Guía Alternativa N°3: Cinemática

Problema 1

Se tiene el siguiente campo de velocidades:

$$v_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_z = 0$$

a) Encuentre las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de humo.

b) Encuentre una expresión para el campo Lagrangiano de velocidades (tome como referencia el tiempo $t = 0$).

Si a $t = 0$ se tiene una mancha contaminante de la forma:

$$C(x, y, z) = C_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}$$

y se sabe que el contaminante es un isótopo radiactivo que decae según la ley: $C = C_i e^{-t/\lambda}$,

c) ¿Cuál será la concentración de contaminante que mediría un sensor ubicado en el punto $(\sigma, 0, 0)$ a tiempo $t = 0$?

d) Encuentre la tasa de cambio de la concentración que mediría el mismo sensor, en el mismo punto, en el mismo intante $t = 0$.

Respuesta:

a) Como se trata de un campo estacionario, las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de humo serán coincidentes. La velocidad en todo punto es paralela al vector posición (proyectado sobre el plano $x - y$), de manera que toda partícula del fluido se mueve siempre alejándose del eje z, describiendo rectas radiales.

Para obtener una expresión formal de la ecuación de estas líneas se puede partir de la ecuación de las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{ds} = v_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{dy}{ds} = v_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{dz}{ds} = v_z = 0$$

eliminando el parámetro s e integrando desde un punto en particular (x_0, y_0, z_0) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \ \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}, \ \log\frac{y}{y_0} = \log\frac{x}{x_0} \ \Rightarrow \ \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}, z = z_0$$

b) Sabemos que el campo Lagrangiano de velocidades (V) evaluado en (x, t) debe ser igual al campo Euleriano (v) evaluado en $(\Phi(x, t), t)$, donde $\Phi(x, t)$ es la posición, a tiempo t, de la partícula que en cierto tiempo

de referencia estaba en la posición x. Además, el campo Lagrangiano de velocidades se puede obtener de la función $\Phi(x, t)$, tomando su derivada parcial respecto del tiempo:

$$V(x,t) = v(\Phi(x,t),t) = \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}$$

para nuestro caso particular, todas las líneas son radiales y equivalentes, en el sentido en que la velocidad cambia sólo con el radio, podemos simplificar el cálculo restringiéndonos al eje x:

$$\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = V(x,t) = v(\Phi(x,t),t) = \frac{1}{\Phi}$$

de donde, considerando que al tiempo de referencia $t = 0$, la partícula se encuentra en $\Phi_0 = \Phi(x, 0) = x$:

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} w dw = \int_0^t dt \Rightarrow \Phi^2 - \Phi_0^2 = 2t$$

$$\Phi(x,t) = \sqrt{x^2+2t}$$

derivando:

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2t}}$$

Si quisiéramos generalizar este resultado -obtenido para una partícula en el eje x- a todo el espacio, "x" debe ser interpretado como el radio, y "V" como la velocidad radial:

$$V_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+2t}},\ V_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+2t}},\ V_z = 0$$

Sustituendo en la expresión de $C(x,y,z)$, a $t=0$:

$$C(\sigma,0,0) = C_0 e^{-\sigma^2/\sigma^2} = \frac{C_0}{e}$$

La ley de decaimiento radiactivo es válida para cada punto material, de manera que derivando la expresión $C = C_i e^{-t/\lambda}$ se obtiene la derivada material de la concentración del contaminante. La tasa de variación medida por el sensor fijo al espacio representa la *derivada parcial con respecto al tiempo* del campo Euleriano de concentraciones. Usando la expresión de la derivada material:

$$\frac{DC}{Dt} = v \cdot \nabla C + \frac{\partial C}{\partial t}$$

se conocen la derivada material, el campo de velocidades, y el gradiente del campo euleriano en el instante $t=0$. Despejando $\frac{\partial C}{\partial t}$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{DC}{Dt} - v \cdot \nabla C = \frac{-C_i}{\lambda} e^{-t/\lambda} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial C}{\partial x}$$

donde C_i es la concentración inicial de contaminante en el punto en cuestión ($C_i = C_0/e$):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-C_0}{e\lambda}e^{-0} + \frac{1}{\sigma}C_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}\frac{2x}{\sigma^2} = \frac{-C_0}{e\lambda} + \frac{1}{\sigma}C_0 e^{-1}\frac{2}{\sigma} = \frac{C_0}{e}(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{1}{\lambda})$$

Problema 2

Si la intensidad de iluminación de una partícula fluida en (x, y, z) al tiempo t está dada por:

$$I = A\frac{e^{-3t}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

y el campo de velocidades del fluido está dado por:

$$v_x = B(y + 2z) \qquad v_y = B(y + 3z) \qquad v_z = B(2x + 3y + 2z)$$

donde A y B son constantes conocidas, determine la velocidad de variación de la iluminación experimentada al tiempo t por la partícula fluida que está en el punto $(1, 2, \text{-}2)$ al tiempo t.

Respuesta: Lo que se pide es exactamente el concepto de *Derivada material*, en este caso de la iluminación recibida por una partícula fluida. Dados el campo Euleriano de iluminación y el campo de velocidades con que se mueve el fluido, la expresión de la derivada material es:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, I$$

Siendo las derivadas parciales:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -3A\frac{e^{-3t}}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = -2xA\frac{e^{-3t}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = -2yA\frac{e^{-3t}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}, \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = -2zA\frac{e^{-3t}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}$$

La expresión final resulta:

$$\frac{DI}{Dt} = -A\frac{e^{-3t}}{x^2 + y^2 + z^2}\left[3 + \frac{2B}{x^2 + y^2 + z^2}\left(yx + 4zx + y^2 + 6zy + 2z^2\right)\right]$$

Evaluando en el punto $(1, 2, -2)$ resulta:

$$\frac{DI}{Dt} = A\frac{e^{-3t}}{9}(4B - 3)$$

Problema 3

Sean las componentes del campo de velocidades de un fluido:

$$v_x = \frac{x}{1+t} \qquad v_y = \frac{2y}{1+t} \qquad v_z = \frac{3z}{1+t}$$

Calcule las trayectorias.

Respuesta: Si $\Phi(x,t)$ es la trayectoria seguida por una partícula fluida que en un cierto tiempo de referencia estaba en x, el campo de velocidades Euleriano dato se puede expresar como:

$$v(\Phi(x,t),t) = V(x,t) = \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = \dot{\Phi}$$

donde $V(x,t)$ es el campo Lagrangiano de velocidades. Escribiendo en componentes:

$$\left(\dot{\Phi}_x, \dot{\Phi}_y, \dot{\Phi}_z\right) = \left(\frac{\Phi_x}{1+t}, \frac{2\Phi_y}{1+t}, \frac{3\Phi_z}{1+t}\right)$$

Dado que la ecuación diferencial: $\frac{du}{dt} = \frac{au}{1+t}$ tiene como solución a: $u = u_0(1+t)^a$, entonces:

Dado que la ecuación diferencial: $\frac{du}{dt} = \frac{au}{1+t}$ tiene como solución a: $u = u_0(1+t)^a$, entonces:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= A(1+t) \\ \Phi_y &= B(1+t)^2 \\ \Phi_z &= C(1+t)^3 \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial: $\Phi(x,0) = x$ resulta la expresión final para las trayectorias, donde t es el parámetro y (x,y,z) la posición inicial de la partícula:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_x &= x(1+t) \\ \Phi_y &= y(1+t)^2 \\ \Phi_z &= z(1+t)^3 \end{aligned} \right.$$

Problema 4

En las proximidades de un punto de remanso (o *punto de estancamiento*) bidimensional, la velocidad está dada por:

$$u = U_0 \frac{x}{L}, \quad v = -U_0 \frac{y}{L}, \quad w = 0$$

a) Calcular el vector aceleración y verificar que es puramente radial.

b) Hallar las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de humo, dibujarlas esquemáticamente.

c) En particular dibuje la trayectoria de la partícula que a $t = 0$ estaba en el punto $(0, 2L, 0)$, la línea de corriente que, a tiempo L/U_0, pasa por el punto $(2L, L, 0)$ y la línea de humo del punto $(2L, 0, 0)$, en en instante $t = L/U_0$.

Respuesta:

a) Para calcular la aceleración a partir del campo euleriano de velocidades, se calcula la derivada material de la velocidad:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + u\frac{U_0}{L} + 0 + 0 \\
a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + 0 + v\left(-\frac{U_0}{L}\right) + 0 \\
a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

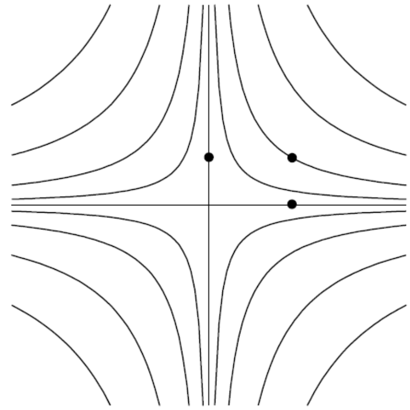
$$a_x = \frac{U_0^2}{L^2}x, \qquad a_y = \frac{U_0^2}{L^2}y, \qquad a_z = 0$$

Siendo la aceleración un múltiplo $\left(\frac{U_0^2}{L^2}\right)$ del vector posición.

b) Como se trata de un campo estacionario, las líneas de corriente, las trayectorias, y las líneas de humo serán coincidentes. Calculemos las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \qquad \frac{L\,dx}{U_0 x} = -\frac{L\,dy}{U_0 y}, \qquad \ln x = -\ln y + c, \qquad x = \frac{k}{y}$$

Entonces las líneas de corriente tienen la forma: $y = \frac{k}{x}$, como se indica en la figura.



c) La trayectoria de la partícula que a $t = 0$ estaba en el punto $(0, 2L, 0)$ es la semirrecta: $(x = 0, y > 0)$. La línea de corriente que, a tiempo L/U_0, pasa por el punto $(2L, L, 0)$ es la curva: $(y = \frac{2L^2}{x})$. Y la línea de humo del punto $(2L, 0, 0)$, en en instante $t = L/U_0$ es la semirrecta $(x > 0, y = 0)$

Problema 5

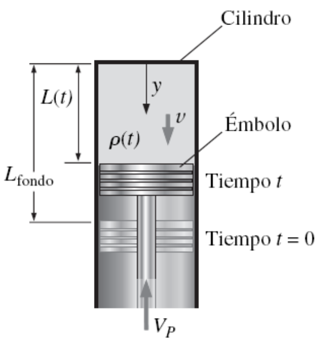


FIGURA 9-7
Combustible y aire son comprimidos por un émbolo en un cilindro dentro de un motor de combustión interna.

mente la misma ecuación que la 9-5.

EJEMPLO 9-1 Compresión de una mezcla aire-combustible

En un cilindro de un motor de combustión interna, un émbolo comprime una mezcla de aire y combustible (Fig. 9-7). El origen de la coordenada y está en lo alto del cilindro, y y apunta directo hacia abajo, como se muestra. Se supone que el émbolo se mueve con rapidez constante V_P. La distancia L entre lo alto del cilindro y el émbolo disminuye con el tiempo de acuerdo con la aproximación lineal $L = L_{\text{fondo}} - V_P t$, donde L_{fondo} es la posición del émbolo cuando está en el fondo de su ciclo en el tiempo $t = 0$, como se ilustra en la figura 9-7. En $t = 0$, la densidad de la mezcla aire-combustible en el cilindro es igual a $\rho(0)$ en todas partes. Estime la densidad de la mezcla aire-combustible como función del tiempo y los parámetros dados durante la carrera de émbolo desde abajo hasta arriba.

SOLUCIÓN Se debe estimar la densidad de la mezcla aire-combustible como función del tiempo y los parámetros dados en el enunciado del problema.

Hipótesis **1** La densidad varía con el tiempo, pero no en el espacio; en otras palabras, la densidad es uniforme en todos los puntos del cilindro en cualquier momento de tiempo dado, pero cambia con el tiempo: $\rho = \rho(t)$. **2** La componente de velocidad v varía con y y t, pero no con x o z; en otras palabras, $v = v(y, t)$ sólo. **3** $u = w = 0$. **4** Durante la compresión no escapa masa del cilindro.

Análisis Primero se necesita establecer una expresión para la componente de velocidad v como función de y y t. Claramente, $v = 0$ en $y = 0$ (la parte superior del cilindro) y $v = -V_P$ en $y = L$. Por simplicidad, se supone que v varía linealmente entre estas dos condiciones de frontera:

Componente de velocidad vertical: $$v = -V_P \frac{y}{L} \qquad (1)$$

donde L es función del tiempo, como está dado. La ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas en su forma para el flujo compresible (Ec. 9-8) es apropiada para la solución de este problema:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}}}_{0 \text{ pues } u = 0} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}}_{0 \text{ pues } w = 0} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Sin embargo, debido a la hipótesis 1, la densidad no es una función de y y por lo tanto puede salir de la derivada con respecto a y como un factor independiente de y. Cuando se sustituye la ecuación 1 para v y la expresión dada para L, se diferencia y se simplifica, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\frac{\partial v}{\partial y} = -\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(-V_P\frac{y}{L}\right) = \rho\frac{V_P}{L} = \rho\frac{V_P}{L_{\text{fondo}} - V_P t} \tag{2}$$

Debido a la hipótesis 1 se sustituye $\partial\rho/\partial t$ con $d\rho/dt$ en la ecuación 2. Después de separar variables se obtiene una expresión que puede integrarse analíticamente:

$$\int_{\rho=\rho(0)}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = \int_{t=0}^{t}\frac{V_P}{L_{\text{fondo}} - V_P t}\,dt \qquad \rightarrow \qquad \ln\frac{\rho}{\rho(0)} = \ln\frac{L_{\text{fondo}}}{L_{\text{fondo}} - V_P t} \tag{3}$$

Para finalizar, entonces, se tiene la expresión deseada para ρ como función del tiempo:

$$\rho = \rho(0)\frac{L_{\text{fondo}}}{L_{\text{fondo}} - V_P t} \tag{4}$$

Cuando se conserva la convención de resultados sin dimensiones, la ecuación 4 se puede reescribir como:

$$\frac{\rho}{\rho(0)} = \frac{1}{1 - V_P t/L_{\text{fondo}}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\rho^* = \frac{1}{1 - t^*}} \tag{5}$$

donde $\rho^* = \rho/\rho(0)$ y $t^* = V_P t/L_{\text{fondo}}$. La ecuación 5 se grafica en la figura 9-8.

Discusión En $t^* = 1$, el émbolo toca la parte superior del cilindro y ρ tiende a infinito. En un motor de combustión interna real, el émbolo se detiene antes de alcanzar lo alto del cilindro, con lo que forma lo que se llama volumen mínimo (correspondiente al punto muerto superior de la posición del émbolo), que usualmente constituye de 4 a 12 por ciento del volumen de cilindro máximo. La suposición de densidad uniforme dentro del cilindro es la suposición más débil en este análisis simplificado. En realidad, ρ puede ser una función tanto del espacio como del tiempo.

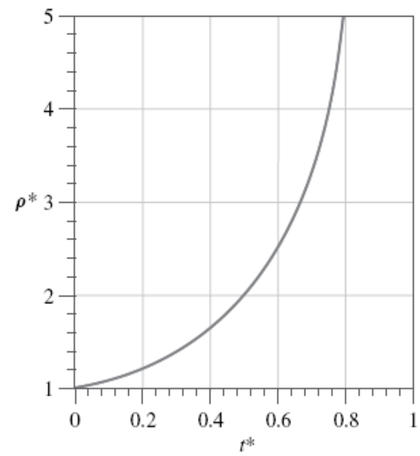


FIGURA 9-8
Densidad adimensional como función del tiempo adimensional para el Ejemplo 9-1.

Problema 6

EJEMPLO 9-2 Diseño de un ducto convergente para un flujo compresible

Para un túnel de viento de alta velocidad se diseña un ducto convergente bidimensional. Su pared inferior es plana y horizontal, y la pared superior es curva de manera que la velocidad del viento axial u aumenta más o menos linealmente

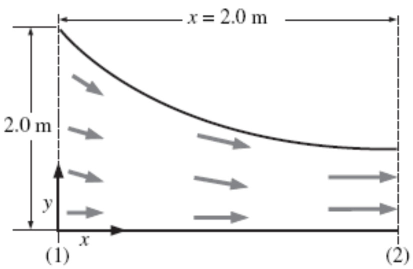


FIGURA 9-12
Ducto convergente, diseñado para un túnel de viento de alta velocidad (no a escala).

de u_1 = 100 m/s en la sección (1) a u_2 = 300 m/s en la sección (2) (Fig. 9-12). Mientras tanto, la densidad del aire ρ disminuye más o menos linealmente de ρ_1 = 1.2 kg/m^3 en la sección (1) a ρ_2 = 0.85 kg/m^3 en la sección (2). El ducto convergente mide 2.0 m de largo y 2.0 m de alto en la sección (1). *a*) Prediga la componente y de velocidad, $v(x, y)$, en el ducto. *b*) Grafique la forma aproximada del ducto, al despreciar la fricción sobre las paredes. *c*) ¿Qué tan alto debe ser el ducto en la sección (2), la salida del ducto?

SOLUCIÓN Se tienen que predecir la componente de velocidad v, graficar de manera aproximada el ducto y predecir su altura en la salida del ducto para una componente de velocidad u y una densidad ρ dados.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario y bidimensional en el plano *xy*. **2** Se desprecia la fricción sobre las paredes. **3** La velocidad axial u aumenta linealmente con x y la densidad ρ disminuye linealmente con x.

Propiedades El fluido es aire a temperatura ambiente (25°C). La velocidad del sonido es aproximadamente 346 m/s, de modo que el flujo es subsónico, pero compresible.

Análisis *a*) Se escriben expresiones para u y ρ que las fuerce a ser lineales en x,

$$u = u_1 + C_u x \qquad \text{donde} \qquad C_u = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{(300 - 100)\text{ m/s}}{2.0\text{ m}} = 100\text{ s}^{-1} \quad \textbf{(1)}$$

y

$$\rho = \rho_1 + C_\rho x \qquad \text{donde} \qquad C_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} = \frac{(0.85 - 1.2)\text{ kg/m}^3}{2.0\text{ m}} \quad \textbf{(2)}$$

$$= -0.175\text{ kg/m}^4$$

La ecuación de continuidad en caso estacionario (Ec. 9-14) para este flujo compresible bidimensional se simplifica a:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}}_{0\,(2\text{-D})} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \tag{3}$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3, y se nota que C_u y C_ρ son constantes:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial[(\rho_1 + C_\rho x)(u_1 + C_u x)]}{\partial x} = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho) - 2C_u C_\rho x$$

La integración con respecto de y produce:

$$\rho v = -(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy + f(x) \tag{4}$$

Note que, puesto que la integración es una integración parcial con respecto a una variable, se ha agregado una función arbitraria de x en vez de simplemente una constante de integración. A continuación se aplican condiciones de frontera. Se afirma que, dado que la pared inferior es plana y horizontal, v debe ser igual a cero en $y = 0$ para cualquier x. Esto sólo es posible si $f(x) = 0$. Cuando se resuelve la ecuación 4 para v se obtiene:

$$v = \frac{-(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho)y - 2C_u C_\rho xy}{\rho} \quad \rightarrow \quad v = \frac{-(\boldsymbol{\rho_1 C_u + u_1 C_\rho})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{2C_u C_\rho xy}}{\boldsymbol{\rho_1 + C_\rho x}} \tag{5}$$

b) Cuando se usan las ecuaciones 1 y 5 y las técnicas descritas en el capítulo 4, se grafican varias líneas de corriente entre $x = 0$ y $x = 2.0$ m en la figura 9-13. La línea de corriente que comienza en $x = 0$ $y = 2.0$ m aproxima la pared superior del ducto.

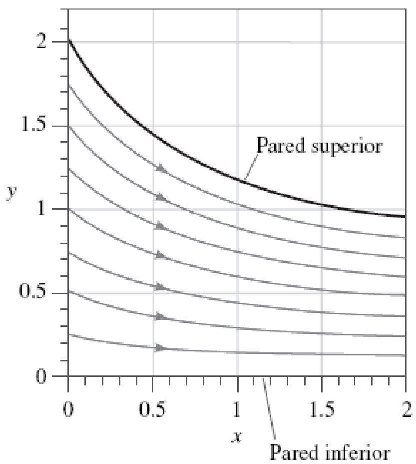


FIGURA 9-13
Líneas de corriente para el ducto convergente del ejemplo 9-2.

c) En la sección (2), la línea de corriente superior cruza $y = 0.941$ m en $x = 2.0$ m. Por lo tanto, la altura predicha del ducto en la sección (2) es **0.941 m**.

Discusión Se puede verificar que la combinación de las ecuaciones 1, 2 y 5 satisface la ecuación de continuidad. Sin embargo, esto no garantiza que la densidad y las componentes de velocidad en realidad *seguirán* estas ecuaciones si el ducto se construyera como está diseñado aquí. El flujo real depende de la *caída de presión* entre las secciones (1) y (2); la aceleración del flujo deseada puede producirse por la caída de presión sin considerar otras causas. La temperatura también puede cambiar considerablemente en este tipo de flujo compresible, en donde el aire acelera hacia velocidades sónicas.

Problema 7

EJEMPLO 9-5 Torbellino incompresible bidimensional

Considere un flujo incompresible bidimensional en coordenadas cilíndricas; la componente de velocidad tangencial es $u_\theta = K/r$, donde K es una constante. Esto representa una clase de flujos llamados torbellinos. Genere una expresión para la otra componente de velocidad, u_r.

SOLUCIÓN Para una componente de velocidad tangencial dada, genere una expresión para la componente de velocidad radial.

Hipótesis **1** El flujo es bidimensional en el plano *xy*- ($r\theta$-) (la velocidad no es función de z, y $u_z = 0$ en todas partes). **2** El flujo es incompresible.

Análisis La ecuación de continuidad de flujo incompresible (Ec. 9-18) para este caso bidimensional se simplifica a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}}_{0\ (2\text{-D})} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{1}$$

La expresión dada para u_θ no depende de θ y por lo tanto la ecuación 1 se reduce a:

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \qquad \rightarrow \qquad ru_r = f(\theta, t) \tag{2}$$

donde se introdujo una función arbitraria de θ y t en vez de una constante de integración, puesto que se realizó una integración parcial con respecto a r. Cuando se resuelve para u_r,

$$u_r = \frac{f(\theta, t)}{r} \tag{3}$$

Por tanto, *cualquier componente de velocidad radial de la forma dada por la ecuación 3 produce un campo de velocidad incompresible bidimensional que satisface la ecuación de continuidad.*

Se presentan casos específicos. El caso más simple es cuando $f(\theta, t) = 0$ ($u_r = 0$, $u_\theta = K/r$). Esto produce el **torbellino líneal** tratado en el capítulo 4, como se bosqueja en la figura 9-15*a*. Otro caso simple es cuando $f(\theta, t) = C$, donde C es una constante. Esto produce una velocidad radial cuya magnitud se desliza como $1/r$. Para C negativa, imagine un torbellino lineal en espiral/sumidero, en el que los elementos de fluido no sólo dan vuelta alrededor del origen, sino que son absorbidos en el origen (en realidad se absorben a lo largo de una línea que concide con el eje z). Esto se ilustra en la figura 9-15*b*.

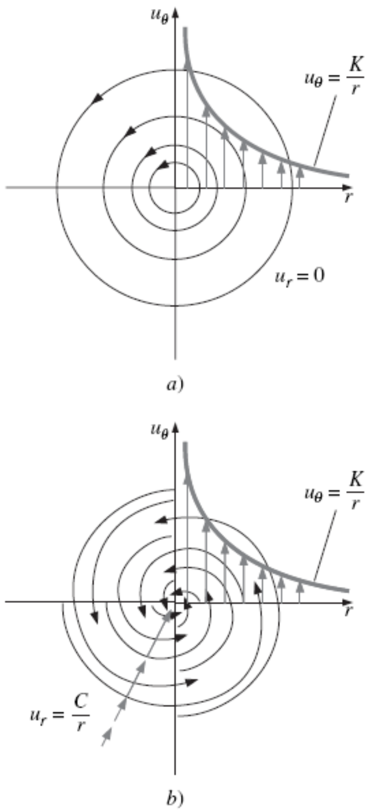


FIGURA 9-15
Líneas de corriente y perfiles de velocidad para *a*) un flujo de torbellino lineal y *b*) un torbellino lineal en espiral/sumidero.

Problema 8

EJEMPLO 9-8 Cálculo del campo de velocidad a partir de la función de corriente

Un campo de flujo bidimensional incompresible estacionario en el plano *xy* tiene una función de corriente dada por $\psi = ax^3 + by + cx$, donde *a*, *b* y *c* son constantes: $a = 0.50\ (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$, $b = -2.0$ m/s, y $c = -1.5$ m/s. *a*) Obtenga expresiones para las componentes de velocidad *u* y *v*. *b*) Verifique que el campo de flujo satisface la ecuación de continuidad para el flujo incompresible. *c*) Grafique varias líneas de corriente del flujo en el cuadrante superior derecho.

SOLUCIÓN Para una función de corriente dada: calcule las componentes de velocidad, verifique la incompresibilidad y grafique líneas de corriente del flujo.
Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible (se tiene que verificar esta suposición). **3** El flujo es bidimensional en el plano *xy*, lo que implica que $w = 0$ y ni *u* ni *v* dependen de *z*.
Análisis *a*) Use la ecuación 9-20 para obtener expresiones para *u* y *v* al diferenciar la función de corriente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = b \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -3ax^2 - c$$

b) Dado que *u* no es función de *x*, y que *v* no es función de *y*, se ve inmediatamente que se satisface la ecuación de continuidad bidimensional para el flujo incompresible (Ec. 9-19). De hecho, dado que ψ es suave en *x* y *y*, la ecuación de continuidad bidimensional para el flujo incompresible en el plano *xy* se satisface automáticamente por la definición misma de ψ. Se llega a la conclusión de que **el flujo es de hecho incompresible**.
c) Para graficar líneas de corriente, se resuelve la ecuación dada o para *y* como función de *x* y ψ, o para *x* como función de *y* y ψ. En este caso, la primera opción es más sencilla, y se tiene:

$$\textit{Ecuación para una línea de corriente:} \qquad y = \frac{\psi - ax^3 - cx}{b}$$

Esta ecuación se grafica en la figura 9-19 para diversos valores de ψ y para los valores proporcionados de *a*, *b* y *c*. El flujo es casi recto hacia abajo a grandes valores de *x*, pero se curva hacia arriba para $x < 1$ m.
Discusión Puede verificarse que $v = 0$ en $x = 1$ m. De hecho, *v* es negativo para $x > 1$ m y positivo para $x < 1$ m. La dirección del flujo también puede determinarse cuando se selecciona un punto arbitrario en el flujo, por decir ($x = 3$ m, $y = 4$ m), y se calcula ahí la velocidad. Se obtiene $u = -2.0$ m/s y $v = -12.0$ m/s en este punto que muestra que el fluido fluye hacia abajo a la izquierda en esta región del campo de flujo. Para mejor claridad, en este punto de la figura 9-19 también se grafica el vector de velocidad; que es paralelo a la línea de corriente cerca de este punto. También se grafican los vectores de velocidad en otros tres puntos.

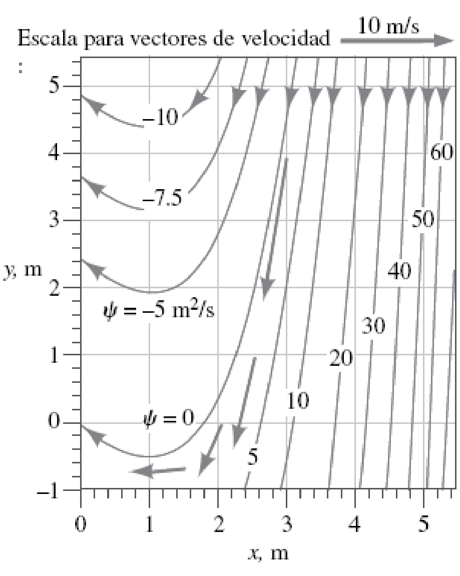


FIGURA 9-19
Líneas de corriente para el campo de velocidad del Ejemplo 9-8; el valor de ψ constante se indica para cada línea de corriente y los vectores de velocidad se muestran en cuatro posiciones.

EJEMPLO 9-9 Cálculo de función de corriente para un campo

Problema 9

EJEMPLO 9-9 Cálculo de función de corriente para un campo de velocidad conocido

Considere un campo de velocidad bidimensional de flujo estacionario de fluido incompresible con $u = ax + b$ y $v = -ay + cx$, donde a, b y c son constantes: $a = 0.50\ s^{-1}$, $b = 1.5$ m/s y $c = 0.35\ s^{-1}$. Genere una expresión para la función de corriente y grafique algunas líneas de corriente del flujo en el cuadrante superior derecho.

SOLUCIÓN Para un campo de velocidad dado se tiene que generar una expresión para ψ y graficar varias líneas de corriente para los valores dados de las constantes a, b y c.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible. **3** El flujo es bidimensional en el plano xy, lo que implica que $w = 0$ y ni u ni v dependen de z.

Análisis Se comienza por elegir una de las dos ecuaciones 9-20 que definen la función de corriente (no importa cuál de las dos se elija: la solución será idéntica).

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = ax + b$$

A continuación se integra respecto a y, y se nota que ésta es una integración parcial con respecto a una variable y, de modo que se agrega una función arbitraria de la otra variable, x, en vez de una constante de integración:

$$\psi = axy + by + g(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora se toma la otra de las dos ecuaciones 9-20, se deriva la ecuación 1 y se reordena del modo siguiente:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay - g'(x) \qquad \textbf{(2)}$$

donde $g'(x)$ denota dg/dx pues g es una función de sólo una variable, x. Ahora se tienen dos expresiones para la componente de velocidad v, la ecuación dada en el enunciado del problema y la ecuación 2. Se igualan éstas y se integra respecto a x para encontrar $g(x)$:

$$v = -ay + cx = -ay - g'(x) \quad \rightarrow \quad g'(x) = -cx \quad \rightarrow \quad g(x) = -c\frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(3)}$$

Note que aquí se agregó una constante de integración arbitraria C, pues g es función sólo de x. Para finalizar, cuando se sustituye la ecuación 3 en la ecuación 1 se produce la expresión final para ψ:

Solución:

$$\boldsymbol{\psi = axy + by - c\frac{x^2}{2} + C} \qquad \textbf{(4)}$$

Para graficar las líneas de corriente, note que la ecuación 4 representa una *familia* de curvas, una única curva para cada valor de la constante ($\psi - C$). Puesto que C es arbitraria, es común establecerla igual a cero, aunque se puede establecer igual a cualquier valor deseado. Por simplicidad, se hace $C = 0$ y se resuelve la ecuación 4 para y como función de x, lo que produce:

Ecuación para líneas de corriente:

$$y = \frac{\psi + cx^2/2}{ax + b} \qquad \textbf{(5)}$$

Para los valores dados de las constantes a, b y c, en la figura 9-20 se grafica la ecuación 5 para diversos valores de ψ; estas curvas de ψ constante son líneas de corriente del flujo. A partir de la figura 9-20 se puede ver que éste es un flujo que converge suavemente en el cuadrante superior derecho.

Discusión Siempre es conveniente comprobar las transformaciones algebraicas. En este ejemplo, se debe sustituir la ecuación 4 en la ecuación 9-20 para verificar que se obtienen las componentes de velocidad correcta.

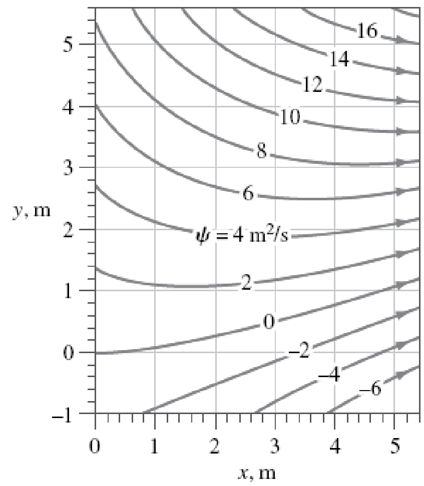


FIGURA 9-20
Líneas de corriente para el campo de velocidad del ejemplo 9-9; para cada línea de corriente se indica el valor de la constante ψ.

Problema 10

EJEMPLO 9-11 Razón de flujo volumétrico deducida a partir de líneas de corriente

A través de una estrecha rendija en la pared inferior de un canal de agua se succiona agua. El agua en el canal fluye de izquierda a derecha con velocidad uniforme $V = 1.0$ m/s. La rendija es perpendicular al plano xy y corre a lo largo del eje z a través de todo el canal, que tiene ancho $w = 2.0$ m. Por lo tanto, el flujo es aproximadamente bidimensional en el plano xy. En la figura 9-25 se grafican y etiquetan varias líneas de corriente del flujo.

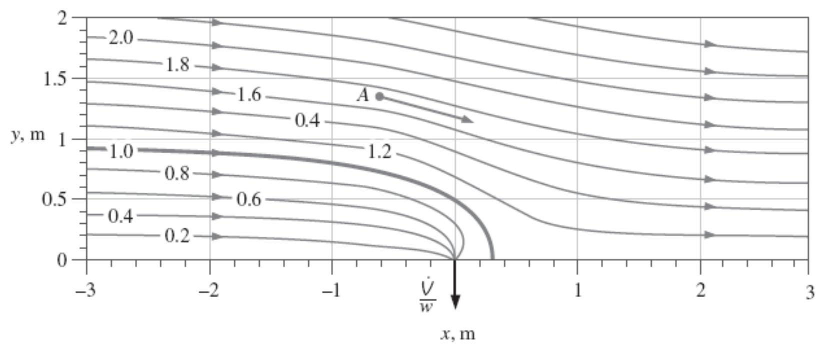


FIGURA 9-25
Líneas de corriente para flujo libre a lo largo de una pared con una estrecha rendija de succión; los valores de línea de corriente se muestran en unidades de m^2/s; la línea de corriente gruesa es la línea de corriente divisora. La dirección del vector de velocidad en el punto A se determina por medio de la convención del lado izquierdo.

La línea de corriente gruesa de la figura 9-25 se llama **línea de corriente divisora** porque divide el flujo en dos partes. A saber, toda el agua por abajo de esta línea de corriente divisora se succiona en la rendija, mientras que toda el agua sobre la línea de corriente divisora continúa en su camino corriente abajo. ¿Cuál es la razón de flujo volumétrico del agua que se succionará a través de la rendija? Estime la magnitud de la velocidad en el punto A.

SOLUCIÓN Para el conjunto de líneas de corriente dado, debe determinar la razón de flujo volumétrico a través de la rendija y estimar la velocidad del fluido en un punto.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El flujo es incompresible. **3** El flujo es bidimensional en el plano *xy*. **4** La fricción a lo largo de la pared inferior es despreciable.

Análisis Por la ecuación 9-25, la razón de flujo volumétrico por uni-dad de ancho entre la pared inferior ($\psi_{\text{pared}} = 0$) y la línea de corriente divisora ($\psi_{\text{divisora}} = 1.0\ \text{m}^2/\text{s}$) es:

$$\frac{\dot{V}}{w} = \psi_{\text{divisora}} - \psi_{\text{pared}} = (1.0 - 0)\ \text{m}^2/\text{s} = 1.0\ \text{m}^2/\text{s}$$

Todo este flujo debe pasar a través de la rendija. Puesto que el canal mide 2.0 m de ancho, la razón de flujo volumétrica total a través de la rendija es:

$$\dot{V} = \frac{\dot{V}}{w}w = (1.0\ \text{m}^2/\text{s})(2.0\ \text{m}) = \mathbf{2.0\ m^3/s}$$

Para estimar la rapidez en el punto *A*, se mide la distancia *d* entre las dos líneas de corriente que encierran al punto *A*. Se encuentra que la línea de corriente 1.8 está aproximadamente a 0.21 m de distancia de la línea de corriente 1.6 en la vecindad del punto *A*. La razón de flujo volumétrico por unidad de ancho (perpendicular al plano de la página) entre estas dos líneas de corriente es igual a la diferencia en valor de la función de corriente. Por lo tanto, puede estimarse la velocidad en el punto *A*,

$$V_A \cong \frac{\dot{V}}{w\delta} = \frac{1}{\delta}\frac{\dot{V}}{w} = \frac{1}{\delta}(\psi_{1.8} - \psi_{1.6}) = \frac{1}{0.21\ \text{m}}(1.8 - 1.6)\ \text{m}^2/\text{s} = \mathbf{0.95\ m/s}$$

La estimación concuerda muy bien con la velocidad conocida de flujo libre (1.0 m/s), lo que indica que el fluido en la cercanía del punto *A* fluye a casi la misma velocidad que el flujo libre, pero apunta ligeramente hacia abajo.

Discusión Las líneas de corriente de la figura 9-25 se generaron por superposición de una corriente uniforme y un *sumidero lineal*, cuando se supone un flujo irrotacional (potencial). Tal superposición se comenta en el capítulo 10.

Problema 11

EJEMPLO 9-13 **Cálculo del campo de presión en coordenadas cartesianas**

Considere el campo de velocidad bidimensional incompresible del ejemplo 9-9, a saber, $\vec{V} = (u, v) = (ax + b)\vec{i} + (-ay + cx)\vec{j}$. Calcule la presión como función de x y y.

SOLUCIÓN Para un campo de velocidad dado, tiene que calcular el campo de presión.

Hipótesis **1** El flujo es estacionario. **2** El fluido es incompresible con propiedades constantes. **3** El flujo es bidimensional en el plano xy. **4** La gravedad no actúa en las direcciones x o y.

Análisis Primero verifique si el campo de velocidad dado satisface la ecuación de continuidad bidimensional incompresible:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{a} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-a} + \underbrace{\frac{\cancel{\partial w}}{\cancel{\partial z}}}_{0\text{ (2-D)}} = a - a = 0 \qquad (1)$$

Por lo tanto, la continuidad de hecho se satisface por el campo de velocidad dado. Si la continuidad *no* se satisface, tendría que detenerse el análisis: el campo de velocidad dado no sería físicamente posible y no podría calcularse un campo de presión.

A continuación, se considera la componente y de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\cancel{\partial v}}{\cancel{\partial t}}}_{0\text{ (estacionaio)}} + \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{(ax+b)c} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{(-ay+cx)(-a)} + \underbrace{w\frac{\cancel{\partial v}}{\cancel{\partial z}}}_{0\text{ (2-D)}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\rho g_y}}_{0} + \mu\left(\underbrace{\frac{\cancel{\partial^2 v}}{\cancel{\partial x^2}}}_{0} + \underbrace{\frac{\cancel{\partial^2 v}}{\cancel{\partial y^2}}}_{0} + \underbrace{\frac{\cancel{\partial^2 v}}{\cancel{\partial z^2}}}_{0\text{ (2-D)}}\right)$$

La ecuación de cantidad de movimiento y se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho(-acx - bc - a^2y + acx) = \rho(-bc - a^2y) \qquad (2)$$

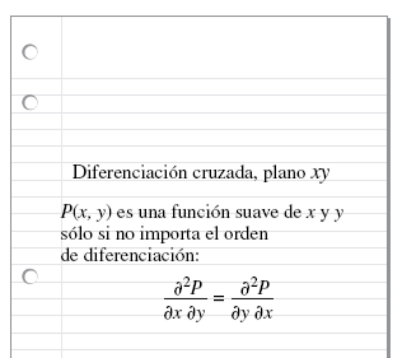
La ecuación de cantidad de movimiento y se satisface, siempre que se pueda generar un campo de presión que satisfaga la ecuación 2. En forma similar, la ecuación de cantidad de movimiento x se reduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(-a^2x - ab) \qquad (3)$$

La ecuación de cantidad de movimiento x también se satisface, siempre que se pueda generar un campo de presión que satisfaga la ecuación 3.

Con la finalidad de que exista una solución para flujo estacionario, P no puede ser función del tiempo. Más aún, un campo de flujo incompresible físicamente estacionario en verdad requiere un campo de presión $P(x, y)$ que es una función suave de x y y (no puede haber discontinuidades súbitas o en P o en una derivada de y). Matemáticamente, esto necesita que el orden de diferenciación (al principio con respecto a x y luego con respecto a y o al principio con respecto a y y luego con respecto a x) no deba importar (Fig. 9-44). Se comprueba si esto es posible cuando se realiza una diferenciación cruzada de las ecuaciones 2 y 3, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$



La ecuación 4 muestra que P es una función suave de x y y. Por lo tanto, *el campo de velocidad dado satisface la ecuación de Navier-Stokes de flujo bidimensional estacionario incompresible*.

Si en este punto del análisis la diferenciación cruzada de la presión produjera dos relaciones incompatibles (en otras palabras: si la ecuación de la figura 9-44 no se satisficiera), se llegaría a la conclusión que el campo de velocidad dado no podría satisfacer la ecuación de Navier-Stokes de flujo bidimensional estacionario incompresible, y se abandonaría el intento por calcular un campo de presión estacionario.

Para calcular $P(x, y)$ se integra la ecuación 2 (con respecto a y) para obtener una expresión para $P(x, y)$:

Campo de presión a partir de la componente y *de la cantidad de movimiento*:

$$P(x, y) = \rho\left(-bcy - \frac{a^2y^2}{2}\right) + g(x) \tag{5}$$

Note que se agregó una función arbitraria de la otra variable x en lugar de una constante de integración porque ésta es una integración con respecto a una variable. Entonces se saca la derivada parcial de la ecuación 5 respecto a x para obtener:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g'(x) = \rho(-a^2x - ab) \tag{6}$$

donde se igualó el resultado de la ecuación 3 por uniformidad. Ahora se integra la ecuación 6 para obtener la función $g(x)$:

$$g(x) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - abx\right) + C_1 \tag{7}$$

donde C_1 es una constante de integración arbitraria. Finalmente, la ecuación 7 se sustituye en la ecuación 5 para obtener la expresión final parar $P(x, y)$. El resultado es:

$$\boldsymbol{P(x, y) = \rho\left(-\frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^2y^2}{2} - abx - bcy\right) + C_1} \tag{8}$$

Discusión Para la práctica, y como comprobación de las transformaciones algebraicas, debe diferenciar la ecuación 8 respecto tanto de y como de x, y comparar las ecuaciones 2 y 3. Además, intente obtener la ecuación 8 cuando comience con la ecuación 3 en vez de la ecuación 2; debe obtener el mismo resultado.

Problema 12

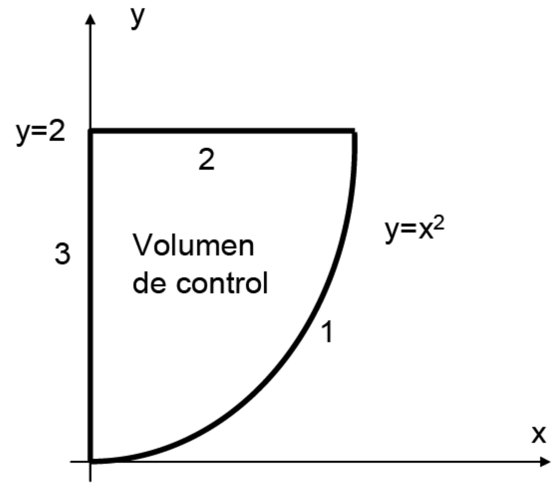
Dado el campo de velocidades: $\vec{V} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j}$ determinar:

1. Ecuación de la línea de corriente, en t_1, que pasa por el punto x_1, y_1.

2. Ecuación de la trayectoria de la partícula que en t_0 está en x_0, y_0. Expresarla en la forma x(t), y(t).

3. Ecuación de la trayectoria de la partícula que en t_0 está en x_0, y_0. Expresarla en la forma y=f(x). Comentarios respecto al apartado 1.

4. Calcular la densidad del campo fluido en cualquier punto y cualquier instante de tiempo, sabiendo que en el instante t_0, la densidad en cualquier punto del campo es ρ_0.



5. Calcular el caudal que atraviesa las secciones 1, 2 y 3 de la figura (módulo y sentido) y comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa para el volumen de control de la figura.

$$\boxed{\bar{v} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j}}$$

① Como el flujo es permanente, no interviene t_1.

$$\frac{xy}{dx} = \frac{-y^2/2}{dy} \longrightarrow \frac{y\,dy}{-y^2/2} = \frac{dx}{x} \longrightarrow -2\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\longrightarrow -2\ln y = \ln x + C_1 \longrightarrow y^{-2} = x \cdot C_2$$

$$C_2: \quad y_1^{-2} = x_1 \cdot C_2 \rightarrow C_2 = \frac{y_1^{-2}}{x_1}$$

$$\longrightarrow y^{-2} = x\frac{y_1^{-2}}{x_1} \longrightarrow y = \sqrt{\frac{x_1}{x}}\, y_1$$

(2)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{y^2}{2}\end{aligned}\right| \xrightarrow{\text{Sistema acoplado}} 2\int\frac{dy}{y^2} = -\int dt \rightarrow \boxed{-\frac{2}{y} = -t + C_3}$$

luego $\boxed{y = \dfrac{2}{-C_3 + t}}$

Sustituyendo en la primera

$$\frac{dx}{dt} = x\,\frac{2}{t - C_3} \rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{2\,dt}{t - C_3}$$

$$\ln x = 2\ln(t - C_3) + C_4 \rightarrow \boxed{x = (t - C_3)^2 C_5}$$

$t_0 . x_0 . y_0$

$$y_0 = \frac{2}{t_0 - C_3} \rightarrow t_0 - C_3 = \frac{2}{y_0} \rightarrow \boxed{C_3 = t_0 - \frac{2}{y_0}}$$

$$x_0 = (t_0 - C_3)^2 C_5 = \left(\cancel{t_0} - \cancel{t_0} + \frac{2}{y_0}\right)^2 C_5 \rightarrow \boxed{C_5 = x_0\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}$$

$$y = \frac{2}{t - t_0 + \frac{2}{y_0}}$$

$$x = \left(t - t_0 + \frac{2}{y_0}\right)^2 x_0 \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \quad \Bigg\} *$$

(3) Tendrá la misma forma que la ldc pues estas son estacionarias al serlo el campo de velocidades

$$y = \sqrt{\frac{x_0}{x}}\, y_0$$

De todas maneras se puede calcular eliminando t en *

De la 1:

$$t = \frac{2}{y} + t_0 + \frac{2}{y_0}$$

en la 2:

$$x = \left(\frac{2}{y} + \cancel{t_0} + \cancel{\frac{2}{y_0}} - \cancel{t_0} - \cancel{\frac{2}{y_0}}\right)^2 x_0 \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{2}{y}\right)^2 x_0 \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \rightarrow x = x_0 \left(\frac{y_0}{y}\right)^2 \rightarrow$$

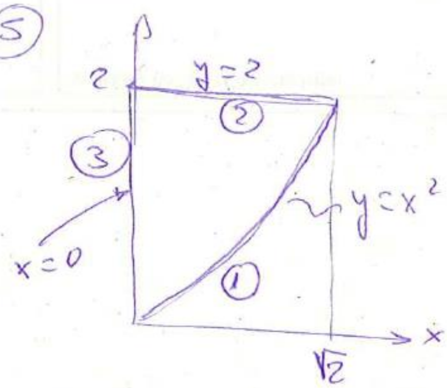
$\rightarrow y = \sqrt{\frac{x_0}{x}}\, y_0$ que coincide con la ldc para el mismo punto de paso.

(4) $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0 \qquad \nabla \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

$\vec{v} = xy\,\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} \rightarrow \nabla \vec{v} = y - \frac{2y}{2} = 0$ Incompresible

$\rightarrow \rho = cte = \rho_0 \quad \forall pto \ y \ \forall t$

(5) (3)



$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

como ρ = cte y $\forall c$ no deformable

$$\int \rho \, d\forall = cte$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \, d\forall = 0$$

(1)

$$y = x^2$$

$$F = x^2 - y = 0 \qquad \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = 2x\vec{i} - \vec{j}$$

$$\frac{\vec{\nabla} F}{|\nabla F|} = \frac{2x\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{4x^2+1}} = \vec{n} \qquad dA = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Como $y = x^2 \quad dy = 2x\,dx \quad dy^2 = 4x^2 dx^2$

$$dA = \sqrt{dx^2 + 4x^2 dx^2} = dx\sqrt{1+4x^2}$$

$$d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA = \frac{2x\vec{i} - \vec{j}}{\cancel{\sqrt{4x^2+1}}} \cancel{\sqrt{4x^2+1}}\, dx = \underline{(2x\vec{i} - \vec{j})\,dx}$$

$$\vec{V}_1 = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} \underset{y=x^2}{=} x^3\vec{i} - \frac{x^4}{2}\vec{j}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \vec{V} d\vec{A} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2x^4 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{5}{2}\int_0^{\sqrt{2}} x^4 dx = \frac{\cancel{5}}{2}\frac{\sqrt{2}^5}{\cancel{5}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{2^{5/2}}} = \frac{2^{1/2}2^{4/2}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

(2) $\vec{V} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} \overset{y=2}{=} 2x\vec{i} - 2\vec{j}$ $\Big\}$ $\vec{V} \cdot d\vec{A} = -2dx$

$d\vec{A} = dx\vec{j}$

$$\int \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\sqrt{2}} -2dx = \underline{\underline{-2\sqrt{2}}}$$

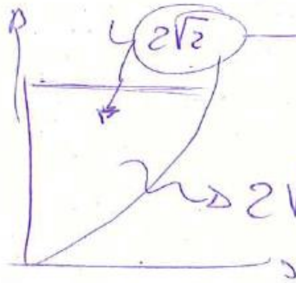
(3)

(3) $\vec{V} = xy\,\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} = -\frac{y^2}{2}\vec{j}$

$d\vec{A} = -dy\,\vec{i}$

$\left.\right\}\ \vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$

$Q = 0$



$y\,(2\sqrt{2})$ → negativo (entrante en ∀.C.)

$x \rightarrow 2\sqrt{2}$ → saliente (∀.C.)

Se verifica TAR

Problema 13

La velocidad de una partícula (la que en t = 0 seg ocupa la posición x_0, y_0) sigue la siguiente expresión:

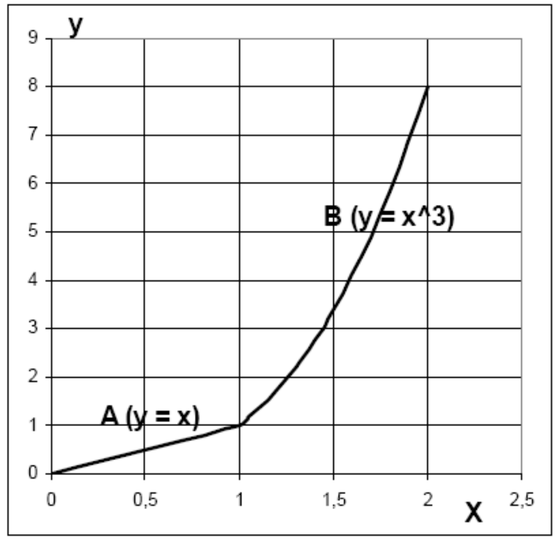
$$\vec{V}_p = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3}\vec{i} + \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2}\vec{j}$$

1.- Determinar la ecuación de la trayectoria de la partícula.

2.- Determinar el campo de velocidades.

3.- Determinar la ecuación de la línea de corriente, en el instante t_2, que pasa por el punto de coordenadas x_1,y_1.

4.- Las ecuaciones de la línea de corriente y la de la trayectoria, que pasan por el mismo punto, ¿son iguales o diferentes? Razonar la respuesta.



5.- Calcular el caudal que atraviesa la superficie de la figura en el instante t (suponer 1 metro de profundidad perpendicular al papel). La superficie se divide en dos partes:

A: Recta de ecuación y = x entre los puntos (0,0) y (1,1).

B: Curva de ecuación $y = x^3$ entre los puntos (1,1) y (2,8).

Determinar el sentido del caudal considerando que el flujo neto es positivo si atraviesa la superficie de izquierda a derecha.

Nota: Si no se ha podido deducir la ecuación del campo de velocidades (apartado 2), utilizar el campo de velocidades siguiente (atención: no es el resultado correcto del ejercicio).

$\vec{V} = -xy\vec{i} + y^3\vec{j}$

$$u_0 = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3} = \frac{dx_p}{dt}$$

$$v_0 = \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2} = \frac{dy_p}{dt}$$

Calculamos la trayectoria:

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3} \rightarrow \int_{x_0}^{x_p} \frac{-dx_p}{2x_0 y_0} = \int_0^t \frac{dt}{(y_0 t - 1)^3}$$

$$\frac{-x_p}{\cancel{2}x_0 \cancel{y_0}} + \frac{\cancel{x_0}}{\cancel{2}\cancel{x_0}\cancel{y_0}} = -\frac{1}{\cancel{2}\cancel{y_0}}\left(\frac{1}{(y_0 t - 1)^2} - 1\right)$$

$$-\frac{x_p}{x_0} = -\frac{1}{(y_0 t - 1)^2} + \cancel{1} - \cancel{1} \rightarrow \boxed{x_p = \frac{x_0}{(y_0 t - 1)^2}}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2} \rightarrow \int_{y_0}^{y_p} \frac{dy_p}{y_0^2} = \int_0^t \frac{dt}{(y_0 t - 1)^2}$$

$$\frac{y_p}{y_0^{\cancel{2}}} - \frac{\cancel{y_0}}{y_0^{\cancel{2}}} = \frac{-1}{\cancel{y_0}}\left[\frac{1}{y_0 t - 1} - \frac{1}{-1}\right]$$

$$\frac{y_p}{y_0} = +\cancel{1} - \frac{1}{y_0 t - 1} - \cancel{1} \rightarrow \boxed{y_p = \frac{-y_0}{y_0 t - 1}}$$

Para calcular el campo de velocidades a partir de la velocidad de la partícula, necesitamos perder la identidad de la partícula.

$$x = \frac{x_0}{(y_0 t - 1)^2} \; *$$

$$y = \frac{-y_0}{y_0 t - 1} \rightarrow y = \frac{-1}{t - \frac{1}{y_0}} \rightarrow$$

$$\rightarrow t - \frac{1}{y_0} = -\frac{1}{y} \rightarrow -\frac{1}{y_0} = -\frac{1}{y} - t$$

$$\rightarrow \frac{1}{y_0} = \frac{1}{y} + t \rightarrow \boxed{y_0 = \frac{1}{\frac{1}{y}+t} = \frac{y}{1+yt}}$$

Sustituyendo en *

$$x_0 = x\,(y_0 t - 1)^2 = x\left(\frac{yt}{1+yt} - 1\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x_0 = x\,\frac{1}{(1+yt)^2}}$$

Sustituyendo x_0 e y_0 en la velocidad de la partícula:

$$u = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t-1)^3} = \frac{-2x}{(1+yt)^2}\,\frac{y}{(1+yt)}\,\frac{1}{\left(\frac{yt}{1+yt}-1\right)^3} = 2xy$$

$$v = \frac{y_0^2}{(y_0 t-1)^2} = \frac{y^2}{(1+yt)^2}\,\frac{1}{\left(\frac{yt}{1+yt}-1\right)^2} = y^2$$

$$\boxed{\vec{V} = 2xy\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}}$$ no depende de t : TRY = LDC.

E. LDC

$$\frac{dx}{2x\cancel{y}} = \frac{dy}{y^{\cancel{2}}} \rightarrow \int\frac{dx}{2x} = \int\frac{dy}{y}$$

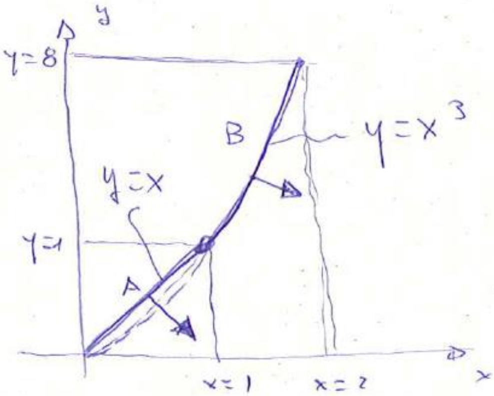
$$\frac{1}{2}\ln x = \ln y + C \qquad (x_1, y_1) \qquad C = \frac{1}{2}\ln x_1 - \ln y_1$$

$$\frac{1}{2}\ln x = \ln y + \frac{1}{2}\ln x_1 - \ln y_1 \rightarrow$$

$$\ln x - \ln x_1 = 2(\ln y - \ln y_1)$$

$$\ln\frac{x}{x_1} = 2\ln\frac{y}{y_1} \rightarrow \ln\frac{x}{x_1} = \ln\left(\frac{y}{y_1}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{x}{x_1} = \left(\frac{y}{y_1}\right)^2}$$

Cálculo del caudal



Ⓐ $y = x \quad x - y = 0$

$$\nabla(x-y) = \frac{\partial x}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}} \qquad dy = dx$$

$$dA = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{2}$$

$$d\vec{s} = \vec{n}\, dA = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\, dx = \underline{(\vec{i}-\vec{j})\,dx}$$

Ⓑ $y = x^3 \quad dy = 3x^2 dx$

$$\nabla(x^3-y) = \frac{\partial x^3}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} = 3x^2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\bar{n} = \frac{3x^2\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{9x^4+1}} \qquad ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2+9x^4dx^2} = dx\sqrt{1+9x^4}$$

$$d\vec{s} = \bar{n}\, ds = (3x^2\vec{i} - \vec{j})\, dx$$

$$Q_s = \int_{x=0}^{x=1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy\vec{i} + y^2\vec{j})\cdot(\vec{i}-\vec{j})\, dx =$$

$$= \int_0^1 (2xy - y^2)\, dx \overset{y=x}{=} \int_0^1 (2x^2 - x^2)\, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$Q_B = \int_1^2 (2xy\vec{i} + y^2\vec{j})(3x^2\vec{i} - \vec{j})\,dx =$$

$$= \int_1^2 (6x^3y - y^2)\,dx \overset{y=x^3}{=} \int_1^2 (6x^6 - x^6)\,dx =$$

$$= \int_1^2 5x^6\,dx = 5\left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 = \frac{5}{7}(2^7 - 1) = \frac{5 \cdot 127}{7} = \frac{635}{7}$$

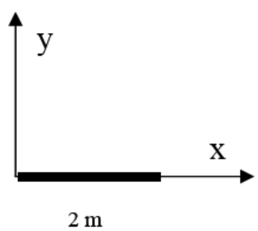
$$Q_t = \frac{1}{3} + \frac{635}{7} = \frac{1912}{21}$$

Problema 14

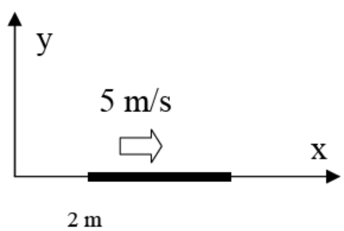
La velocidad de la partícula que en t = t0 está en el punto x0, y0 viene dada por la expresión:

$$\vec{V}_p(t) = t \cdot x_0 \cdot e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \vec{i} - t \cdot x_0 \cdot e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \vec{j}$$

1. Determinar la ecuación de la trayectoria de esta partícula, y escribirla en la forma y = f(x, x0, y0).
2. Determinar la ecuación del campo de velocidades.
3. Determinar si el flujo es compresible o incompresible. Sabiendo que la densidad es, para el instante t=0, constante e igual a K en todo el campo fluido. Determinar la evolución de la densidad con el tiempo.
4. Calcular la ecuación general de las líneas de corriente, y concretamente la que pasa por el punto de coordenadas x1, y1 en el instante t1.
5. Comparar las ecuaciones de la trayectoria y las de las líneas de corriente para el mismo punto de paso. ¿Qué hay que decir al respecto?
6. Determinar el caudal que atraviesa el segmento de la figura para un instante genérico t, y para un instante t= 5s , indicando el sentido del caudal, e interpretar el resultado.
7. Si el segmento anterior comienza a moverse en t=0 hacia la derecha, con velocidad constante respecto al origen de coordenadas, calcular el caudal que lo atravesará en un instante t, y en t = 5 seg. Indicar el sentido del caudal e interpretar el resultado.



Apartado 6



Apartado 7

Velocidad de la partícula que en $t=t_0$ está en $x_0 y_0$

$$\bar{V}_p(t) = t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \vec{i} - t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{V}_p(t) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_p(t) \\ \frac{dy}{dt} = v_p(t) \end{cases}$$

- $\frac{dx}{dt} = t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \rightarrow x = x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} + C_1$ $\qquad \boxed{x = x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}$

  Para $t=t_0$ $x = x_0 \rightarrow C_1 = 0$

- $\frac{dy}{dt} = -t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \rightarrow y = -x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} + C_2$

Para $t = t_0$ $y = y_0$

$$y_0 = -x_0 \cdot 1 + C_2 \rightarrow C_2 = y_0 + x_0$$

$$\boxed{y = y_0 + x_0\left(1 - e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}\right)}$$

$$e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} = \frac{x}{x_0}$$

$$\boxed{y = y_0 + x_0\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}$$

$$y = y_0 + x_0 - x$$

Campo de velocidades:

de la trayectoria $x_0 = \dfrac{x}{e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}}$

$$y \longrightarrow y = y_0 + \frac{x}{e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}}\left(1 - e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}\right)$$

$$\rightarrow y_0 = y - \frac{x}{e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}} + x$$

Sustituyendo en la ec. de la velocidad de la partícula:

$$\vec{v} = t\frac{x}{\cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}}\cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}\vec{i} - t\frac{x}{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}\vec{j} = tx\vec{i} - tx\vec{j}$$

Compresibilidad

$$\nabla\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = t + 0 = t$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{v} = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\rho t \rightarrow \ln\rho = -\frac{t^2}{2} + C$$

$$t=0 \quad \rho = K \qquad c = \ln K$$

$$\ln\rho = -\frac{t^2}{2} + \ln K \rightarrow \frac{\rho}{K} = e^{-t^2/2} \rightarrow \boxed{\rho = Ke^{-t^2/2}}$$

Líneas de corriente

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \longrightarrow \frac{dx}{x\cancel{t}} = \frac{dy}{-x\cancel{t}} \rightarrow dx = -dy$$

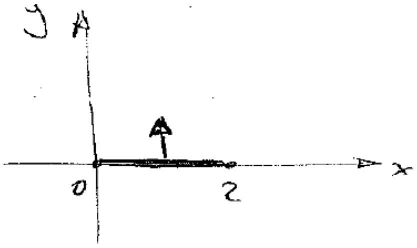
$$\rightarrow \boxed{x = -y + C}$$ No dependen del tiempo

Para $x_1 y_1$ en t_1 (en cualquier t igual)

$$C = x_1 + y_1 \longrightarrow x = -y + x_1 + y_1 \longrightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y = x_1 + y_1 - x}$$

So iguales a las trayectorias. Lógico pues la ecuación general de las ldc no dependen del tiempo.



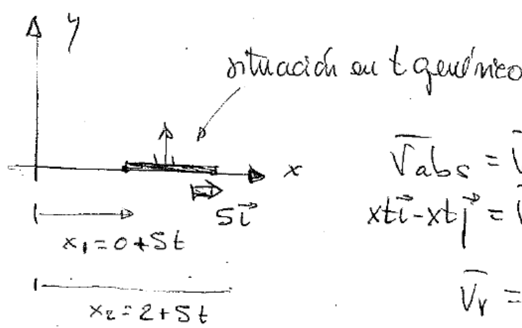
$$d\vec{A} = dx\,\vec{j}$$

$$dQ = \vec{v}\cdot d\vec{A} = (xt\,\vec{i} - xt\,\vec{j})\cdot dx\,\vec{j} = $$
$$= -xt\,dx$$

$$Q = \int_{x=0}^{2} -xt\,dx = -t\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \mathbf{-2t} \;//$$

En $t = 5$ seg. $Q = -2\cdot 5 = -10\ m^3/s.m$ profundidad

Interpretación: Caudal $\downarrow$ ya que hemos orientado la superficie hacia arriba, y por lo tanto la "v" va en sentido contrario al $d\vec{A}$



$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_r + \vec{V}_{arr}$$
$$xt\vec{i} - xt\vec{j} = \vec{V}_r + 5\vec{i}$$
$$\vec{V}_r = (xt-5)\vec{i} - xt\vec{j}$$

$$dQ = \vec{V}\cdot d\vec{A} = -xt\,dx$$

$$Q = \int_{0+5t}^{2+5t} (-xt\,dx) = -t\left(\frac{x^2}{2}\right]_{0+5t}^{2+5t} =$$

$$= -\frac{t}{2}\left(4 + \cancel{25t^2} + 20t - \cancel{25t^2}\right) = -\frac{t}{2}(4+20t)$$

<u>negativo</u>

Para $t = 5$ seg.

$$Q = -\frac{5}{2}(4+20\cdot 5) = -260\ \frac{m^3}{s.m.}$$