UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA *SANTA MARÍA DE LOS BUENOS AIRES*
FACULTAD DE FISICOMATEMÁTICAS E INGENIERÍA
CÁTEDRA DE MECÁNICA DE FLUIDOS

EXAMEN FINAL

Nombre y apellido: Fecha:

Año de cursada:

ANTES DE COMENZAR A RESPONDER LEA CON MUCHA ATENCIÓN

- Lea atentamente las consignas y responda claramente cada pregunta, detallando con la mayor precisión posible lo solicitado en cada ítem.
- Sea ordenado en el desarrollo de los temas.
- Se solicita prolijidad en la caligrafía a fin de no tener problemas en la corrección posterior.
- Sea cuidadoso con la ortografía.
- El tiempo estipulado para la resolución de los temas es de 3 HORAS COMO MAXIMO
- El no cumplimiento de las consignas se tomará en cuenta en la nota final

TEORIA

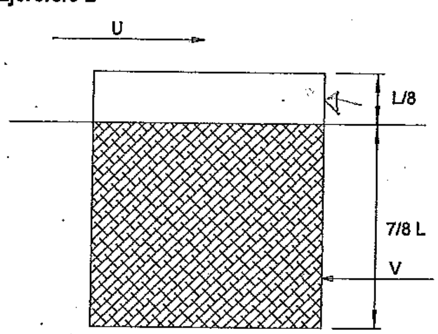
Ejercicio 1

Considerar un flujo bidimensional incompresible cuya función potencial es:

$$\phi = x\,y + x^2 - y^2$$

a) ¿Es cierto que el Laplaciano es cero?, si ese es el caso, ¿Qué significa?
b) Hallar la función corriente
c) Hallar la ecuación de la línea de campo que pasa por el punto (2,1).

Ejercicio 2



Los icebergs pueden ser empujados por el viento a grandes velocidades. Se puede modelar a un iceberg como un cilindro de diámetro D y longitud total L (D>> L), de la cual sólo emerge 1/7 de "L" quedando el resto sumergido.
Si las fuerzas de Drag en la parte superior e inferior dependen de la velocidad relativa entre el hielo y el fluido, deducir una *expresión aproximada* para la condición de estacionalidad, suponiendo que la velocidad del viento es U (hacia la derecha) y la velocidad del agua es V (hacia la izquierda). Ver el dibujo de ayuda

Ejercicio 3

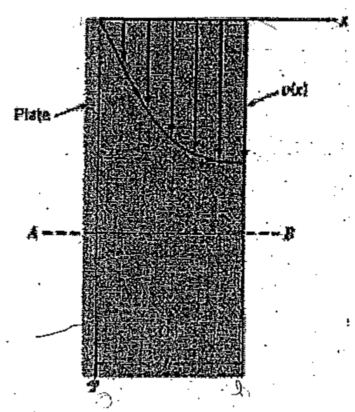
Una película de aceite fluye hacia abajo sobre una placa colocada en forma vertical como muestra la figura con una velocidad dada por:

$$V = \frac{V_0}{h^2}(2hx - x^2)\hat{j}$$

Donde V_0 y h son constantes.

a) Mostrar que la tensión de corte en el borde de la placa (x = h) es nula.
b) Determinar el flujo (caudal) a través de la superficie AB. (asumir que el ancho de la placa es "b").

El fluido puede considerarse newtoniano



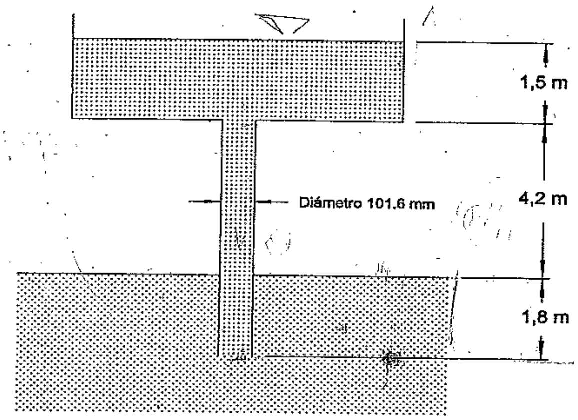
PRÁCTICA

Problema 1:

En el sistema de la figura el tanque superior está unido a una tubería lisa, que descarga a otro recipiente de grandes dimensiones, el fluido es agua a 20°C, calcular el caudal que circula cuando:

a) Si no se consideran las pérdidas de carga (en los tramos rectos y en las singularidades)
b) Si se consideran las pérdidas de carga, tubería lisa, contracción y salida

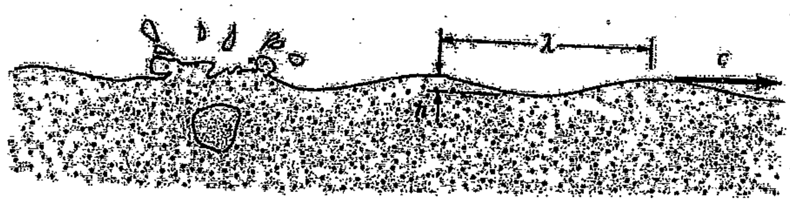
Datos: $\nu_{agua} = 1{,}007\ 10^{-6}\ m^2/s$ – $\rho = 1000\ Kg/m^3$ – $K_{contraccion} = 0{,}5$ – $K_{salida} = 1$, diámetro del caño 101,6 mm



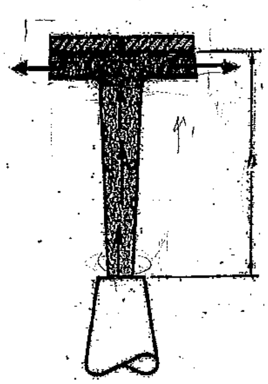
Problema 2:

Cuando una pequeña piedra se arroja en un líquido aparecen pequeñas ondas que viajan hacia afuera, como se muestra la figura. La velocidad de estas ondas c es función de la densidad de líquido ρ, la longitud de onda λ, la altura de la onda h y la tensión superficial σ. Utilizando el teorema pi determine:

a) ¿Cuáles son los números π que describen el fenómeno?
b) Halle una expresión que pueda describir la velocidad c en función de los otros parámetros



Problema 3:



Un chorro vertical de agua sale de una boquilla a una velocidad de 10 m/s con un diámetro de 20 mm, el chorro suspende una placa (rectángulo rayado) que tiene una masa de 1,5 Kg como lo indica la figura.

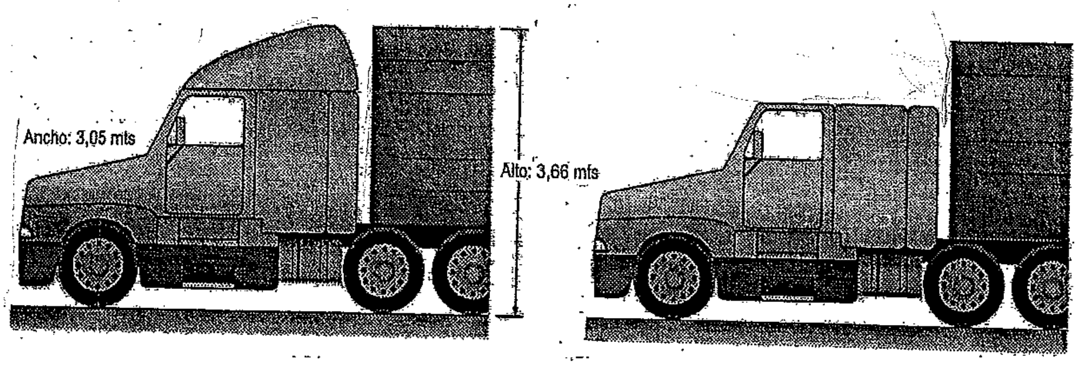
a) ¿Cuánto vale la distancia h?

Datos: $\nu_{agua} = 1{,}007\ 10^{-6}\ m^2/s$ – $\rho = 999\ Kg/m^3$

Problema 4:

El arrastre sobre un camión puede reducirse colocando sobre la cabina un deflector como se muestra en el dibujo. Una reducción del Cd de 0,96 (sin deflector) a Cd 0,7 (con deflector) implicará una reducción de potencia.

Si el camión de la figura viaja a una velocidad de 104 Km/h ¿Cuántos HP se ahorrarían?
Datos: Datos: $\nu_{aire} = 1{,}48\ 10^{-5}\ m^2/s$ – $\rho_{aire} = 1{,}23\ Kg/m^3$
1HP = 0,736 KW



Ejercicio 1: Teoría

Dado la función potencial $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{\phi(x,y) = x \cdot y + x^2 - y^2} \quad (1)$$

; para flujo bidimensional incompresible.

a) El laplaciano $\mathbb{L}$ de la función ϕ $(\mathbb{L}(\phi))$ se define como:

$$\boxed{\mathbb{L}(\phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}} \quad (2)$$

Si se cumple:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad (3)$$

, ∴ Se verifica la continuidad e irrotacionalidad del flujo.

) Aplicamos (2) en (1):

) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(x \cdot y + x^2 - y^2)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[y + 2x\right] = 2$$

) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(x \cdot y + x^2 - 2y)}{2y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[x - 2\right] = -2$$

en (2): $$\boxed{\nabla^2 \phi = 2 - 2 = 0} \quad (4)$$

b) Hallar ψ (Función corriente)

Se cumple, para un campo de velocidades $\bar{V}$ tal que:

$$\bar{V} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \bar{V} = (u(x,y), v(x,y))$$

Para la función ϕ potencial:

$$\boxed{u = \frac{\partial \phi}{\partial x}} \quad (5) \quad ; \quad \boxed{v = \frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad (6)$$

En la función corriente $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumple

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y}} \; (7) \; ; \quad \boxed{V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}} \; (8)$$

i) de (5) y (7):

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial (xy + x^2 - y^2)}{\partial x} = y + 2x \\ u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}$$

$$\partial \psi = u \, \partial y \longrightarrow \quad (9) \; \boxed{\psi = \int \partial \psi = \int u \, \partial y + f(x)}$$

de (9):

$$\psi = \int (y + 2x) \, dy + f(x)$$

$$\boxed{\psi = \frac{y^2}{2} + 2xy + f(x)} \; (9^*)$$

i) de (6) y (8):

$$\begin{cases} V = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{\partial (xy + x^2 - y^2)}{\partial y} = x - 2y \\ V = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = (-1) \cdot \dfrac{\partial (y^2/2 + 2xy + f(x))}{\partial x} = \\ \qquad = (-1)\left(0 + 2y + f'(x)\right) = -2y - f' \end{cases}$$

igualando ecs.

$$x - \cancel{2y} = -\cancel{2y} - f'(x)$$

$$f'(x) = x \longrightarrow \frac{df}{dx} = x \rightarrow f = \int x \, dx$$

$$(10) \; \boxed{f(x) = \frac{x^2}{2} + C} \qquad C \subset \mathbb{R}$$

de (9^*) y (10):

$$\boxed{\psi(x, y) = \frac{y^2}{2} + 2xy + \frac{x^2}{2} + C} \; (11)$$

c) Hallar ecuación de línea de campo pasante por (2)
$(x_0, y_0) = (2, 1)$

·) Para el vector posición de una partícula en campo:

$$\bar{r} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad \boxed{\bar{r}(x, y, t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}} \quad (12)$$

El vector velocidad $\bar{v}$ se define: $\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$

$$\boxed{\bar{V} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j}} \quad (13) \quad \text{dado} \quad \bar{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{\bar{V} = u(x, y, t)\,\hat{i} + v(x, y, t)\,\hat{j}} \quad (14)$$

de (14) y (13):

$$\frac{dx}{dt} = u \; ; \qquad \frac{dy}{dt} = v, \quad \text{despejo } dt:$$

$$dt = \frac{u}{dx} \; ; \qquad dt = \frac{v}{dy} \; , \quad \text{igualo ecs:}$$

$$\boxed{\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy}} \longrightarrow \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}} \quad (15) \quad \text{integro ec. (15)}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{u} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{v} \; ;$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(2x + y)}} = \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{(-2y + x)}}$$

Sustitución $\begin{cases} a = 2x + y \\ da = 2dx \\ dx = \dfrac{da}{2} \end{cases}$

$$b = -2y + x$$
$$db = -2dy$$
$$dy = \frac{db}{-2}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{da}{2\cdot a} = \int_{y_0}^{y} \frac{db}{-2b} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\int_{x_0}^{x} \frac{da}{a} = -\cancel{\frac{1}{2}}\int_{y_0}^{y} \frac{db}{b}$$

$$\ln(a)\Big]_{x_0}^{x} = -\ln(b)\Big]_{y_0}^{y}$$

$$\ln\left[2x+y\right]\Big]_{x_0}^{x} = (-1)\cdot\ln(-2y+x)\Big]_{y_0}^{y}$$

$$\ln\left[\frac{2x+y}{2x_0+y}\right] = (-1)\cdot\ln\left[\frac{-2y+x}{-2y_0+x}\right]$$

$$e^{\left(\ln\left[\frac{2x+y}{2x_0+y}\right]\right)} = e^{\left(\ln\left[\frac{-2y_0+x}{-2y+x}\right]\right)}$$

$$\frac{2x+y}{2x_0+y} = \frac{-2y_0+x}{-2y+x} \qquad \text{para } x_0=2,\ y_0=1$$

$$\frac{2x+y}{2\cdot 2+y} = \frac{-2\cdot 1+x}{-2y+x}$$

$$\frac{2x+y}{y+4} = \frac{x-2}{x-2y}$$

$$(2x+y)(x-2y) = (x-2)(y+4)$$

$$2x^2-4xy+\cancel{yx}-2y^2 = \cancel{xy}+4x-2y-8$$

$$\boxed{2x^2-4xy-2y^2-4x-2y+8=0}$$

(dx/(2x +y)) - (dy/(-2y +x)) =0, y(2)=1

≡ Examples ⤮ Random

Input:

$$\left\{\frac{dx}{2x+y} - \frac{dy}{-2y+x} = 0,\ y(2) = 1\right\}$$

Result:

$$\left\{\frac{dx}{2x+y} - \frac{dy}{x-2y} = 0,\ y(2) = 1\right\}$$

ODE classification:

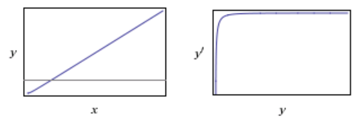
first-order nonlinear ordinary differential equation

Differential equation solution:

Approximate form | Step-by-step solution

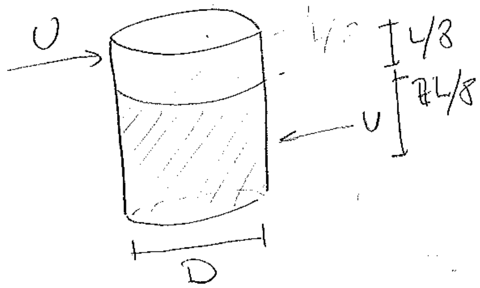
$$y(x) = \sqrt{5}\,\sqrt{x^2+1} - 2x$$

Plots of the solution:



Ejercicio N°2: Teoría

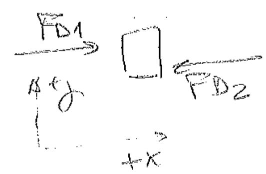
Esquema del problema:



En condición de estacionalidad

$$\boxed{\sum F = 0} \quad (1)$$

DCL



FD1: F. de drag en aire

FD2: F. de drag en agua.

Por definición: $\boxed{F_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot A \cdot V^2}$ (2)

De (2): $\boxed{F_{D1} = \frac{1}{2} C_{D1} \cdot \rho_1 \cdot A_1 \cdot U_{rel}^2}$ (3) U_{rel} → velocidad relativa

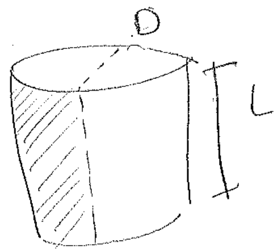
$\boxed{U_{rel} = U - V}$ (4)

De (2): $\boxed{F_{D2} = \frac{1}{2} C_{D2} \cdot \rho_2 \cdot A_2 \cdot V^2}$ (5)

·) Según tabla del White: $\frac{L_1}{D} \approx \frac{L_2}{D}$, dado que $D >> L$

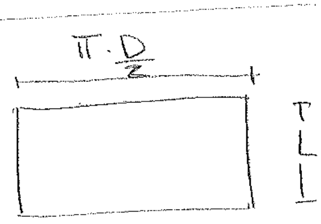
∴ $\boxed{C_{d1} \approx C_{d2} = C_d}$ (6)

·) <u>A_1 y A_2:</u>



$$\boxed{A = L \cdot \underbrace{\pi \cdot \frac{D}{2}}_{\frac{1}{2}\text{ circunferencia}}}$$

Área desplegada en plano:



Para A_1: $A_1 = \frac{L}{8} \cdot \pi \frac{D}{2} \rightarrow \boxed{A_1 = L \cdot D \frac{\pi}{16}}$ (7)

Para A_2: $A_2 = \frac{7}{8} L \cdot \pi \cdot \frac{D}{2} \rightarrow A_2 = 7 \cdot L \cdot D \cdot \frac{\pi}{16} \rightarrow \boxed{A_2 = 7 \cdot A_1}$ (8)

de las ec. anteriores:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\cancel{Cd}\cdot\delta_1\cdot A_1\cdot(U-V)^2=\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\cancel{Cd}\cdot\delta_2\cdot A_2\cdot V^2$$

$$\delta_1\cdot\cancel{A_1}(U-V)^2=\delta_2\cdot 7\cancel{A_1}\cdot V^2$$

$$\delta_{aire}\,(U-V)^2=\delta_{H_2O}\cdot 7\cdot V^2$$

$$\boxed{\left(\frac{U-V}{V}\right)^2=7\cdot\frac{\delta_{H_2O}}{\delta_{aire}}} \quad (9)$$

Ejercicio 3

Dado $\bar{V}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$; $\boxed{\bar{V}=\frac{V_0}{h^2}\left(2hx-x^2\right)\hat{j}}$ (1)

$V_0, h\in\mathbb{R}$

a) hallar τ (tension de corte) en borde de placa ($x=h$)

·) Asumiendo fluido newtoniano: $\boxed{\tau=\mu\cdot\frac{dV}{dx}}$ (2)

, en este caso; reemplazo (1) en (2):

$$\tau=\mu\,\frac{dv}{dx}=\mu\,\frac{d\left(\frac{V_0}{h^2}\left(2hx-x^2\right)\right)}{\partial x}=\mu\,\frac{V_0}{h^2}\left(2h-2x\right)$$

$$\boxed{\tau=\frac{2\mu V_0}{h^2}\left(h-x\right)} \quad (3)\quad,\ \text{en } x=h;\ \tau=\frac{2\mu V_0}{h^2}(h-h)$$

$$\boxed{\tau=0}$$

b) Asumiendo ancho de placa b, buscamos caudal Q:

por definición: $\boxed{Q=V\cdot A}$ (4)

en forma diferencial: $\boxed{dQ=V\cdot dA}$ (5)

Tomo un área en coordenadas rectangulares: $\boxed{dA = dx\,dz}$ (6)

de (5) y (6): $\boxed{dQ = V\,dx\,dz}$ (5*)

$$Q = \int dQ = \iint V\,dx\,dz; \qquad A \rightarrow z \in [0, b],\ x \in [0, h]$$

$$Q = \int_0^b \int_0^h \frac{V_0}{h^2}(2hx - x^2)\,dx\,dz = \frac{V_0}{h^2} \int_0^b \left[\int_0^h (2hx - x^2)\,dx\right] dz$$

$$Q = \frac{V_0}{h^2}\left[\int_0^b \left[\frac{\cancel{2}hx^2}{\cancel{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^h dz\right] = \frac{V_0}{h^2} \cdot b\left(hh^3 - \frac{h^3}{3}\right)$$

$$Q = \frac{V_0}{h^2} \cdot b \cdot h^3\left(1 - \frac{1}{3}\right); \qquad \boxed{Q = V_0 \cdot b \cdot h \cdot \frac{2}{3}} \quad (7)$$

) Verifico unidades: $[Q] = \frac{L^3}{T}$; $[Q] = [V_0][b][h]\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{L}{T} \cdot L \cdot L \cdot 1 = \frac{L^3}{T}$ ✓

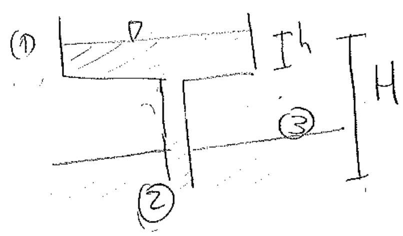
Problema 1: práctica

Hallar Q (caudal)

a) Sin considerar pérdidas de carga

b) considerando "   "

a) Diagrama del problema:



Aplico ec. Bernoulli entre (1) (superficie libre) y (2) (Fin de tubería)

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2} \quad (1)$$

) Sobre ec 1:) $V_1 \to 0$ (recipiente grande)

) En presión manométrica; $P_1 = P_{atm}$

) para ②; $\boxed{Q = V \cdot A}$ 2) ; $\boxed{A = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4}}$ ③

$$\boxed{V_2 = \frac{Q\, 4}{\pi \cdot \phi^2}} \quad ④$$

) En condiciones estacionarias; $\boxed{P_2 = P_1 + \delta \cdot g \cdot h_{23}}$ ⑤

↳ asumo fluido en tanque en reposo

con $h_{23} = h_3 - h_2$

) reemplazo ④ y ⑤ en ①:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + h_1 = \frac{P_1 + \delta \cdot g (h_3 - h_2)}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2$$

$$\cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + h_1 = \cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + h_3 - \cancel{h_2} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{Q^2}{\phi^4} \cdot \frac{16}{\pi^2} + \cancel{h_2}$$

$$\boxed{Q = \left[\frac{(h_1 - h_3) \cdot 2g \cdot \pi^2 \phi^4}{16}\right]^{1/2}} \quad ⑥$$

verifico unidades: $[Q] = \frac{L^3}{T}$; $[Q] = \left[\frac{L \cdot L \cdot L^4}{T^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{L^6}{T^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{L^3}{T}$

reemplazo valores:

$$Q = \left[\frac{(4{,}2 + 1{,}5)\,m \cdot 2 \cdot 9{,}81\,m \cdot \pi^2 \cdot (0{,}1016\,m)^4}{s^2 \cdot 16}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{Q = 8{,}57 \cdot 10^{-2}\ m^3/s} \quad ⑦$$

b) Considero perdidas:

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_1 + \delta \cdot g\,(h_3 - h_2)}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + h_p} \quad ⑧$$

h_p: altura de perdida

·) Sobre ec 1: ·) $V_1 \to 0$ (recipiente grande)

·) En presión manométrica; $P_1 = P_{atm}$

·) para (2); $\boxed{Q = V \cdot A}$ 2) ; $\boxed{A = \frac{\pi \cdot \phi^2}{4}}$ (3)

$$\boxed{V_2 = \frac{Q\, 4}{\pi \cdot \phi^2}} \quad (4)$$

·) En condiciones estacionarias; $\boxed{P_2 = P_1 + \delta \cdot g \cdot h_{23}}$ (5)

con $h_{23} = h_3 - h_2$ ↳ asumo fluido en tanque en reposo

·) reemplazo (4) y (5) en (1);

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + h_1 = \frac{P_1 + \delta \cdot g (h_3 - h_2)}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2$$

$$\cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + h_1 = \cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + h_3 - \cancel{h_2} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{Q^2}{\phi^4} \cdot \frac{16}{\pi^2} + \cancel{h_2}$$

$$\boxed{Q = \left[\frac{(h_1 - h_3) \cdot 2g \cdot \pi^2 \phi^4}{16}\right]^{1/2}} \quad (6)$$

verifico unidades: $[Q] = \frac{L^3}{T}$; $[Q] = \left[\frac{L \cdot L \cdot L^4}{T^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{L^6}{T^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{L^3}{T}$

reemplazo valores:

$$Q = \left[\frac{(4{,}2 + 1{,}5)\,m \cdot 2 \cdot 9{,}81\, m \cdot \pi^2 \cdot (0{,}1016\, m)^4}{s^2 \cdot 16}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{Q = 8{,}57 \cdot 10^{-2}\, m^3/s} \quad (7)$$

b) considero perdidas:

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_1 + \delta \cdot g\,(h_3 - h_2)}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + h_p} \quad (8)$$

h_p: altura de perdida

Para calcular K_T, utilizo diagrama de Moody. Debemos iterar

$$\boxed{Re = \frac{V \cdot \phi}{\nu}} \quad (14)$$

1º) Supongo $k \simeq 0,02 \longrightarrow Re \simeq 6 \cdot 10^4$

$$V_2 = \frac{Re \cdot \nu}{\phi}$$

$$V_2 = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 1,007 \cdot 10^{-6}}{0,1016\ m} \frac{m^2}{s} \longrightarrow \boxed{V_2 = 0,57\ m/s}$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{V \cdot \pi \phi^2}{4} = 4,62 \cdot 10^{-2}\ m^3/s}$$

a (13):

$$Q = \left[\frac{(1,5+4,2) \cdot 9,81 \cdot (0,1016)^4 \cdot (\pi^2/8)}{0,02 \cdot (4,2+1,8)/0,1016 + 0,5+1+1}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{m^3}{s}$$

$$\boxed{Q_2 = 4,46 \cdot 10^{-2}\ m^3}$$

→ la diferencia entre Q_1 y Q_2, is: $\left(\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2}\right) = 3,46\%$

Con esta iteración, se obtiene una especie de 3,46% de error

(+) para iterar (esquema):

$$K, \rho \longrightarrow Moody \longrightarrow Re \longrightarrow V_2 \longrightarrow Q \longrightarrow verificar \longrightarrow ok$$

NO OK

Problema 2: práctica

Hallar $C = f(\rho, \lambda, h, \sigma)$

a) Números π; b) expresión total

) primero, buscamos las magnitudes de cada variables

$n = 5$ (5 variables)

$$[c] = \frac{L}{T} \ ; \ [\rho] = \frac{M}{L^3} \ ; \ [\lambda] = L \ , \ [h] = L \ , \ [\sigma] = \frac{F}{L}$$ 6

$$[\sigma] = \frac{M \cdot L}{T^2} \cdot \frac{1}{L} \longrightarrow [\sigma] = \frac{M}{T^2}$$

K = 3 magnitudes; $\Longrightarrow$ nros $\pi = 5 - 3 = 2$

i) $\boxed{\pi_1 = \frac{\lambda}{h}}$ (1)

ii) $\boxed{\pi_2 = c \cdot \rho^a \cdot \sigma^b \cdot \lambda^c}$ (2) de (2):

$$[\pi_2] = T^0 \cdot L^0 \cdot M^0 = \frac{L}{T} \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{M}{T^2}\right)^b \cdot L^c$$

$$T^0 \cdot L^0 \cdot M^0 = L^1 \cdot T^{-1} \cdot M^a \, L^{-3a} \cdot M^b \cdot T^{-2b} \cdot L^c$$

$$\left.\begin{array}{ll} T) & 0 = -1 - 2b \\ M) & 0 = a + b \\ L) & 0 = 1 - 3a + c \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} b = -1/2 \\ a = -b = 1/2 \\ c = 3a - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\pi_2 = c \, \rho^{1/2} \cdot \sigma^{-1/2} \cdot \lambda^{1/2} \longrightarrow \boxed{\pi_2 = c \left(\frac{\rho \cdot \lambda}{\sigma}\right)^{1/2}}$$ (3)

$$\frac{L}{T} \cdot \left[\frac{\cancel{M} \cdot L \, T^2}{L^3 \cdot \cancel{M}}\right]^{1/2} = \frac{L}{T} \cdot \left(\frac{T^2}{L^2}\right)^{1/2} = \frac{L}{T} \cdot \frac{T}{L} = 1$$

queda finalmente, de (1) y (3): $\pi_2 = f(\pi_1)$

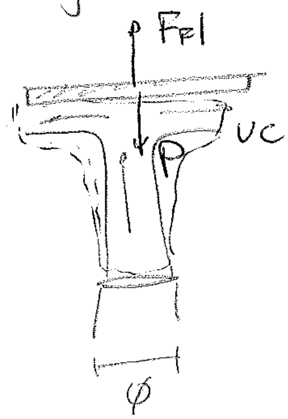
$$c \cdot \left(\frac{\rho \cdot \lambda}{\sigma}\right)^{1/2} = f(\lambda/h)$$

$$\boxed{c = \left(\frac{\sigma}{\rho \cdot \lambda}\right)^{1/2} \cdot f(\lambda/h)}$$ (4)

Problema 3: práctica

Hallar h Datos: m, ϕ, v, ?, ρ

Diagrama del problema:



En equilibrio: $\boxed{\Sigma F = 0}$ (1)

Ffl: fuerza del fluido
P: peso de la placa

$F_{fl} - P = 0$

$\boxed{F_{fl} = m \cdot g}$ (2)

Para calcular Ffl, aplico teorema de Reynolds, con el volumen control "VC" marcado en la figura:

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} B = \frac{d}{d\tau}\left[\oint_{VC} \beta \cdot \rho \cdot dvol\right] + \int_{SC} \cdot \beta \cdot \rho (\bar{V} \cdot \hat{n}) dA} \quad (3)$$

Siendo B = magnitud; $\beta = \frac{dB}{dm}$

·) Para la fuerza, $\bar{F} = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta \tau}$; $\bar{P} = m \cdot \bar{V}$ (cant. de movimiento)

$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{d\tau}$; Si $B = \bar{P}$; $\frac{d\beta}{dm} = \frac{d(m \cdot \bar{V})}{dm} = \bar{V}$

Aplicado a (3) queda:

$$\boxed{\Sigma F = \frac{d}{d\tau}\left[\oint_{VC} \bar{V} \cdot \rho \cdot dvol\right] + \int_{SC} \cdot \bar{V} \cdot \rho (\bar{V} \cdot \hat{n}) dA} \quad (4)$$

·) En este caso, $\frac{d}{d\tau}\left[\oint_{VC} \bar{V} \rho dvol\right] = 0$

Consideramos $V_{derecha} \longrightarrow 0$, $V_{izq} \longrightarrow 0$

(7)

$$\Sigma F = (-\dot{m}_{12y}\cancel{V_{12y}}) + (\cancel{\dot{m}_{der} V_{der}}) + V \cdot \rho \cdot V \cdot A_0$$, reemplazo

$$\boxed{F_{pl} = V^2 \cdot \rho \cdot A_0 = m \cdot g} \quad (5)$$, Tenemos: $$\boxed{A_0 = \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2} \quad (6)$$

de (6) y (5):

$$V^2 \cdot \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2 = m \cdot g$$

$$\boxed{V = \left[\frac{4\, m\, g}{\rho \cdot \pi \cdot \phi^2}\right]^{1/2}} \quad (7)$$

reemplazo datos;

$$V = \left[\frac{4 \cdot 1{,}5\,\cancel{kg} \cdot 9{,}81\ m\ \cancel{m^3}}{s^2 \cdot 999\,\cancel{kg} \cdot \pi \cdot (0{,}02)^2\,\cancel{m^2}}\right]^{1/2} \quad , \quad \boxed{V = 6{,}85\ \frac{m}{s}} \quad (8)$$

Vemos que la velocidad en (8) es distinta que la $V_0 = 10\,m/s$ que sale de la boquilla. Debemos tomar en cuenta la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} ; \qquad V = \frac{dx}{dt} \rightarrow \boxed{dt = \frac{dx}{V}}$$

$$\boxed{dt = \frac{dv}{a}} \longrightarrow \frac{dx}{V} = \frac{dv}{a} \rightarrow a\,dx = V\,dv$$

dado $a = (-g)$; $$\int_0^h -g\,dx = \int_{V_0}^{V_f} V\,dv \qquad V_f = 6{,}85\,m/s \qquad V_0 = 10\,m/s$$

$$-g \cdot h = \frac{V^2}{2}\Big]_{V_0}^{V_f} \longrightarrow -g \cdot h = \frac{1}{2}\left(V_f^2 - V_0^2\right)$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2g}\left(V_0^2 - V_f^2\right)} \quad (9)$$

reemplazo valores:

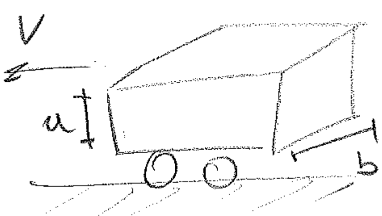
$$h = \frac{1 \cancel{s^2}}{2 \cdot 9{,}81 \cancel{m}} \cdot \left(10^2 - 6{,}85^2\right) \frac{m^2}{\cancel{s^2}}$$

$$\boxed{h = 2{,}71\ m}$$

Problema 4: práctico

Dadas 2 situaciones, hallar $\Delta\dot{L}$ (potencia) ahorrada

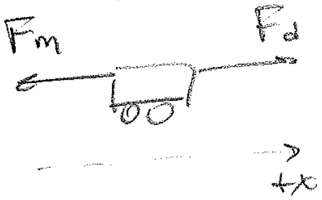
Situación 1: datos: Cd_1, V_1, D, ρ, a, b



Situación 2: datos: Cd_2, V_2, D, ρ, a, b

Para el caso, $V_1 = V_2 = V$

En diagrama de cuerpo libre:



Fm: Fuerza del motor

Fd: Fuerza de drag.

Para V=cte, $F_m - F_d = 0$ — $\boxed{F_m = F_d}$ (1)

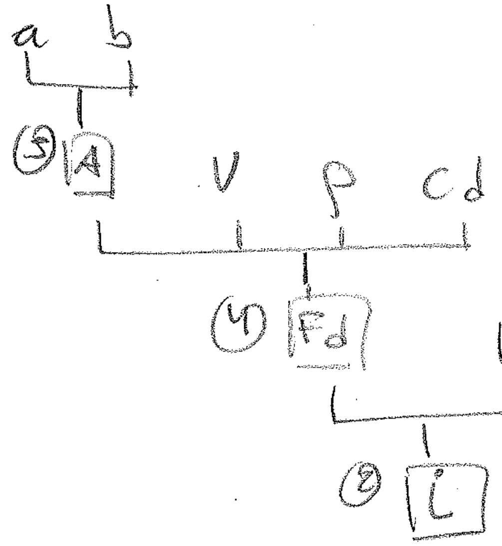
Se busca, $\boxed{\dot{L} = F \cdot V}$ (2)

$\boxed{\Delta\dot{L} = \dot{L}_1 - \dot{L}_2}$ (3)

Para $\boxed{F_{drag} = \frac{1}{2} Cd \cdot A \cdot V^2 \cdot \rho}$ (4) $\boxed{A = a \cdot b}$ (5)

Frontal

Resolución:



de (5) y (4): $\boxed{F_d = \frac{1}{2} C_d \, a \, b \, v^2 \rho}$ (4*)

de (4*) y (2): $\boxed{\dot{L} = \frac{1}{2} C_d \, a \, b \, v^3 \rho}$ (2*)

de (2*) y (3):

$$\Delta \dot{L} = \frac{1}{2} C_{d1} a b v^3 \rho - \frac{1}{2} C_{d2} a b v^3 \rho$$

$$\Delta \dot{L} = \frac{1}{2} a b v^3 \rho \, (C_{d1} - C_{d2})$$

verifico unidades: $[\dot{L}] = \frac{M \cdot L^2}{T^3}$

$$[\dot{L}] = 1 \cdot L \cdot L \left(\frac{L}{T}\right)^3 \frac{M}{L^3} \cdot 1 = \frac{L^2 \cdot M}{T^3}$$

reemplazo datos:

$$\Delta \dot{L} = 1{,}23 \frac{kg}{m^3} \cdot (0{,}96 - 0{,}7) \cdot 3{,}05 \cdot 3{,}66 \, m^2 \left(104 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1\cancel{h}}{3600\,s} \cdot \frac{10^3 m}{\cancel{km}}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Delta \dot{L} = 43035 \frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot m^2 \cdot \frac{\cancel{m^3}}{s^3}$$; $\boxed{\Delta \dot{L} = 43035 \, W}$

Pasado a HP

$$\Delta \dot{L} = 43035 \cancel{W} \cdot \frac{1 \cancel{KW}}{10^3 \cancel{W}} \cdot \frac{1 HP}{0,736 \cancel{KW}}$$

$$\boxed{\Delta \dot{L} = 58,47 \, HP}$$