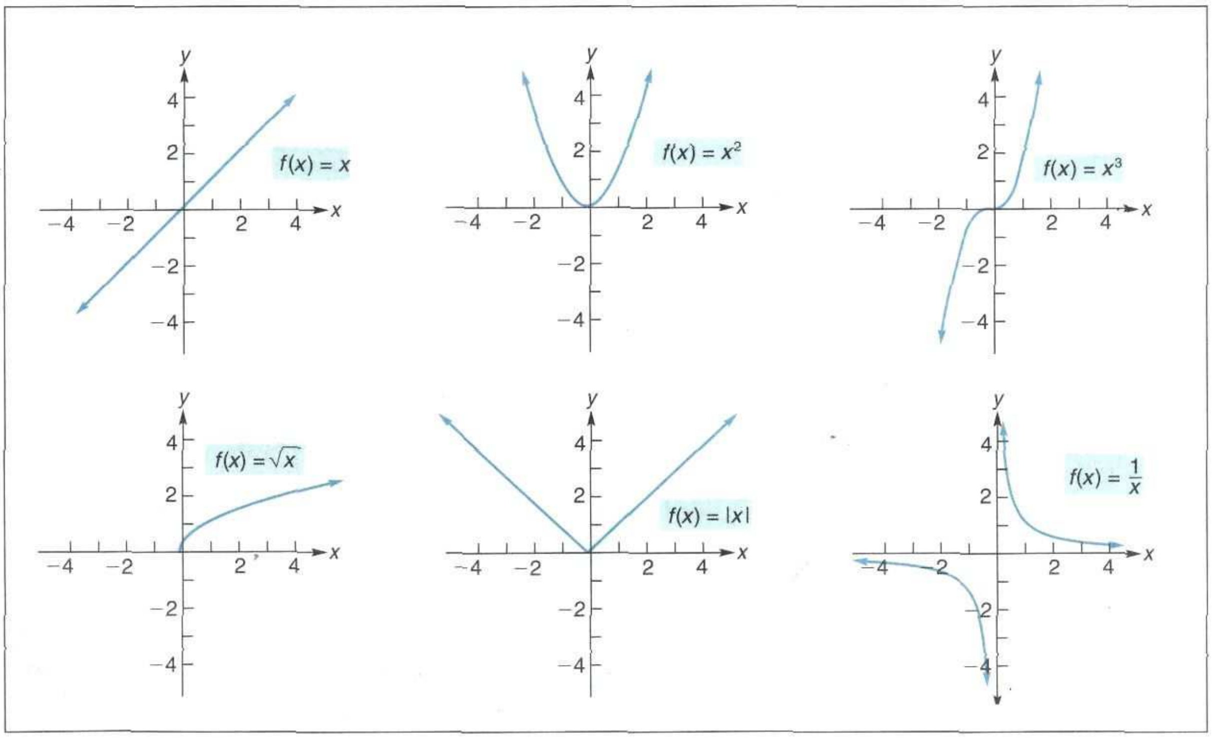
$$\text{Utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Fórmulas de anualidades ordinarias

$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = Ra_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor presente)}$$

$$S = R\frac{(1+r)^{n}-1}{r} = Rs_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor futuro)}$$

Gráficas de funciones elementales



Fórmulas de derivación

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$	$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$	$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}$

Fórmulas de integración

Suponemos que u es una función diferenciable de x.

$\int k\,dx = kx + C$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$\int e^x\,dx = e^x + C,$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C, \quad u \neq 0$