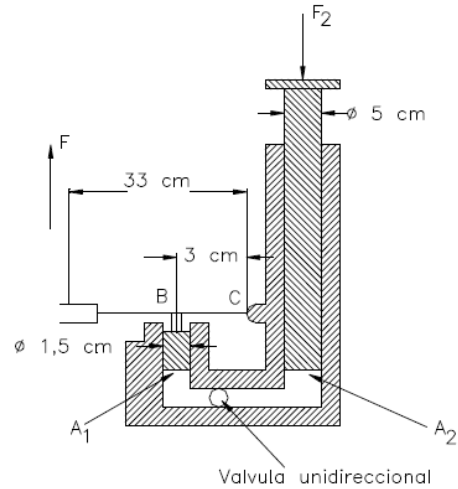


## Guía Alternativa N° 2

### Problema 1

2.1. Un gato hidráulico tiene las dimensiones que se muestran en la figura adjunta; si se ejerce una fuerza de 100 N en la palanca del gato, se pide:

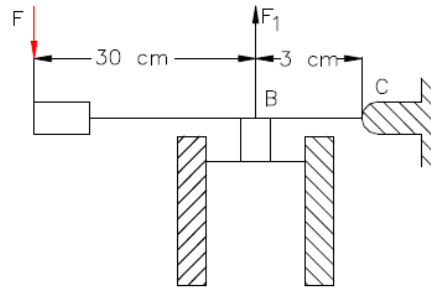
- a) Presión ejercida en  $A_1$  expresada en bares.
  - b) Carga  $F_2$  que puede soportar el gato expresado en daN.
- r) 62,2 bar; 1.221,3 daN.



#### **Resolución**

- a) Presión ejercida en  $A_1$  expresada en bares

*Datos  $F = 100\text{ N}$*



$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &= F \times 0,33 = F_1 \times 0,03 \Rightarrow F_1 = P_1 \times A_1 \Rightarrow P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1100}{\pi \times \frac{0,015^2}{4}} \\ F_1 \times 0,03 &\Rightarrow F_1 = \frac{100 \times 0,33}{0,03} = 1100\text{ N} \\ &\Rightarrow P_1 = 6224726,66\text{ Pa} = 62,24\text{ bar} \end{aligned}$$

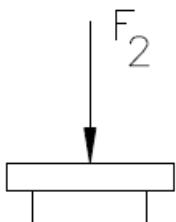
$$\boxed{P_1 = 62,2\text{ bar}}$$

- b) Carga  $F_2$  que puede soportar el gato expresado en daN.

Teorema de Pascal:  $P_1 = P_2$ .

$$F_2 = P_2 \times A_2 = 62,2 \times 10^5 \times \pi \times \frac{0,05^2}{4} = 12212,9\text{ N}$$

$$\boxed{F_2 = 1221,3\text{ daN}}$$



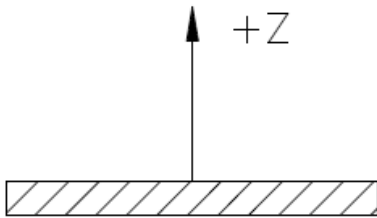
## Problema 2

Partiendo de la ecuación general de la Estática de fluidos, deducir la ecuación que permita conocer la variación de presión con la cota en el caso de los líquidos compresibles de módulo de elasticidad  $K$ , indicando las hipótesis utilizadas. Qué presión existirá en el fondo de una sima de océano de 10000 m de profundidad.

**Datos:**  $K_{\text{agua}} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ;  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

### Resolución

$$\text{Datos : } K_{\text{agua}} = 2,1 \times 10^9 \text{ Pa}; \rho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



a) Ecuación de la variación de presión en el caso de líquido compresible de módulo de elasticidad  $k$ .

Ecuación general de la estática  
 $\rho \vec{F} - \text{gra } d\rho = 0$

Si las fuerzas de volumen derivan de un potencial gravitatorio.

$$\vec{F} = -\text{gra } d \vec{g}z$$

$$-\rho \text{ gra } d \vec{g}z - \text{gra } d \vec{\rho} = 0$$

$$+\rho \times \frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$+\rho \times \frac{\partial g_z}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$+\rho \times \frac{\partial g_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

La presión  $p$  es sólo función de la variable  $z$ . Por lo tanto;

$$\rho g + \frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho g \times dz + dP = 0$ ; Ec. de la estática de fluidos compresibles.

Es necesaria la Ley de Variación de la presión P para poder integrar. En el caso de los líquidos la variación de p viene a través del módulo de elasticidad volumétrico k:

$$K = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} \rightarrow \rho \approx \rho_0 = cte \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{k} \rightarrow$$

Para  $z = 0 \Rightarrow p = 0$ .

Para  $z \Rightarrow p$ .

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^P \frac{dp}{k}$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{k} \rightarrow \rho = \rho_0 \times e^{\frac{p}{k}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho g \times dz + dp = 0 \\ \rho = \rho_0 \times e^{\frac{p}{k}} \end{array} \right\} \rho_0 \times e^{\frac{p}{k}} \times g \times dz + dp = 0 \Rightarrow \frac{dp}{e^{\frac{p}{k}}} = -\rho_0 \times g \times dz$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{e^{\frac{p}{k}}} = -\log dz &\Rightarrow \int_0^P \frac{dp}{e^{\frac{p}{k}}} = -\int_0^z \rho_0 \times g \times dz \Rightarrow -ke^{-\frac{p}{k}} \Big|_0^P = -\rho_0 \times g \times z \Big|_0^z \Rightarrow -ke^{-\frac{p}{k}} + ke^0 = \\ &= -\rho_0 \times g \times z \Rightarrow k(1 - e^{-\frac{p}{k}}) = -\log z \Rightarrow 1 - e^{-\frac{p}{k}} = \frac{-\rho_0 g z}{k} = 1 + \frac{\rho_0 g z}{k} = e^{-\frac{p}{k}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\rho_0 g z}{k}\right) = -\frac{p}{k} \Rightarrow p = -k \ln\left(1 + \frac{\rho_0 g z}{k}\right) \Rightarrow p = k \times \ln\left(1 + \frac{\rho_0 g z}{k}\right)^{-1} = k \times \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{\rho_0 g z}{k}}\right)$$

$$P = k \ln \left[ \frac{1}{1 + \frac{\rho_0 g z}{k}} \right]$$

b) Presión en una sima de 10000 m.

$$k = 2,1 \times 10^9 \text{ Pa}; \rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3; z = -10000 \text{ m}$$

$$P = 2,1 \times 10^9 \times \ln \left[ \frac{1}{1 + \frac{10^3 \times 9,8 \times (-10^4)}{2,1 \times 10^9}} \right] = 100360394 \text{ Pa} \Rightarrow$$

$$\boxed{p = 10240,85 \text{ mca}}$$

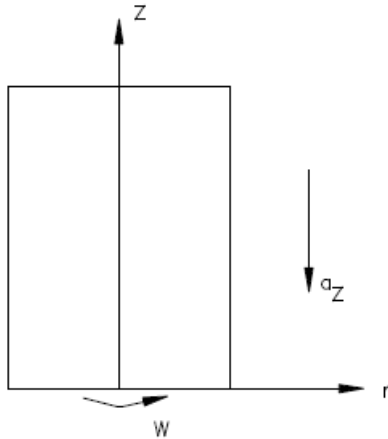
Frente a los 10000 mca si  $\rho = \text{cte.}$

### Problema 3

Un recipiente que contiene un líquido conocido gira en torno a su vertical con una velocidad angular  $\omega$  rad/s. Al mismo tiempo el recipiente tiene una aceleración hacia abajo  $a_z$   $\text{m/s}^2$ .

a) ¿Cuál es la ecuación para una superficie de presión constante  $z = f(r)$ ?

b) Si  $a_z = 3 \text{ m/s}^2$ , calcular la velocidad rotacional tal que la presión en un punto colocado 0,4 m radialmente del eje es la misma que en otro a 1,2 m del eje, con una diferencia de cotas entre ambos puntos.



Tomando una partícula de fluido se analizan las fuerzas por unidad de volumen que actúan sobre la misma.

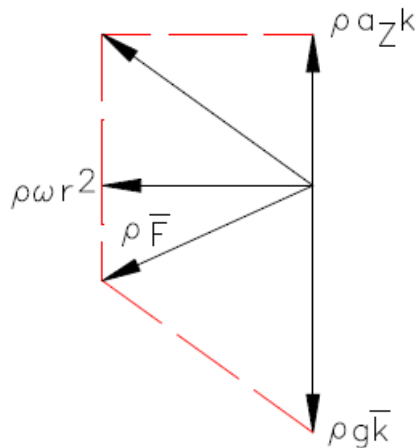
$\rho\omega^2 r$ : fuerza por unidad de volumen debida a la rotación.

$\rho a_z$ : fuerza por unidad de volumen debida a la aceleración lineal.

$\rho g$ : fuerza por unidad de volumen debido a la gravedad.

$$\rho \vec{F} = \rho \omega^2 r \vec{r} - \rho(g - a_z) \vec{k}$$

Ecuación general de la estática.



$$\rho \vec{F} = \text{grad } \bar{p} = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{r} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g - a_z) dz$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r dr - \rho(g - a_z) dz$$

$$p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho(g - a_z)z + k$$

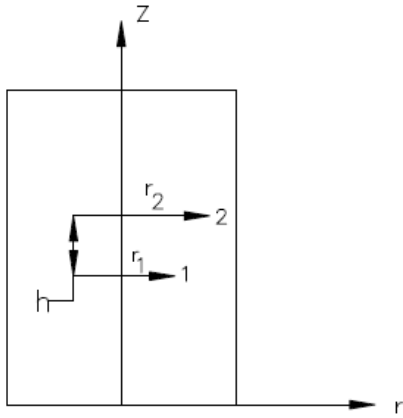
a) Superficies de presión constante  $z = f(r)$ .

$$\rho(g - a_z)z = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + k - p$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2(g - a_z)} + \frac{k - p}{\rho(g - a_z)}$$

$$z_1 = \frac{\omega^2 r_1^2}{2(g - az)} + \frac{k - p_1}{\rho(g - az)}$$

$$z_2 = \frac{\omega^2 r_2^2}{2(g - az)} + \frac{k - p_2}{\rho(g - az)}$$



$$z_2 - z_1 = h$$

$$P_1 = P_2$$

$$h = \frac{\omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}{2(g - az)} \Rightarrow \omega = \left[ \frac{2(g - az)h}{(r_2^2 - r_1^2)} \right]^{1/2}$$

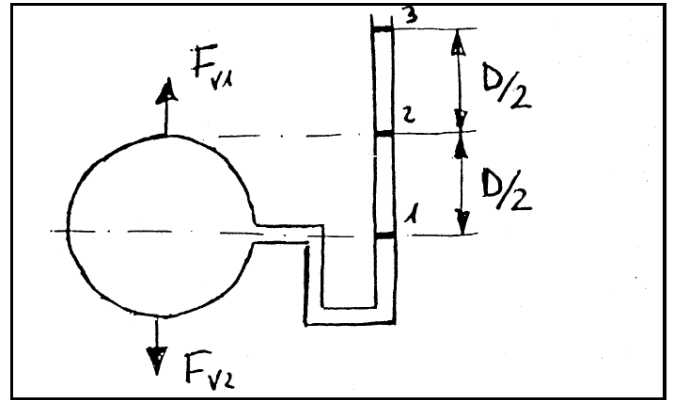
$$\Rightarrow \omega = \left[ \frac{2(9,8 - 3)0,7}{1,2^2 - 0,4^2} \right]^{1/2} = 2,727 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{\omega = 2,727 \text{ rad/s}}$$

## Problema 4

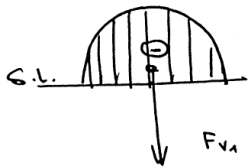
El tanque cilíndrico de longitud  $L$  y diámetro  $D$  se encuentra lleno de agua. Determinar las fuerzas verticales  $F_{V1}$  y  $F_{V2}$  y sus sentidos de actuación, sobre los dos semicilindros diferenciados en la figura cuando:

- El nivel de agua en el manómetro se encuentra en la posición 1.
- Idem en la posición 2.
- Idem en la posición 3.
- Comprobar los resultados e interpretarlos.



En esta cuestión hay que tener presente cómo se obtienen las fuerzas verticales ejercidas sobre superficies curvas. Estas fuerzas verticales se obtienen a partir del peso del fluido que existe entre la superficie en la que se pretende determinar la fuerza y la superficie libre. En cada caso de estudio ocurre que la superficie libre está a diferente cota pero el tratamiento es el mismo.

a)



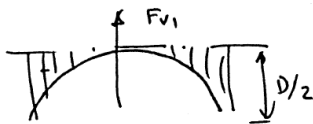
$$F_{V1} = -\frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L \gamma = LD^2 \gamma \left( -\frac{\pi}{8} \right)$$

Hacia abajo, puesto que en la región superior hay depresión interna, va desde el exterior al interior.



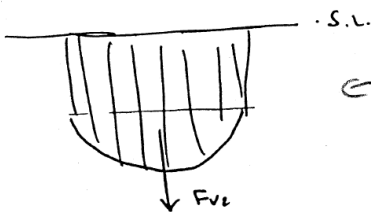
$$F_{V2} = -\frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L \gamma = LD^2 \gamma \left( -\frac{\pi}{8} \right)$$

b)



$$F_{V1} = \gamma \left[ \frac{D}{2} DL - \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L \right] = LD^2 \gamma \left( 0.5 - \frac{\pi}{8} \right)$$

Hacia arriba.



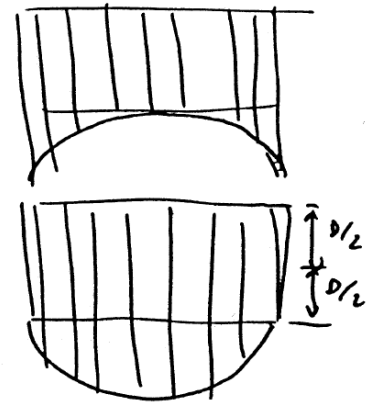
$$F_{V2} = -\gamma \left[ \frac{D}{2} DL + \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L \right] = -LD^2 \gamma \left( 0.5 + \frac{\pi}{8} \right)$$

Hacia abajo.

c)

$$F_{V1} = \gamma \left[ D^2 L - \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L \right] = LD^2 \gamma \left( 1 - \frac{\pi}{8} \right)$$

Hacia arriba.



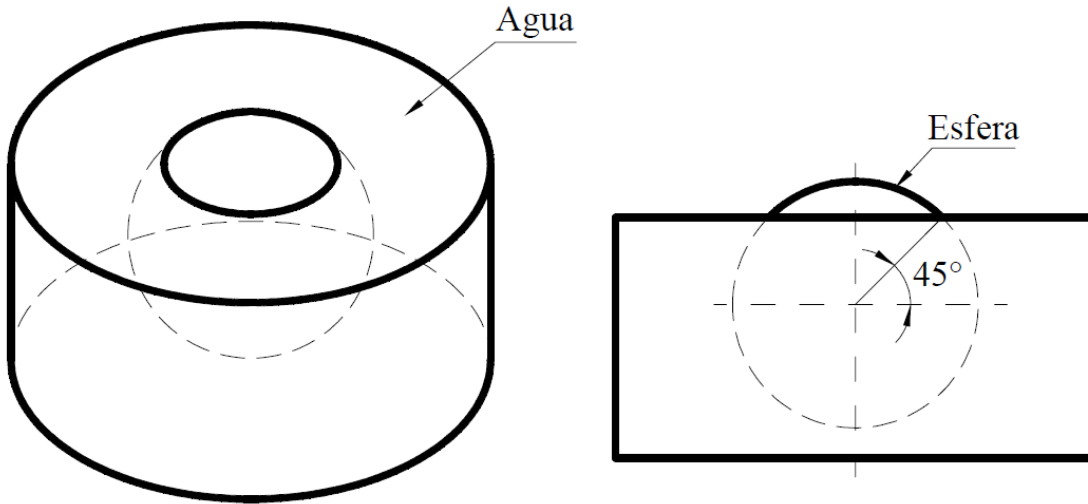
$$F_{V2} = -\gamma \left[ 2 \frac{D}{2} DL + \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} L \right] = -LD^2 \gamma \left( 1 + \frac{\pi}{8} \right) \text{ Hacia abajo.}$$

d) Tal como se ve cada apartado se obtiene a partir del anterior sumando el peso  $\left[ \gamma \frac{D}{2} DL \right]$ . Este término adicional lleva signo positivo para la parte superior y negativo para la inferior.

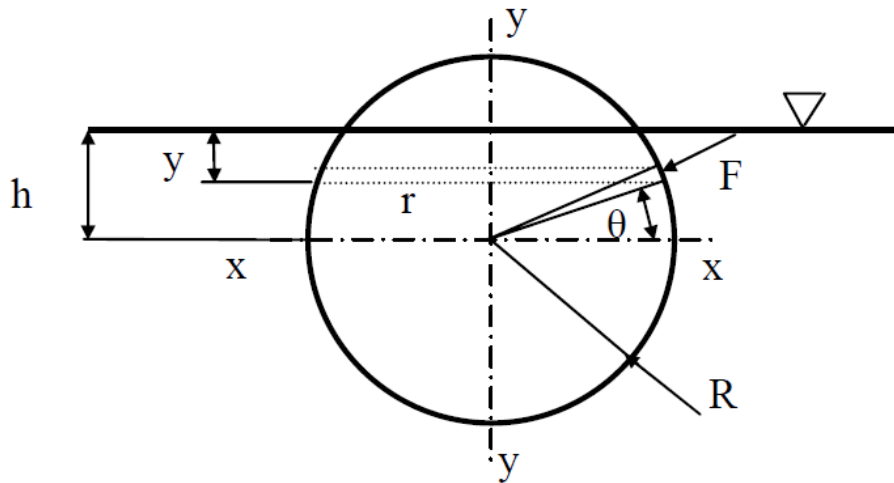
## Problema 5

Sea una esfera de radio la unidad, sumergida parcialmente en agua. Se conoce que, en la posición de equilibrio, el punto de tangencia del casquete esférico que sobresale del líquido con el eje de abscisas que pasa por el centro de la esfera forman un ángulo de 45 grados. Determine:

1. La densidad del material de que está compuesta la esfera.
2. Si la esfera se sumerge en mercurio, determine el nivel de mercurio respecto al eje central de la esfera.



1. El elemento diferencial de superficie empleado para determinar el empuje queda esquematizado en la figura



*Figura 9.2. Esquema del elemento diferencial empleado*

$$E = - \int_s dF_y = - \int_s dF \sin\theta = - \int_s \rho g y \cdot 2\pi r \cdot R d\theta \cdot \sin\theta;$$

puesto que: 
$$\begin{cases} r = R \cos \theta \\ y = h - R \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$$E = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g (h - R \operatorname{sen} \theta) \cdot 2\pi R \cos \theta \cdot R \cdot \operatorname{sen} \theta d\theta;$$

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g h \cdot 2\pi R^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g 2\pi R^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta d\theta;$$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho g 2\pi R^3 \left[ \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \quad (1)$$

Para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ;  $h = R \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} \right) = R \operatorname{sen} (45^\circ)$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen}^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} \left[ \operatorname{sen}^3 \left( \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen}^3 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} [0,353553 - (-1)];$$

$$E = \rho g h 2\pi R^2 \left( \frac{1}{4} \right) + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} (1,353553);$$

$$E = \rho g 2\pi \left[ \frac{R^2}{4} h + \frac{R^3}{3} (1,353553) \right];$$

$$E = \rho g 2\pi \left[ \frac{R^3 \operatorname{sen} 45^\circ}{4} + \frac{R^3}{3} (1,353553) \right];$$

$$E = \rho g 2\pi R^3 \left[ \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{4} + \frac{1,353553}{3} \right] = \rho g 2\pi R^3 \cdot 0,62796 = \rho g \pi R^3 \cdot 1,2559$$

El peso de la esfera ha de ser igual a su empuje, con lo cual se ha de cumplir:

$$W = \rho_E g \frac{4}{3} \pi R^3 = E = \rho_{H_2O} g \pi R^3 \cdot 1,2559$$

$$\rho_E = \frac{\rho_{H_2O} \cdot 1,2559}{\frac{4}{3}} = 941,94 \frac{Kg}{m^3}$$

Véase que, tal como cabía esperar, la densidad es menor que la densidad del agua.

2. Si la esfera se sumerge en el mercurio, y dado que la densidad del mercurio es 13,6 veces la densidad del agua, se puede realizar una estimación inicial calculando si la mitad de la esfera quedará o no cubierta por el mercurio. Para ello, se ha de evaluar si se cumple:

$$\text{Peso}_{\text{esfera}} = W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3} \pi R^3 \stackrel{>}{<} \rho_{Hg} g \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{y se cumple que : } \rho_E < \rho_{Hg} \frac{1}{2}$$

con lo cual, seguro que únicamente un pequeño casquete esférico quedará sumergido en el mercurio.

Dado que el elemento diferencial de empuje es el mismo que en el apartado inicial, se llega a la misma expresión (1) que en dicho apartado, aunque ahora la densidad de fluido es la del mercurio.

$$E = -\rho_{Hg} g h 2\pi R^2 \left[ \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho_{Hg} g 2\pi R^3 \left[ \frac{\text{sen}^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

de donde:

$$E = \rho_{Hg} g 2\pi R^2 \left\{ \left[ \frac{R}{3} \left( \text{sen}^3 \theta - \text{sen}^3 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] - \left[ \frac{h}{2} \left( \text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right\}; \quad (2)$$

Con el fin de comprobar la bondad de la ecuación hallada, se comprueba que para  $\theta = 0$  se cumple que  $h = 0$ , con lo cual el empuje debería ser el equivalente al de media esfera.

$$E = \rho_{Hg} g 2\pi R^2 \left[ \frac{R}{3} (0+1) - \frac{h}{2} (0-1) \right]$$

$$E = \rho_{Hg} g 2\pi R^2 \left[ \frac{R}{3} + \frac{h}{2} \right]$$

$$E = \rho_{Hg} g 2\pi \frac{R^3}{3} = \rho_{Hg} g \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{2}$$

Véase que se cumple.

La determinación del ángulo  $\theta$  se obtendrá de igualar el peso de la esfera a la ecuación del empuje en función de dicho ángulo.

El peso de la esfera viene dado por:

$$W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3} \pi R^3 = 941,94 \cdot 9,8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 38666,77 \text{ N} \quad (3)$$

La figura 1.3 es la representación gráfica de la ecuación (2), donde entrando para el peso de la esfera se obtiene el ángulo  $\theta$  que forma la superficie libre del mercurio con el eje de abscisas central de la esfera. Cuyo valor es de  $\theta = -42,7^\circ$ .

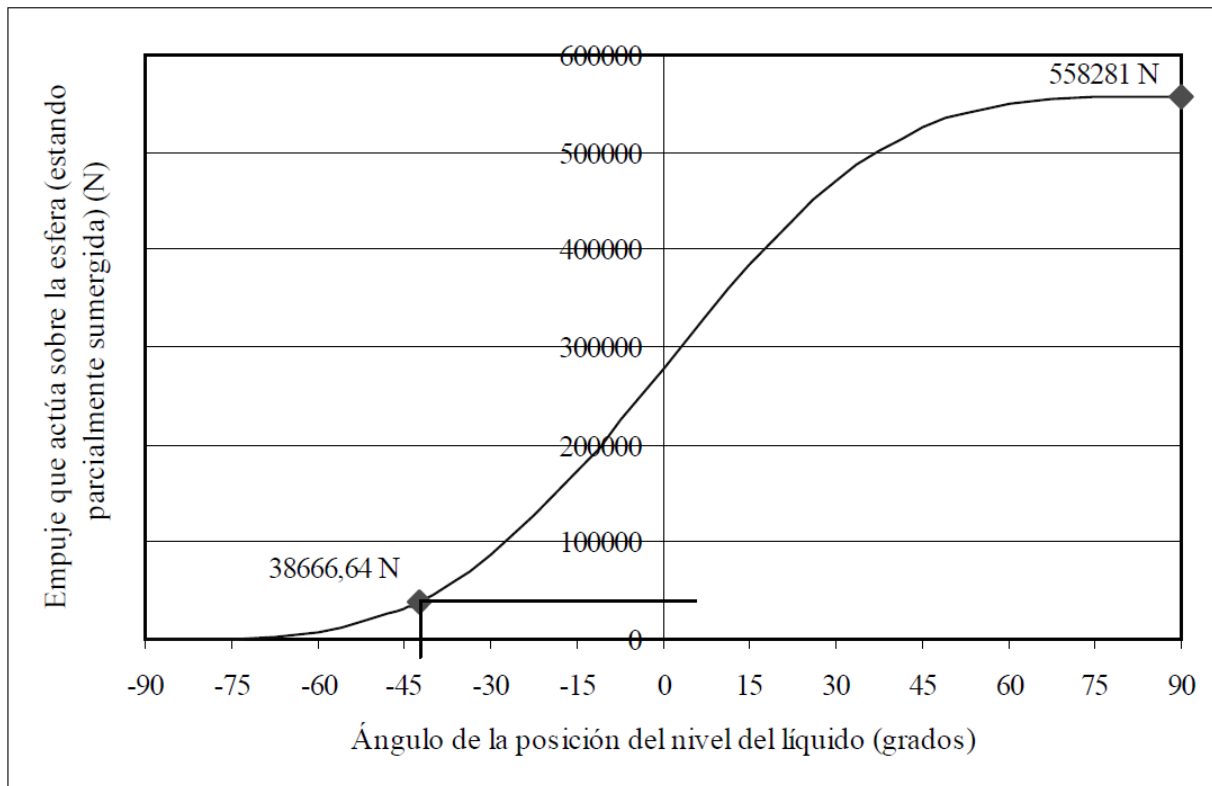
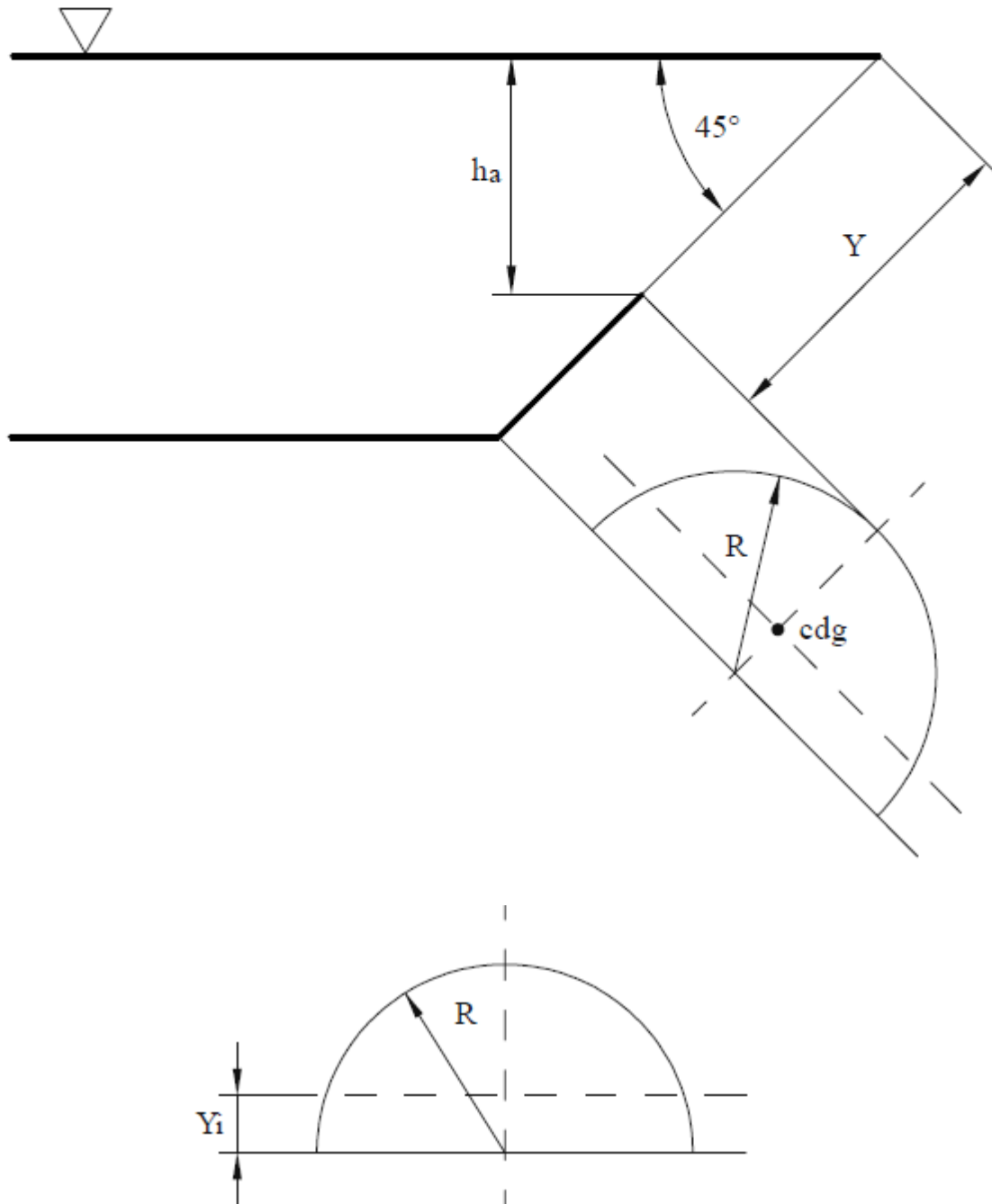


Figura 9.3. Representación gráfica de la ecuación 2

## Problema 6

Determine la localización del centro de presión y de los momentos causados por las fuerzas hidrostáticas sobre el eje que pasa por la base de una placa semicircular de radio la unidad, sumergida completamente e inclinada un ángulo de  $\theta=45^\circ$  respecto a la superficie libre del líquido.

Considérese que la parte superior de la placa está situada a una distancia respecto al nivel del líquido de  $h_a$  (10 m; 100 m; 500 m), por debajo de la superficie del mar.



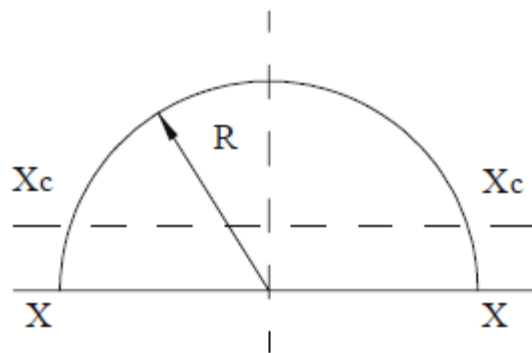


Fig. 10.2 Ejes de referencia.

1. Los momentos de inercia respecto al eje central y el que pasa por la base de la placa se establecen:

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right); \quad I_x = \frac{1}{8} \pi R^4; \quad Y = \frac{4R}{3\pi}$$

Sustituyendo para el momento de inercia que pasa por el eje central, se tiene:  $I_{xc} = 0,1097 \times R^4$

La distancia (inclinada) desde la superficie del líquido hasta el centro de gravedad del cuerpo se define:

$$Y_{cdg} = \frac{h_a}{\text{sen}45} + \left( R - \frac{4R}{3\pi} \right)$$

$$Y_{cdg10} = Y_{cdg10m} = \frac{10}{\text{sen}45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 14,717 \text{ m}$$

$$Y_{cdg100} = Y_{cdg100m} = \frac{100}{\text{sen}45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 141,996 \text{ m}$$

$$Y_{cdg500} = Y_{cdg500m} = \frac{500}{\text{sen}45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 707,682 \text{ m}$$

El centro de presión en los tres casos está situado:

$$Y_{cdp} - Y_{cdg} = \frac{I_{xc dg}}{Y_{cdg} \times A}$$

$$h_a = 10 \text{ m.}$$

$$Y_{cdp10} = Y_{cdg10} + \frac{I_{xc dg}}{Y_{cdg10} \times A} = 14,717 + \frac{0,1097 \times 1^4}{14,717 \times \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 14,721 \text{ m}$$

$$Y_{cdp10} - Y_{cdg10} = 0,00474 \text{ m}$$

$$h_a = 100 \text{ m} \quad Y_{cdp_{100}} = 141,996 + \frac{0,1097 \times 1^4}{141,996 \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 141,99649 \text{ m}$$

$$Y_{cdp_{100}} - Y_{cdg_{100}} = 0,000491 \text{ m}$$

$$h_a = 500 \text{ m} \quad Y_{cdp_{500}} = 707,682 + \frac{0,1097 \times 1^4}{707,682 \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 707,6820987 \text{ m}$$

$$Y_{cdp_{500}} - Y_{cdg_{500}} = 0,00009870 \text{ m}$$

Obsérvese que la distancia entre el centro de presiones y el centro de gravedad disminuye a medida que la profundidad aumenta.

La fuerza ejercida sobre la superficie semicircular para las tres profundidades se establece del modo siguiente:

$$F_{10} = \rho g Y_{cdg_{10}} \text{ sen}45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 14,717 \cdot \text{sen}45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 160.195,4 \text{ N}$$

$$F_{100} = \rho g Y_{cdg_{100}} \text{ sen}45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 141,996 \cdot \text{sen}45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 154.5635,43 \text{ N}$$

$$F_{500} = \rho g Y_{cdg_{500}} \text{ sen}45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 707,682 \cdot \text{sen}45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 770.3163,29 \text{ N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular será:

$$M = F \cdot d_{(cdp-base)} = F \cdot \left\{ \frac{4R}{3\pi} - (Y_{cdp} - Y_{cdg}) \right\}$$

$$M_{10m} = 160.195,4 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00474 \right\} = 67.229,71 \text{ Nm}$$

$$M_{100m} = 1.545.635,43 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,000491 \right\} = 655.229,14 \text{ Nm}$$

$$M_{500m} = 7.703.163,29 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00009870 \right\} = 3.268.563,73 \text{ Nm}$$

2. Segundo método de resolución, por integración directa:

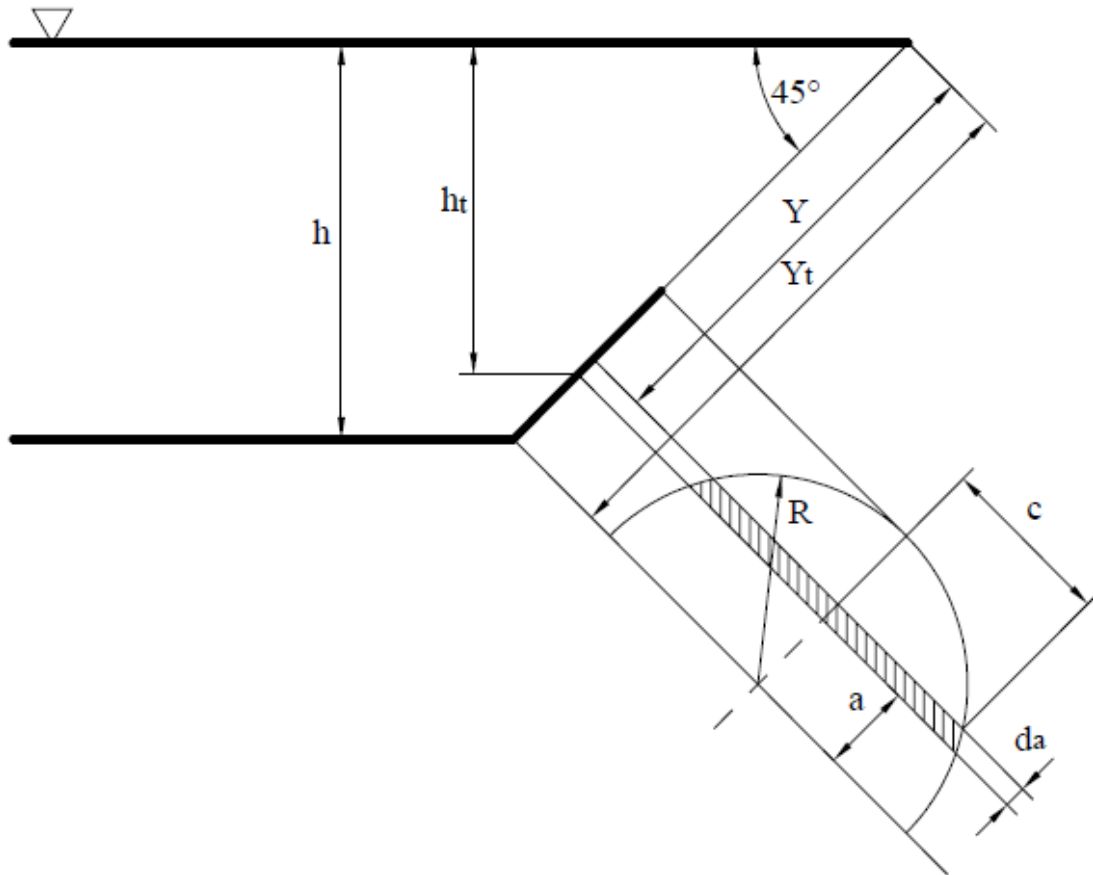


Fig. 10.3 Esquema de la posición de la placa con el elemento diferencial de superficie elegido

Sea el elemento diferencial de superficie definido en la figura 10.3.

$$ds = 2c \cdot da$$

$$a^2 + c^2 = R^2$$

$$ds = 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$dF = P \cdot ds$$

$$dF = \rho g h \cdot ds = \rho g (h_t - a \cdot \text{sen}\theta) \cdot ds = \rho g (Y \cdot \text{sen}\theta) \cdot ds = \rho g (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot ds$$

$$dF = \rho g (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot ds = \rho g (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \int_0^R \rho g (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R a \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ \frac{a}{2} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^2}{2} \cdot \text{arc sen} \frac{a}{R} \right]_0^R - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R a \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ \frac{R^2}{2} \sqrt{R^2 - R^2} + \frac{R^2}{2} \arcsen \frac{R}{R} \right] - \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho g Y_t \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ 0 + \frac{R^2}{2} \arcsen 1 \right] - \rho g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R$$

$$F = \rho g Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot \left( \frac{R^2}{2} \arcsen 1 \right) - \rho g \text{sen}\theta \cdot 2 \left[ -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - R^2)^{\frac{3}{2}} - \left( -\frac{1}{3} (R^2 - 0^2) \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$F = \rho g Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \times \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \rho g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \frac{1}{3} (R^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$F = \rho g Y_t \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{2} - \rho g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \frac{1}{3} R^3;$$

$$F = \rho g \cdot \text{sen}\theta R^2 \left[ Y_t \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3} \right];$$

El valor de  $Y_t$  será:

$$h_t = h_a + R \cdot \text{sen}\theta$$

La  $h_a$  ha de entenderse ahora como la distancia vertical entre el extremo superior de la placa y la superficie libre del líquido.

$$Y_t = \frac{h_a + R \cdot \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{h_a}{\text{sen}\theta} + R$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza:

$$F = \rho g \cdot \text{sen}\theta R^2 \left[ \left( \frac{h_a}{\text{sen}\theta} + R \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3} \right]$$

La fuerza sobre la superficie para las tres profundidades será:

$$h_a=10 \text{ m} \quad F_{10} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \text{sen}45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{10}{\text{sen}45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 160.203,3 \text{ N}$$

$$h_a=100 \text{ m} \quad F_{100} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \text{sen}45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{100}{\text{sen}45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 1.545.645,69 \text{ N}$$

$$h_a=500 \text{ m} \quad F_{10000} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \text{sen}45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{500}{\text{sen}45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 7.703.167,29 \text{ N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular es:

$$dM = dF \cdot a$$

$$dM = a \cdot \rho \cdot g (Y_t - a) \cdot \text{sen}\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} da$$

$$M = \int_0^R \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot Y_t \cdot a \sqrt{R^2 - a^2} da - \int_0^R \rho \cdot g \cdot \text{sen}\theta \cdot 2 \cdot a^2 \sqrt{R^2 - a^2} da$$

$$M = \rho \times g \times \text{sen}\theta \times 2 \left[ Y_t \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R - \left[ \frac{a(2a^2 - R^2)}{8} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^4}{8} \arcsen\left(\frac{a}{R}\right) \right]_0^R \right]$$

$$M = \rho \times g \times \text{sen}\theta \times 2 \left[ Y_t \left[ \frac{1}{3} R^3 \right] - \left[ \frac{R^4}{8} \arcsen 1 \right] \right]$$

Recordando que

$$Y_t = \frac{h_a}{\text{sen}45} + R,$$

el momento para los diferentes valores de  $h_a$  será:

$$h_a = 10 \text{ m} \quad M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \text{sen}45 \times 2 \left[ \left[ \frac{10}{\text{sen}45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right] \right] = 67.231,83 \text{ Nm}$$

$$h_a = 100 \text{ m} \quad M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \text{sen}45 \times 2 \left[ \left[ \frac{100}{\text{sen}45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right] \right] = 655.231,83 \text{ Nm}$$

$$h_a = 500 \text{ m} \quad M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \text{sen}45 \times 2 \left[ \left[ \frac{500}{\text{sen}45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right] \right] = 3.268.565,16 \text{ Nm}$$

Véase que los valores de la fuerza y los momentos coinciden con los obtenidos en la resolución anterior.

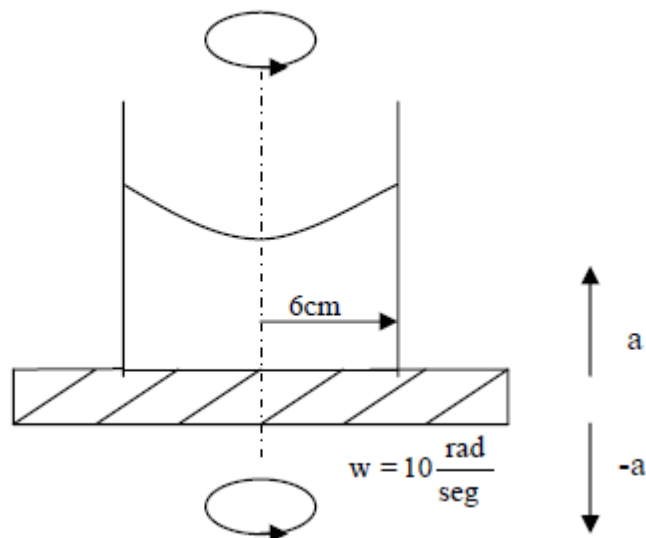
## Problema 7

Sea un recipiente cilíndrico parcialmente lleno de agua y abierto a la atmósfera. Dicho recipiente gira a una velocidad angular de  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  y está montado en un ascensor.

En condiciones de reposo, la altura del nivel del líquido es de 30 cm. Quedando un espacio libre entre el nivel del líquido y la superficie del vaso de 10 cm, el radio del cilindro es de 6 cm.

Sabiendo que cuando el ascensor se pone en marcha, tanto en sentido ascendente como descendente, la aceleración del mismo es de  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  y su deceleración para cualquier sentido de la marcha es de  $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  determine:

1. La ecuación que rige la posición del nivel del líquido en función del radio.
2. La presión a la que está sometida una partícula de fluido situada en el fondo del depósito y a un radio de 0,02 m, para cualquier sentido de la marcha del ascensor y cuando el fluido esté en reposo.
3. La velocidad de giro del cilindro para que, en el borde exterior, el líquido se sitúe en el extremo del vaso. Considere el ascensor parado.



### 11.2 Resolución

1.- La ecuación diferencial que rige el movimiento de un fluido sometido a las aceleraciones: centrípeta, angular, y en dirección vertical se define como:

$$dP = \rho r \omega^2 dr - \frac{1}{r} \rho a_{\theta} d\theta - \rho g \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) dz$$

Puesto que la aceleración angular no existe para el caso que nos ocupa, queda:

$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) dz$$

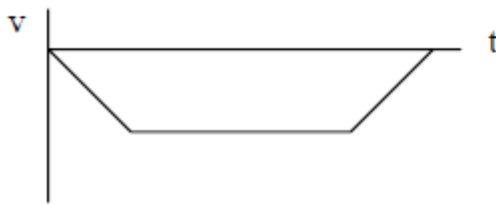
Los valores de la aceleración  $a_z$  dependerán de si el ascensor está subiendo o bajando y de si está en fase de aceleración o deceleración, con lo cual:

Ascensor en sentido ascendente:



- Aceleración  $a_z = 1 \frac{m}{s^2}$
- Deceleración  $a_z = -0,7 \frac{m}{s^2}$

Ascensor en sentido descendente:



- Deceleración  $a_z = +0,7 \frac{m}{s^2}$
- Aceleración  $a_z = -1 \frac{m}{s^2}$

Las superficies de presión constante tendrán por ecuación diferencial:

$$0 = \rho r \omega^2 dr - \rho g \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) dz$$

de donde:

$$\rho r \omega^2 dr = \rho g \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) dz$$

$$\int_{r=0}^r r \omega^2 dr = \int_{z_0}^z (g + a_z) dz$$

$z_0$  será la altura del líquido para  $r = 0$ ;

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} = (g + a_z) [z - z_0]$$

con lo cual:

$$z = \omega^2 \frac{r^2}{2} \frac{1}{(g + a_z)} + z_0$$

Se observa que la posición del nivel del líquido depende no sólo de la velocidad de giro, sino también de la aceleración del ascensor.

Esta ecuación quedará completamente definida una vez se determine  $z_0$ .

Para determinar  $z_0$  deberán igualarse los volúmenes del líquido en reposo y en movimiento.

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = \int_0^R 2\pi r z \, dr$$

Del enunciado se conoce que  $z_{\text{inicial}} = 30 \text{ cm}$ .

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = \int_0^R 2\pi r \left( \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g+a_z)} + z_0 \right) dr$$

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = 2\pi \left[ \frac{\omega^2}{2 \times (g+a_z)} \times \frac{r^4}{4} + z_0 \times \frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = 2\pi \left[ \frac{\omega^2}{2 (g+a_z)} \frac{R^4}{4} + z_0 \frac{R^2}{2} \right]$$

$$z_{\text{inicial}} = \frac{\omega^2}{4 (g+a_z)} R^2 + z_0$$

$$z_0 = z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4 (g+a_z)}$$

Véase que el nivel del líquido cuando el cilindro gira; se desplaza, para radio igual a cero, y depende de las aceleraciones que se tengan en cada caso particular.

La ecuación que da la posición del nivel del líquido teniendo en cuenta todos los parámetros estipulados es:

$$Z = z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4 (g+a_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g+a_z)}$$

2. La presión en el punto considerado saldrá de la ecuación:

$$dP = -\rho g dz$$

$$\int_{p=0}^p dp = \int_{z=0}^{-z} -\rho g dz$$

$$P = \rho g z$$

Para el caso en estudio, se tendrá:

$$P = \rho g \left[ Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + a_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g + a_z)} \right]$$

Para:  $\rho = 1.000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ ;  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;  
 $Z_{\text{inicial}} = 0,3 \text{ m}$ ;  $R = 0,06 \text{ m}$ ;  
 $r = 0,02 \text{ m}$ ;

$a_z =$  (posee cuatro valores, definidos en el primer apartado):

Ascensor subiendo, período de aceleración:  $a_z = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$P = 1.000 \times 9,8 \left[ 0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8+1)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8+1)} \right]$$

$$P = 2.876,48 \text{ Pa}$$

Ascensor subiendo, período de deceleración:  $a_z = -0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;

$$P = 1.000 \times 9,8 \left[ 0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8-0,7)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8-0,7)} \right]$$

$$P = 2.864,61 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de aceleración:  $a_z = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;

$$P = 2.862,04 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de deceleración:  $a_z = +0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ;

$$P = 2.874,6 \text{ Pa}$$

Para el fluido en reposo:  $P = 1.000 \times 9,8 \times 0,3 = 2940 \text{ Pa}$  ;

3. Puesto que el nivel del líquido está dado por la ecuación:

$$Z = Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + a_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{g + a_z}$$

Para:  $Z = 0,40 \text{ m}$        $Z_{\text{inicial}} = 0,3 \text{ m}$   
 $a_z = 0$                        $R = 0,06 \text{ m}$   
 $r = R$

se tiene:

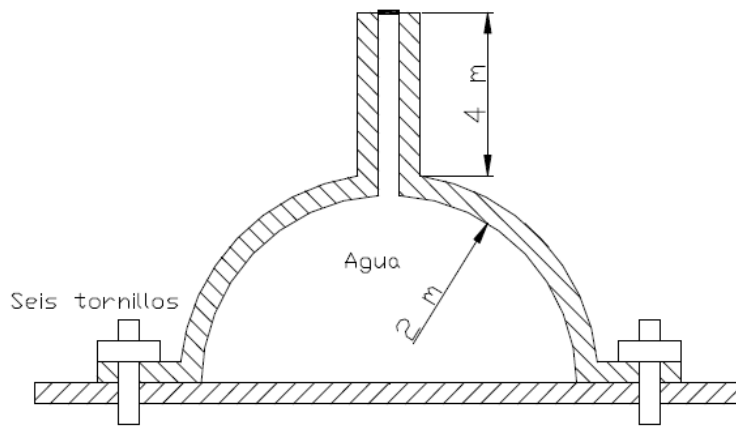
$$0,4 = 0,3 - \frac{\omega^2 0,06^2}{4 \times 9,8} + \frac{\omega^2 0,06^2}{2} \frac{1}{9,8}$$

$$\omega = 32,99 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

## Problema 8

2.8. La cúpula semiesférica de la figura pesa 31 kN, se encuentra sujeta al suelo mediante seis pernos igualmente espaciados y resistentes. Se pide:

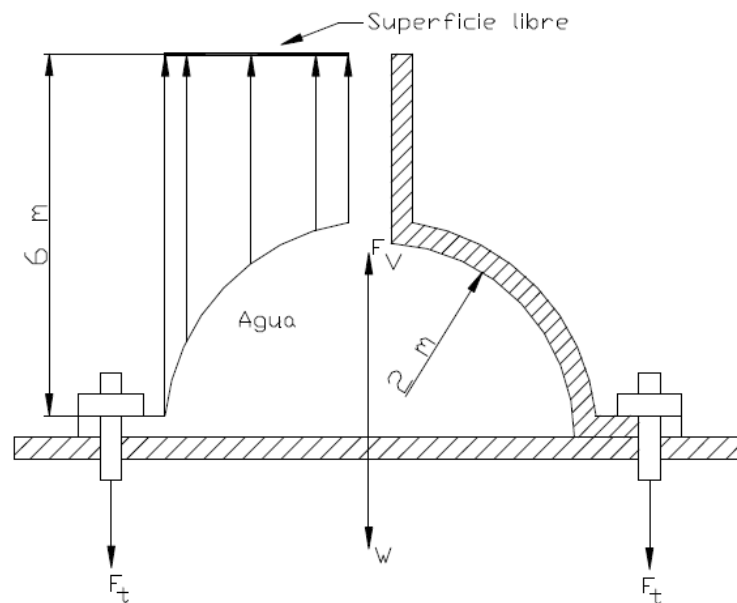
- Fuerza que soporta cada tornillo
- Diámetro de cada perno si la tensión admisible de trabajo del material de que están constituidos es de  $9,58 \text{ kg/mm}^2$ .
- Altura alcanzada por el agua en el tubo para que se produjera la rotura de los pernos, si su tensión de rotura es de  $40 \text{ kg/mm}^2$ .



**Figura 2.8.**

**Resolución.**

- Fuerza que soporta cada tornillo ( $F_t$ ).



$F_V$  = peso del volumen de agua comprendido entre la cúpula semiesférica y la superficie libre.

$$F_V = \left( \pi \times R^2 \times 6 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 \right) \times 9800 = \pi \times 2^2 \times 6 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_V = 574702 \text{ N}$$

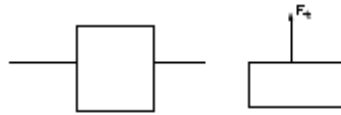
Equilibrio :

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow F_V = W + 6 \times F_t \Rightarrow F_t = \frac{F_V - W}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_t = \frac{574702 - 31000}{6} = 90617 \text{ N}$$

$$\boxed{F_t = 90617 \text{ N}}$$

b) Diámetro de cada perno.  $\sigma_{adm} = 9,58 \text{ kg/mm}^2$ .



Seccionando un perno;

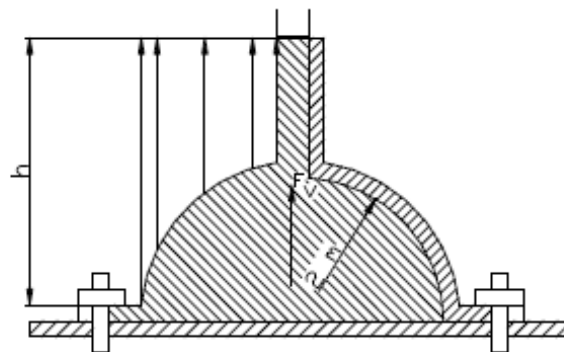
$$\sigma = (\text{tensión de tracción}) = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t \times 4}{\pi \times D^2} < \sigma_{adm}$$

$$D \left[ \frac{4 \times F_t}{\pi \times \sigma_{adm}} \right]^{1/2} \Rightarrow D_{min} = \left[ \frac{4 \times F_t}{\pi \times \sigma_{adm}} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$D_{min} = \left[ \frac{4 \times 90617}{\pi \times 9,58 \times 9,8} \right]^{1/2} = 35 \text{ mm}$$

$$\boxed{D_{min} = 35 \text{ mm}}$$

c) Altura  $h$  alcanzada por el agua en el tubo para que se produzca la rotura de los pernos,  $\sigma_{rotura} = 40 \text{ kg/mm}^2$ .



$$F_t = \sigma \times \pi \times \frac{D^2}{4} = 40 \times 9,8 \times \pi \times \frac{35^2}{4} = 377148 \text{ N}$$

Fuerza de tracción a que se somete al perno para que se produzca la rotura.

*Equilibrio :*

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_v = W + 6 \times F_t \Rightarrow$$

$$F_v = 31000 + 6 \times 377148 = 2293888 \text{ N}$$

$$F_v = \left( \pi \times R^2 \times h - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \pi \times R^3 \right) \times 9800 \Rightarrow 2293888 =$$

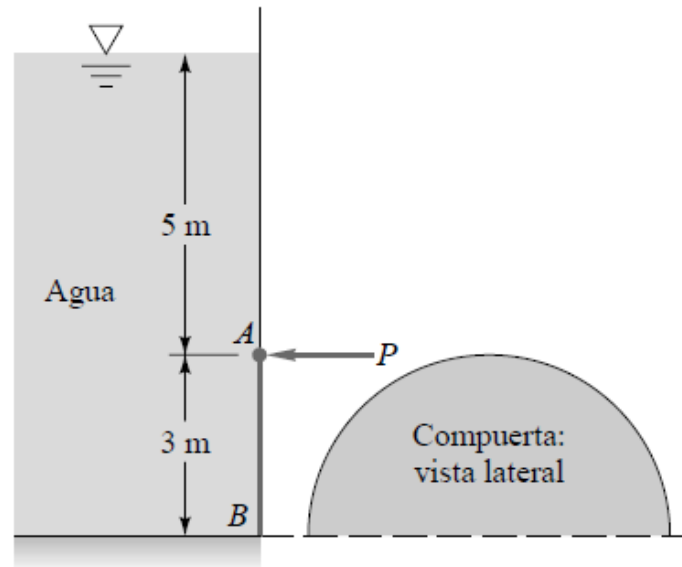
$$\left( \pi \times 2^2 \times h - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \pi \times 2^3 \right) \times 9800 \Rightarrow$$

$$h = 19,96 \text{ m} \approx 20 \text{ m} (\text{medidas desde el suelo})$$

$$\boxed{h = 20 \text{ m}}$$

## Problema 9

La compuerta  $AB$  de la Figura P2.65 es semicircular, está articulada en  $B$  y se mantiene vertical mediante una fuerza horizontal  $P$ . ¿Cuál es la fuerza  $P$  necesaria para mantener el equilibrio?



**Solution:** The centroid of a semi-circle is at  $4R/3\pi \approx 1.273$  m off the bottom, as shown in the sketch at right. Thus it is  $3.0 - 1.273 = 1.727$  m down from the force P. The water force  $F$  is

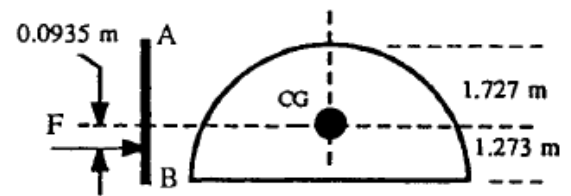
$$F = \gamma h_{CG} A = (9790)(5.0 + 1.727) \frac{\pi}{2} (3)^2 = 931000 \text{ N}$$

The line of action of  $F$  lies below the CG:

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \sin \theta}{h_{CG} A} = -\frac{(0.10976)(3)^4 \sin 90^\circ}{(5 + 1.727)(\pi/2)(3)^2} = -0.0935 \text{ m}$$

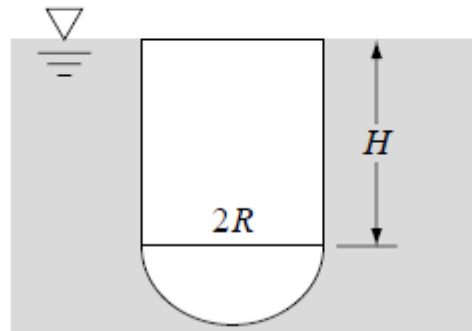
Then summing moments about B yields the proper support force P:

$$\sum M_B = 0 = (931000)(1.273 - 0.0935) - 3P, \quad \text{or: } P = 366000 \text{ N } \textit{Ans.}$$



Problema 10

Calcule la altura  $H$  de la Figura P2.74 para la que la fuerza hidrostática sobre el panel rectangular sea la misma que la fuerza sobre el panel semicircular inferior.



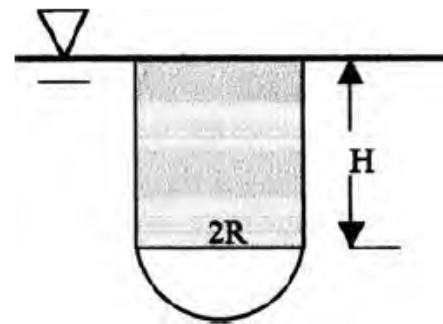
**2.74** Find the height  $H$  in Fig. P2.74 for which the hydrostatic force on the rectangular panel is the same as the force on the semicircular panel below. Find the force on each panel and set them equal:

$$F_{\text{rect}} = \gamma h_{\text{CG}} A_{\text{rect}} = \gamma(H/2)[(2R)(H)] = \gamma R H^2$$

$$F_{\text{semi}} = \gamma h_{\text{CG}} A_{\text{semi}} = \gamma(H + 4R/3 \pi)[(\pi/2)R^2]$$

Set them equal, cancel  $\gamma$ :  $RH^2 = (\pi/2)R^2H + 2R^3/3$ , or:  $H^2 - (\pi/2)RH - 2R^2/3 = 0$

**Solution:**  $H = R[\pi/4 + \{(\pi/4)^2 + 2/3\}^{1/2}] \approx 1.92R$  *Ans.*



**Fig. P2.74**