Guía Alternativa 1

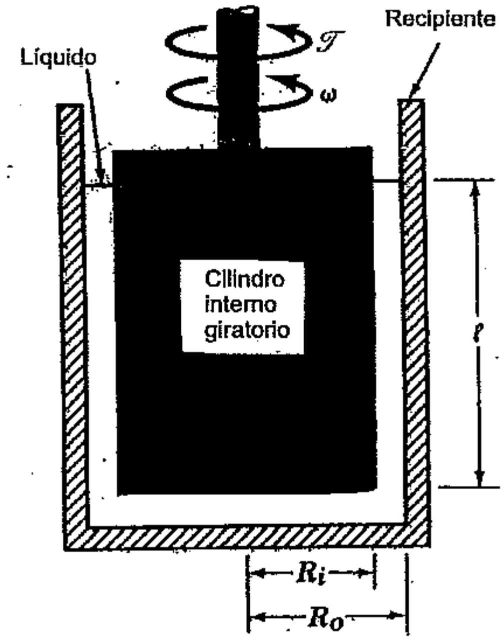
Propiedades de Fluidos

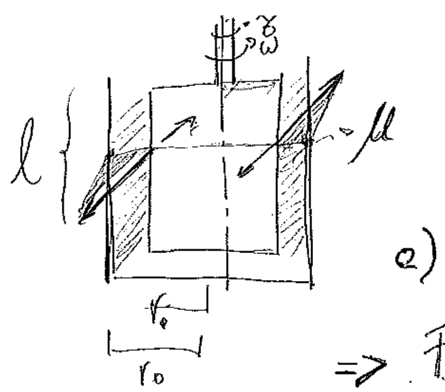
Problema 1

La viscosidad de un líquido puede ser medida utilizando un *viscosímetro cilíndrico rotatorio*, como el mostrado en la figura. En este dispositivo un recipiente exterior contiene un líquido de viscosidad μ desconocida y dentro del cilindro y bañado por el líquido se encuentra un cilindro rotatorio el cual gira a una velocidad angular ω. El torque $\mathscr{T}$ requerido desarrollar la velocidad angular ω es medido y mediante estas dos mediciones se puede conocer la viscosidad del fluido.

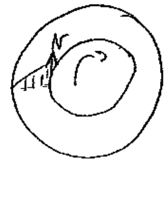
a) Desarrollar una ecuación relacionando μ, ω, $\mathscr{T}$, ℓ, R_0 y R_i que permita calcular la viscosidad, sin tener el cuenta los efectos de la superficie plana del fondo del cilindro y asumiendo que la distribución de velocidad es lineal.

b) Qué torque y que potencia se requerirá para mover un cilindro de 15,25 cm de largo, que tiene glicerina con una viscosidad $\mu = 37{,}8\ 10^{-3}$ kgf . s /m², que gira a 6π rad/s. El radio del cilindro interior es de 7,62 cm y la separación entre recipiente y cilindro 0,254 cm





a)



$v = \omega \cdot r_i$

por ser lineal

$$\frac{F_b}{A_c} = \mu \frac{dV}{de} = \mu \frac{V}{e} = \mu \frac{\omega r_i}{r_o - r_i}$$

$$\Rightarrow F_b = \mu \frac{\omega r_i \cdot 2\pi r_i l}{r_o - r_i}$$

$$F_b = \frac{2\mu \omega r_i^2 \pi l}{r_o - r_i}$$

$$\frac{F}{A} = \mu \cdot \frac{V - 0}{r_i - r_o}$$

$$F = \mu \frac{V}{(r_i - r_o)} \cdot 2\pi r l \qquad V = \omega r$$

Si ~~no se~~ acelera angularmente, $\Sigma \tau = 0$

$$\tau = F \cdot r$$

$$\tau - F_b \cdot r_i = 0$$

$$\tau = \frac{\mu \omega r_i^3 2\pi l}{r_o - r_i}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\tau (r_o - r_i)}{2\pi \omega r_i^3 l} = \mu}$$

b) $l = 15,25\,cm = 0,1525\,m.$

$\mu = 37,8 \times 10^{-3}\,\frac{kg\,s}{m^2} = 0,37044\,\frac{N s}{m^2} = 0,37044\,\frac{kg\,m}{s^2 m^2}\,s = 0,37044\,\frac{kg}{m s}.$

$\omega = 6\pi\,\frac{rad}{s}$

$r_1 = 0,0762\,m$

$r_0 - r_1 = 2,54 \times 10^{-3}\,m.$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\pi \cdot 0,37044\,\frac{N\cancel{s}}{\cancel{m^2}} \cdot 0,0762^3 \cdot m^{\cancel{3}} \cdot 6\pi\,\frac{rad}{\cancel{s}} \cdot 0,1525\,\cancel{m}}{2,54 \times 10^{-3}\,\cancel{m}} = \boxed{1,165\,N.m}$$

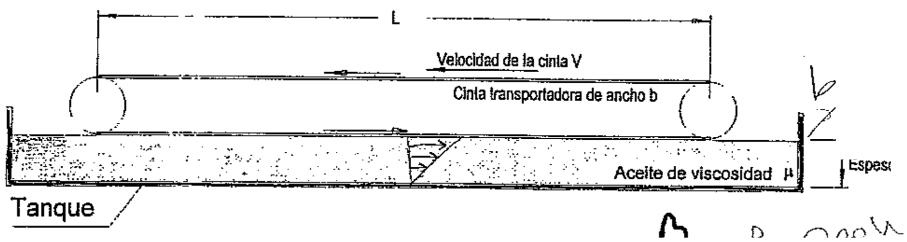
$$\Rightarrow \boxed{\tau = 1,165\,N.m}$$

$$\Rightarrow P = \tau . \omega = 1,165\,Nm \cdot 6\pi\,\frac{rad}{s} = \boxed{21,96\,Watt}$$

$$\boxed{P = 21,96\,W}$$

Problema 2

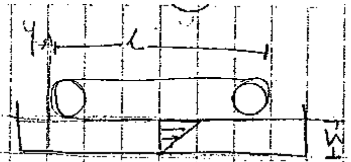
La cinta transportadora de longitud L y ancho b de la figura se mueve con una velocidad constante V sobre un depósito de aceite de viscosidad μ y de espesor h.



a) Asumiendo que el perfil de velocidad dentro del tanque es line ... para conocer la potencia que se necesitaría para mover la cinta a una velocidad constante sobre el aceite y vencer los esfuerzos viscosos.

b) ¿Qué potencia se necesitaría para mover la cinta transportadora a una velocidad de 2,5 m/s sobre un aceite de viscosidad μ de 0,29 kg/m . s, si la longitud L es de 2m, el ancho b de 60 cm y el espesor h de 3 cm?

a)



μ, b

$$\bar{V}(y) = my + b$$
$$\bar{V}(y=0) = \bar{0}$$
$$\bar{V}(y=h) = V_{max}$$
$$\bar{V}(y) = V_{max}\,\frac{y}{h}$$

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} = \frac{\mu V_{max}}{h}$$

$$F_p = \tau . A = \frac{\mu V_{max}}{h} . L . b \qquad V_{max} = V_{cinta} \rightarrow \text{Por principio}$$

$$\boxed{P = F_p . V_{cinta} = \frac{\mu L b}{h} . V_{máx} . V_{cinta} = \frac{\mu L b}{h} V_{máx}^2}$$

b) $P = ?$ $\rightarrow V_{cinta} = 2,5 \, m/s$
$\hookrightarrow \mu = 0,29 \, kg/m.s$
$\hookrightarrow L = 2m$
$\hookrightarrow b = 60 \, cm = 0,6 \, m$
$\hookrightarrow h = 3 \, cm = 0,03 \, m$

$$P = \frac{\mu L b}{h} . V_{max}^2$$

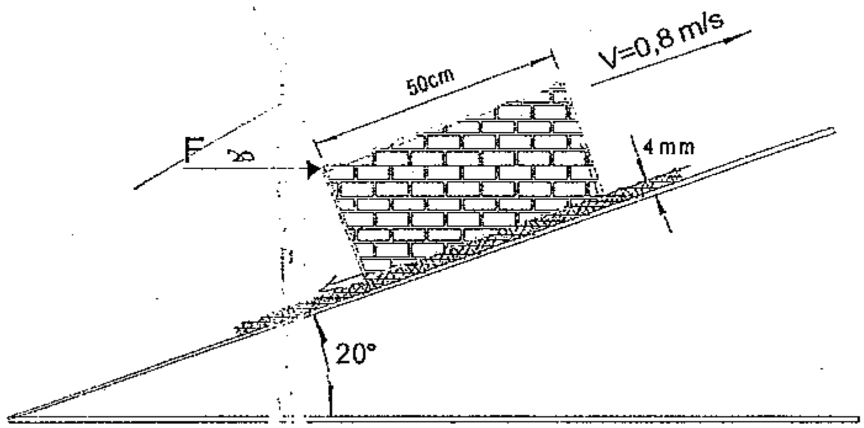
$$= 0,29 \frac{kg}{m \, s} . \frac{2m . 0,6m}{0,03 \, m} . (2,5)^2 \frac{m^2}{s^2} \qquad \begin{array}{l} \bigcirc \rightarrow N \\ \bigcirc . \square \rightarrow J \\ \bigcirc . \square . \Diamond \rightarrow W \end{array}$$

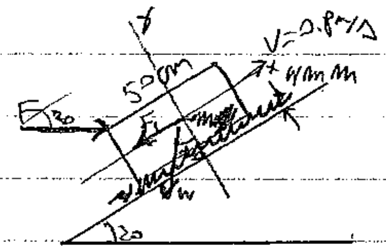
$$\boxed{P = 72,499 \, W}$$

Problema 3

Un bloque de 50 cm de lado pesa 150 N, es movido sobre la superficie de un plano inclinado a una velocidad constante de 0,8 m/s.

La separación entre el bloque y la superficie del plano inclinado es de 4 mm, ahí se ha colocado un aceite de viscosidad 0,012N.s/m². ¿Cuál será el valor de la fuerza F que se aplica al bloque?





$W = 150N \quad V = 0{,}8\frac{m}{s} \quad e = 4\ mm \quad \mu = 0{,}012\frac{N.s}{m^2}$

$\sum Fx = -F_1 - W\,sen20 + F\cos 20 = 0 \qquad \tau = \mu \cdot \frac{dV}{de}$

$\tau = \frac{F}{A} = \mu\frac{dV}{de}$

$-0{,}6N - 150N \cdot sen20 + F \cdot \cos 20 = 0$

$\boxed{F = 55{,}19\ N}$

$F_1 = 0{,}012\frac{N.s}{m^2} \cdot \frac{0{,}8\,m/s}{4\times10^{-3}m} \cdot \left(50\times10^{-2}m\right)^2$

$\boxed{F = 0{,}6N}$

Problema 4

A fin de amortiguar un instrumento de medición se construye un amortiguador con un disco bañado en aceite de viscosidad μ, como se muestra en la figura. El radio del mismo es R y la separación superior entre el disco y la carcaza es a; la separación inferior es b. (Siendo a ≠ b). Se puede despreciar el espesor del disco

a) Con los datos indicados desarrolle una fórmula que permita calcular el torque cuando el eje gira a una velocidad ω en función de las distancias a y b

b) ¿Cuál será el torque máximo si el instrumento gira a una velocidad de 1 RPM, el aceite tiene una viscosidad μ de 0,4 Pa . s, el radio del mismo es 1cm y las separaciones miden a = 1mm y b = 0,5 mm.

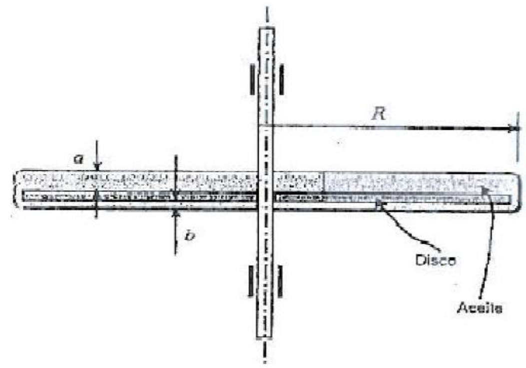


Diagrama:

Datos: R, μ, a, b, ω, τ. Hallar $\tau = f(R, \mu, a, b, \omega)$

Si el disco gira a $\omega = cte$; $\boxed{\Sigma M = 0}$ (1)

$$\Sigma M = M_{aplicado} - M_{fluido} = 0$$

$$\boxed{M_{aplicado} = M_{fluido}} \quad (2)$$

$$\boxed{M_{fluido} = \int d\,M_{fluido}} \quad (3)$$

Calculamos primero para superficie superior

$$\boxed{d\,M_{fluido} = r \cdot dF} \quad (4)$$

Por ser fluido newtoniano, $\boxed{\tau = \frac{\mu \cdot V}{a}}$ (5)

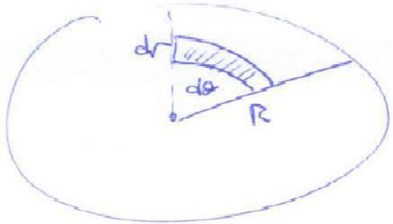
Con. $\boxed{V = \omega \cdot r}$ (6) Reemplazo 5 en 6

$$\boxed{\tau = \frac{\mu \cdot \omega \cdot r}{a}} \quad (7)$$

Tenemos $\tau = \frac{F}{A} \Rightarrow \tau = \frac{dF}{dA} \Rightarrow \boxed{dF = \tau \cdot dA}$ (8)

Tomamos áreas infinitesimales en coordenadas polares;

$$\boxed{dA = r \cdot d\theta \cdot dr} \quad (9)$$



esquema:

$$\boxed{\begin{array}{l} (9) \xrightarrow{dA} (8) \xrightarrow{dF} (4) \xrightarrow{\int} M_{fluido} \\ (7) \xrightarrow{\tau} \end{array}}$$

$(9) \xrightarrow{dA} (8)$; $\quad dF = \tau \cdot r \cdot d\theta \, dr$

$(7) \xrightarrow{\tau} (8)$ $\quad dF = \frac{\mu \cdot W \cdot r}{a} r \, d\theta \cdot dr$

$(8) \xrightarrow{dF} (4)$ $\quad dM_{fluido} = \frac{\mu \cdot \omega}{a} \cdot r^3 \, d\theta \cdot dr$

Integramos; $\theta \in [0, 2\pi]$; $r \in [0, R]$

$$M_{fluido} = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \frac{\mu \cdot \omega}{a} \cdot r^3 \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\mu \cdot \omega}{a} \cdot 2\pi \int_0^{r} r^3 dr$$

$$\boxed{M_{fluido} = \frac{\mu \cdot \omega \cdot \pi \cdot R^4}{2a}} \quad (10)$$

Dado que hay 2 superficies con espesores "a" y "b":

$$M_{fluido})_{total} = M_{fluido})_a + M_{fluido})_b$$

$$\boxed{M_{fluido})_{total} = \frac{\mu \cdot \omega \cdot \pi \cdot R^4}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \quad \text{ó tmb.}$$

$$\boxed{M_{fluido})_{total} = \frac{\mu \cdot \omega \cdot \pi \cdot R^4 (b + a)}{2ab}} \quad (11)$$

b) Datos:

·) $\omega = 1\ rpm = 1 \frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \frac{1\ \cancel{min}}{60\ s} \cdot \frac{2\pi\ rad}{\cancel{rev}}$,

$\boxed{\omega = 0{,}105\ rad/s}$

·) $\boxed{\mu = 0{,}4\ Pa \cdot s}$ ·) $\boxed{R = 1\ cm = 10^{-2}\ m}$

·) $\boxed{a = 1\ mm = 10^{-3}\ m}$ ·) $\boxed{b = 0{,}5\ mm = 5 \cdot 10^{-4}\ m}$

Reemplazo datos en (11):

$$M_{fluido} = \frac{0{,}4\ N \cdot \cancel{s}\ 0{,}105 \cdot \pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})\ m \cdot (10^{-2})^4\ \cancel{m^4}}{\cancel{m^2} \cdot \cancel{s} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \cancel{m} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \cancel{m}}$$

$$M_{fluido} = 0{,}0063 \cdot \pi\ \cancel{10^{-3}} \cdot 10^{-8} \cdot \cancel{10^{3}} \cdot 10^{4}\ N \cdot m$$

M fluido = 1,98*10^6 N.m

Problema 5

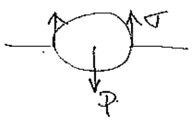
Una bola de metal esta flotando por los efectos de la tensión superficial sobre el agua, está sumergida sólo una mitad mientras que la otra mitad se encuentra expuesta al aire. Considere que el agua es pura y que la bola de metal fue sumergida lentamente despreciando los efectos de cualquier tipo de aceleración y que la temperatura se mantiene constante

Los datos del agua son: Tensión superficial σ = 0,073 N/m – Densidad del agua ρ = 1000 Kg/m³ – Angulo de contacto puede suponerse cero.

Calcular cuál será el diámetro máximo que puede tener una esfera de aluminio y otra de acero para mantenerse a flote por efectos de la tensión superficial, siendo la densidad del aluminio 2700 Kg/m³ y la densidad del acero 7800 Kg/m³.

Dado que el enunciado dice que la esfera se mantiene a flote por efectos de la tensión superficial, no considero el empuje.

ALUMINIO: $P_{al} = \sigma \cdot 2\pi R$ $\quad \sigma = 0{,}073 \frac{N}{m}$ $\quad D_{max} = ?$



$\rho = 1000\ kg/m^3$ $\quad \rho_{al} = 2700\ kg/m^3$

$vol = \frac{4}{3}\pi R^3$ $\quad \rho_{ac} = 7800\ kg/m^3$

$$P = \rho_{al} g\, vol = \rho_{al}\, g\, \frac{4}{3}\pi R^3 = \sigma \cdot 2\pi R$$

$$R_{al} = \sqrt{\frac{3\sigma}{2\rho_{al} g}} = \quad R_{al} = 2{,}03 \cdot 10^{-3}\, m$$

$D = 2R$

$$\boxed{D_{al} = 4{,}07 \cdot 10^{-3}\, m}$$

ACERO: $P_{acero} = \rho_{ac} \cdot g\, \frac{4}{3}\pi R^3 = \sigma\, 2\pi R$

$$R_{ac} = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho_{ac}\, g\, 2}} = 1{,}196 \cdot 10^{-3}\, m$$

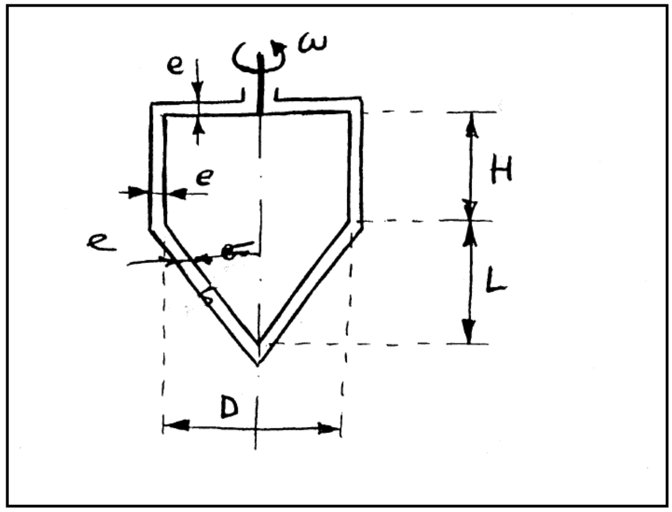
$$\boxed{D_{acero} = 2{,}39 \cdot 10^{-3}\, m}$$

Problema 6

Conocida la velocidad de giro ω del viscosímetro adjunto, determinar los pares a aplicar M_1, M_2 y M_3 cuando un fluido de viscosidad μ llena:

a) la parte cónica (el resto está ocupado por aire de viscosidad despreciable).
b) la parte cónica y la cilíndrica (parte superior ocupada por aire de viscosidad despreciable).
c) la totalidad del viscosímetro.

Se supone que la distribución de velocidades del fluido viscoso entre la pared fija y la móvil sigue una ley lineal. Admitir también que e << H, L, D, y que todas las magnitudes están en el Sistema Internacional.



Se trata de conocer el par ejercido sobre el cuerpo interior, que deberá ser el mismo que el ejercido por el esfuerzo tangencial del fluido. Para ello hemos de obtener este esfuerzo diferencial que realiza el fluido, considerando en cada caso la geometría del problema.

a)

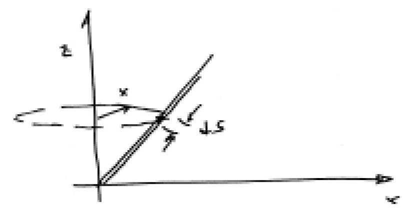
Al ser el espesor mucho más pequeño que las demás dimensiones, podemos suponer la superficie de rozamiento como pequeñas coronas cilíndricas elementales oblicuas de altura oblicua *ds* y espesor *e*.

El valor de la tensión tangencial y el esfuerzo será:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{\omega x - 0}{e};$$

$$df = \tau dA = \tau 2\pi x ds$$

(1)



Sabemos que (ver figura):

$$\left.\begin{array}{l} ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ \frac{z}{x} = \frac{L}{D/2} \;\Rightarrow\; z = x\frac{2L}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow dz = \frac{2L}{D}dx \Rightarrow ds = dz\sqrt{1 + \frac{4L^2}{D^2}}$$

El valor de la fuerza diferencial que este fluido realiza será, sustituyendo en la expresión (1):

$$df = \mu \frac{\omega x}{e} 2\pi x \frac{dx}{D}\sqrt{4L^2 + D^2}$$

Y el momento diferencial que se ejercerá:

$$dM_1 = x df = x\mu \frac{\omega x}{e} 2\pi x \frac{dx}{D}\sqrt{4L^2 + D^2} = \mu \frac{\omega}{e}\frac{2\pi}{D}\sqrt{4L^2 + D^2}\, x^3 dx$$

El momento total que se ejercerá en este caso:

$$M_1 = \mu \frac{\omega}{e}\frac{2\pi}{D}\sqrt{4L^2 + D^2}\int_0^{D/2} x^3 dx = \mu \frac{\omega}{e}\frac{2\pi}{D}\sqrt{4L^2 + D^2}\,\frac{1}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^4$$

$$\boxed{M_1 = \mu \frac{\omega}{32}\frac{\pi D^3}{e}\sqrt{4L^2 + D^2}}$$

b)

En este caso las superficies elementales son cilindros realmente, en los cuales la tensión tangencial τ valdrá:

$$\tau = \mu \frac{\omega D/2 - 0}{e} = cte;$$

$$df = \mu \frac{\omega D}{2e} \pi D dz$$

Así, pues, el momento diferencial en este caso, será:

$$dM_2 = \frac{D}{2} df = \mu \frac{\omega D}{2e} \pi D dz \frac{D}{2}$$

Expresión que, integrada, nos dará el valor del momento en este caso:

$$\boxed{M_2 = \mu \frac{\omega}{2e} \frac{\pi D^3}{2} \int_L^{L+H} dz = \mu \frac{\omega \pi D^3}{4e} H}$$

Y el momento en este caso b) será la suma de los dos anteriores:

$$\boxed{M_b = M_1 + M_2}$$

c)

En este caso, se añade el momento realizado por la existencia d ella región superior llena de fluido, la tensión y el esfuerzo diferencial serán:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{\omega x - 0}{e};$$

$$df = \tau dA = \tau 2\pi x dx = \mu \frac{\omega x}{e} 2\pi x dx$$

El momento diferencial:

$$dM_3 = \mu \frac{\omega x}{e} 2\pi x^2 dx$$

Así, pues, el momento en este caso, será:

$$\boxed{M_3 = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \int_0^{D/2} x^3 dx = \mu \frac{\omega \pi D^4}{32e}}$$

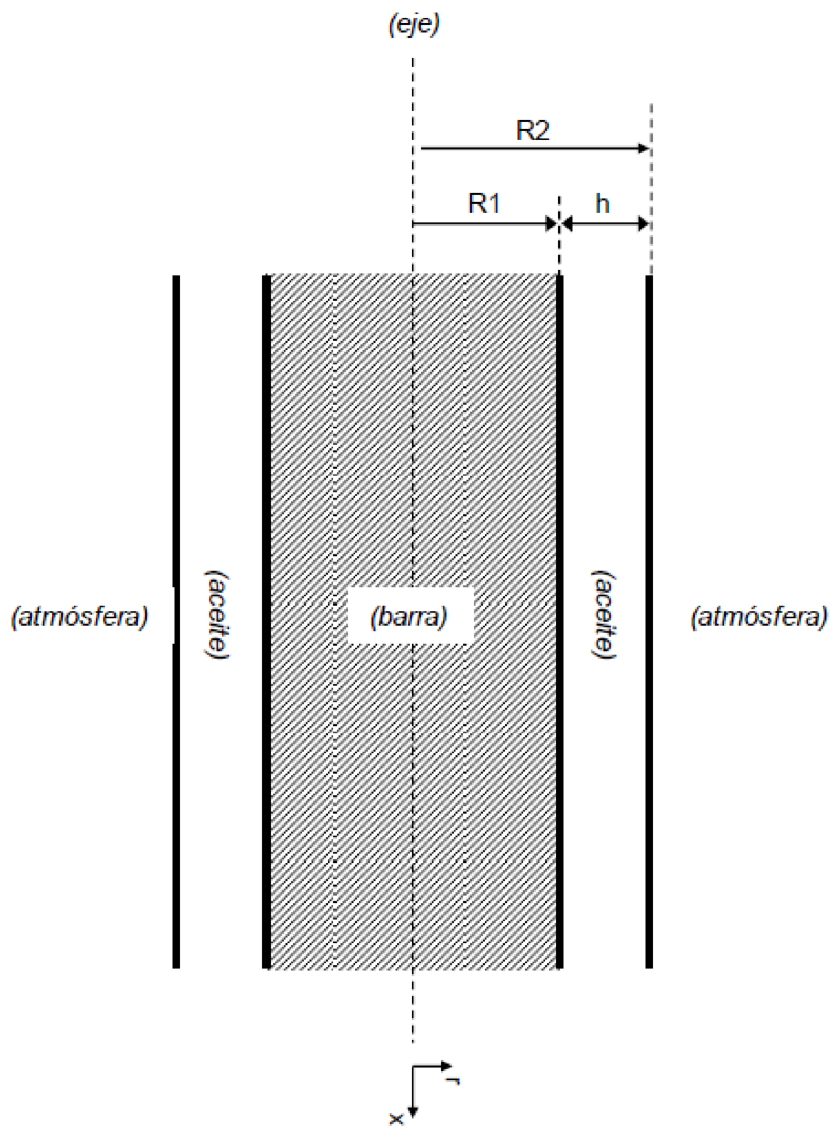
Y el momento total en este caso será la suma de los anteriores:

$$\boxed{M_c = M_1 + M_2 + M_3}$$

Problema 7

La figura muestra una barra metálica sólida, cilíndrica, fija y vertical, cuyo radio es R1. Adherida a la superficie de dicha barra, desciende, en régimen permanente, una película de aceite. El espesor de dicha película de aceite es h, su peso específico es γ, y su viscosidad dinámica es μ. Según muestra la figura, el radio R2 es la distancia desde el eje del sistema hasta la superficie del aceite, que está en contacto con la atmósfera.

Suponiendo despreciable la fricción entre el aceite y la atmósfera, se pide obtener la espresión del perfil de velocidades del aceite. Para ello deben utilizarse los ejes marcados en la figura, y la solución debe quedar sólo en función de los parámetros: γ, μ, R1 y R2.



$$u(r) = \frac{\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \gamma \operatorname{sen}\theta}{4\mu} r^2 + \frac{c_1}{\mu} \ln r + C_2$$

$\theta = 270° \rightarrow \operatorname{sen}\theta = -1.$

$$\longrightarrow u(r) = \frac{-\gamma}{4\mu} r^2 + \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2.$$

Cond 1 $\longrightarrow u(r = R_1) = 0 \longrightarrow 0 = \frac{-\gamma}{4\mu} R_1^2 + \frac{C_1}{\mu} \ln R_1 + C_2$

$$\longrightarrow C_2 = \frac{\gamma}{4\mu} R_1^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln R_1$$

Cond 2 $\longrightarrow \tau(r = R_2) = 0.$

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \cancel{\mu} \left[\frac{-\gamma}{4\cancel{\mu}} 2r + \frac{C_1}{\cancel{\mu}} \frac{1}{r} \right].$$

$$\tau = \frac{-\gamma}{2} r + \frac{C_1}{r} = \frac{-\gamma \cdot r}{2} + \frac{C_1}{r}.$$

$$\tau (r = R_2) = 0 \longrightarrow 0 = \frac{-\gamma \cdot R_2}{2} + \frac{C_1}{R_2}.$$

$$\longrightarrow C_1 = \frac{\gamma \cdot R_2^2}{2}.$$

$$C_2 = \frac{\gamma}{4\mu} R_1^2 - \frac{\gamma R_2^2}{2\mu} \ln R_1$$

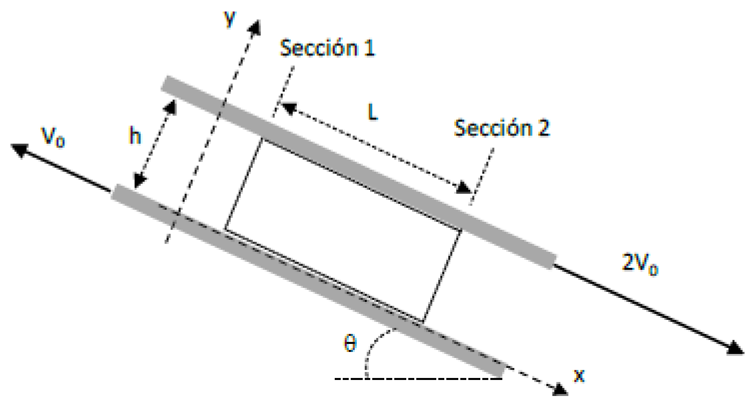
$$u(r) = \frac{-\gamma}{4\mu} r^2 + \frac{\gamma R_2^2}{2\mu} \ln r + \frac{\gamma}{4\mu} R_1^2 - \frac{\gamma \cdot R_2^2}{2\mu} \ln R_1$$

$$u(r) = \frac{\gamma}{4\mu} \left[R_1^2 - r^2 \right] + \frac{\gamma R_2^2}{2\mu} \left[\ln r - \ln R_1 \right].$$

$$\boxed{u(r) = \frac{\gamma}{4\mu} \left[R_1^2 - r^2 \right] + \frac{\gamma \cdot R_2^2}{2\mu} \ln \frac{r}{R_1}.}$$

Problema 8

Un fluido de viscosidad μ y peso específico γ fluye entre dos placas paralelas de grandes dimensiones inclinadas un ángulo θ cuya separación es h. Una de las placas se mueve con velocidad V_0 y la otra con velocidad $2V_0$, tal y como se muestra en la figura. Asimismo, se mide la presión en un punto de la sección transversal 1, y ésta adopta un valor P_0.



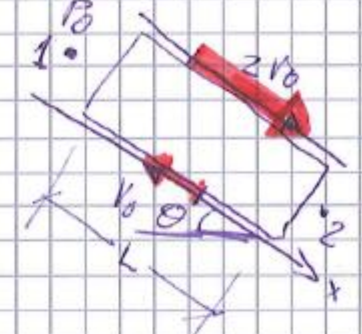
Se pide:

1. Determinar la presión necesaria en un punto de la sección transversal 2, situado a la misma distancia del eje x que el anterior, para que el caudal neto circulante por cualquier sección transversal sea nulo. La sección transversal 2 está separada de la 1 por una distancia de L metros.
2. Determinar la expresión del campo de velocidades u(y) de la manera más compacta posible.
3. Dibujar de manera aproximada el perfil de velocidades en una sección transversal cualquiera, determinando las coordenadas del punto en el que la velocidad local se anula.
4. Demostrar que se cumple el balance de potencias para el volumen de control definido en la figura (longitud L, altura h y profundidad unidad).

Nota importante:

Todos los resultados se darán en función de los valores conocidos: P_0, V_0, μ, γ, h, θ, L.

1



$$\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_2 - P_0}{L}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) = \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) y + A$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

$$q = \int_0^h u(y)\,dy = \boxed{\frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^3}{6} + \frac{A h^2}{2} + Bh = 0}$$

$$u(0) = -V_0;\quad -V_0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{0^2}{2} + A\cdot 0 + B$$

$$\boxed{B = -V_0}$$

$$u(h) = 2V_0;\quad 2V_0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^2}{2} + Ah + B$$

$$B = -V_0$$

$$A = \left(2V_0 + V_0 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^2}{2}\right)\frac{1}{h}$$

$$0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{h^3}{6} - V_0 h + \frac{h^2}{2}\left(3V_0 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{h^2}{2}\right)\frac{1}{h}$$

$$0 = \frac{h^3}{6\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - V_0 h + \frac{3V_0}{2}h - \frac{h^3}{4\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$0 = \frac{h^3}{\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + V_0 h\left(\frac{3}{2} - 1\right)$$

$$\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = \frac{V_0 h}{2}$$

$$\frac{P_2-P_0}{L} = \frac{V_0 h}{2}\,\frac{12\mu}{h^3} + \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{P_2-P_0}{L} = \frac{V_0\, 6\mu}{h^2} + \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta \;;\quad P_2 = p_0 + \left(\frac{6\mu V_0}{h^2} + \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)L$$

$$\boxed{P_2 = p_0 + \gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\, L + 6\frac{\mu V_0 L}{h^2}}$$

(2) $$u(y) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\cancel{P_0} + \cancel{\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\, L} + 6\frac{\mu V_0 L}{h^2} - \cancel{P_0}}{L} - \cancel{\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)\frac{y^2}{2} +$$

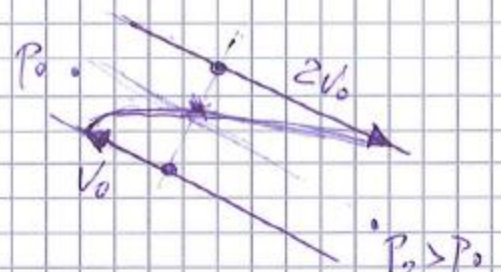
$$+\, y\left(3V_0 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\cancel{P_0} + \cancel{\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta}\, L + 6\frac{\mu V_0 L}{h^2} - \cancel{P_0}}{L} - \cancel{\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)\frac{h^2}{2}\right)\frac{1}{h} - V_0$$

$$u(y) = \frac{1}{\cancel{\mu}}\,\frac{6\cancel{\mu} V_0 \cancel{L}}{\cancel{L} h^2}\,\frac{y^2}{2} + \frac{y}{h}3V_0 - \frac{y}{\cancel{\mu}}\,\frac{6\cancel{\mu} V_0 \cancel{L}}{\cancel{h^2}\cancel{L}}\,\frac{\cancel{h^2}}{2}\,\frac{1}{h} - V_0$$

$$u(y) = \frac{3V_0 y^2}{h^2} + \cancel{\frac{3V_0 y}{h}} - \cancel{\frac{3y V_0}{h}} - V_0 = \frac{3V_0}{h^2}y^2 - V_0$$

$u(y) = \frac{3V_0}{h^2} y^2 - V_0$

(3) $u(y) = 0 \rightarrow \frac{3V_0 y^2}{h^2} = V_0 \rightarrow y = h\sqrt{\frac{\cancel{V_0}}{3\cancel{V_0}}} = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0'58h$



$\frac{du}{dy} = \frac{6V_0}{h^2} y$

$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{6V_0}{h^2} > 0$

en $y=0$ mínimo

(4)

Balance: $(P_1 - P_2)\underbrace{\cancel{Q}}_{0} + (z_1 - z_2)\gamma \underbrace{\cancel{Q}}_{0} + \tau_{y=h} \cdot V(y=h) L - \tau_{y=0} V(y=0) L = \int \Phi \, dV$

$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{6\mu V_0 y}{h^2}$

$\frac{6\mu V_0 h}{h^2}(2V_0)L - 0 = \int \Phi \, dV$; $12\mu V_0^2 \frac{L}{h} = \int \Phi \, dV$

$\Phi = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu \frac{36V_0^2 y^2}{h^4}$; $\int \Phi \, dV = \int_0^h \mu \frac{36V_0^2}{h^4} y^2 \, dy \cdot L =$

$dV = dy \, L$

$= \mu \frac{36 V_0^2 L}{h^4} \frac{h^3}{3} = \mu 12 V_0^2 \frac{L}{h}$

cqd.

Problema 9

Sobre la cinta de la figura hay una capa de aceite viscoso. La parte superior del aceite está en contacto con la atmósfera de manera que se puede despreciar la tensión viscosa en la interfase aceite-aire. En estas condiciones, y sabiendo que el caudal a través de la sección recta es nulo, se pregunta:

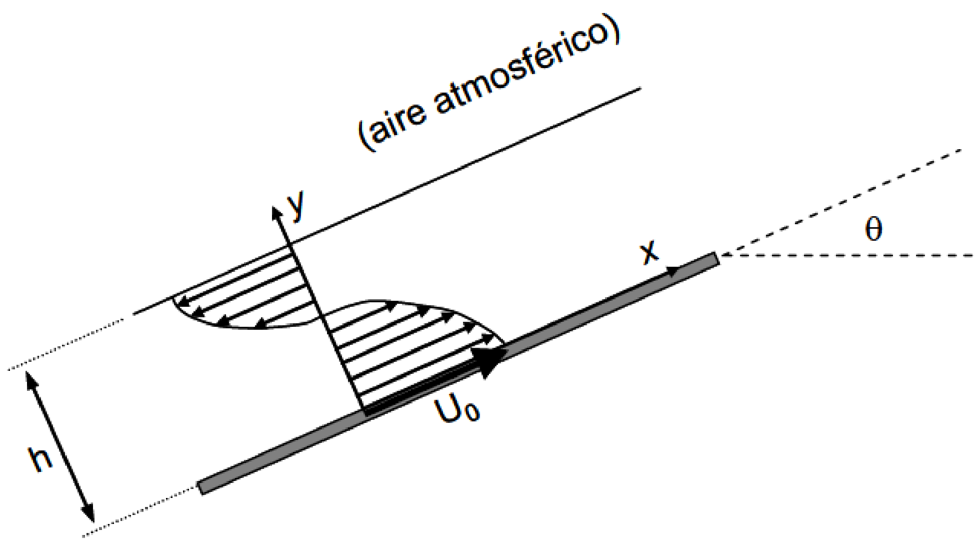
a) El perfil de velocidades $u = u(y)$.

b) El valor del ángulo de inclinación θ así como de la ordenada ζ en la cual la velocidad es cero en función de los parámetros básicos del problema (μ, U_0, h, γ).

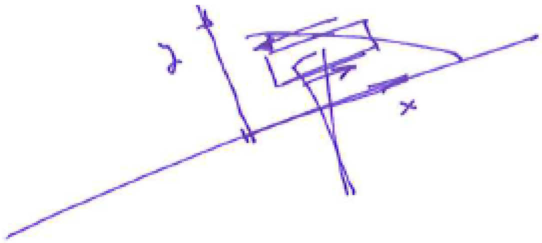
c) La potencia invertida en arrastrar la placa por cada L metros de longitud y 1 metro de profundidad, así como la potencia viscosa disipada por el movimiento del flujo (también para L y 1 m de profundidad).

d) El balance energético completo.

e) Determinar el valor del ángulo θ así como de la ordenada ζ en la que la velocidad se anula para los siguientes valores numéricos: $\mu = 0{,}8$ kg/m.s; $U_0 = 1{,}8$ m/s; $h = 0{,}1$ m; $\gamma = 864$ Nw/m^3



(a)



- No hay gradiente de presiones

Balance de fuerzas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{\tau \delta x} - \left(\cancel{\tau} + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx - \gamma \, \delta x \, \delta y \cdot \sin\theta = 0 \\ \\ \text{con } \tau = -\mu \frac{du}{dy} \\ \\ -\frac{d\tau}{dy} - \gamma \sin\theta = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\gamma \sin\theta}{\mu}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\gamma \sin\theta}{\mu} \cdot y + A$$

pero $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = 0$ $\qquad A = -\frac{\gamma \sin\theta}{\mu} h$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\gamma \sin\theta}{\mu} (y - h)$$

$$u(y) = \frac{\gamma \sin\theta}{\mu} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) + B$$

$\left. u(y) \right|_{y=0} = U_0 \Longrightarrow B = U_0 \qquad \boxed{u(y) = U_0 - \frac{\gamma \sin\theta}{\mu} y \left(h - \frac{y}{2} \right)}$

b) $Q = \int_0^h u(y) \, dy = \boxed{U_0 h - \frac{\gamma \sin\theta}{3\mu} h^3 = Q}$

pero siendo $Q = 0 \Longrightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{3 \mu U_0}{\gamma h^2}}$

La ordenada a la cual la velocidad sea cero se determina a partir de la ecuación:

$$u(S) = 0 = U_0 - \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu} S\left(h - \frac{S}{2}\right)$$

Luego hay que resolver

$$S^2 - 2hS + 2\frac{\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta} = 0$$

$$\boxed{S = h - \sqrt{h^2 - 2\frac{\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta}}}$$

c) En este ejercicio sólo interviene el arrastre de la placa y la disipación de energía. No hay gradiente de presiones y por otra parte al ser $Q \equiv 0$, no hay cambio global de energía potencial (lo que sube por lo que baja)

Arrastre de la placa

$$W_a = F \cdot V = \tau\Big|_{y=0} \cdot L \cdot 1 \cdot U_0$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \mu\left[\frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}(y-h)\right]\Big|_{y=0} = -\frac{\cancel{\mu}\,\gamma \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\mu}} \cdot h$$

$$\boxed{W_a = \gamma h \operatorname{sen}\theta \cdot L \cdot U_0}$$

$F_a = -\tau \cdot L \cdot 1 = h\gamma \operatorname{sen}\theta \cdot L$

Potencia disipada $\quad W_d = \int \Phi \, \delta V$

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu \left\{ \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu} (h-y) \right\}^2$$

$$\Phi = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\mu} \left[h^2 + y^2 - 2hy \right]$$

$$W_d = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\mu} \int_0^h \left[h^2 + y^2 - 2hy \right] L \cdot 1 \cdot dy =$$

$$= \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\mu} \cdot L \frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot L \cdot h^3}{3\mu} = W_d}$$

d) En este caso, toda vez que no hay otros aportes o términos energéticos, ambos deben coincidir. Es decir

$$\boxed{W_d = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta \, L \cdot h^3}{3\mu} = W_a = \gamma h \operatorname{sen}\theta \, L \, U_0}$$

Para evidenciarlo utilizamos la relación que debe cumplirse en este flujo $\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{3\mu U_0}{\gamma h^2}}$

Conviene sustituir en W_a el valor de U_0, toda vez que es el único parámetro que no encuentra su equivalente en W_d. Por tanto

$W_a = \gamma h \operatorname{sen}\theta \, L \, . \, U_0$

$$\text{con } U_0 = \frac{h^2 \gamma \operatorname{sen}\theta}{3\mu}$$

luego $$W_a = \gamma h \operatorname{sen}\theta \, . \, L \, \frac{h^2 \gamma \operatorname{sen}\theta}{3\mu} = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta \, . \, L \, h^3}{3\mu}$$

En resumen $\boxed{W_a \equiv W_d}$

) Aplicación numérica

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3\mu U_0}{\gamma h^2} = \frac{3 \times 8 \times 10^{-1} \times 1.8}{864 \times 10^{-2}} \simeq 0.5$$

$$\theta = 30°$$

$$\delta = 0.1 - \sqrt{h^2 - \frac{2\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta}} =$$

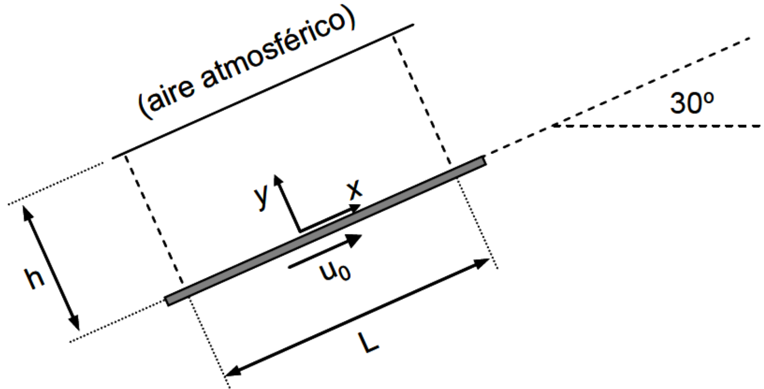
$$= 0.1 - \sqrt{0.01 - \frac{2 \times 0.8 \times 1.8}{864 \times 0.5}}$$

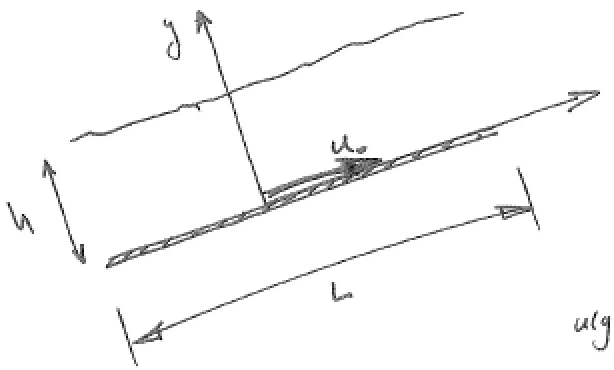
$$= 0.1 - \sqrt{0.01 - 0.007} = 0.1 - 0,0555 \simeq$$

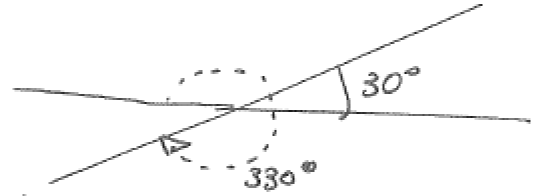
$$= 0.045 \text{ m}$$

Problema 10

La figura muestra un flujo de Couette. La placa inferior se desplaza, tal y como está indicado, a una velocidad constante u_0. No hay placa superior, de modo que el fluido se encuentra en contacto con la atmósfera. Según los datos y ejes mostrados en la figura, se pide hacer todos los cálculos necesarios para comprobar que se cumple el balance de potencias, y expresar el resultado sólo en función de las siguientes variables: γ, L, h, μ.







$$u(y) = \frac{\overbrace{\frac{\Delta p}{\Delta x} - \gamma \operatorname{sen}\theta}^{K}}{\mu}\,\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$K = \cancelto{0}{\frac{\Delta p}{\Delta x}} - \gamma \operatorname{sen}\theta = -\gamma \cdot \operatorname{sen} 330^\circ = -\gamma \cdot \frac{-1}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

<u>Campos de velocidades:</u>

$$\longrightarrow u(y=0) = u_0 = C_2$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu\left[\frac{K}{\mu} y + C_1\right] = K y + C_1 \mu$$

$$\longrightarrow \tau(y=h) = 0 \longrightarrow 0 = K \cdot h + C_1 \mu \longrightarrow C_1 = \frac{-K h}{\mu}$$

Sustituyendo:

$$u(y) = \frac{K}{\mu}\frac{y^2}{2} - \frac{K h}{\mu} y + u_0 = \frac{K}{\mu}\left(\frac{y^2}{2} - h y\right) + u_0$$

$$\longrightarrow \boxed{u(y) = \frac{\gamma}{2\mu}\left(\frac{y^2}{2} - h y\right) + u_0}$$

<u>Esfuerzos cortantes:</u>

$$\boxed{\tau(y) = \mu\left[\frac{K}{\mu} y - \frac{K h}{\mu}\right] = K(y-h) = \frac{\gamma}{2}(y-h)}$$

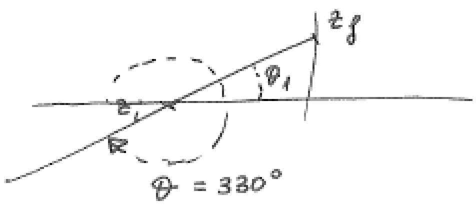
Caudal:

$$Q = \int_0^h u(y)\,dy = \int_0^h \left(\frac{K}{\mu}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + u_0\right) dy = \frac{K}{\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2}\right] + u_0 h$$

$$\boxed{Q = u_0 h - \frac{K h^3}{3\mu} = u_0 h - \frac{\gamma h^3}{6\mu}}$$

Balance de potencias: Pot Aport = Pot. Disipada.

$$\text{Pot. Aportada} = -\gamma Q \Delta z + \vec{F}_{(y=0)} \vec{v}_{(y=0)} = -\gamma Q (z_f - z_i) + \vec{F}_{(y=0)} \vec{v}_{(y=0)}$$



$$z_f - z_i = L \operatorname{sen}\theta_1 = -L \operatorname{sen}\theta$$

$$\longrightarrow -\gamma Q (z_f - z_i) = -\gamma Q(-L \operatorname{sen}\theta) = -\gamma Q L \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-\gamma Q L}{2} = \frac{-\gamma L}{2}\left[u_0 h - \frac{\gamma h^3}{6\mu}\right] = \frac{\gamma^2 L h^3}{12\mu} - \frac{\gamma L u_0 h}{2}$$

$$\longrightarrow \vec{F}_{(y=0)} \cdot \vec{v}_{(y=0)} = -\tau(y=0) L \cancel{\vec{i}} \cdot u_0 \cancel{\vec{i}} = -\tau(y=0) \cdot L \cdot u_0$$

$$= -\frac{\gamma}{2}(-h) L u_0 = \frac{\gamma h L u_0}{2}$$

$$\boxed{\text{Pot. Aportada} = \frac{\gamma^2 L h^3}{12\mu}} - \cancel{\frac{\gamma L u_0 h}{2}} + \cancel{\frac{\gamma h L u_0}{2}}$$

$$\boxed{\text{Pot. Disipada}} = \int_0^h \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 L\,dy = \int_0^h \mu \left[\frac{K}{\mu}(h-y)\right]^2 L\,dy =$$

$$= \frac{K^2}{\mu}\int_0^h (h^2 + y^2 - 2hy) L\,dy = \frac{\gamma^2 L}{4\mu}\left[h^2 h + \frac{h^3}{3} - 2h\frac{h^2}{2}\right] = \boxed{\frac{\gamma^2 L h^3}{12\mu}} \text{ c.q.d.}$$

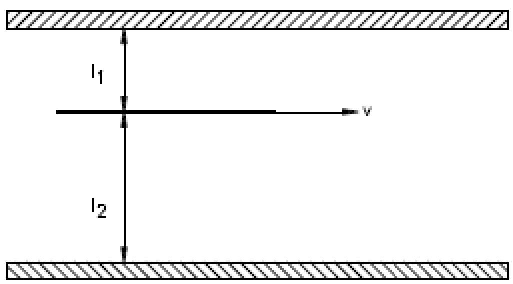
Problema 11

Dos superficies planas de grandes dimensiones están separadas 32 mm y el espacio entre ellas está lleno con un líquido cuya viscosidad es de 0,15 poises. Suponiendo que el gradiente de velocidades es lineal, se pide:

a) ¿Qué fuerza en daN se requiere para arrastrar una placa de muy poco espesor y 0,5 m^2 de área a la velocidad constante de 20 cm/s si la placa dista 10 mm de una de las superficies?

b) ¿Cuál es la potencia disipada en watios?. Razónese todo lo que se haga.

Resolución:

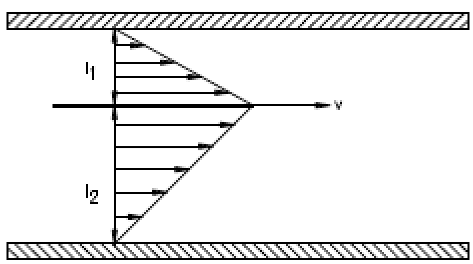


$$\boxed{\begin{array}{l} Datos\,\mu = 0{,}15Po = 0{,}015Pl; l_1 = 10mm; \\ l_2 = 32 - 10 = 22mm \\ Gradiente de velocidad lineal; A = 0{,}5m^2; \\ V = 20cm/s = 0{,}2m/s \end{array}}$$

a) Fuerza en daN.

Ley de Newton de la Viscosidad.

$$\frac{dF_t}{dA} = \mu \times \frac{dv}{dy} \Rightarrow F_t = \mu \times \frac{v}{y} \times A$$



donde

μ: viscosidad dinámica del líquido.

v/y: gradiente de velocidades.

A: sección de la placa móvil.

$$F_t = \mu \times \frac{v}{l_1} \times A + \mu \times \frac{v}{l_2} \times A = \mu \times A \times \left(\frac{v}{l_1} \times \frac{v}{l_2} \right) =$$

$$= 0{,}015 \times 0{,}5 \times \left(\frac{0{,}2}{0{,}01} + \frac{0{,}2}{0{,}022} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_t = 0{,}218N \Rightarrow 0{,}0218daN$$

$$\boxed{F_t = 0{,}218\ N \Rightarrow 0{,}0218\ daN}$$

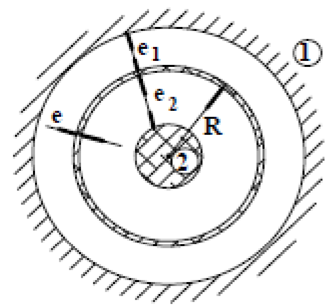
b) Potencia disipada en watios.

$$Pot = F_t \times v = 0{,}218 \times 0{,}2 = 0{,}0436\ W \Rightarrow Pot = 0{,}0436\ W$$

$$\boxed{Pot = 0{,}0436\ W}$$

Problema 12

Se requiere un par de torsión de 4 Nm para hacer girar el cilindro intermedio de la figura a 30 rpm. Los cilindros 1 y 2 están fijos. Calcular la viscosidad dinámica del aceite. Todos los cilindros tienen 450 mm de longitud. Despreciar los efectos de extremo y espesor del cilindro intermedio (e = 0).



Datos:

R = 0,15 m; $e_1 = e_2 = 3$ mm.

Resolución

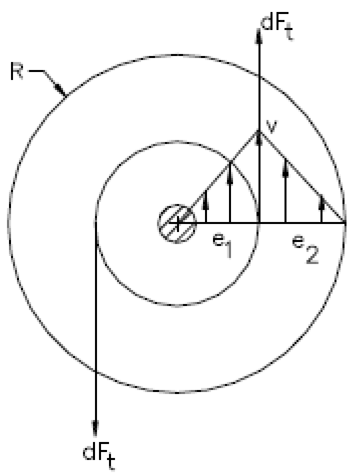
$$\boxed{Datos: M = 4mN; N = 30rpm; L = 450mm; e \approx 0; l_1 = l_2 = 3mm; R = 0{,}15}$$

a) Viscosidad dinámica del aceite (μ)

$$Gradientedevelocidades. = \frac{v}{l_1} = \frac{v}{l_2}$$

$$v = \omega \times R_1 = \frac{30 \times 2 \times \pi}{60} \times R_1 = \pi \times R_1 \left(\frac{m}{s}\right) =$$

$$= \pi \times 0{,}015 \left(\frac{m}{s}\right)$$



Ley de Newton de la viscosidad:

$$dF_t = \mu \times \frac{dv}{dt} \times dA \Rightarrow dF_t = \mu \times \frac{v}{l_1} \times dA +$$

$$+ \mu \times \frac{v}{l_2} \times dA = \mu \times \left(\frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}\right) \times dA$$

Las fuerzas infinitesimales dF_t se anulan dos a dos.

$$dM = dF_t \times R_1 \Rightarrow M = \int_A dF_1 \times R_1 = \int_A \mu \times \left(\frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}\right) \times dA \times R_1$$

$$M = \mu \times \left(\frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}\right) \times 2 \times \pi \times R_1 \times L \times R_1 \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{M}{\left(\frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}\right) \times 2\pi \times R_1^2 \times L} = \frac{4}{\frac{2 \times 0{,}15 \times \pi}{0{,}003} \times 2\pi \times 0{,}45 \times 0{,}15^2} = 0{,}2 Pl$$

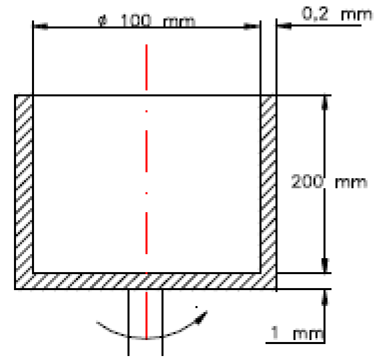
$$\boxed{\mu = 0{,}2 Pl = 2 Po}$$

Problema 13

Se tiene el cojinete que muestra la ***Figura*** ...., que consta de dos cilindros coaxiales con un aceite de densidad relativa 0,95 entre ambos. Se pide:

a) Viscosidad dinámica del aceite.
b) Viscosidad cinemática del aceite.
c) Potencia disipada en el proceso.
d) Velocidad angular de deformación del aceite.

<u>**Datos:**</u> Velocidad de giro del cilindro exterior =90 rpm; Idem del interior = 0; par de torsión = 0,04 mkg.



Figura

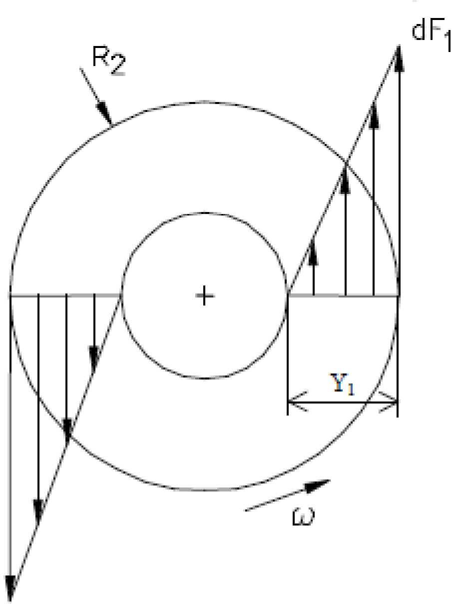
Resolución

$$\boxed{\begin{aligned}&Datos: s = 0{,}95; N = 90rpm \Rightarrow \omega = \frac{90\times 2\pi}{60} = 3\pi \times {}^{rad}\!/_{s}; R_1 = 50mm; R_2 = 50{,}2mm\\&y_1 = 0{,}2mm; y_2 = 1mm; L = 200mm; M_T(par\,de\,torsion) = 0{,}04mkg = 0{,}04\times 9{,}8 =\\&= 0{,}392mN = 0{,}392J\end{aligned}}$$

a) Viscosidad dinámica del aceite (μ).

M_1 = momento a realizar para superar la resistencia que opone el aceite al movimiento en la superficie lateral.
M_2 = momento a realizar para superar la resistencia que opone el aceite al movimiento en la superficie inferior o base.

$$M_T = M_1 + M_2 = 0{,}932mN$$



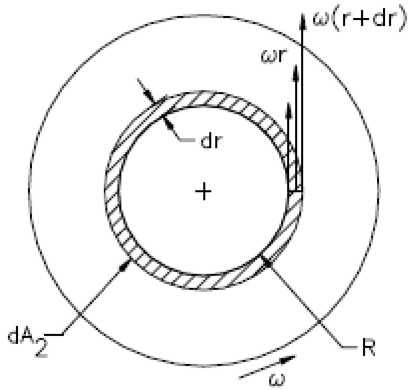
<u>Superficie lateral (A_1).</u>

$dF_1 = dF_2$, las fuerzas se anulan dos a dos. $F_{total} = 0$.

Ley de Newton de la viscosidad:

$$dF_1 = \mu\times\frac{dv}{dy_1}\times dA_1 \Rightarrow \mu\times\frac{\omega\times R_2}{y_1}\times dA_1$$

$$dM_1 = dF_1\times R_2 = \mu\times\frac{\omega\times R_2}{y_1}\times dA_1\times R_2$$



$$M_1=\int_{A_1}\mu\frac{\omega\times R_2{}^2}{y_1}\times dA_1=\frac{\mu\times\omega\times R_2{}^2}{y_1}\times 2\pi\times R_2$$
$$\times\left(L+10^{-3}\right)=\frac{\mu\times 3\pi\times\left(50{,}2\times10^{-3}\right)^2}{0{,}2\times10^{-3}}\times 2\pi\times 50{,}2$$
$$\times 10^{-3}\times 0{,}201\Rightarrow M_1=7{,}53\times\mu mN$$

<u>Superficie inferior o base (A_2)</u>

Al igual que en el caso anterior, las fuerzas cortantes infinitesimales se anulan dos a dos. Por tanto $F_{total}=0$.

Ley de Newton de la viscosidad

$$dF_2=\mu\times\frac{dv}{dy_2}\times dA_2=\mu\times\frac{\omega\times r}{y_2}\times dA_2\Rightarrow$$
$$dA_2=2\pi\times r\times dr$$
$$dM_2=dF_2\times r=\mu\times\frac{\omega\times r}{y_{12}}\times dA_2\times r=$$
$$\mu\times\frac{\omega\times r^2}{y_2}\times 2\pi\times r\times dr=f(r)$$

$$M_2=\int_0^{R_2}\frac{\mu\times\omega\times 2\pi}{y_2}\times r^3\times dr=\frac{\mu\times\omega\times 2\pi}{y_2}\left|\frac{R_2{}^4}{4}\right|_0^{0{,}0502}$$
$$=\frac{\mu\times 3\pi\times 2\pi}{10^{-3}}\times\frac{0{,}0502^{\,4}}{4}=0{,}094\,\mu mN$$

$$M_T=M_1+M_2\Rightarrow 0{,}392=7{,}53\mu+0{,}094\mu\Rightarrow$$

$$\boxed{\mu=0{,}01544Pl\rightarrow 0{,}5142Po}$$

b) Viscosidad cinemática del aceite (υ).

$$\upsilon={}^{\mu}\!/\!{}_{\rho}=\frac{0{,}05142}{0{,}95\times10^3}=5{,}413\times10^{-5}\,{}^{m^2}\!/\!{}_{s}=0{,}5413St\Rightarrow$$

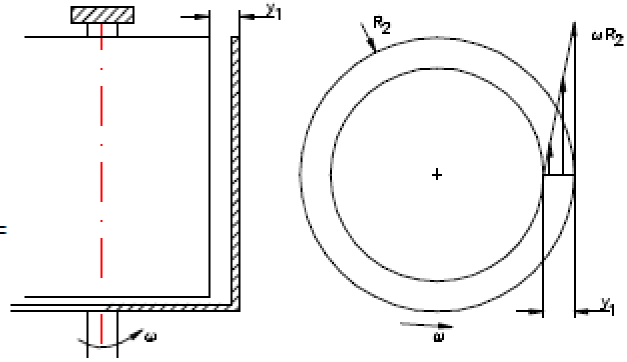
$$\boxed{\upsilon=0{,}5413St}$$

c) Potencia disipada en el proceso.

$$Pot=M\times\omega=0{,}392\times 3\pi=3{,}6945W\Rightarrow$$

$$\boxed{Pot=3{,}6945W}$$

d) Velocidad de deformación angular del aceite.

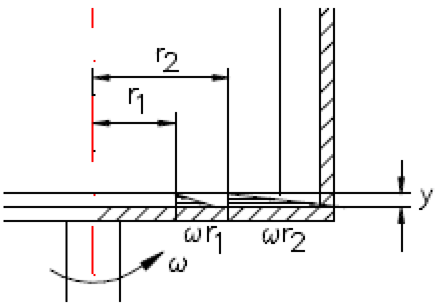


Superficie lateral A_1

$$\frac{du}{dy} = \frac{\omega \times R_2}{y_1} = \frac{3\pi \times 50{,}2 \times 10^{-3}}{0{,}2 \times 10^{-3}} =$$

$$= 2356{,}6\, {}^{rad}\!/_{s}$$

Superficie inferior A_2



$$\frac{du}{dy} = \frac{\omega \times r}{y_2} = \frac{3\pi \times r}{y_2}\left({}^{rad}\!/_{s} \right) \Rightarrow (\mathrm{var}\, iableen\, funcionder)$$

$$Maxima = \frac{du}{dy}\max = \frac{3\pi \times 50{,}2 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = 473{,}12\, {}^{rad}\!/_{s}$$

Problema 14

. En un líquido al aumentar su presión en 0,5 kg/cm^2 su densidad aumenta en un 0,02 %. ¿Cuánto vale su módulo de elasticidad volumétrico en kPa?.

Resolución

$$\boxed{Datos; \Delta P = 0{,}5 kg/cm^2; \Delta\rho = 0{,}02\%}$$

a) Módulo de elasticidad volumétrico en kPa.

$$k = \frac{dp}{-\frac{dv}{v}} = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} \Rightarrow dp = k \times \frac{d\rho}{\rho}$$

Suponiéndose k = cte.

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{0{,}02}{100}\rho_1 = 1{,}0002\ \rho_1$$

$$\Delta P = k \times \ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow= k = \frac{\Delta P}{\ln\left(\rho_2/\rho_1\right)}$$

$$k = \frac{0{,}5}{\ln 1{,}0002} = 2500{,}25 kg/cm^2$$

$$k = 2500{,}25 kg/cm^2 \times 9{,}8 N/kg \times 10^4 cm^2/m^2 \times 10^{-3} kPa/Pa = 2{,}45 \times 10^5 kPa$$

$$\boxed{k = 2{,}45 \times 10^5 kPa}$$

Problema 15

Un depósito de acero se dilata un 1% en volumen cuando la presión interior aumenta en 700 kg/cm^2. A la presión absoluta de 1 kg/cm^2 contiene 500 kg de agua. Se pide:

a) ¿Cuánta masa de agua habrá que añadir para aumentar la presión en 700 kg/cm^2?

Datos: Densidad del agua 1.000 kg/m^3; módulo de elasticidad volumétrico del agua = 21.000 kg/cm^2.

Resolución

$$Datos: \Delta v = 1\%; \Delta P = 700 kg/cm^2; \rho_0 = 1000 kg/m^3 (densidad del agua en C.N.)$$
$$m_0 = 500 kg (masa de agua inicial); k = 21000 kg/cm^2$$

Se define módulo de elasticidad volumétrico (k) como la relación entre la variación de presión y la deformación unitaria de volumen.

$$k = \frac{\Delta p}{-\Delta V/V} = \frac{\Delta p}{\Delta\rho/\rho} = \frac{dp}{d\rho/\rho} \Rightarrow d\rho/\rho = \frac{dp}{k} \Rightarrow \ln|\rho|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{\Delta p}{k} \Rightarrow$$
$$\ln \rho/\rho_0 = \Delta p/k \Rightarrow \rho/\rho_0 = e^{\Delta p/k} \Rightarrow \rho = \rho_0 \times e^{\Delta p/k} \Rightarrow \rho = 10^3 \times e^{700/21000} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho = 1033{,}895 kg/m^3$$

Inicialmente:

$$\rho_0 = m_0/V_0 \Rightarrow V_0 = m_0/\rho_0 = \frac{500}{1000} = 0{,}5 m^3 (volumen inicial de agua)$$

Al incrementar la presión en 700 kg/cm^2, el depósito se dilata 1 %.

$$V = V_0 + 0{,}01 \times V_0 = 0{,}505 m^3 (volumen\ final\ de agua)$$

$$m = \rho \times V = 1033{,}89 \times 0{,}505 = 522{,}12 kg (masa\ final de agua)$$

$$\Delta m (incremento de masa de agua) = m - m_0 = 522{,}12 - 500 = 22{,}12 kg$$
$$\boxed{\Delta m = 22{,}12 kg}$$

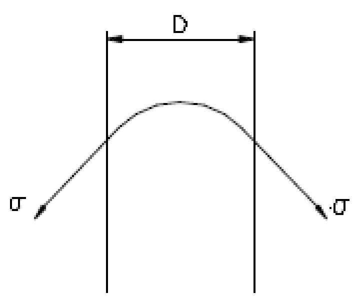
Problema 16

Una fábrica de termómetros de mercurio tara sus aparatos con un termómetro patrón que dispone de una varilla de 5 mm de diámetro interior. Sin embargo, con el fin de ahorrar mercurio, los termómetros comerciales que fabrica los realiza con tan sólo 1 mm de diámetro. Se pide:

a) Estudiar si dichos termómetros miden con algún error y en qué sentido se produce.
b) En caso afirmativo calcular el error que se produciría en el termómetro que un grado equivaliera a 5 mm de columna.

Datos: Tensión superficial del mercurio = 0,52 N/m;
Peso específico relativo = 13,6.
Nota : Se supondrán nulas las fuerzas de adhesión entre mercurio y tubo.

$$\boxed{\begin{array}{l} Datos: D = 5mm(termometro\ \ patron); D = 1mm(comercial); 5mm = 1°comercial \\ \sigma_{Hg} = 0{,}52 N.m; S_{Hg} = 13{,}6 \end{array}}$$



Las fuerzas de adhesión entre el mercurio y el tubo se suponen nulas.

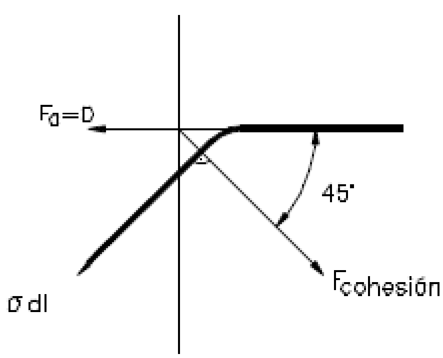
Equilibrio:

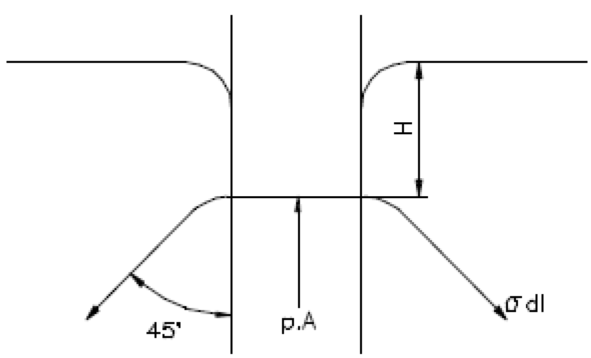
$$\Sigma F_y = 0$$

$$\sigma \times l \times \cos 45° = \rho \times A \Rightarrow \sigma \times \pi \times D \times \cos 45°$$

$$= H \times \gamma \times \frac{\pi \times D^2}{4} \Rightarrow H = \frac{4 \times \sigma \times \cos 45°}{\gamma \times D}$$

Expresión del descenso capilar del mercurio debido a la tensión superficial.





$$Si D = 5mm \rightarrow H = \frac{5 \times 0{,}52 \times \cos 45}{13{,}6 \times 9800 \times 5 \times 10^{-3}} = 0{,}0022m = 2{,}207mm$$

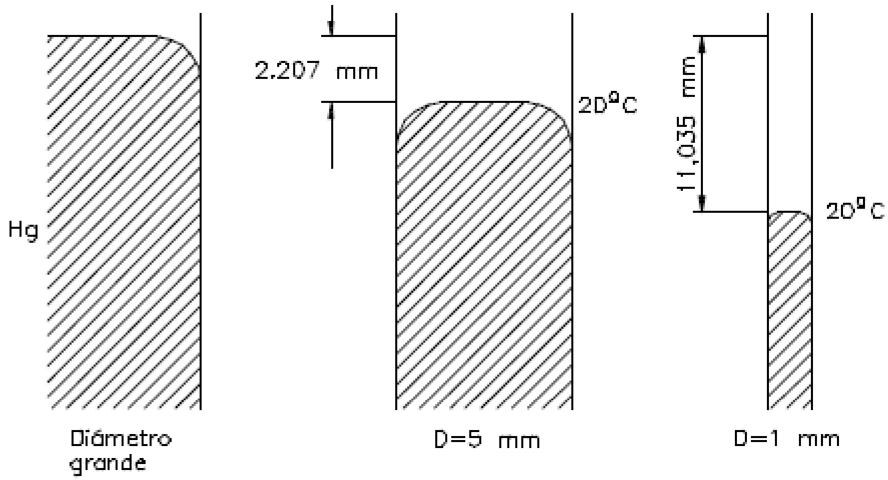
$$SiD = 1mm \rightarrow H = \frac{4 \times 0{,}52 \times \cos 45}{13{,}6 \times 9800 \times 5 \times 10^{-3}} = 11{,}035.10^{-3}\,m = 11{,}035mm$$

$$\Delta H = 11{,}035 - 2{,}207 = 8{,}828mm$$

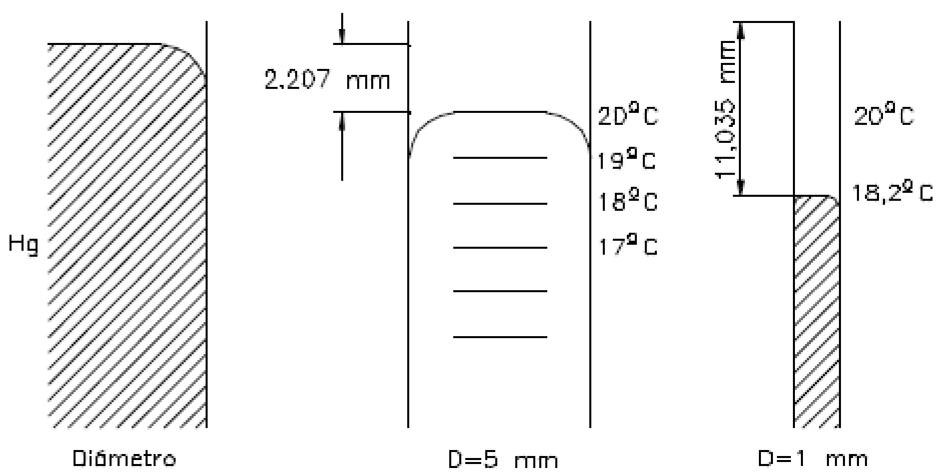
$$1^{\circ}C \rightarrow 5mm$$

$$x \rightarrow 8{,}828m \Rightarrow x = 1{,}8^{\circ}C$$

Error = 1,8 °C



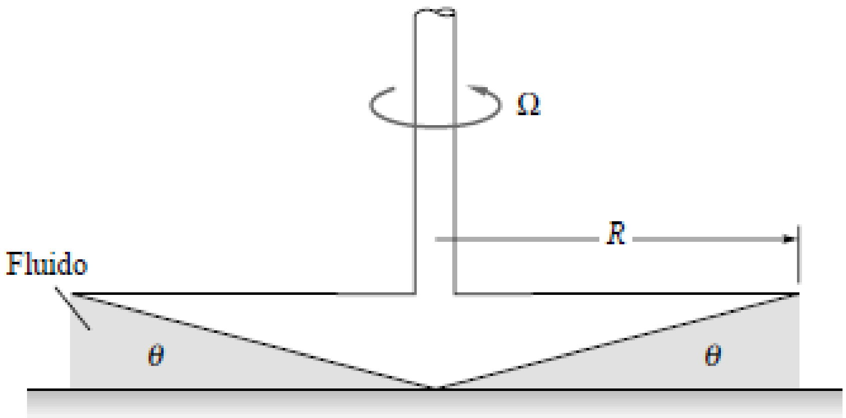
Cuando el termómetro comercial de D = 1 mm marca 20 ºC, en realidad la temperatura es de 18,2 ºC, siendo el error de 1,8 ºC.



r) 1,76ºC.

Problema 17

El dispositivo de la Figura P1.56 se denomina *viscosímetro cono-placa* [27]. El ángulo del cono es muy pe-



P1.56

queño, luego sen θ P θ, y el hueco entre cono y placa se llena con el líquido a ensayar, midiendo el par M que hay que aplicar para hacer girar el cono a la velocidad Ω. Suponiendo un perfil de velocidad lineal en la película fluida, obtenga una expresión para la viscosidad del fluido μ en función de (M, R, Ω, θ).

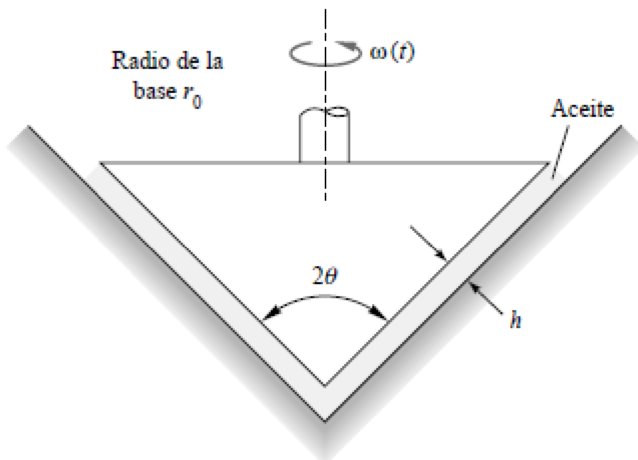
For any radius r ≤ R, the liquid gap is h = r tanθ. Then

$$\mathrm{d(Torque)} = \mathrm{dM} = \tau\,\mathrm{dA_w r} = \left(\mu\frac{\Omega r}{r\tan\theta}\right)\left(2\pi r\frac{dr}{\cos\theta}\right)r, \quad \text{or}$$

$$M = \frac{2\pi\Omega\mu}{\sin\theta}\int_0^R r^2\,dr = \frac{2\pi\Omega\mu R^3}{3\sin\theta}, \quad \text{or:} \quad \mu = \frac{\mathbf{3M\sin\theta}}{\mathbf{2\pi\Omega R^3}} \quad \textit{Ans.}$$

Problema 18

Un cono sólido de ángulo 2θ, radio de la base r_0 y densidad ρ_c está girando con una velocidad angular ω_0 en su asiento cónico, como se muestra en la Figura P1.53. La holgura h está llena de aceite con viscosidad μ. Despreciando la resistencia del aire, obtenga una expresión para la velocidad angular del cono $\omega(t)$ si no se aplica ningún par motor.



Solution: At any radial position $r < r_o$ on the cone surface and instantaneous rate ω,

$$d(\text{Torque}) = r\tau\, dA_w = r\left(\mu\frac{r\omega}{h}\right)\left(2\pi r\frac{dr}{\sin\theta}\right)$$

$$\text{or:}\quad \text{Torque } M = \int_0^{r_o}\frac{\mu\omega}{h\sin\theta}2\pi r^3\,dr = \frac{\pi\mu\omega r_o^4}{2h\sin\theta}$$

We may compute the cone's slowing down from the angular momentum relation:

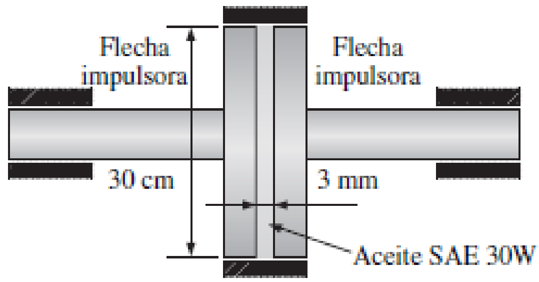
$$M = -I_o\frac{d\omega}{dt},\quad \text{where } I_o(\text{cone}) = \frac{3}{10}mr_o^2,\quad m = \text{cone mass}$$

Separating the variables, we may integrate:

$$\int_{\omega_o}^{w}\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\pi\mu r_o^4}{2hI_o\sin\theta}\int_0^t dt,\quad \text{or:}\quad \boldsymbol{\omega = \omega_o\,\exp\left[-\frac{5\pi\mu r_o^2 t}{3mh\sin\theta}\right]}\quad \textit{Ans.}$$

Problema 19

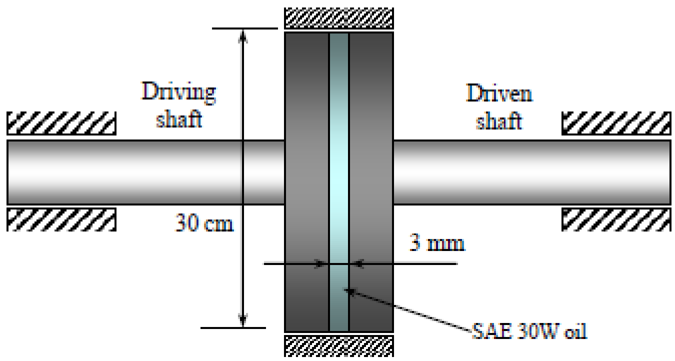
2-47 El sistema de embrague que se muestra en la figura P2-47 se usa para transmitir par de torsión mediante una película de aceite con $\mu = 0.38 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ que está entre dos discos idénticos de 30 cm de diámetro. Cuando la flecha impulsora gira a una velocidad de 1 450 rpm, se observa que la flecha impulsada gira a 1 398 rpm. Suponiendo un perfil lineal de velocidad para la película de aceite, determine el par de torsión transmitido.



Solution A clutch system is used to transmit torque through an oil film between two identical disks. For specified rotational speeds, the transmitted torque is to be determined.

Assumptions **1** The thickness of the oil film is uniform. **2** The rotational speeds of the disks remain constant.

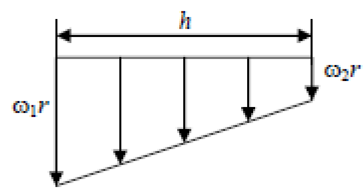
Properties The absolute viscosity of oil is given to be $\mu = 0.38$ N·s/m^2.



Analysis The disks are rotting in the same direction at different angular speeds of ω_1 and of ω_2 . Therefore, we can assume one of the disks to be stationary and the other to be rotating at an angular speed of $\omega_1 - \omega_2$. The velocity gradient anywhere in the oil of film thickness h is $V\ /h$ where $V = (\omega_1 - \omega_2)r$ is the tangential velocity. Then the wall shear stress anywhere on the surface of the faster disk at a distance r from the axis of rotation can be expressed as

$$\tau_w = \mu\frac{du}{dr} = \mu\frac{V}{h} = \mu\frac{(\omega_1 - \omega_2)r}{h}$$

Then the shear force acting on a differential area dA on the surface and the torque generation associated with it can be expressed as



$$dF = \tau_w dA = \mu\frac{(\omega_1 - \omega_2)r}{h}(2\pi r)dr$$

$$dT = rdF = \mu\frac{(\omega_1 - \omega_2)r^2}{h}(2\pi r)dr = \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)}{h}r^3 dr$$

Integrating,

$$T = \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)}{h}\int_{r=0}^{D/2} r^3 dr = \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)}{h}\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{D/2} = \frac{\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)D^4}{32h}$$

Noting that $\omega = 2\pi\ \dot{n}$, the relative angular speed is

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\pi(\dot{n}_1 - \dot{n}_2) = (2\pi \text{ rad/rev})\left[(1450 - 1398) \text{ rev/min}\right]\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 5.445 \text{ rad/s},$$

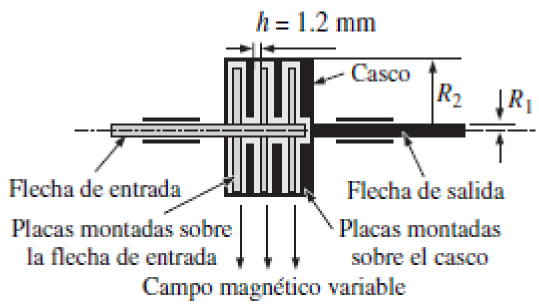
Substituting, the torque transmitted is determined to be

$$T = \frac{\pi(0.38 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2)(5.445\text{ /s})(0.30 \text{ m})^4}{32(0.003 \text{ m})} = \mathbf{0.55\ N\cdot m}$$

Discussion Note that the torque transmitted is proportional to the fourth power of disk diameter, and is inversely proportional to the thickness of the oil film.

Problema 20

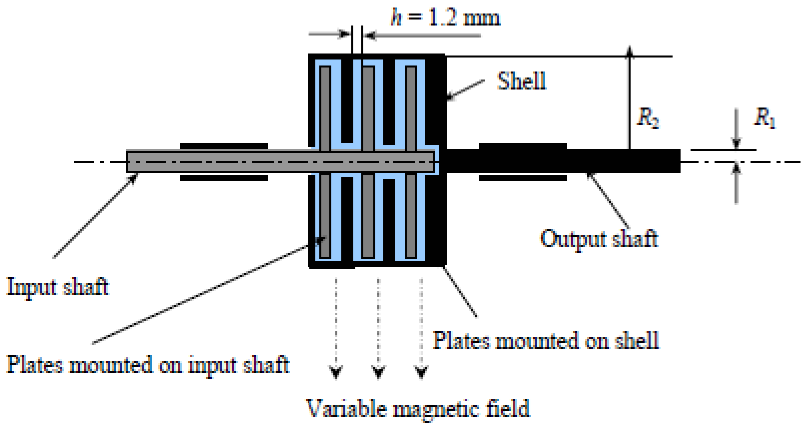
2-49 La viscosidad de algunos fluidos cambia cuando se aplica un fuerte campo eléctrico en ellos. Este fenómeno se conoce como efecto electrorreológico (ER) y los fluidos que muestran un comportamiento de este tipo se conocen como fluidos ER. El modelo del plástico de Bingham para el esfuerzo cortante, el cual se expresa como $\tau = \tau_y + \mu(du/dy)$ se usa con amplitud para describir el comportamiento de los fluidos ER, debido a su sencillez. Una de las aplicaciones más promisorias de los fluidos ER es el embrague ER. Un embrague ER típico de discos múltiples consta de varios discos de acero igualmente espaciados de radio interior R_1 y radio exterior R_2, N de ellos sujetos a la flecha de entrada. La brecha h entre los discos paralelos se llena con un líquido viscoso. *a*) Encuentre una relación para el par de torsión generado por el embrague cuando la flecha de salida está estacionaria y *b*) calcule el par de torsión para un embrague ER con $N = 11$ para $R_1 = 50$ mm, $R_2 = 200$ mm, y $\dot{n} = 2\,400$ rpm, si el fluido es SAE 10, con $\mu = 0.1$ Pa · s, $\tau_y = 2.5$ kPa, y $h = 1.2$ mm. *Respuesta: b*) 2 060 N · m



Solution A multi-disk Electro-rheological "ER" clutch is considered. The ER fluid has a shear stress that is expressed as $\tau = \tau_y + \mu(du/dy)$. A relationship for the torque transmitted by the clutch is to be obtained, and the numerical value of the torque is to be calculated.

Assumptions **1** The thickness of the oil layer between the disks is constant. **2** The Bingham plastic model for shear stress expressed as $\tau = \tau_y + \mu(du/dy)$ is valid.

Properties The constants in shear stress relation are given to be $\mu = 0.1$ Pa·s and $\tau_y = 2.5$ kPa.



Analysis (*a*) The velocity gradient anywhere in the oil of film thickness h is V/h where $V = \omega r$ is the tangential velocity relative to plates mounted on the shell. Then the wall shear stress anywhere on the surface of a plate mounted on the input shaft at a distance r from the axis of rotation is expressed as

$$\tau_w = \tau_y + \mu\frac{du}{dr} = \tau_y + \mu\frac{V}{h} = \tau_y + \mu\frac{\omega r}{h}$$

Then the shear force acting on a differential area dA on the surface of a disk and the torque generation associated with it are expressed as

$$dF = \tau_w dA = \left(\tau_y + \mu\frac{\omega r}{h}\right)(2\pi r)dr$$

$$d\mathrm{T} = r dF = r\left(\tau_y + \mu\frac{\omega r}{h}\right)(2\pi r)dr = 2\pi\left(\tau_y r^2 + \mu\frac{\omega r^3}{h}\right)dr$$

Integrating,

$$\mathrm{T} = 2\pi\int_{r=R_1}^{R_2}\left(\tau_y r^2 + \mu\frac{\omega r^3}{h}\right)dr = 2\pi\left[\tau_y\frac{r^3}{3} + \frac{\mu\omega r^4}{4h}\right]_{r=R_1}^{R_2} = 2\pi\left[\frac{\tau_y}{3}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{\mu\omega}{4h}(R_2^4 - R_1^4)\right]$$

This is the torque transmitted by one surface of a plate mounted on the input shaft. Then the torque transmitted by both surfaces of N plates attached to input shaft in the clutch becomes

$$\mathrm{T} = 4\pi N\left[\frac{\tau_y}{3}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{\mu\omega}{4h}(R_2^4 - R_1^4)\right]$$

(*b*) Noting that $\omega = 2\pi\dot{n} = 2\pi(2400\ \text{rev/min}) = 15{,}080\ \text{rad/min} = 251.3\ \text{rad/s}$ and substituting,

$$\mathrm{T} = (4\pi)(11)\left[\frac{2500\ \text{N/m}^2}{3}[(0.20\ \text{m})^3 - (0.05\ \text{m})^3] + \frac{(0.1\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2)(251.3\ /\text{s})}{4(0.0012\ \text{m})}[(0.20\ \text{m})^4 - (0.05\ \text{m})^4]\right] = \mathbf{2060\ N\cdot m}$$