Ingreso

2019

Seminario Universitario

Editorial CEIT

Consulte nuestra página Web: www.ceit.frba.utn.edu.ar/servicios/editorial
Donde encontrara información de otros libros editados por Editorial-CEIT

Seminario universitario 2013 / Jorge Recchini ... [et al.]. - 3a ed . 3a reimp. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Centro de Estudiantes de Ingeniería Tecnológica - CEIT, 2017.
295 p. ; 29 x 21 cm.

ISBN 978-987-1063-97-0

1. Matemática. 2. Educación Superior. I. Recchini, Jorge
CDD 510

Fecha de catalogación: 07/12/2012
Fecha de 1ra reimpresión: 27/08/2015
Fecha de 2da reimpresión: 05/07/2016
Fecha de 3ra reimpresión: 03/07/2017

Diseño de Tapa:

Queda hecho el depósito que previene la Ley 11.723

Impreso en Argentina.

La Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional implementó a partir del año 1994 un sistema de acceso a las carreras de grado conocido como Seminario Universitario.

Este Seminario se ha ido adecuando año a año sobre la base de la experiencia adquirida y con una visión estratégica superadora.

El Módulo B del Seminario Universitario persigue como objetivo la nivelación de algunos conocimientos de Matemática y Física adquiridos en el nivel medio con el fin de poder comenzar con éxito la carrera de Ingeniería.

La actividad del Seminario está regulada por la Comisión de Ingreso, compuesta por autoridades de la facultad.

Los responsables académicos del Módulo B son:

Director: Ing. Francisco E. Bonfante

Coordinadora: Ing. Claudia Bilinsky

Coordinador: Profesor Luis Fiorante

PRÓLOGO

El presente texto está dirigido a los alumnos que desean comenzar sus estudios de Ingeniería en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

El propósito de este Seminario es orientar y afianzar los conocimientos propios de la previa formación hacia la perspectiva de una carrera ingenieril, poniendo especial énfasis en la resolución de problemas.

Se han desarrollado los contenidos correspondientes a las unidades del programa vigente del Módulo B del Seminario Universitario. Al finalizar cada unidad se propone un trabajo práctico que contiene ejercicios, problemas y ejercicios integradores.

Es nuestro deseo que este material de trabajo sirva de apoyo al estudiante para abordar con éxito esta nueva etapa que inicia.

Facultad Regional Buenos Aires
Seminario Universitario

UNIDAD 1

Introducción a la resolución de problemas

Introducción a la lógica simbólica

- Proposiciones
- Conectivos lógicos
- Proposiciones compuestas

INTRODUCCIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Comenzaremos estudiando algunos principios de resolución de problemas por medio de ecuaciones **(resolución algebraica)**, que serán muy útiles para tener éxito al abordar problemas de distintas áreas de la matemática aplicada.
Un **problema** es toda cuestión en la que se persigue la determinación de uno o varios números desconocidos mediante la relación (o relaciones) que existen entre ellos y otros conocidos.
Los números y las relaciones conocidas constituyen los **datos** del problema. Los números cuya determinación se pide son las **incógnitas**.
El álgebra, como la mayor parte de la matemática contiene una gran variedad de problemas, muchas veces éstos implican encontrar cierto número que se desconoce inicialmente pero que debe satisfacer determinadas condiciones. Si esas condiciones se pueden expresar en lenguaje simbólico, luego realizando ciertas operaciones podremos encontrar la respuesta.
La resolución de problemas representa el principal objetivo de este *Seminario*, por lo tanto desarrollaremos y ampliaremos esta metodología en todas las unidades del programa.

En el proceso de resolución algebraica de un problema distinguiremos las siguientes etapas:

1) **Representación**
2) **Planteo de la ecuación**
3) **Resolución de la ecuación**
4) **Verificación de la solución hallada**

La primera etapa o representación, consiste en el empleo del simbolismo algebraico para designar la incógnita (o las incógnitas), así como algunas operaciones en que intervenga la incógnita (o las incógnitas).

En la segunda etapa, o planteo de la ecuación, se escribe la ecuación algebraica que traduce alguna condición de igualdad que establezca el enunciado del problema.

En la tercera etapa se procede a la resolución de la ecuación correspondiente.

Finalmente, se comprueba si la solución hallada satisface los requisitos del problema.

TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE COMÚN AL LENGUAJE ALGEBRAICO

Comenzaremos con algunos problemas que se resuelven mediante una ecuación algebraica sencilla.
El planteamiento de la ecuación correspondiente a cada problema requiere el saber expresar en lenguaje algebraico las condiciones que en lenguaje ordinario contiene el enunciado del problema, como esta es la parte que mayor dificultad suele presentar al alumno, la tratamos previamente, considerando los siguiente ejemplos:

El número n aumentado en 3 se representa por $n + 3$.

El número n disminuido en 3 se representa $n - 3$.

El duplo de un número (desconocido) se representa por $2x$.

El triple de un número se representa por $3x$.

La mitad de un número se representa por $\frac{1}{2}x$ o $x/2$.

El duplo de un número aumentado en 5 se representa por $2x + 5$.

Si una persona tiene t años, su edad hace 4 años se representa $t - 4$. Su edad dentro de 5 años se representa $t + 5$.

Dos números enteros consecutivos se representan por n y $n + 1$.

Un número par se representa por $2\,p$ (ya que todo número par es el duplo de otro número entero).

Un número impar se representa por $2\,p + 1$ (ya que todo número impar es el siguiente de un número par).

Si las cifras de las decenas de un número natural es d y la cifra de las unidades es u, el número se representa por $10\,d + u$. (Obsérvese que, por ejemplo, 54 = 10 x 5 + 4).
Esto es lo que se llama la representación polinómica de un número escrito en el sistema de base 10.

Si una persona camina x km por hora, el número de kilómetros que camina en t horas (a un paso uniforme) se representa $x\,t$.

Hasta aquí hemos tratado la traducción de expresiones verbales a formas simbólicas, considerando las **etapas** formuladas en el proceso de **resolución algebraica**, resolveremos a modo de ejemplo el siguiente problema:

Encuentre tres números pares consecutivos, tales que el doble del primero más el tercero sea igual a 10 más el segundo.

2) Representación

x: primero de los tres números pares consecutivos
$x + 2$: segundo número par consecutivo
$x + 4$: tercer número par consecutivo

2) Planteo de la ecuación

El doble del primero	más	el tercero	igual	10	más	el segundo
$\mathbf{2\,x}$	**+**	$\mathbf{(x + 4)}$	**=**	**10**	**+**	$\mathbf{(x + 2)}$

3) Resolución de la ecuación

$$2\,x + (x + 4) = 10 + x + 2$$
$$3\,x + 4 = x + 12$$
$$2\,x = 8$$
$$x = 4$$
$$x + 2 = 6$$
$$x + 4 = 8$$

Luego los tres números pares consecutivos son 4, 6 y 8.

4) Verificación de la solución hallada

El doble del primero más el tercero: $2 \cdot 4 + 8 = 16$
10 más el segundo: $10 + 6 = 16$

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA SIMBÓLICA

El término lógica deriva de la palabra griega *logos*, la cual significa razonamiento o discurso. Los antiguos griegos son considerados los iniciadores del estudio de los procesos de razonamiento humano.
En numerosas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, cada vez que se trata de resolver un problema, se toma parte de un debate o se trata de realizar un crucigrama, se realizan actividades mentales llamadas razonamientos lógicos, los cuales se expresan en términos de enunciados declarativos.
En general una **proposición** es un enunciado declarativo que es **verdadero** o **falso**. Esta capacidad de ser clasificadas como verdaderas o falsas hace que las proposiciones difieran de las preguntas, órdenes o exclamaciones.
Los siguientes enunciados son ejemplos de proposiciones:

Ejemplo 1

a. Buenos Aires es la capital de Argentina.
b. Dos es par y menor que veinte.
c. Nueve es primo.
d. Estudias diariamente o repruebas este curso.
e. Si tres es impar, entonces 3 + 3 es par.

En contraposición al ejemplo 1, los siguientes enunciados <u>no son proposiciones</u>:
Ejemplo 2

a. Cierra la puerta.	b. ¡Qué calor!	c. ¿Qué hora es?
Imperativo	*Exclamación*	*Interrogación.*

En el ejemplo 1 las proposiciones a y c tienen un solo componente (dicen una sola cosa), en tanto que la proposición b es la unión de dos componentes: “Dos es par” y “Dos es menor que veinte”. Las primeras proposiciones se llaman **simples**, mientras que la última es **compuesta**.

La **negación** de una proposición se obtiene intercalando la palabra **“no”** o intercalando una frase como **“no es cierto que”**. El símbolo ~ se emplea para negar una proposición.

p: Hoy hace calor. $\sim p$: Hoy no hace calor. (No es cierto que hoy hace calor).

Ejemplo 3

Dadas las siguientes proposiciones:

a. Mi calificación es 5 o 6.
b. No es cierto que 3 sea menor que 5.
c. Todas las mascotas son mamíferos.
d. Algunos alumnos reprobaron el parcial.

La negación de cada una de ellas es:

a. Mi calificación no es 5 ni 6.
b. 3 es menor que 5.
c. Algunas mascotas no son mamíferos.
d. Ningún alumno reprobó el parcial.

Existen muchas maneras de combinar proposiciones simples para formar proposiciones compuestas, tales combinaciones se obtienen utilizando los **conectivos lógicos**, dos de los más importantes son ***“y”*** y ***“o”***.

Supongamos que utilizamos las letras p y q para representar las siguientes proposiciones:

p: Hoy hace calor. q: El ventilador está descompuesto.

Pueden formarse las siguientes proposiciones compuestas:

p ***y*** *q*: Hoy hace calor ***y*** el ventilador está descompuesto.
p ***o*** *q*: Hoy hace calor ***o*** el ventilador está descompuesto.

En lógica la palabra ***“y”*** se simboliza $\wedge$ y la palabra ***“o”*** se simboliza $\vee$, es decir:
p ***y*** *q* se escribe $p \wedge q$ la proposición resultante se la llama **conjunción**.
p ***o*** *q* se escribe $p \vee q$ la proposición resultante se la llama **disyunción**.

VALORES DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS

Utilizaremos las letras **V** (verdadero) y **F** (falso) como los posibles valores de verdad de una proposición. Determinaremos el valor de verdad de proposiciones compuestas cuando se conocen los valores de verdad de sus componentes. Para ello haremos uso de las llamadas **"tablas de verdad"**.

Negación $\sim p$ **:**

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción $p \wedge q$ **:**

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Si p y q son dos proposiciones cualesquiera la nueva proposición compuesta $p \wedge q$ (se lee p **y** q) se denomina **proposición conjuntiva o conjunción** de p y q.

$p \wedge q$ es <u>verdadera</u> solamente si p y q son verdaderas.

Disyunción $p \vee q$ **:**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si p y q son dos proposiciones cualesquiera la nueva proposición compuesta $p \vee q$ (se lee p **ó** q) se denomina **proposición disyuntiva o disyunción** de p y q.

$p \vee q$ es <u>falsa</u> solamente si p y q son falsas.

Ejemplo 4

Utilizamos la disyunción en la resolución de una ecuación:

$$\mathbf{x^2 = 2601}$$
$$\mathbf{x = 51 \ \vee \ x = -51}$$

Ejemplo 5

Empleo de conjunción y disyunción en la resolución de una inecuación:

$$\frac{20}{x} > 4$$
$$(x > 0 \ \wedge \ 20 > 4x) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ 20 < 4x)$$
$$(x > 0 \ \wedge \ 5 > x) \ \vee \ \underline{(x < 0 \ \wedge \ 5 < x)}$$
$$x > 0 \ \wedge \ x < 5 \qquad \textit{Falso}$$

Implicación o condicional $p \Rightarrow q$ **:**

La proposición condicional o implicación de dos proposiciones *p* y *q*, en ese orden, es la proposición compuesta $p \Rightarrow q$ (*p* implica *q*, o bien, si *p* entonces *q*), *p* se denomina antecedente o premisa y *q* consecuente.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p \Rightarrow q$ es falsa sólo si el antecedente *p* es verdadero y el consecuente *q* es falso.

Para entender la tabla de verdad proponemos el siguiente ejemplo.
Ejemplo 6 :

Francisco promete a su esposa ($p \Rightarrow q$): *Si encuentro la tarjeta de crédito(p) , te llevo al teatro (q).*

Consideremos las cuatro posibilidades de valores lógicos:

Francisco encuentra la tarjeta y lleva a su esposa al teatro.
Mantiene su promesa fue <u>verdadera</u>

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V

Francisco encuentra la tarjeta pero no lleva a su esposa al teatro.
Rompió la promesa fue <u>falsa</u>.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	F	F

Francisco no encuentra la tarjeta, pero aún así lleva a su esposa al teatro.
No rompió su promesa fue <u>verdadera</u>.

p	q	$p \Rightarrow q$
F	V	V

Francisco no encuentra la tarjeta y no lleva a su esposa al teatro.
No ha roto su promesa fue <u>verdadera</u>.

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V

El proceso de razonar para llegar a una conclusión, basándose en hechos aceptados se llama razonamiento deductivo. Así procede la matemática se comienza con proposiciones aceptadas no demostradas los **axiomas o postulados**; y a partir de ellos se razona para llegar a conclusiones adicionales, sujetas a demostración, los **<u>teoremas</u>**: proposiciones condicionales <u>verdaderas</u> puntos de apoyos de otras nuevas deducciones (teoremas).

	H	T	$H \Rightarrow T$
	V	V	V
No se da:	V	F	.
	F	V	V
	F	F	V

En un **<u>teorema</u>** $H \Rightarrow T$, la proposición H antecedente se denomina **hipótesis** y el consecuente T **tesis** del teorema .

Si observas la siguiente tabla que determina lógicamente un nuevo **teorema** denominado **contra recíproco** (de uno dado) $\sim T \Rightarrow \sim H$.

H	T	$H \Rightarrow T$	$\sim H$	$\sim T$	$\sim T \Rightarrow \sim H$
V	V	V	F	F	V
		No se da			
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

La presencia de dos teoremas asociados lógicamente (equivalentes $\equiv$), nos conduce a que la demostración de uno de ellos implica la demostración de ambos : $H \Rightarrow T \equiv \sim T \Rightarrow \sim H$

Ejemplo 7 :

Sea el **teorema:** **Si el cuadrado de un numero entero es impar ,entonces el entero es impar.**

El correspondiente **teorema contra recíproco:**

Si un numero entero es par ,entonces su cuadrado es par.

Demostraremos, este último: **c** es par se puede escribir $\mathbf{c = 2\,k}$ con **k** entero.

$$\mathbf{c^2 = (2\,k)^2 = 4\,k^2 = 2\,(\underbrace{2\,k^2}_{k_1}) = 2\,k_1} \quad \text{entero}$$

Concluimos que $\mathbf{c^2 = 2\,k_1}$ numero par, el cuadrado de **c** es par.

Aquí la demostración del contra recíproco demuestra ambos **teoremas.**

La conjunción entre $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ determina la doble implicación o bicondicional.

Doble implicación o bicondicional $p \Leftrightarrow q$ **:**

La proposición compuesta $p \Leftrightarrow q$ se lee p si y sólo si q.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

$p \Leftrightarrow q$ es verdadera si p y q tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo 8:

Sean las proposiciones:

p: Un triangulo es equilátero. (*Los lados de igual longitud*)
q: Un triangulo es equiángulo. (*Los ángulos interiores de igual amplitud o medida*)

$p \Leftrightarrow q$: Un triangulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.

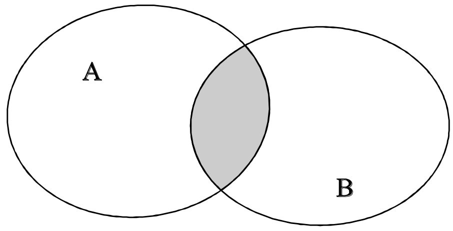
La proposición bicondicional ejemplificada es además un **teorema**.

¿Cómo usamos las operaciones lógicas en teoría de conjuntos?

Si *A* y *B* están representados por el diagrama:

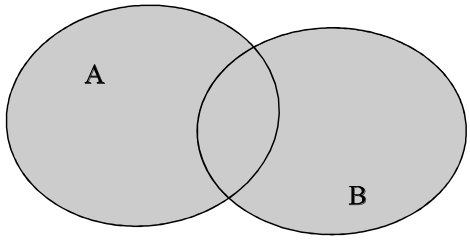
Definimos la **intersección** entre *A* y *B* como el conjunto:

$$\boxed{A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}}$$



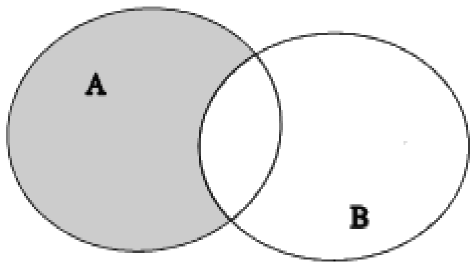
Definimos la **unión** entre A y B como el conjunto:

$$\boxed{A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}}$$



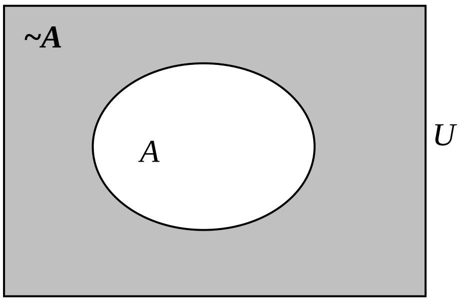
Definimos la **diferencia** entre *A* y *B* como el conjunto:

$$\boxed{A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}}$$



En teoría de conjuntos se define el **complemento** de un conjunto *A* respecto del conjunto universal *U*, como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a *U* y no pertenecen a *A*.

Anotamos: $C_A = \sim A = U - A$
En un diagrama de Venn se representa:



UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 1

Introducción a la resolución de problemas

1) Escriba utilizando el simbolismo algebraico:

a) Un número aumentado en 5:

b) Un número disminuido en 8:

c) El cuadrado de un número aumentado en 2:

d) El cubo de un número:

e) El quíntuplo de un número:

f) El triple de un número disminuido en 7:

g) El 5 % de un número:

h) Tres números consecutivos:

i) Dos números pares consecutivos:

j) El cuadrado de un número menos el número:

k) En una división el divisor es d, el cociente q y el resto r. Represente el dividendo:

l) En una división el dividendo es D, el divisor d y el cociente q. Represente el resto:

m) Un joven tiene 15 años de edad. Represente su edad: a) hace x años; b) dentro de x años:

n) Un joven tiene x años. Represente su edad: a) dentro de dos años; b) dentro de m años:

o) La cifra de las centenas de un número es c, la cifra de las decenas es d y la de las unidades es u. Represente el número.

p) Represente el número de pesos que hay en x billetes de 5 pesos, y billetes de 10 pesos y z billetes de 20 pesos.

q) Si un automóvil camina 50 km por hora, ¿cuántos kilómetros camina en t horas? ¿En m minutos?

r) Juan hace un trabajo en x días. ¿Qué parte del trabajo hace en un día?

2) Asocie a cada enunciado la expresión simbólica que le corresponde:

a) El cuadrado de una suma.	1) $2\,a - 7$
b) El doble de la suma de tres números.	2) $A = 1^2$
c) El doble de un número menos 7.	3) $(2\,k + 1).(2\,k + 3)$
d) La tercera parte de un número menos otro.	4) $2\,(x + y + z)$
e) La suma de los cuadrados de dos números.	5) $(a + b)^2$
f) El área de un cuadrado.	6) $a^2 + b^2$
g) La distancia recorrida en 3 horas a una velocidad de x km por hora	7) $\dfrac{a-b}{3}$
h) La edad actual de una persona si dentro de 15 años se ha duplicado	8) $x = 2\,x - 15$
i) La tercera parte de la diferencia de dos números.	9) $\dfrac{a}{3} - b$
j) El producto de dos números impares consecutivos.	10) $d = 3\,x$

Resolución de problemas

1) El triplo de un número es igual al número aumentado en 8. Halle el número.

Rta.: 4

2) Juan y Antonio tienen conjuntamente \$50. Antonio tiene \$12 más que Juan. ¿Cuántos pesos tiene cada uno?

Rta.: Juan tiene \$19 y Antonio \$31

3) Determine tres números consecutivos cuya suma sea 63.

Rta.: 20, 21 y 22.

4) Una empresa ganó \$30000 en 3 años. En el segundo año ganó el doble de lo que había ganado en el primero y en el tercer año ganó tanto como en los dos años anteriores juntos. ¿Cuál fue la ganancia en cada año?

Rta.: \$5000, \$10000, \$15000

5) Hay cuatro números cuya suma es 90. El segundo número es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. Determine dichos números.

Rta.: 6, 12, 24, 48

6) Un terreno rectangular tiene de ancho 5 metros menos que de largo y su perímetro es de 95 *m*. Determine las dimensiones del terreno.

Rta.: 21,25 *m*. y 26,25 *m*.

7) La edad de un padre es el cuádruplo de la de su hijo y dentro de 5 años será el triple. Halle la edad actual de cada uno.

Rta.: La edad actual del hijo es 10 años y la actual del padre 40 años.

8) Un terreno rectangular tiene 40 pies más de largo que de ancho. Si tuviese 20 pies menos de largo y 10 pies más de ancho su área sería la misma. Calcule sus dimensiones.

Rta.: ancho: 20 pies y largo: 60 pies.

9) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Determine los números.

Rta.: 30 y 31

10) Dividir un ángulo de 60 grados en dos partes cuyas medidas estén en la razón 5 : 7.

Rta.: 25 grados y 35 grados.

11) En un número de dos cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da 121. Averigüe el número.

Rta.: 83

12) La entrada de un cine cuesta $10 los mayores y $6 los menores. Una noche entraron 320 personas y pagaron $2720. ¿Cuántos mayores y cuántos menores entraron?

Rta.: 200 mayores y 120 menores.

13) La cifra de las unidades de un número de tres cifras es el duplo de la cifra de las decenas; y la cifra de las decenas es el duplo de la cifra de las centenas. Si se invierte el orden de las cifras y del número resultante se resta el número primitivo se obtiene 594. ¿Cuál es el número?

Rta.: 248

14) Agustín empieza un juego y gana $10. Después duplica su dinero, pierde $25 y queda igual que al principio. ¿Con cuánto dinero comenzó el juego?

Rta.: $5

15) Determine el número que, disminuido en sus 2/3 equivale a su duplo disminuido en 25.

Rta.: 15

16) De los 200 estudiantes aspirantes a ingresar a una universidad, 98 son mujeres, 60 estudian comunicación y 60 son mujeres que no estudian comunicación. ¿Cuántos hombres no estudian comunicación?

Rta.: 80

17) En una academia se realiza una encuesta a 120 jóvenes y se obtienen los siguientes datos: 80 quieren ser actores, 70 quieren ser cantantes y 50 quieren ser actores y cantantes. Determine cuántos:

a) No quieren ser cantantes.
b) No quieren ser actores.
c) Quieren ser cantantes, pero no actores.
d) Quieren ser actores, pero no cantantes.
e) No quieren ser actores ni cantantes.

Rta.: a) 50, b) 40, c) 20, d) 30, e) 20

18) De 200 profesores de una universidad, 115 son licenciados y 60 son investigadores. De los licenciados 33 son investigadores. Indique cuántos de estos profesores:

a) Son licenciados o investigadores
b) No son licenciados ni investigadores

Rta.: a) 142 b) 58

19) En un concurso de baile hay 55 parejas de las cuales 38 son latinas, 27 bailan tango y 46 salsa, 13 son latinas y bailan tango, 18 bailan tango y salsa, todas las latinas bailan salsa y todas las parejas tienen al menos una de las características anteriores. De estas 55 parejas:

a) ¿Cuántas tienen las tres características?
b) ¿Cuántas tienen exactamente dos características?
c) ¿Cuántas tienen exactamente una característica?

Rta.: a) 13, b) 30, c) 12

20) En una investigación hecha en un grupo de 100 estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban idiomas fueron las siguientes: español, 28; alemán, 30; francés, 42; español y alemán, 8; español y francés, 10; alemán y francés, 5; los tres idiomas, 3.

a) ¿Cuántos alumnos no estudiaban ningún idioma?
b) ¿Cuántos estudiantes tenían el francés como único idioma de estudio?

Rta.: a) 20, b) 30

21) En un análisis posterior sobre los 100 estudiantes (del ejercicio anterior) la cantidad de personas que estudiaban idiomas resultaron ser: alemán únicamente, 18; alemán pero no español, 23; alemán y francés, 8; alemán, 26; francés, 48; francés y español, 8; ningún idioma, 24.

a) ¿Cuántos estudiantes aprendían el español?
b) ¿Cuántos estudiantes aprendían alemán y español pero no francés?

Rta.: a) 18, b) 0

22) Un individuo miente siempre martes, jueves y sábados y es completamente veraz los demás días. Si un día en particular mantenemos el siguiente diálogo:

Pregunta: ¿Qué día es hoy?
Respuesta: Sábado
Pregunta: ¿Qué día será mañana?
Respuesta: Miércoles.
¿De qué día de la semana se trata?

Rta.: Jueves

23) La policía arresta a 4 hombres, uno de ellos ha cometido un robo. Los mismos hacen las siguientes declaraciones:

Alberto: “Bernardo es culpable”
Bernardo: “Daniel es culpable”
Carlos: “Yo no soy culpable”
Daniel: “Bernardo miente cuando afirma que soy culpable”.

Si se sabe que una sola de estas declaraciones es verdadera, ¿quién es el culpable del robo?

Rta.: Carlos

UNIDAD 2

Números naturales

Números enteros

Números racionales y números irracionales

Números reales

- Propiedades de los números reales
- Operaciones entre los números reales

Conjuntos numéricos

Valor absoluto

Exponentes y raíces

- Potencias de multiplicaciones y divisiones
- Radicación. Racionalización

Cálculo de áreas y volúmenes

NOTACIONES

Símbolo	"se lee"
$\mathbb{N}$……………………….	conjunto de los números naturales
$\mathbb{N}_0$……………………...	conjunto de los números naturales con el cero
$\mathbb{Z}$……………………..….	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}^+$……………………….	conjunto de los números enteros positivos
$\mathbb{Z}^-$……………………..….	conjunto de los números enteros negativos
$\mathbb{Q}$………………………..	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$………………………..	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$……………………...	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{R}^+_0$ ……………………..	conjunto de los números reales no negativos
$\mathbb{R}^-$……………………….	conjunto de los números reales negativos
$\in$ ……………………….	pertenece
$\notin$ ……………………….	no pertenece
$\varnothing$ ……………………...	conjunto vacío
$\subset$ ……………………….	incluido
$\not\subset$ ……………………….	no incluido
U……………………….	conjunto universal o referencial
/………………………..	tal que
$\cup$ ……………………….	unión
$\cap$ ……………………….	intersección
Δ ……………………….	diferencia simétrica
$\overline{A}$ $o \sim A$ ………………..	complemento de A
$\wedge$ ……………………….	y
$\vee$ ……………………….	o (incluyente)
$\veebar$ ……………………….	o (excluyente)
$\sim$ …………..……….	no
$\cong$ ……………………….	aproximadamente igual
$\equiv$ ……………………….	coincide
$\neq$ ……………………….	distinto
$\Rightarrow$ ……………………..	si… entonces
$\Leftrightarrow$ …………………….	si y sólo si
$\exists$ ……………………….	existe al menos uno
$\nexists$ ……………………….	no existe
$\exists\,!$……………………...	existe y es único
$\forall$ ……………………...	para todo
$<$ ……………………..	menor que
$\leq$ ……………………….	menor o igual que
$>$ ……………………….	mayor que
$\geq$………………………..	mayor o igual que
∞ …...…………………...	infinito

NÚMEROS Y MÁS NÚMEROS

Mucho se ha escrito sobre la teoría de la Aritmética y la experiencia nos ha demostrado que nuestros alumnos cuando ingresan a la Universidad casi siempre no pueden contestar preguntas tales como:

¿Qué significa sustraer?
¿Entre dos números irracionales existen infinitos otros?

Es por esta razón que creemos importante dedicar un espacio a repasar y consolidar el concepto de número, sus propiedades, operaciones y aplicaciones.

NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

"DIOS CREÓ EL NÚMERO NATURAL, LO DEMÁS ES OBRA DEL HOMBRE"
KRONECKER

El número natural surge por la necesidad que el hombre tiene de contar (por ejemplo guijarros que representaban la cantidad de bienes que poseían).

Los números 1, 2, 3, 4, 5,... reciben el nombre de números naturales o enteros positivos. Al conjunto de estos números se los simboliza por $\mathbb{N}$ o por $\mathbb{Z}^+$.

Entonces:

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5,...\}$$

Si tenemos en cuenta que 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1, 4 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,...

Podemos definir al siguiente de cualquier $n \in \mathbb{N}$ como:

$$\mathrm{sg}(n) = n + 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n+1 \text{ veces}}$$

¿Qué operaciones son válidas en $\mathbb{N}$?

Adición: Si $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ entonces $(a + b) \in \mathbb{N}$ y la suma es única.

Sustracción: Si $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ es $(a - b) \in \mathbb{N}$?

$$\forall\, a,b \in \mathbb{N} : (a - b) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a > b$$
$$\forall\, a,b \in \mathbb{N} : a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$
$$\forall\, a,b \in \mathbb{N} : (a - b) \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow a \leq b$$

Ejemplos:

1. Determine n si sabe que:
   1.1) $sg(n) = 5 \Rightarrow n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$
   1.2) $sg(n + 3) = 17 \Rightarrow n + 3 + 1 = 17 \Rightarrow n = 13$
   1.3) $sg(sg(n)) = 8 \Rightarrow sg(n + 1) = 8 \Rightarrow n + 1 + 1 = 8 \Rightarrow n = 6$
   1.4) $sg(7) = n + 3 \Rightarrow 8 = n + 3 \Rightarrow n = 5$

2. Determine
   2.1) $A = \{\, x \in \mathbb{N} \,/\, x < 5 \,\}$
   $A = \{1,2,3,4\}$

2.2) $B = \{ x \in \mathbb{N} \: / \: x \leq 3 \}$
$B = \{1,2,3\}$

2.3) $C = \{ x \in \mathbb{N} \: / \: 2 < x \leq 5 \}$
$C = \{3,4,5\}$

3. Conservando el orden de las cifras: 395, intercale la cifra 0 tal que:
   a) El número de cuatro cifras resulte el mayor posible

Rta.: 3950

   b) El número de cuatro cifras resulte el menor posible

Rta.: 3095

4. Andrés recibió \$325, Benito \$100 más que Andrés; Carlos tanto como Andrés y Benito juntos, más \$200. ¿Cuánto suma el dinero recibido por los tres?

Rta.: \$1700

5. En suma algebraica

$$18 - 2 + 9 - 6 - 4 - 5$$

Intercale paréntesis, corchetes y llaves para que el resultado sea 14.

Rta.: $18 - \{2 + [9 - (6 - 4) - 5]\}$

NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

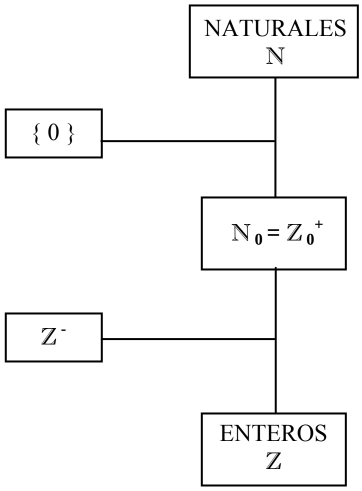
Si al conjunto de los números naturales le agregamos el cero y los opuestos de los números naturales obtenemos el conjunto de los números enteros.

El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$, es decir

$$\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$$

Con una buena dosis de imaginación reservemos un lugar en nuestra mente para estos números que se corresponden "uno a uno" con puntos pertenecientes a una recta, en nuestra fantasía pensemos que somos tipos infinitamente delgados.

Podremos caminar por estos puntos con la condición de saltar de uno a otro (puntos aislados).



$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = N_0 \cup \mathbb{Z}^- = Z_0^+ \cup \mathbb{Z}^-$$

NÚMEROS PARES E IMPARES

Los números pares (también llamados múltiplos de 2) están dados por la expresión: $2.k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$P = \{... -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$

Los números impares se simbolizan por la expresión: $2.k + 1$ o por $2.k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ejercicio:

Establezca la validez de las siguientes afirmaciones:

a) La suma de dos números pares es un número par.
b) La suma de dos números impares es un número impar.
c) El producto de dos números impares es un número impar.
d) El producto de un número par por uno impar es un número par.

Respuesta:

a) Verdadero
   * Si x es par $\Rightarrow x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
   * Si y es par $\Rightarrow y = 2k'$ ($k' \in \mathbb{Z}$)

Luego

$$x + y = 2k + 2k' \Rightarrow x + y = 2(k + k'), \quad (k + k') \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y \text{ es par.}$$

b) Falso, porque por ejemplo: $7 + 3 = 10$
c) Verdadero
   * Si x es impar, $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)
   * Si y es impar, $y = 2k' + 1$ ($k' \in \mathbb{Z}$)

$$x.y = (2k+1)(2k'+1)$$
$$x.y = 4kk' + 2k + 2k' + 1$$
$$x.y = \underbrace{\underbrace{2(2kk' + k + k')}_{par} + 1}_{impar}$$

d) Verdadero
   * Si x es par, $x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
   * Si y es impar, $y = 2k' + 1$ ($k' \in \mathbb{Z}$)

$$x.y = 2k(2k'+1)$$
$$x.y = 4kk' + 2k$$
$$x.y = \underbrace{2(2kk'+k)}_{par}$$

DIVISIBILIDAD EN $\mathbb{Z}$

> *Definición:*
> Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $a = b.c$ para $c \in \mathbb{Z}$
> entonces b recibe el nombre de "divisor de a"

En dicho caso se dice también que "*a* es divisible por *b*".
Para indicar que el número b es divisor de a, se utiliza el símbolo "$\mid$ ", es decir: $b \mid a$.
Se lee:

b es divisor de *a*
a es divisible por *b*

Ejemplo:

28 es divisible por 7 puesto que 28 = 7.4, entonces: $7 \mid 28$

> *Definición:*
> Un número entero *a*, distinto de 0, -1, 1 se llama primo si y sólo si es divisible únicamente por sí mismo, por 1, por -1 y por su opuesto (-*a*).

Ejemplo:

17 es un número primo porque solamente sus divisores son 1,-1,-17 y 17.

> *Definición:*
> Un número entero *a* distinto de –1,0,1, se llama compuesto, si dicho número puede expresarse como el producto de dos o más factores distintos de 1, -1 y de sí mismo (estos factores pueden estar repetidos).

Ejemplo:

75 es un número compuesto dado que: 75 = 3.5.5

Ejercicio:

Determine $A = \{x \in \mathbb{N} / x \mid 30\}$
$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Determine $B = \{x \in \mathbb{N} / x \mid 30 \ y \ x \text{ es primo}\}$
$B = \{2,3,5\}$

Determine $C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es compuesto} \wedge x < 13\}$
$C = \{12, 10, 9, 8, 6, 4\}$

Definición:
Se dice que dos números enteros distintos son primos entre sí (coprimos) cuando solo tienen como divisor común a 1 y –1.

Ejemplo:

Los números 70 y 99 son primos entre sí, ya que los divisores comunes son 1 y –1.

Debemos hacer notar que:

1. Dos números primos entre sí no necesariamente son primos.
2. Dos números primos son primos entre sí.
3. Existen infinitos números primos.

Un método para determinar si un número es primo:

Determine si 113 es número primo.

Obtenemos con la calculadora la $\sqrt{113}$ (aproximada)

$$\sqrt{113} \cong 10{,}6301...$$

Entonces:

$$10 < \sqrt{113} < 11$$

Si 113 tiene algún factor natural distinto de 1 y 113, entonces existe un factor natural menor que $\sqrt{113}$, ya que todo factor mayor que $\sqrt{113}$ debe poseer un factor asociado menor que la $\sqrt{113}$, con el fin de que el producto sea 113.

En este caso los factores son: 2, 3, 4,.... y 10.

Existe un teorema que nos permite afirmar que entre ellos, verifiquemos sólo con los primos menores que 10. Es decir: 2, 3, 5, 7
¿Alguno de ellos es factor de 113?
No.
Entonces 113 es primo.

Ejercicios:

a) Dado un número entero positivo de tres cifras se sabe que la cifra de las centenas es 3 y la cifra de las decenas es 9. Calcule el número si sabe que es divisible por 3, 4 y 11.

Rta.: 396

b) Determine: $A = \{x \in \mathbb{Z} / 3 \mid 7 - x\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} / x \mid 3 - x\}$

Rta: $A = \{x \in \mathbb{Z} / \ x = 7 - 3k \wedge \ k \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{-3, -1, 1, 3\}$

c) Dados *a,b,c* tres números naturales establezca si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

$$a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow (a+b) \mid c$$

d) Determine los números naturales de cuatro cifras que son divisibles por los primeros diez números naturales.

Rta: 2520, 5040, 7560.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Un número natural $n > 1$ es o un número primo o puede ser expresado como un único producto de factores primos (excepto por el orden en que aparecen dichos factores). Todo número $n > 1$ se descompone en forma única como producto de factores en la forma:

$$n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.....p_m^{a_m}$$

donde los números $p_1 < p_2 < ... < p_m$ son primos y a_i son naturales:

Ejemplo:

$24 = 2^3.3^1$

$32 = 2^5$

$13 = 13^1$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Definición:
Si un número es divisor de varios otros, se dice que es divisor común de todos ellos.

Ejemplo:

El número entero 2 es divisor común de 2, 14, 32,...., etc.

Definición:
Dado un conjunto de números enteros tal que si dichos números:
1) No son primos entre sí.
2) Admiten uno o más divisores comunes.
Entonces al mayor de estos divisores comunes, se lo llama **Máximo Común Divisor.**

Ejemplo:

Dados los números 12, 28 y 32, determinar el máximo común divisor de los números dados.

Solución:

Los divisores de 12 son: -1,-2,-3,-4,-6,-12,1 ,2 ,3 ,4 ,6 y 12.
Los divisores de 28 son: -1,-2,-4,-7,-14,-28,1 ,2 ,4 ,7 ,14 y 28.
Los divisores de 32 son: -1,-2,-4,-8,-16,-32,1 ,2 ,4 ,8 ,16 y 32.

Los divisores comunes son: -4, -2, -1, 1, 2 y 4. Luego el máximo común divisor es 4. Se denota *mcd*: 4.

Regla para determinar el máximo común divisor

Si se descompone cada uno de los números en sus factores primos, el producto formado por los factores comunes considerados con su menor exponente, es el máximo común divisor de los números dados.

Apliquemos la regla al ejemplo anterior:

$$12 = 2^2.3;\ 28 = 2^2.7;\ 32 = 2^5;\ mcd : 2^2 = 4$$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Sea $a \in \mathbb{Z}^+$ diremos:

- Un número es múltiplo de varios otros si es "múltiplo común" de todos ellos.
- Al menor de los múltiplos comunes de varios números, se lo llama **Mínimo Común Múltiplo**.

Ejemplo:

Dados los números 12, 10, 15, determinamos el mínimo común múltiplo.

Solución:

Los múltiplos de 12 son: 12, 24, 36, 48, 60, 72,...
Los múltiplos de 10 son: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70,...
Los múltiplos de 15 son: 15, 30, 45, 60, 75, 90,...

Los múltiplos comunes son 60, 120,......, por lo tanto el mínimo común múltiplo es 60.
Notándose como *m.c.m.*: 60.

Regla para determinar el mínimo común múltiplo (de enteros positivos)

Se descompone cada uno de los números en sus factores primos. El producto formado por los factores comunes y no comunes, con su mayor exponente, es el mínimo común múltiplo.

Apliquemos la regla al ejemplo anterior:

$12 = 2^2.3$
$10 = 2.5$ $\qquad$ ***m.c.m*: $\mathbf{2^2.3.5 = 60}$**
$15 = 3.5$

Propiedad

$$\boxed{mcd\ (a,b)\ .\ mcm\ (a,b) = a.b}$$

Ejercicios:

1. En una bodega hay tres toneles de vino, cuyas capacidades son 250, 306 y 504 litros, respectivamente. Su contenido se quiere envasar exactamente en cierto número de botellas iguales. Determine la capacidad máxima de cada una de las botellas necesarias y cuántas botellas se necesitan.

   Rta: 2 litros cada botella; 530 botellas.

2. Juan, Pedro y Diego deben viajar a la ciudad de Ushuaia y en el avión se hacen amigos. Por razones de trabajo los tres deberán volver periódicamente. Si se conocen el 1 de Marzo de 1995 y Juan viajará cada 8 días, Pedro cada 12 días, y Diego cada 15 días, ¿en qué fecha volverán a viajar juntos?

   Rta: 29 de Junio.

3. El *m.c.d* (75, *x*) = 5 y *m.c.m* (75, *x*) = 300, calcule *x*.

   Rta: $75.x = m.c.d\ (75, x)\ .\ m.c.m\ (75, x)$
   $75.x = 1500$
   $x = 20$

4. Determine a y b (naturales) tal que $a < b$, $a + b = 7$, $m.c.d.\ (a,b) = 1$ y $m.c.m.\ (a,b) = 12$

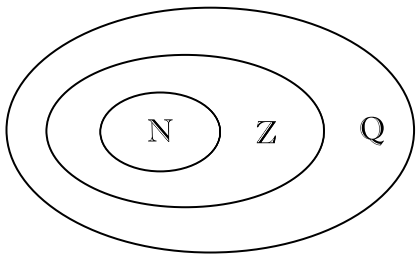
Rta.: $a = 3$, $b = 4$

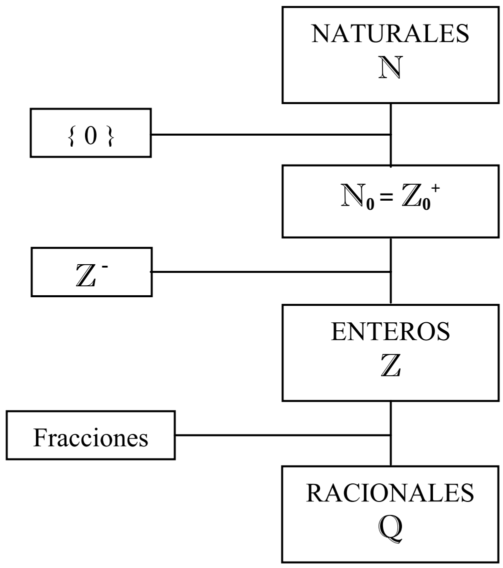
NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

> *Definición:*
> Un número racional es el cociente entre dos números enteros (con divisor no nulo).

Si a y b son números enteros (con $b \neq 0$) entonces: $a : b = c$
donde c es un número racional que se expresa simbólicamente: $\frac{a}{b}$

> $\frac{a}{b}$ es irreducible si y sólo si a y b son coprimos.





EXPRESIÓN DECIMAL DE UN RACIONAL

Al dividir a por b (b distinto de cero), se obtiene una expresión decimal del número racional.
Es decir, los números racionales se pueden expresar en forma decimal con un número limitado de cifras decimales, o bien, como una expresión decimal con un número infinito de cifras, en este último caso las cifras aparecen en períodos, agrupadas.

En efecto:

$$\frac{1}{3} = 0.333... = 0.\hat{3} \qquad (1)$$

$$\frac{3549}{990} = 3.58484... = 3.5\overset{\frown}{84} \qquad (2)$$

$$\frac{3}{25} = 0.12 \qquad (3)$$

Las expresiones del tipo (1) y (2) reciben el nombre de expresiones decimales periódicas, donde el arco indica cuáles son los dígitos que se repiten.
La expresión (3) es la representación decimal del número racional dado. Existe identidad entre las expresiones decimales finitas o infinitas periódicas y los números racionales.

Ejemplo 1:

Expresar el número $0,\hat{3}$ como el cociente entre dos números enteros (número fraccionario).
Para hallar la fracción se procede de la siguiente manera:

$$0.\hat{3} = \tfrac{3}{9}$$

(período)

(tantos nueves como cifras tiene el período)

Sugerencia: verifique con su calculadora.

Al simplificar se obtiene: $0.\hat{3} = \tfrac{1}{3}$

Ejemplo 2:

Transforme la expresión periódica $0,\overset{\frown}{528}$ en fracción.

$$0.\overset{\frown}{528} = \frac{528 \longrightarrow \text{(período)}}{999 \longrightarrow \text{(tantos nueves como cifras tiene el período)}}$$

Ejemplo 3:

Transformar la expresión decimal periódica $4,\overset{\frown}{27}$ en fracción.

$$4.\overset{\frown}{27} = 4 + \frac{27}{99} \quad \text{entonces} \quad 4.\overset{\frown}{27} = \frac{47}{11}$$

Ejemplo 4:

Transformar la expresión decimal $0,32\hat{8}$ en fracción.

Esta expresión es una expresión decimal periódica mixta, puesto que existen cifras que no se repiten, en nuestro caso 32, para encontrar la fracción se procede de la siguiente forma:

$$0,32\hat{8} = \frac{\overset{(a)}{328} - \overset{(b)}{32}}{\underset{(c)}{900}}$$

(a): parte no periódica seguida del período.

(b): parte no periódica.

(c): tantos nueves como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

$$0,32\hat{8} = \frac{296}{900}$$

Simplificando: $0,32\hat{8} = \tfrac{74}{225}$

Ejemplo 5:

Transformar la expresión decimal periódica mixta en fracción:

$$5.4\overset{\frown}{132} = 5 + \frac{4132-4}{9990} = 5 + \frac{4128}{9990} = 5 + \frac{688}{1665} = \frac{9013}{1665}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Al sumar dos números racionales puede ocurrir que:

a) Ambos sumandos tengan el mismo denominador.
b) Ambos sumandos tengan distinto denominador.
a) La suma de dos números racionales de igual denominador es el número racional de igual denominador cuyo numerador es la suma de los numeradores dados.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad b \neq 0$$

b) La suma de dos números racionales de distinto denominador es la suma de los mismos previamente reducidos a mínimo común denominador.

El mínimo común denominador de los números racionales es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los números racionales.

DIFERENCIA DE NÚMEROS RACIONALES

Restar de un número racional $\frac{a}{b}$ otro $\frac{c}{d}$, es encontrar un tercer número racional $\frac{m}{n}$ tal que adicionado al sustraendo dé por resultado el minuendo.

Simbólicamente:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \quad \text{si} \quad \frac{m}{n} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7} \quad \text{puesto que} \quad \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

Al hallar la diferencia entre dos números racionales se presentan dos casos:

1. Que tengan igual denominador.
2. Que tengan distinto denominador.

En ambos casos se procede como en la adición.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

El producto de dos o más números racionales, es otro número racional cuyo signo se obtiene aplicando la regla de los signos de la multiplicación y su valor absoluto es el número racional que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador, el producto de los denominadores de los números dados.

DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Dividir un número racional por otro distinto de 0, es hallar un tercer número racional tal que multiplicado por el segundo dé por resultado el primero.

Simbólicamente:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{m}{n} \quad \text{si} \quad \frac{m}{n}.\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}:\left(-\frac{4}{11}\right)=-\frac{33}{20} \quad \text{porque} \quad -\frac{33}{20}.\left(-\frac{4}{11}\right)=\frac{3}{5}$$

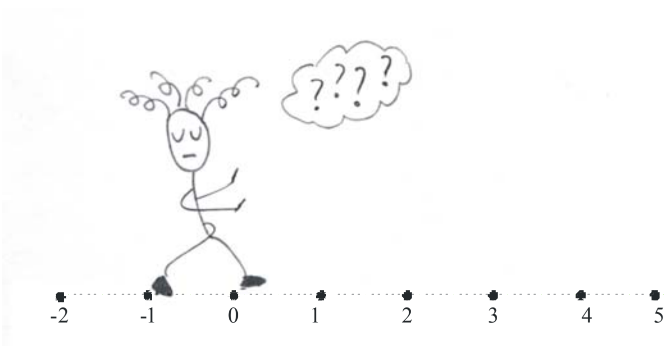
Para obtener el cociente de un número racional por otro, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}:\left(-\frac{4}{11}\right)=\frac{3}{5}.\left(-\frac{11}{4}\right)=-\frac{33}{20}$$

DENSIDAD DEL CONJUNTO Q

¿Se acuerda del tipo infinitamente delgado que muy cautelosamente salta de un entero a otro para no caerse?



¿Le estuvimos resolviendo el problema?

¿Puede el conjunto Q arrastrar los pies sin caerse?

¿Hay huecos en la recta que está generando Q?

Si tomamos dos números racionales, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ tal que $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ y sumamos numeradores y denominadores de ambas fracciones; obtenemos:

$$\frac{1}{3}<\frac{1+1}{3+2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$$

* Recuerde que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a.d<b.c \ \ (b>0 \ \wedge \ d>0)$

Se vuelve a efectuar este procedimiento entre 1/3 y 2/5.

$$\frac{1}{3}<\frac{1+2}{3+5}<\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}$$

Quiere decir que siempre existe otra fracción comprendida entre dos cualesquiera (existen infinitas)

Definición: Entre dos números racionales siempre existe otro (infinitos otros).

Ejercicios:

1. Obtenga tres números racionales comprendidos entre 1/3 y 2/3.
2. Compare los números racionales

$$\frac{n+1}{n-1} \text{ y } \frac{n}{n+1} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ y } n > 1$$

Rta.: $\forall n > 1 : \frac{n+1}{n-1} > \frac{n}{n+1}$

3. Halle un número racional si sabe que el punto que representa en la recta numérica es el punto medio del segmento determinado por el punto que representa a –1/3 y el que representa a 2/5.

Rta.: $\frac{1}{30}$

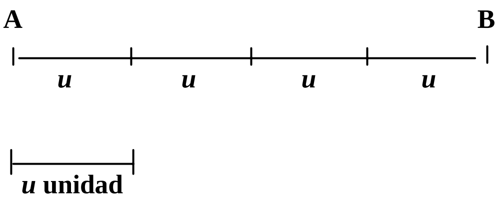
Como hemos puesto en correspondencia uno a uno cada número racional con los puntos de una recta podemos afirmar:

"Entre dos puntos de una recta existen infinitos otros"

Sin embargo nuestro tipo **se vive cayendo**.
Los huecos que encuentra en su camino son los denominados IRRACIONALES (expresiones decimales de infinitas cifras no periódicas).
Veamos como surgen.

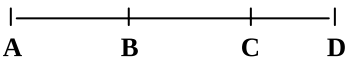
El problema de la medida

Supongamos que se adopta como unidad de medida de longitud un segmento de recta que cumple determinadas especificaciones.
Dar una medida de longitud en base a ésta unidad consiste en dar un número que indica cuántas veces está contenida la unidad en la longitud medida.



$|\overline{AB}| = 4u$

Como es fácil comprender, no todas las longitudes a medir pueden dividirse en un número entero de partes iguales a la unidad utilizada. Por ejemplo el segmento:



No contiene el segmento definido anteriormente un número entero de veces, sino que lo contiene más de dos veces. Existe un, llamémoslo sobrante, que está representado en la figura por el segmento $\overline{CD}$.

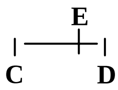
Para solucionar este problema, surge, casi naturalmente, la subdivisión en partes iguales del segmento elegido como unidad.

Luego trataremos de ver cuántas veces contiene alguna de esas partes el "sobrante".

Si por ejemplo, dividimos el patrón en dos partes obtenemos:

$$\frac{1}{2}u$$

Que está contenido más de una vez en el segmento $\overline{CD}$.



Existe un nuevo sobrante cuya magnitud trataremos de hacer coincidir con una subdivisión del patrón, supongamos cuatro partes.

$$\frac{1}{4}u$$

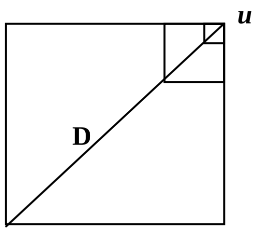
Vemos en el gráfico que el segmento $\overline{ED}$, sobrante de la medición utilizando medios patrones es igual a la cuarta parte del mismo.
En definitiva, el segmento $\overline{AD}$ resulta:

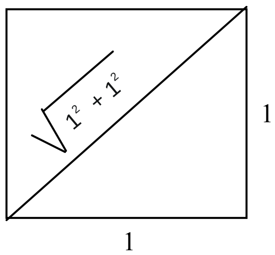
$$\left|\overline{AD}\right| = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = 2{,}75u$$

NÚMEROS IRRACIONALES ($\mathbb{I}$)

1) Sin embargo si su unidad de medida (patrón) es el lado de un cuadrado y lo que usted quiere medir es la diagonal del mismo (ya Euclides lo dijo "*misión imposible*").

"Siempre queda un poquito para medir"





y Pitágoras dijo: *"Llamémoslo* $\sqrt{2}$ *"*.

Lo concreto es que no existe fracción irreducible que pueda expresar a $\sqrt{2}$.

Demostración:

Procedamos por el absurdo suponiendo que existe una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow \quad a^2 = 2.b^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 \quad \text{es un número par}$$
$$\Rightarrow \quad a = 2.c \ \ (a \text{ es par})$$
$$\Rightarrow \quad 4c^2 = 2b^2$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 2.c^2$$
$$\Rightarrow \quad b \ \ \text{es un número par}$$
$$\Rightarrow \quad a \text{ y } b \text{ son números pares}$$
$$\Rightarrow \quad \tfrac{a}{b} \quad \text{no es irreducible}$$

Este absurdo proviene de suponer que $\sqrt{2}$ puede expresarse por $\frac{a}{b}$ irreducible.
Luego, no se puede.

Sugerencia: Calcule con su calculadora:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}414213562$$

No se ve período alguno pero la demostración anterior le permite afirmar que no lo hay.

2) Si usted quiere medir la longitud de una circunferencia tomando como unidad de medida el diámetro de la misma correrá una suerte similar:

$$\frac{\textit{Longitud de la circunferencia}}{\textit{diámetro}} \cong 3{,}1415926535... = \pi \text{ otro inconmensurable}$$

3) ¿Sabe usted qué es el factorial de un número natural?
(más adelante conocerá detalles)

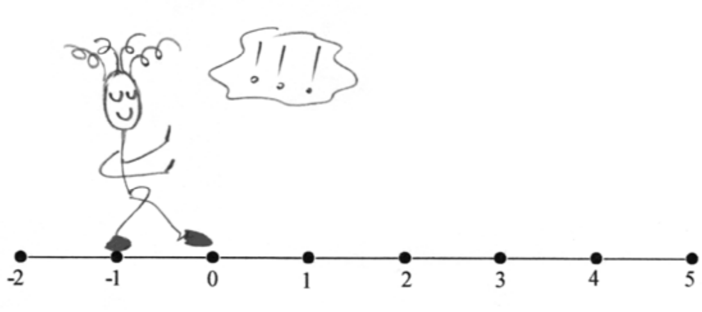
Si aceptamos que 0! = 1! = 1, y que por ejemplo 6! = 6.5.4.3.2.1 entonces:

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+... \cong 2{,}718281828459.... = e$$

A todas estas expresiones decimales infinitas no periódicas las llamamos **números irracionales**.

A esta altura nos preguntamos: ¿cuántos huecos encontró nuestro tipo infinitamente delgado?

Puesto que:
Si multiplicamos un número irracional por un racional se obtiene un irracional.
Diremos que:
"Entre dos números irracionales siempre existe otro (existen infinitos otros, **es un conjunto denso**)"
Y para nuestro tipo infinitamente delgado la recta racional era un colador, pero cuando le agregamos los números irracionales se le acabaron los problemas. Ya puede confiar en el camino.



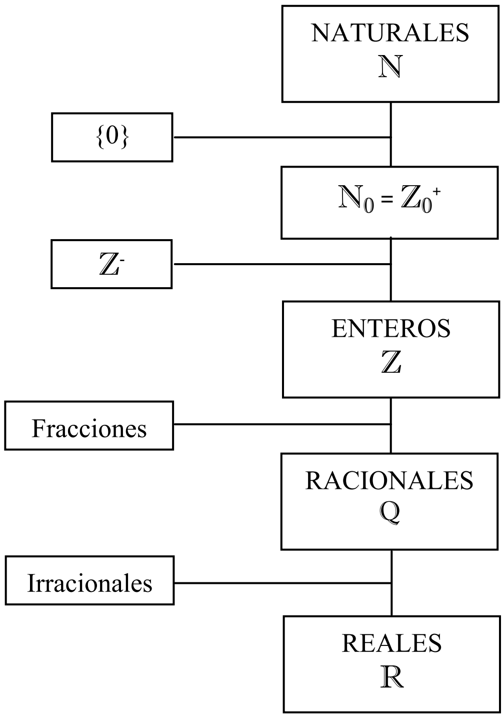
NÚMEROS REALES (ℝ)

El conjunto de los números racionales ℚ, y el conjunto de los números irracionales 𝕀, forman el conjunto de los números reales ℝ.

DENSIDAD DE ℝ

Entre dos números reales existe siempre otro número real (infinitos otros).

En efecto:



SISTEMA DE NÚMEROS REALES

Los números reales y sus propiedades (axiomas: suposiciones aceptadas sin demostración) reciben el nombre de *"sistema de números reales"*.

Los números serán los entes primitivos y las propiedades las siguientes:

Propiedades de la igualdad

1. **Reflexibilidad:** Todo número real es igual a sí mismo.
   Simbólicamente: $\forall a \in \mathbb{R} : a = a$
2. **Simetría:** $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a = b \Rightarrow b = a)$
3. **Transitividad:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

En el conjunto de los números reales dos operaciones básicas están definidas, ellas son la adición y la multiplicación.

En efecto si ***a*** y ***b*** representan números reales, entonces ***a* + *b*** se llama **Suma** y es el resultado de la adición entre ***a*** y ***b***, el **Producto *a* . *b*** es el resultado de multiplicar ***a*** y ***b***.
En la adición ***a*** y ***b*** reciben el nombre de **sumandos** y en la multiplicación **factores**.

Propiedades de la Adición y la Multiplicación

Propiedades de la adición

1. **Ley de composición interna:**

$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b) \in \mathbb{R}$ y es único

2. **Propiedad asociativa:**

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$$

3. **Existencia de elemento neutro:**

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists 0 \in \mathbb{R} / a+0 = 0+a = a$$

4. **Existencia de elemento inverso aditivo u opuesto (de cada número real):**

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} / a+(-a) = (-a)+a = 0$$
$$\forall a \in \mathbb{R} : (a > 0 \Leftrightarrow -a < 0)$$
$$a = 0 \Rightarrow -a = 0$$
$$a < 0 \Rightarrow -a > 0$$

5. **Propiedad conmutativa:**

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b = b+a$$

Propiedades de la multiplicación

6. **Ley de composición interna:**

$$\forall a.b \in \mathbb{R} : (a.b) \in \mathbb{R} \text{ y es único}$$

7. **Propiedad asociativa**

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$$

8. **Existencia de elemento neutro:**

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists 1 \in \mathbb{R} / a.1 = 1.a = a$$

9. **Existencia del inverso multiplicativo (de cada número real distinto de cero):**

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} / a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$$

10. **Propiedad conmutativa:**

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a.b = b.a$$

11. **Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:**

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a.(b+c) = a.b + a.c \text{ (por izquierda)}$$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (b+c).a = b.a + c.a \text{ (por derecha)}$$

Ejemplo 1.1

Si $2 \in \mathbb{R}$ y $3 \in \mathbb{R}$, entonces la ley de composición interna nos garantiza que la suma 2 + 3 representa un número real único: 5.
El producto 2.3, de acuerdo con esta ley es también único número: 6.

OBSERVACIÓN:

En el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), la ley de composición interna nos garantiza que al adicionar o multiplicar dos números reales se obtiene otro número real (suma o producto), y es único.

Ejemplo 1.2

Sean 3 y 7 elementos de ℝ. De acuerdo con la propiedad conmutativa las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$3 + 7 = 7 + 3$$
$$3 \,.\, 7 = 7 \,.\, 3$$

Ejemplo 1.3

Sean 2, 9 y 5 elementos de ℝ. De acuerdo con la propiedad asociativa son verdaderas las siguientes afirmaciones:

$$(2 + 9) + 5 = 2 + (9 + 5)$$
$$(2 \,.\, 9) \,.\, 5 = 2 \,.\, (9 \,.\, 5)$$

Ejemplo 1.4

El opuesto de 3 es (-3), puesto que 3 + (-3) = (-3) + 3 = 0
El opuesto de –1/2 es – (–1/2) = 1/2,...
El opuesto de 0 es 0,....

Ejemplo 1.5

Determinar el inverso multiplicativo del número real 4.
De acuerdo con la definición es $\frac{1}{4}$ puesto que $4.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.4 = 1$

Es decir dos números cuyos productos es igual a 1, se llaman **Recíprocos o Inverso Multiplicativo**.

Ejemplo 1.6

¿Existe el inverso multiplicativo del número real 0?

De existir sería un número real ($x \in \mathbb{R}$) tal que satisface la igualdad: $0.x = 1$

No existe $x \in \mathbb{R}$ tal que dicho producto sea 1.Por lo tanto, el número real "0" no tiene inverso multiplicativo.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y DE LA MULTIPLICACIÓN

Nombre de la propiedad	Para la adición	Para la multiplicación
Ley de composición interna	$a + b$ representa un número real único	$a \,.\, b$ representa un número real único
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \,.\, b = b \,.\, a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$
Elemento neutro	0 es el único elemento tal que: $0 + a = a + 0 = a$	1 es el único elemento tal que: $1 \,.\, a = a \,.\, 1 = a$
Elemento inverso	Existe un numero real único $–a$, inverso aditivo de a tal que: $a + (-a) = (-a) + a = 0$	Si $a \neq 0$, existe un número real único $\frac{1}{a}$, inverso multiplicativo de a tal que: $a \,.\, \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \,.\, a = 1$
Distributiva	$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$	$(b + c) \,.\, a = b \,.\, a + c \,.\, a$

Todo conjunto que satisface los axiomas (*propiedades*) dados anteriormente recibe el nombre de "**cuerpo**". El conjunto de los números reales satisface dichos axiomas por lo tanto constituye un cuerpo, el **cuerpo de los números reales.**

Definición de sustracción

Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces: $a - b = a + (-b)$

Es decir, sustraer el número real ***b*** al número real ***a*** equivale a adicionar ***–b*** (el opuesto de ***b***) al número real ***a***.

Ejemplo 1.7

$5 - 4 = 5 + (-4)$
$6 - (-3) = 6 + 3$

Definición de división

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, entonces la división de a por b se define como: $a : b = \dfrac{a}{b} = a \; . \; b^{-1}$

La división de un número real por cero no está definida.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES QUE SE DEDUCEN A PARTIR DE LOS AXIOMAS Y DE LAS DEFINICIONES DADAS:

Las definiciones y las propiedades dadas anteriormente proveen al sistema de los números reales de nuevas propiedades.

En efecto, ellas son:

Para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se demuestra que:

1. Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$
2. Si $a + a = a$ entonces $a = 0$
3. Si $a + b = 0$ entonces $b = -a$
4. $a = -(-a)$
5. $(-a) + (-b) = -(a + b)$
6. Si $a.b = c.b$ y $b \neq 0$ entonces $a = c$
7. $a \, . \, 0 = 0$
8. Si $a.b = 1$ entonces $a = b^{-1}$
9. Si $a \neq 0$ entonces $a^{-1} \neq 0$
10. Si $a \neq 0$ entonces $a = (a^{-1})^{-1}$
11. $(-a).b = -(a.b) = a.(-b)$
12. $(-a).(-b) = a.b$
13. $a.(b-c) = a.b - a.c$
14. $(a + b).\,(a + b) = a^2 + a.b + b.a + b^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$
15. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

16. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a.d}{b.d} = \frac{a}{b}$

17. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $a.d = b.c$

18. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$

19. Si $a.b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$

20. $1 = 1^{-1}$

Propiedades de ordenamiento

Definición:
Para todo *a,b* perteneciente al conjunto de los números reales, *a* es menor que *b* si y sólo si (*b-a*) es un número real positivo.

Simbólicamente:

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : (a < b \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+)$$

Definición:
Para todo *a,b* perteneciente al conjunto de los números reales, *a* es mayor que *b* si y sólo si (*a-b*) es un número real positivo.

Simbólicamente:

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : (a > b \Rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+)$$

Definición:
El conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado porque existe una relación entre sus elementos tal que:

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple:

1) $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ donde una y sólo una de éstas proposiciones es verdadera.
2) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (**propiedad transitiva**).
3) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ (**propiedad aditiva**).
4) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a.c < b.c$ (**propiedad multiplicativa**).

Las propiedades de orden definidas anteriormente particionan el conjunto de los números reales en tres subconjuntos, ellos son:

El subconjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \}$
El subconjunto de los reales negativos $\mathbb{R}^- = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \}$
El subconjunto: $\{0\}$

$$\mathbb{R}^+ (\ \mathbb{R}^- (\ \{0\} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^+ \ni \mathbb{R}^- = \emptyset \qquad \mathbb{R}^+ \ni \{0\} = \emptyset \qquad \mathbb{R}^- \ni \{0\} = \emptyset$$

Propiedades de la relación mayor

Sean a, b, c pertenecientes a $\mathbb{R}$:

1. Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$
2. Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$
3. Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $a.c > b.c$

4. Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $a.c < b.c$

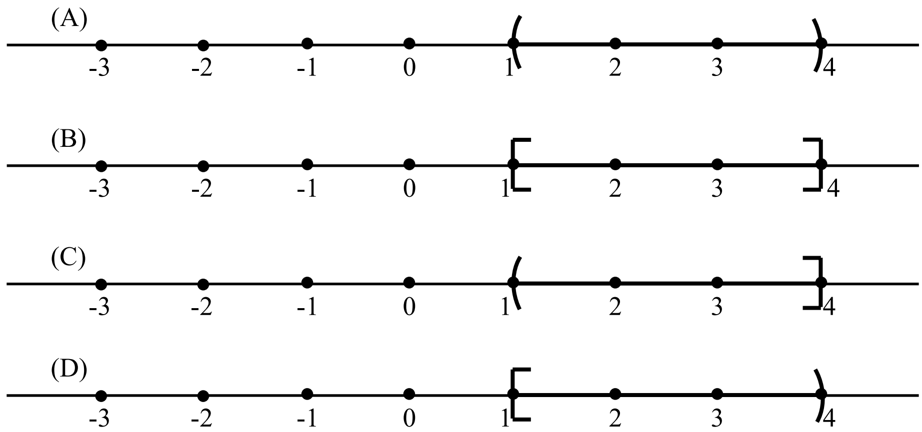
CONJUNTOS NUMÉRICOS

INTERVALOS

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x < 4 \}$$
$$B = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x \leq 4 \}$$
$$C = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x \leq 4 \}$$
$$D = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x < 4 \}$$

cuya representación sobre la recta numérica real en cada caso es:



A estos conjuntos se los expresa de la siguiente forma:

$$A = (1,4)$$
$$B = [1,4]$$
$$C = (1,4]$$
$$D = [1,4)$$

y se los denomina intervalos:

A: *intervalo abierto*

B: *intervalo cerrado*

C: *intervalo abierto a izquierda*

D: *intervalo abierto a derecha*

INTERVALOS INFINITOS

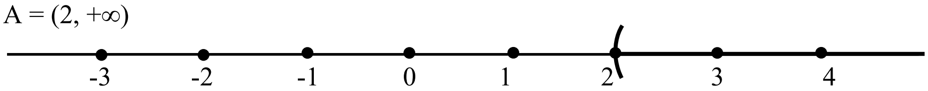
Conjuntos del tipo:

$$A = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x > 2 \}$$
$$B = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1 \}$$
$$C = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x < -1 \}$$
$$D = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 3 \}$$

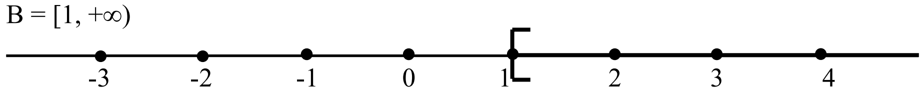
$$E = \{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \}$$

reciben el nombre de intervalos infinitos y se representan

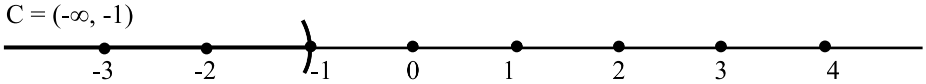
A = (2, +∞)



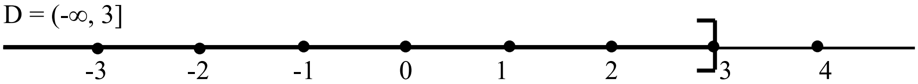
B = [1, +∞)



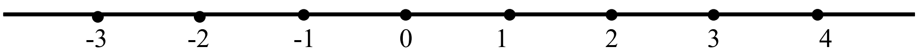
C = (-∞, -1)



D = (-∞, 3]



E = (-∞, +∞)



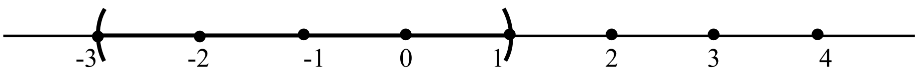
Ejercicios:

Represente gráficamente, exprese con notación de intervalo o como conjunto según corresponda:

a) $[-1, +\infty)$

b) $\{ x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \}$

c)



DESIGUALDADES

Cuando intentamos resolver numerosos problemas de Matemática se plantean expresiones de esta naturaleza:

1) $2x - 3 < x + 3$

2) $(x-1)(2x+3) > 0$

3) $(x-1)(2x+3) \geq 0$

4) $(x-2)(2-x) \leq 0$

5) $\frac{x}{x-1} \leq 0$

6) $\frac{2x+3}{2-x} \geq 2$

Denominadas **desigualdades o inecuaciones**. Nuestro interés consiste en encontrar el conjunto de los números reales que satisfacen las expresiones dadas.

Al resolver los ejemplos propuestos utilizando el simbolismo lógico, resulta:

1) $2x-3<x+3 \Leftrightarrow 2x-x<3+3 \Leftrightarrow x<6$

Luego la solución está dada por: $S=(-\infty,6)$

2) $(x-1)(2x+3)>0 \Leftrightarrow (x-1>0 \wedge 2x+3>0) \veebar (x-1<0 \wedge 2x+3<0)$

(producto positivo)

$$\Leftrightarrow \left(x>1 \wedge x>-\frac{3}{2}\right) \veebar \left(x<1 \wedge x<-\frac{3}{2}\right)$$

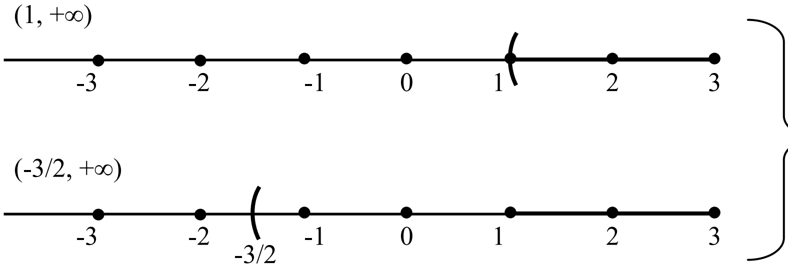
$$\Leftrightarrow \left[(1,+\infty) \cap \left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\right] \Delta \left[(-\infty,1) \cap \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\right]$$

donde observamos que la solución es:

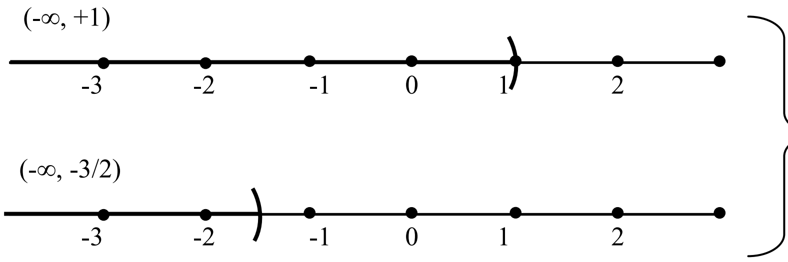
$$S = S_1 \Delta S_2$$

<u>Aclaración</u>:

La diferencia simétrica $S_1 \Delta S_2 = S_1 \cup S_2 \; si \; S_1 \cap S_2 = \emptyset$



$S_1 = (1, +\infty)$



$S_2 = (-\infty, -\frac{3}{2})$

$$S = S_1 \Delta S_2 = (1,+\infty) \cup \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$$

<u>Verificación</u>:

$x=-2 \;\Rightarrow\; (-2-1)(2(-2)+3)=(-3)(-1)>0$ $\quad(V)\quad -2 \in S$

$x=-\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(2.\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right)=\left(-\frac{5}{2}\right).0=0$ $\quad(F)\quad -\frac{3}{2} \notin S$

$x=0 \;\Rightarrow\; (0-1).(2.0+3)=(-1).3=-3<0$ $\quad(F)\quad 0 \notin S$

$x=2 \;\Rightarrow\; (2-1).(2.2+3)=1.7=7>0$ $\quad(V)\quad 2 \in S$

Finalmente:

$$S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \cup (1,+\infty)$$

3) $(x-1)(2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+3) > 0 & (1) \\ \vee & \\ (x-1)(2x+3) = 0 & (2) \end{cases}$

(1) Ver ej. 2)

(2) $\begin{cases} x-1=0 \\ \vee \\ 2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \begin{cases} S_1 = \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\Delta(1,+\infty) \\ \bigcup \\ S_2 = \left\{1,-\frac{3}{2}\right\} \end{cases}$

Teniendo en cuenta que:

$$S = S_1 (S_2$$

resulta:

$$S = (-\infty,-3/2] \bigcup [1,+\infty)$$

4) $(x-2)(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(2-x) < 0 & (1) \\ \vee & \\ (x-2)(2-x) = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\begin{cases} x-2>0 \wedge 2-x<0 \\ \underline{\vee} \\ x-2<0 \wedge 2-x>0 \end{cases} \\ \vee \\ (2)\begin{cases} x-2=0 & (2) \\ \vee \\ 2-x=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 2 \wedge x > 2 & (1) \\ \underline{\vee} \\ x < 2 \wedge x < 2 \end{cases} \\ \vee \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \begin{cases} (2,+\infty)\Delta(-\infty,2) \\ \bigcup \\ \{2\} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$S = \left[(-\infty,2)\Delta(2,+\infty)\right] \bigcup \{\,2\,\} = \mathbb{R}$$

Si observamos la desigualdad propuesta en (4):

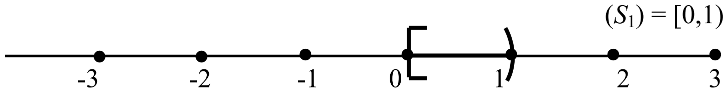
$$\begin{aligned} (x-2)(2-x) \leq 0 &\Leftrightarrow (x-2)[-(-2+x)] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-2)(x-2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde vemos que para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ la desigualdad se verifica.

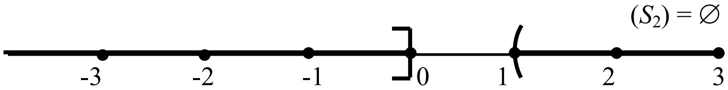
5) $\dfrac{x}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \wedge x-1<0 \\ \veebar \\ x \le 0 \wedge x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \wedge x<1 \\ \veebar \\ x \le 0 \wedge x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow x \in \begin{cases} [0,+\infty) \cap (-\infty,1) \\ \Delta \\ (-\infty,0] \cap (1,+\infty) \end{cases}$

$S = S_1 \Delta S_2$

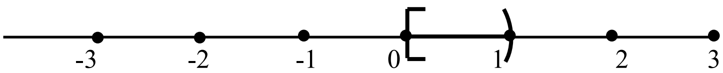
$(S_1) = [0,1)$



$(S_2) = \varnothing$



$$\Leftrightarrow \; x \in \begin{cases} [0,1) \\ \Delta \\ \emptyset \end{cases}$$



$S = [0,1)$

Verificación:

$x=-1$	$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} > 0$	(F)	$-1 \notin S$
$x = \frac{1}{2}$	$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 < 0$	(V)	$\frac{1}{2} \in \text{S}$
$x=1$	(no está definida)		$1 \notin S$
$x=2$	$\frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 > 0$	(F)	$2 \notin S$

6)

$$\frac{2x+3}{2-x} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2-x} - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-2(2-x)}{2-x} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-4+2x}{2-x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{2-x} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1 \ge 0 \wedge 2-x>0 \\ \veebar \\ 4x-1 \le 0 \wedge 2-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{4} \wedge x<2 \\ \veebar \\ x \le \frac{1}{4} \wedge x>2 \end{cases}$$

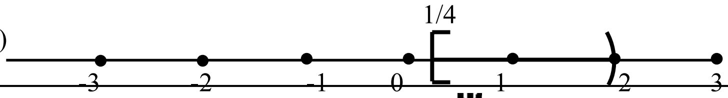
$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{4},2\right) \Delta \emptyset$$

$$S = \left[\frac{1}{4},2\right) \Delta \emptyset$$

$$\boxed{S = \left[\tfrac{1}{4},2\right)}$$

1/4

(S)



VALOR ABSOLUTO O MÓDULO

El valor absoluto o módulo de un número real *x*, se simboliza por $|x|$ y se define de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

El módulo de un número real es igual al mismo número, si dicho número es positivo o cero, o a su opuesto, si el número es negativo.

Ejemplos:

$$|2| = 2 \qquad |0| = 0$$
$$|-3| = -(-3) = 3 \qquad |-5-1| = -(-6) = 6$$
$$|2-3| = -(-1) = 1$$

Propiedades del módulo:

1. $a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|a.b| = |a|.|b|$
4. $|a : b| = |a| : |b|$, con $b \neq 0$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$
6. $-|a| \leq a \leq |a|$
7. $|a^n| = |a|^n, n \in \mathbb{N}$

   Si $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ entonces se verifica que:

8. $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$
9. $|a| > b$ si y sólo si $a > b \vee a < -b$
10. $|a| = b$ si y sólo si $a = b \vee a = -b$

Ejercicio:

Verifique mediante ejemplos numéricos las propiedades anteriores.

Ejemplo:

1) Determinamos el valor de *x* en:

   i) $|x-3| = 2$ ii) $|2-3x| = |x|$

$$\text{i)} \quad |x-3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2 \\ \vee \\ x-3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \vee \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1,5\}$$

ii) $|2-3x| = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x = x \\ \vee \\ 2-3x = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = -2 \\ \vee \\ -2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \vee \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1, \frac{1}{2}\}$

Ejercicio:

Demostramos que: $\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} = |a|$

Dividimos la demostración en dos partes:

1) Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$

$\Rightarrow \quad |a|^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{|a|^2} = \sqrt{a^2}$

$\Rightarrow \quad |\mathrm{a}| = \sqrt{a^2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2} = |a|, \text{ si } a \geq 0$

2) Si a < 0 entonces $|a| = -a$

$\Rightarrow \quad |a|^2 = (-a)^2$

$\Rightarrow \quad |a|^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{|a|^2} = \sqrt{a^2}$

$\Rightarrow \quad |a| = \sqrt{a^2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2} = |a|, \text{ si } a < 0$

De 1) y 2) se cumple que:

$$\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} = |a|$$

Ejercicios:

1) Determine el valor de x que verifica:

a) $\sqrt{x^2} = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \vee \\ x = -1 \end{cases}$

b) $\sqrt{(x-3)^2} = 4 \Rightarrow$

$$|x-3| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \\ \vee \\ \mathrm{x - 3 = -4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ \vee \\ x = -1 \end{cases}$$

2) Si $a \in \mathbb{R}$ - $\{0\}$ resuelva: $\frac{a-\sqrt{a^2}}{a}$

a) Si $a > 0$ es $|a| = a$

$$\Rightarrow \frac{a-\sqrt{a^2}}{a} = \frac{a-|a|}{a} = \frac{a-a}{a} = 0$$

b) Si $a < 0$ es $|a| = -a$

$$\Rightarrow \frac{a-\sqrt{a^2}}{a} = \frac{a-|a|}{a} = \frac{a+a}{a} = 2$$

3) ¿Cuál es el conjunto solución de las siguientes desigualdades?

a. $|x| \le 3$
b. $|x| > 5$
c. $|x-1| < \frac{1}{2}$
d. $|2-3x| \ge 3$
e. $|2-\frac{3}{2}x| \ge 0$
f. $|\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}| < 0$

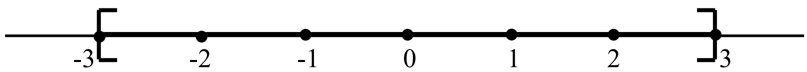
Soluciones:

a) $|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$

Lo cual indica que pueden asignarse a x valores comprendidos entre –3 y 3 inclusive ambos.
Por lo tanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \le x \le 3\}$$

o bien $S = [-3,3]$
que gráficamente resulta:



Nos preguntamos ahora ¿dónde interviene la **lógica** en este problema?

Para contestar esta pregunta y que nos sirva la respuesta para otras situaciones similares pensemos en:

$$|x| \le p \text{ con } p \in \mathbb{R}^+$$

En realidad resulta que podemos asignar a $x \in \mathbb{R}$ valores que sean menores o iguales que p y a la vez mayores o iguales que $-p$, en símbolos:

$$|x| \le p \Leftrightarrow x \le p \wedge x \ge -p \Leftrightarrow x \in [(-\infty, p] \cap [-p, +\infty)]$$
$$\Leftrightarrow x \in [-p, p]$$

Por lo tanto la solución es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \in [-p, p]\}$$

En cambio si:

$$|x| < p \Leftrightarrow x < p \wedge x > -p \Leftrightarrow x \in [(-\infty, p) \cap (-p, +\infty)]$$
$$\Leftrightarrow x \in (-p, p)$$

y la solución es:

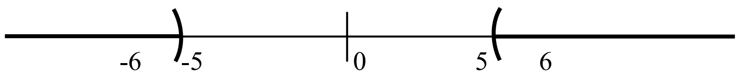
$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \in (-p, p)\}$$

b) $|x| > 5 \Leftrightarrow x > 5 \vee x < -5 \Leftrightarrow x \in [(5, +\infty) \cup (-\infty, -5)]$

Por lo tanto resulta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in [(5,+\infty) \cup (-\infty,-5)]\}$$

Y gráficamente resulta



¿Podríamos escribir el conjunto solución de la siguiente forma?

$$S = C_R\,[-5,5]$$

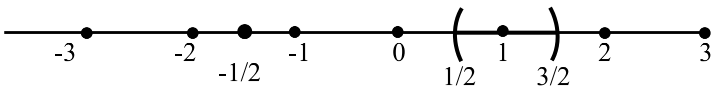
o bien:

$$S = \mathbb{R} - [-5,5]?$$

c) $|x - 1| < \frac{1}{2}$

$$|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < \frac{1}{2} \\ \wedge \\ x-1 > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ \wedge \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\infty, \frac{3}{2}) \\ \cap \\ (\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$

Gráficamente puede observarse la solución:



$$S = \left\{ x \in \mathrm{R} \,/\, x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

d) $|2 - 3x| \geq 3$

$$|2 - 3x| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x \geq 3 \\ \vee \\ 2-3x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x \geq 1 \\ \vee \\ -3x \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ \vee \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$S = \left(-\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

Ya lo hemos efectuado antes pero a lo mejor usted no estaba atento, cuando dividimos por (-3) a ambos miembros de la desigualdad, la desigualdad cambia de sentido ¿por qué? (le damos una ayudita: si la desigualdad es 2 < 3 y la multiplicamos o dividimos por (-1) resulta -2 > -3).

Entonces estará de acuerdo en afirmar:

* Entre dos números positivos es menor el de menor valor absoluto.
** Entre dos números negativos es menor el de mayor valor absoluto.

e) $\left|2 - \frac{3}{2}x\right| \geq 0$

Uno podría "abalanzarse" sobre el ejercicio, lo cual no es bueno, y decir: "igualito al d)" o alejarse, mirarlo y decir:

$$S = \{x \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

¿Por qué?

f) $\left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right| < 0$

¿Y ahora? ¿$\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x \in S$? No!!
¿Por qué?

Porque el valor absoluto de cualquier número no puede ser negativo.

Definición de distancia

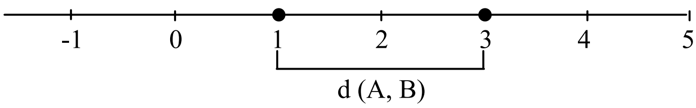
> Sean x_A y x_B las coordenadas de dos puntos A y B representados sobre la recta r, se define distancia de A a B, al valor absoluto de la diferencia entre x_A y x_B.
>
> Simbólicamente: $d(A,B) = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$

Ejemplos:

1. Sean A y B puntos sobre una recta cuyas coordenadas son respectivamente 1 y 3. Determínese $d(A,B)$.

$$d(A,B) = |3-1| = |2| = 2$$

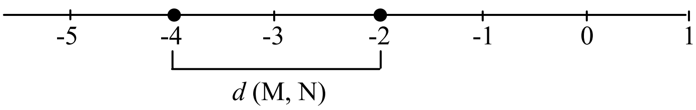
Gráficamente:



2. Sean M y N puntos sobre una recta cuyas coordenadas son respectivamente –2 y –4.
Determinese $d(M,N)$.

$$d(M,N) = |-4-(-2)| = |-4+2| = |-2| = 2$$

Gráficamente:



Propiedad de la distancia:

Sean A y B puntos de una recta de coordenadas x_A y x_B. Es posible demostrar que:

$$d(A,B) = d(B,A)$$

Propiedad:

Sean x_A y x_B las coordenadas de dos puntos A y B que pertenecen a una recta r, la coordenada del punto medio del segmento AB es:

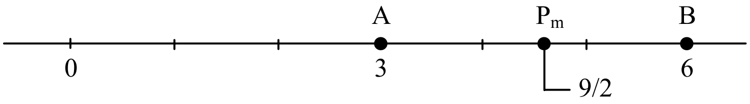
$$p_m = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Ejemplo:

Sea el punto A de coordenada 3 y el punto B de coordenada 6. La coordenada del punto medio de AB es:

$$p_m = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2}$$

Gráficamente:



Ejercicio:

Determine el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a 5 es mayor o igual que 3.

Rta: $(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$

SOBRE EXPONENTES Y RAÍCES

Si usted tiene que calcular el volumen de un cubo de arista de 12.34 cm piensa que la solución de su problema es calcular el área de la base:

área de la base = (12.34)(12.34)

y luego multiplicarla por la altura

Volumen = (12.34)(12.34)(12.34)

Sin embargo usted no escribe estas expresiones tan poco elegantes, sino que anota:

$$V = L^3 = (12.34)^3\ (u^3)$$

> *Definición:*
> Si a es cualquier número y n es un entero positivo, entonces
> $a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n \text{ factores } a}$ $\quad$ a es la base
> n es el exponente
> a^n es la potencia

Ejercicios

1. ¿Cómo escribiría la multiplicación de 10 factores 3?

   Rta.: 3^{10}

2. ¿Cómo expresaría a 10.000.000 usando potencias?

   Rta.: 10^7

3. Calcule -2^2 y $(-2)^2$

   Rta.: $-2^2 = -4$
   $(-2)^2 = 4$

REGLAS PRÁCTICAS PARA TRABAJAR CON EXPONENTES

Primero:

Si quiere calcular:

$$a^3.a^4 = (a.a.a)\ (a.a.a.a) = a^7 = a^{3+4}$$

como a es cualquier número, entonces: $a^n.a^m = a^{n+m}$

Segundo:

Si en cambio usted está interesado en saber: $(a^3)^4$, entonces:

$$(a^3)^4 = a^3.\ a^3.\ a^3.\ a^3 = a^{3.4} = a^{12}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

Tercero:

En otras oportunidades queremos simplificar expresiones del tipo:
(con $a \neq 0$)

$$\frac{a^6}{a^4};\frac{a^4}{a^6};\frac{a^3}{a^3}$$

Obtenemos:

$$\frac{a^6}{a^4} = \frac{a^4.a^2}{a^4} = a^2 = a^{6-4}$$

$$\frac{a^4}{a^6} = \frac{a^4}{a^2.a^4} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^{6-4}}$$

$$\frac{a^3}{a^3} = 1$$

De donde deducimos:

$$\text{Si } a \neq 0,\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

o sea:

$\forall a : a \neq 0$

si $m > n$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	(1)
si $m < n$, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	(2)
si $m = n$, $\frac{a^m}{a^n} = 1$	(3)

Partimos del supuesto que:

- Si $m > n$ entonces $m - n > 0$ equivale a (1)
- Si $m < n$ entonces $m - n < 0$ $a^{m-n} = a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}$ equivale a (2)
- Si $m = n$ entonces $m - n = 0$ y $a^0 = 1$ equivale a (3)

Veamos más en detalle la función que cumple este exponente negativo.
Si multiplicamos: $a^3.a^{-3} = a^{3-3} = a^0 = 1$
Esto significa que a^{-3} es el recíproco de a^3: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $(a \neq 0)$

Definición:
Si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos:

$$\frac{3^0}{3^{-8}} = \frac{1}{\frac{1}{3^8}} = 3^8 = 3^{0-(-8)}$$

$$\frac{h^4}{h^4} = 1 = h^0 = h^{4-4} (h \neq 0)$$

$$\frac{5^{-3}}{5^{-4}} = \frac{\frac{1}{5^3}}{\frac{1}{5^4}} = \frac{5^4}{5^3} = 5^1 = 5^{-3-(-4)}$$

OBSERVACIÓN:

Quiere decir que hemos partido del supuesto de que el exponente n pertenece a los enteros positivos y hemos dado validez a las reglas expuestas para n entero.

POTENCIACIÓN DE MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES

Si nos encontramos ante una expresión:

$$(a.b)^n = \underbrace{(a.b).(a.b).(a.b)...(a.b)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a.a.a...a}_{n \text{ factores}} \,.\, \underbrace{b.b.b...b}_{n \text{ factores}} = a^n.b^n$$

de donde: $(a.b)^n = a^n.b^n$

o bien, si la expresión es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}...\frac{a}{b}}_{n \text{ factores}} = \frac{a^n}{b^n}$$

de donde:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

RADICACIÓN

Hasta aquí consideramos que conocidas la base y el exponente podemos calcular la potencia:

$$\text{BASE} \rightarrow 2^{3 \leftarrow \text{EXPONENTE}} = X \leftarrow \text{POTENCIA}$$

Nos preguntamos ahora ¿si conocemos la potencia y el exponente, qué operación nos permite encontrar la base?

$$X^3 = 8 \Rightarrow X = \sqrt[3]{8} \text{ porque } \left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$$

> *Definición:*
>
> Si n es impar y $a \in \mathbb{R}$ entonces $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
>
> Si n es par y $a \geq 0$ entonces $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

¡CUIDADO! $\sqrt[2n]{-4}$ **No es un Número Real**

Si $a < 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\sqrt[2n]{a} \notin \mathbb{R}$

OBSERVACIÓN:

i) Si n es par y $a \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a}$ es un único número real <u>no negativo</u> tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Ejemplo: $\sqrt{4} = 2$

ii) Si n es impar, $\sqrt[n]{a}$ es un único número real tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Ejemplo: $\sqrt[3]{-8}$ = -2

Reglas para los radicales

1. Si n es impar, entonces $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

   Si n es par, $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

2. Si n es impar, $b \neq 0$, entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

   Si n es par, $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Racionalicemos

En ciertas operaciones como las siguientes

Ejemplo 1) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$, si $x \neq 0$

Ejemplo 2) $\dfrac{1}{x.\sqrt{y} + y.\sqrt{x}}$, si $x > 0$ e $y > 0$

Si usted considera conveniente que los radicales no estén en el denominador, usted *racionalizará denominadores.*

En el primer ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}.\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}} = \dfrac{2.\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}} = \dfrac{2.\sqrt[5]{x^2}}{x}$ $\quad x \neq 0$

En el segundo ejemplo (RECUERDE $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$)

$$\frac{1}{x.\sqrt{y} + y.\sqrt{x}} = \frac{1}{x.\sqrt{y} + y.\sqrt{x}}.\frac{x.\sqrt{y} - y.\sqrt{x}}{x.\sqrt{y} - y.\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x.\sqrt{y} - y.\sqrt{x}}{(x.\sqrt{y})^2 - (y.\sqrt{x})^2} = \frac{x.\sqrt{y} - y.\sqrt{x}}{x^2 y - y^2 x} =$$

$$= \frac{x.\sqrt{y} - y.\sqrt{x}}{x.y(x - y)} \quad (x > 0,\ y > 0,\ x \neq y)$$

Si en cambio usted tiene:

Ejemplo 3) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

y usted considera oportuno que los radicales estén en el denominador, entonces se racionalizarán

numeradores: $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}.\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \dfrac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$

Expresión ésta que para valores de $x \neq 2$ es igual a: $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$

Ejercicio:

Dadas las siguientes expresiones racionalice en cada caso según se indica

a. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3x}}{5}$ (numerador)

b. $\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2x}}}$ (denominador)

POTENCIACIÓN CON EXPONENTES RACIONALES

Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se plantea:

$$\left.\begin{array}{l} a = a^{1} = a^{\frac{1}{n}.n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} \\ \\ a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Al elevar a la m-ésima potencia ambos miembros, la conclusión se obtiene:

$$(\sqrt[n]{a})^{m} = (a^{\frac{1}{n}})^{m} \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^{m} = (a^{\frac{1}{n}})^{m} = a^{\frac{m}{n}}$$

expresión válida para $a < 0$, si n es impar

OBSERVACIÓN:
Ahora el exponente pertenece al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

Ejemplos:

Calculamos:

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{3}} = \sqrt[4]{8}$$

$$(8^{\frac{1}{2}})^{3} = 8^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8^{3}} = \sqrt{(2^{3})^{3}} = \sqrt{2^{9}} = 2^{4}\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$$

¿Existe $-4^{\frac{1}{2}}$? y ¿ $(-4)^{\frac{1}{2}}$?

$-4^{\frac{1}{2}} = -(4^{\frac{1}{2}}) =$ -2 y $(-4)^{\frac{1}{2}}$ no es un número real

POTENCIACIÓN CON EXPONENTES REALES

Todo lo antedicho (definiciones y propiedades) se aplica a la potenciación de base $a > 0$ y exponente $n \in \mathbb{R}^{+}$

Calcule con su calculadora

$$2^{\pi}, \left(\frac{1}{3}\right)^{2e}, 3^{-e}, \pi^{\pi}$$

UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 2

Números y su aplicación a la geometría

1) Obtenga dos números naturales consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea igual al número primo 31.

Rta.: 16 y 15

2) Si sabe que la suma de dos números es 30 y su máximo común divisor 6, determine dichos números.

Rta.: 24 y 6; 18 y 12

3) Tres ómnibus salen de la misma estación terminal en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 h 45 min. en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 h 5 min., y permanece 7 min. en la estación. El tercero tarda 1 h 18 min., y permanece 12 min. en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana, determine:

   a) A que hora volverán a salir juntos de la estación.
   b) El número de viajes efectuado por cada uno.

Rta.: a) a las 12, a las 6 de la tarde y a la medianoche. b) 3 veces, 5 veces y 4 veces.

4) Si sabe que el producto de dos números es 1512 y m.c.d. es 6, determine el m.c.m.

Rta.: 252

5) Dos ruedas dentadas engranan una con otra. Si sabe que la mayor tiene 54 dientes y las más pequeña 34, determine cuántas vueltas dará la pequeña cuando la mayor dé 221 vueltas.

Rta.: 351

6) La madre de Gabriela compra 6 kg. de ciruelas para hacer mermelada. Los carozos quitados representan ¼ del peso de las frutas. Añade un peso de azúcar igual al peso de la pulpa que queda. La mezcla pierde por la cocción 1/5 de su peso.
   Determine el número de potes de 375 gramos que puede llenar con el dulce de ciruelas elaborado.

Rta.: 19 potes

7) Un campesino ha recolectado 6.720 kg. de alfalfa con la que quiere alimentar a sus 7 vacas durante 120 días. Al cabo de 15 días, compra otras 3 vacas. Determine la cantidad de alfalfa que le faltará para alimentar a sus vacas durante el tiempo previsto.

Rta.: 2520 kg.

8) Dadas las siguientes proposiciones indique cuál es verdadera y cuál es falsa:

   “El producto de un número impar de números negativos es negativo”
   “La diferencia de dos números positivos es siempre positiva”
   “El cociente de un número positivo y otro negativo es siempre un número negativo”
   “La diferencia de un número positivo y otro negativo es siempre un número negativo”

9) Piense un número, multiplíquelo por 2, agréguele 33, réstele 13, divídalo por 2, y vuelva a restar el número que pensó. Su resultado debe ser el número 10. Muestre que éste procedimiento dará como respuesta 10 para cualquier número *n* seleccionado.

10) Un taller producía 126 artículos diarios. Como resultado del perfeccionamiento técnico su producción diaria aumento hasta 189 artículos. ¿En qué tanto por ciento se incrementó el rendimiento?

Rta.: 50 %

11) En una bolsa de 200 caramelos hay 110 de fruta y el resto de leche. ¿Cuántos caramelos de fruta hay que agregar para que los caramelos de fruta sean el 70 % del total de la bolsa?

Rta.: 100

12) ¿La suma de dos números irracionales es necesariamente un número irracional? Justifique.

Rta.: No. Por ejemplo $(1 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = 3$ que es racional

13) ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

$$3\sqrt{2};\ -\frac{1}{3};\ 7; 0;\ \frac{1}{5};\ 0{,}7;\ 1{,}\overline{2};\ ...;\ \sqrt{2}-3+5-\sqrt{2}$$

Rta.: Irracional $3\sqrt{2}$. Racionales todos los demás.

14) Determine, cuando sea posible, el resultado de:

14.1) 15.0 14.2) 0.0 14.3) $\frac{1}{0}$

14.4) $\frac{0}{1}$ 14.5) 0^{-1} 14.6) $\frac{0}{0}$

Rta.: 14.1) 0. 14.2) 0. 14.3) no es posible 14.4) 0. 14.5) y 14.6) no es posible

15) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

15.1) $0 < \sqrt{2} < 1$ 15.2) $2 < e < 3$ 15.3) $-7 < -15$

15.4) $-9 < \frac{1}{3}$ 15.5) $\frac{7}{6} < \frac{34}{9}$ 15.6) $0{,}3 > 0{,}4$

15.7) $-\frac{7}{6} < \frac{34}{39}$ 15.8) $-2 > -17$

Rta.: 15.1) F. 15.2) V. 15.3) F. 15.4) V. 15.5) V. 15.6) F. 15.7) V. 15.8) V.

16) Pablo realizó una compra que importa los $\frac{2}{3}$ del dinero que le dió su madre, pero sobre ese valor le hacen un descuento del 15 %. ¿Cuánto dinero le dió su madre si le quedan $ 260?

Rta.: $ 600

17) Encuentre el conjunto solución de:

17.1) $-3x > 9$ $\quad S = (-\infty, -3)$

17.2) $\dfrac{1}{x} + 3 > 4$ $\quad S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1\}$

17.3) $x^2 - 2x \geq 0$ $\quad S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0 \vee x \geq 2\}$

17.4) $\dfrac{2x-5}{5} - 1 > 3 - x$ $\quad S = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > \dfrac{25}{7}\right\}$

17.5) $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ $\quad S = (-1, 1)$

17.6) $3x^2 - 6x + 3 < 0$ $\quad S = \emptyset$

17.7) $\dfrac{1-x}{x+5} \leq 0$ $\quad S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < -5 \vee x \geq 1\}$

17.8) $-1 \leq \dfrac{2x-3}{4} < 5$ $\quad S = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{23}{2}\right)$

17.9) $-12 < 6 - 3x < -2$ $\quad S = \left(\dfrac{8}{3}, 6\right)$

17.10) $x \leq 3x + 2 \leq x + 6$ $\quad S = [-1, 2]$

18) Encuentre el conjunto solución de:

18.1) $|2x - 1| \leq 2$ $\quad S = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

18.2) $|x + 5| \geq 3$ $\quad S = (-\infty, -8] \cup [-2, +\infty)$

18.3) $|2 - 4x| \leq 2$ $\quad S = [0, 1]$

18.4) $\left|\dfrac{1}{x} + 3\right| > 4$ $\quad S = \left(-\dfrac{1}{7}, 0\right) \cup (0, 1)$

18.5) $|2x - 3| + 4 \geq 10$ $\quad S = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{9}{2}, +\infty\right)$

18.6) $1 - x^2 > 0$ $\quad S = (-1, 1)$

18.7) $0 < |x - 1| < 4$ $\quad S = (-3, 1) \cup (1, 5)$

18.8) $3x^2 - 1 \leq 2$ $\quad S = [-1, 1]$

18.9) $4x - x^2 > 4$ $\quad S = \emptyset$

18.10) $|x^2 - 1| > 3$ $\quad S = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

19) Determine el conjunto de todos los números reales tales que su cuadrado sea menor que 3.

Rta.: $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

20) Determine el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a –3 sea menor que 5.

Rta.: (-8,2)

21) Determine el conjunto de todos los números reales tales que su distancia a 3 es mayor o igual que 4.

Rta.: $(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$

22) ¿Para qué números reales se verifica que la suma del número y su recíproco es mayor que 2?

Rta.: $(0,+\infty)-\{1\}$

23) Un punto x está 8 unidades distante de –3. ¿A qué distancia está el punto x de 1?

Rta.: 12 ó 4

24) La distancia entre $x-1$ y 6 siendo $x<0$, es $|3x-3|$. Calcule x.

Rta.: $x=-2$

25) Efectúe las siguientes operaciones:

25.1) $\dfrac{10^{2n+1}}{10^{n+1}}$ Rta.: 10^n

25.2) $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^4y^{-3}}$ $(x\neq 0\wedge y\neq 0)$ Rta.: $x^{-7}y^7$

25.3) $1+x^{-1}$ $(x\neq 0)$ Rta.: $\dfrac{x+1}{x}$

25.4) $\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)x$ $(x\geq 0)$ Rta.: $x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{3}{2}}$

25.5) $\dfrac{14a^7b^4(c^3)^2}{21a^6b^6c^8}$ $(a,b,c\neq 0)$ Rta.: $\dfrac{2}{3}ab^{-2}c^{-2}$

25.6) $\dfrac{10^{x+y}10^{y-x}10^{y+1}}{10^{y+1}10^{2y+1}}$ Rta.: 0,1

25.7) $\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1}\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}$ $(|a|\neq|b|,a\neq 0,b\neq 0)$ Rta.: $\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}$

25.8) $\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2a}}-\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ $(a>0)$ Rta.: $\dfrac{(a-3)\sqrt{2a}}{2a}$

25.9) $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$ Rta.: $2+\sqrt{2}$

25.10) $\dfrac{81^{0,25}+9^{-0,5}}{(-27)^{\frac{1}{3}}+(-8)^{\frac{2}{3}}}$ Rta.: $\dfrac{10}{3}$

26) Racionalice el numerador (para los posibles valores de las variables).

26.1) $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ Rta.: $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

26.2) $\dfrac{\sqrt{u}-2}{u-4}$ Rta.: $\dfrac{1}{\sqrt{u}+2}$

27) Racionalice el denominador.

27.1) $\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}$ Rta.: $-4-2\sqrt{5}$

27.2) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ Rta.: $-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Para resolver problemas aplicaremos la siguiente **metodología**:

- **Comprender el problema:** Leer cuidadosamente el enunciado. Identificar datos e incógnitas. Representar, si es posible, gráfica o geométricamente.
- **Diseñar un plan de acción:** Elaborar una estrategia de resolución, vinculando datos e incógnitas.
- **Ejecutar el plan:** Justificar y explicar los pasos seguidos.
- **Examinar la solución obtenida:** Analizar si la respuesta tiene sentido, si se cumplen las condiciones, y **realizar la verificación** correspondiente.

Luego de resolver cada problema nos preguntaremos:

¿Qué aprendí de este problema?
¿Se produjo una nueva organización de mis conocimientos?
¿Qué aprendí de los obstáculos con que tropecé?

Comprender el Problema

↓

Diseñar un plan de acción

↓

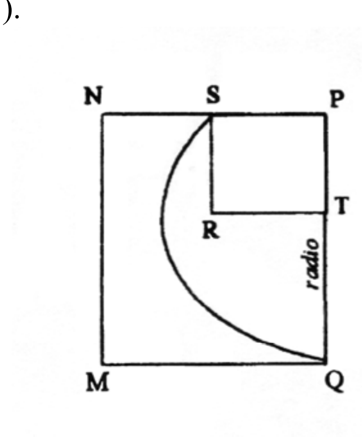
Ejecutar el plan

↓

Examinar la solución obtenida

Desarrollaremos este problema, aplicando la metodología y detallando cada una de las etapas propuestas.

28) Sabiendo que RSPT es un cuadrado de 4 cm^2 de superficie y que MNPQ es un rectángulo de 8 cm^2 de superficie, como se muestra en la figura, halle la base de dicho rectángulo. (Exprese el resultado en función de $\sqrt{2}$).



- **Comprendemos el problema**, identificando datos y restricciones.

Sabemos que el área del rectángulo es A = b.h

Dónde: b denota la base $\overline{MQ}$

h denota la altura $\overline{QP}$

Nuestra incógnita es b;

luego: $b = \frac{A}{h}$

- **Diseñamos un plan de acción**

Como conocemos el área, debemos encontrar la medida de h

- **Ejecutamos el plan**

Resulta h = r + $\overline{PT}$ (r: radio)

Como el área del cuadrado RSTP es de 4 cm^2 ; resulta la medida del lado $\overline{PT}$ = 2 cm. debemos calcular r; r representa la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son $\overline{SP}$ y $\overline{PT}$ siendo sus medidas 2 cm.

luego r = $\sqrt{8}$ *cm.*

r = $2\sqrt{2}$ *cm.*

por lo tanto

h = $(2 + 2\sqrt{2})$ *cm.*

Reemplazando resulta:

$$b = \frac{8}{2+2\sqrt{2}} cm$$

$$b = \frac{4}{1+\sqrt{2}} \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} cm$$

$$b = 4(\sqrt{2}-1) cm$$

- **Verificamos**

Reemplazando los valores obtenidos para b y h en la fórmula del área y operando:

$$A = 4(\sqrt{2}-1)(2+2\sqrt{2}) cm^2$$

$$A = 8(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) cm^2$$

$$A = 8 cm^2$$

29) Un cuadrado y un hexágono regular tienen el mismo perímetro (p), determine cuál es la relación entre las áreas, si p es igual a 4 m.

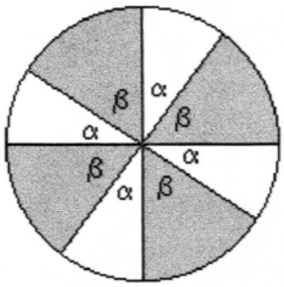
Rta.: El área del hexágono $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} m^2\right)$ es mayor que la del cuadrado (1 m^2)

30) Si una pizza de 32 cm. de diámetro se corta en 8 porciones exactamente iguales, determine el área de cada porción.

Rta.: 32π cm^2

31) Calcule el área de la zona sombreada sabiendo que $\alpha = \frac{2}{3}\beta$ y el radio es 10 cm.

(Exprese el resultado en función de π).

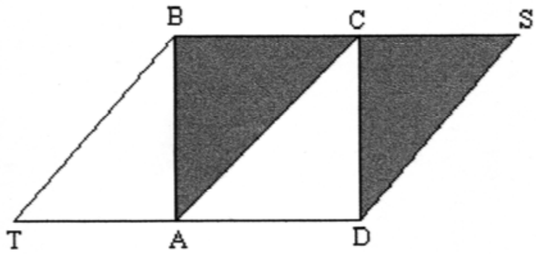


Rta.: $60\,\pi\,\text{cm}^2$.

32) Si rodeáramos la Tierra por el Ecuador con una cuerda, necesitaríamos cierta longitud de cuerda. ¿Cuánto debe aumentarse esa longitud si la cuerda estuviera separada 1 m. de la superficie de la Tierra? (Exprese el resultado en función de π).

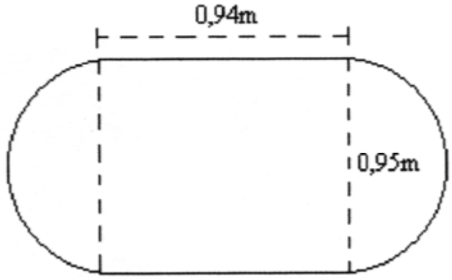
Rta.: $2\,\pi$ metros.

33) ABCD es un cuadrado de lado 5 cm. La longitud de $\overline{BS}$ es $10\sqrt{2}$ cm. Calcule el área de la zona sombreada en la figura. (exprese el resultado en función de $\sqrt{2}$).



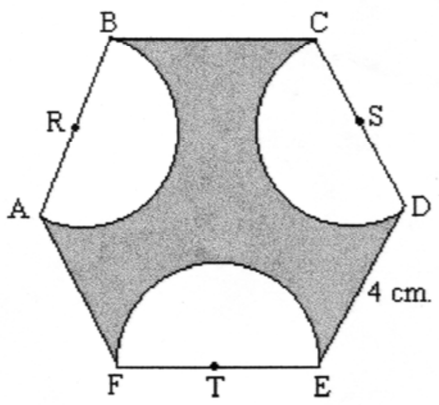
Rta.: $25\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

34) La figura representa una mesa. ¿Cuántas personas se podrán ubicar a su alrededor si cada una ocupa 0,54 m.? (Utilice $\pi = 3,14$). (Tome como resultado el número entero más próximo al resultado obtenido).



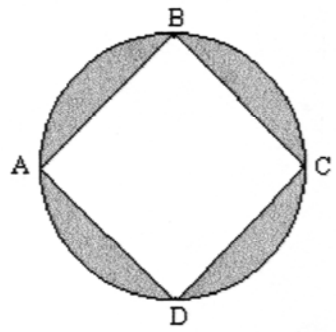
Rta.: 9 personas.

35) R, S y T son centros de circunferencias. ABCDEF es un hexágono regular. Calcule el área de la figura sombreada.



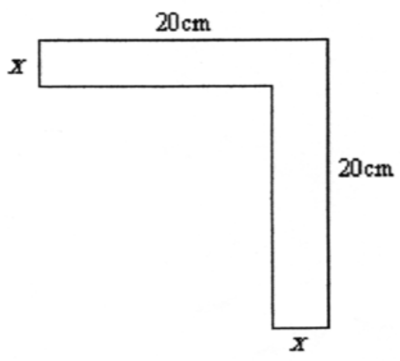
Rta.: $(24\sqrt{3} - 6\pi)\ cm^2$.

36) En la figura, el ABCD es un cuadrado. La longitud de la circunferencia es $\sqrt{2}\,\pi$ cm. Calcule en función de π el área de la figura sombreada.



Rta.: $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) cm^2$

37) La figura tiene una superficie de 111 cm^2 . Determine la longitud de x.



Rta.: $x = 3$ cm.

38) Calcule el área total de un tanque cilíndrico de 2 m de altura y radio de la base igual a 0,5 m. Calcule el volumen del tanque.

Rta.: área $\cong 7,85 \text{ m}^2$, vol = $2\pi .0,5^2 \text{ m}^3$

39) Para construir una caja sin tapa se cortan cuadrados, de 2 cm. de lado, en las cuatro esquinas de una placa rectangular de 32 cm. de largo y 24 cm. de ancho, y se doblan los lados. Calcule el volumen de la caja.

Rta.: 1120 cm^3

40) Calcule el volumen de material en una cáscara esférica cuyo radio interior es de 5 cm. y el exterior es de 5,125 cm.

Rta.: $12,8\pi \text{ cm}^3$

41) Calcule la altura de un tanque australiano, sabiendo que es la tercera parte del radio, y que, si se llena hasta los $\frac{2}{3}$, caben aun 18,84 m^3.

Rta.: $h \cong 1,26\ m$

42) Halle el radio de una esfera que tenga el mismo volumen que un cono de 30 cm. de altura y 20 cm. de diámetro.

Rta.: $\sqrt[3]{750}\ cm.$

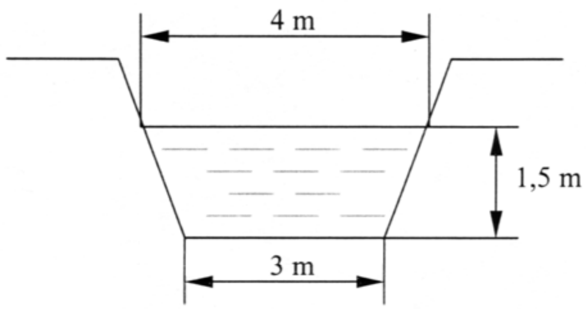
43) Calcule en cuánto tiempo se llenará una pileta cuyas dimensiones son 10 m, 5m y 2 m sabiendo que las cinco canillas que se usan simultáneamente vierten cada una 10 litros por minuto.

Rta.: 1 día 9 horas 20 minutos

44) Halle el porcentaje de reducción de volumen cuando se hace una muesca cónica de 0,5 de radio y 1 cm de altura en cada extremo de una barra de acero cilíndrica de 1 cm de radio y 4 cm de longitud.

Rta: Porcentaje de Reducción = $\frac{25}{6}\% \cong 4,17\ \%$

45) Un canal que conduce agua a una cierta fábrica tiene las dimensiones del dibujo. Sabiendo que la velocidad del agua es de 140 m/minuto, calcular el volumen de agua que pasa por segundo.

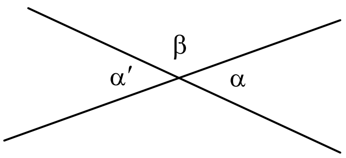


Rta.: $12,25\ \frac{m^3}{s}$

TEMAS DE GEOMETRÍA

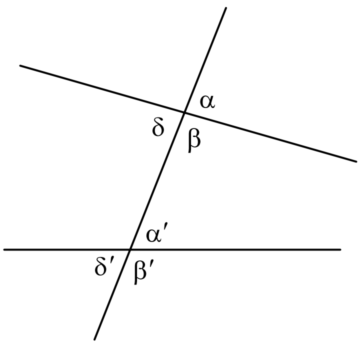
En este apéndice nos proponemos recordarle conceptos de geometría plana que le serán muy útiles a la hora de abordar algunos problemas de la matemática.

$a // b$	a es paralela a b
$a \perp b$	a es perpendicular a b
$C(\text{O}, r)$	circunferencia con centro en O y radio r



α y α' son opuestos por el vértice

α y β son adyacentes



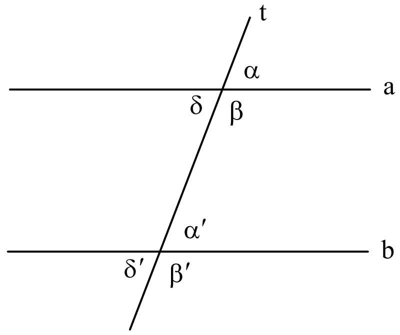
α y α' son correspondientes

α' y δ son alternos internos

α y δ' son alternos externos

β y α' son conjugados internos

α y β' son conjugados externos



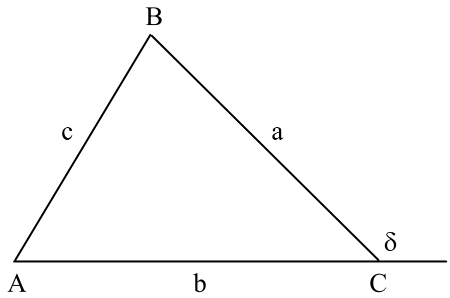
$a // b \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$

$a // b \Leftrightarrow \alpha' = \delta$

$a // b \Leftrightarrow \alpha = \delta'$

$a // b \Leftrightarrow \alpha' + \beta = 180^\circ$

$a // b \Leftrightarrow \alpha + \beta' = 180^\circ$



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{o}$$

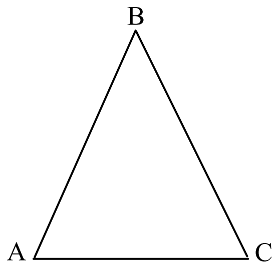
$$\delta = \hat{A} + \hat{B}$$

$$b < a + c$$

$$b > a - c$$

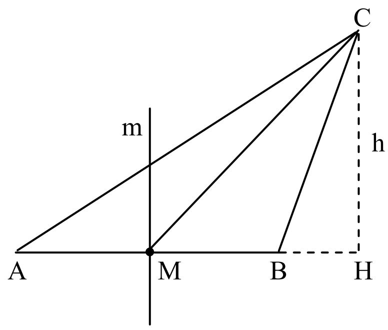
$\mathbf{\overline{AB} = \overline{BC} \Leftrightarrow \hat{C} = \hat{A}}$ Triángulo isósceles

$\mathbf{\overline{AB} < \overline{BC} \Leftrightarrow \hat{C} < \hat{A}}$



$\mathbf{\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \Leftrightarrow \hat{C} = \hat{A} = \hat{B} = 60^{o}}$

Triangulo equilátero .



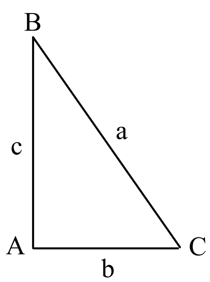
M es el punto medio de $\overline{AB}$

$\overline{CM}$ es la mediana correspondiente a $\overline{AB}$

m es la recta mediatriz correspondiente a $\overline{AB}$

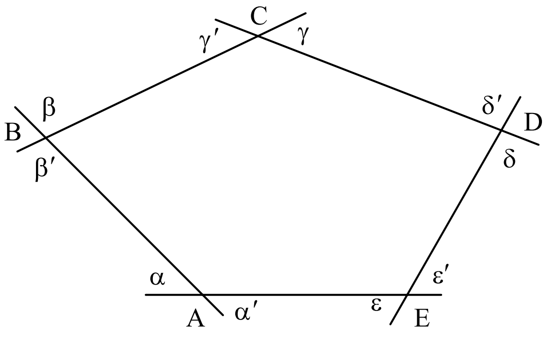
h es la altura correspondiente a $\overline{AB}$

Si el triangulo es isósceles la altura (h) de la base $\overline{AB}$ es la mediana incluida en la mediatriz (m)



Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo se verifica: $a^2 = b^2 + c^2$



Ángulos interiores: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$

Ángulos exteriores: α, α', β, β', γ, γ', δ, δ', ε, ε'

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$

Diagonales: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$

Perímetro: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$

ABCDE es polígono regular $\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} \end{cases}$

$S = 180^{\circ}\,(n-2)$, siendo S la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

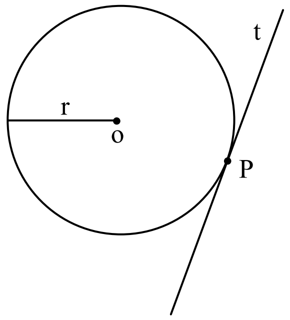
ABCD es un paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AB} \,//\, \overline{CD} \;\wedge\; \overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

ABCD es un rectángulo $\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^{\circ}$

ABCD es un rombo $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

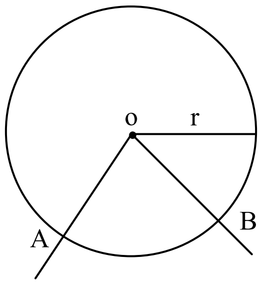
ABCD es un cuadrado $\Leftrightarrow$ ABCD es rectángulo y rombo

ABCD es un trapecio $\Leftrightarrow \overline{AD} \,//\, \overline{BC}$



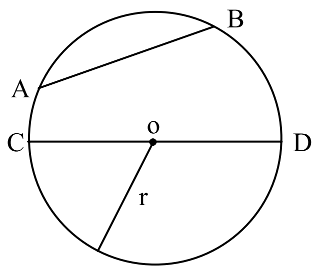
t es tangente a la circunferencia $C(\mathrm{O}, r)$

$t \perp \overline{OP}$



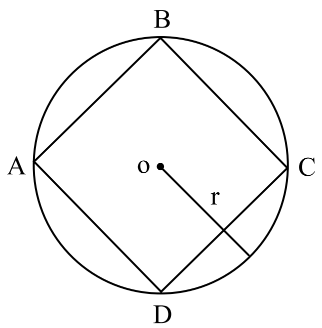
$A\hat{O}B$ es un ángulo central de la $C(\mathrm{O}, r)$

AB es el arco correspondiente a $A\hat{O}B$

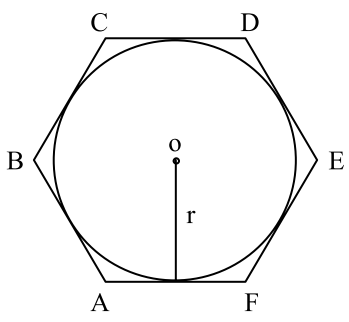


$\overline{AB}$ es una cuerda de la $C(\mathrm{O}, r)$

$\overline{CD}$ es un diámetro de la $C(\mathrm{O}, r)$



ABCD está inscripto en la $C(\mathrm{O}, r)$



ABCDEF está circunscripto en la $C(\mathrm{O}, r)$

FÓRMULAS DE LA GEOMETRÍA

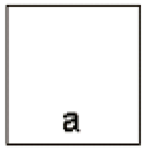
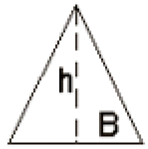
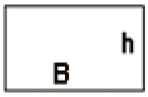
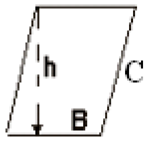
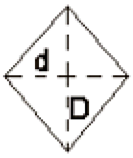
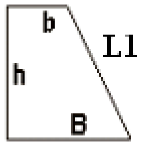
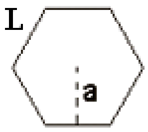
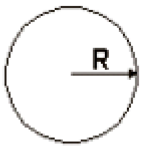
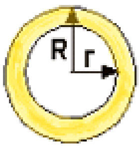
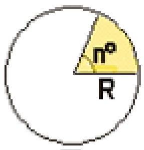
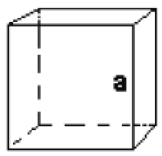
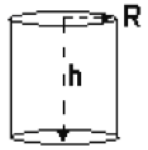
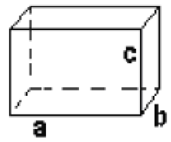
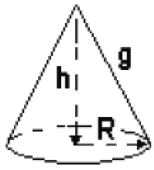
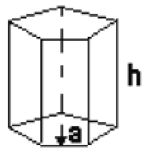
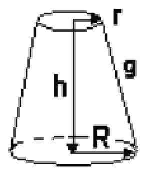
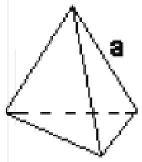
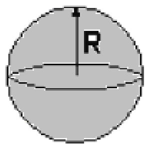
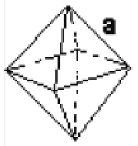
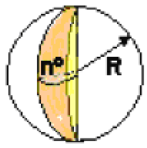
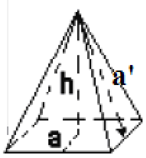
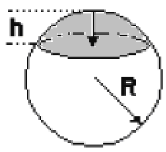
TABLA DE ÁREAS(A) Y PERIMETROS (P)			
	**cuadrado** $A = a^2$ $P = 4\,a$	**triángulo** $A = B \cdot h / 2$ $P = B + L_1 + L_2$	
	**rectángulo** $A = B \cdot h$ $P = 2\,(B + h)$	**paralelogramo** $A = B \cdot h$ $P = 2\,(B + C)$	
	**rombo** $A = D \cdot d / 2$ $P = 4\,L$	**trapecio** $A = (B + b) \cdot h / 2$ $P = L_1 + h + B + b$	
	**polígono regular** n lados iguales $A = P \cdot a / 2$ $P = n\ L$	**círculo** $A = \pi \cdot R^2$ Longitud de circunferencia : $2 . \pi . R$	
	**corona circular** $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	**sector circular** $A = \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$	

TABLA DE AREAS TOTALES (A) Y VOLUMENES (V)

	cubo $A = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$	cilindro $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (h + R)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	
	ortoedro $A = 2 \cdot (a{\cdot}b + a{\cdot}c + b{\cdot}c)$ $V = a \cdot b \cdot c$	cono $A = \pi \cdot R \cdot (g + R)$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h / 3$	
	prisma recto $A = P \cdot (h + a)$ $V = A_B \cdot h$	tronco de cono $A = \pi \cdot [g{\cdot}(r{+}R){+}r^2{+}R^2]$ $V = \pi \cdot h \cdot (R^2{+}r^2{+}R{\cdot}r) / 3$	

	tetraedro regular $A = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3 \cdot \sqrt{2} / 12$	esfera $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ $V = 4 \cdot \pi \cdot R^3 / 3$	
	octaedro regular $A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3 \cdot \sqrt{2} / 3$	huso. cuña esférica $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot n / 360$ $V = V_{Esf} \cdot n / 360$	
	pirámide recta $A = P\,a'/ 2 + 4\,a^2$ $V = A_B \cdot h / 3$	casquete esférico $A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $V = \pi \cdot h^2 \cdot (3{\cdot}R - h) / 3$	

UNIDAD 3

Expresiones algebraicas

Polinomios

- Operaciones entre polinomios
- Raíces. Factorización de polinomios
- Teorema de Gauss

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias

Identidades y ecuaciones

- Ecuaciones de primer grado con una incógnita
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita
- Ecuaciones fraccionarias
- Ecuaciones irracionales

LETRAS Y NUMEROS JUNTOS

Si ahora tomamos un cuerpo (el conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$) y un conjunto de variables (que toman valores sobre el cuerpo), y combinamos números y variables con las operaciones de **adición, sustracción, multiplicación, división** y **radicación** ¿Qué obtendremos?

Expresiones del tipo:

- $v_0 + g.t$
- $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
- $\frac{1}{x} - x^2$
- $\frac{x-3}{\sqrt[3]{x-3}+2}$
- $2x^{-1} + 5x^{-2} - x^3$

Que se denominan **expresiones algebraicas**, expresiones que, por otro lado usted puede formar.

Por ejemplo:

Expresamos cada uno de los enunciados usando una expresión algebraica.
Utilizamos *x* e *y*.

1. El doble de un numero más otro.

$$2x + y$$

2. El promedio de dos números.

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}(x+y)$$

3. El cuadrado de la suma de dos números.

$$(x+y)^2$$

4. El 20 % de un número disminuido en 2 unidades.

$$\frac{1}{5}x - 2$$

5. La velocidad (km/h) de un móvil que recorre *y* km. en *x* horas:

$$\frac{y}{x}$$

6. El área de un triángulo cuya altura es el doble de la base:

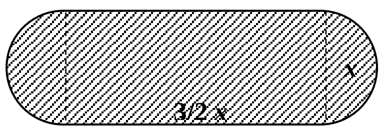
$$\frac{x2.x}{2} = x^2$$

7. El volumen de una caja de base cuadrada (lado : *x* cm.) y altura 20 cm.:

$$(20\,\text{cm}).x^2\text{cm}^2 = 20x^2\ \text{cm}^3$$

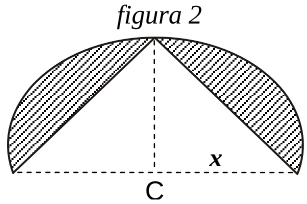
8. El área de las figuras sombreadas:

figura 1



$\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x^2$

figura 2



$\left(-1 + \frac{\pi}{2}\right)x^2$

9. El cubo de un producto de un número por el doble del otro:

$$(x.2y)^3$$

10. El recíproco de la suma de dos números:

$$(x+y)^{-1}=\frac{1}{x+y} \qquad (x \neq -y)$$

➢ Denominamos **expresiones algebraicas *<u>enteras</u>*** a expresiones del tipo:

- $\frac{1}{2}x^2-x+1$
- $2-t$
- $\sqrt{3}-\sqrt{2}g$

En las que sus variables pueden estar afectadas por las operaciones: adición, sustracción, multiplicación y potenciación con exponentes enteros no negativos (no figuran en el denominador).

➢ En cambio a expresiones algebraicas del tipo:

* $2-x^{-3}$	* $\frac{3}{4}+x+\frac{1}{x}$
* $\frac{2+t}{2-t}$	* $\frac{\sqrt{2}-x}{x^2}$

En las que la variable está elevada a exponentes enteros negativos o que tienen variables en el denominador, reciben el nombre de **expresiones algebraicas *<u>fraccionarias</u>***.
Si convenimos en denominar **expresiones algebraicas *<u>racionales</u>*** a aquellas que son enteras o fraccionarias, resulta:

$$\text{EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES}\begin{cases}\text{ENTERAS}\\ \text{FRACCIONARIAS}\end{cases}$$

➢ A expresiones del tipo:

- $\frac{\sqrt{t}+\sqrt{2}}{t}$
- $x+\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $z^{2/3}+z^{-1/2}$

Se las denomina **expresiones algebraicas *<u>irracionales</u>*** (dado que el exponente a que está elevada la variable es racional –no entero–)

➢ Y por último a expresiones del tipo:

- $x.\log x$
- $\operatorname{sen}(2x+1)$
- $3^x+\ln x-\operatorname{tg} x$

Se denominan **expresiones algebraicas *<u>trascendentes</u>***.

Finalmente:

$$\text{EXPRESIONES ALGEBRAICAS}\begin{cases}\text{RACIONALES}\begin{cases}\text{ENTERAS}\\ \text{FRACCIONARIAS}\end{cases}\\ \\ \text{IRRACIONALES}\\ \text{TRASCENDENTES}\end{cases}$$

Ejercicio
Marque una cruz en el casillero correcto:

EXPRESIÓN ALGEBRAICA	RACIONAL		IRRACIONAL	TRASCENDENTE
	ENTERA	NO ENTERA		
$1+\frac{2x-3}{x-1} \quad (x \neq 1)$				
$x^2 - 9xy + y^2$				
$4x^2 + \frac{3}{4}x^{-3} \quad (x \neq 0)$				
$x + 2x^3 - \cos x$				
$7y^2 + 6^{1/3}xy$				
$7y^2 + 6x^{1/3}y$				
$-3 + \log(x^2 + 3)$				

POLINOMIOS

MONOMIOS

Definimos como **monomio** a una expresión algebraica entera en la que no figuran las operaciones adición y sustracción (con un solo término) del tipo de los siguientes ejemplos:

* $-\frac{1}{5}x^3y^2$	* $34t$
* $4.8x$	* e^2
* -1.45	* $\sqrt{3}x$
* πx^2	* $\frac{1}{2}$

dónde el grado del monomio se obtiene mediante la suma de los exponentes de las variables. En nuestros ejemplos los grados son respectivamente:

5	1
1	0
0	1
2	0

Los monomios con idéntica *parte variable* se denominan **monomios semejantes**.

Ejemplo:

$$-\frac{1}{5}x^3 \ , \quad \frac{2}{4}x^3 \ , \quad -0.2x^3 \ , \quad 3.45x^3$$

Y aquellos con igual grado **homogéneos**.

Ejemplo:

$$x^6y^2 \ , \quad \frac{1}{5}x^4y^4 \ , \quad -\frac{1}{5}x^3y^5 \ , \quad 3\pi x^8$$

Definamos **polinomio** a una suma algebraica de monomios.

Ejemplo:

$$2x + x^2 + x^3 \ , \quad \frac{1}{2}t^2 - 3 \ , \quad 2xy - y^2$$

Los polinomios que estudiaremos aquí son los polinomios en una variable o **indeterminada**.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplo:

¿Cuál es el grado del polinomio $p(x)=5x^4+3x^2-1$? ¿Y el de $q(z)=3z^2+8z^3-10+z^7$?

$$gr(p(x))=4 \qquad \text{y} \qquad gr(q(z))=7$$

POLINOMIOS

En general, un polinomio de grado *n*, es la variable o indeterminada *x* se simboliza:

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j.x^j\ , \quad \text{con} \quad \underbrace{a_j}_{\text{coeficientes}} \in \mathrm{R},\ j\in \mathrm{N}_0, a_n \neq 0$$

o

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Para operar con polinomios, basta recordar y aplicar propiedades de operaciones en $\mathbb{R}$.
Dado que usted ha trabajado con polinomios, aquí solo haremos una reseña de algunos conceptos, operaciones y propiedades.

Dos polinomios de igual grado son **idénticos** cuando son iguales los coeficientes de los términos semejantes.
O sea:

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j.x^j$$

$$p(x)=q(x) \Leftrightarrow a_j=b_j,\ j\in \mathrm{N}_0$$

$$q(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j.x^j$$

Ejemplo:

Calcule *h*, sabiendo que $p(x)=2hx+3$ y $q(x)=8x+3$ son idénticos.

$$2h=8 \Rightarrow h=4$$

Denominamos polinomios opuestos a aquellos de igual grado que tienen opuestos los coeficientes de los términos semejantes.

Es decir: el opuesto $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j.x^j$ es $-p(x)=\sum_{j=0}^{n}(-a_j).x^j$

Ejemplo:

¿Cuáles son los números *m* y *n* si $p(x)=10x^2-8mx-1$ es opuesto de $q(x)=3nx^2-40x+1$?

$$10=-3n \Rightarrow n=-\frac{10}{3}$$

$$-8m=40 \Rightarrow m=-5$$

El coeficiente del término que determina el grado de un polinomio se denomina **coeficiente principal** del mismo.
En caso de ser uno, se dice que el polinomio es **reducido o mónico**.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior, ¿cuál es el coeficiente principal de $p(x)$ y el de $q(x)$? ¿Alguno de éstos es reducido?
El coeficiente principal de $p(x)$ es 10 y el de $q(x)$ es -10.
Ninguno es reducido o mónico.

El polinomio nulo se simboliza **0**.

Convenimos en que:

Un polinomio es de grado **cero** cuando es un monomio del tipo:

$$8\,;-\frac{4}{5}\,;e\,;5\pi\,;-3.57 \text{ (Número real distinto de cero).}$$

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Adición (resultado: suma)

La suma de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es otro polinomio cuyos términos son: la suma de los monomios semejantes de ambos polinomios y los monomios no semejantes.
Se simboliza $p(x) + q(x)$.

Ejemplo:

Determinamos el polinomio suma de: $p(x) = 6x^3 + 3x^2 + 8$ y de $q(x) = -x^3 + x + 2$
Recurrimos a una <u>disposición práctica</u>, para obtener la suma:

$$\begin{array}{rcrrrr} & p(x) & = 6x^3 & +\ 3x^2 & & +8 \\ + & & & & & \\ & q(x) & = -x^3 & & +x & +2 \\ \hline p(x)+ & q(x) & = 5x^3 & +\ 3x^2 & +x & +10 \end{array}$$

Sustracción (resultado: diferencia o resta)

La diferencia entre $p(x)$ y $q(x)$, <u>en ese orden</u>, es el polinomio que se obtiene sumando a $p(x)$ el opuesto de $q(x)$
$p(x) - q(x) = p(x) + [- q(x)]$

Ejemplo:

Sean $p(x)$ y $q(x)$ los polinomios del ejemplo anterior.

Calculamos el polinomio diferencia.

$$
\begin{array}{rcl}
p(x) & = & 6x^3 + 3x^2 \qquad +8 \\
+ & & \\
-q(x) & = & x^3 \qquad -x \; -2 \\
\hline
p(x) - \; q(x) & = & 7x^3 + 3x^2 - x + 6
\end{array}
$$

Multiplicación (resultado: producto)

> El producto de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de ellos por cada término del otro y sumando los términos semejantes, si los hubiera.
> Se simboliza: $p(x).q(x)$

Ejemplo:

Sean $p(x) = 6x^3 - 3x^2 + 8$ y $q(x) = x - 2$, calculamos el polinomio producto:

$$
\begin{array}{rcl}
p(x) & = & 6x^3 \; - \; 3x^2 \; + \qquad +8 \\
q(x) & = & x \quad -2 \\
\hline
p(x).(-2) & = & -12x^3 + 6x^2 \qquad -16 \\
p(x).(x) & = & 6x^4 - 3x^3 \qquad +8x \\
\hline
p(x).q(x) = p(x).(-2) + p(x).x & = & 6x^4 \; -15x^3 + 6x^2 \; +8x \; -16
\end{array}
$$

Esta operación puede efectuarse con los coeficientes sin la potencia de la indeterminada (sin olvidar de completar y ordenar los polinomios), con un algoritmo parecido al de multiplicar números:

(4)	(3)	(2)	(1)	(0)
	6	-3	0	8
			1	-2
	-12	6	0	-16
6	-3	0	8	
6	-15	6	8	-16

$p(x).q(x) = \quad 6x^4 - 15x^3 + 6x^2 + 8x \quad -16$

Le preguntamos:

¿Cuál es el grado del producto entre dos polinomios si se sabe que el grado de uno es <u>n</u> y el grado del otro el <u>m</u>?

División

> Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios tal que el grado de $p(x)$ es <u>mayor o igual</u> que el grado de $q(x)$, y $q(x)$ no es <u>nulo</u>, entonces existen y son únicos dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que:
> $$p(x) = q(x).\, c(x) + r(x)$$
> y si $r(x) \neq 0$ entonces el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$.

Decimos que:

$p(x)$ es el <u>dividendo</u>

$q(x)$ es el <u>divisor</u>

$c(x)$ es el <u>cociente</u>

$r(x)$ es el <u>resto</u>

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & c(x) \end{array}$$

Para dividir polinomios debemos completar y ordenar el dividendo y el divisor en potencias decrecientes de la indeterminada.

Ejemplo:

Efectuamos la división entre $p(x) = 3x^5 - 2x^2 + 1$ y $q(x) = 2 - x^2$

Si ordenamos y completamos los polinomios del esquema resulta:

$$\begin{array}{crrrrrr|l}
 & 3x^5 & +\ 0x^4\ + & 0x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & -x^2 \quad +0x \quad +2 \\ \cline{8-8}
- & & & & & & & \\
 & 3x^5 & & -6x^3 & & & & -3x^3 \quad -6x \quad +2 \\ \cline{2-4}
 & & & 6x^3 & -2x^2 & +0x & +1 & \\
 & & - & & & & & \\
 & & & 6x^3 & & -12x & & \\ \cline{3-7}
 & & & & -2x^2 & +12x & +1 & \\
 & & & - & & & & \\
 & & & & -2x^2 & & +4 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 12x & -3 &
\end{array}$$

donde el cociente es $c(x) = -3x^3 - 6x + 2$ y el resto es $r(x) = 12x - 3$

Tal que: $3x^5 - 2x^2 + 1 = c(x).(2 - x^2) + r(x)$, verifíquelo.

Procedemos a dividir con los coeficientes separados de las variables:

$$\begin{array}{crrrrrr|rrrr}
 & (5) & (4) & (3) & (2) & (1) & (0) & (3) & (2) & (1) & (0) \\
 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & & -1 & 0 & 2 \\ \cline{8-11}
- & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 0 & -6 & & & & -3 & 0 & -6 & 2 \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 6 & -2 & 0 & 1 & & & & \\
 & - & & & & & & & & & \\
 & & & 6 & 0 & -12 & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & -2 & 12 & 1 & & & & \\
 & & & - & & & & & & & \\
 & & & & -2 & 0 & 4 & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & 12 & -3 & & & &
\end{array}$$

Donde el cociente es $c(x) = -3x^3 - 6x + 2$ y el resto es $r(x) = 12x - 3$.

OBSERVACIONES:

1. El grado del cociente es la diferencia entre el grado del dividendo y el del divisor.
2. Si el resto es cero (el polinomio nulo) se dice que:

- el cociente es exacto, es decir:

$$p(x) = q(x).c(x)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x)$$

- $p(x)$ es <u>divisible</u> por $q(x)$, o bien que $q(x)$ es <u>divisor</u> (exacto) de $p(x)$, se simboliza $q(x)\,|\,p(x)$ (se lee $q(x)$ divide $p(x)$).

Hay otro procedimiento para determinar los coeficientes del cociente y el resto de una división cuando el divisor, es <u>solamente</u>, de la forma $q(x) = x + a (a \in \mathbb{R})$; la REGLA DE RUFFINI, que consiste en lo siguiente:

Ejemplo:

Dividimos $p(x) = 5x^4 - 32x^2 - 42x$ y $q(x) = x - 3$

Resulta, el esquema:

	5	0	-32	-42	0	← coeficientes del dividendo
+3		15	45	39	-9	
	5	15	13	-3	-9	← resto

entonces: $c(x) = 5x^3 + 15x^2 + 13x - 3$ y $r(x) = -9$.

VALOR NUMÉRICO (ARITMÉTICO) O ESPECIALIZACIÓN DE UN POLINOMIO

Sea el polinomio $p(t) = -2t^2 + 3t - 1$

Si consideramos, por ejemplo, $t = -2$, resulta

$$p(-2) = -2(-2)^2 + 3(-2) - 1$$

$$p(-2) = -8 - 6 - 1 \Rightarrow \qquad p(-2) = -15$$

Decimos que -15 es el valor numérico de $p(t)$ o especialización de $p(t)$ para $t = -2$.

> *Definimos:*
> El valor numérico de un polinomio $p(x)$ para $x = a$, es el número, que se obtiene al resolver las operaciones después de asignar a la variable el número <u>a</u>.
> Se simboliza $p(a)$
> Además:
> Si $p(a) = 0$, se dice que <u>a</u> es una **raíz** o **cero** del polinomio $p(x)$

Ejemplo:

¿Son $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$ raíces de $p(x) = x^2 + x - 6$? ¿Por qué?

Son raíces pues: $p(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$ y $p(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 0$

IMPORTANTE:

* Todo polinomio, de grado n ($n \geq 1$), admite n raíces.
** Todo polinomio, de grado n ($n \geq 1$), admite a lo sumo n raíces reales.

TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división de un polinomio $p(x)$ y un binomio de la forma $q(x) = x + a$ ($a \in \mathbb{R}$), es $r(x) = r = p(-a)$

Retomando el ejemplo de la hoja anterior:

$$p(x) = 5x^4 - 32x^2 - 42x \ \text{ y } \ q(x) = x - 3$$

Resulta:

$$r = p(3)$$
$$r = 5.3^4 - 32.3^2 - 42.3$$
$$\boxed{r = -9}$$

FACTOREO DE UN POLINOMIO EN UNA VARIABLE

Polinomio primo o irreducible

Definición:
Un polinomio $p(x)$, de grado mayor que cero, es **Primo** o **Irreducible** si y sólo si **todas** las descomposiciones del mismo de la forma $p(x) = q(x).\, c(x)$ son tales que alguno de sus factores es de grado cero.

Ejemplos:

1.
$$p(x) = 7x - 3$$
$$p(x) = 7\left(x - \tfrac{3}{7}\right)$$
$$p(x) = 3\left(\tfrac{7}{3}x - 1\right)$$
$$p(x) = 21\left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{7}\right)$$
………………...

$p(x)$ es **Primo o Irreducible** por cuanto en todos los casos alguno de sus factores es un polinomio de grado cero.

2.
$$q(z) = z^2 - 8z$$
$$q(z) = z(z - 8)$$

$q(z)$ no es primo por cuanto en la descomposición dada ninguno de sus factores es de grado cero.

3.
$$r(t) = 36t^2 - 64$$
$$r(t) = -6\left(-6t^2 + \tfrac{32}{3}\right)$$
$$r(t) = 4\left(9t^2 - 16\right)$$
$$r(t) = 64\left(\tfrac{9}{16}t^2 - 1\right)$$

$r(t)$ no es primo pues hay, al menos, una descomposición en donde ninguno de sus factores es de grado cero. Esta es: $r(t) = (6t - 8).(6t + 8)$

Factorización de un polinomio en una variable

> *Definición:*
> Factorear un polinomio significa expresarlo como producto de un polinomio de grado cero y polinomios **primos** (polinomios que son sus factores).

Ejemplo:

Sea $p(x) = 9x^3 - 12x^2 - 9x + 12$ del que se sabe que sus raíces son:

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -1 \ , \ \text{y} \quad x_3 = \frac{4}{3}$$

Si $x = 1$ es raíz de $p(x)$ resulta, por teorema del resto:

$$p(x) = (x - 1)\, c_1(x)$$

donde

$$c_1(x) = \frac{p(x)}{x-1}$$

Por Ruffini:

	9	-12	-9	12
+1		9	-3	-12
	9	-3	-12	0

0 ⟵ resto ($p(1) = 0$)

⇐

$c_1(x) = 9x^2 - 3x - 12$
luego
$p(x) = (x - 1)(\ 9x^2 - 3x - 12\ )$,
teniendo en cuenta otra raíz de $p(x)$ puede observarse que también es raíz de $c_1(x)$: por ejemplo $x_2 = -1$; entonces repetimos el procedimiento.
$c_2(x) = 9x - 12$

-1		-9	12
	9	-12	0

0 ⟵ resto ($c_1(-1) = 0$)

⇐

así: $c_1(x) = (x + 1)\, c_2(x)$

$$9x^2 - 3x - 12 = (x+1).(9x - 12) = 9(x+1).\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

CONCLUSIÓN:

$$p(x) = 9(x-1).(x+1).\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

El polinomio $p(x)$ queda expresado como el producto de su coeficiente principal que es 9 y por los factores (primos) mónicos de la forma $x - x_j$ (con $j \in \{1,2,3\}$ siendo x_j las raíces de $p(x)$).

Definición:
Si un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ tiene sus n raíces reales, puede factorizarse como
$p(x) = a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_2)(x - x_1)$.

Si $x_n \neq x_{n-1} \neq .... \neq x_2 \neq x_1$ (raíces reales distintas) diremos que el polinomio admite **raíces simples**.
Si $x_1 = x_k = \dots = x_j$ (algunas raíces reales iguales) diremos que el polinomio admite **raíces con multiplicidad**.

Ejemplos:

Si $p(x) = 2(x - 3)(x + 4)(x - 1)$ decimos que $p(x)$ es un polinomio de grado 3 que tiene <u>3</u> raíces reales <u>simples</u>.

Si $q(x) = 0.5(x - 2)^2(x + 1)^3$ decimos que $q(x)$ es un polinomio de grado 5 que tiene <u>2</u> raíces <u>múltiples</u>.

$x_1 = x_2 = 2$ (multiplicidad de orden 2)
$x_3 = x_4 = x_5 = -1$(multiplicidad de orden 3)

Si $s(x) = (x - 1)^2.x.(x + 6)$ decimos que $s(x)$ es un polinomio de grado 4 que tiene <u>1</u> raíz <u>múltiple</u> y <u>2</u> raíces <u>simples</u>.

$x_1 = x_2 = 1$ (multiplicidad de orden 2)
$x_3 = 0$
$x_4 = -6$

Definición:
Si un polinomio $p(x)\, a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ tiene sus h raíces con multiplicidad $\alpha, \beta, ..., \lambda$, puede factorizarse como $p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha}(x - x_2)^{\beta}...(x - x_h)^{\lambda}$
donde $\alpha + \beta + ... + \lambda = n$

Analicemos cómo podemos determinar raíces racionales de un polinomio.

Ejemplo:

El polinomio $p(x) = 9x^3 - 12x^2 - 9x + 12$ tiene:

- Coeficientes enteros y término independiente no nulo.
- Las raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = \frac{4}{3}$; son de la forma $\frac{a}{b}$ (número racional, con <u>*a*</u> y <u>*b*</u> enteros coprimos y tales que <u>*a*</u> es divisor del término independiente y <u>*b*</u> es divisor del coeficiente principal).

TEOREMA DE GAUSS

Si $p(x)$ es un polinomio de grado <u>*n*</u> ($n \geq 1$), con coeficientes enteros, término independiente no nulo y admite al menos una raíz racional $\frac{a}{b}$ con *a* y *b* enteros coprimos, entonces <u>*a*</u> es divisor del término independiente y <u>*b*</u> es divisor del coeficiente principal.

En el ejemplo anterior:

$$a/12 \Rightarrow \quad a \in \{1;2;3;4;6;12;-1;-2;-3;-4;-6;-12\}$$

$$b/9 \quad \Rightarrow \quad b \in \{1;3;9;-1;-3;-9\}$$

Luego

$$\tfrac{a}{b} \in \{1;2;3;4;6;1/3;1/9; 2/3;\ldots;-1;-2;-3;-4;-6;-12;-1/3; -1/9;-2/3;\ldots\}$$

Cuando se ha detectado el valor de una de las raíces -<u>por sucesivas pruebas</u>- por ejemplo: si $x = 1 \Rightarrow p(1) = 0 \wedge\ p(x) = (x - 1).c_1(x)$, donde el grado de $c_1(x)$ es $n - 1$ y se obtiene, según hemos visto, dividiendo por regla de Ruffini.
Por lo tanto:

$$p(x) = (x - 1).(9x^2 - 3x - 12)$$

Para seguir determinando las raíces reiteraremos el procedimiento, pero para facilitar cálculos ahora sobre $c_1(x)$…

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES FRACCIONARIAS

Sean $\dfrac{x^3}{81-x^2}$ con $|x| \neq 9$

y $\dfrac{2x-3}{5x-1}$ con $x \neq \dfrac{1}{5}$

A expresiones algebraicas de esta naturaleza se las denomina EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES FRACCIONARIAS.

> *Definición*:
> Una EXPRESION ALGEBRAICA RACIONAL NO ENTERA O FRACCIONARIA es el cociente <u>indicado</u> de dos polinomios, si el del denominador no es el polinomio nulo **(0)** y no es de grado 0 (número real distinto de cero).
> O sea
> $\frac{p(x)}{q(x)}$ con $q(x) \neq 0 \wedge\ gr(q(x)) \neq 0$

OPERACIONES

1) **Simplificación:**

Sea $\frac{p(x)}{q(x)}$ una expresión fraccionaria donde $p(x) = p_1(x).h(x)$ y $q(x) = q_1(x).h(x)$, entonces:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x).h(x)}{q_1(x).h(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Para valores de x que no anulen $q(x)$.

Ejemplo:

Simplificamos la expresión:

$$\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} \qquad \text{con} \quad x \neq 0 \wedge x \neq 6$$

$$\frac{x^2-36}{3x^2-18x}=\frac{(x+6)(x-6)}{3x(x-6)}$$

$$\frac{x^2-36}{3x^2-18x}=\frac{x+6}{3x}$$

la expresión simplificada es $\frac{x+6}{3x}$ pero hay que tener presente no solamente que $x \neq 0$ sino también que $x \neq 6$; entonces la simplificación es :

$$\frac{x+6}{3x} \text{ con } x \neq 0 \wedge x \neq 6$$

Mínimo común múltiplo de polinomios (m.c.m.)

Sea un conjunto de dos o mas polinomios y tal que cada uno se halle expresado como producto de factores primos irreducibles, decimos que el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO entre ellos es el producto de los factores primos comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.

Ejemplo:

Calculamos el mínimo común múltiplo entre: x^2 -9, x^2 +6x + 9 y x + 3
Al factorear resulta:

$$x^2-9=(x+3)(x-3)$$
$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$x+3 \text{ es primo}$$

entonces el m.c.m. es $(x + 3)^2.(x - 3)$

2) **Adición y sustracción:**

Sea

$$\frac{3}{x-1}+\frac{4x-3}{x^2-x}-\frac{1}{x} \quad \text{con } x \notin \{0;1\}$$

Determinamos el m.c.m entre los polinomios denominadores

x - 1 es primo
$x^2 - x = x(x - 1)$
x es primo

entonces el m.c.m es $x(x - 1)$.

Se efectúa la operación de forma análoga a la adición y sustracción entre números racionales, así se obtiene:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{4x-3}{x^2-x}-\frac{1}{x}=\frac{3x+4x-3-(x-1)}{x(x-1)}=\frac{6x-2}{x(x-1)}$$

3) **Multiplicación:**

Se procede de forma análoga a la multiplicación de números racionales.
Sea por ejemplo:

$$\frac{x^4-1}{x^2+6x+9}.\frac{x^2+3x}{x^2-1}.\frac{1}{x^2+1} \quad \text{con} \quad x \notin \{1,-1-3\}$$

$$\frac{x^4-1}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+3)^2}\cdot\frac{x(x+3)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)}$$
$$=\frac{x}{x+3}\ ,\ \text{con}\quad x\notin\{1,-1,-3\}$$

4) **División:**

* Previamente definimos <u>expresión recíproca</u> de $\frac{p(x)}{q(x)}$, a $\frac{q(x)}{p(x)}$ para valores de x que no anulen $p(x)$ ni $q(x)$.

Luego:

$$\frac{p(x)}{q(x)}:\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{s(x)}{r(x)},\ r(x)\neq 0, s(x)\neq 0$$

IDENTIDADES Y ECUACIONES

La igualdad, en Matemática, es la relación que más frecuentemente usamos.
Cabe distinguir que no siempre se emplea con el mismo sentido.

Por ejemplo:

- $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
- $x - 2 = 3$

En el primer caso efectuamos una afirmación: "*para todo valor de x y de a, se satisface la igualdad*". En cambio en la segunda igualdad: "*existe únicamente un valor de x* ($x = 5$) *que satisface la igualdad*".

A las igualdades del primer tipo se las denominan **identidades** y a las del segundo tipo **ecuaciones**.

Tenga en cuenta que las identidades deben demostrarse y que las ecuaciones se "resuelven".

En este momento nos preocupa <u>**resolver**</u> una ecuación:

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen juntos números y letras (incógnitas). Las soluciones de una ecuación son aquellos valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.

Así: $\frac{1}{2}x-3=0$ es una ecuación de primer grado con una incógnita.

Su solución es $x = 6$.
$t^2 - 4t = -3$ es una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Sus soluciones $t = 1$ o $t = 3$.

$x + y = 4$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Una solución es $x = 0$, $y = 4$. Busque otras soluciones.

¿Cuántas soluciones tiene?

Para la resolución de dichas ecuaciones contamos con dos "reglas de oro" (propiedad uniforme para la adición, multiplicación y división):

- Si se suma un mismo número a ambos miembros de una ecuación sus soluciones no cambian.
- Si se multiplica (o divide) por un mismo número (distinto de cero) a ambos miembros de una ecuación sus soluciones no cambian.

Al aplicar estas "reglas" obtenemos *ecuaciones equivalentes.*

Ejemplo:

Sea

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 25 = 0 \\ & 25 = 25 \\ +)\quad & 4x^2 = 25 \\ :4)\quad & x^2 = \tfrac{25}{4} \Leftrightarrow |x| = \tfrac{5}{2} \\ & x = \frac{5}{2} \ \vee \ x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Verificación:

Si $x = \frac{5}{2}$ entonces $4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 25 = 4\,\frac{25}{4} - 25 = 0$

Si $x = -\frac{5}{2}$ entonces $4\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 25 = 4\,\frac{25}{4} - 25 = 0$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Analicemos la ecuación: $a.x + b = 0$ (1)

luego: $a.x = -b$

Cabe preguntarse aquí: ¿siempre esta ecuación tiene solución?
¿Puedo escribir que $x = -\frac{b}{a}$?

Analicemos (1)

<u>Primero</u> si $a \neq 0$ no existe inconveniente en escribir $x = -\frac{b}{a}$ por lo que la ecuación tiene una única solución.

<u>Segundo</u> si $a = 0$ y $b = 0$ la ecuación (1) es $0.x = 0$ que se verifica para todo valor de la incógnita x; por lo tanto admite más de una solución (infinitas soluciones).

<u>Tercero</u> si $a = 0$ y $b \neq 0$ la ecuación $0.x = b$ no tiene solución por cuanto no existe número que multiplicado por cero de como producto b (número distinto de cero).
Si $a \neq 0$ llamaremos a (1) ecuación de primer grado con una incógnita o **<u>ecuación lineal</u>** con una incógnita.

Ejercicios

1. Establezca la correspondencia a través de una flecha, entre las ecuaciones equivalentes.

$3x + 1 = 7$	$2x - 4 = 4$
$5x + 2 = 22$	$x - 3 = 0$
$6x - 4 = 14$	$2x = 16$
$-5 + 3x = 19$	$x + 3 = 5$
$9 + 2x = 11$	$x = -3$
$7x - 6 = -27$	$x = 1$

2. Dada la ecuación $ax + b = c$ $(a \neq 0)$ y el esquema, donde aplicamos las "reglas de oro" y planteamos un procedimiento de resolución y verificación:

$$a.x + b = c$$

$$a.x + b - b = c - b \qquad\qquad a.x + b = c - b + b$$

$$a.x = c - b \qquad\qquad a.x = c - b$$

$$\tfrac{a.x}{a} = \tfrac{c-b}{a} \qquad\qquad a.x = a.\tfrac{c-b}{a}$$

$$x = \tfrac{c-b}{a}$$

Reitere el esquema para cada una de las ecuaciones (de primer grado) que se dan a continuación:

- $5x + 13 = 23$ Rta.: $x = 2$
- $6x - 9 = 39$ Rta.: $x = 8$
- $12x + 4 = 40$ Rta.: $x = 3$
- $-3x + 7 = -5$ Rta.: $x = 4$
- $-2x - 10 = 0$ Rta.: $x = -5$
- $x + 12 = 43$ Rta.: $x = 31$

3. Corrija el error cometido, rehaciendo la solución correcta.

$$6x + 36 = 90$$
$$x + 36 = \tfrac{90}{6}$$
$$x = 15 - 36$$
$$x = -21$$

Rta.: $x = 9$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Estudiaremos ecuaciones del tipo:

$$\underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{lineal}} + \underbrace{c}_{\textit{independiente}} = 0$$

con $a \neq 0$ denominadas <u>ecuaciones de segundo grado en una incógnita</u> en donde:

<u>**Primero**</u>: si $b = 0$ y $c \neq 0$: $ax^2 + c = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta en el término lineal.

<u>**Segundo**</u>: si $c = 0$ y $b \neq 0$: $ax^2 + bx = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta en el término independiente.

<u>**Tercero**</u>: si $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0$ es una ecuación reducida (o mónica) se segundo grado.
Su resolución:

Ejemplos:

1.

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \;\vee\; x = -2$$
$$S = \{2,-2\}$$

Verificación:

Si $x = 2$ entonces $3.2^2 - 12 = 3.4 - 12 = 12 - 12 = 0$
Si $x = -2$ entonces $3.(-2)^2 - 12 = 3.4 - 12 = 12 - 12 = 0$

2.

$$5x^2 + 10x = 0$$
$$5x(x + 2) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = -2$$
$$S = \{0,-2\}$$

Verificación:

Si $x = 0$ entonces $5.0^2 + 10.0 = 0 + 0 = 0$
Si $x = -2$ entonces $5.(-2)^2 + 10.(-2) = 20 - 20 = 0$

3.

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Para encontrar el valor x procedemos:

1ro) Extraer factor común constante, en este caso 2, entre los dos términos en x:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) - 1 = 0$$

2do) Completamos el trinomio cuadrado perfecto, de modo que resulta:

$$2.\left(x^2 + 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - 1 = 0 + 2.\frac{1}{16}$$

3ro) Expresar el trinomio como un cuadrado del binomio:

$$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

4to) Luego:

$$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + 1$$

$$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}$$

Dividiendo cada miembro por 2:

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow \left|x + \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \vee \quad x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$$

los valores de x, que podemos denominar x_1 y x_2:

$$x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = -1$$

son las raíces de la ecuación de segundo grado pues satisfacen la igualdad.

Verificación:

Si $x = \frac{1}{2}$ entonces $2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$
Si $x = -1$ entonces $2.(-1)^2 - 1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$

Generalizamos:

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ determinaremos para qué valores de x, $x \in \mathbb{R}$, se satisface la igualdad.
Apliquemos el mismo procedimiento anterior:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0 + \frac{b^2}{4a}$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c = \frac{b^2}{4a}$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, como\ \ a > 0:$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2 + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente: $$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

por abuso de notación se escribe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

denominada **"formula resolvente"** de una ecuación de segundo grado en una indeterminada en donde si llamamos discriminante a la expresión: $b^2 - 4.a.c = \Delta$

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2$
(Raíces reales distintas)
$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 = x_2$
(Raíz real doble)
$\Delta < 0 \Rightarrow x_1 \notin \mathbb{R} \wedge x_2 \notin \mathbb{R}$
(Raíces no reales)

Ejercicios

1. Halle el conjunto solución de cada una de las ecuaciones que se indica:

   a. $13x^2 + 8 = 60$ $S = \{2,-2\}$
   b. $-6x^2 + 17 = -133$ $S = \{-5,5\}$
   c. $16 - 3x(x-3) = 9x - 176$ $S = \{8,-8\}$
   d. $\frac{7x^2-3}{4} = 141$ $S = \{9,-9\}$
   e. $8x(x+2) - 2 = 2(8x-1)$ $S = \{0\}$

2. Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

   a. $3x^2 - 24x = 0$ $S = \{0,8\}$
   b. $12x = 6x^2$ $S = \{0,2\}$
   c. $-2x^2 + 2x = 3x$ $S = \{0,-\frac{1}{2}\}$
   d. $3(x^2 - 2x) + 3(3x^2 + 2) = 3x^2 + 6$ $S = \{0,\frac{2}{3}\}$
   e. $\frac{24x-6x^2}{15} = 0$ $S = \{0,4\}$

3. Halle el conjunto solución de las ecuaciones de segundo grado (completando cuadrado).

   a. $x^2 - 6x + 5 = 0$ $S = \{5,1\}$
   b. $4x^2 - 20x = 75$ $S = \{\frac{15}{2},-\frac{5}{2}\}$
   c. $30x + 25x^2 - 72 = 0$ $S = \{\frac{6}{5},-\frac{12}{5}\}$
   d. $x(x-14) + 11(3+x) = 11x$ $S = \{11,3\}$
   e. $\frac{3x^2+6x}{3} - 120 = 0$ $S = \{10,-12\}$

ECUACIONES FRACCIONARIAS

En general, para resolver una ecuación procedemos así:

- Se factorean los denominadores:

$$\frac{3x}{2x+1} = \frac{x+5}{x+1} + \frac{x-19}{2x^2+3x+1}$$
$$\frac{3x}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x+5}{x+1} + \frac{x-19}{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

- Se excluyen los valores de *x* que anulan los denominadores:

$$x \neq -\frac{1}{2} \ , \ x \neq -1$$

- Se efectúan operaciones:

$$\frac{3x}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2(x+5)\left(x+\frac{1}{2}\right)+(x-19)}{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

- Se simplifican denominadores y se lleva la ecuación a la forma entera:

$$3x(x+1) = 2(x+5)\left(x+\frac{1}{2}\right)+x-19$$

$$3x^2+3x = 2x^2+11x+5+x-19$$

$$x^2-9x+14=0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida, que en este caso es de segundo grado:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 7$$

- No debe olvidar que cuando una ecuación se multiplica por una expresión que contiene la incógnita, la ecuación resultante no es en general equivalente a la ecuación original.
  La operación realizada puede introducir raíces extrañas que es preciso eliminar por sustitución directa en la ecuación dada. Si alguna de las raíces halladas anula a algún denominador de la ecuación general, se descarta ese valor ya que no es raíz de la ecuación fraccionaria.

Verificación:

1) Si $x = 2$

$$\frac{6}{5} = \frac{7}{3} + \frac{-17}{15}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$

2) Si $x = 7$

$$\frac{21}{15} = \frac{12}{8} - \frac{12}{120}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{7}{5}$$

Luego: S = {2,7}

ECUACIONES IRRACIONALES

Por ejemplo:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$$

Para su resolución procedemos así:

- Racionalización de la ecuación: (esto se consigue por elevaciones a potencias o mediante factores racionalizantes).

$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-1}+1$$
$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2$$
$$3x+1=2x-1+2\sqrt{2x-1}+1$$
$$x+1=2\sqrt{2x-1}$$
$$(x+1)^2=4(2x-1)$$
$$x^2+2x+1=8x-4$$
$$x^2-6x+5=0$$

- Solución de la ecuación entera obtenida

$$x_1=1, \qquad x_2=5$$

Verificación:

Si $x = 1$: $\sqrt{3+1}-\sqrt{2-1}=1$
Si $x = 5$: $\sqrt{15+1}-\sqrt{9}=1$

Entonces $S = \{1,5\}$

Ejercicio

Determine el conjunto solución de:

a. $\sqrt[3]{x+1}=2$ $\qquad S = \{7\}$
b. $\sqrt[3]{x-1}=-2$ $\qquad S = \{-7\}$
c. $\sqrt{5x-14}-2\sqrt{x-1}=0$ $\qquad S = \{10\}$
d. $\sqrt{x^2-x-2}=5-x$ $\qquad S = \{3\}$
e. $\sqrt[3]{x^2+6x}-x=2$ $\qquad S = \{-4\}$
f. $\sqrt{4x-3}-1=\sqrt{2x-2}$ $\qquad S = \{3,1\}$
g. $\sqrt{3x-1}-\sqrt{8-x}=\sqrt{9-4x}$ $\qquad S = \{\frac{9}{4}\}$

CAMBIO DE VARIABLES EN UNA ECUACION PARA REDUCIRLA A UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Por ejemplo:

1. $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$

Podemos escribirla $9(x^2)^2 - 46(x^2)^1 + 5 = 0$

Hacemos $y = x^2$ nos queda $9y^2 - 46y + 5 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado: $y_1 = 5$ e $y_2 = \frac{1}{9}$

Determinamos x:

$$y_1 = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

$$y_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$$

2. $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

Puede hacer $y = x^2 + x$

$S = \{-3, -2, 1, 2\}$

Ejercicio

Determine el conjunto solución:

a. $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$ $S = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

b. $x^{-4} - 10x^{-2} + 9 = 0$ $S = \{-1, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$

c. $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$ $S = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$

d. $|x - 1|^2 - 3|x - 1| + 2 = 0$ $S = \{-1, 0, 2, 3\}$

UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 3

Letras y Números Juntos

1. Dados los polinomios $p(x) = x^2 – 4x + 4$ y $q(x) = 2x – 4$, calcule:

   1.1) $p(x) + q(x)$ Rta.: $x^2 – 2x$

   1.2) $p(x) - 2\, q(x)$ Rta.: $x^2 – 8x + 12$

   1.3) $3.\ p(x).\ q(x)$ Rta.: $6x^3 – 36x^2 + 72x - 48$

   1.4) $p(x) : q(x) \quad x \neq 2$ Rta.: $\frac{1}{2}x - 1$

   1.5) $[q(x)]^2$ Rta.: $4x^2 – 16x + 16$

   1.6) $[p(x)]^2$ Rta.: $x^4 – 8x^3 + 24x^2 – 32x + 16$

   1.7) $[q(x)]^3$ Rta.: $8x^3 – 48x^2 + 96x – 64$

2. Determine los números opuestos h y k para que: $p(x) = x^3 – x^2 + hx – k$ sea divisible por $q(x) = x + 2$

   Rta.: $h = -12$ y $k = 12$

3. ¿Cuál es el resto de dividir $p(x) = 3x^3 + 2x -4$ por $q(x) = x +1$?

   Rta.: -9

4. Determine el valor positivo de α para que: $p(x) = (\alpha – 1)x^3 - \alpha^2 x^2 + x – 10$ tenga a -2 como raíz.

   Rta.: No existe

5. Halle el orden de multiplicidad de las raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ en $p(x) = x^6 + x^5 – 5x^4 – x^3 + 8x^2 – 4x$

   Rta.: $x_1 = 1$ orden 3
   $x_2 = -2$ orden 2

6. Halle el polinomio $p(x)$ de grado mínimo y tal que:

   6.1) Es reducido, tiene raíces simples en -1 y 3, y tiene una raíz doble 6.

   Rta.: $p(x) = x^4 – 14x^3 + 57x^2 – 36x -108$

   6.2) Tiene raíces simples en 2 y -2, $p(-1) = 3$

   Rta.: $p(x) = -x^2 + 4$

7. Simplifique las siguientes expresiones:

   7.1) $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49}$, $|x| \neq 7$ Rta.: $\dfrac{x-7}{x+7}$

   7.2) $\dfrac{y^3 - 1}{y - 1}$, $y \neq 1$ Rta.: $y^2 + y + 1$

7.3) $\dfrac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a}$, $a \neq 0 \;\wedge\; a \neq -1$ Rta.: $\dfrac{a^2+1}{a}$

8. 8.1) Factorice el polinomio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Rta.: $p(x) = 2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$

8.2) Dado el polinomio $p(x) = \dfrac{1}{k}x^2 - 5x + 2k$, determine el valor no nulo de k, si se sabe que el doble de la suma de los ceros del polinomio es igual al producto de dichos ceros.

Rta.: $k = 5$

8.3) Determine los valores reales de a, b, α y β para que el polinomio
$p(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ sea igual al polinomio $q(x) = a(x+\alpha)^3 + b(x+\beta)$

Rta.. $a = 1$, $b = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$

8.4) Determine el valor real de a, para que el resto de la división entre
$p(x) = -x^4 + 2x^2 - (a-1)^2x + 1$ y $b(x) = x + 1$ (en ese orden) sea igual a 11.

Rta.: 4 o -2.

9. 9.1) Factorice el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x$

Rta.: $p(x) = x(x+2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

9.2) Dado $p(x) = ax^3 + ax^2 + 7x + b$, determine los valores reales de a y b para que $p(x)$ sea divisible por $q(x) = x - 1$ y por $r(x) = x + 3$

Rta.: $a = -\dfrac{7}{5}, b = -\dfrac{21}{5}$

9.3) Halle el polinomio $t(x)$ de grado mínimo sabiendo que $t(-2) = 30$; 4 y $-\dfrac{1}{3}$ son raíces simples y -1 es raíz doble.

Rta.: $t(x) = 3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-4)(x+1)^2$

10. Reduzca a la mínima expresión:

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{3}{1-y^2} + \frac{2}{1-y} + \frac{1}{y+1}\right) : \frac{1}{-y^2-y} \qquad (y \neq 0,\ \ |y| \neq 1)$$

Rta.: $-\dfrac{1}{1-y}$

11. Determine los valores de A, B y C para que se verifiquen las siguientes igualdades.

11.1) $\dfrac{3x-1}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-3}$ Rta.: $A = \dfrac{7}{5}$ $B = \dfrac{8}{5}$

11.2) $\dfrac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-3}$ Rta.: $A = -1$ $B = -\dfrac{1}{2}$ $C = \dfrac{3}{2}$

11.3) $\dfrac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$ Rta.: $A=4\quad B=-1\quad C=2$

11.4) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x+1}$ Rta.: $A=-\dfrac{1}{2}\quad B=\dfrac{1}{2}\quad C=\dfrac{1}{2}$

12. Sea $p(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + (h + k)x - (h - k)$

12.1) Calcule h y k sabiendo que 3 es raíz doble.

Rta.: $h=\dfrac{15}{2};\quad k=-\dfrac{3}{2}$

12.2) Factorice a $p(x)$ en función de sus raíces, suponiendo $h=\dfrac{15}{2}$ y $k=-\dfrac{3}{2}$

Rta.: $p(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)^2$

12.3) Calcule h y k sabiendo que $p(-1) = 14$ y $p(-2) = 80$

Rta.: $h=\dfrac{1}{2};\quad k=\dfrac{29}{2}$

12.4) Obtenga el cociente y el resto de dividir $p(x)$ por $q(x) = x - 3$, suponiendo $h = k = 1$.

Rta.: Cociente: $x^3 - 3x^2 - x - 1$; Resto: -3

13. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

13.1) $x^2+10x+\dfrac{25}{2}=0$ Rta.: $S=\left\{-5+\dfrac{5}{2}\sqrt{2},\ -5-\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\right\}$

13.2) $3x^2-30x-33=0$ Rta.: $S = \{-1, 11\}$

13.3) $-5(x-3)(x-1)=0$ Rta.: $S = \{1, 3\}$

14. Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a\neq 0)$ con raíces: $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$, equivalente a la ecuación:

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

Pruebe las siguientes propiedades de las raíces:

14.1) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ 14.2) $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$

15. Determine dos números tales que su suma sea s y su producto p.

15.1) $s = 2 \wedge p = 20$

15.2) $s = 12 \wedge p = -64$

16. Determine el valor real de k, tal que:

16.1) $5kx^2-(2k+10)x+4=0$ tenga raíz doble. Rta.: $k = 5$

16.2) $3x^2+kx-2=0$ tenga una raíz igual a (-2). Rta.: $k = 5$

17. Halle el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

17.1) $x^2 - 4x < 5$ $\qquad$ $S = (-1,5)$

17.2) $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 8 \geq 0$ $\qquad$ $S = (-\infty, -8] \cup [-2, +\infty)$

17.3) $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$ $\qquad$ $S = \left[-\frac{1}{3}, 4\right]$

18. Una vieja máquina puede hacer un trabajo en 6 h. Con la ayuda de otra más moderna el trabajo se realizaría en 2 h. ¿Cuánto tardaría la máquina nueva en hacer sola esta tarea?

- Identificamos la incógnita.
  Llamaremos x al tiempo en que la máquina nueva hace la tarea.
- Observamos las condiciones o restricciones que pone el problema sobre la incógnita:

  Velocidad de la máquina vieja $= \frac{1}{6}$ de la tarea en una hora.

  Velocidad de la máquina nueva $= \frac{1}{x}$ de la tarea en una hora.
- Transformamos lo considerado anteriormente en una ecuación:

$$\begin{pmatrix}\text{trabajo de la m.}\\ \text{vieja en 2h.}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{trabajo en la m.}\\ \text{nueva en 2h.}\end{pmatrix} = 1 \text{ tarea completa}$$

$$\frac{1}{6} \;.\; 2 \qquad + \qquad \frac{1}{x} \;.\; 2 \qquad = 1$$

Por lo tanto obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{x} = 1$$

- Resolvemos la ecuación:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{x} = 1$$
$$x + 6 = 3x$$
$$2x = 6$$
$$x = 3 \text{ h.}$$

- Verificamos nuestra solución:

$$\frac{1}{6}.2 + \frac{1}{3}.2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \text{ tarea completa}$$

19. En una cabaña el agua se bombea y se guarda en un gran depósito. Para ello se utilizan dos bombas. Una puede llenar el depósito en 6 h. y la otra en 9 h. ¿Cuánto tardarán ambas en llenar el depósito?

Rta.: 3,6 h.

20. Un grupo de estudiantes alquiló un micro en \$80. Cuatro de ellos no pudieron ir a la excursión y entonces cada uno de los que fueron tuvo que pagar \$1 más. ¿Cuántos estudiantes había al principio en el grupo?

- Identificamos la incógnita.
  Llamaremos x al número de estudiantes que hay en el grupo.
- Observamos las condiciones o restricciones que pone el problema sobre la incógnita:

  Si el alquiler es \$80 cada estudiante abonará: $\frac{80}{x}$

  Como 4 de ellos no pudieron ir, el número de estudiantes será: $x - 4$

  luego tendrán que abonar \$1 más, es decir: $\frac{80}{x} + 1$
- Transformamos lo considerado anteriormente en una ecuación:

  [Cantidad de estudiantes] . [precio que abona c/u] = \$80

$$(x - 4)\left(\frac{80}{x}+1\right) = 80$$

- Resolvemos la ecuación:

$$80 + x - \frac{320}{x} - 4 = 80$$
$$x - \frac{320}{x} = 4$$
$$x^2 - 4x - 320 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+1280}}{2}$$
$$x = -16 \vee x = 20$$

- Verificamos nuestra solución:

En el primer caso x = -16, si bien es raíz de la ecuación planteada, no puede representar el número de estudiantes. Luego descartamos ésta solución.
En cambio x = 20 es el valor buscado, ya que si hubiesen 20 estudiantes pagarían \$4 cada uno; pero como fueron 16 estudiantes el precio se elevó a \$5 y en ambos casos se verifica.

20. \$4 = \$80
16. \$5 = \$80

21. Hay un estandarte de 4 dm. x 3 dm. tiene una cruz roja, de ancho uniforme, que se extiende de lado a lado cubriendo la mitad del área. ¿Cuál es el ancho de la cruz?

Rta.: 1 dm

22. En dos clavos tenemos 156 posibilidades de colgar n cuadros. ¿Cuántos cuadros hay?

Rta.: 13

23. Determine tres números enteros positivos y consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

Rta.: 10, 11, 12

24. ¿De cuántos lados se compone un polígono que tiene 90 diagonales?

Rta.: 15 lados

25. Un círculo tiene 20 cm de radio. ¿En cuánto debe disminuirse el radio para que el área disminuya en $76\pi\ cm^2$?

Rta.: 2 cm.

26. La base mayor de un trapecio mide 50 cm. La base menor es igual a la altura, y el área es de 1200 cm^2 ¿Cuánto mide la base menor?

Rta.: 30 cm.

27. La altura (a) m alcanzada por un objeto, lanzada en tiro vertical, es $20t - 5t^2$, donde (t) segundos es el tiempo. Halle el tiempo ($t \neq 0$) transcurrido desde que es lanzado hasta alcanzar la altura:

27.1) $a = 0$ m — Rta.: $t = 4seg$

27.2) $a = \dfrac{75}{4}$ m — Rta.: $t_1 = 2{,}5seg \vee t_2 = 1{,}5seg$

27.3) $a = 15$ m — Rta.: $t_1 = 3seg \vee t_2 = 1seg$

28. El piso de una sala tiene 1500 mosaicos (cuadrados). Si cada mosaico tuviese 5 cm más de largo y 5 cm más de ancho bastarían 960 mosaicos para recubrir el piso. Determine las dimensiones de los mosaicos que tiene la sala.

Rta.: 20 cm x 20 cm

29. Una canilla puede llenar un tanque en 3 horas menos que otra canilla, y juntas llenarán el tanque en 4 horas. ¿En cuánto tiempo llena el tanque cada canilla (independientemente)?

Rta.: 6h 46 m y 9h 46 m

30. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

30.1) $\dfrac{6-x}{x^2+4x+4} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2}{5-x}$ — Rta.: $S = \left\{\dfrac{6}{11}\right\}$

30.2) $\dfrac{x+4}{3x-6} - \dfrac{x-6}{4x-8} = \dfrac{x+1}{x-2}$ — Rta.: $S = \varnothing$

30.3) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \dfrac{x+1}{x-1} = 6$ — Rta.: $S = \left\{\dfrac{1}{2},\ 3\right\}$

31. Determine el conjunto solución de:

31.1) $\sqrt{2+\sqrt{x}} + \sqrt{2-\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ — Rta.: $S = \{4\}$

31.2) $\sqrt{6x+7} - \sqrt{3x+3} = 1$ — Rta.: $S = \left\{\dfrac{1}{3},\ -1\right\}$

31.3) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x+5}$ — Rta.: $S = \{4,\ -4\}$

32. A un cuadro de óleo de 1,5 m de largo por 90 cm de alto se le pone un marco rectangular. El área total del cuadro y el marco es de 1,6 m^2 ¿Cuál es el ancho del marco?

Rta.: 5 cm

33. En un campeonato de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas. ¿Cuántos son los jugadores?

Rta.: 10 jugadores

34. Un estanciero vendió cierto número de reses por 1200 dólares. Si hubiera pedido la misma suma por tres reses menos, habría recibido 20 dólares más por cada res. ¿Cuántas reses vendió y a qué precio cada una?

Rta.: 15 reses a 80 dólares cada una.

35. Un hombre al morir deja una herencia de $60.000 para repartir entre cierto número de herederos pero 2 de éstos no reclaman su parte entonces la herencia de cada uno de los demás resulta aumentada en $1000. ¿Cuántos herederos había originalmente?

Rta.: 12 herederos

36. Un rectángulo está inscripto en una circunferencia de 5 cm de radio. Encuentre las dimensiones del rectángulo si su área es 40 cm^2

Rta.: $4\sqrt{5}\,cm$ y $2\sqrt{5}\,cm$

37. Un alambre de 40 cm de longitud se cortó en dos pedazos. Una de las partes se dobló haciendo un cuadrado y la otra un rectángulo que es tres veces más largo que ancho. La suma del área del cuadrado y del área del rectángulo es 55,75 cm^2. ¿En qué lugar se cortó el alambre?

Rta.: Dos soluciones, la pieza mayor tiene 28 cm ó $\frac{236}{7}$ cm.

UNIDAD 4

Sistemas de ecuaciones lineales

- Método de eliminación de Gauss
- Sistemas homogéneos

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dado el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = k_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = k_m \end{cases}$$

Diremos que resolver el sistema que determinan las m-ecuaciones es encontrar, cuando sea posible, un conjunto de valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (llamado solución del sistema) para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que verifiquen todas las ecuaciones, o sea tales que:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = k_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = k_2 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \ldots + a_{3n}\alpha_n = k_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = k_m \end{cases}$$

Hemos asignado a cada coeficiente de las incógnitas un par de subíndices $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ y $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ tal que i indica la fila y j la columna en que cada coeficiente se halla ubicado.

a_{ij}	i : fila	$\rightarrow$	número de filas:	m
	j : columna	$\downarrow$	número de columnas:	n

Diremos en consecuencia que el sistema tiene m ecuaciones con n incógnitas o simplemente enunciaremos que es un "sistema de m x n" o que es un "sistema de orden m x n"

- Es claro que por tratarse de un conjunto de ecuaciones no importa el orden en que se coloquen las mismas.
- Podemos multiplicar una ecuación por un número. La igualdad no se altera si multiplicamos cada miembro por el mismo escalar (numero real distinto de cero).
- Podemos sumar miembro a miembro ecuaciones.

SISTEMAS EQUIVALENTES

Denominamos **Sistemas Equivalente** a uno dado al que se obtiene efectuando ciertas operaciones que no modifiquen el conjunto solución.

Diremos:

Para obtener un sistema equivalente a partir de uno dado podemos:

Permutar ecuaciones
Multiplicar una ecuación por un escalar $\lambda, \lambda \in R - \{0\})$
Sumar miembro a miembro dos ecuaciones

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS (2 X 2)

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, 2 x 2, o simplemente de orden 2 puede escribirse en forma general.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = k_1 \\ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = k_2 \end{cases} \quad \text{o bien}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 & E_1 \\ x_1 + 2x_2 = -1 & E_2 \end{cases}$$

Una manera de obtener para qué valores de x_1 y x_2 se satisfacen ambas ecuaciones la proporciona el método denominado "**reducción por sumas o restas**" que consiste en eliminar una de las incógnitas, después de *haber multiplicado convenientemente por sendos escalares a ambas ecuaciones*, de modo que los coeficientes de la incógnita a eliminar resulten de igual valor absoluto (si los números coinciden las ecuaciones se restan y si son opuestos se suman).

Así en nuestro ejemplo si conservamos la ecuación (E_1) y multiplicamos a la (E_2) por -2

Obtenemos:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ \\ -2(x_1 + 2x_2) = -2.(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ \\ -2x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Ahora sumamos miembro a miembro ambas igualdades, y resulta la ecuación:

$$-5.x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = -1$$

Si multiplicamos por 2 a la (E_1) y conservamos la (E_2) obtenemos:

$$\begin{cases} 2(2x_1 - x_2) = 2.3 \\ \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 6 \\ \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro: $5x_1 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Diremos finalmente que la solución del sistema es: $(x_1,x_2) = (1,-1)$ y el **conjunto solución** es: $S = \{(1,-1)\}$

Sin embargo muchos matemáticos han puesto todo su empeño en reducir al mínimo el número de operaciones necesarias para obtener la solución de un sistema, por cuanto a medida que aumenta el número de ecuaciones y de incógnitas aumenta la dificultad en la resolución.

Así *Gauss* (1777 - 1855) encontró un método para aplicar la reducción por sumas o restas economizando esfuerzo tal que:

METODO DE ELIMINACION DE GAUSS

En el *ejemplo 1* si escribimos los coeficientes separados de las incógnitas y operamos según se indica a la derecha resulta:

$$
\begin{array}{lcc|c|l}
 & x_1 & x_2 & k & \\
(E_1) & 2 & -1 & 3 & \\
(E_2) & 1 & 2 & -1 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 3 & E_1' = E_1 \\
 & 0 & 5 & -5 & E_2' = 2E_2 - E_1
\end{array}
$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se reduce simplemente a un sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 & E_1' \\ \quad 5x_2 = -5 & E_2' \end{cases}$$

donde $x_2 = -1$ y reemplazando en E_1' se obtiene la ecuación:

$$2x_1 - (-1) = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$

entonces: $S = \{(1,-1)\}$

Interpretación geométrica

Recordamos que una ecuación lineal de dos variables (x e y):

$$ax + by + c = 0 \qquad (a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0)$$

corresponde a la ecuación de una recta en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, y que para efectuar su gráfica conviene escribirla como:

Si $b \neq 0$: $\quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Si $b = 0$: $\quad x = -\frac{c}{a}$

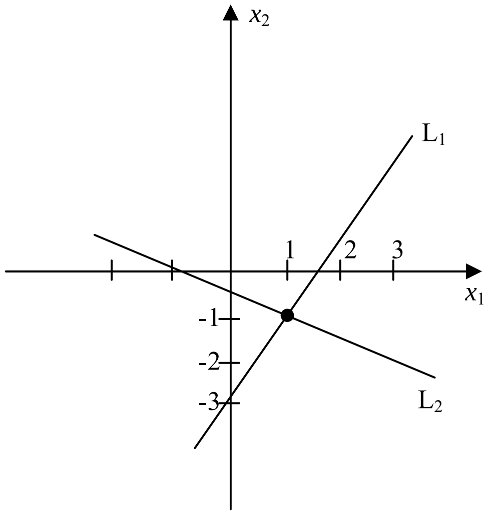
En el *ejemplo 1*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

por el despeje de x_2 en ambas ecuaciones resulta:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 3 & L_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} & L_2 \end{cases}$$

Así la representación gráfica de ambas rectas es:



donde se observa que la intersección de ambas rectas la constituye el único punto

$$(x_1, x_2) = (1, -1) \text{ o bien } L_1 \cap L_2 = \{(1, -1)\}$$

> Un sistema lineal de dos ecuaciones con 2 incógnitas con solución única (**Compatible Determinado**) representa geométricamente un par de rectas que se intersecan en el (único) punto $(x_1, x_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ perteneciente al conjunto solución del sistema

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 & E_1 \\ -2x_1 + 3x_2 = 9 & E_2 \end{cases}$$

Aplicamos el método de eliminación de GAUSS:

	x_1	x_2	k	
(E_1)	2	-3	0	
(E_2)	-2	3	9	
	2	-3	0	$E_1' = E_1$
	0	0	9	$E_2' = E_2 + E_1$

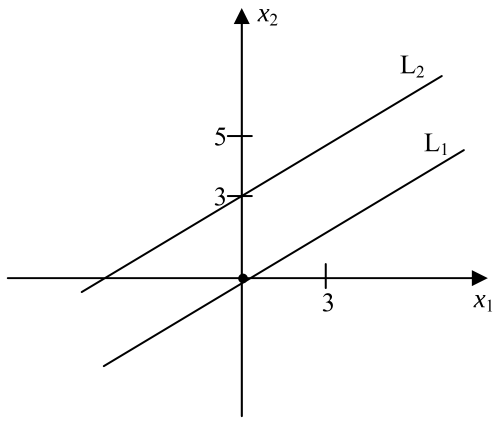
El sistema resulta:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 & E_1' \\ 0x_1 + 0x_2 = 9 & E_2' \end{cases}$$

de donde en E_2' el sistema carece de solución (**Incompatible**).

Geométricamente las rectas son:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}x_1 & L_1 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1 + 3 & L_2 \end{cases} \quad \text{donde } L_1 \cap L_2 = \emptyset$$



Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas carece de solución (**Incompatible**), si representa geométricamente un par de rectas (en $\mathbb{R}^2$) paralelas no coincidentes. Su conjunto solución es vacío ($S = \emptyset$)

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 & E_1 \\ -2x_1 + 4x_2 = -2 & E_2 \end{cases}$$

	x_1	x_2	k	
E_1	1	-2	1	
E_2	-2	4	-2	
	1	-2	1	$E_1' = E_1$
	0	0	0	$E_2' = E_2 + 2E_1$

El sistema resulta:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 & E_1' \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 & E_2' \end{cases}$$

De donde en E_2' el sistema se verifica para todo x_1 y x_2 que también satisfaga E_1' (**Compatible Indeterminado**).

Geométricamente resultan rectas coincidentes.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} & L_1 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} & L_2 \end{cases}$$

Donde $L_1 \equiv L_2$ (coincide) o $L_1 \cap L_2 = L_1$

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, (**Compatible Indeterminado**), si representan geométricamente la misma recta (o un par de rectas coincidentes).

El conjunto solución del sistema se expresa de la siguiente forma:

$$S=\left\{(x_1,x_2)/(x_1,x_2)\in \mathrm{R}^2 \wedge (x_1,x_2)=\left(\lambda, \frac{1}{2}\ \lambda\ -\ \frac{1}{2}\right)\wedge \lambda\in \mathrm{R}\right\}$$

Si tenemos en cuenta que cuando operamos con pares ordenados:

La adición es: $(x_1+x_2)+(x_1'+x_2')=(x_1+x_1',x_2+x_2')$

La multiplicación por un escalar es:

$(\lambda\in \mathbb{R})\ \lambda\,(x_1, x_2) = (\lambda\, x_1,\ \lambda\, x_2)$ entonces la solución puede escribirse:

$$S=\{(x_1, x_2) / (x_1, x_2)\in \mathbb{R}^2 \wedge (x_1, x_2)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)+\lambda\left(1,\frac{1}{2}\right)\wedge \lambda\in \mathbb{R}\}$$

Para obtener puntos pertenecientes a la recta bastará con asignar a λ valores reales.

$$\text{Si}\,\lambda=0\Rightarrow (x_1,x_2)=\left(0,-\tfrac{1}{2}\right)+0\left(1,\tfrac{1}{2}\right)=\left(0,-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\text{Si}\,\lambda=1\Rightarrow (x_1,x_2)=\left(0,-\tfrac{1}{2}\right)+1\left(1,\tfrac{1}{2}\right)=\left(1,0\right)$$
$$\text{Si}\,\lambda=-2\Rightarrow (x_1,x_2)=\left(0,-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-2\right)\left(1,-\tfrac{1}{2}\right)=\left(-2,-\tfrac{3}{2}\right)$$

Ejercicio 1

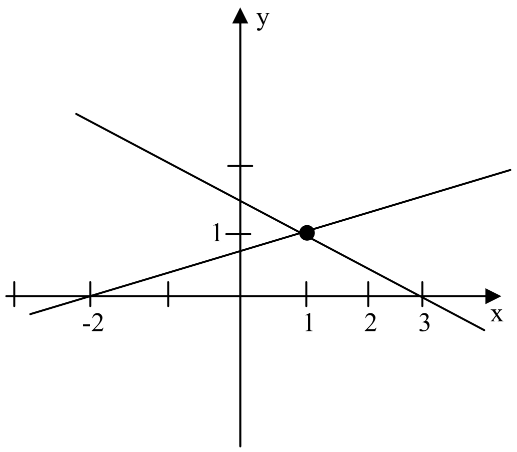
Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones e interprete geométricamente:

$$1\begin{cases}2x+3y=1\\5x+7y=9\end{cases}\qquad 2\begin{cases}2x_1+4x_2=10\\3x_1+6x_2=15\end{cases}\qquad 3\begin{cases}4u-2v=5\\-6u+3v=1\end{cases}$$

En cada caso verifique la solución hallada.

Ejercicio 2

Proporcione un sistema de ecuaciones cuya representación gráfica sea la siguiente:



Ejemplo 4

Determine para que valores de *k*, el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución:

$$\begin{cases}kx_1+x_2=1\\x_1+kx_2=1\end{cases}$$

OBSERVACIÓN:

Al separar los coeficientes permutamos las ecuaciones por cuanto k puede valer cero.
Por lo tanto la primera condición para aplicar el método de eliminación es que: $a_{11} \neq 0$

	x_1	x_2	k	
E_1	1	k	1	
E_2	k	1	1	
	1	k	1	$E_1' = E_1$
	0	$1-k^2$	$1-k$	$E_2' = E_2 - kE_1$

El sistema resulta:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 = 1 & E_1' \\ (1-k^2)x_2 = 1-k & E_2' \end{cases}$$

por lo tanto en E_2' factoreando el primer miembro resulta:

$$\underbrace{(1-k)(1+k)}_{a}x_2 = \underbrace{1-k}_{b} \qquad (ax_2 = b)$$

y el sistema tendrá:

- Una única solución (**Compatible Determinado**) ($a \neq 0$) si $k \neq 1$, $k \neq -1$
- Infinitas soluciones (**Compatible Indeterminado**) ($a = 0 \wedge b = 0$) si $k = 1$
- No tendrá solución (**Incompatible**) ($a = 0 \wedge b \neq 0$) si $k = -1$

Ejercicio 3

Dados los sistemas

$$1 \quad \begin{cases} -x_1 + (k-1)x_2 = -k \\ (k-1)x_1 + x_2 = k \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} u - kv = 0 \\ 2u - 2v = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} 8x + ky = 5 + k \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

Determine para qué valores de k, el sistema admite una, infinitas o ninguna solución.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS

Sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3 \end{cases}$$

Cada ecuación lineal con tres incógnitas representa una superficie (en el espacio geométrico $\mathbb{R}^3$) denominada plano, tema éste que estudiará usted más adelante y que se representa analíticamente por una ecuación del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{con } a, b \text{ y } c \text{ no simultáneamente nulos}$$

Analicemos algunos ejemplos de aplicación del método de eliminación de Gauss a un sistema lineal de orden tres.

Ejemplo 5:

Encuentre, si existe, la solución de:

$$\begin{cases} x - 3y - z = -3 \\ 2x - 5y + z = -13 \\ -3x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

si separamos los coeficientes y calculamos convenientemente según se indica a la derecha, resulta:

	x	y	z	k	
E_1	1	-3	-1	-3	
E_2	2	-5	1	-13	
E_3	-3	1	-2	8	
PRIMER PASO	1	-3	-1	-3	$E_1' = E_1$
	0	1	3	-7	$E_2' = E_2 - 2E_1$
	0	-8	-5	-1	$E_3' = E_3 + 3E_1$
SEGUNDO PASO	1	-3	-1	-3	$E_1'' = E_1'$
	0	1	3	-7	$E_2'' = E_2'$
	0	0	19	-57	$E_3'' = E_3' + 8E_2'$

de donde en E_3'' obtuvimos: $19z = -57 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = -3}$

reemplazando en E_2''

$$y + 3z = -7$$

$$\Rightarrow \quad y + 3(-3) = -7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2}$$

y en E_1''

$$x - 3y = -3$$

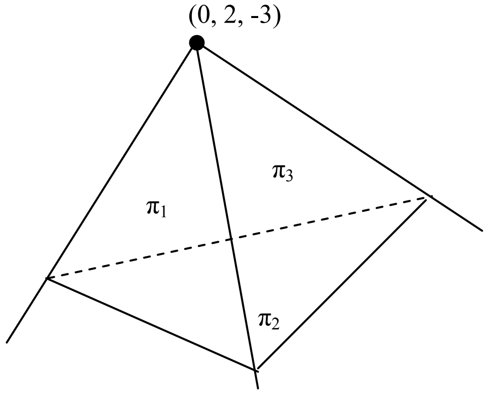
$$\Rightarrow \quad x - 3.2 - (-3) = -3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$

Luego el sistema admite solución única (**Compatible Determinado**),

y su conjunto solución es: $S = \{(0,2,-3)\}$

y el punto I de coordenadas (0,2,-3), es el único punto de intersección de los tres planos.

$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{(0, 2, -3)\}$



OBSERVACIONES:

El método de eliminación de Gauss también recibe el nombre de **Triangulación**.
Por cuanto el sistema queda reducido a un sistema equivalente que es el formado por las ecuaciones E_1'', E_2'', E_3''.

$$\begin{cases} x - 3y - z = -3 & E_1'' \\ y - 3z = -7 & E_2'' \\ 19z = -57 & E_3'' \end{cases}$$

Podrá efectuarse en forma mas reducida sin repetir ecuaciones como se muestra en el siguiente esquema:

E_1	1	-3	-1	-3
E_2	2	-5	1	-13
E_3	-3	1	-2	8
E_2'	0	1	3	-7
E_3'	0	-8	-5	-1
E_3''	0	0	19	-57

Si consideramos para su resolución las ecuaciones que hemos recuadrado obtendremos, según hemos visto: $S = \{(0, 2, -3)\}$

> El análisis de la compatibilidad del sistema se reduce a analizar la existencia de la solución de la ecuación:
>
> $$E_3'': \quad az = \beta$$
>
> Conclusión:
>
> si $a \neq 0$ el sistema admite una única solución
>
> si $a = 0 \wedge \beta = 0$ admite infinitas soluciones
>
> si $a = 0 \wedge \beta \neq 0$ no tiene solución

Ejemplo 6

Sea

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \\ 8x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$$

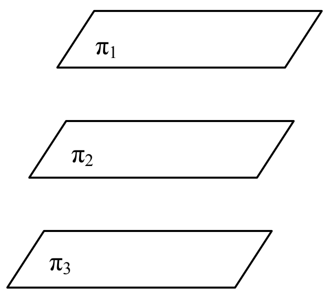
Si efectuamos la **triangulación** correspondiente resulta:

	x	y	z	k	
E_1	1	-1	1	2	
E_2	3	-3	3	1	
E_3	8	-8	8	5	
	0	0	0	-5	$E_2' = E_2 - 3E_1$
	0	0	0	-11	$E_3' = E_3 - 8E_1$

de donde en E_3': $0.z = -11 \Rightarrow$ no existe valor de z que verifique la igualdad y el sistema resulta **Incompatible**, de conjunto solución vacío $S = \emptyset$

Se trata geométricamente de tres planos paralelos (no se intersecan):

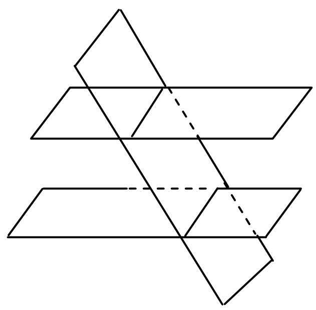
$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$$



Ejemplo 7

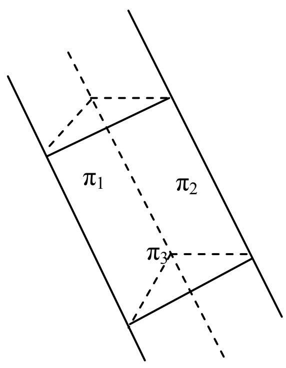
Dados los siguientes sistemas, compruebe que no tienen solución e interprete geométricamente:

$$1)\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$



Rta.: figura 1

$$2)\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ -2x + y = -1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$



Rta.: Figura 2

Ejemplo 8

Sea

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 3y - z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

la **triangulación** correspondiente es:

E_1	2	-1	3	1	
E_2	-4	3	-1	0	
E_3	-2	2	2	1	
	0	1	5	2	$E_2' = E_2 + 2E_1$
	0	1	5	2	$E_3' = E_3 + E_1$
	0	0	0	0	$E_3'' = E_3' - E_2'$

En $E_3'' : 0.z = 0$ se verifica para todo valor de z y el sistema resulta **Compatible** (porque admite solución) **Indeterminado** (porque son infinitas).

Si $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
resulta en E_2':

$$y + 5z = 2$$
$$y + 5\lambda = 2$$
$$y = 2 - 5\lambda$$

Y en E_1:

$$2x - y + 3z = 1$$
$$\Rightarrow 2x - (2 - 5\lambda) + 3\lambda = 1 \ \Rightarrow x = \frac{3}{2} - 4\lambda$$

Y la solución del sistema se escribe:

$$S = \left\{ (x, y, z) / (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \wedge x = \frac{3}{2} - 4\lambda \wedge y = 2 - 5\lambda \wedge z = \lambda \wedge \lambda \in \mathrm{R} \right\}$$

o bien:

$$S = \left\{ (x, y, z) / (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \wedge (x, y, z) = \left(\frac{3}{2} - 4\lambda, 2 - 5\lambda, \lambda \right) \wedge \lambda \in \mathrm{R} \right\}$$

Si tenemos en cuenta que cuando operamos con ternas ordenadas:

La adición es:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

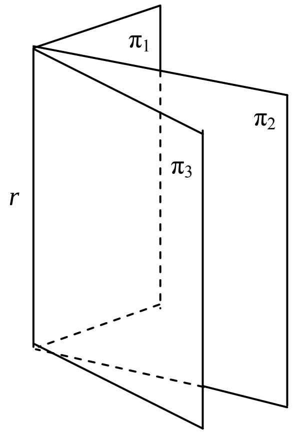
La multiplicación por un escalar

$(\lambda \in \mathrm{R})$ es $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Entonces la solución puede escribirse:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 / (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 2, 0 \right) + \lambda\,(-4, -5, 1) \wedge \lambda \in \mathrm{R} \right\}$$

Se trata, geométricamente, de tres planos que se intersecan en un recta *r* y las infinitas soluciones son los infinitos puntos que pertenecen a la recta de intersección.



$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \mathrm{r} = \left\{ (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 / (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 2, 0 \right) + \lambda\,(-4, -5, 1) \wedge \lambda \in \mathrm{R} \right\}$$

Así, si usted quiere obtener puntos de la recta r asignará valores a λ:

$\lambda = 0 \Rightarrow P_0\left(\frac{3}{2}, 2, 0\right)$

$\lambda = 1 \Rightarrow P_1\left(\frac{3}{2} - 4, 2 - 5, 0 + 1\right) \Rightarrow P_1\left(-\frac{5}{2}, -3, 1\right)$

$\lambda = \text{-}1 \Rightarrow P_2\left(\frac{3}{2} + 4, 2 + 5, 0 - 1\right) \Rightarrow P_2\left(\frac{11}{2}, 7, -1\right)$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Sean los sistemas:

$$1)\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 8y = 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

En los que las ecuaciones tienen **término independiente nulo**.
Los sistemas que tienen esta característica se denominan **Sistemas Homogéneos**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Estos son siempre **Compatibles** por cuanto siempre admiten como solución:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$

denominada **solución trivial** del sistema.

Es evidente en el *ejemplo 1*

$$x = y = 0 \Rightarrow (0,0) \in S$$

y en el *ejemplo 2*

$$x = y = z = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in S$$

Sin embargo nos preguntamos si esta solución es única.

En 1)

	x	y	$\vdots$	k	
E_1	2	3	$\vdots$	0	
E_2	1	-8	$\vdots$	0	
	0	-19	$\vdots$	0	$E_1' = 2E_2 - E_1$

$$-19y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$2x + 3.0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

de donde se infiere que el sistema tiene una única solución. $S = \{(0,0)\}$.

En 2)

	x	y	z	$\vdots$	k	
E_1	5	-3	1	$\vdots$	0	
E_2	-1	1	-2	$\vdots$	0	
	0	2	-9	$\vdots$	0	$E_1' = 5E_2 + E_1$

En E_1':

$$2y - 9z = 0$$

$$z = \lambda, \lambda \in \mathrm{R} \Rightarrow 2y - 9\lambda = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}\lambda$$

En E_2':

$$-x + y - 2z = 0 \Rightarrow -x + \frac{9}{2}\lambda - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -x + \frac{5}{2}\lambda = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}\lambda$$

El sistema admite infinitas soluciones además de la solución trivial.

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathrm{R}^3 / (x,y,z) = \left(\frac{5}{2}\lambda\ \frac{9}{2}\lambda,\ \lambda \right) \wedge \lambda \in \mathrm{R} \right\}$$

o bien

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathrm{R}^3 / (x,y,z) = \lambda \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1 \right) \wedge \lambda \in \mathrm{R} \right\}$$

en donde pueden obtenerse algunas soluciones asignando valores a λ:

$\lambda = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$\lambda = 1 \Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1\right)$

$\lambda = -2 \Rightarrow (x,y,z) = (-5,-9,-2)$

CONCLUSIÓN:

SISTEMAS HOMOGENEOS	*DETERMINADOS (ÚNICA SOLUCIÓN LA TRIVIAL)*
	INDETERMINADOS (INFINITAS SOLUCIONES ADEMÁS DE LA TRIVIAL)

UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 4

Sistemas de ecuaciones lineales

1) Resuelva los siguientes sistemas lineales:

1.1) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ \dfrac{2x + y}{3} = y - 6 \end{cases}$ $S = \{(-4,5)\}$

1.2) $\begin{cases} x + 4y = 2 - x \\ x = 1 - 2y \end{cases}$ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = (1,0) + t(-2,1) \wedge t \in \mathbb{R}\}$

1.3) $\begin{cases} 2(x - 1{,}5y) - 5 = 0 \\ \dfrac{\frac{x}{3}}{2} = y + \dfrac{5}{6} \end{cases}$ $S = \varnothing$

1.4) $\begin{cases} x - 4y = 3x + 2y \\ x = 2x - 2y \end{cases}$ $S = \{(0,0)\}$

1.5) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y = x \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y = y \end{cases}$ $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = t\left(\dfrac{2}{3}, 1\right) \wedge t \in \mathbb{R}\right\}$

2) Halle los valores de *a* y *b* (reales) de forma que el sistema sea Compatible Determinado, Compatible Indeterminado, ó Incompatible.

2.1) $\begin{cases} x + ay = a \\ -by = b \end{cases}$

$SCD: \ b \neq 0, a \in \mathbb{R}$

$SCI: \ b = 0, a \in \mathbb{R}$

2.2) $\begin{cases} ax - y = 0 \\ x - ay = b \end{cases}$

$SCD: \ a \neq 1, a \neq -1 \wedge b \in \mathbb{R}$

$SCI: \ (a = 1 \vee a = -1) \wedge b = 0$

$SI: \ (a = 1 \vee a = -1) \wedge b \neq 0$

3) Resuelva los siguientes sistemas lineales:

3.1) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \\ -x + 6z = 9 \end{cases}$ $S = \{(-15,6,-1)\}$

$$3.2)\begin{cases} x+3y-z=4 \\ -2x+y+3z=9 \\ 4x+2y+z=11 \end{cases} \qquad S=\{(1,2,3)\}$$

$$3.3)\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+5y+2z=9 \\ x+4y+7z=6 \end{cases} \qquad S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=2+9\lambda, y=1-4\lambda, z=\lambda, \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

$$3.4)\begin{cases} y-2z=-5 \\ 2x-y+z=-2 \\ 4x-y=-4 \end{cases} \qquad S=\varnothing$$

$$3.5)\begin{cases} x\qquad +z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases} \qquad S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=-\lambda, y=2\lambda, z=\lambda, \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

4) Indique los valores de k (reales) tales que el sistema sea: Compatible Determinado, Compatible Indeterminado, ó Incompatible.

$$4.1)\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ kx+y=-2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} SCD: & k\neq 1 \\ SCI: & No\ existe\ k \\ SI: & k=1 \end{array}$$

$$4.2)\begin{cases} x+y-z=k \\ -x+y+kz=3 \\ ky+z=5 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} SCD: & k\neq 2 \wedge k\neq -1 \\ SCI: & k=2 \\ SI: & k=-1 \end{array}$$

$$4.3)\begin{cases} x\qquad +kz=0 \\ 3x+y+4z=0 \\ 2x+ky+3z=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} SCD: & k\neq 1 \\ SCI: & k=1 \\ SI: & No\ existe\ k \end{array}$$

5) En una concesionaria de automóviles hay 30 unidades en exposición, entre motos y autos. Sea cuentan 104 ruedas (sin considerar las de auxilio). ¿Cuántos vehículos de cada clase hay?

- Identificamos las incógnitas:

n° de autos: x
n° de motos: y

- Observamos las condiciones que pone el problema sobre las incógnitas y las transformamos en ecuaciones.

Hay 30 unidades en exposición	$x + y = 30$
Se cuentan 104 ruedas	$4x + 2\,y = 104$

- Resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 104 \end{cases}$$

x	y	k	
1	1	30	
4	2	104	
0	-2	-16	$E' = E_2 - 4E_1$

$$-2y = -16 \Rightarrow y = 8$$
$$x + 8 = 30 \Rightarrow x = 22$$

luego en la concesionaria hay 22 autos y 8 motos.

- Verificamos esta respuesta en el problema original:

22 autos y 8 motos son un total de 30 unidades
y 22.4r + 8.2r = 104 ruedas

6) El cuerpo de un pez pesa 4 veces lo que pesa la cabeza y la cola 2 libras más que la cabeza. Si el pez pesa 20 libras, ¿cuál es el peso de cada parte?

Rta.: 3 libras (cabeza); 12 libras (cuerpo); y cola 5 libras.

7) La edad de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Hace 3 años era el quíntuplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Rta.: padre 48, hijo 12

8) Antonio tiene 4 $ en monedas de 5 y de 20 centavos. Si en total tiene 29 monedas, ¿Cuántas son de 5 y cuántas son de 20 centavos?

Rta.: 12 monedas de 5 y 17 de 20

9) En un número de dos cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da 121. Determine el número.

Rta.: 83

10) Un estante contiene $\frac{3}{5}$ de la cantidad total de libros que están en el estante vecino.

Si pasamos 10 libros del primero al segundo estante, éste tendrá el doble de libros que el primero. ¿Cuántos libros había en cada librero?

Rta.: 90 y 150

11) Determine loa ángulos de un paralelogramo, que tiene la propiedad de que dos ángulos consecutivos difieren en 20°.

Rta.: 80° y 100°

12) Cuando se agrega un disco duro a una computadora personal, el sistema nuevo cuesta \$2325. Se sabe que $\frac{1}{3}$ del valor de la computadora más $\frac{1}{5}$ del valor del disco duro dan un total de \$745. ¿Cuál es el costo del disco duro?

Rta.: \$225

13) Una compañía médica produce dos tipos de válvulas para el corazón; la estándar y la de lujo. Para hacer una válvula estándar son necesarios 5 minutos en el torno y 10 en la prensa taladradora; para la válvula de lujo son necesarios 9 minutos en el torno y 15 en la prensa. Cierto día el torno estará disponible 4 horas y la prensa 7. ¿Cuántas válvulas de cada tipo deben hacerse para utilizar las dos máquinas todo el tiempo posible?

Rta.: 20 de lujo y 12 estándar

14) Los precios por unidad de dos sustancias son \$6 y \$10. Averiguar que cantidad de cada sustancia debe mezclarse para obtener 50 unidades de mezcla a \$7,60 cada una.

Rta.: 30 y 20 unidades

15) El día del parcial de Matemática se había previsto usar un cierto número de aulas. Al repartir 35 alumnos por aula quedaron 28 alumnos sin asiento. Entonces se ubicaron 38 alumnos en cada aula y quedaron 2 bancos libres. ¿Cuántos alumnos se presentaron al examen y cuántas aulas se utilizaron?

Rta.: 378 alumnos, 10 aulas

16) Dado el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -5 \\ x - y + (\alpha + 2)z = 2\alpha - 2 \end{cases} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

16.1) Calcule α suponiendo que (3, 9, 2) satisface el sistema.

Rta.: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

16.2) Resuelva el sistema para $\alpha = 0$

Rta.: $\{(3, 9, 2)\}$

17) Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2kx - 3y + z = 7 \\ -x + ky - 3z = 0 \\ 9x + 2y - 2z = 7 \end{cases} \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

17.1) Calcule k suponiendo que (1,2,3) satisface el sistema.

Rta.: $k = 5$

17.2) Resuelva el sistema para $k = 2$

Rta.: $\left\{\left(\frac{21}{25}, -\frac{42}{25}, -\frac{7}{5}\right)\right\}$

18) En algunas aplicaciones electrónicas es necesario analizar el valor de la corriente a través de ciertas trayectorias de un circuito. El estudio de tres circuitos *A*, *B* y *C* arroja los siguientes resultados:

$$\begin{cases} I_A - I_B - 2I_C = 1 \\ -I_A + 2I_B - 4I_C = 0 \\ -2I_A - 4I_B + 3I_C = 1 \end{cases}$$

Donde I_A, I_B, I_C representan las corrientes de las ramas A, B y C respectivamente.

Determine las corrientes de cada rama.

Rta.: $I_A = \frac{2}{37}, I_B = -\frac{17}{37}, I_C = -\frac{9}{37}$

19) En física se estudian las fuerzas que actúan sobre un objeto. En el caso de tres fuerzas F_1, F_2, F_3 que actúan sobre una viga, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 3F_1 + F_2 - F_3 = 2 \\ F_1 - 2F_2 + F_3 = 0 \\ 4F_1 - F_2 + F_3 = 3 \end{cases}$$

Calcule las fuerzas

Rta.: $F_1 = \frac{5}{7}, F_2 = \frac{6}{7}, F_3 = 1$

20) Dispone de tres tipos de fertilizantes con las composiciones indicadas en la siguiente tabla:

TIPO	FOSFATO	POTASIO	NITRÓGENO
A	10%	30%	60%
B	20%	40%	40%
C	20%	30%	50%

Un análisis de suelo muestra que los requerimientos de fertilizante para un determinado campo son 19% de fosfato, 34% de potasio y 47% de nitrógeno. ¿Puede obtener la mezcla correcta utilizando los tres tipos? Si es así, ¿Cuántos kilogramos de cada uno deben mezclarse para obtener 100 kg. de la calidad deseada?

Rta.: A: 10 kg, B: 40 kg, C: 50 kg

21) Una fábrica de muebles produce mesas, sillas y armarios. Cada mueble requiere tres pasos de producción: corte, armado y acabado.

La cantidad de horas necesarias para cada operación por mueble es:

Operación	Mesa	Silla	Armario
Corte	$\frac{1}{2}$	1	1
Armado	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
Acabado	1	$\frac{3}{2}$	2

Los operarios de la fábrica pueden dedicar 300 horas al corte, 400 horas al armado y 590 horas al acabado, en cada semana laboral.
Determine, si es posible, cuántas mesas, sillas y armarios deben producirse para ocupar todas las horas laborales disponibles.

Rta.: No es posible

UNIDAD 5

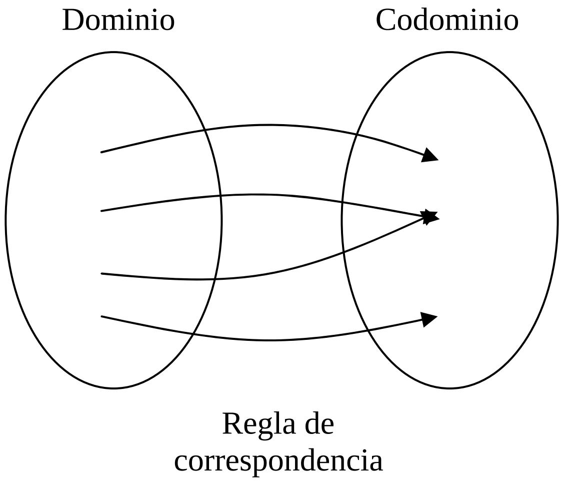
Funciones

- Propiedades y operaciones
- Funciones polinómicas
- Funciones racionales e irracionales
- Variación directa e inversa
- Composición de funciones
- Función inversa
- Funciones trascendentes

FUNCIONES (PRIMERA PARTE)

El concepto de *función* es uno de los más importantes en matemática. Durante mucho tiempo, matemáticos y científicos buscaron una forma de describir las relaciones que pueden existir entre dos *variables*. Resulta sorprendente que esta idea haya tardado tanto tiempo en plasmarse en un concepto claro y no ambiguo. Al matemático francés P. G. Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) se le otorga el reconocimiento de la definición de función.

Una función es una regla que asigna a todo elemento de un conjunto (llamado *dominio* de la función) exactamente un valor de otro conjunto (llamado *codominio* de la función).



Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Cuando un profesor asigna una calificación a cada examen parcial, está determinando una función. El dominio es el conjunto de estudiantes que rindió el parcial, el codominio es el conjunto de calificaciones obtenidas.

Ejemplo 2:

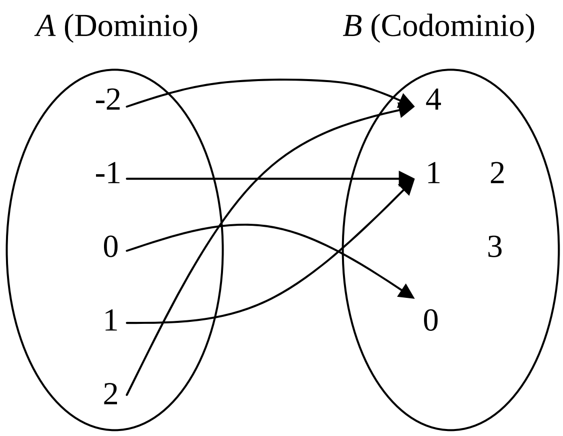
Las temperaturas máximas registradas en distintas ciudades el 17 de octubre de 2003 representan una función dada por la siguiente tabla:

Ciudad	Temperatura (° C)
Bariloche	13
Mar del Plata	16
Bahía Blanca	24
C. Rivadavia	18
Córdoba	33
Iguazú	33
Paraná	31
Buenos Aires	25
Santa Fe	34
Tucumán	36

Indique el lector el dominio y el codominio.

Ejemplo 3:

Consideremos los conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$
Definimos una función de A en B, que consiste en "elevar al cuadrado" cada elemento de A. El dominio y codominio son conjuntos numéricos y la regla se puede especificar a partir de una *fórmula* algebraica.



NOTACIÓN FUNCIONAL

Para denotar funciones utilizaremos una sola letra como f (g,h,p), de modo que $f(x)$ (se lee f de x) indica el valor que la función f le asigna a x, considerando el *ejemplo 3*; resulta:

$$f(-2) = 4,\ f(1) = 1,\ f(0) = 0, \text{ etc.}$$

diremos que 4 es la imagen de -2, 1 es la imagen de 1, etc.

y en general $f(x) = x^2$ (fórmula o regla de correspondencia).

Podemos entonces definir la función f de la siguiente manera:

$$f : A \rightarrow B \ / \ f(x) = x^2$$

OBSERVACIÓN:

Para definir una función debemos hacer referencia al dominio, codominio y fórmula (o regla de correspondencia).

Ejercicio:

En la primera semana de lanzamiento de un nuevo producto se vendieron 6000 unidades, en la segunda semana 3000 unidades y 2000 unidades en la 3ra. semana.
Defina la función determinando dominio y codominio.

Rta.: $f: A \rightarrow B \ / \ f(x) = \dfrac{6000}{x}$

Para continuar daremos la definición de función e introduciremos algunos términos y notaciones.

Definición:
$f : A \to B$ es función si y sólo si:
$\forall x \in A, \exists y \in B \,/\, f(x) = y$ (existencia)
$\forall x \in A, \forall y, z \in B : f(x) = y \wedge f(x) = z \Rightarrow y = z$ (unicidad)

La condición de existencia significa que *todos* los elementos del dominio tienen imagen.

La condición de unicidad indica que dicha imagen es única.

Llamaremos:

Dominio de *f*: $D_f = A$ (es el conjunto de todos los valores *x* para los cuales es válida la regla de correspondencia de la *f*).

Codominio de *f*: *B*

Conjunto Imagen: $I_f = \{y \in B \,/\, y = f(x) \wedge x \in A\}$

Para el *ejemplo 3* resulta: $I_f = \{0, 1, 4\}$

Diremos que:

$f : A \to B \,/\, y = f(x)$ es una *función escalar* si y sólo si *A* y *B* son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Son ejemplos de *f* escalares:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x + 2$
- $g : [0,4] \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{x}$
- $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \,/\, h(x) = -x^2-3$

Ejercicio:

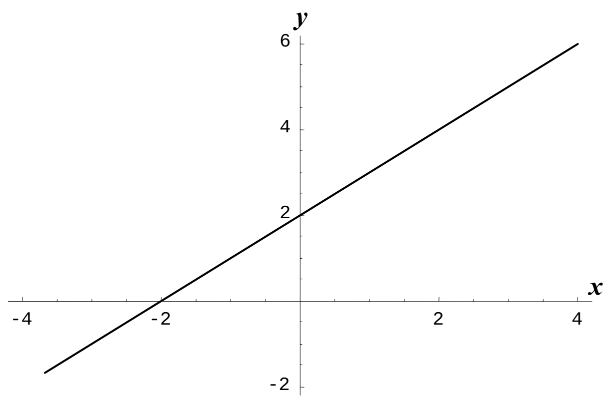
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 1 - x^2$, halle:

a) $f(-2)$; b) $f(0)$; c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; d) $f(\sqrt{3})$; e) $2f(3)-3f(2)$; f) $f(x + a) - f(a)$

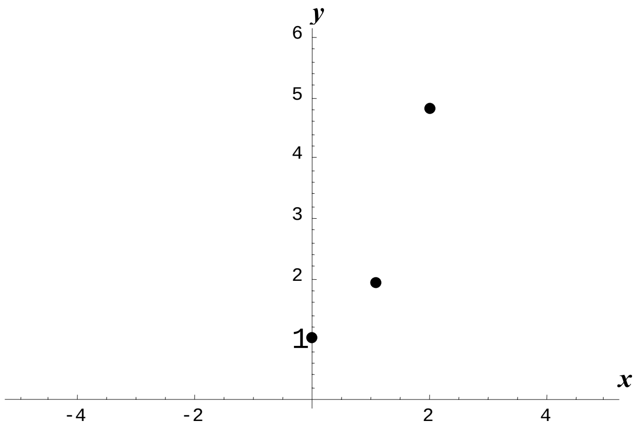
Se ha visto hasta aquí que las funciones se especifican con fórmulas, conociendo las mismas, realizaremos la *representación gráfica* de una función en un sistema de ejes coordenados:

Ejemplos:

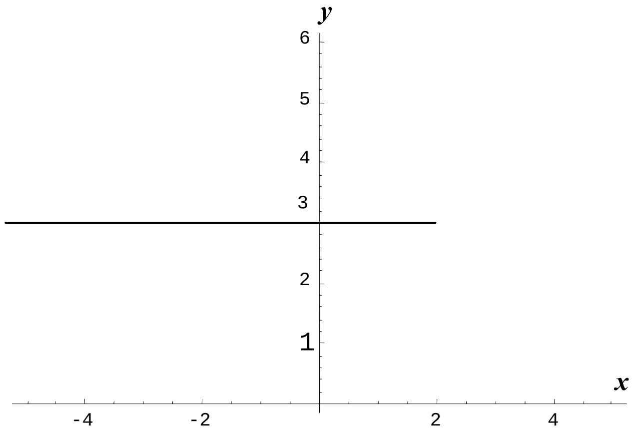
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x + 2$



2) $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \,/\, g(x) = x^2 + 1$

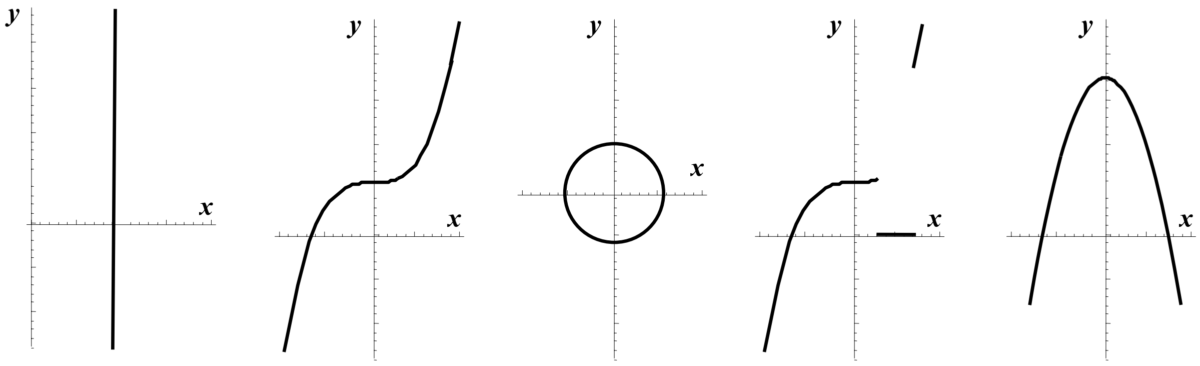


3) $h : (-\infty, 2] \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = 3$



Ejercicio:

Determine cuáles de las siguientes gráficas definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representan funciones escalares. Fundamente su respuesta.



En los siguientes ejemplos determinaremos Dominio e Imagen de las siguientes funciones escalares, definidas de A en $\mathbb{R}$.

		Dominio	Imagen	Codominio
a)	$f(x) = 5x$	$A = D_f = \mathbb{R}$	$I_f = \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
b)	$g(x) = \sqrt{x+4}$	$A = D_g = [-4,+\infty)$	$I_f = [0,+\infty)$	$\mathbb{R}$
c)	$h(x) = \dfrac{1}{x-3}$	$A = D_h = \mathbb{R} - \{3\}$	$I_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R}$
d)	$p(x) = \begin{cases} 2 & si\ \ x \geq 3 \\ -x+2 & \text{si}\ \ x < 0 \end{cases}$	$A = D_p = (-\infty,0) \cup [3,+\infty)$	$I_f = [2,+\infty)$	$\mathbb{R}$

Ejercicio:

Encuentre el dominio adecuado para las siguientes funciones escalares:

a) $f : A \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ Rta.: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $g : A \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \sqrt{4-x^2}$ Rta.: $D_g = [-2,2]$

c) $h : A \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ Rta.: $D_h = \mathbb{R}$

INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

La tarea de realizar gráficas de funciones se simplifica si conocemos los puntos de intersección con los ejes coordenados.

A las intersecciones con el eje de abscisas (eje x) los llamaremos <u>*ceros*</u> de la función.

> *Definición*:
> a es cero de $f \Leftrightarrow f(a) = 0$

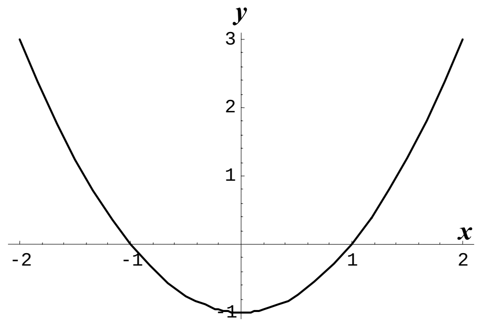
La intersección con el eje de ordenadas (eje y) la obtenemos calculando $y = f(0)$

Veamos el siguiente ejemplo:

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 - 1$,
resulta: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -1$ estos valores representan los ceros de f

la intersección con el eje y, para $x = 0$ resulta $y = -1$.

Esta información unida a la ubicación de algunos otros puntos nos lleva a la gráfica de f.



FUNCIONES PARES E IMPARES

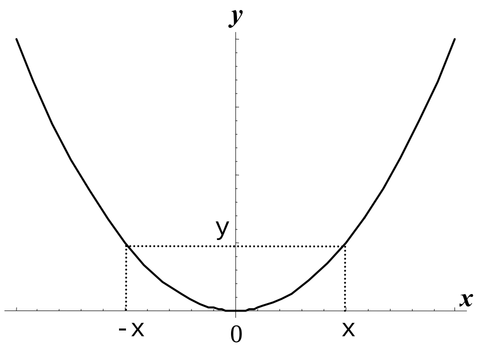
En algunos casos puede simplificarse la realización de la gráfica de una función teniendo en cuenta la *simetría*.

Sea $f: D_f \to \mathbb{R}$

Una función f es par si y sólo si $f(x) = f(-x), \forall x \in D_f$

Ejemplo:

$f(x) = x^2$

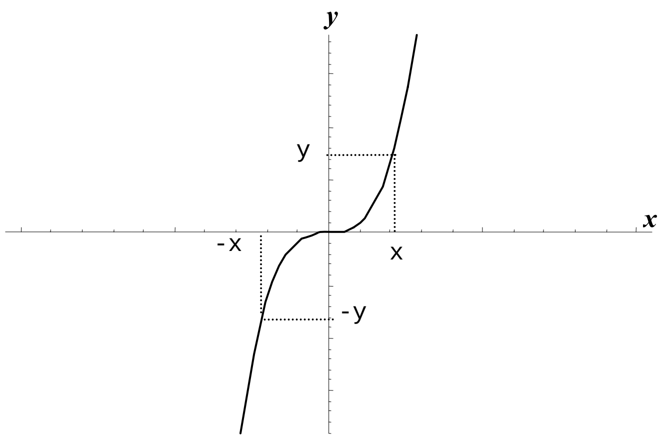


La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje *y*.

Una función f es impar si y sólo si $f(x) = -f(-x), \forall x \in D_f$

Ejemplo:

$f(x) = x^3$



La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

OBSERVACIONES:

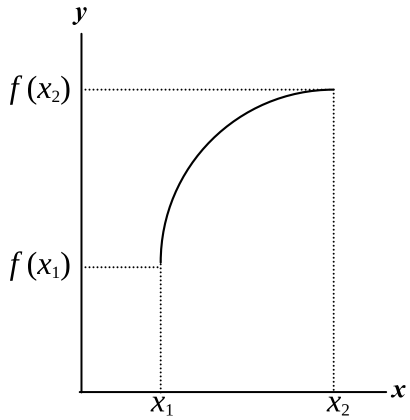
- Para analizar si f es **par** o **impar** su dominio debe ser un **intervalo simétrico** con respecto al origen de las coordenadas.
- Existen funciones que no son pares ni impares.

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

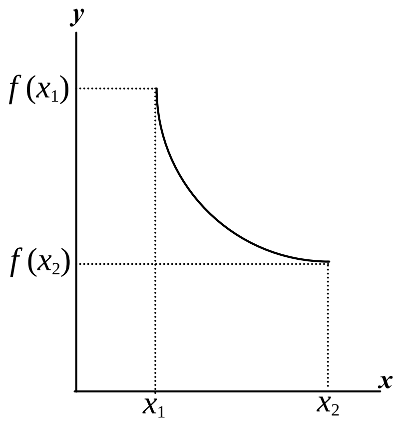
En general una función será creciente en algunos subconjuntos de su dominio y decreciente en otros. Consideramos el crecimiento o decrecimiento de una función en intervalos.

Decimos que:

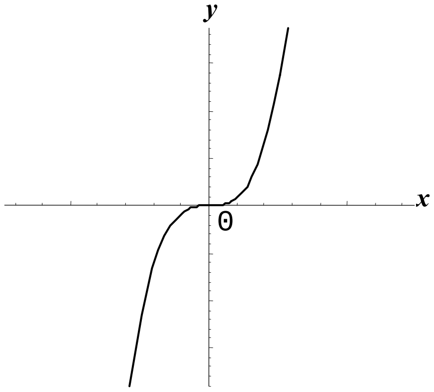
- f es estrictamente **creciente** en (a, b) si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, siendo x_1 y x_2 puntos del intervalo (a, b).



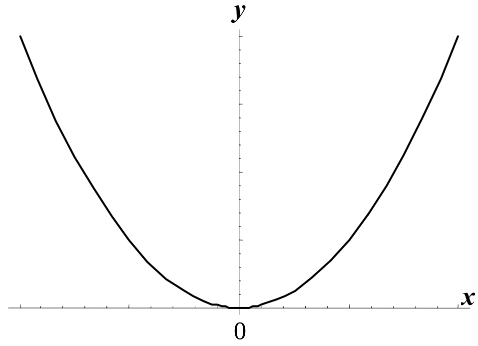
- f es estrictamente **decreciente** en (a, b) si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$, siendo x_1 y x_2 puntos del intervalo (a, b).



Por *ejemplo*: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3$, resulta **estrictamente creciente** en todo su dominio.



En cambio, $f(x) = x^2$ resulta **estrictamente creciente** en $(0,+\infty)$ y **estrictamente decreciente** en $(-\infty,0)$.



OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas las funciones $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$

Definimos

- Suma de funciones: $f+g : A \cap B \to \mathbb{R} / (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Resta de funciones: $f-g : A \cap B \to \mathbb{R} / (f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Producto de funciones: $f.g : A \cap B \to \mathbb{R} / (f.g)(x) = f(x).g(x)$
- Cociente de funciones: $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R} / \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

  Considerando: $D = (A \cap B) - \{x \in B / g(x) = 0\}$

Veamos el siguiente *ejemplo:*

Sean

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x^2 + 5$$

$$g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / g(x) = \frac{1}{x}$$

Resulta $$(f+g)(x) = \frac{2x^3 + 5x + 1}{x}$$

Luego definimos $$f+g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / (f+g)(x) = \frac{2x^3 + 5x + 1}{x}$$

Análogamente podemos calcular

$$f - g \text{ y } f.g$$

Obtenemos

$$(f-g)(x) : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / (f-g)(x) = \frac{2x^3 + 5x - 1}{x}$$

$$(f.g)(x) : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / (f.g)(x) = 2x + \frac{5}{x}$$

Como $g(x) \neq 0$ en todo su dominio resulta:

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x^3 + 5x$$

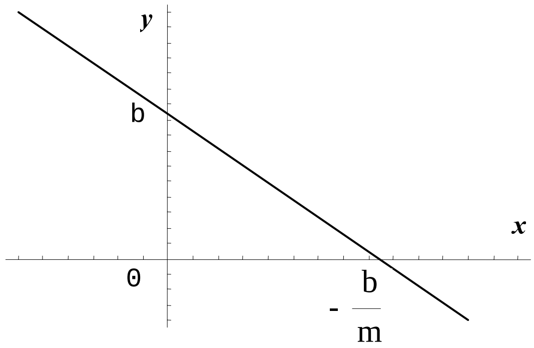
Ejercicio:

Dadas $f : A \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g : B \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^2$

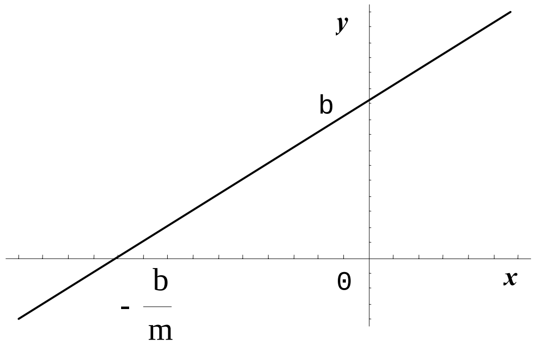
Defina $f+g,\ f-g,\ f.g$ y $\dfrac{f}{g}$

FUNCIÓN LINEAL

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = mx + b$, con $m \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, se denomina función lineal.



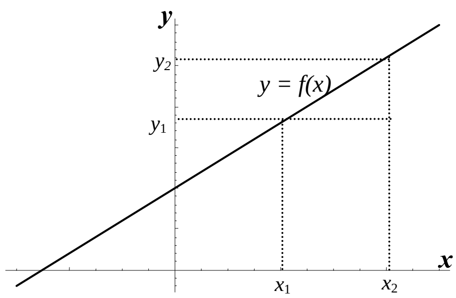
$f(x) = mx + b,\ m < 0,\ b \neq 0$



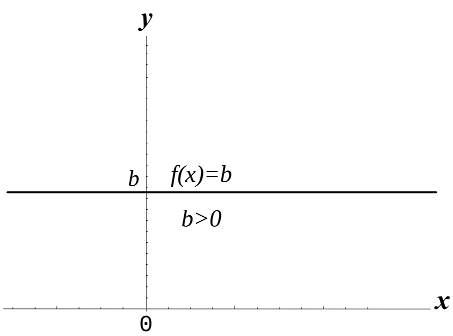
$f(x) = mx + b,\ m > 0,\ b \neq 0$

- Su gráfica es una recta.
- m es la pendiente de la recta.
- $I_f = \mathbb{R}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

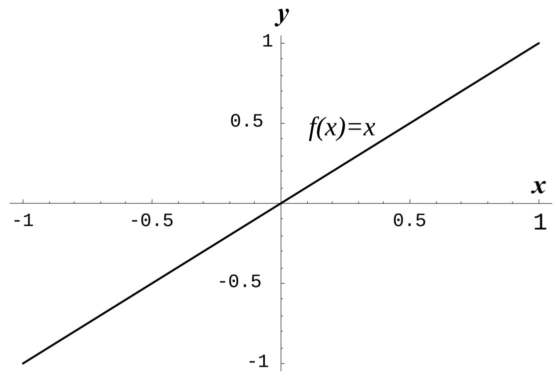


- El cociente entre la ordenada y la abscisa de cada punto de la recta es constante e igual a m si $b = 0$
- La recta corta el eje de ordenadas en el punto $(0,b)$, b se denomina ordenada al origen.
- Resolviendo la ecuación $mx + b = 0,\ m \neq 0$ se obtiene: $x = -\dfrac{b}{m}$ cero de la función.
- Si $m = 0$ entonces $f(x) = b$ **es la función constante**.



- Si $b = 0$ la recta coincide con el eje de abscisas, $(y = 0)$ es la ecuación del eje x.
- Si $b \neq 0$ la función no presenta ceros.
- $I_f = \{b\}$

- Si $b = 0$ y $m = 1$ entonces $f(x) = x$, **es la función identidad**.
- $x = 0$ es cero de la función identidad.
- $f(0) = 0$ es la intersección con el eje de ordenadas.
- El gráfico contiene al origen de coordenadas.
- Es una función impar.
- $I_f = \mathbb{R}$.



Ejercicio:

Determine la intersección con los ejes de las siguientes funciones lineales definidas en $\mathbb{R}$ y grafique.

1) $f(x) = x + 4$

2) $h(x) = -2x + 1$

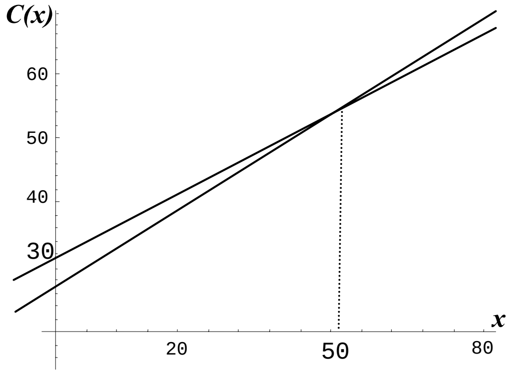
3) $g(x) = \dfrac{1}{3}x - 5$

<u>Problema</u>:

Determinada agencia de alquiler de automóviles cobra un costo fijo de 25$ más 0.6$/Km. Una segunda agencia cobra 30$ más 0.5$/km.
¿Cuál ofrece el mejor trato?

<u>Solución</u>:

Los costos de cada agencia se pueden describir con funciones lineales, y estas son:
$C_1(x) = 25 + 0.6x$ y $C_2(x) = 30 + 0.5x$, donde x se mide en kilómetros.
Estos costos son idénticos cuando x satisface la ecuación:
$25 + 0.6x = 30 + 0.5x$, entonces $0.1x = 5 \Rightarrow x = 50$ kilómetros. Graficamos el problema.



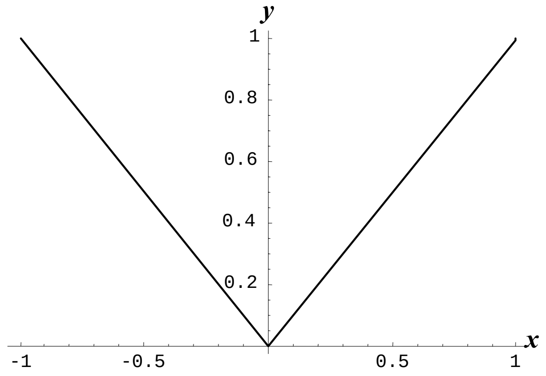
Por lo tanto hasta 50 kilómetros conviene la primera de las agencias, superada esta distancia es conveniente la segunda.

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO O MÓDULO

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=|x|$

Aplicando la definición de módulo de un número real, puede escribirse:

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$ su gráfica es la siguiente.



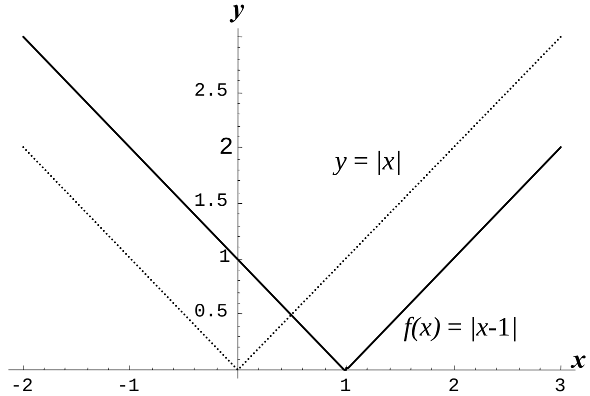
- El conjunto imagen es $I_f=\mathbb{R}_0^+$
- Es una función par.
- $f(0)=0$ es la intersección con el eje "y", $|x|=0\Rightarrow x=0$ es cero de la función.
- En $(-\infty,0)$ es estrictamente decreciente y en $(0,+\infty)$ es estrictamente creciente.

Ejercicio:

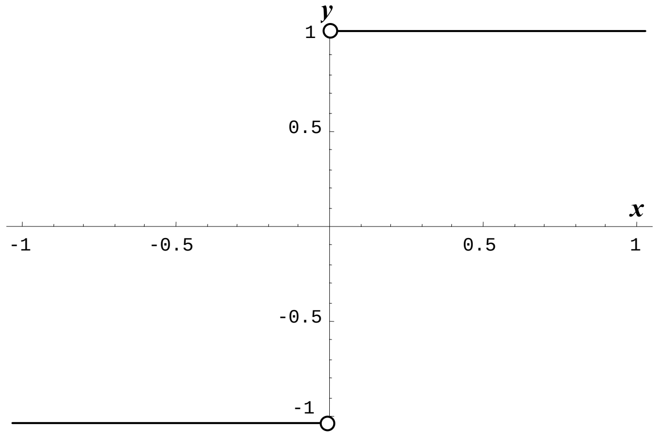
Grafique las siguientes funciones, definidas en $\mathbb{R}$, y a partir de las gráficas obtenidas extraiga conclusiones.

1) $f(x)=|x-1|$
2) $h(x)=|x|-2$
3) $g(x)=|x+3|+1$
4) $r(x)=-2|x+1|$

Graficamos la primera de ellas y superponemos dicha gráfica con la gráfica de $y=|x|$.



Con la función valor absoluto es posible definir una función llamada **función signo**, su definición es: $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ su gráfica es la siguiente:



La forma de la gráfica está justificada en lo siguiente:

Si $x > 0$ entonces $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$, y si $x < 0$ entonces $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$

- El conjunto imagen es $I_f = \{-1,1\}$.
- No tiene intersección con los ejes.

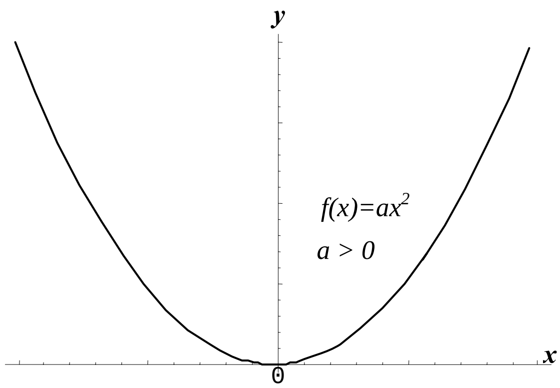
FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

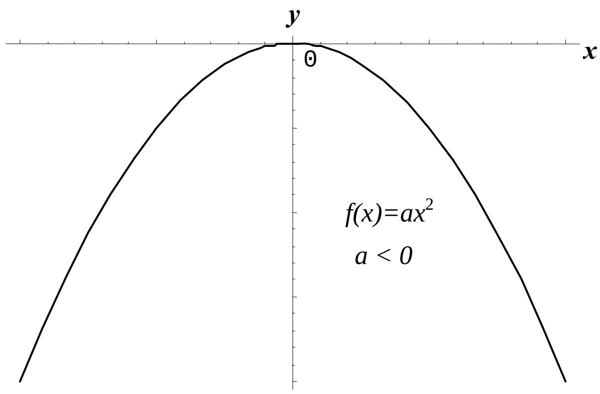
Su gráfica es una *parábola* cuyo eje de simetría es paralelo al eje de ordenadas.

Vamos a considerar distintos casos.

1) $a \neq 0$, $b = c = 0$, su fórmula es: $f(x) = ax^2$

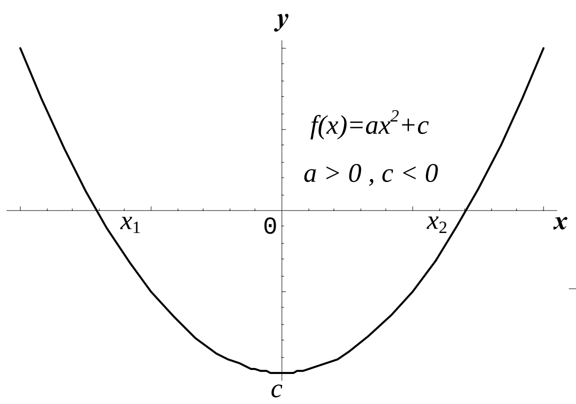


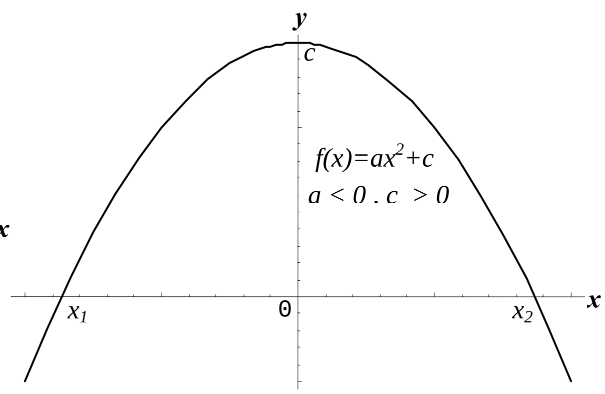
Es una función par



Es una función par

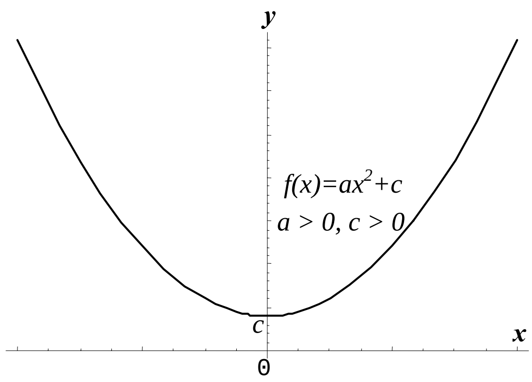
2) $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, su fórmula es: $f(x) = ax^2 + c$





La parábola atraviesa el eje x porque la ecuación $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces reales simples.

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\ ,\quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$



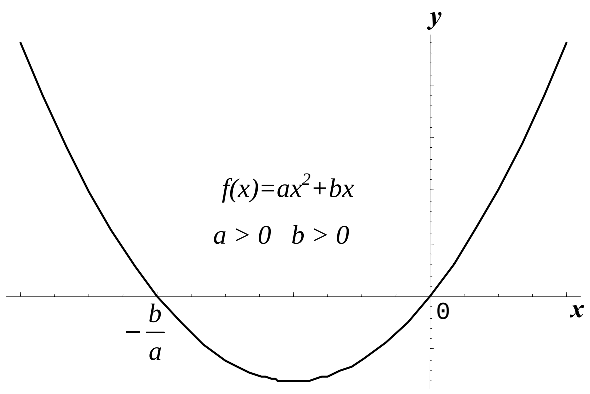
La parábola no corta el eje x porque la ecuación $ax^2 + c = 0$ no tiene raíces reales.

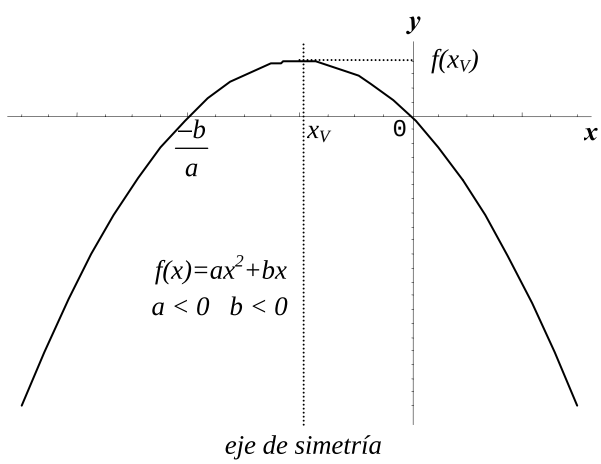
es una función par

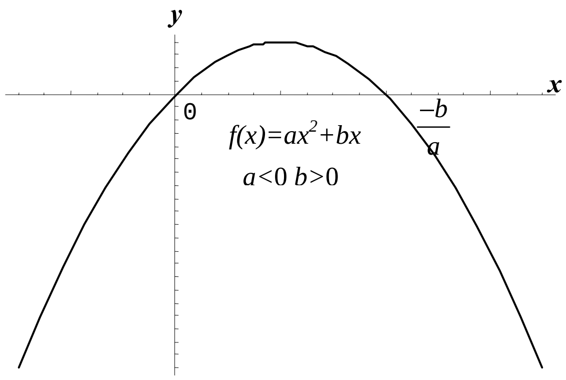
3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, su fórmula es: $f(x) = ax^2 + bx$

Para determinar su intersección con el eje x se resuelve la ecuación: $ax^2 + bx = 0$, cuyas soluciones son: $x = 0 \vee x = -\dfrac{b}{a}$

En este caso la parábola corta el eje x en dos puntos distintos siendo uno de ellos el origen de coordenadas.







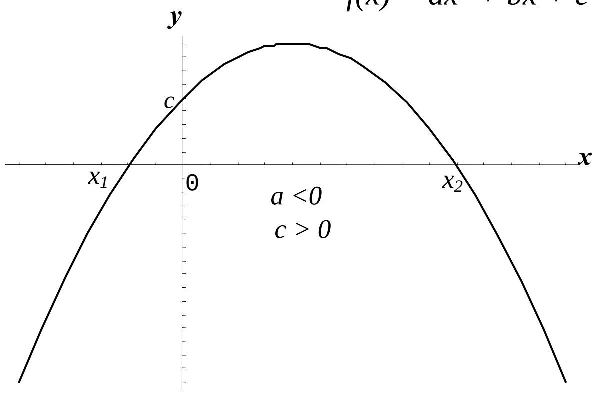
La ecuación del eje de simetría es: $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ y las coordenadas del vértice son: $(x_V, f(x_V))$

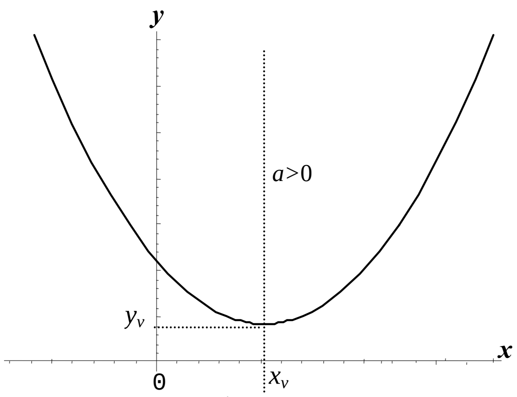
4) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, su fórmula es: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Observe los siguientes gráficos; cuando la gráfica posee ceros, éstos se encuentran resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones reales son:

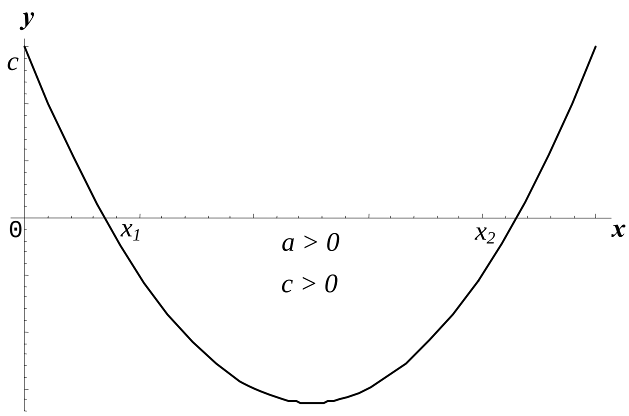
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

f(x) = ax² + bx + c





no tiene ceros



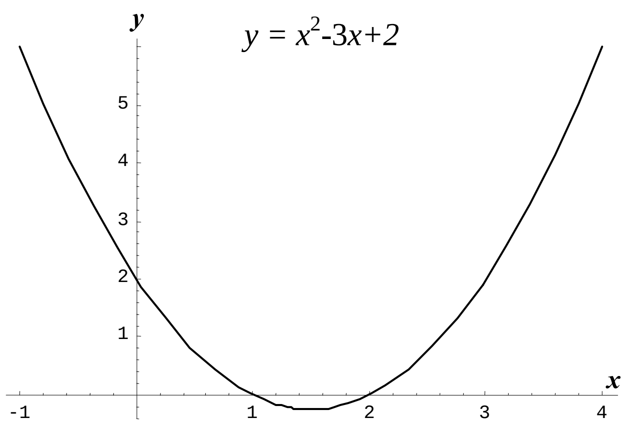
x_1 y x_2 son los ceros de la función

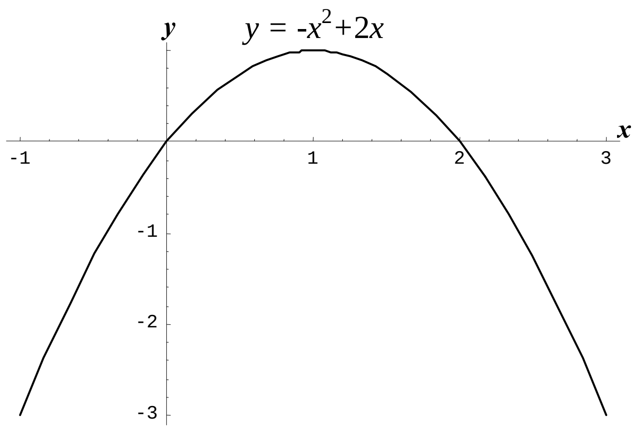
Ejercicio:

Determine los ceros, eje de simetría, coordenadas del vértice y represente gráficamente las siguientes funciones cuadráticas definidas en $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
2) $f(x) = -x^2 + 1$
3) $f(x) = x^2 + 3$
4) $f(x) = -x^2 + 2x$
5) $f(x) = x^2 - x$
6) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
7) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Representamos alguna de las anteriores:



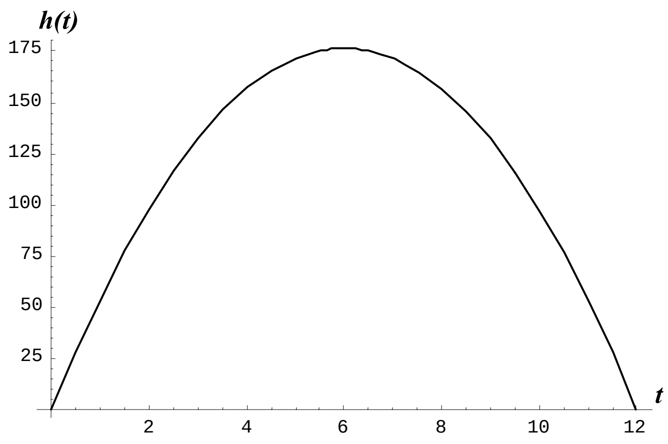


<u>Problema</u>:

La altura h de una pelota lanzada verticalmente desde el piso es una función que depende del tiempo t, en segundos dada por la ecuación $h(t) = -4.9\,t^2 + 58.8\,t$, donde h está en metros.
¿Después de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima y cuál es dicha altura?

<u>Solución</u>:

Considerando la función $h(t) = -4.9\,t^2 + 58.8\,t$, su gráfica es la siguiente:



Determinamos las coordenadas del vértice de la parábola y éstas resultan:

$$t_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{58.8}{-9.8} = 6 \quad \text{y} \quad h(t_V) = -4.9.6^2 + 58.8.6 = 176.4$$

Por lo tanto la altura máxima es de 176.4 metros y se la alcanza en 6 segundos.

FUNCIÓN POLINÓMICA

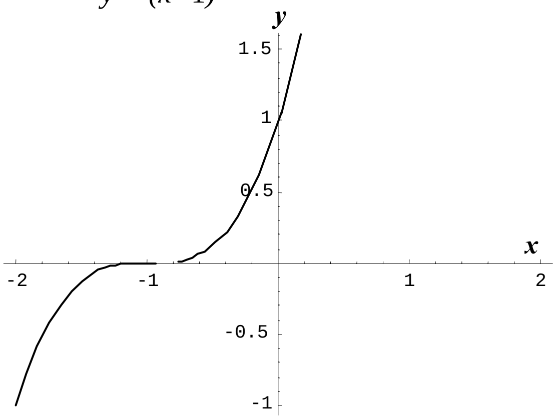
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ e $i = 0,1,2,........,n$ se denomina función polinómica.

Son funciones polinómicas por ejemplo:

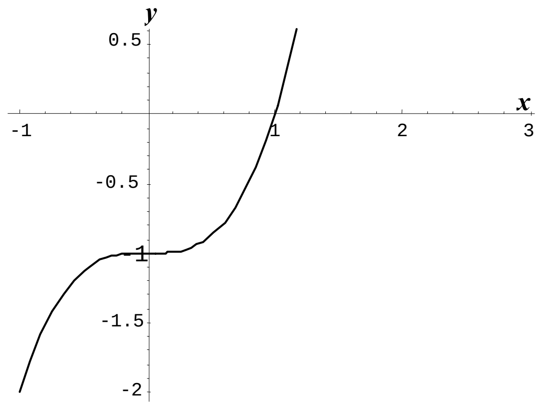
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{2}{3}x - 3$
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 6x - 5$
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 5$
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = (x - 1)^2$

Graficamos algunas funciones.

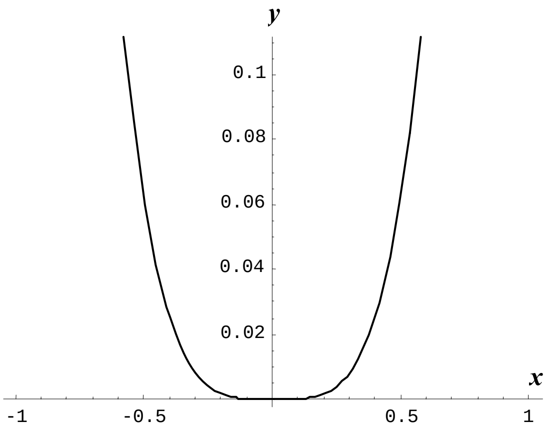
$y = (x+1)^3$



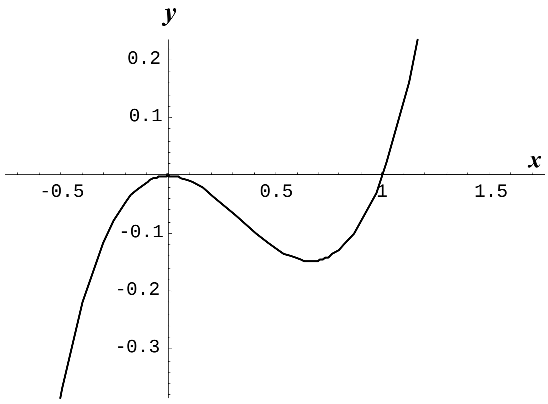
$y = x^3-1$



$y = x^4$



$y = x^3-x^2$



No le proponemos a Ud. que las dibuje porque se le dará el método a aplicar en el curso de Análisis Matemático I.

Ejercicio:

Encuentre, si existen, los ceros reales de las siguientes funciones polinómicas.

1) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$
2) $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$
3) $f(x) = x^2 + x^4 + 5$
4) $f(x) = x^3 + 1$
5) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
6) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$

FUNCIÓN RACIONAL NO ENTERA

$f : A \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $Q(x)$ es de grado mayor o igual a uno, y $A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge Q(x) \neq 0\}$

Ejemplos:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2 + 1}$

2) $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

3) $h : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} / h(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

4) $u : \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} / u(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$

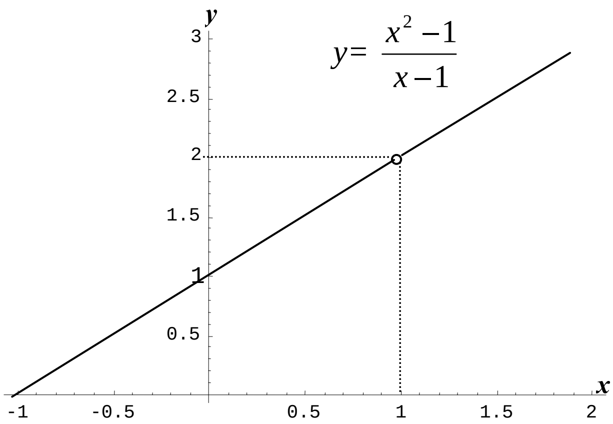
Nos ocuparemos ahora de la gráfica de algunas funciones racionales simples.

Ejemplo 1: $f : A \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Si observamos la fórmula de la función vemos que $A = \mathbb{R} - \{1\}$, la fracción puede simplificarse de donde: $\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1, x \neq 1$

Luego $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} / f(x) = x + 1$

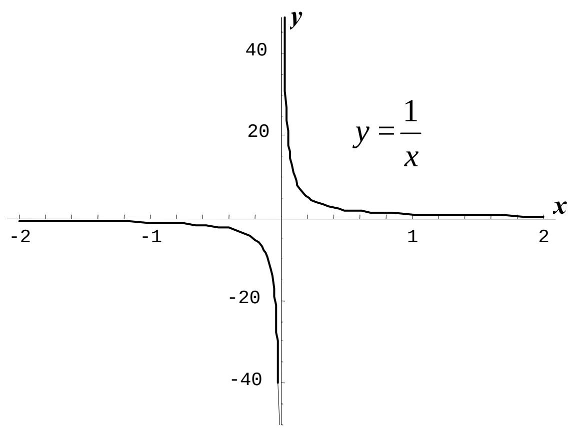
Su gráfica es una recta de la cual queda excluido el punto (1,2)



Ejemplo 2: $f : A \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{1}{x}$

Observando la fórmula afirmamos que $A = \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Es una función impar por lo tanto es simétrica respecto del origen, no corta al eje *y* ni al eje *x*.
La función es estrictamente decreciente y el gráfico de la misma se llama *hipérbola*.
La recta $y = 0$ (eje de abscisas) se denomina asíntota horizontal al gráfico de *f*, y la recta de ecuación $x = 0$ (eje de ordenadas) se denomina asíntota vertical al gráfico de *f*.



Ejercicio:

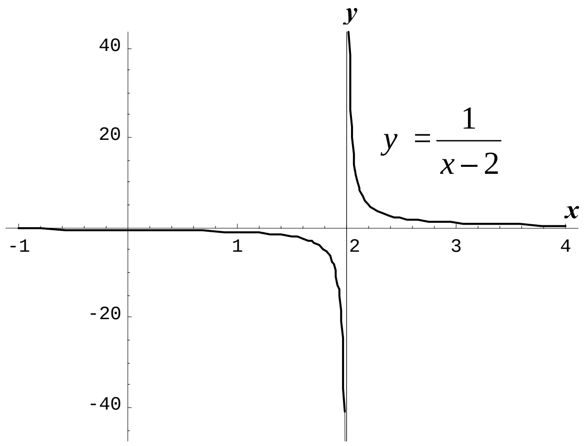
Halle el dominio, ecuaciones de las asíntotas y grafique.

1) $h : A \rightarrow \mathbb{R} \,/\, h(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

Lo resolvemos.

El dominio de la función es $A = \mathbb{R} - \{2\}$

Las ecuaciones de las asíntotas son:
asíntota vertical: $x = 2$
asíntota horizontal: $y = 0$



2) $f: A \to \mathbb{R}$ / $f(x) = -\frac{1}{x}$.

3) $g: A \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \frac{1}{x+1} + 3$

FUNCIÓN HOMOGRÁFICA

Se denomina función homográfica a aquellas cuya definición es:

$f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} / \ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$

Es un cociente cuyo numerador es un polinomio de primer grado o de grado cero, y cuyo denominador es un polinomio de grado uno ($c \neq 0$).

La consideramos función homográfica siempre que no pueda reducirse a una función lineal excluido uno de sus puntos.

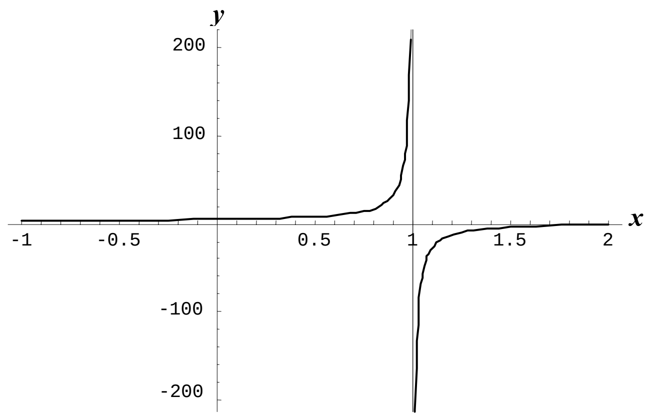
Ejemplo:

$g: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \frac{x+2}{5x+10}$ no es homográfica pues: $\frac{x+2}{5x+10} = \frac{1}{5}$

Para representar la función homográfica $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \frac{-2x+5}{-x+1}$ consideramos:

- Es asíntota vertical la recta de ecuación: $x = -\frac{d}{c}$, en nuestro ejemplo $x = 1$
- Es asíntota horizontal la recta de ecuación: $y = \frac{a}{c}$, en este caso $y = 2$
- El conjunto imagen es: $I_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, o sea para el ejemplo $I_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Graficamos la función.



Ejercicio:

Determine el dominio, ecuaciones de las asíntotas y grafique las siguientes funciones homográficas:

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

2) $g(x) = \dfrac{2-x}{x-3}$

3) $h(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

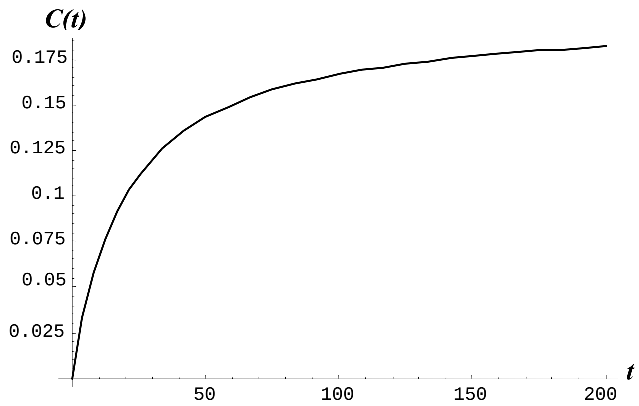
<u>Problema</u>:

En un depósito de agua potable se incorpora agua salada de modo que la concentración de sal en el total del volumen en un tiempo t está dada por la función: $C(t) = \dfrac{t}{5t+100}$, $t > 0$.

Dibuje la gráfica de $C(t)$ y discuta cómo resulta la concentración cuando ha transcurrido mucho tiempo.

<u>Solución</u>:

Graficamos la función homográfica $C(t)$ y obtenemos.



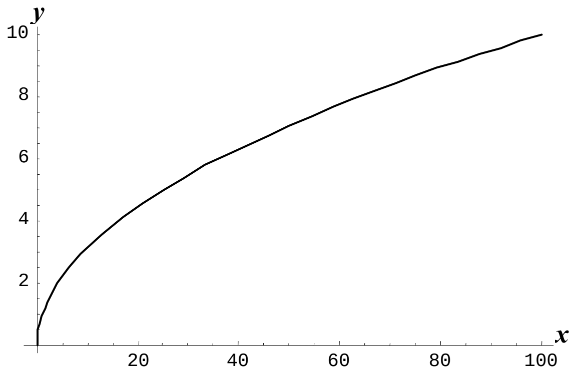
Observamos que $C = \dfrac{1}{5}$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

Cuando ha transcurrido mucho tiempo, t, asume valores muy grandes; ésta gráfica nos informa que la concentración se estabiliza en valores muy próximos al indicado por la asíntota horizontal de dicha gráfica, es decir, la concentración se aproxima a $\frac{1}{5}$ del volumen.

FUNCIONES IRRACIONALES

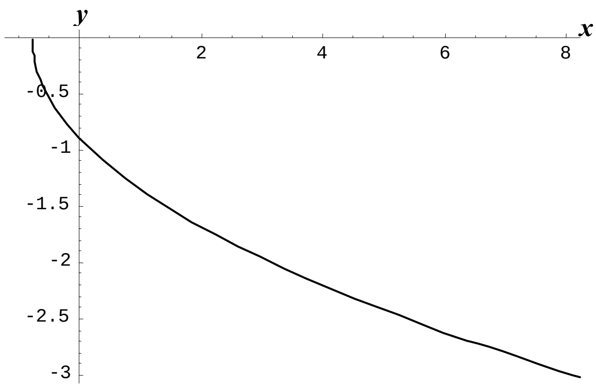
Algunos *ejemplos:*

1) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \sqrt{x}$

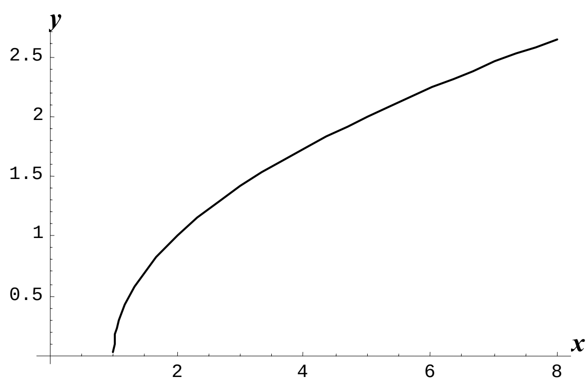


$I_f = \mathbb{R}_0^+$, estrictamente creciente, cero en $x = 0$

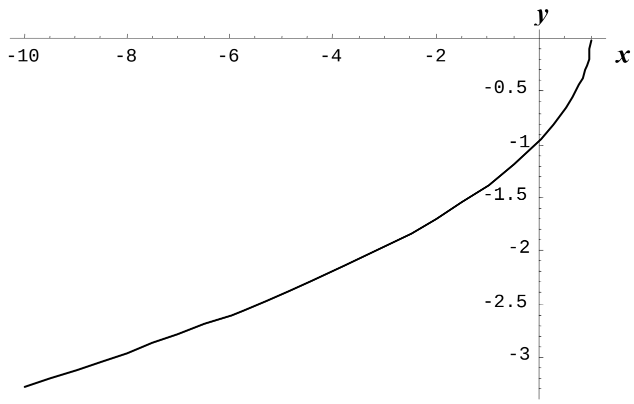
2) $h : [-1, +\infty) \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = -\sqrt{x+1}$



3) $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \sqrt{x-1}$



4) $r : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R} \,/\, r(x) = -\sqrt{1-x}$



Observando las gráficas determine los ceros, monotonía y conjunto imagen de las funciones *h*, *g*, y *r*.

VARIACIÓN DIRECTA E INVERSA

Existen dos modelos matemáticos que se presentan con mucha frecuencia en las ciencias, a dichos modelos se les asignan nombres especiales.

El primero de ellos se conoce como **variación directa** y se presenta cuando una cantidad es múltiplo constante de otra.

Si x e y están relacionadas mediante la ecuación: $y = kx$, para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y varía directamente con x, o que y es directamente proporcional a x.

Esta definición muestra que y es una función lineal de x, cuya gráfica es una recta, la pendiente de dicha recta es la **constante de proporcionalidad *k***.

Ejemplo

Durante una tormenta eléctrica se ve el rayo antes de oír el trueno porque la luz viaja más rápido que el sonido.

La distancia entre usted y el centro de la tormenta varía directamente con la longitud del intervalo de tiempo entre el rayo y el trueno.

Suponga que el trueno de una tormenta, cuyo centro está a los 1050 metros de distancia tarda 3 segundos en alcanzarlo, determinemos la constante de proporcionalidad y escribamos la ecuación de la variación:

$$d = kt$$

d es la distancia entre usted y la tormenta y t es la longitud del intervalo de tiempo.

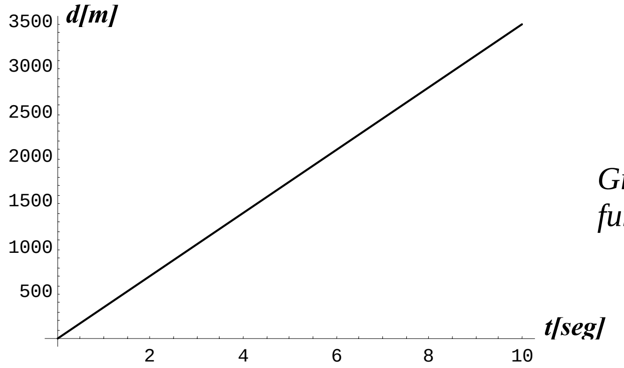
Para determinar k utilicemos el dato que $d = 1050$ cuando $t = 3$, por lo tanto:

$$1050 = k3 \Rightarrow k = \frac{1050}{3} = 350 \,\tfrac{m}{seg}$$

Entonces la ecuación nos queda: $d = 350\, t$

La constante de proporcionalidad de este ejemplo, $k = 350$, es aproximadamente la velocidad del sonido en metros por segundo.

Si la longitud de tiempo entre el rayo y el trueno es ahora de 7 segundos, ¿qué tan lejos estamos del centro de la tormenta? Evidentemente: $d = 350\,\frac{m}{seg}\;7\,seg. = 2450\,m.$

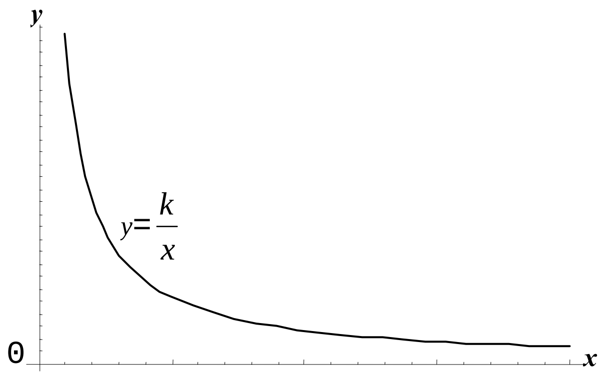


Gráfica de la función: d = 350 t

El otro modelo matemático muy frecuentemente utilizado es conocido como **variación inversa**, y se presenta cuando una cantidad disminuye al aumentar otra.

Si x e y están relacionadas por la ecuación: $y = \frac{k}{x}$ para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y varía inversamente con x o que y es inversamente proporcional a x.

La gráfica de la función: $f(x) = \frac{k}{x}$ con $k > 0$ y $x > 0$, nos da una idea del comportamiento de esta relación entre cantidades.



Ejemplo

La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.

Suponga que una muestra de aire ocupa 0,106 m^3 a 25°C y su presión es de 50 kPa.

Obtengamos la constante de proporcionalidad.

$$P = \frac{k}{V}$$

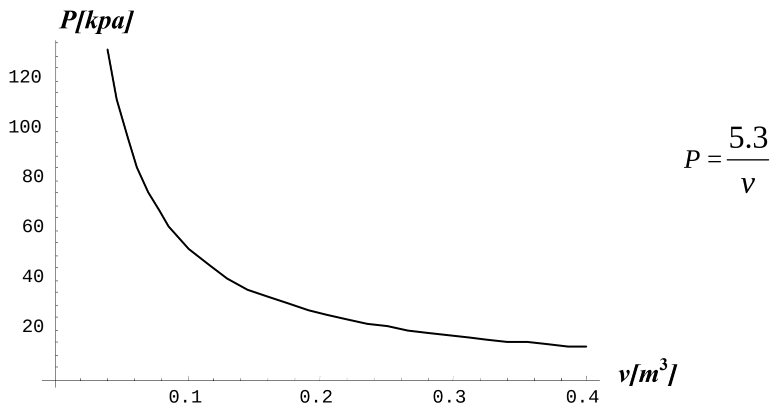
P es la presión de la muestra de gas y V su volumen.

$$50 = \frac{k}{0{,}106} \Rightarrow k = 50.0{,}106 = 5{,}3$$

Entonces la ecuación nos queda: $P = \dfrac{5,3}{V}$

Cuando el volumen es 0,3 m^3 la nueva presión del gas será: $P = \dfrac{5,3}{0,3} \cong 17,7$ kPa

El comportamiento de la función que relaciona inversamente a la presión con el volumen la podemos observar en la siguiente gráfica:



Las cantidades físicas pueden depender no solamente de una cantidad, sino de varias.
Por ejemplo, si las cantidades *z, x* e *y* están relacionadas por la ecuación:

$$z = k\ \frac{x}{y}$$

diremos que *z* es directamente proporcional a *x* e inversamente proporcional a *y*.

Si las cantidades *x, y, z* están relacionadas por la ecuación:

$$z = kxy$$

entonces decimos que *z* varía conjuntamente con *x* e *y*, o que *z* es conjuntamente proporcional a *x* e *y*.

Ejemplo

La ley de la gravitación de Newton dice que dos objetos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza *F* que resulta directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia *d* entre los objetos.

En consecuencia, si queremos expresar la ley de gravitación de Newton, llamando *G* a la constante de proporcionalidad, deberíamos escribir:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 5 (Primera Parte)

Funciones

Ejercicios:

1) Represente gráficamente las siguientes funciones definidas por tramos y determine el dominio e imagen de las mismas.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \;\; x \leq 0 \\ 2x & si \;\; x > 0 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} -5 & si \;\; x < -3 \\ 4 - x^2 & si \;\; |x| \leq 3 \\ 2x - 6 & si \;\; x > 3 \end{cases}$

2) Indique Df e If si es $f : Df \to If \,/\, f(x) = \dfrac{|2x-1|}{2x-1}$

Rta.: $Df = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $If = \{-1,1\}$

3) Dadas las funciones:

$h : Dh \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = \sqrt{|5-x| - |x+2|}$

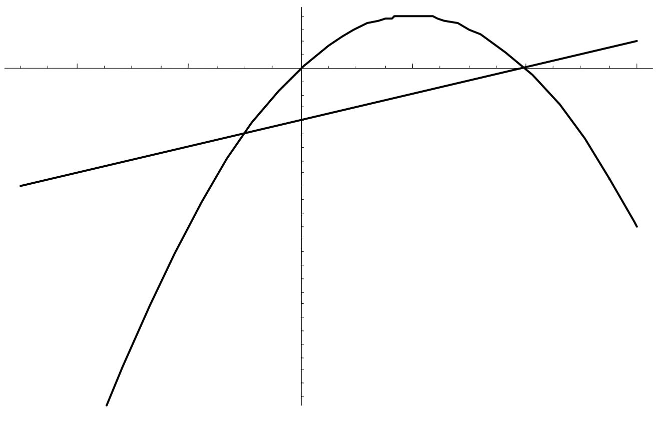
$t : Dt \to \mathbb{R} \,/\, t(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$

Determine: $Dh \cap Dt$ Rta.: $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

4) Determine las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas representativas de $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = x^2 + px + q$, si se sabe que: $f(-1) = 3$, $f(2) = 0$, $f(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(-1) = 5$

Rta.: (0,2), (1,1)

5) En el gráfico la parábola pasa por los puntos (1,3) y (5,-5), y la recta pasa por los puntos (2,-2) y (-2,-6).



Determine:

a) la ecuación de la parábola Rta.: $y = -x^2 + 4x$

b) la ecuación de la recta Rta.: $y = x - 4$

c) las coordenadas de los puntos de intersección de la recta y la parábola

Rta.: (4,0) y (-1,-5)

Problemas:

1) Escriba una fórmula para cada una de las siguientes funciones

a. $A(x)$ es el área de un triángulo equilátero de perímetro x.

Rta.: $A(x) = \sqrt{3}\ \dfrac{x^2}{36}$

b. $F(x)$ es el área de un hexágono regular inscripto en una circunferencia de radio x.

Rta.: $F(x) = 3\sqrt{3}\ \dfrac{x^2}{2}$

c. $V(x)$ es el volumen de agua de profundidad x contenida en un tanque cónico con vértice hacia abajo. El tanque tiene 8 metros de altura y su diámetro en la parte más alta es de 6 metros.

Rta.: $V(x) = 3\pi\ \dfrac{x^3}{64}$

d. $C(x)$ es el costo de producción promedio por unidad de x refrigeradores por día, en una compañía que tiene: costos fijos diarios \$1300 y paga por mano de obra y materiales \$240 por cada refrigerador.

2) Para hacer una caja de base rectangular y sin tapa se utiliza una lámina de material de 12cm. por 18 cm. cortando un cuadrado de lado x de cada esquina y doblando los lados.
Exprese el volumen $V(x)$ de la caja y encuentre el dominio de V.

Rta.: $Dv = (0,6)$.

3) Un cable parabólico está tendido entre dos torres de 30m. de altura distantes entre sí 100m, la altura mínima del cable sobre el suelo es 5m. Encuentre la ecuación de la parábola suponiendo que es simétrica respecto del eje "*y*".

Rta.: $y = \dfrac{1}{100}x^2 + 5$

4) Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

- R varía directamente con t.
- v es inversamente proporcional a z.
- w es conjuntamente proporcional a s y a r.
- A es proporcional al cuadrado de t e inversamente proporcional al cubo de x.

Rta: $R = k.t \, con \, k = cte \wedge \varepsilon \Re$

Rta: $v = \dfrac{k}{z} con \, k = cte \wedge \varepsilon \Re$

Rta: $w = k.s.r \, con \, k = cte \wedge \varepsilon \Re$ ç

Rta: $A = k\dfrac{t^2}{x^3} \, con \, k = cte \wedge \varepsilon \Re$

5) Exprese el enunciado como una fórmula y utilice la información dada para obtener la constante de proporcionalidad.

- *M* varía directamente con *x* e inversamente con *y*. Si $x = 2$ e $y = 6$, entonces $M = 5$.
- *S* varía proporcionalmente a *p* y *q*. Si $p = 4$ y $q = 5$, entonces $S = 180$.
- *W* es inversamente proporcional al cuadrado de *r*. Si $r = 6$, entonces $W = 10$.

$Rta: M = 15\dfrac{x}{y}$ $\quad Rta: S = 9.p.q$ $\quad Rta: W = \dfrac{360}{r^2}$

6) El costo de imprimir una revista es directamente proporcional a su número de páginas y al número de revistas impresas.

- Escriba una ecuación para esta variación si el costo de impresión es de \$60.000 para 4000 copias de una revista de 120 páginas cada una.
- ¿Cuál sería el costo de impresión para 5000 copias de una revista de 92 páginas?

Rta: $C = K\,PR \quad si\,P\,n^o\,de\,páginas\,y\,R\,n^o\,de\,ejemplares, \quad K = 0{,}125$

Rta: $C = \$57500$

7) La resistencia *R* de un alambre conductor varía directamente con su longitud *L* e inversamente con el cuadrado de su diámetro *d*.

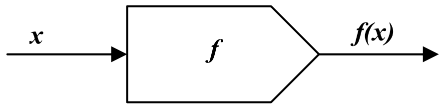
- Un alambre de 1,2m de largo y 0,005m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms. Escriba una ecuación de esta variación y determine la constante de proporcionalidad.
- Determine la resistencia de un alambre fabricado del mismo material que tenga 3m de largo y 0,008m de diámetro.

Rta: $k = \dfrac{7}{2400}\,\Omega m \cong 0{,}002917\,\Omega m \quad R = 0{,}002917\dfrac{L}{d^2}$

Rta: $R \cong 136{,}73\,\Omega$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES (SEGUNDA PARTE)

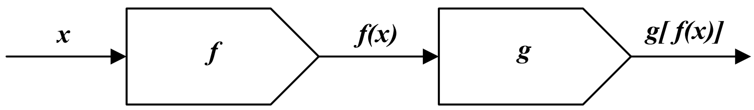
Imaginemos a una función como si fuese una máquina, acepta un número x como *entrada*, opera sobre él y devuelve como *salida* su imagen $f(x)$



Las máquinas se pueden ensamblar entre sí para producir otras máquinas, de la misma manera las funciones se pueden componer para obtener otras.

Bajo ciertas condiciones es posible definir a partir de dos funciones f y g, una nueva función llamada la **compuesta** de aquellas.

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son D_f y D_g respectivamente.
Si f opera sobre x para producir $f(x)$ y luego g opera sobre $f(x)$ como muestra la figura.



Obtenemos $g\,[f(x)]$, esta función llamada "*g compuesta con f*" se denota $g \text{ o } f$

Luego: $(g \text{ o } f)\ (x) = g\,[f(x)]$

Veamos los siguientes *ejemplos*:

1) Sean

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = 2x^2$$

En este caso $I_f = \mathbb{R}$ coincide con D_g luego es posible realizar la composición

entonces resulta:

$$g\,[f(x)] = g(x + 1) = 2(x + 1)^2 = 2x^2 + 4x + 2$$

por lo tanto:

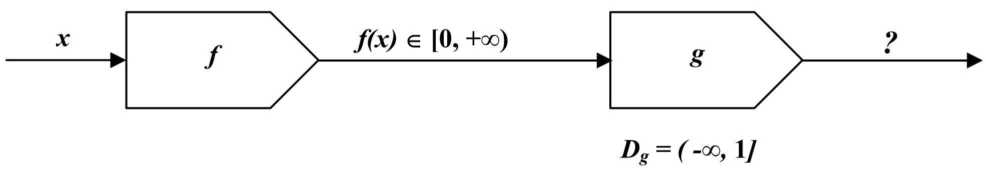
$$g \text{ o } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (g \text{ o } f)\,(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

2) Dadas:

$$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{x}$$
$$g : (-\infty,1] \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \sqrt{1-x}$$

Veamos si la composición es posible, siendo $I_f = [0, +\infty)$ y $D_g = (-\infty,1]$

No podemos realizar la composición en estas condiciones, es decir, las salidas de f no son entradas posibles para g, o dicho de otra manera, la imágenes de dominio de f no pertenecen al dominio de g.

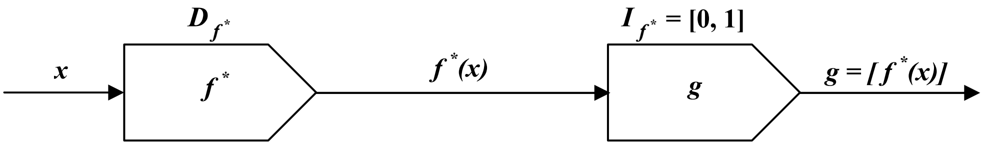


La condición para que pueda definirse la composición $g \circ f$ es que la imagen de f esté incluida en sentido amplio en el dominio de g .

$$I_f \subseteq D_g$$

Trataremos de conseguir que $I_f \subset D_g$, calculamos la intersección entre ambos conjuntos:

$I_f \cap D_g$ = [0,1], luego la composición podrá realizarse si efectuamos una *restricción* de la función f, llamada f^*, considerando como dominio de f^* un subconjunto tal que sus elementos tengan como imagen el intervalo [0,1].



Llamaremos f^* a la función restringida, definida por:

$$f^*: [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, f^*(x) = \sqrt{x}$$

y siendo $\quad g : (-\infty,1] \to \mathrm{R} \,/\, g(x) = \sqrt{1-x}$

resulta: $\quad I_{f^*} \subset D_g$

$$(g \circ f^*)\,(x) = g\,[f^*(x)] = g\,(\sqrt{x}\,) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$$

luego definimos la función compuesta:

$$g \circ f^*: [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, (g \circ f^*)\,(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$$

OBSERVACIÓN:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Ejercicio:

Compruebe el lector la observación anterior para las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^3 - x \quad ; \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \sqrt[3]{x}$$

FUNCIÓN INVERSA

Si pensamos a la funciones como máquinas que operan sobre una entrada para obtener una salida, nos preguntamos si este proceso es reversible. En la mayor parte de los casos no lo es. Es decir, si una función f opera sobre un elemento x para obtener $y = f(x)$, en algunos casos podremos encontrar una función g que opere sobre y dando así x.

Por ejemplo:

$$y = f(x) = 3x - 2$$

entonces $\quad g(x) = \frac{1}{3}(x + 2)$

es g la función buscada porque: $\quad g(y) = g\,[f(x)] = \frac{1}{3}(3x + 2 - 2) = x$

Cuando existe esta función g, se la llama *inversa* de f.

No todas las funciones admiten función inversa.

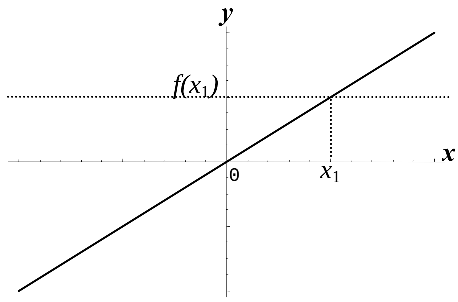
Para poder determinar las condiciones de existencia de la función inversa daremos las siguientes definiciones:

a) Una función $f : A \to B$ es **inyectiva** si y sólo si elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas, es decir:

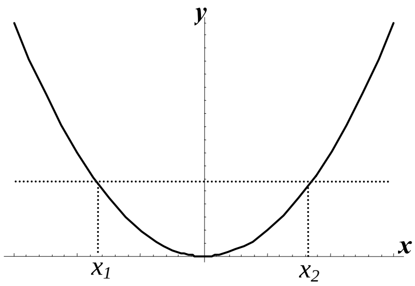
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

Ejemplo:

la función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 2x$ **es inyectiva.**



En cambio la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^2$ **no es inyectiva.**



Un criterio gráfico para determinar si una función es inyectiva es el siguiente:

Si toda recta horizontal interseca a f en a lo sumo un punto, entonces f es inyectiva.

b) Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si y sólo si el conjunto imagen coincide con el codominio, es decir $I_f = B$

Considerando los *ejemplos* anteriores:

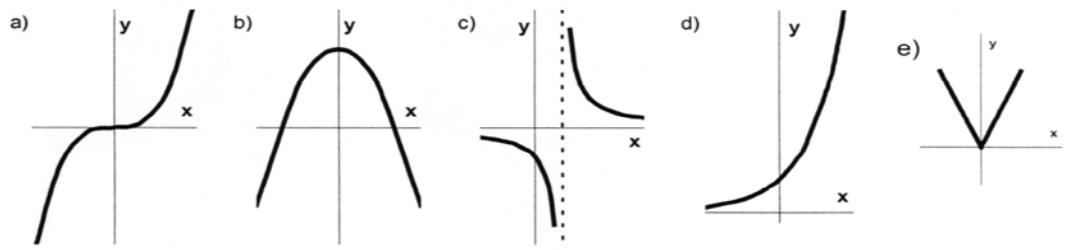
$I_f = \mathbb{R}$, luego f es sobreyectiva.
$I_g = [0, +\infty)$, entonces g no es sobreyectiva.

c) Una función $f : A \to B$ es **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

En los ejemplos anteriores, f es biyectiva, g no es biyectiva.

Ejercicio:

Indique cuáles de las siguientes gráficas representan funciones biyectivas.
Fundamente su respuesta.

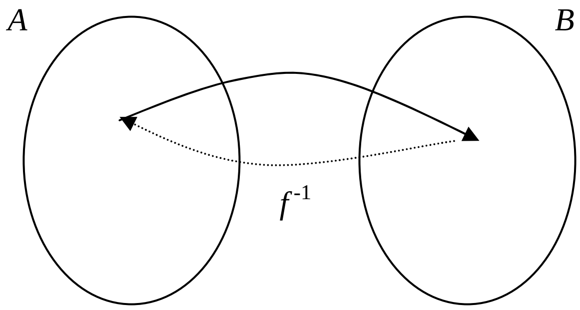


Determinaremos las condiciones de existencia de la función inversa.

La función $f : A \to B \;/\; y = f(x)$ admite función inversa si y sólo si f es biyectiva

La función inversa es f^{-1} que definimos así:

$$f^{-1} : B \to A \;/\; f^{-1}(y) = x$$



Veamos los siguientes ejemplos:

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = 3x - 2$

Para obtener la fórmula de f^{-1} procederemos de la siguiente manera:

$$y = 3x - 2$$

(despejamos x) $\qquad x = \frac{1}{3}(y + 2)$

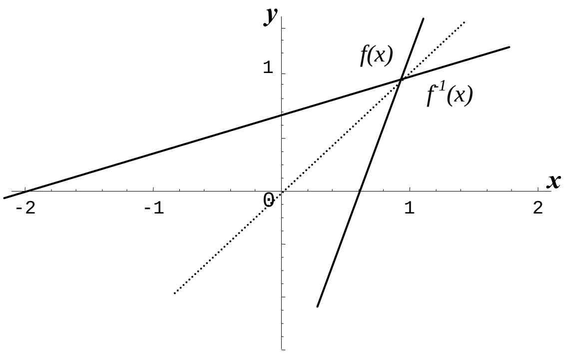
(reemplazamos y por x para obtener $f^{-1}(x)$)

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 2)$$

definimos la función inversa:

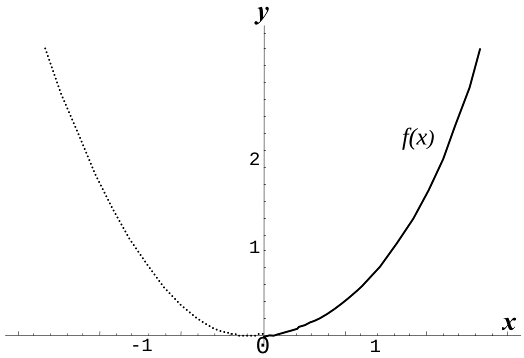
$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 2)$$

Representamos gráficamente f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.



2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$, como esta función no es inyectiva no podemos hallar su inversa, pero efectuando una restricción conveniente obtenemos una función biyectiva.

$$g : \mathbb{R}_0^{+} \to \mathbb{R}_0^{+} \,/\, g(x) = x^2 \quad \text{es biyectiva}$$



Calculamos la inversa de g:

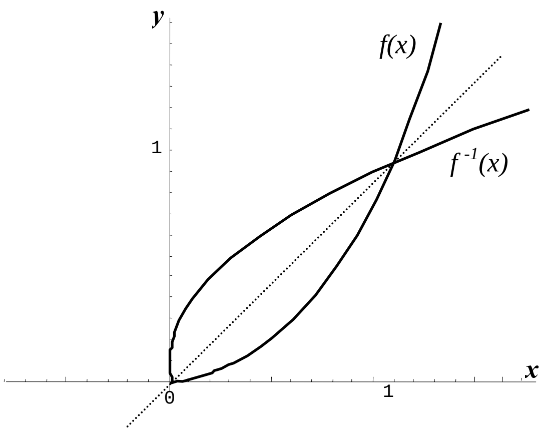
$$y = x^2$$

(Despejamos x) $\quad |x| = \sqrt{y}$ como $y \geq 0$

$$x = \sqrt{y}$$

(reemplazamos y por x) $\quad y = \sqrt{x}$

luego: $\quad g^{-1} : \mathbb{R}_0^{+} \to \mathbb{R}_0^{+} \,/\, g^{-1}(x) = \sqrt{x}$



3) Sea $f : D_f \to I_f \,/\, f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

Determinamos dominio e imagen, resulta: $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ e $I_f = \mathbb{R} - \{1\}$
f es una función homográfica, es biyectiva, luego admite inversa.

$$y = \frac{x+1}{x-3}$$
$$(x - 3)y = x + 1$$
$$xy - x = 1 + 3y$$
$$x(y - 1) = 1 + 3y$$
$$x = \frac{1+3y}{y-1}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-1}$$

Podemos definir f^{-1}

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\} \,/\, f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-1}$$

Ejercicio:

Dada la función: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{x+1}{2}$

Encuentre si es posible: $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$, grafique en un mismo sistema de coordenadas y obtenga conclusiones.

<u>Solución</u>:

Como f es biyectiva admite inversa.

- Calculamos la fórmula de la inversa

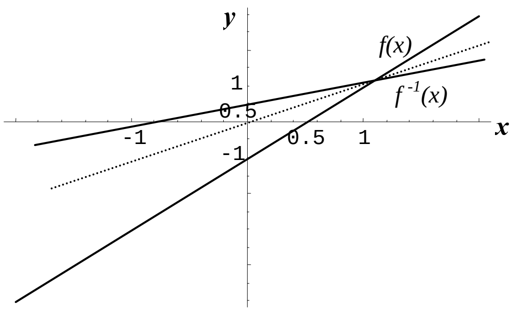
$$y = \frac{x+1}{2}$$
$$x = 2y - 1$$
$$f^{-1}(x) = 2x - 1$$

- Definimos la función inversa: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f^{-1}(x) = 2x - 1$
- Efectuamos la composición para ambos casos:

$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f(2x - 1) = \dfrac{2x-1+1}{2} = x$ (función identidad)

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{x+1}{2} - 1 = x$ (función identidad)

- Representamos gráficamente:



- Obtenemos conclusiones
  - ♦ Si se componen f y f^{-1} se obtiene la función identidad.
  - ♦ El gráfico f es simétrico al gráfico de f^{-1} respecto de la recta $y = x$

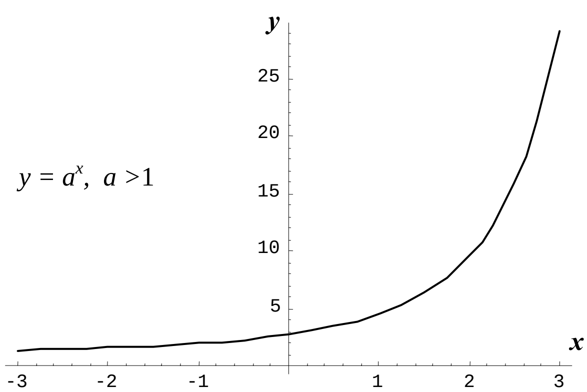
FUNCIONES TRASCENDENTES

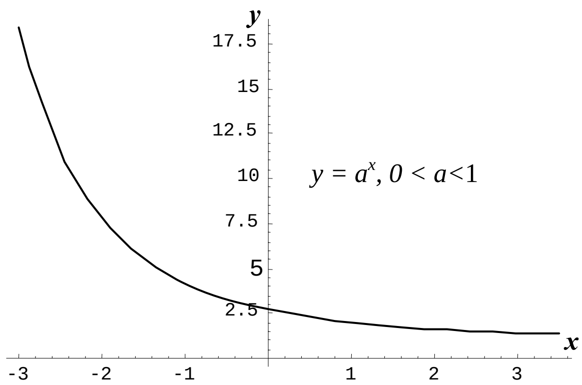
FUNCIÓN EXPONENCIAL

Definición: Se denomina **función exponencial** a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x$, <u>*a*</u> es una constante real tal que $a > 0$ y $a \neq 1$.

<u>*a*</u> es la base de la función exponencial.

Gráfico de la función exponencial:





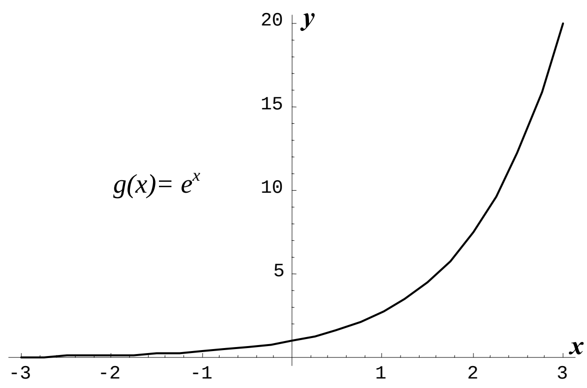
- El gráfico está por encima del eje de abscisa (x), porque $\forall x \in \mathbb{R}$: $a^x > 0$. La función no presenta ceros.
- Corta el eje y en el punto (0,1) porque $\forall a \neq 0 : a^0 = 1$.
- Si $a > 1$ la función es estrictamente creciente y si $0 < a < 1$ la función es estrictamente decreciente.

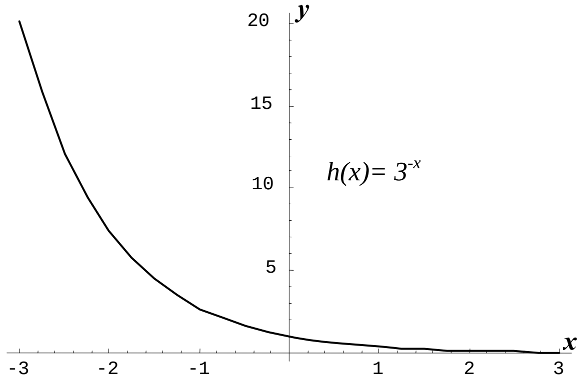
- La recta de ecuación $y = 0$ es la asíntota horizontal.
- No tiene asíntota vertical.

Representamos gráficamente dos funciones:

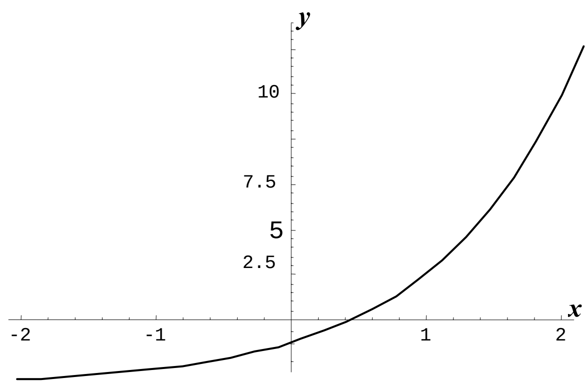
1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \,/\, g(x) = e^x$, $e \cong 2{,}71828182\ldots$

2) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \,/\, h(x) = 3^{-x}$





Efectuemos algún corrimiento, por ejemplo grafiquemos s: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, s(x) = 4^x - 2$



$Is = (-2, +\infty)$

Propiedades de la función exponencial:

- $f(b + c) = f(b)\, f(c)$ es decir $a^{b+c} = a^b\, a^c$
- $f(b - c) = \dfrac{f(b)}{f(c)}$ es decir $a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c}$
- Es una función biyectiva, o sea que admite función inversa.

Ecuaciones exponenciales:

Para resolver estos problemas debemos aplicar las propiedades de la potenciación (no olvidemos que $a > 0$).

Ejemplos:

1) $3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$ entonces $S = \{3\}$ (recuerde verificar su solución).

2) $5^{x+2} + 3.5^{x+1} - 8 = 0 \Rightarrow 5^x.5^2 + 3.5^x.5 - 8 = 0 \Rightarrow 5^x\,(25 + 15) - 8 = 0$

$5^x = \dfrac{8}{40} \Rightarrow 5^x = \dfrac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$ entonces $S = \{-1\}$.

3) $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2.2^x - 8 = 0$ efectuamos un cambio de variable $z = 2^x$ y se obtiene la ecuación $z^2 - 2z - 8 = 0$ cuyas soluciones son: $z = -2 \vee z = 4$.

Entonces: $z = -2 \Rightarrow 2^x = -2$ (no tiene solución)

$z = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Concluimos: $S = \{2\}$

Ejercicio:

Calcule, si existen, los ceros de las siguientes funciones exponenciales (en cada caso sólo le damos la fórmula).

a. $f(x) = 2.2^x - 4$ Rta.: $x = 1$
b. $h(x) = 9^x - 3^x$ Rta.: $x = 0$
c. $g(x) = 4^x - 3.2^{x+1} + 8$ Rta.: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Definición:
Llamamos **función logarítmica** de base "*a*" a la función inversa de la función exponencial de base "*a*".

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = a^x$, la función logarítmica en base *a* es: $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \log_a x$
$\log_a x$ se lee "logaritmo en base *a* de *x*".
Por definición de función exponencial es: $a > 0$ y $a \neq 1$. La siguiente definición indica el significado de logaritmo en base *a*: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, $x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

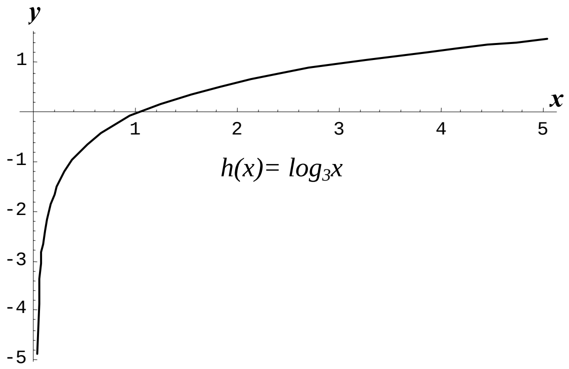
Sea $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \log_3 x$, vamos a obtener las imágenes de algunos números reales positivos:

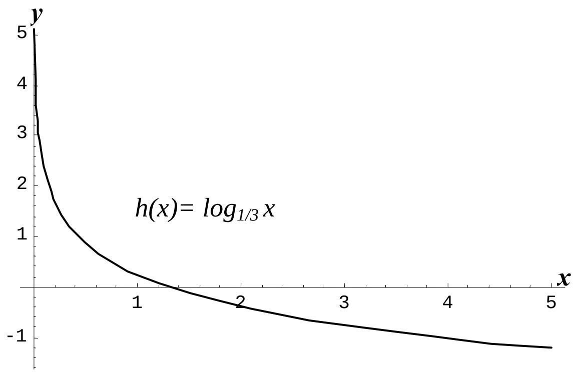
$\log_3 1 = 0$ pues $3^0 = 1$
$\log_3 3 = 1$ pues $3^1 = 3$
$\log_3 \dfrac{1}{3} = -1$ pues $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$
$\log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$ pues $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Representamos gráficamente las funciones:

1) $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \;/\; h(x) = \log_3 x$

2) $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = \log_{\frac{1}{3}}$





En general observamos que:

- El conjunto imagen es $\mathbb{R}$.
- El gráfico corta el eje de abscisas en el punto (1,0) entonces $x = 1$ es cero de la función.
- La recta de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical de la función.
- No tiene asíntota horizontal.
- No es par ni impar.

Notemos que el logaritmo en base e (número e) de un número real positivo x también se denomina “logaritmo natural” y su notación es: $\ln x$.
Cuando la notación sea $\log x$, nos referimos al logaritmo en base 10.

Propiedades de la función logarítmica:

- Es una función biyectiva.
- Si la base es mayor a 1, la función es estrictamente creciente.
- Si $0 < a < 1$, la función es estrictamente decreciente.
- $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $f(x_1 \,.\, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $x_1 > 0$ $x_2 > 0$ es decir $\log_a (x_1 \,.\, x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$, $x_1 > 0$ $x_2 > 0$ es decir $\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a x^n = n \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}$
- $\log_a a^x = x$, $x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a x} = x$, $x \in \mathbb{R}^+$

Ejemplos aplicando las propiedades de los logaritmos:

1) $\log 10^3 = 3 \log 10 = 3$

2) $\log\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\log 2 \cong \dfrac{1}{2}0{,}30103$ (utilizamos calculadora)

3) $\log\left(\dfrac{75}{16}\dfrac{32}{243}\right) - \log\left(\dfrac{5}{9}\right)^2 = \log\dfrac{75}{16} + \log\dfrac{32}{243} - 2\log\dfrac{5}{9}$

$= \log 75 - \log 16 + \log 32 - \log 243 - 2\log 5 + 2\log 9$

$= \log(5^2.3) - \log 2^4 + \log 2^5 - \log 3^5 - 2\log 5 + 2\log 3^2$

$= 2\log 5 + \log 3 - 4\log 2 + 5\log 2 - 5\log 3 - 2\log 5 + 4\log 3$

$= \log 2$

Ecuaciones logaritmicas:

Para resolverlas aplicaremos las propiedades de los logaritmos.

1) $\log(2x) = 2\log(4x - 15) \Rightarrow \log(2x) = \log(4x - 15)^2$

$2x = (4x - 15)^2 \Rightarrow 16x^2 - 122x + 225 = 0$ entonces: $x = 4{,}5 \vee x = 3{,}125$

Comprobamos si los valores obtenidos verifican la ecuación:

Si $x = 4{,}5$ entonces es: $\log(2 . 4{,}5) \ ? \ 2\log(4 . 4{,}5 - 15)$

$\log 9 \ ? \ 2\log(3)$

$\log 9 = \log 9$

Si $x = 3{,}125$ entonces es: $\log(2 . 3{,}125) \ ? \ 2\log(4 . 3{,}125 - 15)$

$\log 6{,}25 \ ? \ 2\log(-2{,}5) \rightarrow$ **no existen los logaritmos de números negativos, luego $x = 3{,}125$ no es solución de la ecuación.**

Concluimos: $S = \{4{,}5\}$

2) $x^{\log x} = 100x$, $x > 0$

$\log x^{\log x} = \log 100x \Rightarrow \log x \log x = \log 100 + \log x$

$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$ hacemos un cambio de variable $z = \log x$, y resulta $z^2 - z - 2 = 0$ cuyas soluciones son $z_1 = -1 \vee z_2 = 2$

por lo tanto:

$\log x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 0.1$ y $\log x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 100$ entonces $S = \{0.1 , 100\}$

Ejercicio:

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log[5 - 4\log(x + 2)] = 0$ $\quad S = \{8\}$

b) $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log\dfrac{1}{2} - \log x$ $\quad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $\log 8 + (x^2 - 5x + 7)\log 3 = \log 24$ $\quad S = \{2,3\}$

Cambio de base:

Si queremos conocer $\log_b x$ a partir de $\log_a x$, con $b \neq a$, deberemos aplicar la fórmula de cambio de base, se puede demostrar que la misma es:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Ejemplo:

Queremos expresar $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{2}$ en base 2, aplicamos la fórmula anterior.

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{2} = \frac{\log_2 \sqrt[5]{2}}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 5 (Segunda Parte)

Funciones

Ejercicios:

1) Determine el dominio y los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x-2) + \log x - \log 8$
Rta.: $D = (2,+\infty)$ cero en $x = 4$

b) $h(x) = \log(2x^2 + 7x + 3)$
Rta.: $D = (-\infty,-3) \cup \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ ceros en $x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$

c) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$
Rta.: $D = (1,+\infty)$ no tiene ceros

d) $s(x) = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}}$
Rta.: $D = \mathbb{R}$ - {0, 1} no tiene ceros

e) $t(x) = \sqrt{\ln(e^{2x} - 1)}$
Rta.: $D = \left[\ln\sqrt{2},+\infty\right)$ cero en $x = \ln\sqrt{2}$

2) Dadas f y h, en cada caso determine $f \circ h$ y $h \circ f$, indicando el dominio correspondiente.

a) $f(x) = |x|$ $h(x) = \log x$

b) $f(x) = e^x$ $h(x) = 2x$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ $h(x) = \sqrt{4 - x}$

a) $Rta: foh = |\log x|$ $D_{foh} = \Re^+$, $hof = \log|x|$ $D_{hof} = \Re - \{0\}$

b) $Rta: foh = e^{2x}$ $D_{foh} = \Re$, $hof = 2e^x$ $D_{hof} = \Re$

c) $Rta: foh = \ell_n(3-x)$ $D_{foh} = (-\infty,3)$, $hof = \sqrt{4 - \ell_n(x^2-1)}$ $D_{hof} = \left[-\sqrt{e^4+1};-1\right) \cup \left(1;\sqrt{e^4+1}\right]$

3) Determine dominio e imagen tal que exista la función inversa de las siguientes funciones, luego determine dicha función inversa.

a) $f(x) = 3^{2x-1}$ Rta.: $Df = \mathbb{R}$ $If = \mathbb{R}^+$ $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,/\, f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 x$

b) $f(x) = \ln(x-1) - 2$ Rta.: $Df = (1,+\infty)$ $If = \mathbb{R}$
$f^{-1}: \mathbb{R} \to (1,+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = 1 + e^{x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{x-3}{3-2x}$ Rta.: $Df: \mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $If = \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$f^{-1}:\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\} / \ f^{-1}(x)=\dfrac{3x+3}{2x+1}$

d) $f(x) = x^2 - 4$ Rta.: $Df = [0,+\infty)$ $If = [-4,+\infty)$

$f^{-1}:[-4,+\infty)\to[0,+\infty) / \ f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$

4) Dadas $f(x) = \ln x$ y $h(x) = x + 3$

a. Halle dominio e imagen de cada función.
b. Si es necesario efectúe las restricciones correspondientes y defina $h^{-1} \circ f$ y $f \circ h^{-1}$.

5) Represente gráficamente las siguientes funciones definidas por tramos y determine el dominio e imagen de las mismas.

a) $g(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & si\ \ x>1\\ 2 & si\ \ x=1\\ |x+2|+1 & si\ \ x<1\end{cases}$

b) $r(x)=\begin{cases}2^x & si\ \ x>2\\ 2^{-x} & si\ \ x<-2\end{cases}$

Problemas:

1) Suponiendo que la población de cierta ciudad responde al modelo de crecimiento dado por: $p(t) = 4600\ (1{,}016)^t$, donde $p(t)$ es la población t años después de 1980.

a. ¿Cuál será la población en 2020?
b. ¿Cuál será la población en 2080?
c. Indique aproximadamente en cuánto tiempo se duplicará la población del año 1980.

Rta.: a) 8680 personas
b) 22497 personas

2) Cierto elemento radioactivo tiene vida media de 1690 años. Empezando con 30 miligramos habrá $q(t)$ miligramos después de t años, donde $q(t) = 30\left(\dfrac{1}{2}\right)^{kt}$.

(Se conoce como vida media al tiempo requerido para que desaparezca la mitad de una sustancia).

a. Determine la constante k.
b. ¿Cuánto habrá después de 2500 años?

Rta.: a) $k=\dfrac{1}{1690}\dfrac{1}{años}\cong 0{,}0005917\dfrac{1}{años}$
b) $m \cong 10{,}76$ mg

Ejercicios integradores:

1) Dadas $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$ y $g^{-1}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ g^{-1}(x)=mx+n\ ,\ m\neq 0$, se sabe que $f(-3)=-14\ ,\ f(2)=-4\ ,\ f(1)=-2\ ,\ g^{-1}(2)=3\ ,\ g^{-1}(-1)=-3$.

Calcule $(f \circ g)(-1)$.

Rta.: -2

2) Sean las funciones $f: Df \rightarrow \mathbb{R}\ /\ f(x)=2+\ln\sqrt{4-x}$ y $h: Dh \rightarrow \mathbb{R}\ /\ h(x)=\dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$

Determine:

a) $Df \cap Dh$ — Rta.: $(-\infty, 3)\cup(3, 4)$

b) el valor de $e^{f(x)}\ e^{-2}$ en $x = 0$ — Rta.: 2

c) la ecuación de la asíntota vertical a la curva representativa de h — Rta.: $x = 5$

3) Sean las funciones:

$$f:\mathbb{R}\rightarrow If\ /\ f(x)=e^{3x-1}$$
$$g:\mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}\ /\ g(x)=-3x+1$$
$$s:\mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}\ /\ s(x)=3x^3-x^2-3x+1$$

Determine: a) $g(f^{-1})(e)$ — Rta.: -1

b) el conjunto de ceros de s — Rta.: $\left\{-1,1,\dfrac{1}{3}\right\}$

4) Sean las funciones:

$$f:\mathbb{R}\rightarrow If\ /\ f(x)=e^{3x}$$
$$h: Dh \rightarrow Ih\ /\ h(x)=\frac{2x}{1-x}$$

Determine: a) $\left\{x\in\mathbb{R}/[f(x)]^2+9f(0)=10f(x)\right\}$ — Rta.: $\left\{0,\dfrac{2}{3}\ln 3\right\}$

b) $h^{-1}(2)$ — Rta.: $\dfrac{1}{2}$

5) Dadas las funciones:

$$f: Df \rightarrow \mathbb{R}\ /\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-|1-x|}}$$
$$g: Dg \rightarrow \mathbb{R}\ /\ g(x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}$$

Determine: $Df \cap Dg$ — Rta.: $(-1,1)$

6) Determine $[k, 1] \cap Dg$ si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = (1-2k)x^2 + 8kx - (2+8k)$ tiene ceros iguales, y Dg es el dominio de $g : Dg \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \log_3 \dfrac{-x+1}{x+1}$

Rta.: $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$

7) Sean las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to If \,/\, f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g \text{ es función lineal}$$
$$h : Dh \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = \ln x$$
$$p : Dp \to Ip \,/\, p(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$$

Determine:

a) las ecuaciones de la asíntota horizontal y vertical a la curva representativa de $\dfrac{g^{-1}(x)}{g(x)}$ Rta.: $y = \dfrac{1}{a^2}$, $x = -\dfrac{b}{a}$ con $a \neq 0$

b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, (foh)(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, (fop)(x) = 1\}$ Rta.: $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, p(x-1) = p(x+3)\}$ Rta.: {-1}

d) $f^{-1}(1)$ Rta.: 2

8) Determine el valor real de x que satisface la ecuación:

$$2 \log(\log x) = \log(3 \log x + 2) - \log 2$$ Rta.: $x = 100$

9) Determine el conjunto solución de:

$$e^{3x+2} + 3\, e^{6x+2} = 4\, e^2$$ Rta.: {0}

10) Determine los valores reales de x que satisfacen la ecuación:

$$x^{\frac{1}{2}\log_2 x} = 16\, x$$ Rta.: $x = 16$, $x = \dfrac{1}{4}$

11) Sean las funciones:

$$f : Df \to If \,/\, f(x) = \frac{2x-1}{1-x} \qquad g : Dg \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = -|2x+1| + 1$$

Determine:

a) las ecuaciones de la asíntota vertical y horizontal a la curva representativa de f.
Rta.: AV: $x = 1$, AH: $y = -2$

b) el dominio de g. Rta.: (-1,1)

c) el conjunto de ceros de h. Rta.: {-1,0}

d) la función f^{-1}. Rta.: f^{-1}: $\mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{1\} \,/\, f^{-1}(x) = \dfrac{1+x}{x+2}$

12) Dadas las funciones:

$$f : Df \to \mathbb{R} / f(x) = \log_3(4x+2)$$

$$g : Dg \to \mathbb{R} / g(x) = \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 10x}}$$

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / t(x) = (x+1)^2 + 1$$

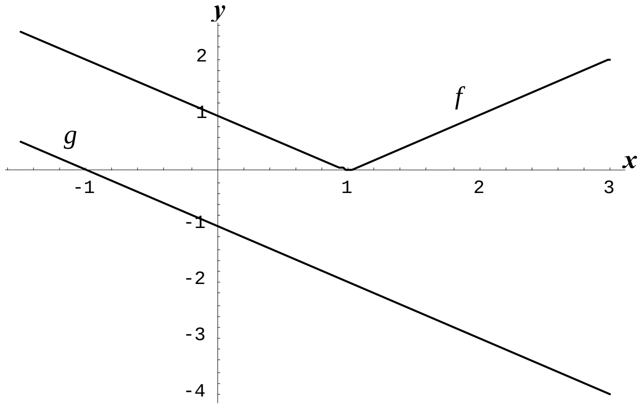
<u>Determine</u>:

a) $\{x \in \mathbb{R} / 2 < t(x) \leq 10\}$ Rta.: $[-4,-2) \cup (0,2]$

b) $f^{-1}(0)$ Rta.: $-\frac{1}{4}$

c) el dominio de g. Rta.: $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$

13) Observe el gráfico de cada una de las dos funciones f y g.



<u>Determine</u>: a) $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ Rta.: $-\frac{3}{2}$

b) $(f \circ g)(1)$ Rta.: 3

c) $(f - g)(-1)$ Rta.: 2

UNIDAD 6

Trigonometría

- Nociones previas
- Ángulos

Funciones trigonométricas

- Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas
- Teorema del seno y el coseno

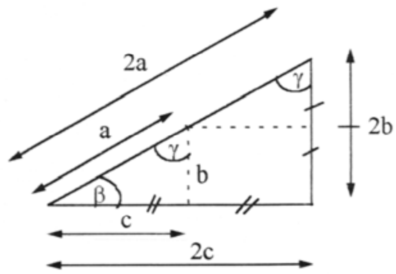
TRIGONOMETRIA

NOCIONES PREVIAS

Si consideramos tres varillas *a, b, c* tales que puede construirse con ellas un triángulo (siempre que se cumpla que la medida de cada varilla sea menor que la suma de las otras dos y mayor que la diferencia) rectángulo y resolvemos medir todas las varillas tomando como unidad a cada una de ellas, se obtendrán los siguientes cocientes:

$$\frac{b}{a}\ ,\ \frac{c}{a}\ ,\ \frac{b}{c}\ ,\ \frac{c}{b}\ ,\ \frac{a}{c}\ ,\ \frac{a}{b}$$

Ej.: $\frac{b}{a} = \frac{2b}{2a} = \dots = \frac{kb}{ka}\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} - \{0\}$



A estas razones numéricas se les da el nombre:

$$\text{sen}\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a }\beta}{\text{hipotenusa}} \qquad (1)$$

$$\cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a }\beta}{\text{hipotenusa}} \qquad (2)$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a }\beta}{\text{cateto adyacente a }\beta}$$

$$\text{cotg}\ \beta = \frac{c}{b}$$

$$\sec\beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{cosec}\ \beta = \frac{a}{b}$$

Si en cambio consideramos γ, resulta:

$$\text{sen}\ \gamma = \frac{c}{a} \qquad (3)$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{a} \qquad (4)$$

$$\text{tg}\ \gamma = \frac{c}{b}$$

Comparando (1), (2), (3), (4) obtenemos:

$$\text{sen}\ \beta = \cos\gamma$$

$$\cos\beta = \text{sen}\ \gamma$$

Teniendo en cuenta que $\beta + \gamma = 90º$ (ángulos complementarios) resulta:

$$\text{sen}\,\beta = \cos(90° - \beta)$$

$$\cos\beta = \text{sen}\,(90° - \beta)$$

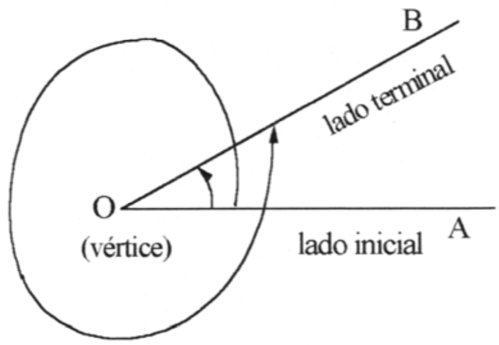
OBSERVACIÓN:

El coseno, cotangente y cosecante de un ángulo (β) agregan el prefijo $\boxed{\text{co}}$ al seno, tangente y secante por la relación que los vincula con el ángulo complementario.

Otras nociones previas:

ÁNGULOS

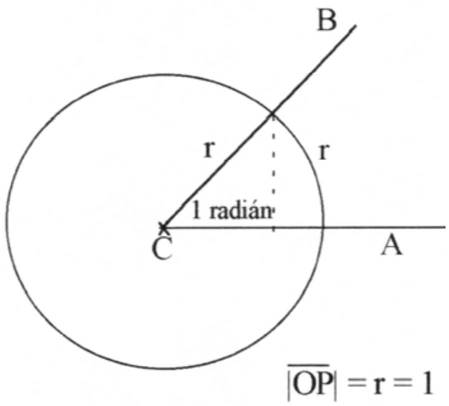
Definición:
Un ángulo en el plano es la figura engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen, desde una posición inicial hasta una posición terminal. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo.



- Si la rotación se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj diremos que el ángulo es positivo, en caso contrario el ángulo es negativo.

Circunferencia unitaria

Si dibujamos una circunferencia con centro en C y radio $r = 1$.



Radián: un radián es el ángulo que teniendo su vértice en el centro de una circunferencia sus lados determinan sobre la misma al cortarla un arco de longitud igual a un radio.

Así:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$
$$180° = \pi \text{ rad}$$
$$90° = \tfrac{\pi}{2} \text{ rad}$$
$$45° = \tfrac{\pi}{4} \text{ rad}$$
$$30° = \tfrac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Ejercicio:

1. Exprese en radianes

$a)\ 270°$ $\quad b)\ 60°$ $\quad c)\ 210°$

$d)\ -30°$ $\quad e)\ 120°$ $\quad f)\ -135°$

Rta: $a)\ \tfrac{3}{2}\pi\ ,\ b)\ \tfrac{\pi}{3}\ ,\ c)\ \tfrac{7}{6}\pi\ ,\ d)\ -\tfrac{\pi}{6}\ ,\ e)\ \tfrac{2\pi}{3}\ ,\ f)\ -\tfrac{3\pi}{4}$

2. Exprese en grados sexagesimales

$a)\ \tfrac{3\pi}{4}$ $\quad b)\ \tfrac{5}{3}\pi$ $\quad c)\ 4\pi$

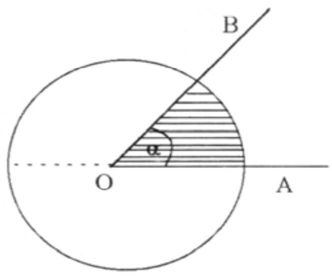
$d)\ 1.2$ $\quad e)\ 1$ $\quad f)\ 3$

Rta: *a*) 135º, *b*) 300º, *c*) 720º, *d*) 68º45′ 18”, *e*) 57º17′ 45”, *f*) 171º53′ 14”.

3. Un velero navega alrededor de una boya fija describiendo una circunferencia. El arco recorrido por el velero desde su posición inicial hasta su posición final es de 1700m y abarca un ángulo central de 120º. Calcule la distancia desde el velero hasta la boya.

4. Demuestre que el área de un sector circular (ver figura) generado por el ángulo α en un circulo de radio *r* es:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$



Sugerencia: utilice el teorema que dice: **“En todo círculo las áreas de dos sectores circulares son proporcionales a los ángulos centrales”** y tome como sector circular conocido al que corresponde a medio círculo.

Posición normal de un ángulo

Definición: Un ángulo está en posición normal si su vértice coincide con el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas.

Si el lado terminal está en el primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante diremos que el ángulo es un ángulo del primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante respectivamente.

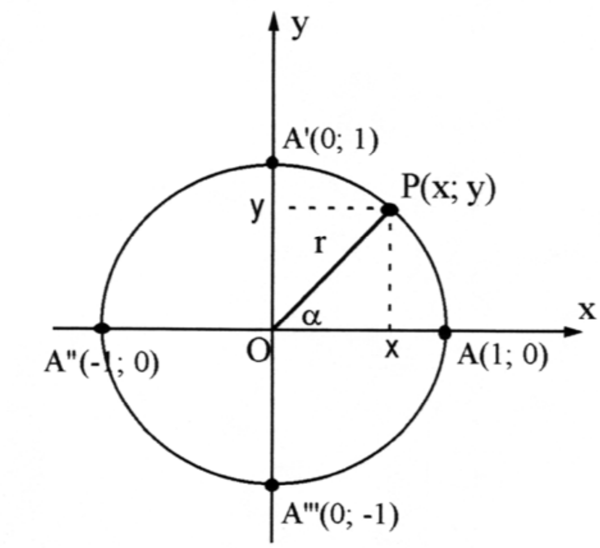
OBSERVACIÓN:

Consideramos como primer cuadrante al determinado por los semiejes positivos de coordenadas y como segundo cuadrante al determinado por el semieje de abscisas negativas y de ordenadas positivas.

Este ordenamiento determina el sentido para enumerar los restantes cuadrantes.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (O CIRCULARES)

Sobre un sistema cartesiano de ejes dibujamos la circunferencia trigonométrica que es la que tiene centro en el origen y radio r ($r = 1$) y tomamos un ángulo α en posición normal.



El lado terminal de α determina sobre la circunferencia un punto P que tiene por coordenadas x: abscisa ($x \in \mathbb{R}$) e y: ordenada($y \in \mathbb{R}$)

Puede observarse en la figura que:

- $|\overline{\mathrm{OP}}| = r$ (radio) medida del radio
- $r > 0$
- AP es el arco que corresponde al ángulo central α
- $P \in$ primer cuadrante $\Rightarrow x > 0, y > 0$
  $P \in$ segundo cuadrante $\Rightarrow x < 0, y > 0$
  $P \in$ tercer cuadrante $\Rightarrow x < 0, y < 0$
  $P \in$ cuarto cuadrante $\Rightarrow x > 0, y < 0$

Reformulando las razones numéricas expuestas al comienzo obtenemos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{medida del radio}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{medida del radio}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{cosec}\alpha = \frac{r}{y} = \frac{1}{\text{y}}$$

Donde observamos que la ordenada del punto P es el seno del ángulo α y la abscisa de P es el coseno del mismo ángulo. Los números sen α y cos α dependen sólo de α no de la medida del radio.

OBSERVACIONES:

$\boxed{\text{sen }\alpha}$: El signo del sen α coincide con el signo de y en el cuadrante correspondiente.

Así:

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen }\alpha > 0 \qquad (y > 0)$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \text{sen }\alpha > 0 \qquad (y > 0)$

$\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{sen }\alpha < 0 \qquad (y < 0)$

$\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow \text{sen }\alpha < 0 \qquad (y < 0)$

- $\alpha = 0 \Rightarrow P(1,0) \Rightarrow \text{sen } 0 = 0$

  $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow P(0,1) \Rightarrow \text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$

  $\alpha = \pi \Rightarrow P(\text{-}1,0) \Rightarrow \text{sen}\pi = 0$

  $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi \Rightarrow P(0,\text{-}1) \Rightarrow \text{sen}\dfrac{3}{2}\pi = -1$

  $\alpha = 2\pi\,(\text{giro}) \Rightarrow \text{P}(1,0) \Rightarrow \text{sen } 2\pi = 0$

O sea coincide con $\alpha = 0$

- $sen(\alpha + 2\pi) = sen(\alpha + 2.2\pi) = sen(\alpha + 3.2\pi) =$
  $= ... = sen(\alpha + k.2\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$
  resulta entonces que el período es 2π.

- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}: -1 \leq sen\alpha \leq 1$

o bien $|sen\alpha| \leq 1$

razón por la que $D_f \equiv \mathbb{R}$ y la $I_f = [-1,1]$

$\boxed{\cos\alpha}$: El signo de cos α coincide con el signo de x en el cuadrante correspondiente.

Así:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \qquad (x > 0)$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos\alpha < 0 \qquad (x < 0)$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0 \qquad (x < 0)$$

$$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos\alpha > 0 \qquad (x > 0)$$

- $\alpha = 0 \Rightarrow P(1,0) \Rightarrow \cos 0 = 1$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P(0,1) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\alpha = \pi \Rightarrow P(-1,0) \Rightarrow \cos\pi = -1$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow P(0,-1) \Rightarrow \cos\frac{3}{2}\pi = 0$$

$$\alpha = 2\pi \text{ (giro)} \Rightarrow P(1,0) \Rightarrow \cos 2\pi = 1$$

O sea coincide con $\alpha = 0$

- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2.2\pi) = \cos(\alpha + 3.2\pi) =$

$= ... = \cos(\alpha + k.2\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

resulta entonces que el período es 2π

- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

o bien $|\cos\alpha| \leq 1$

en donde $D_f \equiv \mathbb{R}$ y la $I_f = [-1,1]$

Relaciones fundamentales

Las siguientes afirmaciones son válidas en los conjuntos que se indican:

1) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ (\forall\alpha \in \text{R})$

2) $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\cos\alpha \neq 0)$

3) $\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \qquad (\text{sen}\alpha \neq 0)$

$\qquad = \frac{1}{\text{tg}\alpha} \qquad (\text{tg}\alpha \neq 0)$

4) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (\cos\alpha \neq 0)$

5) $\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \qquad (\text{sen}\alpha \neq 0)$

Demuestre las relaciones fundamentales.

Ejercicio:

1) Teniendo en cuenta que $\forall\alpha \in \mathbb{R}$: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y utilizando la máquina de calcular verifique para el caso

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ \alpha = \frac{7}{6}\pi,\ \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2},\ \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

2) Sobre una circunferencia trigonométrica dibuje $\hat{\alpha}$ tal que:

$$\text{sen}\,\alpha = -0.5, \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$$

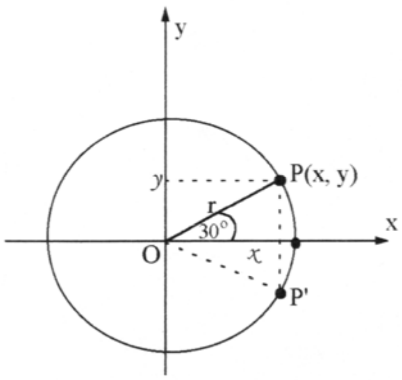
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \text{ y } \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Valores de funciones trigonométricas de ángulos particulares

$\boxed{\alpha = 30°}$

Si dibujamos un ángulo de 30º en su posición normal con sentido positivo y negativo queda determinado un triangulo $O\overset{\Delta}{P}P'$ equilátero en el cual:



$$r = 2y \qquad (1)$$

$$y = y \qquad (2)$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{(2y)^2 - y^2} = \sqrt{3y^2} = y\sqrt{3} \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta (1), (2) y (3)

$\text{sen}\,30° = \frac{y}{2y} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{cosec}\,30° = 2$

$\cos 30° = \frac{x}{2y} = \frac{y\sqrt{3}}{2y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg}\,30° = \frac{y}{x} = \frac{y}{y\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{cotg}\,30° = \sqrt{3}$

$\boxed{\alpha = 60°}$

Teniendo en cuenta que $\alpha = 60º$ es complementario de 30º tendremos:

$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

$\text{tg } 60° = \text{cotg } 30° = \sqrt{3}$

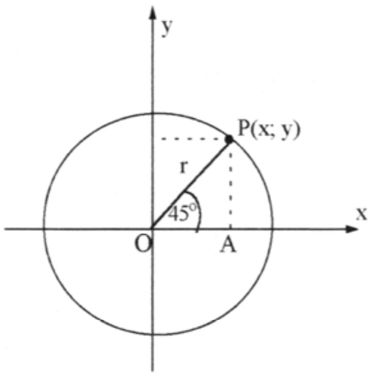
$\text{cotg } 60° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 60° = \text{cosec } 30° = 2$

$\text{cosec } 60° = \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{\alpha = 45°}$

Si dibujamos un ángulo de 45º en su posición normal, con sentido positivo (ver figura), obtenemos un triangulo isósceles $O\overset{\Delta}{A}P'$ en el que se verifica que:



$$x = x \qquad (4)$$

$$y = x \qquad (5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \qquad (6)$$

Teniendo en cuenta (4), (5) y (6)

sen 45º $= \frac{y}{r} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{cosec } 45° = \sqrt{2}$

cos 45º $= \frac{x}{r} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sec 45° = \sqrt{2}$

tg 45º $= \frac{y}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{cotg } 45° = 1$

Todos los valores obtenidos para α = 0º, 30º, 45º, 60º y 90º pueden presentarse en una tabla (regla nemotécnica) fácil de recordar, basta con seguir los pasos indicados a continuación:

α	0º	30º	45º	60º	90º	OBSERVACIONES
1^{er} paso	0	1	2	3	4	escriba del 0 al 4
2^{do} paso	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	extraiga raíz cuadrada
3^{er} paso	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	divida por 2
$\boxed{\text{sen } \alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	

Resumiendo:

α	0º	30º	45º	60º	90
$\boxed{\text{sen } \alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Contando con esta tabla pueden obtenerse todas las funciones trigonométricas de los ángulos propuestos.

Ejemplo:

Calculemos

$$\cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 90° = \text{sen } 0° = 0$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 30°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\text{sen } 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio:

Calcule, si es posible, el valor de x en las expresiones:

1. $x \text{ cosec } 60° - x \text{tg } 45° + 1 = 0$

Rta.: $-\left(2\sqrt{3}+3\right)$

2. $x = \frac{\text{sen } 30° + \frac{1}{2}}{\text{tg } 30° - \text{cotg } 60°}$

3. (sen 60º - cos 45º) x = 1 – sen 45º

Rta.: $\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\right)$

Ejercicio:

Halle con máquina de calcular

a) $\text{sen } 23° 14'$ d) $\sec 32° 20'$

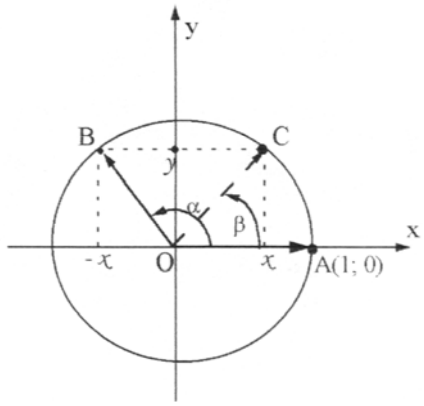
b) $\cos 10° 12'$ e) $\text{cosec } 12'$

c) $\text{tg } \frac{\pi}{6}$ f) $\text{cotg } 0°$

Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en cualquier cuadrante

Si α es un ángulo en posición normal, referido a la circunferencia trigonométrica y α no es agudo o está orientado negativo debemos extender el concepto de función trigonométrica hasta aquí expuesto para poder calcular su valor numérico.

La siguiente figura ilustra a un ángulo que pertenece al segundo cuadrante α orientado positivo.



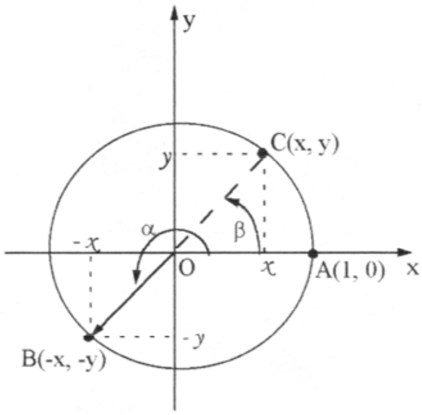
Puede observarse en la figura que:

$$\operatorname{sen}\alpha = y = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$$

$$\cos\alpha = -x = -\cos\beta = -\cos(\pi - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

Si el ángulo α está en posición normal y pertenece al tercer cuadrante:

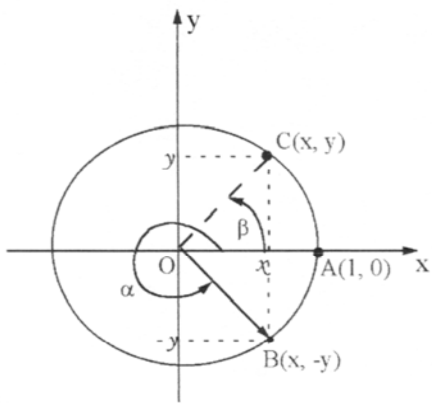


$$\operatorname{sen}\alpha = -y = -\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi)$$

$$\cos\alpha = -x = -\cos\beta = -\cos(\alpha - \pi)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \pi)$$

Si el ángulo α está en posición normal y pertenece al cuarto cuadrante:



Entonces:

$$\text{sen}\,\alpha = -y = -\text{sen}\,\beta = -\text{sen}\,(2\pi - \alpha)$$
$$\cos\alpha = x = \cos\beta = \cos(2\pi - \alpha)$$
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\text{tg}\,\beta = -\text{tg}\,(2\pi - \alpha)$$

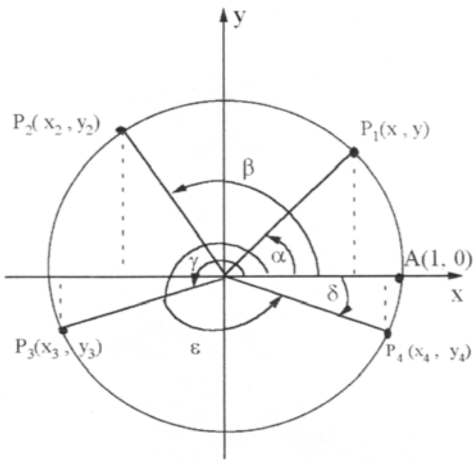
Ejercicio:

Si el ángulo α está en posición normal pero orientado negativo muestre que el tratamiento es similar.

OBSERVACIÓN:

Las funciones trigonométricas de un ángulo del segundo, tercero o cuarto cuadrante son respectivamente iguales a las del ángulo β del primer cuadrante que resulta de considerar el suplemento del primero, restarle π al segundo o restarlo de 2π al tercero, anteponiéndoles el signo correspondiente.

Para anteponer el signo apropiado recuerde que el mismo se obtiene a partir del signo que tienen las coordenadas de un punto P en cada cuadrante y que $|x| = \cos\alpha$ e $|y| = \text{sen}\,\alpha$ (vea la figura).



$P_1(x,y) = P_1(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$

$$P_2(x_2, y_2) = P_2(-\cos(\pi - \beta), \text{sen}(\pi - \beta))$$
$$P_3(x_3, y_3) = P_3(-\cos(\gamma - \pi), \text{- sen}(\gamma - \pi))$$
$$P_4(x_4, y_4) = P_4(\cos(2\pi - \varepsilon), \text{sen}(2\pi - \varepsilon)) =$$
$$= P_4(\cos\delta, \text{-sen}\,\delta)$$

Ejercicio:

Para cada uno de los valores asignados a α determine el ángulo agudo β de referencia:

$a)\ \alpha = 310°$ $\quad d)\ \alpha = \frac{4}{3}\pi$ $\quad g)\ \alpha = 335°20'$

$b)\ \alpha = \text{-}120°$ $\quad e)\ \alpha = \frac{7}{4}\pi$ $\quad h)\ \alpha = 275°10'$

$c)\ \alpha = 135°$ $\quad f)\ \alpha = \text{-}\frac{\pi}{6}$ $\quad i)\ \alpha = 111°14'2''$

Ejercicio:

En los siguientes casos calcule el valor exacto sin usar calculadora:

$$a)\ \text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) \qquad d)\ \sec 300°$$

$$b)\ \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \qquad e)\ \text{cotg}\ (\text{-}135°)$$

$$c)\ \text{tg}\ 210° \qquad f)\ \text{cosec}\ 225°$$

Ejercicio:

En cada caso reduzca a su mínima expresión:

a. $3\,\text{sen}\,(-x) + \cos\,(\frac{\pi}{2} - x)$
b. $\text{sen}\,(\pi - x) - \text{sen}\,(\pi + x)$
c. $\cos^2\,(\pi - x) + \text{sen}^2(-x)$
d. $\frac{\text{sen}\,(2\pi - x) + \text{sen}\,(-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \qquad (x \neq k\pi,\ \ k \in Z)$

Ejercicio:

Determine β (agudo y del primer cuadrante) cuyo lado terminal coincida con el de α:

$$a)\ \alpha = 735° \qquad c)\ \alpha = \frac{13}{4}\pi$$

$$b)\ \alpha = \text{-}1200° \qquad d)\ \alpha = \text{-}\frac{25}{6}\pi$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: GRÁFICAS

Gráfica de *y* = sen *x*

Sea $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = \text{sen}\,x$

Para realizar el gráfico (curva sinusoidal) utilizamos la circunferencia trigonométrica, dividida en dos arcos congruentes. Y a su derecha el sistema de coordenadas cartesianas tomando sobre el eje de ordenadas la misma unidad que en la de la circunferencia.

En el eje de las abscisas marcamos a izquierda y derecha del origen intervalos de amplitud $\frac{\pi}{6}$. (ver figura 1).

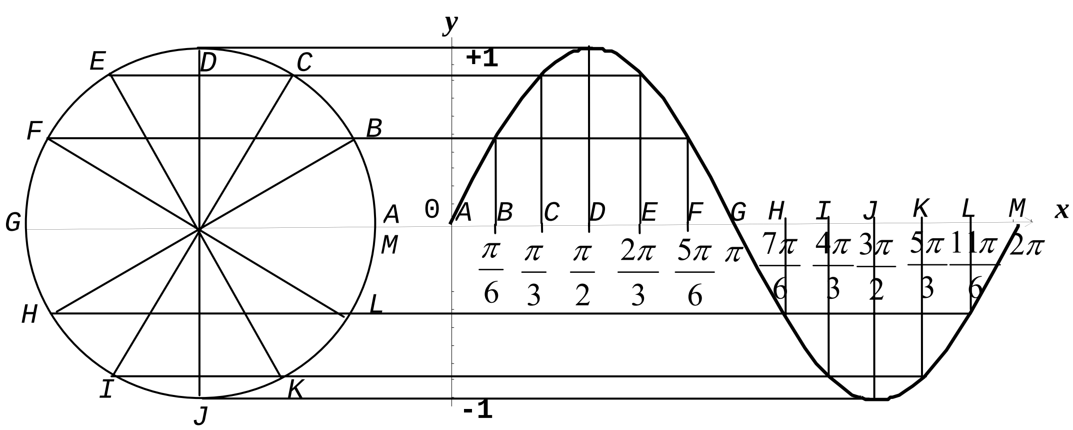


Figura 1

Gráfica de *y* = cos *x*

La igualdad $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ es válida para todo ángulo. En consecuencia la construcción gráfica de $y=\cos x$ se puede referir a la gráfica de $y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. De acuerdo con lo visto anteriormente la curva se traslada en $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda de la curva del seno; su período es 2π.

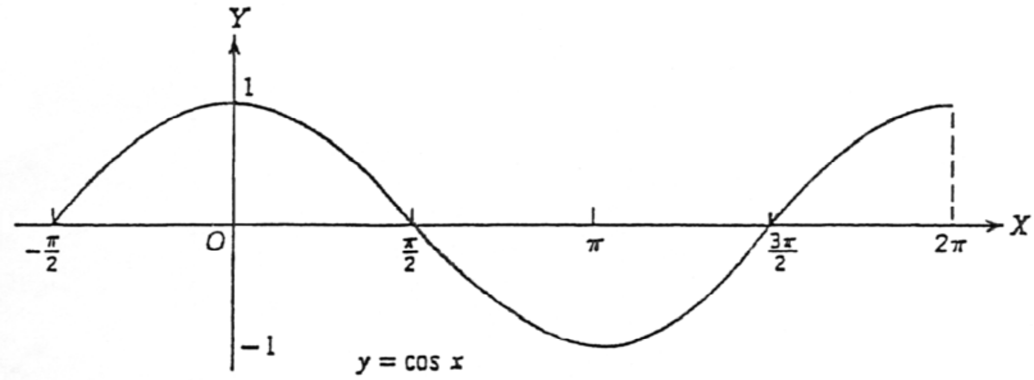


Figura 2

Observando el gráfico de la función seno podemos obtener algunas conclusiones interesantes y muy útiles: (ver figura 1).

- $D_f=\mathbb{R}$, $I_f=[-1,1]$
- El gráfico obtenido en el intervalo $[0,2\pi)$ se repite periódicamente.
  $\forall x\in\mathbb{R}$: $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen} x$ período 2π.
- No es inyectiva.
- Ceros de *f* : resolvemos la ecuación $\operatorname{sen} x=0$.

$$\operatorname{sen}0=0 \Rightarrow \operatorname{sen}(0+2\pi)=\operatorname{sen}(0+4\pi)=\operatorname{sen}(0+2k\pi)=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}(2k\pi)=0 \quad, \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}\pi=0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi+2\pi)=\operatorname{sen}(\pi+4\pi)=\operatorname{sen}(\pi+2k\pi)=0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}((2k+1)\pi)=0 \quad, \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

En definitiva: $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ es cero de *f*.
El conjunto de ceros de *f*: $S=\{x\,/\,x=k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}\}$

- Es impar.

Ejemplo:

a.
$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/2)=1 \\ f(-\pi/2)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(\pi/2)=-f(-\pi/2)$$

b.
$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=0 \\ f(-\pi)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(\pi)=-f(-\pi)$$

c.
$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/6)=\frac{1}{2} \\ f(-\pi/6)=-\frac{1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow f(\pi/6)=-f(-\pi/6)$$

En general $\forall x \in \mathbb{R}\ : f(x) = -f(-x)$, es decir $\forall x \in \mathbb{R}$:
sen x = - sen x (El gráfico es simétrico respecto del origen).

•En algunos intervalos es estrictamente creciente y en otros es estrictamente decreciente.

En $(-\pi/2, \pi/2), (-\pi/2+2\pi, \pi/2+2\pi)$, etc. es estrictamente creciente.

En $(-3\pi/2, -\pi/2), (-3\pi/2+2\pi, -\pi/2+2\pi)$, etc. es estrictamente decreciente.

Consideremos la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$/ $f(x)$ = cos x

Para realizar el gráfico (cosinusoide) utilizaremos la circunferencia trigonométrica y los ejes cartesianos en forma similar a lo hecho para el seno.

Al observar el gráfico de la función coseno podemos obtener algunas conclusiones muy útiles: (ver figura 2).

• $D_f = \mathbb{R}, I_f = [-1,1]$

• El gráfico obtenido en el intervalo $[0,2\pi)$ se repite periódicamente:
$\forall x \in \mathbb{R}\ :\ \cos(x+2\pi) = \cos x$ Período 2π

• No es inyectiva.

• Ceros de f : Resolvemos la ecuación cos x = 0

$$\cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \ \Rightarrow\ \cos(\tfrac{\pi}{2}+2\pi) = \cos(\tfrac{\pi}{2}+4\pi) = \cos(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi) = 0 \quad , \ \text{con } k \in \mathbb{N}$$

NOTA: La validez de la última igualdad se extiende a $k \in \mathbb{Z}^+$

El conjunto de ceros de f : $S = \left\{ x / x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in Z \right\}$

• Es par.

Ejemplo:

a. $f(\pi) = -1 \ \wedge\ f(-\pi) = -1 \Rightarrow f(\pi) = f(-\pi)$
b. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \wedge\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
c. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \ \wedge\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

En general $\forall x \in \mathbb{R}\ : f(x) = f(-x)$, es decir $\forall x \in \mathbb{R}$: cos x = cos(-x) (El gráfico es simétrico respecto del eje de ordenadas).

• En algunos intervalos es estrictamente creciente, por ejemplo, $(-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, etc.

En otros es estrictamente decreciente, por ejemplo, $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, etc.

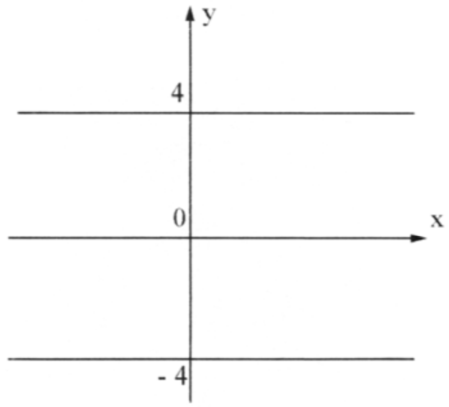
Ejercicio:

Represente gráficamente f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x)$ = 4 sen 2x. $D_f = \mathbb{R}$

Como -1 ≤ sen 2x ≤ 1 ⇒ -4 ≤ 4 sen 2x ≤ 4 ⇒
$\Rightarrow |4 \text{ sen } 2x| \le 4 \Rightarrow I_f$ = [-4,4].

Se dice entonces que 4 es la <u>amplitud</u>. (Debe ser un número real positivo).

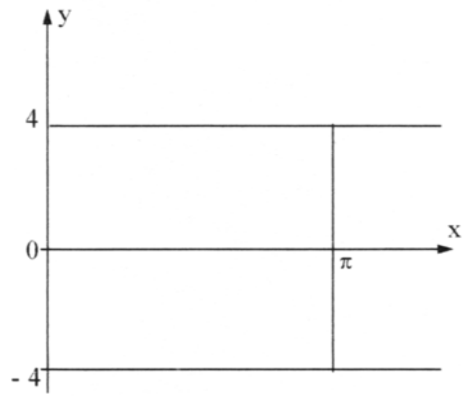
Para realizar el gráfico se procede de la siguiente manera:
Como la amplitud es 4, trazamos dos rectas paralelas al eje x, y = -4 e y = 4.



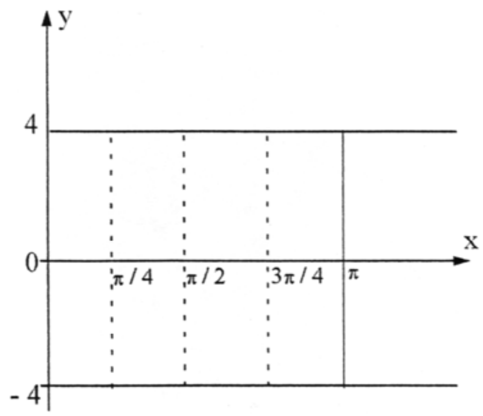
Como $0 \leq 2x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow$ el período es: "π".

Trazamos dos rectas paralelas al eje *y*: $x = 0$ y $x = \pi$.

Queda determinado un rectángulo dentro del cual estará un ciclo completo de *f*.



Dividimos el rectángulo en cuatro rectángulos congruentes trazando paralelas al eje *y*. Así quedan en evidencia el valor máximo y el valor mínimo de *f*.



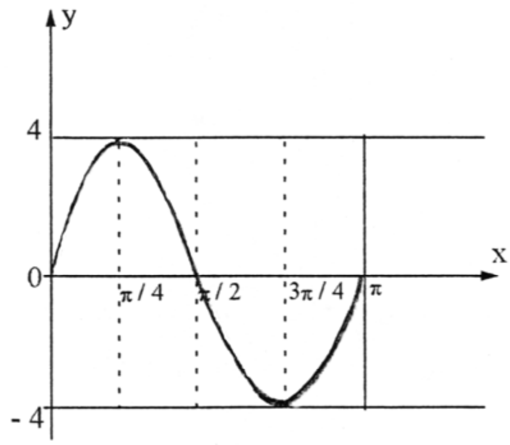
Los ceros de *f* en $[0, \pi]$ $(4 \text{ sen } (2x) = 0)$ son:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$$

Se dibuja el ciclo y luego se repite el gráfico a lo largo del eje de abscisas.



Ejercicio:

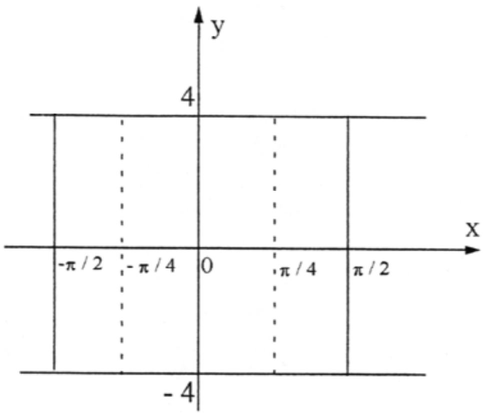
Grafique $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f(x)=4\text{sen}\,(2x+\pi)$
Amplitud: 4; I_f = [-4, 4]

Al tener $f(2x+\pi)$ según lo visto anteriormente en otras funciones escalares se produce un desplazamiento hacia la izquierda, porque $\pi>0$, $\frac{\pi}{2}$ se denomina **ángulo de fase**.
En general en $f(ax+b)$: $\frac{b}{a}$ es el ángulo de fase. Si $b>0$, el desplazamiento es hacia la izquierda y si $b<0$ el desplazamiento es hacia la derecha. En este caso: $\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}$.

Período:

$$0\le 2x+\pi\le 2\pi \Rightarrow -\pi\le 2x\le\pi\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

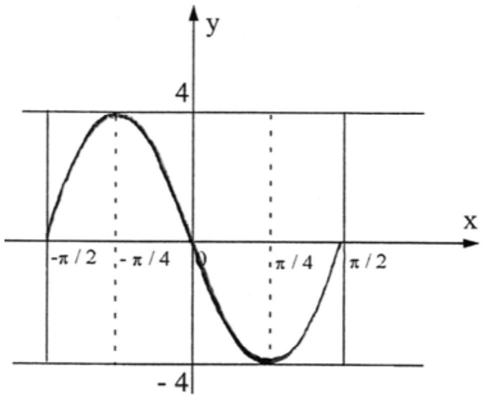
Donde la amplitud del intervalo es π (período).
Dibujamos las rectas $y=4$, $y=-4$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$
Se divide el rectángulo en cuatro rectángulos congruentes.



Los ceros en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$4\,\text{sen}\,(2x+\pi)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+\pi=0 \Rightarrow & x=-\frac{\pi}{2} \\ 2x+\pi=\pi \Rightarrow & x=0 \\ 2x+\pi=2\pi \Rightarrow & x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

El gráfico es:



Ejercicio:

En forma análoga a los ejemplos anteriores grafique:

a. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=\cos(2x)$
b. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=2\cos(2x+\pi)$
c. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=\text{sen}\,(\pi-x)$

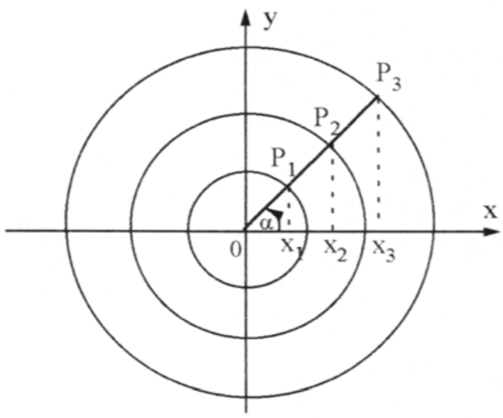
Continuamos definiendo las razones numéricas:

Tangente:

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{\text{ordenada de } P(x,y)}{\text{abscisa de } P(x,y)}$$

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{y}{x},\quad x\neq 0$$

$P_1(x_1,y_1)$
$P_2(x_2,y_2)$
$P_3(x_3,y_3)$



En el gráfico, por semejanza de triángulos tenemos:

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}\quad \forall x_j\neq 0\quad (j=1,2,3)$$

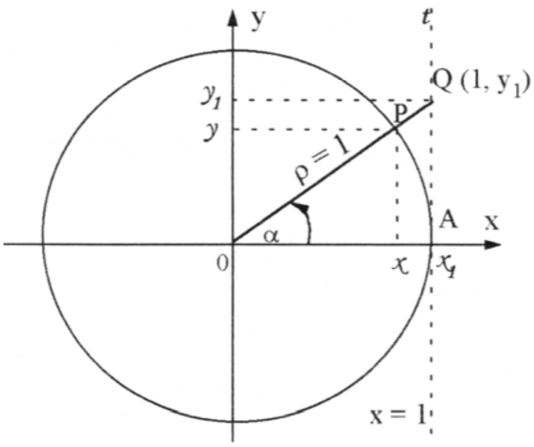
El número $\operatorname{tg}\alpha$ depende sólo de x, no de la medida del radio que se considere.

Signo de la tangente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, y \neq 0$$

Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (α pertenece al cuadrante I : $x > 0 \wedge y > 0$) entonces $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (α pertenece al cuadrante II : $x < 0 \wedge y > 0$) entonces $\operatorname{tg}\alpha < 0$.
Si $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ (α pertenece al cuadrante III : $x < 0 \wedge y < 0$) entonces $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
Si $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ (α pertenece al cuadrante IV : $x > 0 \wedge y < 0$) entonces $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

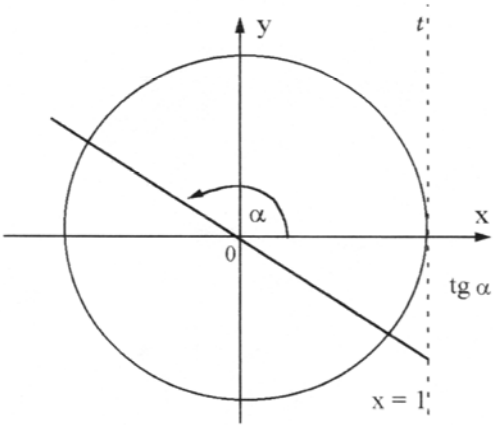
Considerando la circunferencia trigonométrica:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{1} = y_1$$

$$\text{pues } x_1 = 1$$

$\operatorname{tg}\alpha$ es el valor de la ordenada del punto perteneciente al lado móvil de α, que tiene abscisa 1.



$$\alpha = 0 \Rightarrow P(1,0) \Rightarrow \operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P(0,1) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}: \text{ no existe}$$

$$\alpha = \pi \Rightarrow P(-1,0) \Rightarrow \operatorname{tg} \pi = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow P(0,-1) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi: \text{ no existe}$$

$$\alpha = 2\pi \Rightarrow P(1,0) \Rightarrow \operatorname{tg} 2\pi = \frac{0}{1} = 0$$

El período es π.

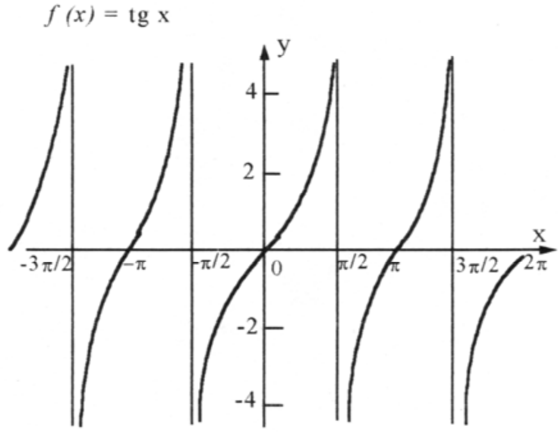
$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$, en general, $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$ con $k \in \mathbb{Z}$

OBSERVACIÓN:

No existe $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ ni $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}, \ldots$; es decir no existe $\operatorname{tg}\alpha$ para $\alpha = \frac{(2k+1)}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ con $k \in \mathbb{Z}$

Consideremos la función

$f(x) = \operatorname{tg} x$



$$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$D_f = \mathbf{A} = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$I_f = \mathbb{R}$$

- Es periódica.
- No es biyectiva.
- Ceros de *f*.

  $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 0 + \pi, x = 0 - \pi, \ldots$

  En general: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

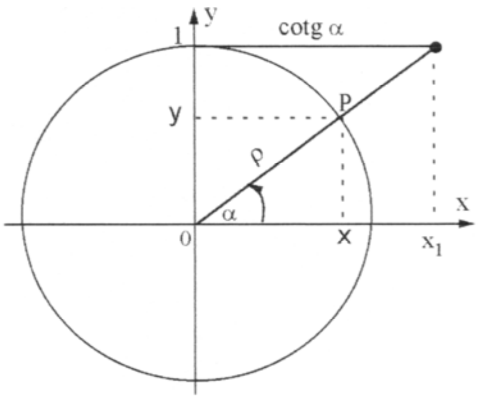
- Tiene asíntotas verticales, las rectas de ecuaciones:

$$x = \frac{2k+1}{2}\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

- Es impar, $\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$, es decir, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$

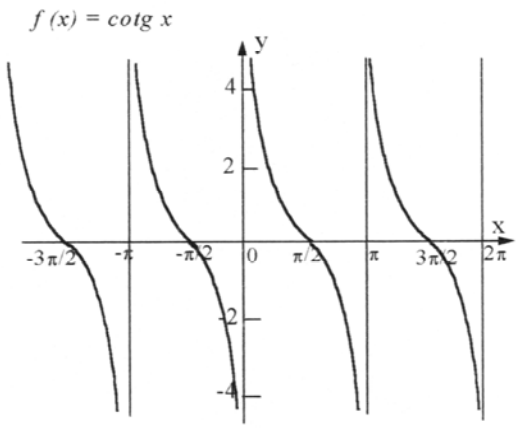
Cotangente:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{abscisa de } P(x,y)}{\text{ordenada de } P(x,y)} = \frac{x}{y} \quad , \quad y \neq 0$$



$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{1} = x_1$$

cotg α es el valor de la abscisa del punto perteneciente al lado móvil de α que tiene ordenada 1.



Ejercicio:

Observando el gráfico anterior obtenga:

a. D_f e I_f
b. Ceros y asíntotas verticales.
c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d. Paridad.

Secante:

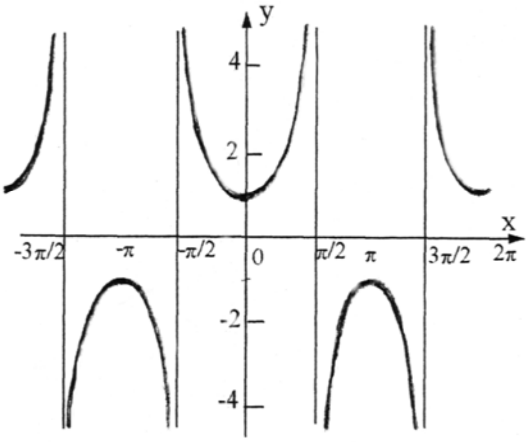
$$\sec\alpha = \frac{\text{medida del radio}}{\text{abscisa de } P(x,y)} = \frac{\rho}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

Cosecante:

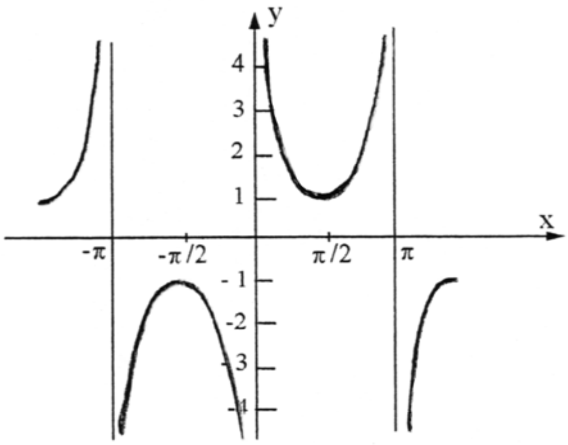
$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{medida del radio}}{\text{ordenada de } P(x,y)} = \frac{\rho}{y} \quad , \quad y \neq 0$$

Le presentamos los gráficos de las funciones correspondientes:

$f(x) = \sec x$

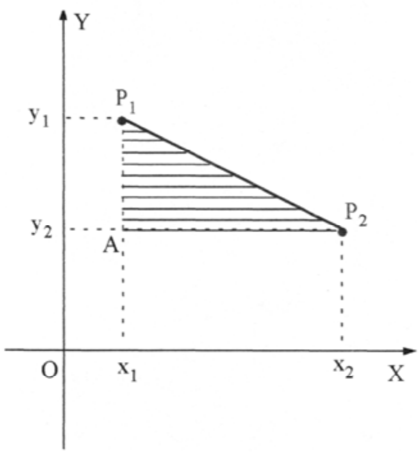


$f(x) = \operatorname{cosec} x$



Distancia entre dos puntos del plano

Sean $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera en el plano (ver figura).



En el triangulo $P_1 \overset{\Delta}{A} P_2$ rectángulo en A se verifica que:

$$d^2(P_1, P_2) = d^2(A, P_1) + d^2(A, P_2) \qquad (1)$$

Si tenemos en cuenta que:

$$d(A,P_1) = |y_1 - y_2| \qquad (2)$$
$$d(A,P_2) = |x_1 - x_2| \qquad (3)$$

y reemplazamos (2) y (3) en (1) resulta:

$$d^2(P_1,P_2) = |y_1 - y_2|^2 + |x_1 - x_2|^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Entonces:

$$\boxed{d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Ejercicio:

Para los siguientes pares de puntos calcule la distancia:

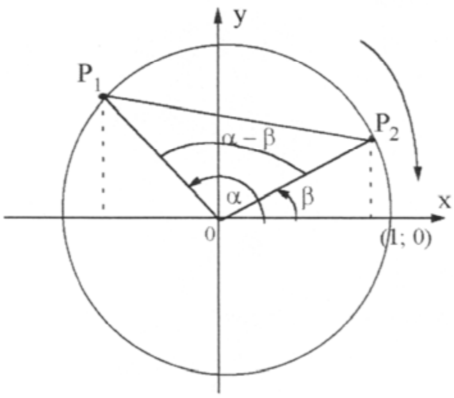
a) $P_1(-1,2), P_2(1,2)$ Rta.: 2

b) $P_1(3,-4), P_2(-2,1)$ Rta.: $5\sqrt{2}$

ADICIÓN DE ARCOS

Coseno de la diferencia entre dos ángulos:
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Consideremos dos ángulos α y β en su posición normal (tengamos en cuenta que sólo importa el lado terminal, o sea que simultáneamente estamos considerando a los múltiplos enteros de 2π) referidos a la circunferencia trigonométrica.



Los puntos P_1 y P_2 pertenecen a la circunferencia y a los lados terminales de α y β, tal que tienen por coordenadas:

$$P_1(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$
$$P_2(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

Si calculamos $d^2(P_1,P_2)$

$$d^2(P_1,P_2) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta$$
$$= (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta) - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$d^2(P_1,P_2) = 2 - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta \qquad (1)$$

Supongamos ahora que la circunferencia gira sobre sí misma, con sentido horario, de forma que el punto P_2 coincida con el (1,0), el ángulo $(\alpha-\beta)$ quede en posición normal y que las coordenadas del punto P_1 sean:

$$P_1(\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Para esta nueva posición resulta que $d^2(P_1,P_2)$:

$$d^2(P_1,P_2) = (1-\cos(\alpha-\beta))^2 + (0-\operatorname{sen}(\alpha-\beta))^2$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$
$$= 1 + (\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta)) - 2\cos(\alpha-\beta)$$
$$d^2(P_1,P_2) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta) \qquad (2)$$

Como la distancia permanece invariante al efectuarse la rotación, podemos igualar (1) y (2) y obtener:

$$2 - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

en donde si cancelamos términos y multiplicamos por (-1) resulta:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (3)$$

Coseno de la suma de dos ángulos: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \qquad \text{por (3)}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Seno de la suma de dos ángulos: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) =$$
$$= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) =$$
$$= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Seno de la diferencia de dos ángulos:
$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cos\alpha$

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha - \beta) &= \text{sen}\,(\alpha + (-\beta)) = \\ &= \text{sen}\,\alpha \cos(-\beta) + \text{sen}\,(-\beta)\cos\alpha \\ &= \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cos\alpha \end{aligned}$$

Ejercicio:

Calcule, sin usar máquina de calcular, y en cada caso como se indica los valores numéricos de:

a) $\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45° + 30°)$
b) $\cos 120° = \cos(90° + 30°)$
c) $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$
d) $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left[\pi - \frac{2}{3}\pi\right]$

Ejercicio:

Calcule el valor numérico de: $\cos(\alpha + \beta)$ si $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\beta = -\frac{8}{17}$

Rta.: $-\frac{77}{85}$ $(0 < \alpha < 90°\ ,\ 90° < \beta < 180°)$

Ejercicio:

Utilice los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30º, 45º, 60º y de sus múltiplos enteros para calcular:

$a)\cos 15°$ $b)\cos 105°$ $c)\cos 90°$
$d)\cos 165°$ $e)\cos 195°$ $f)\cos 255°$

Ejercicio:

Demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para todo ángulo α.

a. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
b. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
c. $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
d. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$
e. $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
f. $\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
g. $\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

Tangente de la suma entre dos ángulos:
$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \qquad (\cos(\alpha + \beta) \neq 0)$$

$$= \frac{\text{sen}\,\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$ se obtiene:

$$=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \qquad (\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0)$$

simplificando

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}$$

Ejercicio:

Utilizando los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30º, 45º, 60º y de sus múltiplos enteros calcule, si existen, los valores exactos de:

a) $\operatorname{tg}15°$ *b)* $\operatorname{tg}105°$ *c)* $\operatorname{tg}90°$

d) $\operatorname{tg}165°$ *e)* $\operatorname{tg}195°$ *f)* $\operatorname{tg}255°$

Ejercicio:

Demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para todo ángulo α.

a. $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
b. $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$
c. $\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi-\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha$

Ejercicio:

Demuestre que:

a. $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
b. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$
c. $\cos 2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha$
d. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
e. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (|\operatorname{tg}\alpha|\neq 1)$

Sugerencia: tenga en cuenta que $2\alpha=\alpha+\alpha$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Sea la función proposicional, en la variable x($x\in\mathbb{R}$)

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}=1-\cos x$$

para la cual el conjunto de existencia de x es:

$$\begin{aligned}E&=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 1+\cos x\neq 0\}\\&=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \cos x\neq -1\}\\&=\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Si después de haber encontrado el conjunto E operamos resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} - (1-\cos x) = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - (1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - (1-\cos^2 x)}{1+\cos x} = 0$$

Como el denominador es distinto de cero, es:

$$\operatorname{sen}^2 x - (1-\cos^2 x) = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

que es una ecuación que se verifica para todo $x \in E$.

Definición:
Se denomina **identidad** a toda función proposicional definida en una o más variables, restringida al conjunto de existencia (E) si se verifica que el conjunto solución (S) coincide con el conjunto existencia (E)

$$S = E$$

Como en las expresiones que estamos estudiando las variables están afectadas por funciones trigonométricas llamaremos a estas identidades:
identidades trigonométricas.

Método para demostrar una identidad

1º) Establecer el conjunto (E) de existencia de la variable.
Si x es la variable, entonces: $E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \text{ define bien cada término de la identidad dada}\}$
2º) Efectuar operaciones que transforman a la identidad en otra equivalente. Está permitido:

- Sumar a ambos miembros una expresión (si está definida en E)
- Multiplicar a ambos miembros por una expresión (definida en E y no nula en E)
- Reemplazar cualquier término por otra expresión igual (que esté definida en E)

FÓRMULAS DE TRANSFORMACIÓN EN PRODUCTO

Las siguientes fórmulas son útiles para modificar ciertas expresiones trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2 \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Si hacemos

$$\alpha+\beta = p$$
$$\alpha-\beta = q$$

Obtenemos $\alpha = \dfrac{p+q}{2}$ $\beta = \dfrac{p-q}{2}$

Por lo tanto

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen} \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\ &\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \text{ sen} \tfrac{p-q}{2} \\ &\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\ &\cos p - \cos q = 2 \text{ sen} \tfrac{p+q}{2} \text{ sen} \tfrac{p-q}{2} \end{aligned}}$$

Ejemplo:

Exprese el producto sen $4x$ cos $3x$ como una suma.

Hacemos

$$\frac{p+q}{2} = 4x \Rightarrow p+q = 8x$$

$$\frac{p-q}{2} = 3x \Rightarrow p-q = 6x$$

Por lo tanto:

$$p = 7x \quad \text{y} \quad q = x$$

y

$$2\text{sen } 4x \cos 3x = \text{sen } 7x + \text{sen} x$$

$$\boxed{\text{sen } 4x \cos 3x = \tfrac{1}{2}(\text{sen } 7x + \text{sen} x)}$$

Ejercicio:

Transformar en una suma:

a) 2sen $9x$ cos $3x$ — Rta.: sen $12x$ + sen $6x$
b) sen $7t$ sen $3t$ — Rta.: $\frac{1}{2}$ cos $4t$ - $\frac{1}{2}$ cos $10t$
c) cos $6a$ cos $(-4a)$ — Rta.: $\frac{1}{2}$ cos $10a$ + $\frac{1}{2}$ cos $2a$

Ejemplo:

Exprese como producto: sen $2x$ – sen x

$$\text{sen } 2x - \text{sen } x = 2\cos\frac{2x+x}{2}\text{sen}\frac{2x-x}{2}$$

$$= 2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\text{sen}\frac{x}{2}$$

Ejercicio:

Exprese como producto:

a. cos$5x$ – cos$3x$ — Rta.: -2sen $4x$ sen x
b. sen $3t$ – sen $7t$ — Rta.: -2cos $5t$ sen $2t$
c. cos x + cos $2x$ — Rta.: $2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\frac{1}{2}x$

Ejercicio:

Verifique si las siguientes expresiones son identidades:

a) $\dfrac{\text{sen}\,4t + \text{sen}\,6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \text{cotg}\, t$

b) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \text{tg}\,2\alpha$

c) $\dfrac{\text{sen}\,u + \text{sen}\,v}{\cos u - \cos v} = \text{tg}\,\dfrac{u+v}{2}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Definición:
Se denomina ecuación a toda función proposicional definida en una o más variables, restringida al conjunto de existencia (E) si se verifica que el conjunto solución (S) está incluido en sentido estricto en el conjunto de existencia (E) $S \subset E$
Como en las ecuaciones que estamos estudiando las variables están afectadas por funciones trigonométricas llamamos a estas ecuaciones:
ecuaciones trigonometricas.

Ejemplo:

Halle el conjunto solución, para $0 \le x \le 2\pi$ de:

$$\text{sen}2x = 2\cos^2 x$$
$$2\text{sen}x\cos x = 2\cos^2 x$$
$$\text{sen}x\cos x = \cos^2 x$$
$$\cos x(\text{sen}x - \cos x) = 0$$

Entonces:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \tfrac{\pi}{2}, x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$\text{sen}x - \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \cos x \Rightarrow x_3 = \tfrac{\pi}{4}, x_4 = \tfrac{5}{4}\pi$$

Luego

$$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right\}$$

(Analice y describa cada paso en la resolución).

NO SE OLVIDE DE VERIFICAR!!!

Ejemplo:

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

$$2\text{sen}^2 x = 3\cos x$$
$$2(1-\cos^2 x) = 3\cos x \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x = 3\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Luego:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z \\ x_2 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \ k \in Z \end{cases}$$

$$\cos x = -2 \quad \text{(falso)}$$

Así:

$$S = \{x_1, x_2\}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

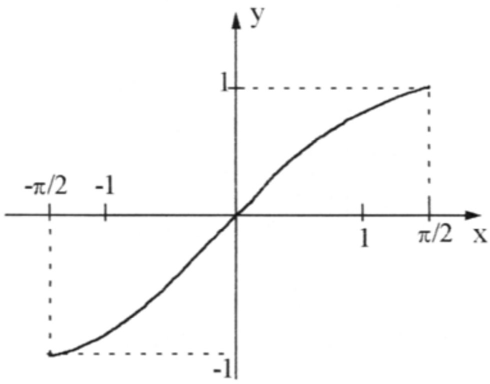
Hemos visto que la función:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, f(x) = \text{sen } x$ no es biyectiva, por lo tanto no existe su función inversa.

Si restringimos el dominio y la imagen hasta obtener una función biyectiva, tendremos:

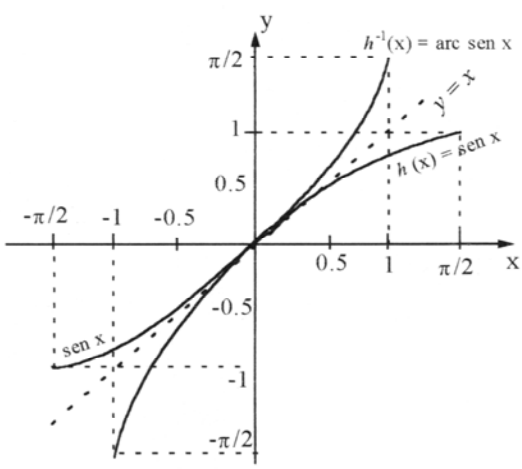
$$h \ : \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \, / \, h(x) = \text{sen } x$$

Su gráfico es:



La función h es biyectiva, por lo tanto admite inversa $\left(h^{-1}\right)$ cuyo nombre es **Arco seno**.

$$h^{-1} \ : \ [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / \, h^{-1}(x) = \text{arc sen } x$$



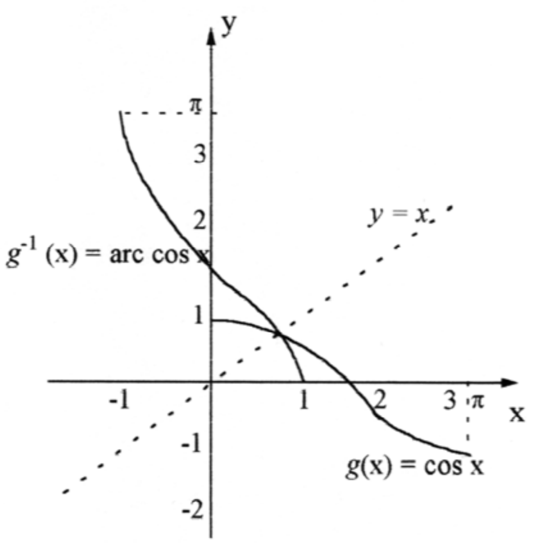
En el mismo sistema de coordenadas se graficó h y h^{-1}

Arco coseno

Sea: $g:[0,\pi]\to[-1,1]\,/\,g(x)=\cos x$

que es biyectiva.

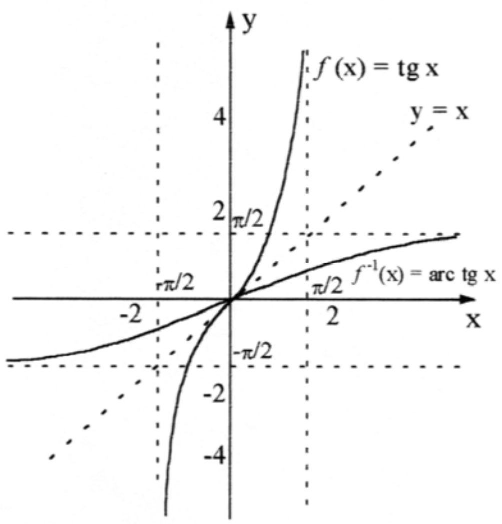
Su inversa es: $g^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]\,/\,g^{-1}(x)=arc\cos x$



Arco tangente

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=\text{tg }x$$

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)/\,f^{-1}(x)=\text{arc tg }x$$



Ejercicio:

Encuentre el valor exacto, en el sistema sexagesimal, (sin usar calculadora)

a. arc sen$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (el exponente (-1) es una asociación que su máquina hace con f^{-1})

b. arc sen$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

d. arc sen$\left(-\frac{1}{2}\right)$

e. $\text{tg}^{-1}(0)$

Ejercicio:
Utilice su calculadora, en radianes, para hallar:

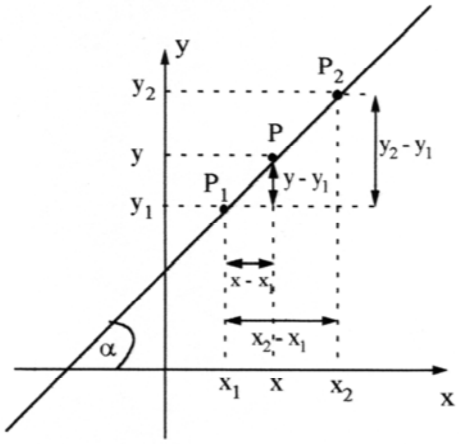
$a)$ $\text{sen}^{-1}(-0.21823)$

$b)$ $\cos^{-1}(0.30582)$

$c)$ $\text{tg}^{-1}(0.20660)$

PENDIENTE DE UNA RECTA

"Dos puntos determinan una recta a la que pertenecen" Euclídes.



Sean $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano tal que $x_1 \neq x_2$ y sea $P(x, y)$ un punto genérico del plano.
A la igualdad de razones

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad (1)$$

La llamamos **ecuación de la recta determinada por dos puntos**. Se deja a cargo del lector que encuentre una justificación geométrica a (1).
Al primer miembro de (1) se lo denomina pendiente, generalmente:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Si sustituimos (2) en (1)

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

o bien:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

obtenemos la ecuación de la recta determinada por la pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1).

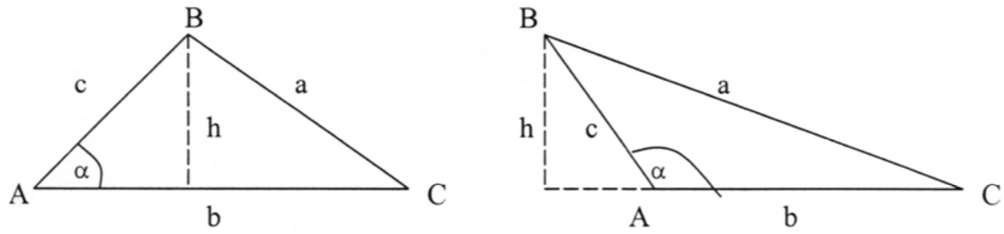
Al ángulo α se lo denomina inclinación de la recta y $0 \leq \alpha < \pi$.

APLICACIONES DE TRIGONOMETRÍA

Finalizamos esta unidad considerando algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas para triángulos no rectángulos (oblicuángulos).

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Sea el triángulo ABC, queremos determinar su área, si conocemos dos lados y el ángulo comprendido por ellos.



El área del triángulo ABC es $A = \frac{1}{2} \mathrm{b\,h}$

Si α es un ángulo agudo, entonces $h = c$ sen α

Si α es un ángulo obtuso, entonces $h = c$ sen$(\pi - \alpha)$

Como sen$(\pi - \alpha)$ = sen α, resulta $h = c$ sen α

Luego $\boxed{A = \frac{1}{2} \mathrm{b\,c\,sen}\alpha}$

Ejemplo:

Determine el área de un triángulo cuyos lados miden 12 cm y 8 cm y forman un ángulo de $\frac{3}{4}\pi$.

$$A = \frac{1}{2} 12.8 \,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

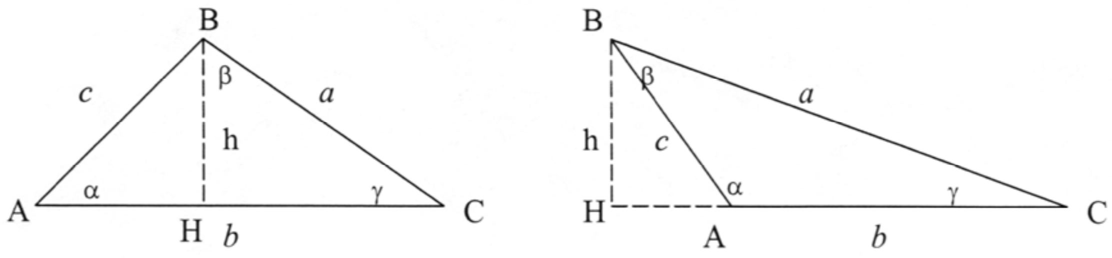
$$A = 24\sqrt{2}\ cm^2$$

TEOREMA DEL SENO

Sea un triángulo ABC, cuyos ángulos internos son α, β y γ, y los lados opuestos correspondientes son a, b y c.

Probaremos que cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{b}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}\gamma}$$



En el triángulo *ABC*, trazamos la altura *h* desde el vértice *B*. Los triángulos *BHC* y *CHA* son rectángulos.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{c} \\ \operatorname{sen}\gamma = \dfrac{h}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow a.\operatorname{sen}\gamma = c.\operatorname{sen}\alpha$$

de donde:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Si trazáramos la altura desde el vértice C obtendríamos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

Por lo tanto resulta:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

Ejercicio:

En el triángulo *ABC* determine los ángulos β y γ y el lado *c*, si se sabe que:

$\alpha = 45°$, $a = 7\sqrt{2}\ cm$ y $b = 7\ cm$

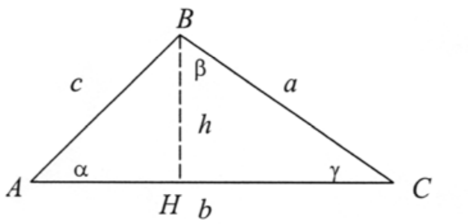
Rta.: $\beta = 30°$, $\gamma = 105°$, $c = 13{,}5\,cm$

TEOREMA DEL COSENO

Sea un triángulo *ABC*, cuyos ángulos internos son: α , β y γ, los lados opuestos correspondientes son *a* , *b* y *c*.

Probaremos que se cumplen las siguientes relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$



En el triángulo *ABC*, trazamos la altura *h* desde el vértice *B*.

$$\overline{AH} = c\cos\alpha$$

$$\overline{HC} = b - \overline{AH} = b - c\cos\alpha$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *BHC*, resulta:

$$a^2 = h^2 + \overline{HC}^2$$

$$a^2 = h^2 + (b - c\ \cos\alpha)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2\ b\ c\ \cos\alpha + c^2\cos^2\alpha \qquad (1)$$

Aplicando teorema de Pitágoras en el triángulo *AHB*, resulta:

$$c^2 = h^2 + \overline{AH}^2$$

$$c^2 = h^2 + c^2\cos^2\alpha \qquad (2)$$

Restando miembro a miembro las igualdades (1) y (2) se obtiene:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2\ b\ c\ \cos\alpha$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}$$

Se han considerado los ángulos α y γ agudos. Se puede repetir el razonamiento para los siguientes casos:

- $\alpha < 90°\ ,\ \beta > 90°$
- $\alpha < 90°\ ,\ \beta = 90°$
- $\alpha = 90°$
- $\alpha > 90°$

Y se obtiene, en todos ellos, la misma fórmula.

Análogamente se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma}$$

Ejercicio:

Los lados de un paralelogramo miden 6 cm y 8 cm y forman un ángulo de 32°. Determine cuánto miden sus diagonales.

Rta.: 4,31 cm y 13,47 cm

UTN – FRBA **MODULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 6

Trigonometría

1) Complete la siguiente tabla:

$sen\ t$	$\cos t$	$sen(t+\pi)$	$\cos(t+\pi)$	$sen(\pi - t)$	$sen(2\pi - t)$	Menor valor positivo de t
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$					
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$-\frac{1}{2}$			$-\frac{\sqrt{3}}{2}$			
-1						
			$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$	
	0				-1	

2) Calcule sin utilizar calculadora:

2.1) $sen\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 2.3) $tg\ (arctg\ 3)$ 2.5) $arcsen$ (arccos 1)

2.2) $\cos\left(arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 2.4) sec ($arctg$ (-1))

2.1) $Rta = \pm 1$

2.3) $Rta = 3\ en -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

2.2) $Rta = -\frac{\sqrt{3}}{2} en\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

2.4) $Rta = \sqrt{2}\ en -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

2.5) $Rta = 0\ en\, 0 < x < \pi$

3) Para cada una de las igualdades propuestas determine el conjunto de existencia y establezca si es una identidad.

3.1) $\frac{senx}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{senx}$

3.3) $\frac{1-\cos(2\alpha)+sen(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+sen(2\alpha)} = tg\ \alpha$

3.2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

3.4) $\frac{tg(\alpha+\beta)-tg\beta}{1+tg(\alpha+\beta).tg\beta} = tg\ \alpha$

3.5) $tg(arcsenx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones en $[0,2\pi)$

4.1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$ $\quad S=\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$

4.2) $tg^2 x-1=0$ $\quad S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

4.3) $(2\cos x+1)\left(2senx-\sqrt{2}\right)=0$ $\quad S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{4\pi}{3}\right\}$

4.4) $senx+\cos x=1$ $\quad S=\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\}$

4.5) $1-\cos x=\sqrt{3}\ senx$ $\quad S=\left\{0,\frac{2\pi}{3}\right\}$

4.6) $\cos(2x)-\cos x=0$ $\quad S=\left\{0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

4.7) $tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2$ $\quad S=\{0,\pi\}$

4.8) $sen(2x)+\cos(2x)+sen^2x=\cos^2 x$ $\quad S=\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$

4.9) $sen\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=1$ $\quad S=\{0,\pi\}$

4.10) $\cos^8 x-sen^8x=0$ $\quad S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

5) 5.1) Encuentre la ecuación de la recta con ángulo de inclinación 120° que pasa por el punto (1,2).

Rta.: $y-2=-\sqrt{3}(x-1)$

5.2) Determine el ángulo de inclinación de la recta $5x + 2y = 6$

Rta.: $111°\,48'$

Problemas:

1) En el triángulo $M\hat{N}P$ (rectángulo en N) el lado $\overline{MP}$ es cinco veces mayor que el $\overline{MN}$. Calcule el ángulo $\hat{M}$.

Rta.: $78°27'46''$

2) El hilo de un barrilete se encuentra tenso y forma un ángulo de $54°\,20'$ con la horizontal. Encuentre la altura del barrilete con respecto al suelo si el hilo mide 85 m y el operador sostiene al mismo a 1,5 m del suelo.

Rta.: 70,6 m

3) Un ingeniero desea construir una rampa de 50 m de largo que se levanta 5 m del suelo. Calcule el ángulo que debe formar la rampa con la horizontal.

Rta.: $5°44'21''$

4) Un paralelepípedo recto-rectángulo tiene 8cm x 6cm x 4cm. Calcule el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal de la caja (ambas diagonales parten del mismo vértice).

Rta.: $\cong 21°48'$

5) La intensidad I de la corriente (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alternada satisface: $I = 30sen\,(100\pi\, t)$ donde t es el tiempo medido en segundos.

5.1) ¿Cuál es el período? Rta.: $\frac{1}{50}\,seg$

5.2) ¿Cuántos ciclos (períodos) hay en un segundo? Rta.: 50

5.3) ¿Cuál es la máxima intensidad en la corriente? Rta.: 30 amperes

6) Un objeto viaja por una vía circular, centrada en el origen, con una velocidad angular constante. La coordenada y del objeto en función del tiempo (t en segundos) está dada por:

$$y = 2\cos\left(\pi\, t - \frac{\pi}{12}\right)$$

¿En que tiempo t el objeto cruza el eje x? ¿Existe un solo t?

Rta.: $t = \frac{7}{12} + k,\ k \in Z_0^+$

7) Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 50 Hz (Hertz) dada por:

$$i(t) = 30sen\left[100\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)\right]$$

donde $i(t)$ es la corriente medida en amperes, en t segundos. Halle el valor positivo más pequeño de t para que la corriente sea de 15 amperes.

Rta.: $\cong$ 0,196 seg

8) Desde dos departamentos ubicados en el séptimo y cuarto piso (distantes 9m), se observa que los ángulos de depresión de un objeto situado en la acera son de 60° y 45° respectivamente. Calcule la distancia entre la base del edificio y el objeto, y la medida de la altura hasta el punto de observación en el séptimo piso.

Rta.: $d = \frac{9}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$; $h = \frac{9}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$

9) La sombra de una persona de 1,80 m de alto, producida por un foco de alumbrado es inicialmente de 3,60 m. Después, la persona se para justo en el lugar donde terminaba su sombra, comprobando que ésta mide ahora 4m. ¿A qué altura esta el foco y a que distancia se encontraba inicialmente la persona del pie del foco?

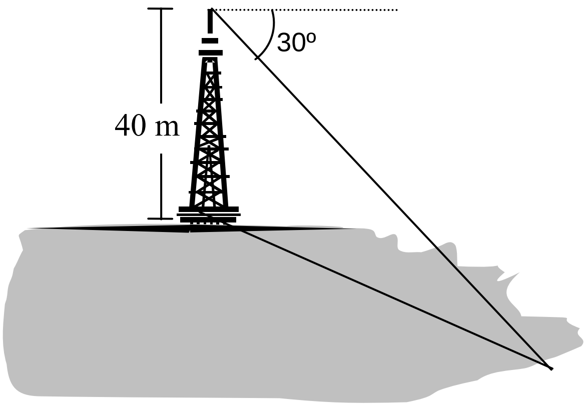
Rta.: altura: 18 m, distancia: 32,4 m

10) Desde la azotea de un edificio y desde una ventana situada 9 m debajo, se observa que los ángulos de depresión de un objeto situado en el piso son 45° y 30° respectivamente. Calcule la distancia entre la base del edificio y el objeto, y la altura del edificio.

Rta.: $d = h = \frac{9}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$

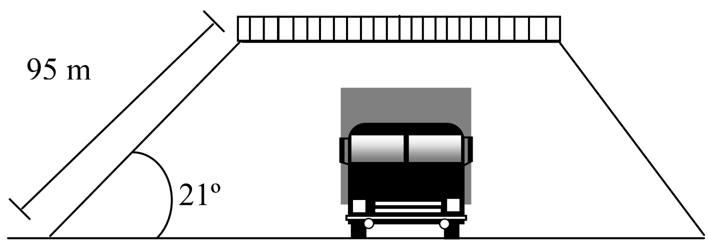
11) Una torre de 40 m de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30°. ¿Cuál es el ancho del lago?

Rta.: 69,28 m



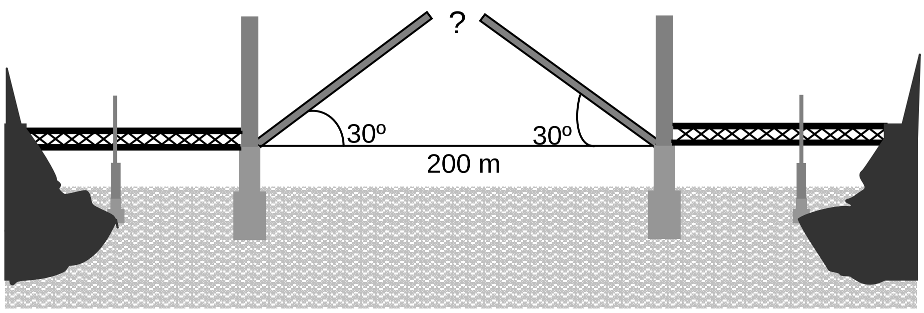
12) El ángulo de elevación de una rampa de 9,5 m que lleva a un puente sobre una avenida es de 21°. Determine la altura que puede tener un camión para pasar por debajo del puente.

Rta.: 3,4m



13) Un puente sobre un río tiene 200 m de largo. Las dos secciones del puente rotan hacia arriba formando un ángulo de 30° para dar paso a los barcos. Un motociclista quiere saltar de una sección a otra, él sabe que puede dar saltos hasta de 20 m, ¿puede el motociclista saltar de un lado a otro, sin peligro?

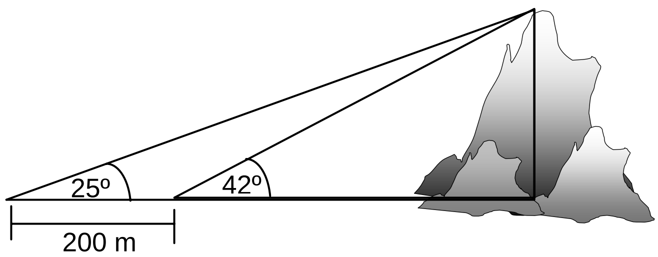
Rta.: No, la separación entre las dos secciones es de 26,79m



14) Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide 25°. Cuando él se encuentra en un punto a 200 m más cerca de la

base de la montaña, el ángulo de elevación es de 42°. ¿Cuál es la altura de la montaña? (Suponga que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta).

Rta.: 193,44m



15) Una escalera se apoya en una pared vertical, formando un ángulo θ con la horizontal y su punto más alto está a $4\sqrt{3}$ m de altura respecto al suelo. Cuando el ángulo disminuye 15° el punto más alto de la escalera queda a $2\sqrt{2}$ metros de altura. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

Rta.: aprox. 16,5m

16) Determine el área de un triángulo equilátero con lado de longitud 10 cm.

Rta.: $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

17) Un triángulo tiene un área de 16 cm^2. Si dos de sus lados miden 5cm y 7cm, respectivamente. Determine el ángulo que forman estos dos lados.

Rta.: $66°\,6'$ o $113°53'$

18) Determine el área de un triángulo cuya base mide 16 m y los ángulos adyacentes a la misma son de 65° y 32°, respectivamente.

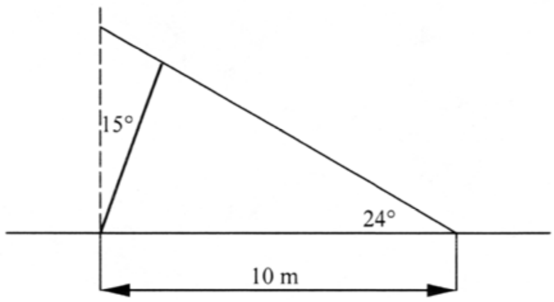
Rta.: 62 cm^2

19) Dos observadores colocados a 110 m de separación en A y en B, en la orilla de un río están mirando una torre situada en la orilla opuesta en el punto C. Midieron los ángulos CAB y CBA fueron de 43° y 57°, respectivamente. ¿A qué distancia esta el primer observador de la torre?

Rta.: 93,7m

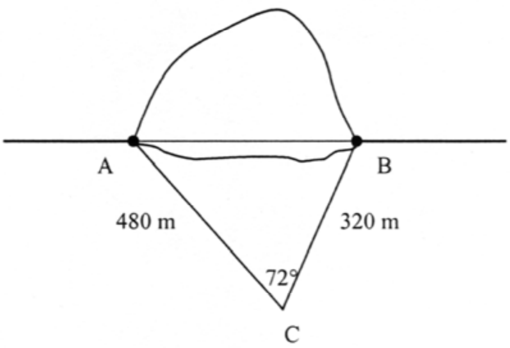
20) Un poste telegráfico está inclinado con un ángulo de 15° de la vertical del sol. El poste produce una sombra de 10 metros de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de 24°. Encuentre la longitud del poste.

Rta.: 4,1m



21) Los puntos A y B son los extremos de un túnel que pasará debajo de una montaña. Desde un punto C, lejos de la montaña, un topógrafo puede ver esos puntos y determinar que AC mide 480 m, CB mide 320 m y el ángulo C mide 72°. ¿Cuál es la longitud del túnel?

Rta.: 487,72m



22) Los lados de un triángulo miden 5 cm, 8 cm y 12 cm. Determine los ángulos del triángulo.

Rta.: 18°, 29° y 133°

23) Un trozo de alambre de 60 cm de largo es doblado en forma de triángulo. Si dos de sus lados tienen 24 cm y 20 cm de longitud, determine el mayor ángulo del triángulo.

Rta.: $82° \, 50'$

<u>Ejercicios integradores</u>:

1) Demuestre que si $x = a\cos\alpha$ y $y = b\, sen\,\alpha$, entonces $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

2) Demuestre que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes desigualdades:

2.1) $4 + 4\operatorname{sen} x - \cos^2 x \geq 0$

2.2) $\operatorname{sen}^2 x + 4\cos x - 4 \leq 0$

3) Halle el valor de k para que la recta de ecuación $4x + ky = 5$ tenga un ángulo de inclinación de $\frac{3\pi}{4}$. Grafique para el valor de k hallado.

Rta.: $k = 4$

4) 4.1) Si considera

$$\cos\beta = \frac{1+2k}{6k-1} \qquad \text{y} \qquad \sec\beta = \frac{2}{4k-5}$$

¿Cuál es el valor de k para que se verifiquen las igualdades anteriores sabiendo que β pertenece al primer cuadrante?

Rta.: $k = \frac{3}{2}$

4.2) Encuentre los valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que: $0 \le \gamma < 2\pi$, que verifiquen:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)}{-\operatorname{tg}(\pi - \gamma)} = \sqrt{3}\cos\gamma$$

Rta.: $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right\}$

4.3) Calcule los valores de β tales que $0 \le \beta < 2\pi$, que verifiquen:

$$3\,tg(\beta - \pi) = \sqrt{3}\sec\beta\, sen\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)$$

Rta.: $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right\}$

5) Sean las funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$
$$g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = \cos x - \sqrt{3}sen\, x$$

Determine: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$

Rta.: $\left\{1, \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right\}$

6) Si $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}$ son respectivamente las ecuaciones de la asíntota vertical y de la asíntota horizontal al gráfico representativo de $f : D_f \to I_f \,/\, f(x) = \frac{mx+5}{n\,x-1}$.

Calcule $\left(f^{-1} o\, g\right)(\pi)$ si $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \,/\, g(x) = sen\, x$

Rta.: $\frac{5}{3}$

7) Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$2^{1-\cos x} = \sqrt{2}, \qquad \forall x \in [0, 2\pi)$$

Rta.: $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$

8) Dadas las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3\,sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \,/\, g(x) = 3^{x}$$

$$h : D_h \rightarrow I_h \,/\, h(x) = \frac{3 - x}{2 + x}$$

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, t(x) = x^2 - x$$

Determine:

8.1) las raíces reales de la ecuación $g(x) + \dfrac{3}{g(x)} - 4 = 0$ Rta.: $x = 1,\ x = 0$

8.2) la amplitud y el período de f Rta.: 3 y π

8.3) $h^{-1}(0)$ Rta.: 3

8.4) $(tof)(-\pi)$ (dar el valor exacto) Rta.: $-\dfrac{3}{2}\sqrt{3} + \dfrac{27}{4}$

9) Si se sabe que $\alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2},\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ tg\,\alpha = \sqrt{2}$ y $sen\,\beta = \dfrac{1}{3}$, calcule el valor exacto de: $sen(2\alpha + \beta)$.

Rta.: $\dfrac{7}{9}$

10) Sean las funciones

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = 9^{\log_4 x} + 27$$

$$g : [0,2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \,/\, g(x) = sen\,(2x) - \cos x$$

Determine:

$$\left\{x \in R \,/\, f(x) = 12.3^{\log_4 x}\right\} \cup \left\{x \in [0,2\pi) / \, g(x) = 0\right\}$$

Rta.: $\left\{4, 16, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

FÓRMULAS DE LA TRIGONOMETRÍA

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha \neq 0$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \tfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad \operatorname{sen}\alpha \neq 0$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \tfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad \operatorname{sen}\alpha \neq 0$$

Identidades para sumas y diferencias

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad |\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta| \neq 1$$

Identidades para el ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad |\operatorname{tg}\alpha| \neq 1$$

Identidades para productos, sumas y diferencias de seno y coseno

$$\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\,sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

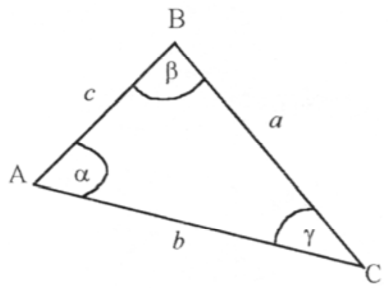
Fórmulas de reducción

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot g\,\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Teoremas del seno y del coseno

Sea $A\overset{\Delta}{B}C$



Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Teorema del coseno:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

UNIDAD 7

Magnitudes escalares y vectoriales

Vectores

- Operaciones
- Producto escalar
- Ángulo entre vectores

Aplicaciones matemáticas a la Estática

Fuerzas

- Composición de fuerzas
- Sistemas de fuerzas

Aplicaciones matemáticas a la Cinemática

- Posiciones e instantes
- Desplazamiento
- Velocidad y aceleración
- Cinemática de algunos movimientos

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

La *ingeniería* es el arte de aplicar los conocimientos científicos a la técnica industrial en todas sus manifestaciones y posibilidades. Una de las ciencias que más le ha aportado, es la *física*. Esta ciencia es una rama del saber dedicada al estudio de los fenómenos ocurridos en la naturaleza.

Su *objeto* es enunciar las leyes generales que los gobiernan y permitan relacionarlos, con el fin de predecir resultados de experiencias futuras.

La física, como toda ciencia natural, adopta como método de estudio al método científico, el mismo conduce a un proceso de experimentación y formulación de hipótesis, que mediante su comprobación experimental, permite enunciar leyes generales, o ante su no comprobación reformular hipótesis y enunciar total o parcialmente nuevas leyes. Este proceso es continuo y se desarrolla al compás del crecimiento de los conocimientos y de los adelantos tecnológicos.

Un ejemplo son las leyes de la *mecánica clásica*. A medida que los instrumentos de medición se hicieron más sofisticados y permitieron el diseño de nuevos experimentos en que las velocidades eran cercanas a la velocidad de la luz, las mediciones arrojaban resultados distintos a los obtenidos por dichas leyes. Se plantearon nuevas hipótesis y las nuevas conclusiones dieron origen a las leyes de la mecánica relativista que incluyeron a las anteriores como un caso particular de partículas a menores velocidades.

Las ciencias naturales más avanzadas son aquellas en las cuales las observaciones cualitativas de los hechos pueden ser cuantificadas, expresándose en valores numéricos.

En el ámbito de la física, luego de observar un fenómeno, se trata de hallar propiedades que influyan en el mismo, susceptibles de ser cuantificadas y relacionables entre sí, induciendo leyes las cuales se tratan como expresiones matemáticas, llamadas fórmulas.

Estas propiedades se presentan por símbolos y en las fórmulas pueden tomas distintos valores, por lo cual se las conoce como variables matemáticas y expresan en este lenguaje las leyes que describen el fenómeno analizado.

La belleza y el tiempo transcurrido son dos propiedades, pero solamente el tiempo transcurrido es una propiedad física susceptible de ser medida, mientras que la belleza es una propiedad cualitativa opinable según el observador. Otros ejemplos de propiedades físicas son: la longitud de una barra, el volumen de un recipiente, la masa de un cuerpo, etc.

La propiedad cuantificada constituye una *magnitud* lograda mediante la utilización de un proceso denominado de medición. Este proceso implica la interacción entre el sistema objeto de estudio, el sistema de comparación definido como unidad, el instrumento de medición y el observador.

La medición impone un número real llamado *cantidad* y un símbolo que define la unidad permitiendo interpretar a la magnitud, número de veces que la unidad está contenida en la cantidad.

Existen diferentes *sistemas de unidades*, pero a partir del año 1960, el Comité Internacional de Pesas y Medidas, adoptó un Sistema Internacional de Unidades cuyas siglas son SI, el cual fue incorporado por la mayoría de los países a sus textos legales y reglamentaciones.

En el año 1972, nuestro país instituyó el Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA) y adoptó el SI. Este sistema adopta actualmente siete *unidades básicas* para magnitudes consideradas independientes.

Las unidades básicas del sistema internacional son las que aparecen en la tabla siguiente:

UNIDADES BÁSICAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)		
MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
LONGITUD	METRO	m
MASA	KILOGRAMO	kg
TIEMPO	SEGUNDO	s
INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA	AMPERE	A
TEMPERATURA	KELVIN	K
CANTIDAD DE MATERIA	MOL	mol
INTENSIDAD LUMINOSA	CANDELA	cd

UNIDADES SUPLEMENTARIAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)		
MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
ÁNGULO PLANO	RADIAN	rad
ÁNGULO SÓLIDO	ESTEREORADIAN	sr

UNIDADES DERIVADAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)				
MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO	EXPRESION EN	
			DERIVADAS SI	BÁSICAS SI
FRECUENCIA	HERTZ	Hz		s^{-1}
FUERZA	NEWTON	N		$mkgs^{-2}$
PRESIÓN	PASCAL	Pa	N/m^2	$m^{-1}kgs^{-2}$
ENERGÍA	JOULE	J	Nm	m^2kgs^{-2}
POTENCIA	WATT	W	J/s	m^2kgs^{-3}
CARGA ELÉCTRICA	COULOMB	C		sA
TENSIÓN ELÉCTRICA	VOLT	V	W/A	$m^2kgs^{-3}A^{-1}$
RESISTENCIA ELÉCTR	OHM	Ω	V/A	$m^2kgs^{-3}A^{-2}$
CONDUCTANCIA	SIEMENS	S	A/V	$m^{-2}kg^{-1}s^3A^2$
CAPACITANCIA	FARAD	F	C/V	$m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$
FLUJO MAGNETICO	WEBER	Wb	V*s	$m^2kgs^{-2}A^{-1}$
INDUCTANCIA	HENRY	H	Wb/A	$m^2kgs^{-2}A^{-2}$
INDUCCIÓN MAGNÉTICA	TESLA	T	Wb/m^2	$kgs^{-2}A^{-1}$
FLUJO LUMINOSO	LUMEN	lm		cdsr
INTENSIDAD LUMINOSA	LUX	lx	Lm/m^2	$Cdsrm^{-2}$
TEMPERATURA CELSIUS	GRADO CELSIUS	ºC		K

*Los prefijos **SI** para la formación de múltiplos y submúltiplos son los siguientes:*

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{-6}	micro	µ
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m

Unidades de longitud

km	***hm***	***dam***	***m***	***dm***	***cm***	***mm***

Unidades de Fuerza

kN	***daN***	***N***	***dN***	***mN***

Unidades de capacidad

kl	***hl***	***dal***	***l***	***dl***	***cl***	***ml***

Unidades de superficie

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Unidades de volumen

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

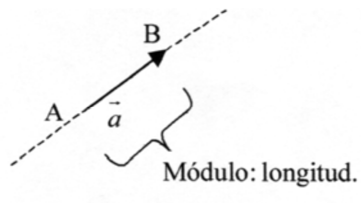
VECTORES

DIRECCIÓN, SENTIDO Y MÓDULO

Se ha mencionado la existencia de propiedades físicas cuya cuantificación exige definir *dirección, sentido, módulo* (intensidad) y algunas veces su *punto de aplicación*. Estas magnitudes las llamamos vectoriales y se pueden poner en correspondencia biunívoca con un conjunto de segmentos orientados. Entre ellas podemos mencionar las magnitudes correspondientes a fuerza, velocidad, aceleración, etc.

Cada uno de estos segmentos orientados recibe el nombre de *vector*, los vectores se representan geométricamente como segmentos rectilíneos dirigidos en los espacios: unidimensional ($\mathbb{R}$), bidimensional ($\mathbb{R}^2$) y tridimensional ($\mathbb{R}^3$).

El punto A en la figura 1 se llama *origen* del vector y el punto B, *extremo* del vector. La recta que incluye al vector determina su *dirección*. El *sentido* del vector, dado por la orientación del mismo del origen al extremo, se representa por una flecha colocada en su extremo. La longitud del segmento, medida en la unidad elegida para su representación, es el número real que recibe el nombre de *módulo* o norma del vector.



A: origen, punto inicial
B: extremo, punto terminal
Dirección: la de la recta
Sentido: el de la flecha

Figura 1

Cuando una magnitud es vectorial, se la puede representar por un vector como el indicado en la figura 2, siendo su intensidad proporcional a la longitud del segmento orientado, medida en una escala adecuada.

Ejemplo:

La fuerza aplicada a un cuerpo es de 40 N, su dirección es horizontal, su sentido de izquierda a derecha y su punto de aplicación el origen del vector.

$$\text{Esc:}10\,\frac{N}{cm}$$

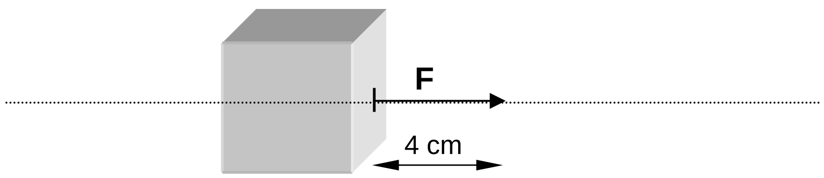


Figura 2

La *notación* de vectores que adoptaremos en este texto es la siguiente:

$\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, **F** (letras mayúsculas en negrita)

y para su intensidad o módulo o norma : $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$, | **F** |

VECTORES GEOMÉTRICOS O LIBRES

Dado un vector $\bar{a}$, consideramos el conjunto de todos los vectores que tienen igual dirección, sentido y módulo que $\vec{a}$. A dicho conjunto lo denominamos *vector geométrico* o *libre*.

En la figura 3 hemos graficado algunos vectores, es imposible graficarlos a todos, teniendo en cuenta esta imposibilidad graficaremos un solo vector, que se considera como representante del vector geométrico definido por el conjunto de todos los que tienen igual dirección, sentido y módulo (vectores equipolentes).
La elección del representante es arbitraria.

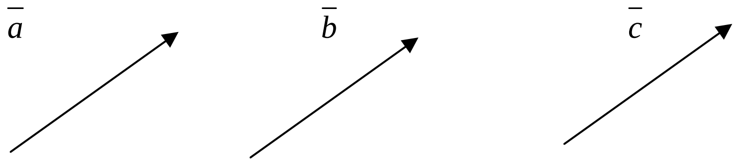


Figura 3

VECTORES DESLIZANTES O AXIALES

Son segmentos de recta dirigidos, tales que son iguales si y sólo si tienen la misma dirección, el mismo sentido, el mismo módulo y su origen y extremo pertenecen a la misma recta.

$\mathbf{F_1 = F_2}$

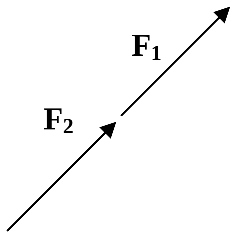


Figura 4

Por ejemplo, una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido solo puede transmitirse a lo largo de su recta de acción si se quiere producir el mismo efecto.

VECTORES FIJOS

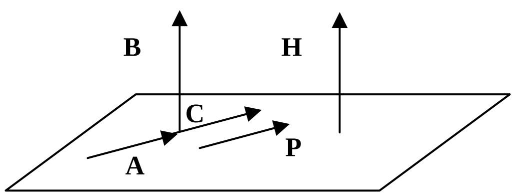
Son segmentos dirigidos, tales que son iguales si y sólo si tienen la misma dirección, el mismo sentido, el mismo módulo y además deben tener el mismo punto inicial.

Por ejemplo, si una fuerza actúa sobre un cuerpo elástico, el punto inicial (origen) del vector fuerza no puede modificarse, pues si se cambia su efecto será diferente.

Ejercicio:

Indique cuáles de los vectores del gráfico son iguales:

a) Como vector geométrico
b) Como vector fijo
c) Como vector deslizante



Definición:
Un vector de módulo 1 recibe el nombre de *versor* o *vector unitario*

Notación: $\breve{s}$

Definición:
Un vector de módulo 0 se denomina *vector nulo*.

Notación: $\overline{0}$

Su origen coincide con su extremo y se conviene que no tiene dirección.

OPERACIONES ENTRE VECTORES

ADICIÓN

La adición de vectores se obtiene gráficamente aplicando *la regla del paralelogramo*.

Definición:
Sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$, dos vectores cualesquiera. La suma de $\overline{u} + \overline{v}$, es el vector cuya determinación gráfica se realiza llevando a partir de un origen arbitrario, los vectores geométricos $\overline{u}$ y $\overline{v}$, el vector representativo de $\overline{u} + \overline{v}$ queda determinado por la diagonal del paralelogramo construido con los vectores dados.

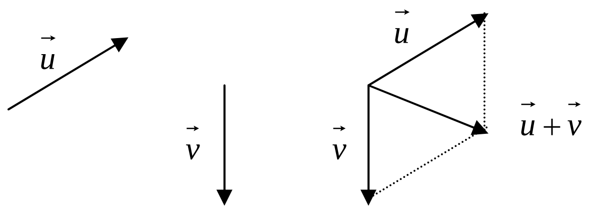


Figura 5

MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Definición:
Sea $\vec{u}$, un vector no nulo y c un número real (escalar). El vector c.$\vec{u}$, es el que tiene por módulo $|c|$ veces el módulo de $\vec{u}$, la misma dirección e igual sentido, si $c > 0$ y sentido opuesto si $c < 0$.

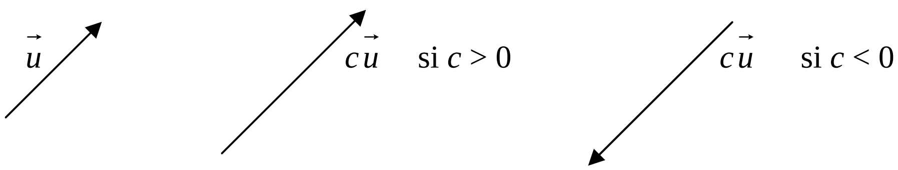


Figura 6

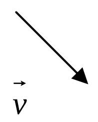
Observaciones:

$c\ .\ \vec{u} = \vec{0}$ si $c = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$

El vector $(-1).\vec{u}$ tiene el mismo módulo y la misma dirección que $\vec{u}$, pero sentido contrario, $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$ se define como vector *opuesto* de $\vec{u}$.

Ejercicio:

Dado el vector $\vec{v}$, determine gráficamente: $3.\vec{v}$, $-2.\vec{v}$, $\frac{1}{3}.\vec{v}$, $-\frac{1}{2}.\vec{v}$,



SUSTRACCIÓN

Definición:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$, dos vectores cualesquiera. La sustracción de $\vec{u} - \vec{v}$, es el vector que se obtiene sumando a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

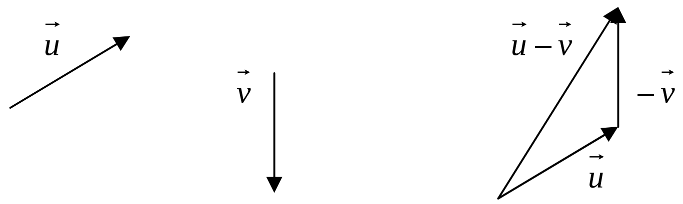
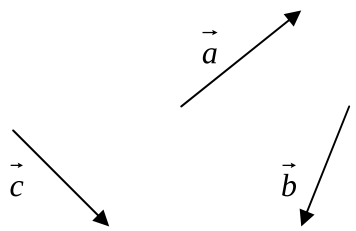


Figura 7

Ejercicio:

Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, halle geométricamente

a) $\vec{a} + \vec{c}$
b) $\vec{b} - \vec{c}$
c) $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$



COORDENADAS CARTESIANAS DE UN VECTOR

ESPACIO UNIDIMENSIONAL: $\mathbb{R}$

Dada una recta *r* le asociamos:

- un punto fijo: *O*, llamado origen.
- un versor: $\breve{i}$, aplicado en el origen.
- un sentido positivo: el del versor $\breve{i}$.

Diremos que la recta *r* y los tres elementos que hemos asociado definen un eje o una recta numérica o sistema coordenado, que simbolizamos (O, $\breve{i}$).

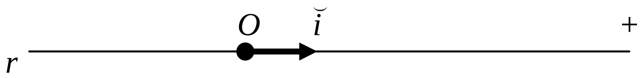


Figura 8

Dado un punto $P \in r$ el vector posición $\overrightarrow{OP}$ (figura 9) lo indicamos con su inicio en *O* y su extremo en *P*, puede expresarse como:

$$\overrightarrow{OP} = x_p \breve{i}, \qquad x_p \in \mathbb{R} \text{ (abscisa de P)}$$

Al número real x_p se lo denomina componente del vector posición $\overrightarrow{OP}$.

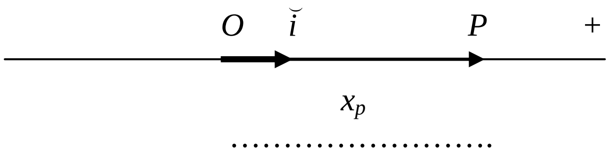


Figura 9

El vector $\overrightarrow{MQ}$ *(figura 10)* puede expresarse como la diferencia entre los vectores posición $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OM}$ resulta el vector $\overrightarrow{MQ} = (x_q\text{-}x_m)\ \breve{i}$

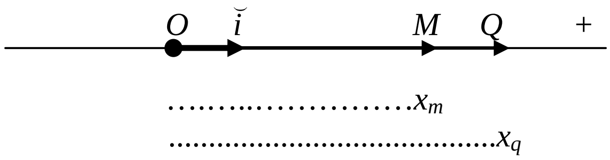


Figura 10

ESPACIO BIDIMENSIONAL: $\mathbb{R}^2$

Si en el plano, trazamos dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto *O* y en dicho punto aplicamos los versores $\breve{i}$ y $\breve{j}$ en las direcciones de las rectas (figura 11), la terna (O, $\breve{i}$, $\breve{j}$) define un sistema de coordenadas en el plano, el plano recibe el nombre de plano coordenado.

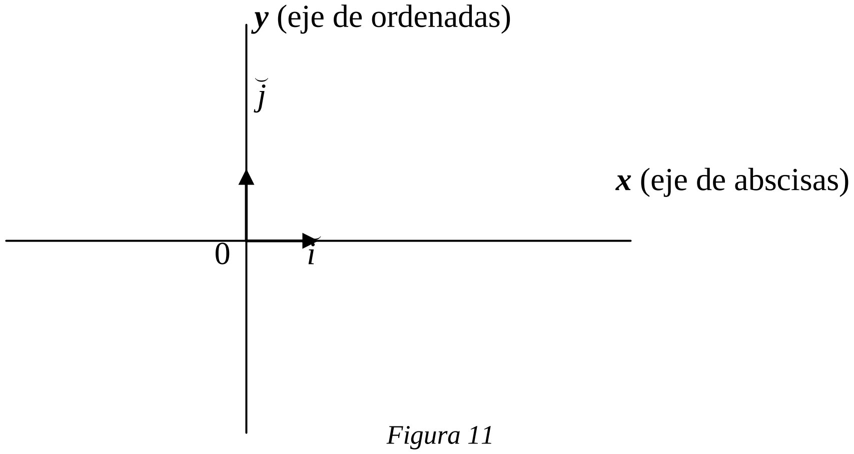


Figura 11

Dado un punto P del plano, de coordenadas (x_p,y_p), el vector posición $\overrightarrow{OP}$ (*Figura 12*) lo indicamos con su inicio en O y su extremo en P, puede expresarse como:

$\overrightarrow{OP} = x_p\breve{i} + y_p\breve{i} = (x_p, y_p)$ donde x_p,y_p son sus componentes

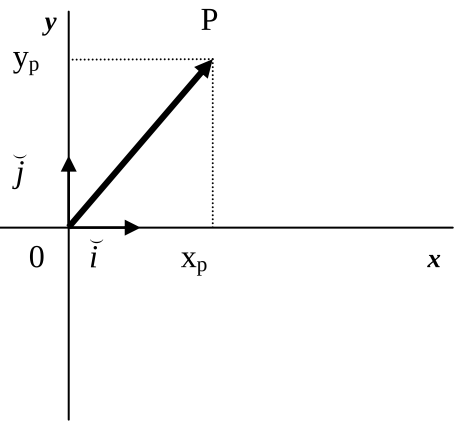


Figura 12

Para calcular el *módulo o norma* del vector aplicamos el teorema de Pitágoras (*Figura 12*),

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

A veces es necesario expresar un vector en términos de los vectores posiciones, dados $\overrightarrow{OP} = x_p\breve{i} + y_p\breve{j}$ y $\overrightarrow{OQ} = x_q\breve{i} + y_q\breve{j}$, queremos encontrar las componentes de $\overrightarrow{PQ}$ (*Figura 13*).

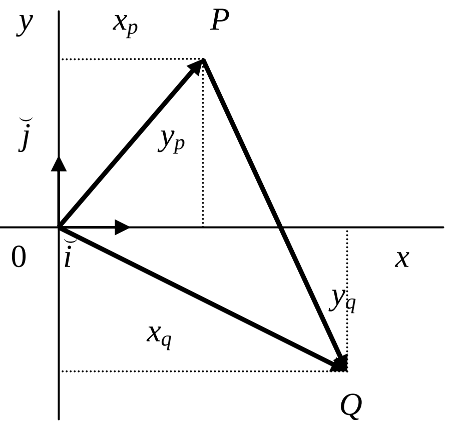


Figura 13

De la figura se desprende que:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

Por lo tanto: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Reemplazando resulta: $\overrightarrow{PQ} = (x_q \breve{i} + y_q \breve{j}) - (x_p \breve{i} + y_p \breve{j})$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p)\breve{i} + (y_q - y_p)\breve{j}$$

O como par ordenado: $\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p \ , y_q - y_p)$

Observaciones:

- Las componentes de un vector del plano se calculan hallando la diferencia de las componentes homónimas.
- El módulo o norma de $\overrightarrow{PQ}$ es: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$

Ejercicio:

Dados los puntos P (2,-5) y Q (4,-3), determine el vector $\overrightarrow{PQ}$**,** halle su módulo y grafique.

Rta.: $\overrightarrow{PQ} = (2,2)$, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 2\sqrt{2}$

OPERACIONES EN $\mathbb{R}^2$

Adición

Si $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1\breve{i} + a_2\breve{j}$ y $\vec{b} = (b_1, b_2) = b_1\breve{i} + b_2\breve{j}$,

entonces $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1 + b_1)\,\breve{i} + (a_2 + b_2)\breve{j}$

Multiplicación por un escalar

Si $k \in \mathbb{R}$ y $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1\breve{i} + a_2\breve{j}$,

entonces $k.\vec{a} = (k.a_1, k.a_2) = k.a_1\breve{i} + k.a_2\breve{j}$

Ejercicio:

Siendo $\vec{x} = (2,4)$, $\vec{y} = (2,1)$, $\vec{z} = (-1,2)$ calcule y represente en el plano:

a) $\vec{x} + \vec{z}$

b) $\vec{x} - \vec{z}$

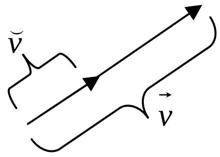
c) $\frac{1}{2}\vec{x}$

d) $\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{z} - 2\vec{y}$

NOTA: El estudio de los vectores en el espacio tridimencional $(\mathbb{R}^3)$, será abordado con profundidad en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, correspondiente al primer año de su carrera.

VERSOR ASOCIADO A UN VECTOR

Dado un vector $\bar{v}$ llamamos *versor asociado* a $\bar{v}$, y lo indicamos $\breve{v}$, a aquel que tiene la misma dirección y sentido que $\bar{v}$. ($|\breve{v}| = 1$)



$$\boxed{\breve{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}}$$

$$\text{Sea} \quad \bar{v} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} \quad \text{entonces } \breve{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{a_1\breve{i} + a_2\breve{j}}{|\bar{v}|}$$

$$\breve{v} = \frac{a_1}{|\bar{v}|}\breve{i} + \frac{a_2}{|\bar{v}|}\breve{j}$$

Ejercicio:

Halle el versor asociado a cada uno de los siguientes vectores:

a) (0,-3) Rta.: (0,-1)

b) $(\sqrt{2},0)$ Rta.: (1,0)

c) $3\breve{i} - 4\breve{j}$ Rta.: $\frac{3}{5}\breve{i} - \frac{4}{5}\breve{j}$

d) $2\breve{i} + \breve{j}$ Rta.: $\frac{2}{\sqrt{5}}\breve{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\breve{j}$

e) $\overrightarrow{PQ}$ siendo $P(-1,1)$ y $Q(-2,2)$. Rta.: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\breve{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\breve{j}$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Definición: Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, el producto escalar o producto interno de ambos es el número real dado por:

$$\bar{u}.\bar{v} = |\bar{u}|.|\bar{v}|.\cos\varphi$$

donde φ es el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

Si $\vec{u}\,.\,\vec{v} > 0$, entonces $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$

Si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$, entonces $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Si $\vec{u}\,.\,\vec{v} < 0$, entonces $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

Propiedades:

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (conmutativa)
2) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ (distributiva con respecto a la adición de vectores)
3) $c(\vec{u}.\vec{v}) = (c\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(c\vec{v})$; $c \in \mathbb{R}$
4) $\vec{u}.\vec{u} > 0 \quad \forall \vec{u} \neq \vec{0}$
5) $\vec{u}.\vec{u} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$
6) $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (desigualdad de Schwartz)

Ejercicio:

Calcule los siguientes productos escalares:

a) $\breve{i}.\breve{i}$ b) $\breve{i}.\breve{j}$ c) $\breve{j}.\breve{j}$ d) $(-\breve{j}).\breve{j}$

Algunas soluciones son:

a) $\breve{i}.\breve{i}$ = 1.1.cos 0 = 1
b) $\breve{i}.\breve{j}$ = 1.1.cos 90° = 0

Las restantes quedan a cargo del lector.

Determinaremos la expresión del producto escalar conociendo las componentes de los vectores:
Sean los vectores $\vec{u} = u_1\breve{i} + u_2\breve{j}$ y $\vec{v} = v_1\breve{i} + v_2\breve{j}$

Aplicando las propiedades del producto escalar y utilizando los resultados del ejercicio anterior se demuestra que:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2}$$

Es decir, el producto escalar entre dos vectores es igual a la suma de los productos de sus componentes homólogas.

Ejercicios:

1) Halle el producto escalar entre los siguientes vectores:
a) $\vec{a} = (3,-1)$ $\vec{b} = (-2,5)$
b) $\vec{r} = 3\breve{i} + 0\breve{j}$ $\vec{s} = 4\breve{i} - \breve{j}$
c) $\vec{v} = (4,6)$ $\vec{w} = (6,-4)$
d) $\vec{c} = 2\breve{i} - \breve{j}$ $\vec{d} = \breve{i} + \breve{j}$

Rtas.: a) -11, b) 12, c) 0, d) 1

2) Aplicando la definición de producto escalar:, $\bar{u}.\bar{v} = |\bar{u}|.|\bar{v}|.\cos\varphi$ halle el ángulo que forman los vectores del ejercicio anterior.

Rtas.: a) $130°14'$, b) $14°2'$, c) 90º, d) $71°33'$

Definición:
Dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero.
Ejemplos: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \quad (\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0})$

a) $\vec{a} = (-1,4)$ y $\vec{b} = (12,3)$ son ortogonales porque $\vec{a}.\vec{b} = 0$

b) $\vec{a} = (-12,3)$ y $\vec{b} = (3,-12)$ son ortogonales porque $\vec{a}.\vec{b} = 0$

Ejercicios:

1) Determine el número real t de modo que (-3,5) sea ortogonal a (t-1,6).

Rta.: t = 11

2) Determine el número real t de modo que (t-1,t) sea ortogonal a (-4, t).

Rta.: t = 2

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, entonces la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es un vector que simbolizamos $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\vec{u}}$.

De acuerdo con la definición de producto escalar,

$$\bar{u}.\bar{v} = |\bar{u}|.|\bar{v}|.\cos\alpha$$

de donde: $$\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|\cos\alpha \qquad (1)$$

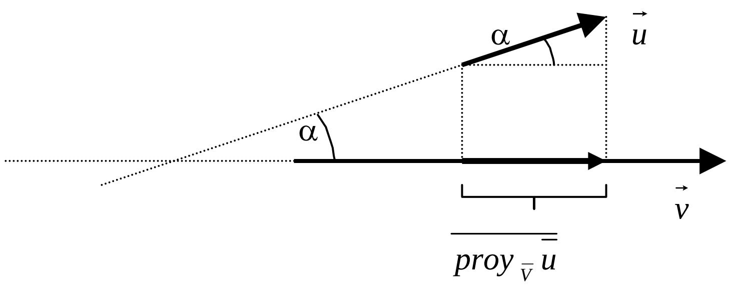


Figura 16

De acuerdo con la figura 16 resulta:

$$proy_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}|\cos\alpha \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene: $$proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad (3)$$

Donde $|proy_{\vec{v}}\vec{u}|$ representa la longitud de la proyección.

El versor asociado al vector $\vec{v}$ es $\breve{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Para obtener el vector proyección multiplicamos la expresión (3) por el versor asociado en la dirección de $\vec{v}$ y resulta:

$$\boxed{\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\,\vec{u}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Ejemplo:

Sean $\vec{a}$ = (3,2) y $\vec{b}$ = (1,-1). Entonces:

$$\overrightarrow{proy_{\vec{b}}\,\vec{a}} = \frac{(3,2).(1,-1)}{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio:

Dados los vectores $\vec{a} = 4\breve{i} - 3\breve{j}$ y $\vec{b} = -\breve{i} - \breve{j}$, determine el vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, respectivamente.

Rta.: $\frac{1}{2}\breve{i} + \frac{1}{2}\breve{j}$ y $-\frac{4}{25}\breve{i} + \frac{3}{25}\breve{j}$

APLICACIONES MATEMÁTICAS A LA ESTÁTICA

La física es una ciencia natural que abarca distintos campos. Nosotros nos vamos a introducir en el campo de la mecánica, el cual se dedica al estudio de las interacciones que se ejercen entre cuerpos distintos y sus consecuencias: movimiento y deformación. Específicamente nuestras aplicaciones se han de ocupar, de las interacciones que ejercen sobre un cuerpo rígido o indeformable y de su movimiento. Estos temas pertenecen a dos ramas importantes de la mecánica: estática y cinemática, respectivamente.

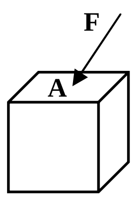
En primer término nos habremos de dedicar al capítulo de la estática, lo que nos conduce a conocer ciertas premisas básicas que se exponen a continuación.

NOCIONES ELEMENTALES DE ESTÁTICA

CONCEPTO DE FUERZA

Fuerza: es la acción que un cuerpo ejerce sobre otro, cuya consecuencia es modificar su forma y/o estado cinemático. Es evidente que su efecto depende de su intensidad, dirección, sentido y punto de aplicación, por lo que será considerada una magnitud vectorial. Su representación será un vector aplicado.

La unidad del sistema S.I. en que se mide la intensidad de una fuerza es el Newton (N).



$|\overline{F}|$ = módulo del vector = intensidad
A = punto de aplicación
recta de acción = dirección
flecha = sentido

Si un cuerpo interactúa con varios cuerpos, sobre él actuará un conjunto de acciones que llamaremos sistema de fuerzas. En el caso particular que dicho sistema esté constituido por dos fuerzas de la misma intensidad, la misma recta de acción y sentidos opuestos, diremos que está en equilibrio y lo llamaremos sistema nulo.

En nuestro caso los cuerpos considerados serán rígidos y la experiencia indica que el efecto de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo rígido, no se modifica, si se agrega o se quita un sistema nulo. La consideración anterior permite demostrar el **teorema de la transmisibilidad**, cuyo enunciado nos dice que una fuerza que se ejerce sobre un cuerpo rígido, se puede considerar aplicada sobre cualquier punto de su recta de acción, sin alterar los efectos sobre dicho cuerpo.

En efecto, si sobre el cuerpo rígido de la figura 1 actúa un sistema de fuerzas, al agregar el sistema nulo $\overline{F_1}, -\overline{F_1}$ en el punto B, como muestra la figura 2, no se modifica su efecto y ambos son sistemas equivalentes. Observando la misma figura, $\overline{F_1}$, aplicada en A y $-\overline{F_1}$ aplicada en B, constituyen otro sistema nulo y por lo tanto, si lo quitamos no modificamos ningún efecto y obtenemos un sistema equivalente en la figura 3, donde la fuerza $\overline{F_1}$ resulta aplicada en el punto B. Dado que dicho punto B fue elegido arbitrariamente, concluimos que en un cuerpo rígido una fuerza puede considerarse aplicada en cualquier punto de su recta de acción.

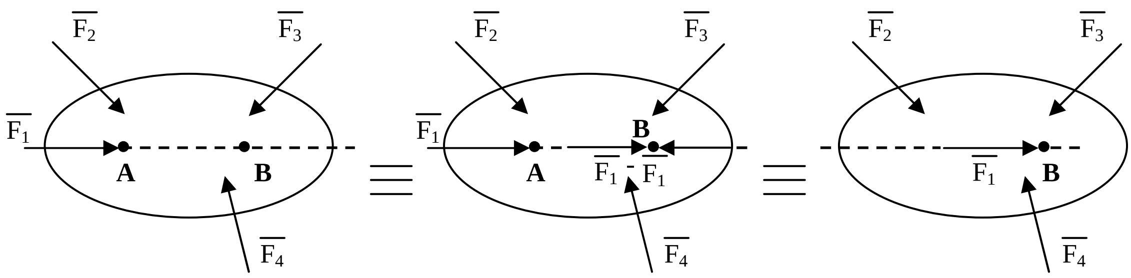


Fig. 1 *Fig. 2* *Fig. 3*

La consecuencia inmediata en estos casos, resulta ser que la fuerza puede ser representada por un vector deslizante.

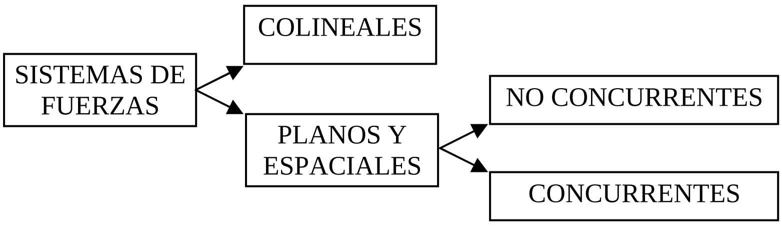
CONCEPTO DE PUNTO MATERIAL

Se denomina de esta manera a un cuerpo cuya máxima dimensión geométrica es despreciable frente a la mínima dimensión geométrica del espacio en el cual se encuentra (pensemos en un orden de cien veces menor). Sobre la base de esta consideración su posición se identifica con un punto geométrico, en el cual se concentra la masa del cuerpo.

SISTEMAS DE FUERZAS

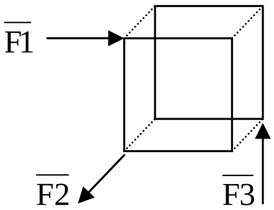
Al conjunto de dos o más fuerzas que actúan sobre un cuerpo lo habíamos llamado sistema de fuerzas. Estos sistemas se pueden clasificar en sistemas colineales, planos y espaciales, de acuerdo con que todas las fuerzas tengan la misma recta de acción, tengan distintas rectas de acción, pero sean todas paralelas a un plano o que siendo distintas sus rectas de acción, sus direcciones pertenezcan a un espacio tridimensional.

Los sistemas planos y espaciales serán no concurrentes si todas las componentes del sistema tienen rectas de acción que no pasan por un mismo punto del plano o el espacio, en caso contrario, los sistemas serán concurrentes.



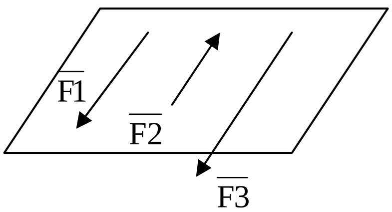
Es de hacer notar que en los sistemas espaciales no concurrentes, las rectas de acción de las fuerzas que intervienen pueden cortarse, pero dichos puntos de corte no coinciden o las fuerzas pueden ser alabeadas, como lo muestra la figura siguiente:

sistemas espaciales
fuerzas alabeadas

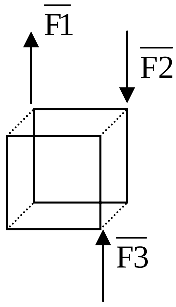


En los sistemas planos y espaciales concurrentes, el punto de concurrencia puede ser propio o impropio, en este último caso las fuerzas tienen rectas de acción paralelas. (Ver figura).

sistema plano de fuerzas paralelas



sistema espacial de fuerzas paralelas



Estudiar los sistemas de fuerzas nos conduce a decidir, si el sistema en cuestión produce efecto o no sobre el cuerpo rígido o el punto material sobre el cual se aplica.

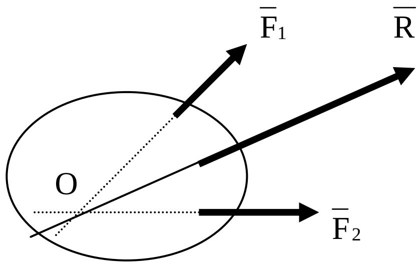
La metodología a aplicar se orienta a reducir el sistema inicial a otro sistema equivalente, que produzca el mismo efecto y cuyo número de elementos sea el menor posible. En el caso particular de los sistemas planos se reduce a un sistema de fuerzas concurrentes equivalente de resolución simple.

Si el sistema se reduce a un sistema nulo, se dice que está en equilibrio, y el cuerpo rígido no modifica el estado cinemático anterior.

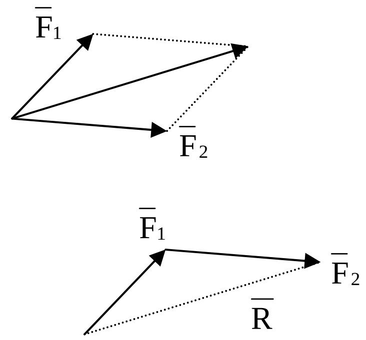
Las aplicaciones que vamos a considerar se realizarán sobre sistemas colineales y sistemas planos de fuerzas concurrentes a un punto propio, exclusivamente.

SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS

Si el sistema plano está constituido por dos fuerzas, cuyas rectas de acción concurren a un punto propio, puede ser reducido a un sistema equivalente de una única fuerza, llamada resultante, cuya recta de acción pasa por el punto de concurrencia y se determina por la regla del paralelogramo. Esta regla, confirmada por la experiencia, es la utilizada en la determinación gráfica del vector suma de dos vectores geométricos dados.

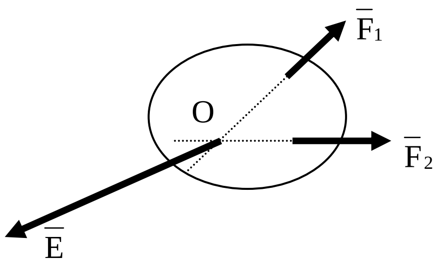


PARALELOGRAMO DE FUERZAS

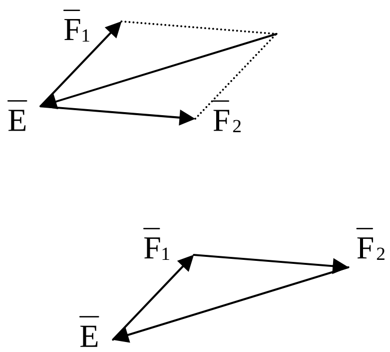


TRIÁNGULO DE FUERZAS

Para equilibrar el sistema de fuerzas $\overline{F_1}, \overline{F_2}$, bastará con aplicar al cuerpo rígido, una fuerza de igual intensidad, igual recta de acción y sentido opuesto a la fuerza $\overline{R}$, que llamaremos equilibrante $\overline{E}$.



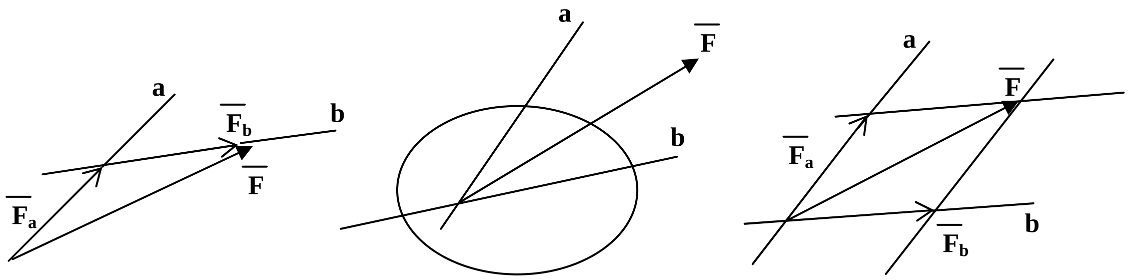
PARALELOGRAMO DE FUERZAS



TRIÁNGULO DE FUERZAS

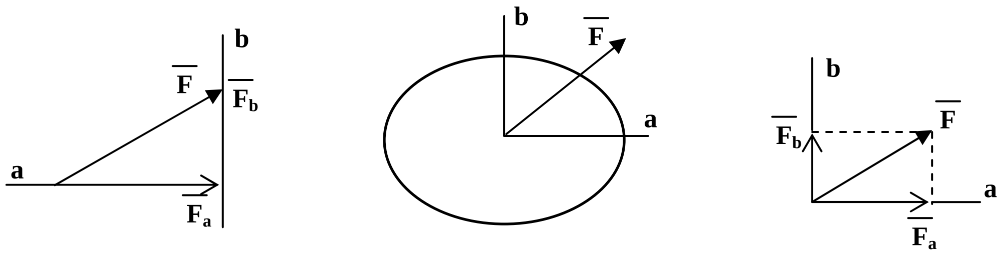
DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA SEGÚN DOS DIRECCIONES CONCURRENTES CON ELLA

La regla del paralelogramo puede ser utilizada para descomponer una fuerza en dos direcciones dadas, con la condición de que las tres direcciones concurran a un mismo punto.



TRIÁNGULO DE FUERZAS PARALELOGRAMO DE FUERZAS

Si las direcciones consideradas son perpendiculares, la descomposición coincide con la proyección de la fuerza sobre las direcciones mencionadas.



RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS

De acuerdo con lo mencionado en los apartados anteriores, las magnitudes estáticas que serán parte de nuestras aplicaciones, son vectoriales.

Dado un sistema cartesiano de ejes XY, el vector representativo de una fuerza puede ser indicado por su intensidad y el ángulo α medido en sentido antihorario, desde el semieje positivo X, hasta la recta de acción de fuerza. Su notación será $\overline{F} = (F, \alpha)$.

La expresión cartesiana de la fuerza $\overline{F}$ resulta de realizar la proyección de la misma sobre cada uno de los ejes coordenados.

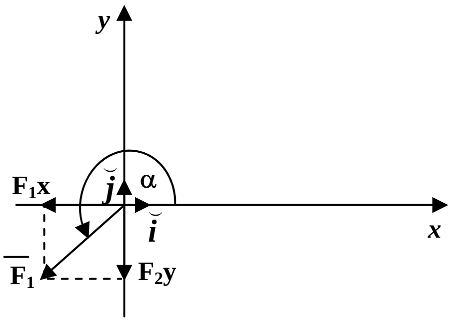
De acuerdo con lo anterior la expresión analítica de una fuerza $\overline{F}(F, \alpha)$ en un sistema cartesiano será:

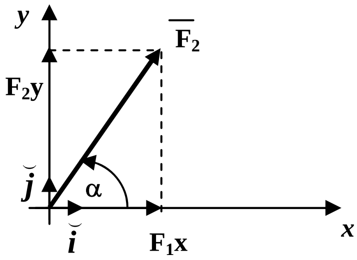
$$\boxed{\overline{F}(x, y) = (F, \alpha) = F_x \breve{i} + F_y \breve{j} = (F \cos\alpha)\breve{i} + (F sen\alpha)\breve{j} = (F_x, F_y)}$$

El par ordenado (*x*,*y*) indica el punto de aplicación de la fuerza $\overline{F}$ o un punto de su recta de acción si está actuando sobre un cuerpo rígido.

Ejemplo

Dado el sistema de ejes cartesianos ***xy*** y las fuerzas: $\overline{F}_1$(0,0) = (10*N*,210°) y $\overline{F_2}$ (0,0) = (20*N*,60º) se pide indicar su expresión cartesiana.





$$\overline{F_1} = F_{1x} + F_{1y} = (F\cos\alpha)\breve{i} + (Fsen\alpha)\breve{j} = -5\sqrt{3}N\breve{i} - 5N\breve{j} = (-5\sqrt{3}, -5)N$$
$$\overline{F_2} = F_{2x} + F_{2y} = (F\cos\alpha)\breve{i} + (Fsen\alpha)\breve{j} = 10N\breve{i} + 10\sqrt{3}N\breve{j} = (10, 10\sqrt{3})N$$

EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS CONCURRENTES

Al intentar reducir un sistema de fuerzas concurrentes a otro equivalente, con la cantidad mínima de magnitudes estáticas, podemos llegar a resultados distintos.
Si el sistema de fuerzas, aplicado a un punto de cuerpo rígido, queda reducido a un sistema nulo; diremos que el sistema se encuentra en equilibrio. En caso contrario se puede reducir a una única fuerza, llamada resultante del sistema. En esta última posibilidad, si se agrega al sistema, una fuerza que lo equilibre, esta fuerza se llama equilibrante.

ECUACIONES GENERALES DE EQUILIBRIO

Sistemas Planos de Fuerzas Concurrentes a un punto propio

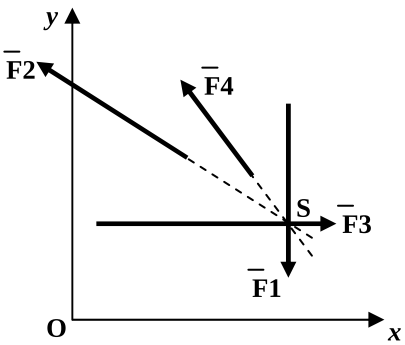
En esta situación las fuerzas del sistema se refieren a un par de ejes cartesianos ortogonales, se llevan a su expresión cartesiana y se aplican en el punto de concurrencia. La condición necesaria y suficiente que asegure el equilibrio del sistema de fuerzas queda expresada por dos ecuaciones escalares igualadas a cero.

$$\sum_1^n F_{ix} = \sum_1^n F_i \cos\alpha_i = 0$$ *Ecuación de proyección sobre el eje x (sumatoria de las componentes de las fuerzas sobre dicho eje)*

$$\sum_1^n F_{iy} = \sum_1^n F_i sen\alpha_i = 0$$ *Ecuación de proyección sobre el eje y (sumatoria de las componentes de las fuerzas sobre dicho eje)*

Ejemplo

Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes, comprobar analíticamente su equilibrio.



$\overline{F_1}$ = (5N, 270º) $\overline{F_2}$ = ($\sqrt{52}$ N, 146.3º) S = (5,2)m
$\overline{F_3}$ = (7N, 0º) $\overline{F_4}$ = ($\sqrt{2}$ N, 135º)

Se plantean las dos ecuaciones de proyección, sobre los ejes ***x*** e ***y***.

$$\sum_1^4 F_{ix} = \sum_1^4 F_i \cos\alpha_i = 5N\cos 270° + \sqrt{52}N\cos 146.3° + 7N\cos 0° + \sqrt{2}N\cos 135° =$$
$$= 0N - 6N + 7N - 1N = 0N$$
$$\sum_1^4 F_{iy} = \sum_1^4 F_i \; sen\alpha_i = 5N sen 270° + \sqrt{52}N sen 146.3° + 7N sen 0° + \sqrt{2}N sen 135° =$$
$$= -5N + 4N + 0N + 1N = 0N$$

Rta.: las dos ecuaciones de proyección resultan iguales a cero; por lo tanto el sistema de fuerzas dado, se encuentra en equilibrio.

Si las ecuaciones anteriores no resultan ambas iguales a 0, esto nos indica que el sistema admite una resultante, cuyas componentes según los ejes x e y, son los valores númericos obtenidos.

Ejemplo

En un punto de un cuerpo rígido actúan las fuerzas:

$$\mathbf{\overline{F1}(0,0) = \left(50,50\sqrt{3}\right)N, \overline{F2}(0,0) = (200,0)N, \overline{F_3}(0,0) = (100N,330º)}.$$

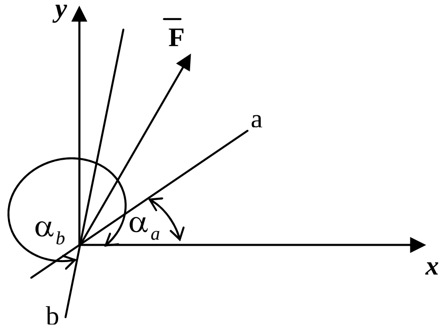
Determine la fuerza resultante.

$$\mathbf{\sum F_{xi} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 50 + 200 + |100|\cos 330º = 250 + 50\sqrt{3} \cong 336,6N = R_x}$$
$$\mathbf{\sum F_{yi} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 50\sqrt{3} + |100| sen 330º = 50\sqrt{3} - 50 \cong 36,6N = R_y}$$
$$\mathbf{R(0,0) = (336.6,36.6)N}$$

Ejemplo de descomposición analítica de una fuerza en dos direcciones concurrentes a un punto de su recta de acción.

Dada una fuerza $\overline{F}(0,0) = (100\sqrt{2}N, 45º) = (100,100)N$, descomponerla en dos direcciones a y b, que concurra al punto (0,0) de su recta de acción.

Datos $\alpha_a = 30º$ $\alpha_b = 240º$



$\overline{F}_a$ y $\overline{F}_b$ constituyen un sistema de fuerzas cuyo efecto es equivalente al de la fuerza $\overline{F}$ y las ecuaciones generales de un sistema plano de fuerzas concurrentes serán:

$$\left|\overline{F}\right| cos\,\alpha = \left|\overline{F}_a\right| cos\,\alpha_a + \left|\overline{F}_b\right| cos\,\alpha_b$$
$$\left|\overline{F}\right| sen\alpha = \left|\overline{F}_a\right| sen\alpha_a + \left|\overline{F}_b\right| sen\alpha_b$$

que reemplazadas

$$100 = \left|\overline{F}_a\right| \frac{\sqrt{3}}{2} + \left|\overline{F}_b\right| \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$100 = \left|\overline{F}_a\right| \frac{1}{2} + \left|\overline{F}_b\right| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Conducen a:

$$\left|\overline{F}_a\right| = 73.20N \text{ y } \left|\overline{F}_b\right| = -73.20N$$

El signo positivo de la incógnita indica que la fuerza componente tiene el sentido que indica el ángulo α de la dirección, el signo negativo nos informa que la fuerza componente tiene el sentido opuesto al que indica el ángulo α de la dirección.

Rta:

$$\overline{F}_a(0{,}0) = (73.20N, 30^o) = (63.40, 36.6)N$$
$$\overline{F}_b(0{,}0) = (73.20N, 60^o) = (36.6, 63.40)N$$

CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

La **Cinemática** es la parte de la física que estudia el movimiento prescindiendo de las causas que lo producen.

Cuando observamos el movimiento de un automóvil y nos hacemos preguntas tales como: ¿Dónde se encontrará el coche media hora después de pasar por un semáforo? ¿Qué velocidad posee en un instante dado? ¿Tiene velocidad constante?, etc. Estas preguntas se pueden contestar sin saber porqué se mueve el coche.

Los problemas que resuelve la Cinemática son fundamentalmente determinar la posición, desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo.

En este capítulo haremos un estudio detallado de una serie de movimientos muy simples que se pueden tomar como modelos para la comprensión de otros movimientos más complejos.

MOVIMIENTO

El fenómeno físico con el que estamos más familiarizados y conocemos mejor es el movimiento. Estamos rodeados de multitud de objetos que se mueven, que pasan del estado de reposo al estado de movimiento y viceversa. Desde muy pequeños tenemos un concepto intuitivo de este fenómeno que nos permite afirmar si un cuerpo, en un momento dado, está en reposo o está animado de movimiento. ¿Qué criterio empleamos para distinguir el estado de reposo del estado de movimiento? Un criterio podría ser este: “Un cuerpo se mueve cuando un punto cualquiera de ese cuerpo cambia de lugar”.

La localización de un cuerpo en el espacio respecto de un sistema de referencia recibe el nombre de **posición**.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos dar la siguiente definición: **Movimiento** *es un cambio continuo de posición respecto de un sistema de referencia fijo.*

Si el sistema de referencia no está fijo, el movimiento que podemos estudiar es el movimiento relativo que posee un cuerpo respecto del sistema. Por ejemplo, un avión deja caer un objeto. Si el sistema de referencia es el avión, el piloto solamente observa el movimiento de caída del objeto que es el movimiento relativo. Para el piloto el objeto tiene movimiento rectilíneo: lo ve siempre debajo del avión aunque cada vez más lejos.

En cambio, un individuo que estuviera en tierra o fuera del avión, sistema fijo respecto del avión y del objeto, observaría además del movimiento de caída que el objeto se traslada horizontalmente con la misma velocidad del avión formando una trayectoria parabólica.

En todo movimiento hay que distinguir tres elementos fundamentales: el cuerpo que se mueve o móvil, el sistema de referencia que se emplea y la trayectoria.

EL MÓVIL: UNA PARTÍCULA O PUNTO MATERIAL

Esta abstracción se hace por sencillez. Para conocer el movimiento de un cuerpo real habría que conocer el movimiento de todos sus puntos, el estudio del movimiento así considerado puede ser complicado.

Cuando un automóvil se desplaza por una ruta, además del movimiento de traslación que observamos, posee otros movimientos: *vibratorios*, producidos por los amortiguamientos, *de balanceo*, al tomar una curva, etc. Esta complicación se evita considerando el móvil como una partícula.

A su vez, el estudio del movimiento de una partícula posee rigor matemático. La posición de un punto respecto de un sistema de referencia viene determinada por un **vector**; el estudio del movimiento del punto se reduce al estudio geométrico de dicho punto.

Realmente no existe en la naturaleza un móvil sin dimensiones pero hay muchos cuerpos que en su movimiento se comportan como partículas materiales.

Además un cuerpo no tiene que ser necesariamente pequeño para que pueda considerarse como una partícula, todo depende del sistema de referencia que se tome: un automóvil no se comporta como una partícula para el que lo conduce, sin embargo se comporta como una partícula para el observador que sobrevuela la ruta en helicóptero.

Por lo tanto, partícula material es un término relativo que depende de las dimensiones que intervengan en cada problema concreto.

Un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables frente al vector de posición es una partícula.

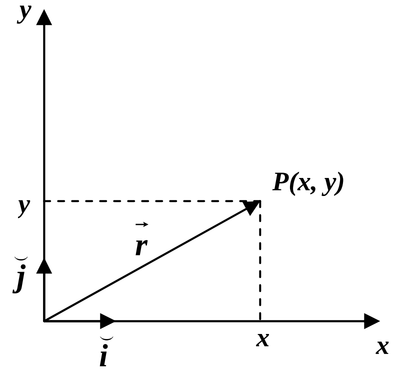
SISTEMA DE REFERENCIA. VECTOR POSICIÓN

Para conocer la posición de un punto en cualquier instante es necesario fijar otro punto como referencia.

Para fijar la posición de una partícula utilizaremos el sistema ortogonal bidimensional, el punto de referencia que utilizaremos será el de origen 0, de los ejes cartesianos.

Es necesario aclarar aquí que realizaremos un estudio en dos dimensiones, pudiendo generalizarse dichos conceptos a tres dimensiones.

La posición del punto *P* en cualquier instante vendrá determinada por el vector $\vec{r}$ que une el punto de referencia con el punto móvil. Este vector recibe el nombre de **vector posición**.



Este vector posición tiene dos componentes que son las coordenadas de su extremo:

$$\boxed{\vec{r} = x\breve{i} + y\breve{j}}$$

Cuando el punto *P* se mueve, su vector posición variará con el tiempo y puede expresarse de la forma:

$$\vec{r} = x(t)\breve{i} + y(t)\breve{j}$$

Esta expresión recibe el nombre de expresión instantánea, dando valores a *t* vamos obteniendo las distintas posiciones de una partícula móvil.

Para hallar la distancia que existe, en cualquier instante, entre la partícula móvil y el sistema de referencia se halla el módulo del vector posición:

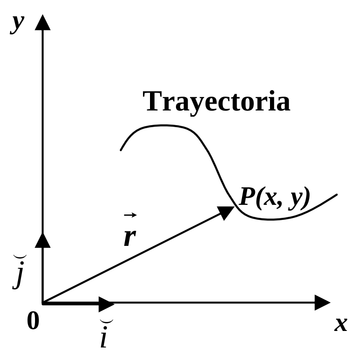
$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Que vendrá expresado en las mismas unidades de longitud que las coordenadas *x* e *y*.

TRAYECTORIA

El punto *P*(*x*,*y*) está en reposo cuando sus coordenadas permanecen constantes con el tiempo. El punto estará en movimiento cuando por lo menos una coordenada varíe con el tiempo.

Cuando el punto *P*(*x*,*y*) se mueve, sus coordenadas van tomando distintos valores con el tiempo. El conjunto de estos valores recibe el nombre de trayectoria.



Trayectoria es el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que va tomando la partícula móvil en el espacio.

La ecuación de la trayectoria puede venir expresada:

- En forma vectorial: $\vec{r} = f(t)$
- En forma paramétrica: $x = f(t)$, $y = f(t)$
- En forma continua: En el caso que la trayectoria sea plana, la ecuación cartesiana sería de la forma $y = f(x)$

Problema:

El movimiento de una partícula viene dado por $x = t$, $y = 2t$ -1, en donde x e y se miden en metros y t en segundos. Calcule:

a) La posición de la partícula en cualquier instante.
b) La posición inicial de la partícula.
c) La posición de la partícula a los 5 segundos.
d) ¿A qué distancia del sistema de referencia se encuentra la partícula en ese instante?

Solución:

a) La posición en cualquier instante viene dada por el vector posición, es decir:

$$\vec{r}(t) = x\breve{i} + y\breve{j} = t\breve{i} + (2t-1)\breve{j}$$

b) La posición inicial la determinamos para $t = 0$: $\vec{r}_0 = 0\breve{i} - 1\breve{j}$
Cuando empezamos a contar el tiempo, la partícula se encuentra en el punto $P_0 = (0,-1)$.

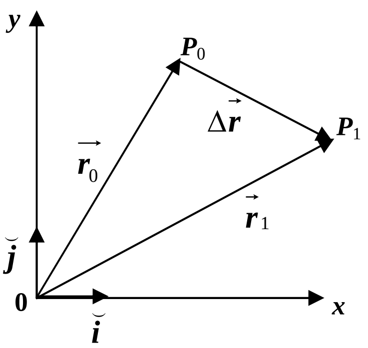
c) La posición a los 5 segundos es: $\vec{r}_5 = 5\breve{i} + 9\breve{j}$, es decir, que en ese instante la partícula se encuentra en el punto $P_5 = (5,9)$.

d) La distancia al origen se encuentra calculando el módulo del vector posición para el instante considerado, en nuestro caso es: $r_5 = \sqrt{25+81} \cong 10{,}29$ metros.

VECTOR DESPLAZAMIENTO

Supongamos una partícula que inicialmente, $t = 0$, se encuentra en la posición P_0 definida por el vector $\vec{r}_0$, posición inicial, y al cabo de un tiempo t_1 se encuentra en la posición P_1 definida por el vector $\vec{r}_1$. Decimos que la partícula se ha desplazado de P_0 a P_1 .

Este desplazamiento viene determinado por el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ que une la posición inicial con la posición final.



Este vector recibe el nombre de **vector desplazamiento** y lo podemos definir como el vector que tiene su origen en el punto P_0 y su extremo en el punto P_1 .

El vector desplazamiento entre dos posiciones es siempre el mismo, cualquiera sea la trayectoria.

Matemáticamente el vector desplazamiento se obtiene sustrayendo el vector de posición inicial al vector de posición final: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$.

Si $\vec{r}_1 = x_1\breve{i} + y_1\breve{j}$ y $\vec{r}_0 = x_0\breve{i} + y_0\breve{j}$, entonces el vector desplazamiento será:

$\Delta\vec{r} = (x_1 - x_0)\,\breve{i} + (y_1 - y_0)\,\breve{j} = \Delta x\breve{i} + \Delta y\,\breve{j}$

Finalmente se escribe: $\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta x\,\breve{i} + \Delta y\,\breve{j}}$

Problema:

Un punto se mueve en el plano *xy* según las ecuaciones: $x = 2 - t$, $y = t^2$. Calcule:

a) La posición inicial y 4 segundos después.
b) Desplazamiento en ese intervalo de tiempo.
c) Ecuación de la trayectoria.

Solución:

a) La posición en cualquier instante viene dada por el vector: $\vec{r}(t) = (2-t)\breve{i} + t^2\breve{j}$

En t = 0 y para t = 4 dicho vector tiene la forma:

$$\vec{r}_0 = 2\breve{i} \Rightarrow P_0 = (2{,}0)$$

$$\vec{r}_4 = -2\breve{i} + 16\breve{j} \Rightarrow P_4 = (-2{,}16)$$

b) El desplazamiento es: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0 = -4\breve{i} + 16\breve{j}$

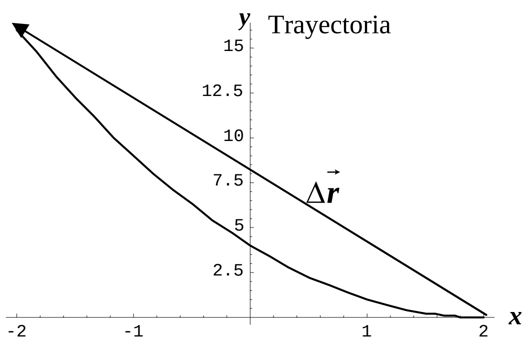
c) Como la trayectoria es plana su ecuación puede expresarse en forma cartesiana, esto lo obtenemos despejando el parámetro t de una de las ecuaciones paramétricas y reemplazando en la otra, es decir: $t = 2 - x \Rightarrow y = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$

La trayectoria es una parábola, para representarla debemos darle valores a t desde 0 a 4, recordando que:

$$t = 0 \Rightarrow P_0(2{,}0)$$

$$t = 4 \Rightarrow P_4(-2{,}16)$$

Graficamos la trayectoria y el vector desplazamiento:

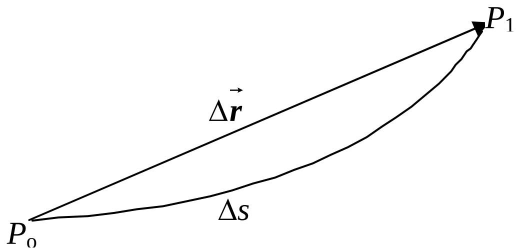


DISTANCIA RECORRIDA

Es la magnitud escalar, Δs, que mide la longitud de la trayectoria. Coincide con el desplazamiento en el caso de que el movimiento sea rectilíneo y además no cambie de sentido.

Cuando lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba, el espacio coincide con el desplazamiento mientras la piedra esta subiendo, pero cuando la piedra inicia el descenso, el desplazamiento disminuye, mientras el espacio recorrido sigue aumentando.

Cuando la piedra llega al punto de partida, el desplazamiento es nulo mientras que el espacio recorrido es igual al doble de la altura alcanzada.



VELOCIDAD

Para conocer el movimiento de una partícula no basta conocer su posición en cualquier momento. Es necesario, además, conocer como varía dicha posición en el transcurso del tiempo. A la variación del vector posición la hemos llamado desplazamiento.

Para relacionar la variación del vector posición o vector de desplazamiento con el tiempo, introducimos una nueva magnitud: **la velocidad**.

VELOCIDAD MEDIA

Se considera velocidad media el desplazamiento que experimenta el móvil en la unidad de tiempo. Físicamente, la velocidad representa la rapidez con que se produce el desplazamiento.

Solamente en el movimiento **rectilíneo** se cumple: $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Matemáticamente, la velocidad media en un intervalo de tiempo se define como *el vector que resulta de dividir el desplazamiento producido entre el intervalo de tiempo empleado*:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento.
A partir de lo anterior se puede escribir:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\breve{i} + \Delta y\,\breve{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\breve{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\breve{j}$$

Las expresiones $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}$ son magnitudes escalares que representan los valores medios de la velocidad sobre los ejes cartesianos. Son las componentes del vector velocidad media cuyo módulo o norma vale: $v_M = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$. La velocidad media nos da poca información acerca del movimiento.

Solamente relaciona el vector desplazamiento total producido en un intervalo de tiempo con dicho intervalo. No nos dice nada sobre la trayectoria que ha seguido la partícula, ni si ha llevado siempre la misma velocidad en todo el intervalo de tiempo. Además, si la partícula vuelve al punto de partida al cabo de un tiempo, el desplazamiento será nulo y la velocidad media también. *La velocidad media puede ser nula en un intervalo de tiempo y no serlo en intervalos más pequeños*.

Si queremos más información del movimiento en el intervalo Δt, tomamos intervalos $\Delta t_1, \Delta t_2, ...$ más pequeños a los que corresponden desplazamientos más pequeños. El número de intervalos que tomemos puede ser tal, que cada intervalo de tiempo sea tan pequeño como queramos. Si el número de intervalos es suficientemente grande, se puede hallar la velocidad de la partícula en cualquier instante o en cualquier punto de trayectoria. Así llegamos al concepto de velocidad instantánea.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Físicamente, representa la velocidad que posee una partícula en un instante determinado o la velocidad que posee en un punto determinado de la trayectoria.

Matemáticamente se define como el *límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

NOTA: Esta expresión no tiene otro sentido que el de indicar que se define la velocidad instantánea cuando el intervalo de tiempo considerado es tan pequeño como se quiera, el operador *límite* que aparece en dicha expresión es indicativo de esta condición; usted estudiará muy profundamente el tratamiento del concepto de límite en el curso de Análisis Matemático I.

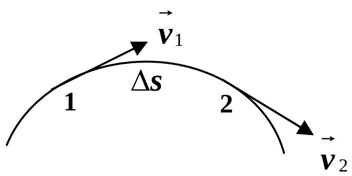
Se puede demostrar que el vector velocidad instantánea puede ser referido al sistema de coordenadas y su expresión según sus componentes cartesianas será: $\vec{v} = v_x \breve{i} + v_y \breve{j}$.

Estas componentes son el valor numérico de las velocidades instantáneas según los ejes coordenados.

El valor numérico de la velocidad instantánea se obtiene hallando su módulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

El vector velocidad instantánea en un punto $P(x, y)$ de la trayectoria es un *vector cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto y el sentido coincide con el del movimiento*.



La velocidad se mide en $\frac{m}{s}$ en el S.I. de unidades.

ACELERACIÓN

Aceleración, en general, es la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo. Al ser la velocidad una magnitud vectorial existirá aceleración siempre que la velocidad varíe en cualquiera de sus elementos: módulo, dirección y sentido.

Por ejemplo, se lanza una pelota contra la pared con una velocidad de $5 \frac{m}{s}$, la pelota rebota y sale en la misma dirección con una velocidad de $5 \frac{m}{s}$. En este caso hay aceleración porque la velocidad ha cambiado de sentido.

Otro ejemplo, un automóvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea con una velocidad de $60\,\frac{km}{h}$ y en un instante posterior su velocidad vale $85\,\frac{km}{h}$, en este caso la velocidad se mantiene constante en dirección y sentido pero ha variado su módulo, en consecuencia hay aceleración.

Para determinar el movimiento de una partícula no basta saber que la velocidad varía, es necesario saber cómo se produce esa variación en el transcurso del tiempo. Por esto se introducen los conceptos de aceleración media y aceleración instantánea.

ACELERACIÓN MEDIA

Físicamente, representa como varía la velocidad en un intervalo de tiempo. Matemáticamente, se define como el vector que resulta de dividir la variación de velocidad que se ha producido en un intervalo de tiempo entre dicho intervalo.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\breve{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\breve{j}$$

La aceleración media tiene escaso valor práctico. En cambio, la aceleración instantánea tiene una gran importancia. Por tanto, a partir de ahora siempre que hablemos de aceleración nos estaremos refiriendo a la aceleración instantánea.

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Físicamente se define como la aceleración que tiene una partícula en cualquier instante o la aceleración que tiene en cualquier punto de la trayectoria.

Matemáticamente, es el *valor límite que toma la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero*: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

La expresión de la aceleración instantánea en sus componentes cartesianas es:

$$\vec{a} = a_x\breve{i} + a_y\breve{j}$$

El módulo de la aceleración instantánea será: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

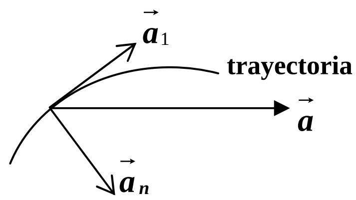
Además, la aceleración instantánea es igual a la suma de dos aceleraciones, una en la dirección de la tangente **–aceleración tangencial–** y otra en la dirección normal **–aceleración normal–** en cada punto de la trayectoria.

Estas dos aceleraciones reciben el nombre de *componentes intrínsecas* de la aceleración.

La aceleración tangencial es un vector cuya dirección es tangente a la trayectoria en cada punto y su sentido coincide con el sentido del movimiento. Es debida a la variación de velocidad en valor numérico.

La aceleración normal es un vector cuya dirección es normal a la trayectoria y sentido hacia el centro de la curvatura. Es debida al cambio de dirección y recibe el nombre de **aceleración centrípeta**.

La expresión de la aceleración instantánea referida a un sistema intrínseco a la trayectoria tiene dos componentes: $\vec{a} = a_1\breve{\tau} + a_n\breve{\eta}$



La aceleración se mide en $\frac{m}{s^2}$ en el S.I. de unidades.

TIPOS DE MOVIMIENTOS

Los distintos movimientos que puede tomar una partícula se clasifican atendiendo fundamentalmente a dos criterios: la trayectoria y la aceleración.

- Según la trayectoria los movimientos pueden ser:

  Rectilíneos si la trayectoria es una recta.
  Curvilíneos si la trayectoria es una curva: circulares, parabólicos, etc.

- Según la aceleración los movimientos se clasifican en:

  Uniformes si no tienen aceleración
  Acelerados si tienen aceleración. Si esta es constante el movimiento se llama uniformemente acelerado.

CINEMÁTICA DE ALGUNOS MOVIMIENTOS:

MOVIMIENTO UNIFORME

En particular estudiaremos el **movimiento rectilíneo uniforme**.
Un movimiento es rectilíneo y uniforme *cuando su velocidad es constante*.
Esto supone:

- La velocidad es constante en dirección y sentido, la trayectoria es una recta.
- La velocidad es constante en módulo, recorre espacios iguales en tiempos iguales.

También se puede definir en función de la aceleración diciendo: Movimiento rectilíneo y uniforme es aquel que no tiene aceleración.

La ecuación vectorial del movimiento es: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t\,, t \geq 0$. Para este movimiento podemos elegir un sistema de referencia unidimensional, haciendo que uno de los ejes, por ejemplo el eje x, coincida con la dirección del movimiento: $r\,(x,0,0)$

Así, la ecuación anterior se reduce a una ecuación escalar:

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt}$$

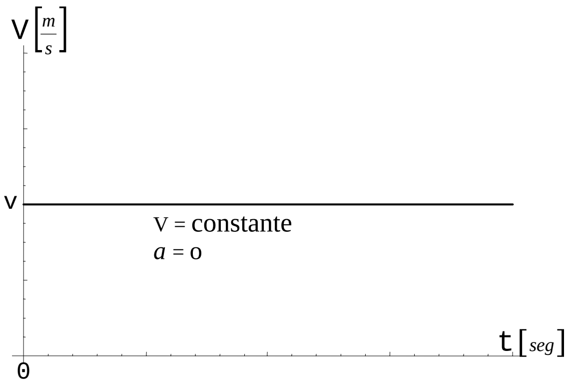
Esta es la ecuación de la posición, también llamada **ecuación horaria**.

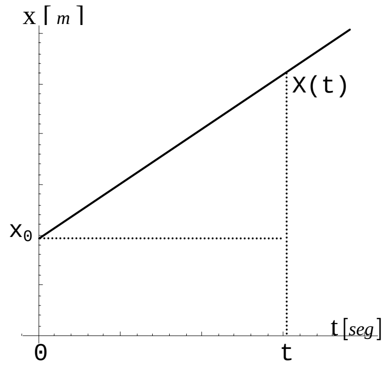
Diagramas del movimiento rectilíneo y uniforme:

a) Diagrama v-t: Es la representación gráfica de la función $v = f(t)$. Se trata de una recta paralela al eje de los tiempos.

b) Diagrama *x-t*: Es la representación gráfica de la función $x = f(t), (x(t) = x_0 + vt)$. Se trata de una recta cuya ordenada al origen x_0 es la posición inicial, y cuya pendiente es la velocidad.

En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad media y la velocidad instantánea coinciden. Los diagramas mencionados se muestran a continuación:





Abordemos ahora algún problema que se presenta al tratar con situaciones que involucran este tipo de movimiento, estas son por ejemplo, los llamados <u>encuentros</u>.

<u>Problema</u>:

Un automóvil sale de Buenos Aires con destino a Rosario a una velocidad constante de $120\frac{km}{h}$ por un camino recto, y simultáneamente parte desde Rosario hacia Buenos Aires otro automóvil a $80\frac{km}{h}$. Si la distancia entre ambas ciudades es de 300*km*, determine gráfica y analíticamente:

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo desde la partida se producirá el encuentro?

b) ¿A qué distancia de Buenos Aires se cruzarán?

<u>Solución</u>:

Considerado un sistema de referencia, se determinan las ecuaciones de movimiento $x_1(t)$ y $x_2(t)$. La condición del encuentro nos impone que en algún instante las posiciones de ambos móviles sean coincidentes, es decir, si $t = t_e$ entonces $x_1(t_e) = x_2(t_e)$. Este planteo nos permite resolver el problema gráfica y analíticamente.

Elegimos un sistema de coordenadas con origen en Buenos Aires y de dirección y sentido hacia Rosario.

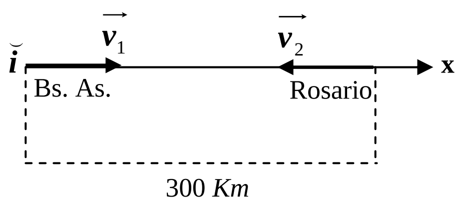


Diagrama con las condiciones iniciales del problema

Como los móviles parten simultáneamente se comienza a contar los tiempos desde el momento de la partida. La ecuación que describe el movimiento es: $x(t) = x_0 + vt$.

Para el auto que parte desde Buenos Aires, como este sale del origen de coordenadas se considera $x_{01} = 0$ y como su velocidad es coincidente con el sentido positivo del sistema de referencia la misma es $\vec{v}_1 = 120\,\breve{i}$, que en términos de la ecuación horaria correspondiente al móvil (ecuación escalar) será: $v_1 = 120\dfrac{km}{h}$. El auto que parte de Rosario se halla a $300km$ en el sentido positivo del sistema de referencia en el instante del origen de tiempos, por lo tanto $x_{02} = 300km$ y se desplaza con velocidad de sentido opuesto al positivo del sistema, es decir que $\vec{v}_2 = -80\,\breve{i}$, velocidad que en la ecuación horaria correspondiente a este móvil se considerará $v_2 = -80\dfrac{km}{h}$.

Las ecuaciones horarias en ambos móviles resultan:

$$x_1(t) = 120\,t$$

$$x_2(t) = 300 - 80\,t$$

En las cuales t es positivo o nulo y se mide en horas, y x se mide en kilómetros.

Planteamos la condición de encuentro: $x_1(t_e) = x_2(t_e) \Rightarrow 120\,t = 300 - 80\,t$

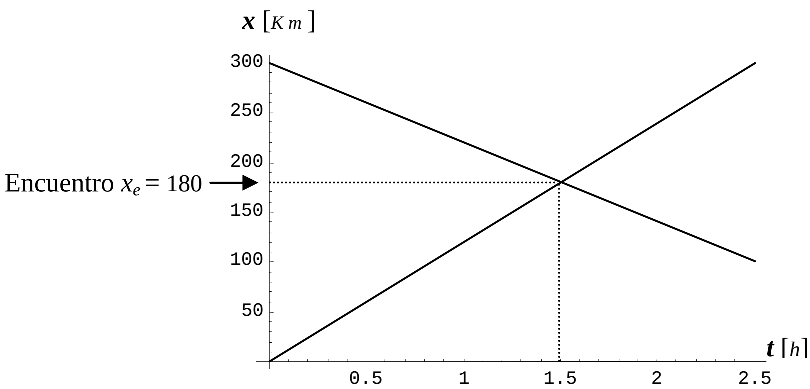
$t_e = \dfrac{300km}{(120 + 80\dfrac{km}{h})} = 1{,}5h$ los automóviles se encuentran a la hora y media del instante de haber partido.

El automóvil que partió desde Buenos Aires ha recorrido en ese tiempo: $x_1(1{,}5) = 120\dfrac{km}{h}1{,}5h = 180km$, y como consecuencia a la condición de encuentro, la coordenada de la posición del automóvil que partió desde Rosario es: $x_2(1{,}5) = 180km$.

El automóvil que partió desde Rosario recorrió una distancia igual a:

$\left|x_2(t_e) - x_2(0)\right| = \left|180km - 300km\right| = 120km$

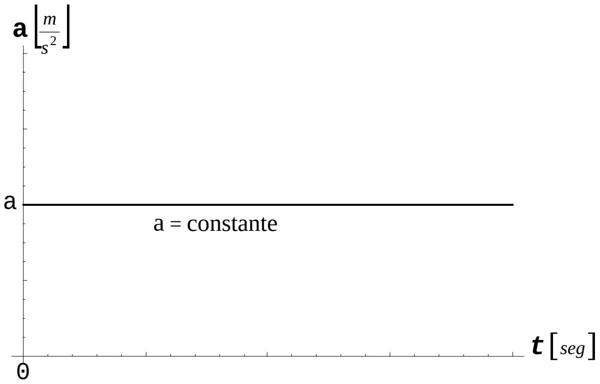
Podemos resolver el problema gráficamente representando las ecuaciones horarias $x = x_1(t)$ y $x = x_2(t)$, y encontrar el instante t_e para el cual las gráficas se cortan:



Es clara la coincidencia de resultados entre la resolución gráfica y la analítica.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Se llama movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a aquel movimiento que no tiene aceleración normal y su aceleración tangencial es constante.
Si elegimos como sistema de referencia la dirección del movimiento, igual que hicimos en el movimiento rectilíneo uniforme, todas las magnitudes vectoriales se convierten en escalares.
En este movimiento la aceleración media es constante, es decir, no depende del intervalo de tiempo Δt considerado y en consecuencia esta coincide con la aceleración instantánea.
Por lo tanto la representación gráfica de la función $a = f(t)$ es una recta paralela al eje de los tiempos.



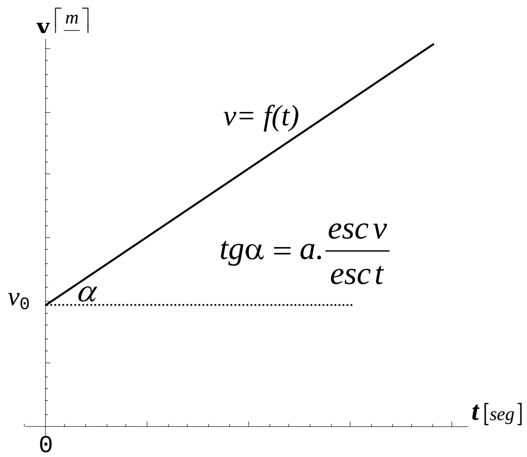
Entonces se puede obtener la ecuación de la velocidad en cualquier instante:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

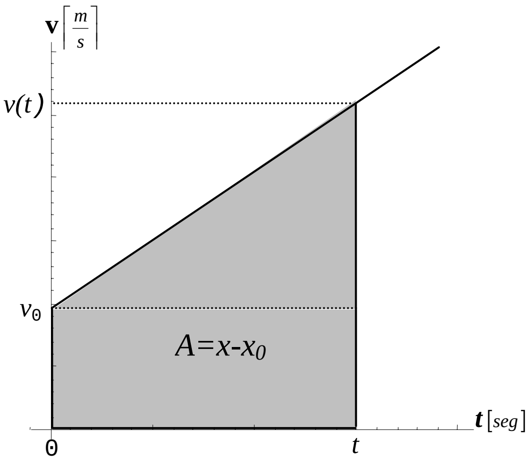
En la cual la velocidad v_0 es aquella que posee el móvil en el instante t_0, si consideramos a $t_0 = 0$ como el origen de la medición de tiempos en el movimiento, entonces la velocidad v_0 se llama velocidad inicial y la ecuación que permite calcular la velocidad en cualquier instante adquiere la forma:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at}$$

La representación gráfica de la función $v = f(t)$ es una recta cuya ordenada al origen es la velocidad inicial y cuya pendiente es la aceleración.



Para hallar la ecuación de la posición en cualquier instante, es decir la **ecuación horaria** de este movimiento, se puede demostrar que la misma se obtiene calculando el área que limita la gráfica anterior y el eje de los tiempos.



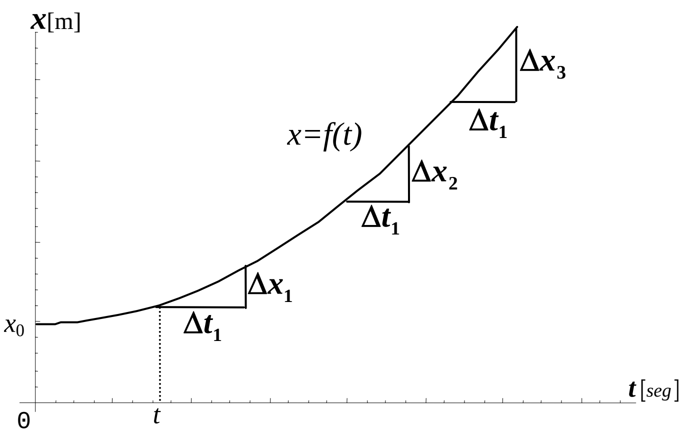
El desplazamiento en el movimiento que estudiamos queda definido por la diferencia $x - x_0$, en la cual x es la posición alcanzada en el instante t y x_0 es la posición inicial.
El área sombreada en la gráfica anterior es:

$$A = x - x_0 = \frac{\left(v(t) - v_0\right)t}{2} + v_0 t$$

Entonces si, $v(t) = v_0 + at$, nos queda finalmente:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}at^2}$$

Esta es la llamada **ecuación horaria** del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y nos permite calcular la posición del móvil en cualquier instante.
La representación gráfica de la función $x = f(t)$ es una parábola cuya ordenada al origen es la posición inicial y la pendiente de la recta tangente a la gráfica en cualquier instante es el módulo de la velocidad instantánea.



Se puede apreciar como a intervalos de tiempo iguales entre sí, Δt_1, se producen desplazamientos cada vez mayores: $\Delta x_1 < \Delta x_2 < \Delta x_3 \ldots$ etc. Esto indica que el módulo de la velocidad aumenta a cada instante.

Problema:

Un tren parte de una estación con aceleración constante y al cabo de 10 segundos alcanza una velocidad de $72\frac{km}{h}$. Mantiene esta velocidad durante 2 minutos. Al llegar a la estación siguiente frena uniformemente recorriendo 200 metros hasta parar. Se supone movimiento rectilíneo. Calcule:

a) La aceleración en la primera etapa del movimiento.
b) El espacio que recorre mientras acelera.
c) La aceleración que tiene en la última etapa.
d) Tiempo que ha estado en movimiento.
e) Espacio total recorrido.
f) Dibuje los diagramas $a = f(t)$ y $v = f(t)$.

Solución:

Primera etapa:

a) Tomamos como referencia la estación de partida: $x = 0 \quad v_0 = 72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{s} \quad t = 10s.$

La aceleración es: $a = \frac{v(t) - v_0}{t} = \frac{20\frac{m}{s} - 0}{10s} = 2\frac{m}{s^2}$

b) El espacio recorrido es: si $x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}at^2$ entonces $s = x(t) - x_0 = v_0\, t + \frac{1}{2}at^2$

$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\ 2\frac{m}{s^2}100s^2 = 100\, m$

Última etapa:

$v_0 = 20\frac{m}{s} \qquad v(t) = 0 \qquad s = x(t) - x_0 = 200\, m$

De la ecuación horaria $x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}a\,t^2$ y de la ecuación de la velocidad $v(t) = v_0 + at$ eliminando el tiempo se obtiene la relación:

$$\boxed{v(t)^2 - v_0{}^2 = 2a(x(t) - x_0)}$$

Esta última es muy útil en la práctica pues relaciona la velocidad con la posición, entonces:

c) La aceleración en la última etapa es: $a = \frac{v(t)^2 - v_0{}^2}{2s} = \frac{0 - 400\frac{m^2}{s^2}}{400m} = -1\frac{m}{s^2}$

El tiempo que ha tardado en parar es: $t = \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{0 - 20\frac{m}{s}}{-1\frac{m}{s^2}} = 20\ s$

d) Tiempo en movimiento:

Primera etapa: $t_1 = 10\, s$

Segunda etapa: $t_2 = 2\min = 120\, s$

Última etapa: $t_3 = 20\, s$

El tiempo total en movimiento es: $t = 150\, s$

e) El espacio total recorrido:

Primera etapa: $s_1 = 100\,m$

Segunda etapa: $s_2 = v\,t = 20\dfrac{m}{s}120\,s = 2400\,m$

Última etapa: $s_3 = 200\,m$

El espacio total recorrido es: $s = 2700\,m$

f) Diagrama $a = f(t)$:

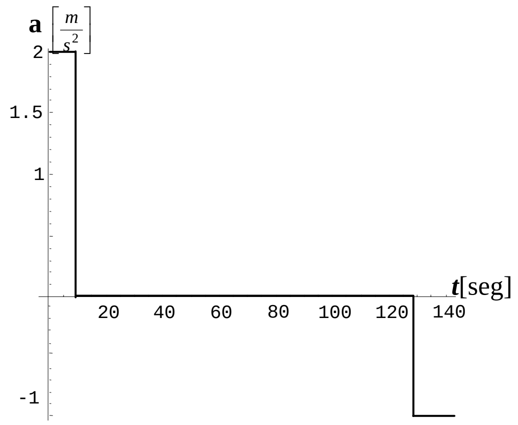
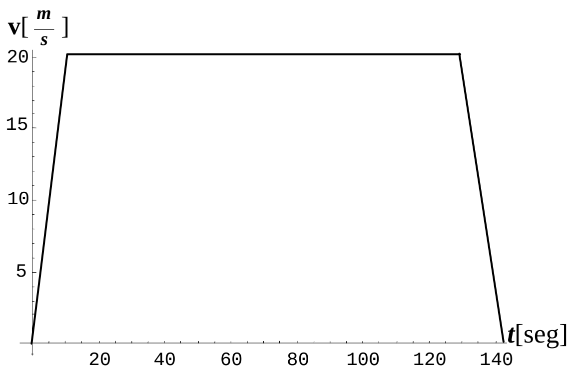


Diagrama $v = f(t)$:



Vemos ahora un problema de encuentro.

Problema:

En el momento en que se enciende la luz verde de un semáforo, arranca un automóvil con una aceleración constante de $4\dfrac{m}{s^2}$. En ese instante, un camión que lleva una velocidad constante de $16\dfrac{m}{s}$ alcanza y rebasa al automóvil. En dicho momento ambos vehículos se encuentran en el mismo lugar.

a) ¿Cuánto tiempo tardará el automóvil en alcanzar al camión?
b) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el automóvil al camión?
c) ¿A qué velocidad irá el automóvil en el momento de alcanzar al camión?
d) Determine gráficamente las respuestas de los ítems (a) y (b).

<u>Solución</u>:

Tomamos como origen del sistema de referencia al semáforo. Los movimientos de ambos móviles son rectilíneos, el camión esta animado de un movimiento rectilíneo uniforme y el automóvil de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.
Considerando el origen de tiempos, $t_0 = 0$, el instante en que se pone el semáforo en verde se cumplirá que: $x_{0a} = x_{0c} = 0$. Dado este sistema de referencia la velocidad inicial para el automóvil es $v_{0a} = 0$ y la velocidad del camión es $v_c = 16\dfrac{m}{s}$.

a) La condición de encuentro es $x_a(t_e) = x_c(t_e)$, es decir planteamos que:

$$x_{0c} + v_c t = x_{0a} + v_{0a} + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{con } t = t_e$$

$$16\frac{m}{s}t = \frac{4}{2}\frac{m}{s^2}t^2$$

La ecuación a resolver es: $2t^2 - 16t = 0 \Rightarrow t(2t - 16) = 0$

Las soluciones de la misma son entonces: $t_e = 0$ y $t_e = 8\,s$

Es decir que el automóvil tardará 8 segundos en volver a encontrarse con el camión. Decimos "volver" a encontrarse puesto que en el instante $t_e = 0$ los móviles estaban juntos en el semáforo.

b) El automóvil alcanzará al camión la distancia dada por: $x_a(t_e) = x_a(8)$

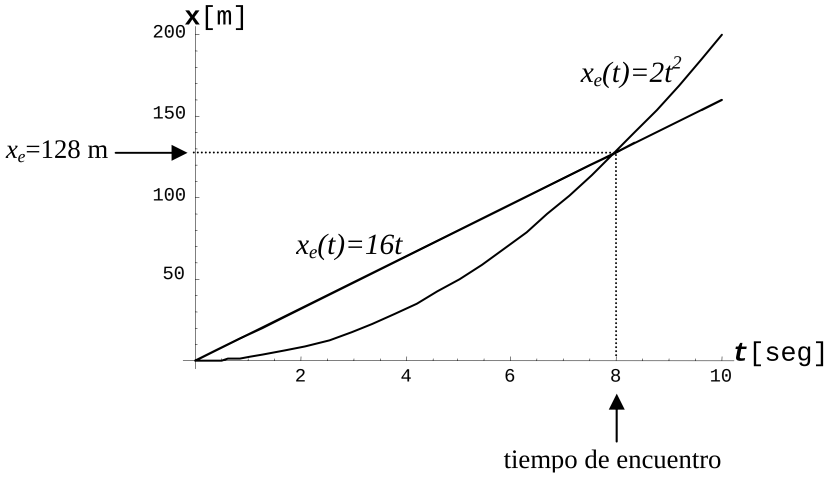
$$x_a(8) = \frac{1}{2}4\frac{m}{s^2}64\,s^2 = 128\,m$$

Esta distancia también estará dada por: $x_c(t_e) = x_c(8) = 16\dfrac{m}{s}8\,s = 128\,m$

c) Al momento de alcanzar al camión el automóvil se mueve con una velocidad de:

$$v_a(t_e) = v_{0a} + a\,t_e = 4\frac{m}{s^2}8\,s = 32\frac{m}{s}$$

d) La representación gráfica del problema la obtenemos representando la función $x = f(t)$ de ambos móviles:



Caída de los cuerpos. Tiro vertical.

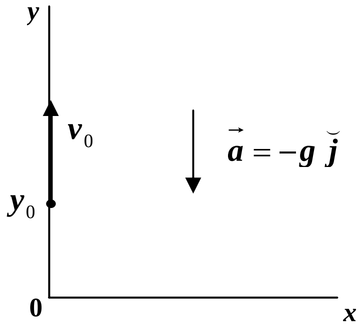
Un ejemplo de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es el de un cuerpo que cae hacia la Tierra. Si no hay resistencia del aire la experiencia muestra que todos los cuerpos, independientemente de su forma, tamaño y peso, caen con la misma aceleración en la misma región de la superficie terrestre. Esta aceleración es constante y se denomina **aceleración de la gravedad**, es un vector cuya dirección es vertical, su sentido hacia el centro de la Tierra y cuyo módulo cerca de la superficie terrestre vale aproximadamente: $g = 9{,}8 \dfrac{m}{s^2}$. A este movimiento lo llamaremos caída libre.

"Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco cada vez más velocidad.¿Por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien; si observamos con cierta atención el problema; no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera". (Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre Dos Nuevas Ciencias. Jornada tercera. Galileo Galilei. 1638)

Recibe el nombre de **proyectil** todo cuerpo que una vez disparado, se mueve bajo la acción de la gravedad. Cuando lanzamos un cuerpo desde la superficie de la Tierra hacia arriba según una trayectoria rectilínea se tratará del movimiento de un proyectil. En particular, a este movimiento lo llamamos tiro vertical.

Este movimiento es también un ejemplo de movimiento uniformemente acelerado.
Como en ambos movimientos las trayectorias son rectilíneas las ecuaciones vectoriales se reducen a ecuaciones escalares si el sistema de referencia se adopta según la dirección del movimiento.

Se trata de estudiar el movimiento de un cuerpo lanzado hacia arriba. El punto 0 es el origen del sistema de referencia y la dirección del movimiento el eje *y*.



La aceleración del movimiento, según el sistema de referencia, en términos escalares es:

$$a = -g.$$

A la posición de cuerpo en cualquier instante se le da el nombre de altura, y dicha posición es:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

La velocidad en cualquier instante es: $v(t) = v_0 - gt$

<u>Problema</u>:

Desde la azotea de un edificio de 80 metros de altura se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de $20 \dfrac{m}{s}$. Calcule:

a) La altura respecto de la calle a la que se encuentra 1 segundo después de ser lanzada.
b) Altura máxima que alcanza sobre la calle.

c) Posición respecto de la calle a los 4 segundos.
d) Tiempo que tarda en llegar a la calle.
e) Velocidad que tiene a los 3 segundos.
f) Velocidad con que llega al suelo.

Solución:

Resolvemos el problema tomando el suelo como punto de referencia.

a) La altura respecto de la azotea es: $y_a = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 20 \frac{m}{s} 1\,s - \frac{1}{2} 9{,}8 \frac{m}{s^2} 1\,s^2 = 15{,}1\,m$

Altura respecto del suelo: $y(1) = 80m + 20 \frac{m}{s} 1\,s - \frac{1}{2} 9{,}8 \frac{m}{s^2} 1\,s^2 = 95{,}1\,m$

b) Alcanzará la altura máxima cuando $v(t) = 0$: $v(t) = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v(t) - v_0}{-g}$

$$t = \frac{-20 \frac{m}{s}}{-9{,}8 \frac{m}{s^2}} \cong 2\,s$$

Hasta este instante el movimiento de la piedra es un tiro vertical, a partir de este instante la misma estará animada del movimiento de caída libre.

La altura máxima respecto de la calle es:

$$y_m = y(2) = 80m + 20 \frac{m}{s} 2\,s - \frac{1}{2} 9{,}8 \frac{m}{s^2} 4\,s^2 = 100{,}4\,m$$

c) Altura a los 4 segundos respecto del suelo:

$$y(4) = 80m + 20 \frac{m}{s} 4\,s - \frac{1}{2} 9{,}8 \frac{m}{s^2} 16\,s^2 = 81{,}6\,m$$

d) Llega a la calle cuando $y(t) = 0 \Rightarrow 80 + 20\,t - \frac{1}{2} 9{,}8\,t^2 = 0$ (no hemos escrito las unidades para que reconozca fácilmente la ecuación de segundo grado).

Las soluciones de la misma son:

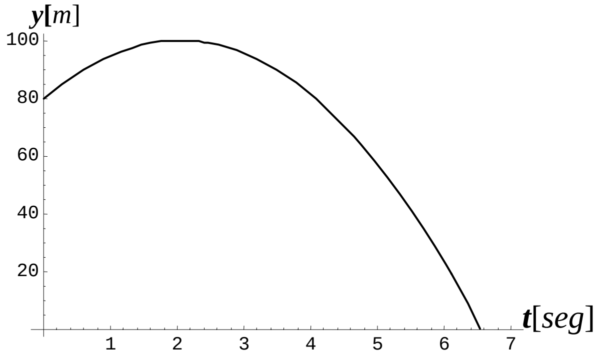
$$t_1 = \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 4.80.4{,}9}}{-9{,}8} \cong -2{,}48\,s \qquad t_2 = \frac{-20 - \sqrt{20^2 + 4.80.4{,}9}}{-9{,}8} \cong 6{,}56\,s$$

La primera de estas soluciones debe ser descartada por tratarse de un valor negativo de tiempo, la piedra llega al suelo después de aproximadamente 6,56 segundos de ser lanzada.

e) $v(t) = v_0 - gt \Rightarrow v(3) = 20 \frac{m}{s} - 9{,}8 \frac{m}{s^2} 3\,s = -9{,}4 \frac{m}{s}$ el signo menos indica que la piedra en ese momento está bajando (recuerde que el sistema de referencia tiene sentido positivo según la dirección positiva del eje *y*). En este instante la piedra está animada con un movimiento de caída libre.

f) $v(6{,}56) = 20\dfrac{m}{s} - 9{,}8\dfrac{m}{s^2}6{,}56\,s = -44{,}28\dfrac{m}{s}$

Podemos graficar la altura alcanzada por la piedra en función del tiempo a partir de la ecuación $y(t) = 80 + 20t - \dfrac{1}{2}9{,}8t^2$



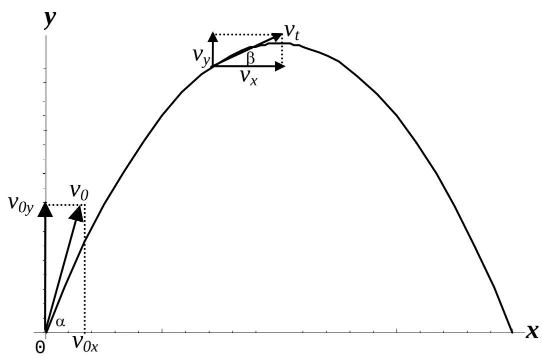
MOVIMIENTO EN UN PLANO. TIRO OBLICUO.

En los movimientos rectilíneos considerados hasta aquí el vector velocidad y el vector aceleración tienen la misma dirección, es decir son colineales.

Cuando este no se cumple, el movimiento se realiza en una trayectoria curva, un ejemplo de esto es el llamado tiro oblicuo donde el vector aceleración es constante pero no es colineal con el vector velocidad. Este movimiento también se llama: movimiento de los proyectiles.

El tiro oblicuo tiene lugar cuando la velocidad inicial forma un ángulo α con el horizonte. El movimiento se realiza en un plano. Para determinar este plano se toma como referencia un sistema cartesiano cuyo origen es el punto de lanzamiento, cuyo eje *x* es la horizontal y cuyo eje *y* es la vertical.

"Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe con dicho movimiento una línea semiparabólica" (consideraciones y demostraciones matemáticas sobre Dos Nuevas Ciencias. Jornada cuarta. Galileo Galilei. 1638).



La velocidad para $t = 0$ recibe el nombre de velocidad inicial o velocidad de disparo, el ángulo α recibe el nombre de ángulo de tiro o ángulo de elevación.

La velocidad inicial se puede descomponer en dos velocidades según los ejes de referencia:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 sen\alpha \end{cases}$$

Así, el movimiento del proyectil se puede considerar como el movimiento resultante de otros dos:

- Movimiento horizontal: es un movimiento uniforme con $a_x = 0$.
- Movimiento vertical: es un movimiento uniformemente acelerado con $a_y = -g$.

Las ecuaciones del movimiento horizontal son: $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ x(t) = v_x t = v_0 \cos\alpha\, t \end{cases}$

Las ecuaciones del movimiento vertical son: $\begin{cases} v_y = v_0 sen\alpha - g\,t \\ y(t) = v_0 sen\alpha\ t - \frac{1}{2} g\,t^2 \end{cases}$

Velocidad instantánea del proyectil: $\vec{v}_t = v_x \breve{i} + v_y \breve{j}$ o $\vec{v}(v_x, v_y)$, el módulo de dicha velocidad es: $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Pendiente de $\vec{v}: tg\,\beta = \frac{v_y}{v_x}$

Posición instantánea: $\vec{r} = x\,\breve{i} + y\,\breve{j}$ o $\vec{r}(x, y)$.

<u>Problema</u>:

Un cañón dispara un proyectil con una velocidad de $400\frac{m}{s}$ y un ángulo de elevación de 30º. Calcule:

a) La posición y la velocidad del proyectil a los 5 segundos.
b) ¿En qué instante el proyectil se encuentra a 1000 metros de altura? ¿Qué velocidad tiene en esos instantes?
c) Altura máxima alcanzada por el proyectil.
d) Velocidad en ese instante.
e) Alcance máximo.
f) ¿Con qué velocidad llega a la horizontal del punto de lanzamiento?
g) Ecuación de la trayectoria. Considere $g = 10\frac{m}{s^2}$.

<u>Solución</u>:

a) Posición a los 5 segundos: $x(5) = 400\frac{m}{s}\frac{\sqrt{3}}{2} 5\,s = 1000\sqrt{3}\,m$

$y(5) = 400\frac{m}{s}\frac{1}{2}5\,s - \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2}\,25\,s^2 = 875\,m$ entonces $\vec{r}_5(1000\sqrt{3}, 875)$.

Velocidad a los 5 segundos: $v_x = 400\frac{m}{s}\frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}\frac{m}{s}$

$v_y = 400\frac{m}{s}\frac{1}{2} - 10\frac{m}{s^2}5\,s = 150\frac{m}{s}$ entonces $\vec{v}_5\left(200\sqrt{3}, 150\right)\frac{m}{s}$

El módulo de dicha velocidad es: $v_5 = \sqrt{\left(200\sqrt{3}\right)^2 + 150^2} \cong 377{,}49\frac{m}{s}$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{150}{200\sqrt{3}} = 0{,}43 \Rightarrow \beta = 23{,}4°$$

A los 5 segundos el proyectil se encuentra en un punto situado a una distancia horizontal de $200\sqrt{3}$ metros y a una altura de 150 metros. En ese instante su velocidad es de $377{,}49\,\frac{m}{s}$ y forma un ángulo de 23,4º con la horizontal.

b) Se encontrará a 1000 metros de altura cuando $y(t) = 1000\ m$.

$$v_0 sen\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 1000 \Rightarrow 400\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} 10\, t^2 = 1000$$

$$5\,t^2 - 200\,t + 1000 = 0 \Rightarrow t^2 - 40\,t + 200 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $t_1 \cong 5{,}86\, s$ y $t_2 \cong 34{,}14\, s$.

La velocidad en esos instantes es:

Velocidad para $t_1 = 5{,}86\ s$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha = 200\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \quad \text{y} \quad v_y = v_0 sen\alpha - g t_1 = 141{,}4\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{t1}\left(200\sqrt{3},\ 141{,}4\right)\frac{m}{s} \Rightarrow v_{t1} = \sqrt{\left(200\sqrt{3}\right)^2 + 141{,}4^2} = 374{,}15\,\frac{m}{s}$$

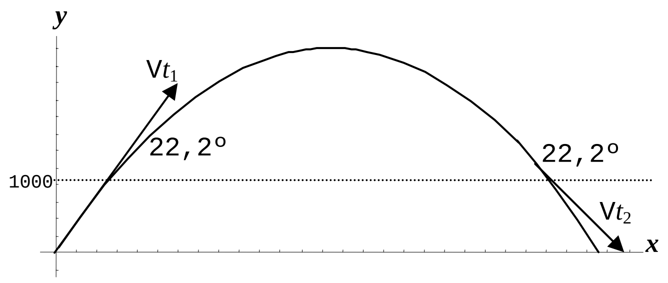
$$tg\,\beta = \frac{141{,}4}{200\sqrt{3}} = 0{,}4 > 0 \Rightarrow \beta = 22{,}2° \qquad \text{El proyectil esta subiendo.}$$

Velocidad para $t_2 = 34{,}14\ s$:

$$v_x = v_0 \cos\alpha = 200\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \quad \text{y} \quad v_y = v_0 sen\alpha - g t_2 = -141{,}4\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{t2}\left(200\sqrt{3}, -141{,}4\right)\frac{m}{s} \Rightarrow v_{t2} = \sqrt{\left(200\sqrt{3}\right)^2 + \left(-141{,}4\right)^2} = 374{,}15\,\frac{m}{s}$$

$$tg\,\beta = \frac{-141{,}4}{200\sqrt{3}} = -0{,}4 < 0 \Rightarrow \beta = -22{,}2° \qquad \text{El proyectil esta bajando.}$$



Hay dos instantes para los cuales el proyectil se encuentra a la misma altura. Para el tiempo más pequeño está subiendo y para el mayor está bajando. En ambos instantes el módulo de la velocidad es el mismo.

c) Se alcanza la altura máxima cuando: $v_y = 0$

$$v_0 \; sen\,\alpha - gt = 0 \;\Rightarrow t = \frac{-v_0 \; sen\,\alpha}{-g} = \frac{-200\,\frac{m}{s}}{-10\,\frac{m}{s^2}} = 20\;s$$

Este es el tiempo que tarda en alcanzar dicha altura, luego:

$$y_m = y(20) = 400\frac{m}{s}\;\frac{1}{2}20\;s - \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2}400\;s^2 = 2000\;m$$

d) La velocidad en la altura máxima es:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha = 200\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \\ v_y = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad v = 200\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

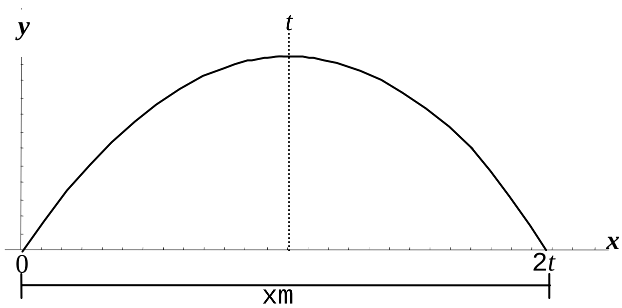
$$tg\,\beta = \frac{v_y}{v_x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta = 0$$

e) El proyectil tiene el alcance máximo cuando: $y(t) = 0$

$$y(t) = v_0 \; sen\,\alpha\; t - \frac{1}{2} g\; t^2 = 0 \;\Rightarrow 200\,t \;-\; 5\,t^2 = 0$$

$t_1 = 0$ *El proyectil se encuentra en el punto de partida.*

$t_2 = 40\;s$



El proyectil tarda 40 segundos en volver a la horizontal del punto de partida, observe que el tiempo que tarda en volver al suelo es el doble de lo que tarda en subir.

Sustituyendo en la fórmula de desplazamiento horizontal este tiempo de 40 segundos se obtiene:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\; t_2 \quad\Rightarrow\quad x_m = x(40) = 400\frac{m}{s}\frac{\sqrt{3}}{2}40\;s$$

$$x_m = 8000\sqrt{3}\;m$$

f) Velocidad con la que llega al suelo:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha = 200\sqrt{3}\,\dfrac{m}{s} \\ v_y = v_0 sen\,\alpha - g t_2 = 200\,\dfrac{m}{s} - 400\,\dfrac{m}{s} = -200\,\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(200\sqrt{3}\right)^2 + (-200)^2} = 400\,\frac{m}{s}$$

$$tg\,\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-200}{200\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \beta = -30°$$

Vuelve al suelo con la misma velocidad en módulo con que salió y formando el mismo ángulo con la horizontal, aunque de sentido contrario.

NOTA: En este problema cuando hacemos referencia al suelo nos referimos a la horizontal del punto de salida.

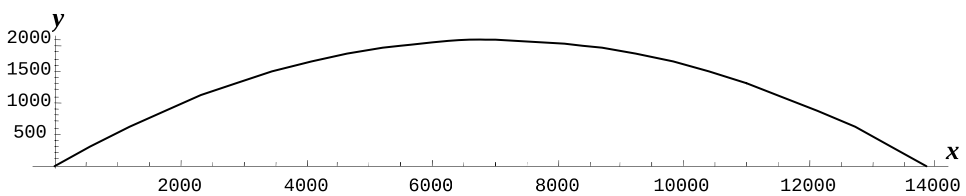
g) Para hallar la ecuación de la trayectoria eliminamos t en las componentes del vector posición, estamos buscando la función $y = f(x)$.

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = v_0 sen\,\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 sen\,\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$y = x\, tg\,\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{24000}$$

Es una parábola del tipo $y = ax^2 + bx$



Problema:
Referido al sistema de ejes cartesianos XY, se sabe que la trayectoria de un móvil está dada por la función $y = -x^2 + 400$ *con* $0 \le x \le 20$ y que en el instante inicial $t = 0$ es $x = 0$. Determine a) el vector posición inicial b) tiempo que tarda en llegar a tierra. c) el vector posición cuando llega a tierra. d) vector velocidad inicial e) vector velocidad final f) ecuaciones horarias del espacio y la velocidad. Adoptar $\left|\overline{g}\right| = 10\,\dfrac{m}{s^2}$.

Resolución

a) Si $y = -x^2 + 400 \ con \ 0 \le x \le 20 \ con \, x = 0 \to y = 400$

$\boxed{vector \ posición \ \overline{X}\left(t=0\right) = \left(0,400\right)m}$ siendo 400 m la altura máxina

b) el tiempo que tarda en llegar a tierra es:

$$\boxed{y\left(0\right) \to v_{0y} = 0 \to \quad y\left(t\right) = 0 = y\left(0\right) - \frac{gt^2}{2} \to t = \sqrt{\frac{400}{5}} = \sqrt{80}\, s}$$

c) $y = -x^2 + 400 \ con \ 0 \le x \le 20 \ con \, y = 0 \to x = 20$

$\boxed{vector \ posición \ \overline{X}\left(t=\sqrt{80}\right) = \left(20,0\right)m}$

d) El vector velocidad inicial tiene componente en x y el móvil tarda en caer $\sqrt{80}\, s$

por lo que surge que $x\left(\sqrt{80}\right) = v_{0x}.t \to v_{0x} = \dfrac{20}{\sqrt{80}} = \sqrt{5}\,\dfrac{m}{s}$ y el vector velocidad inicial

$$\boxed{\overline{v_0} = \left(\sqrt{5},0\right)\frac{m}{s}}$$

e) $v_{f\,y}\left(\sqrt{80}\right) = -10\sqrt{80} = -20\sqrt{20}\,\dfrac{m}{s} \qquad v_{f\,x} = \sqrt{5}\,\dfrac{m}{s}$

$$\boxed{\overline{v_f} = \left(\sqrt{5},-20\sqrt{20}\right)\frac{m}{s}}$$

f)

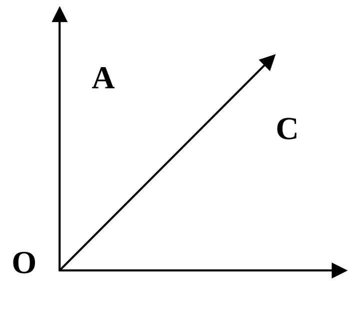
$$\boxed{\begin{cases} y = 400 - 5t^2 \\ x = \sqrt{5}t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y = -10t \\ v_x = \sqrt{5} \end{cases}}$$

UTN – FRBA **MÓDULO B**

TRABAJO PRÁCTICO N ° 7

Vectores

1) De acuerdo con el siguiente gráfico halle:



a) $\overline{OC} - \left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$

b) $\overline{OA} - \left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\overline{OA} + \left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)$

2) Sean α y β número reales, indique cuáles de las siguientes expresiones son escalares y cuáles son vectores, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores de un plano.

a) $-\vec{a}$ b) $|\vec{a}|$ c) $\vec{a}+\vec{b}$ d) $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ e) $\alpha.\,\vec{a}.\vec{b}$

f) $\alpha.\vec{a}$ g) $\alpha\,.\,\beta$ h) $|\vec{a}+\vec{b}|$ i) $\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ j) $\dfrac{\vec{a}}{\beta}$ $\beta \neq 0$

3) Determine la relación que existe entre los vectores **M** y **N** (no nulos) sabiendo que:

a) El vector suma es el vector nulo.
b) El vector diferencia es el vector nulo.
c) El vector suma es cuatro veces el vector diferencia.

Rta.: c) M = $\frac{5}{3}$N

4) Determine: $\frac{2}{5}\vec{a}$, $3.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ y $\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|$ para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dados:

$\vec{a} = (-2{,}5)$ $\vec{b} = (2{,}-8)$

Rta.:
$\left(-\frac{4}{5},2\right)$; $(0,-9)$; $2\sqrt{533}$.

5) Dados los vectores $\vec{u} = (5,-4)$; $\vec{v} = (4,1)$ y $\vec{w} = (1,2)$. Determine, si existen, los escalares λ y β de modo que $\vec{u} = \lambda.\vec{v} + \beta.\vec{w}$

Rta.: $\lambda = 2 \wedge \beta = -3$.

6) Determine las componentes del vector $\vec{x}$ si se verifica la igualdad $3\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{x} = \vec{0}$, siendo $\vec{a} = (-3{,}1)$ $\vec{b} = (-2{,}5)$

Rta.: $\left(-\frac{1}{2},11\right)$

7) Determine los valores reales de *t*, para que el vector $\vec{a} = t\,\breve{i} + (t+1)\,\breve{j}$ tenga módulo $\sqrt{5}$.

Rta.: $t = 1 \vee t = -2$

8) Determine el vector de módulo 4 que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\vec{a} = -6\,\breve{i} + 8\,\breve{j}$.

Rta.: $-\frac{12}{5}\breve{i} + \frac{16}{5}\breve{j}$

9) Dados los vectores $\vec{p} = -3\,\breve{i} + \breve{j}$ y $\vec{q} = 2\,\breve{i} + 3\,\breve{j}$. Calcule:

a) El producto escalar entre los mismos.
b) El ángulo que determinan.
c) El vector proyección de $\vec{p}$ sobre $\vec{q}$.
d) El vector proyección de $\vec{q}$ sobre $\vec{p}$.

Rta.: $a) -3;\ b) 105°15';\ c) -\frac{6}{13}\breve{i} - \frac{9}{13}\breve{j};\ d) \frac{9}{10}\breve{i} - \frac{3}{10}\breve{j}$

10) Determine la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, si se sabe que $\vec{u} = \breve{i} - 4\breve{j}$ y $\vec{v}$ tiene como origen y extremo los puntos (-2,4) y (-5,1) respectivamente.

Rta.: $-\frac{3}{2}\breve{i} - \frac{3}{2}\breve{j}$

11) a) Calcule el producto escalar entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si se sabe que:

$$\left|\vec{a}\right| = 3 \quad \text{y} \quad \vec{a} = -2.\vec{b}.$$

b) Determine un vector ortogonal $\vec{a}$ = (1,7) y de igual módulo.

Rta.: a) $\vec{a}.\vec{b} = -\frac{9}{2}$ b) $(-7,1)$ ó $(7,-1)$

12) Calcule $\left|\vec{x}\right|$ sabiendo que $\vec{a}$ es ortogonal a $\vec{x} - \vec{a}$, $\left|\vec{a}\right| = 2$ y el ángulo que forman $\vec{x}$ y $\vec{a}$ es $\frac{\pi}{4}$

Rta.: $\left|\vec{x}\right| = 2\sqrt{2}$

13) Encuentre el ángulo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si se sabe que $\vec{u} = 3\breve{i} + 4\breve{j}$ y $\vec{v}$ tiene primera componente igual a – 2 y es perpendicular a $\vec{w} = 6\breve{i} + 4\breve{j}$.

Rta.: $70°33'$

14) Dados los puntos *A* = (0,-2); *B* = (-3,0); y *C* = (2,2). Determine:

a) El perímetro del triángulo *ABC*.
b) Los ángulos interiores del triángulo *ABC*.

Rta.: $a) \sqrt{13} + \sqrt{29} + \sqrt{20}$; $b) \hat{A} = 82°52',\ \hat{B} = 55°29',\ \hat{C} = 41°38'$

15) Dados los vectores $\vec{a} = (1,2)$ y $\vec{b} = (3,5)$, descomponga el vector $\vec{b}$ en la suma de dos vectores: uno en la misma dirección que $\vec{a}$ y el otro en una dirección ortogonal al mismo.

Rta.: $\left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right)$ y $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

GUÍA DE EJERCICIOS DE ESTÁTICA

Ejercicio nº1:

Dadas las fuerzas por sus componentes cartesianas, indique su intensidad y ángulo director.

$$\overline{F}_1 = (6,0)N \quad \overline{F}_2 = (-20,0)N \quad \overline{F}_3 = (0,10)N \quad \overline{F}_4 = (0,-30)N$$

$$\overline{F}_5 = (3,4)N \quad \overline{F}_6 = (-20,10)N \quad \overline{F}_7 = (-6,-3)N \quad \overline{F}_8 = (20,-100)N$$

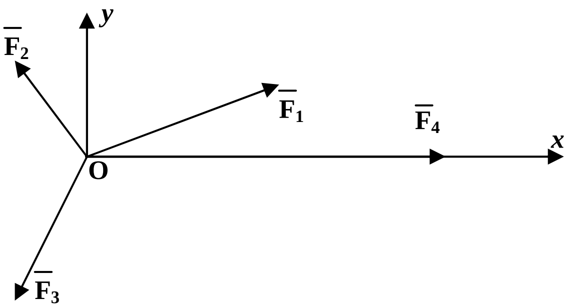
Rta.:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{F}_1 = (6N,0) \quad \overline{F}_2 = (20N,180°) \quad \overline{F}_3 = (10N,90°) \\ \overline{F}_4 = (30N,270°) \quad \overline{F}_5 = (5N,53.1°) \quad \overline{F}_6 = (\sqrt{500}N,153,4°) \\ \overline{F}_7 = (\sqrt{45}N,206,6°) \quad \overline{F}_8 = (\sqrt{10400}N,281,3°)N \end{array}}$$

Ejercicio nº2:

Dado el siguiente sistema plano de fuerzas concurrentes a un punto material, se desea determinar analíticamente la fuerza equilibrante del sistema.

$$\vec{F_1}(0,0) = (100N, 30^o)$$
$$\vec{F_2}(0,0) = (20N, 120^o)$$
$$\vec{F_3}(0,0) = (100N, 240^o)$$
$$\vec{F_4}(0,0) = (200N, 0^o)$$

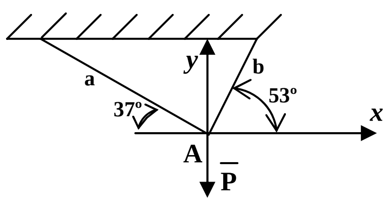


Rta: $\boxed{\overline{E}(0.0) = (-226.6,19.28)N = (227.42N,175.1°)}$

Ejercicio nº3 :

Equilibre la fuerza $\overline{P}(100N,270°)$, con dos fuerzas $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ según las direcciones *a* y *b*, de las barras rígidas de la figura.

Sugerencia: elija arbitrariamente los sentidos de $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ y plantée las condiciones de equilibrio de un sistema concurrente al punto *A*. Al resolver el sistema de ecuaciones si las $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ resultan con signo positivo el sentido elegido es el correcto, si alguna resulta con signo negativo, se debe modificar su sentido por el opuesto al elegido arbitrariamente.



Rta.:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{F}_1 = (-48,36)N = (60N,143°) \\ \overline{F}_2 = (48,64)N = (80N,53°) \end{array}}$$

Ejercicio nº4 :

Dado un sistema plano de fuerzas concurrentes:
$\overline{F_1} = (100{,}100)\,N, \overline{F_2} = (-300, 200)\,N, \overline{F_3} = (200N, 45º), \overline{F_4} = (100N, 150º)$
Determine la fuerza resultante.
Rta: $\mathbf{\overline{E} \cong (-145.5{,}491)N}$
Ejercicio nº5:

Dado un sistema plano de fuerzas concurrentes en equilibrio
$\mathbf{\overline{F_1} = (100, F_{1Y})N, \overline{F_2}(-300{,}200)N, \overline{F_3} = (F_{3X}, -400)N}$
Determine las componentes $\mathbf{F_{1Y}, F_{3X}}$.
Rta: $\mathbf{F_{1Y} = 200\,N, F_{3X} = 200N}$

GUÍA DE EJERCICIOS DE CINEMÁTICA

Problema nº1:

Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación: $x = t^2 - t - 2$, en las unidades del S.I. Calcule:

a) La posición inicial de la partícula.
b) En qué instantes pasa la partícula por el origen de coordenadas.
c) Dónde se encuentra la partícula al cabo de 5 segundos.
d) La velocidad media en el intervalo de tiempo 2 a 3 segundos.

Rta.:

$a)\ x_0 = -2m$

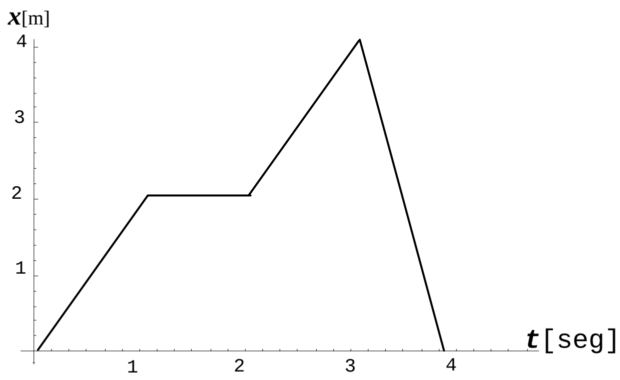
$b)\ t = 2\ s$

$c)\ x(5) = 18m$

$d)\ v_m = 4\dfrac{m}{s}$

Problema nº2:

El diagrama x-t de un movimiento rectilíneo es el siguiente:



a) Dar toda la información que se pueda de este movimiento.
b) Dibuje el diagrama v-t.

Problema nº3:

Un vehículo que tiene un vector velocidad inicial $\overline{v_0} = (15{,}0)\dfrac{m}{s}$ aumenta su velocidad según un vector aceleración $\overline{a} = (1,0)\dfrac{m}{s^2}$. Calcule:

a) La distancia recorrida en 6 segundos.

b) Si disminuye su velocidad a razón de $1\dfrac{m}{s}$ cada segundo, calcule la distancia recorrida en 6 segundos y el tiempo que tardará en detenerse.

Rta.: a) 108 metros b) 72 metros, t = 15 segundos

Problema nº4:

La velocidad de un tren se reduce uniformemente de $12\dfrac{m}{s}$ a $5\dfrac{m}{s}$. Sabiendo que durante ese tiempo recorre una distancia de 100 metros, calcule:

a) El vector aceleración.
b) La distancia que recorre a continuación hasta detenerse suponiendo la misma aceleración.

Rta.: a) $\bar{a} = \left(-0{,}595, 0\right)\dfrac{m}{s^2}$

b) 21 metros

Problema nº5:

Un cuerpo, partiendo del reposo, cae por un plano inclinado sin rozamiento con una aceleración uniforme recorriendo 9 metros en 3 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará en adquirir una velocidad de $24\dfrac{m}{s}$ desde que empieza a moverse?

Rta.: t = 12 s

Problema nº6:

Un automóvil está parado en un semáforo esperando a que se ponga en verde, en el instante en que esto ocurre es adelantado por un camión con vector velocidad constante $\bar{v} = \left(60, 0\right)\dfrac{km}{h}$; 2 segundos más tarde arranca el automóvil con vector aceleración constante $\bar{a} = \left(2, 0\right)\dfrac{m}{s^2}$ y que después de 15 segundos de estar acelerando mantiene la velocidad adquirida. Calcule:

a) ¿A qué distancia del semáforo alcanza el automóvil al camión?
b) ¿Qué vector velocidad tiene el automóvil en ese instante?

Rta.: a) 355,85 metros

b) $\bar{v} = \left(108, 0\right)\dfrac{km}{h}$

Problema nº7:

Desde un punto situado en el vector posición $\bar{r} = \left(0, 100\right)m$ se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con un vector velocidad inicial $\bar{v} = \left(0, 50\right)\dfrac{m}{s}$, 2 segundos más tarde se lanza desde el suelo otro cuerpo verticalmente hacia arriba siendo su vector posición $\bar{r} = \left(10, 0\right)m$ y su vector velocidad $\bar{v} = \left(0, 150\right)\dfrac{m}{s}$. Si se desprecia la resistencia del aire y se considera aceleración de la gravedad $\left|\bar{g}\right| = 9{,}8\dfrac{m}{s^2}$ calcule:

a) ¿Cuánto tiempo desde su lanzamiento tarda el segundo en alcanzar el primero?
b) ¿en qué vector posición lo alcanza?
c) ¿Qué vectores velocidad tiene cada uno en ese instante?
d) ¿Dónde se encuentra el segundo cuando el primero alcanza la altura máxima?
e) ¿Dónde se encuentra el segundo cuando el primero llega al suelo?

Rta.:

$a)\ 1{,}5\ s$

$b)\ \overline{r} = (0,215)\,m$

$c)\ \overline{v_1} = (0{,}15.7)\dfrac{m}{s} \quad \overline{v_2} = (0{,}135.3)\dfrac{m}{s}$

d) $\overline{r_2} = (0,418)\,m$

$e)\ \overline{r_2} = (0{,}1005)\,m$

Problema nº8:

Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde una altura de 50 metros y se observa que tarda 15 segundos en llegar al suelo. Si se desprecia la resistencia del aire y la aceleración de la gravedad vale $\left|\overline{g}\right| = 9,8\dfrac{m}{s^2}$ calcule:

a) ¿Con qué velocidad se lanzó?
b) ¿Qué velocidad tiene 2 segundos antes de llegar al suelo?
c) ¿Con qué velocidad llega al suelo?
d) ¿Qué altura alcanza?

Rta: a) $v_0 = 70{,}16\dfrac{m}{s}$ b) $v = -57\dfrac{m}{s}$ c) $v = -76{,}9\dfrac{m}{s}$ d) 301,14 metros del suelo.

Problema nº9:

Se golpea una pelota de golf de manera que su velocidad inicial forma un ángulo de 45º con la horizontal. La pelota alcanza el suelo a una distancia de 180 metros del punto en que se lanzó. Calcule su velocidad inicial y el tiempo durante el cual ha estado en el aire. Se desprecia la resistencia del aire. $\left|\overline{g}\right| = 9,8\dfrac{m}{s^2}$

Rta.: $v_0 = 42\dfrac{m}{s}$ $t = 6{,}06\, s$

Problema nº10:

Se dispara un cañón con un ángulo de elevación de 30º y un vector velocidad inicial de módulo $\left|\overline{v_0}\right| = 200\dfrac{m}{s}$. Si se desprecia la resistencia del aire. $\left|\overline{g}\right| = 9,8\dfrac{m}{s^2}$ calcule:

a) El alcance horizontal del proyectil.
b) El vector velocidad del proyectil al llegar al suelo.
c) Si a la mitad del recorrido hubiese una colina de 600 metros de altitud, ¿tropezaría con ella?

Rta.: a) 3533,3 metros

b) $\overline{v} = \left(100\sqrt{3}, -100\right)\dfrac{m}{s}$

c) Tropieza

Problema nº11:

Calcule el ángulo de elevación $\alpha < \frac{\pi}{4}$ con el que debe ser lanzado un proyectil con una velocidad inicial de $400\frac{m}{s}$ para alcanzar un blanco situado sobre la horizontal del punto de lanzamiento y a 5000 metros de distancia del punto de disparo. Se desprecia la resistencia del aire.

Rta.: α = 8,9º

Problema nº12:

Se lanza una piedra desde una altura de 1 metro sobre el suelo con una velocidad de $40\frac{m}{s}$ formando un ángulo de 26º con la horizontal. Sabiendo que a una distancia de 120 metros del punto de lanzamiento se encuentra un muro de 2 metros de altura, calcule a qué altura por encima de este pasará la piedra. Se desprecia la resistencia del aire.

Rta.: 3,2 metros

Problema nº13:

Un estudiante quiere lanzar una pelota por encima de una casa de 40 metros de altura situada a 20 metros de distancia. Para ello, lanza la pelota con una velocidad de $40\frac{m}{s}$ y un ángulo de 45º. La pelota abandona la mano del estudiante a una altura de 1,2 metros del suelo. ¿Pasará la pelota por encima del edificio? En caso afirmativo, ¿a qué altura por encima del edificio lo hará? En caso negativo, ¿en qué punto chocará la pelota con el edificio?

Rta.: No pasa y choca con el edificio a 18,75 metros del suelo.

MODELOS DE EXAMENES

Parciales y Finales del
Seminario Universitario

SEMINARIO UNIVERSITARIO

PRIMER PARCIAL – MÓDULO B

Apellido…………………………... Nombre:…………….............Especialidad:....................

Número de documento:................................... Número de Credencial:............................

Nro. de hojas	Ejercicio 1	Ejercicio 2		Ejercicio 3	Ejercicio 4		Ejercicio 5		
		2a	2b		4a	4b	5a	5b	CALIFICACIÓN

Corrigió:................................

Supervisó:..............................

- La duración del examen es 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación: **50% (2,5 ejercicios)** del examen bien resuelto.
  Corresponde nota: 4 (CUATRO)
- No se permite retirarse del aula hasta 20 minutos después de haber comenzado el examen.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas analíticamente por procedimientos matemáticos

1)Determine la medida del lado de un cuadrado, si sabe que el área del cuadrado que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados del primero es 18 cm^2.

2a) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación.

$$0 < \left| \frac{5}{x-1} \right| < 3$$

2b) Encuentre un polinomio de cuarto grado que tenga raíces en 0, -1, 1 y 2 y cuyo término cuadrático tenga coeficiente 5.

3) Luis fue a una ferretería y compró 1 Kg de cada uno de los tres tamaños diferentes de clavos: pequeños, medianos y grandes.
Después de haber realizado cierta parte del trabajo observó que había subestimado la cantidad de clavos pequeños y grandes que necesitaba. Así, compró otra vez la misma cantidad de clavos pequeños y el doble de lo que había comprado de los grandes. Luego de haber avanzado un poco más en su trabajo le volvieron a faltar clavos por lo que necesito comprar otro kilogramo de clavos pequeños y de medianos respectivamente. Cuando vio la factura de la ferretería observó que le habían cobrado 60$ la primera vez, 65$ la segunda y 35$ la tercera.

Los precios de los clavos varían de acuerdo con su tamaño. Encuentre dichos precios.
Justifique su respuesta utilizando el método de eliminación de Gauss.

4a) Determine las raíces enteras de la ecuación $\left|x^2 - 6x + 5\right| + 2x = 5$.

4b) Determine el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x+11} + 1 = x$.

5a) Encuentre analíticamente la ecuación de la función lineal f, tal que
$f(-1) = 2 \ y \ f(3) = 2$. Represente la gráfica de f.

5b) Si V es directamente proporcional a T e inversamente proporcional al cuadrado de R escriba la ecuación que expresa el enunciado y determine el valor de la constante cuando $V = 4,\ si\, T = 2\, y\, R = 3$.

Universidad
Tecnológica
Nacional **Facultad Regional Buenos Aires**

SEMINARIO UNIVERSITARIO

SEGUNDO PARCIAL – MÓDULO B

Apellido………………………….. Nombre:……………..............Especialidad:.....................

Número de documento:................................... Número de Credencial:.............................

Nro. de hojas	Ejercicio 1	Ejercicio 2		Ejercicio 3	Ejercicio 4		Ejercicio 5		
		2a	2b		4a	4b	5a	5b	CALIFICACIÓN

Corrigió:................................

Supervisó:..............................

- La duración del examen es 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación: **50% (2,5 ejercicios)** del examen bien resuelto. Corresponde nota: 4 (CUATRO)
- No se permite retirarse del aula hasta 20 minutos después de haber comenzado el examen.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas analíticamente por procedimientos matemáticos

1) Un barco *B* pide socorro, recibiéndose las señales en dos estaciones de radio, *P* y *Q*, que distan entre si 50km. Desde cada estación se miden los ángulos $B\hat{P}Q$ y $B\hat{Q}P$ que miden 43° y 53° respectivamente. ¿A que distancia de cada estación de radio se encuentra el barco?

2a) Obtenga el conjunto solución de la ecuación $3tg^2 x + 1 = 5\sec x, x \in [0,2\pi)$. Justifique su respuesta.

2b) Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ f(x) = 4\cos\left(kx - \frac{\pi}{4}\right), k > 0$. Determine el conjunto imagen de *f*, y halle la constante *k* de modo que *f* posea período π. Grafique.

3) Desde una altura de 175m se arroja hacia arriba un objeto, cuya velocidad es $v = 8\frac{m}{s}$.

Determine: a) la máxima altura que alcanza el objeto; b) la posición y velocidad del objeto 5s después de ser arrojado; c) el tiempo que tarda en llegar al suelo. Se desprecia la resistencia del aire.

4a) Determine la expresión cartesiana de un vector ortogonal a $\vec{v} = -6.\breve{i} + 10\breve{j}$, si sabe que la suma de sus componentes es 2.

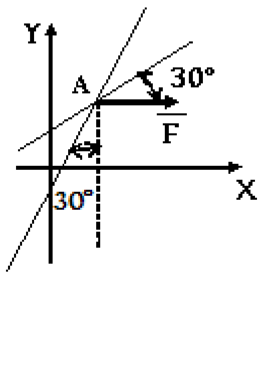
4b) La suma de $\vec{v}$ y $\vec{w} = a^2\breve{i} - 18\breve{j}$ es igual a la diferencia entre $\vec{w}$ y $\vec{u}$. Determine el vector suma de los tres vectores si su módulo es 30.

5a) Dado el siguiente sistema plano de fuerzas concurrentes

$\mathbf{\overline{F}_1(3,4) = (100N,60°), \overline{F}_2(3,4) = (40,0)N, \overline{F}_3(3,4) = (150N,180°)}$

Determine su equilibrante.

5b) Descomponga la fuerza que pasa por el punto $A\mathbf{(1,2)}$, en dos direcciones concurrentes al punto A ,una que forma un ángulo de 30º con la horizontal y la otra 30º con la vertical, según muestra la figura. Datos: $\overline{F}_1(1,2) = (100\ N, 0°)$



SEMINARIO UNIVERSITARIO

EXAMEN FINAL – MÓDULO B

Apellido………………………….. Nombre:……………..............Especialidad:.....................

Número de documento:................................... Número de Credencial:............................

<table>
<tr><td rowspan="2">Nro. de hojas</td><td rowspan="2">Ejercicio 1</td><td colspan="2">Ejercicio 2</td><td rowspan="2">Ejercicio 3</td><td colspan="2">Ejercicio 4</td><td colspan="2">Ejercicio 5</td><td></td></tr>
<tr><td>2a</td><td>2b</td><td>4a</td><td>4b</td><td>5a</td><td>5b</td><td>CALIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Corrigió:................................

Supervisó:..............................

- La duración del examen es 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación: **50% (2,5 ejercicios)** del examen bien resuelto. Corresponde nota: 4 (CUATRO)
- No se permite retirarse del aula hasta 20 minutos después de haber comenzado el examen.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas analíticamente por procedimientos matemáticos

1) El área de un hexágono regular es $150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Determine la medida del lado.

2a) Las raíces reales del polinomio $p(x) = (k^2 - 2k - 8)x^2 - (k^2 - 9)x - 175$ son opuestas. Determine el polinomio diferencia: $p(x) - (6x^2 + x)$.

2b) Las curvas representativas de f y g se intersecan en un punto de abscisa 2 y en otro de abscisa (-1). Sean $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = 5x + 2$ y $g : \Re - \{1\} \to \Re \,/\, g(x) = \dfrac{ax + b}{x - 1}$

Determine las constantes a y b.

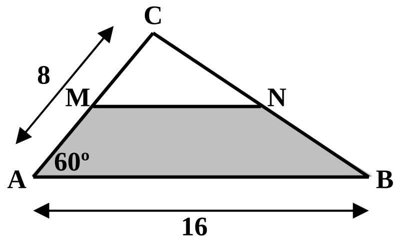
3) Se dispara un proyectil con un ángulo de elevación de 60° y una velocidad inicial de 100 $\frac{m}{s}$.
Determine:

a) el alcance máximo del proyectil.
b) La velocidad del proyectil a los 10 segundos, ¿en ese instante el proyectil sube o baja?

Se desprecia la resistencia del aire.

4a) Determine, si existen, los ceros de la función $f:\Re \to \Re \,/\, f(x) = 2^{2x} - 3.2^{x+2} + 32.$

4b) Si M y N son los puntos medios de los lados del triángulo escaleno y se sabe que la longitud del lado MN es la mitad de la del lado paralelo. Calcule el perímetro del trapecio AMNB.



5a) Encuentre analíticamente la ecuación de la función lineal f, tal que $f(-1) = 2 \;\; y \;\; f(3) = 2$. Represente la gráfica de f.

5b) Si V es directamente proporcional a T e inversamente proporcional al cuadrado de R escriba la ecuación que expresa el enunciado y determine el valor de la constante cuando $V = 4,\; si\, T = 2 \; y \; R = 3$.

Universidad Tecnológica Nacional **Facultad Regional Buenos Aires**

SEMINARIO UNIVERSITARIO

EXAMEN FINAL – MÓDULO B

Apellido………………………….. Nombre:……………..............Especialidad:.....................

Número de documento:................................... Número de Credencial:.............................

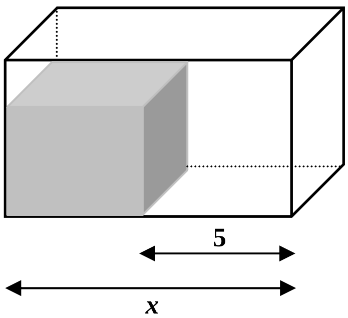
Nro. de hojas	Ejercicio 1	Ejercicio 2		Ejercicio 3	Ejercicio 4		Ejercicio 5		
		2a	2b		4a	4b	5a	5b	CALIFICACIÓN

Corrigió:................................

Supervisó:..............................

- La duración del examen es 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación: **50% (2,5 ejercicios)** del examen bien resuelto. Corresponde nota: 4 (CUATRO)
- No se permite retirarse del aula hasta 20 minutos después de haber comenzado el examen.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas analíticamente por procedimientos matemáticos

1)

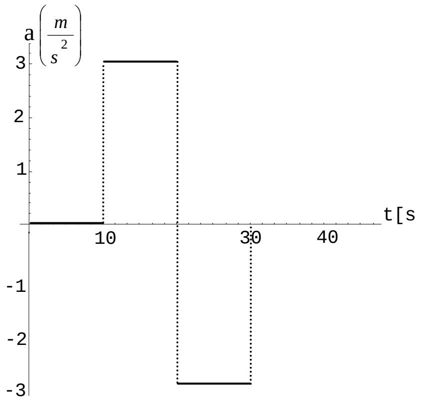


288 (unidades cúbicas) es el volumen del prisma recto de 8 (unidades) de altura. Halle las dimensiones del cubo contenido en el prisma. Justifique su respuesta.

2a) Halle el conjunto solución de: $x = 5\sqrt{x-3}$. Justifique su respuesta.

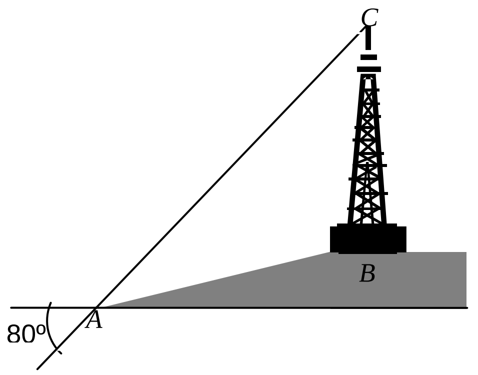
2b) Aplique el método de eliminación de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 8z = 19 \\ x + 4y + z = 30 \end{cases}$$



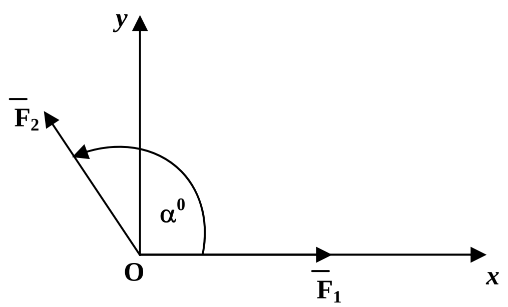
3) Un móvil desarrolla un movimiento rectilíneo cuya velocidad inicial es $v_0 = 10\frac{m}{s}$. En la figura se muestra la representación gráfica de su aceleración en función del tiempo.

a) Indique el tipo de movimiento rectilíneo que desarrolla a lo largo del tiempo y calcule su velocidad a los 10, 20 y 30 segundos, y represente en otro gráfico la velocidad en función del tiempo.
b) Calcule el espacio recorrido en los mismos instantes de tiempo, y represente en un gráfico separado el espacio en función del tiempo.
4a) Sea la función $f : [0,2\pi) \rightarrow \Re \,/\, f(x) = sen(2x) - \cos(2x)$. Determine los puntos de su dominio tal que $f(x)$ = 1. Justifique su respuesta.
4b)



En una colina se encuentra una torre vertical de alta tensión de 10 m de altura. La distancia del punto A al C es 24 m. ¿Cuál es la distancia colina abajo desde la base de la torre (de A a B)?

5a) Sobre una embarcación actúa la fuerza de la corriente $\overline{F}_1(0,0) = (4,0)N$. La fuerza motriz propia que la impulsa es $\overline{F_2}(0,0) = (8N, \alpha_2^0)$. Se desea conocer la fuerza resultante que actúa sobre la embarcación y el ángulo α_2 de la fuerza $\overline{F}_2$ para que avance según el sentido del semieje positivo Y.



5b) Determine las coordenadas del punto A para que se verifique: $2.\overrightarrow{AB} - 3.\overrightarrow{AC} = \vec{O}$, siendo B = (-2,1) y C = (3,-2)

Universidad
Tecnológica
Nacional **Facultad Regional Buenos Aires**

SEMINARIO UNIVERSITARIO

EXAMEN FINAL – MÓDULO B

Apellido………………………….. Nombre:……………..............Especialidad:.....................

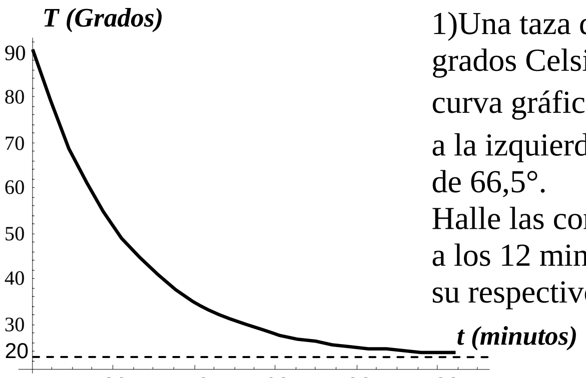
Número de documento:.................................... Número de Credencial:.............................

Nro. de hojas	Ejercicio 1	Ejercicio 2		Ejercicio 3	Ejercicio 4		Ejercicio 5		
		2a	2b		4a	4b	5a	5b	CALIFICACIÓN

Corrigió:................................

Supervisó:..............................

- La duración del examen es 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación: **50% (2,5 ejercicios)** del examen bien resuelto. Corresponde nota: 4 (CUATRO)
- No se permite retirarse del aula hasta 20 minutos después de haber comenzado el examen.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas analíticamente por procedimientos matemáticos



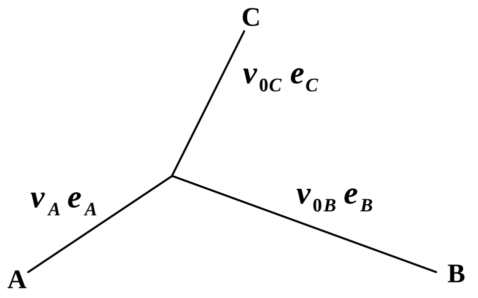
1)Una taza de leche caliente tiene una temperatura $f(t)$ – en grados Celsius – en función del tiempo t – en minutos – , la curva gráfica de $f:[0;+\infty)\to I_f\ /\ f(t)=k+70b^t$, se ilustra a la izquierda y se sabe que a los 10 minutos la temperatura es de 66,5°.
Halle las constantes positivas k y b, ¿cuál es la temperatura a los 12 minutos? Luego determine la función inversa de f (con su respectivo dominio).

2a) ¿Tiene una sola raíz real el polinomio resto de dividir $p(x)$ por $q(x)$?, si fuese así hállela, si no, justifique su respuesta. $p(x)=3x^6-2x^5+x^3-3x^2+2x-125$, $q(x)=x^5-x$

2b) Se sabe que el siguiente sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} k\,x+8y=28 \\ -3x+6y=21 \end{cases}$$ Encuentre su conjunto solución, previa determinación de la constante k.

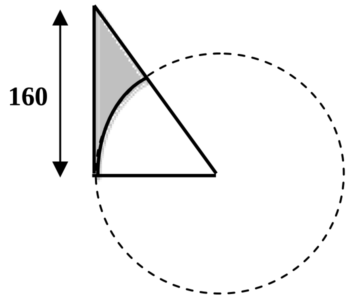
3) Tres móviles pasan simultáneamente por los puntos A, B y C. Los mismos recorren trayectorias rectilíneas y deben encontrarse en el punto O.



El móvil A desarrolla un movimiento rectilíneo uniforme de velocidad $v_A = 20\,m/s$, recorriendo una distancia de $e_A = 200m$ hasta el punto de encuentro.
El móvil B desarrolla un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con velocidad inicial $v_{0B} = 20m/s$ y aceleración $a_B = 2m/s^2$.
El móvil C, en cambio, desarrolla un movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado, cuya velocidad inicial es $v_{0C} = 30m/s$ y recorre una distancia $e_C = 200m$ hasta el punto O.

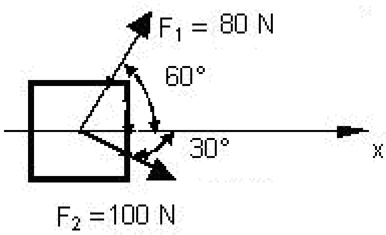
a) Determine el tiempo de encuentro; b) la distancia que debe recorrer el móvil B hasta el punto de encuentro; c) la aceleración del móvil C. Justifique su respuesta.

4a) Calcule el área de figura sombreada, interior al triángulo rectángulo.
El diámetro de la circunferencia es 220.



4b) Determine el conjunto solución de la ecuación: $\dfrac{6}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{3}{x-3}$.

5a) Dos hombres y un joven deben deslizar un bloque de piedra sobre una superficie horizontal sin rozamiento en la dirección del eje X. Determine la mínima fuerza que debe ejercer el joven para que eso ocurra.



5b) El vector $\vec{u} = 18\breve{i} - 24\breve{j}$ es la proyección de $\vec{v} = k\breve{i} + 3\breve{j}$ sobre $\vec{w} = 6\breve{i} - 8\breve{j}$.
Determine el vector $\vec{v}$, en forma cartesiana. Justifique su respuesta.

Resolución del examen

1) Según los datos del problema planteamos:

$$f(0) = k + 70b^0 = k + 70 \quad \Rightarrow \quad 90 = \mathrm{k} + 70$$

$$\mathrm{f}(10) = \mathrm{k} + 70b^{10} \quad \Rightarrow \quad 66{,}5 = k + 70b^{10} \quad \text{de estas ecuaciones se obtiene:}$$

$$k = 20 \quad \text{y} \quad b^{10} = 0{,}6642 \;\Rightarrow\; b = 0{,}9599$$

En consecuencia la función es: $f : [0,+\infty) \to (20,90] / \, f(t) = 20 + 70.0{,}9599^t$

La temperatura a los 12 minutos será: $f(12) = 20 + 70.0{,}9599^{12} \cong 62{,}8°C$

Para obtener la función inversa primero permutamos las variables y luego despejamos "y".

Sea: $t = 20 + 70.0{,}9599^y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{t-20}{70} = 0{,}9599^y \quad \Rightarrow \quad \ln\dfrac{t-20}{70} = y \ln 0{,}9599$

$$y = \frac{1}{\ln 0{,}9599}\ln\frac{t-20}{70} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : (20,90] \to [0,+\infty) / \, f^{-1}(t) = \frac{1}{\ln 0{,}9599}\ln\frac{t-20}{70}$$

2a) Realizamos el cociente entre los polinomios y este resulta:

$$\begin{array}{l|l}
3x^6 - 2x^5 + x^3 - 3x^2 + 2x - 125 & x^5 - x \\ \hline
\underline{3x^6 \qquad\qquad\quad - 3x^2} & 3x - 2 \\
\quad -2x^5 + x^3 + 0x^2 + 2x - 125 & \\
\quad \underline{-2x^5 \qquad\qquad\quad + 2x} & \\
\qquad\qquad x^3 + 0x^2 + 0x - 125 &
\end{array}$$

El resto es: $r(x) = x^3 - 125$

Para buscar las raíces reales del resto resolvemos la ecuación: $x^3 - 125 = 0$

$x^3 - 125 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad x = 5$ es la única raíz real del resto.

2b) Encontremos k para que el sistema sea compatible indeterminado, hacemos esto utilizando el método de eliminación de Gauss.

k	8	28	E_1
-3	6	21	E_2
k	8	28	$E_1' = E_1$
24+6 k	0	0	$E_2' = 6E_1 - 8E_2$

De esta forma vemos que $y \in \Re$; de la ecuacion E_1' obtenemos la variable x:

$$x = \frac{28 - 8y}{k}, k \neq 0$$

La ecuación E_2': (24+6k) x = 0, tendrá infinitas soluciones si $24 + 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -4$.

Por lo tanto el conjunto solución del sistema es: $S = \{(x, y) / \, x = -7 + 2y \wedge y \in \Re\}$

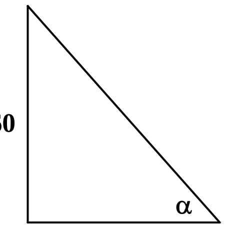
3) De las ecuaciones horarias para los movimientos involucrados en el problema obtenemos:

a) $t_e = \dfrac{e_A}{v_A} = 10\ s.$

b) $e_B = v_{0B}\ t_e + \dfrac{1}{2} a_B\ t_e^2 = 20\,\tfrac{m}{s}.10\ s + \dfrac{1}{2}\,2\,\tfrac{m}{s^2}100\ s^2 = 300\ m$

c) $e_C = v_{0C}\ t_e + \dfrac{1}{2} a_C\ t_e^2 \quad \Rightarrow \quad a_C = \dfrac{2(e_C - v_{0C}\ t_e)}{t_e^2} = \dfrac{2(200\ m - 30\,\tfrac{m}{s}10\ s)}{100\ s^2} \quad \Rightarrow \quad a_C = -2\,\dfrac{m}{s^2}$

4a) De la figura se obtiene:



$$r = \frac{d}{2} = \frac{220}{2} = 110$$

$$tg\alpha = \frac{160}{110} = \frac{16}{11} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\,\frac{16}{11} = 55{,}49°$$

Área del triángulo: $A_T = \dfrac{160.110}{2} = 8800$

Área del sector circular: $A_S = \dfrac{\pi.110^2 55{,}49°}{360°} = 5859{,}32$

Área de la figura sombreada: $A = A_T - A_S = 2940{,}68$ (unidades cuadradas).

4b) Resolvemos la ecuación pedida:

$$\frac{6}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-3} \quad \text{con} \quad x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3$$

$$\frac{6(x-2)+2(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{3}{x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{6x-12+2x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{3}{x-3}$$

$$\frac{8x+14}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-3} \quad \Rightarrow \quad (8x-14)(x-3) = 3(x^2-3x+2)$$

$$8x^2 - 24x - 14x + 42 = 3x^2 - 9x + 6$$

$$5x^2 - 29x + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \vee x = \frac{9}{5}$$

$$S = \left(\frac{9}{5}, 4\right)$$

5a)

$$\sum F_{iX} = F_{1X} + F_{2X} = 80\cos 60^{o} + 100\cos 330^{o} = 40 + 50\sqrt{3} \cong 126,6N$$

$$\sum F_{iY} = 0 = F_{1Y} + F_{2Y} + F_J \rightarrow F_J = -80sen60^{o} - 100sen330^{o} = -40\sqrt{3} + 50 = -19,28N$$

$$\overline{F_J} = \left(19.28N, 270^{o}\right) = \left(0, -19.28\right)N$$

5b) El vector $\vec{u}$ es : $\vec{u} = proy_{\vec{w}}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}\,.\,\vec{w}}{\left|\vec{w}\right|^2}\vec{w}$

$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = 6k + 3(-8) = 6k - 24$$

$$\left|\vec{w}\right|^2 = \left(\sqrt{6^2 + (-8)^2}\right)^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\vec{u} = \frac{6k-24}{100}(6\breve{i} - 8\breve{j}) = 6\frac{6k-24}{100}\breve{i} - 8\frac{6k-24}{100}\breve{j} = 18\breve{i} - 24\breve{j}$$

$$6\frac{6k-24}{100} = 18 \quad \Rightarrow \quad 6k - 24 = 300 \quad \Rightarrow \quad k = 54$$

Por lo tanto: $\vec{v} = k\,\breve{i} + 3\breve{j} = 54\breve{i} + 3\breve{j}$

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

- Stewart, James – Redlin, Lotear – Watson, Saleem. **Precálculo**. 3ª Edición. Thomson Editores.
- Faires, Douglas – De Franza, James. **Precálculo**. 2ª Edición. Thomson Editores.
- Fleming, Walter – Valberg, Dale. **Álgebra y trigonometría con geometría analítica**. Editorial Prentice – Hall.
- Raffo, Carlos. **Introducción a la estática y resistencia de materiales**. Editorial Alsina.
- Peña Sainz, Angel – Garzo Pérez, Fernando. **Curso de física cou**. Editorial McGraw – Hill.
- Van Der Merwe, Carel. **Física general**. Editorial McGraw – Hill.

INDICE