

Problema 1

Se debe predecir la fuerza aerodinámica de arrastre de un auto deportivo nuevo a una velocidad de 50.0 mi/h a una temperatura de aire de 25°C. Los ingenieros automotrices construyen un modelo a un quinto de escala del auto para probarlo en un túnel de viento. Es invierno y el túnel de viento se localiza en un edificio sin calefacción; la temperatura del aire del túnel de viento es de sólo 5°C. Determine qué tan rápido deben correr los ingenieros el aire en el túnel de viento con la finalidad de lograr similitud entre el modelo y el prototipo.

SOLUCIÓN Se utilizará el concepto de similitud para determinar la velocidad del aire en el túnel de viento.

Hipótesis **1** La compresibilidad del aire es despreciable (la validez de esta aproximación se comenta más adelante). **2** Las paredes del túnel de viento están lo suficientemente alejadas de modo que no interfieren con la fuerza aerodinámica de arrastre sobre el auto modelo. **3** El modelo es geoméricamente similar al prototipo. **4** El túnel de viento tiene una banda móvil para simular el terreno bajo el auto, como en la figura 7-19. (La banda móvil es necesaria con la finalidad de lograr similitud cinemática en todas las partes del flujo, especialmente bajo el auto.)

Propiedades Para el aire a presión atmosférica y a $T = 25^\circ\text{C}$, $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$. De igual manera, a $T = 5^\circ\text{C}$, $\rho = 1.269 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$.

Análisis Dado que en este problema sólo existe una Π independiente, la ecuación de similitud (ecuación 7-12) se sostiene si $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$, donde Π_2 está dada por la ecuación 7-13, y se le llama número de Reynolds. Por lo tanto, se escribe:

$$\Pi_{2,m} = \text{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \Pi_{2,p} = \text{Re}_p = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

que se puede resolver para la velocidad desconocida del aire en el túnel de viento para las pruebas del modelo V_m ,

$$V_m = V_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{L_p}{L_m} \right)$$

$$= (50.0 \text{ mi/h}) \left(\frac{1.754 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \right) \left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3} \right) (5) = \mathbf{221 \text{ mi/h}}$$

En consecuencia, para garantizar similitud, el aire en el túnel de viento debe fluir a 221 mi/h (a tres cifras significativas). Note que nunca se proporcionó la longitud verdadera de cualquier auto, pero se conoce la razón de L_p a L_m porque el prototipo es cinco veces más grande que el modelo a escala. Cuando los parámetros dimensionales se reordenan como razones adimensionales (como se hizo aquí), el sistema de unidades es irrelevante. Dado que las unidades en cada numerador cancelan a aquéllas en cada denominador, no son necesarias conversiones de unidades.

Discusión Esta velocidad es bastante alta (aproximadamente 100 m/s) y es posible que el túnel de viento no pueda correr a dicha velocidad. Más aún, la aproximación de incompresibilidad de aire puede cuestionarse a esta alta velocidad

Este ejemplo es una continuación del Ejemplo 7-5. Suponga que los ingenieros corren el túnel de viento a 221 mi/h para lograr similitud entre el modelo y el prototipo. La fuerza aerodinámica de arrastre sobre el auto modelo se mide con una **balanza de arrastre** (Fig. 7-19). Se registran varias lecturas de fuerza de arrastre y resulta que la fuerza de arrastre promedio sobre el modelo es 21.2 lbf. Prediga la fuerza de arrastre sobre el prototipo (a 50 mi/h y 25°C).

SOLUCIÓN Debido a la similitud, los resultados del modelo se pueden escalar para predecir la fuerza aerodinámica de arrastre sobre el prototipo.

Análisis La ecuación de similitud (ecuación 7-12) muestra que, dado que $\Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}$, $\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}$, donde Π_1 para este problema está dada por la ecuación 7-13. En consecuencia, se escribe:

$$\Pi_{1,m} = \frac{F_{D,m}}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \Pi_{1,p} = \frac{F_{D,p}}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

que se puede resolver para la fuerza incógnita de arrastre sobre el auto prototipo, $F_{D,p}$,

$$F_{D,p} = F_{D,m} \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left(\frac{L_p}{L_m} \right)^2$$

$$= (21.2 \text{ lbf}) \left(\frac{1.184 \text{ kg/m}^3}{1.269 \text{ kg/m}^3} \right) \left(\frac{50.0 \text{ mi/h}}{221 \text{ mi/h}} \right)^2 (5)^2 = \mathbf{25.3 \text{ lbf}}$$

Discusión Cuando se ordenan los parámetros dimensionales como razones adimensionales, las unidades se cancelan de manera adecuada aun cuando sean una mezcla de unidades SI e inglesas. Dado que tanto la velocidad como la longitud están al cuadrado en la ecuación para Π_1 , la velocidad más alta en el túnel de viento casi compensa el tamaño más pequeño del modelo, y la fuerza de arrastre sobre el modelo es casi la misma que la que hay sobre el prototipo. De hecho, si la densidad y la viscosidad del aire en el túnel de viento fueran *idénticas* a la del flujo de aire sobre el prototipo, las dos fuerzas de arrastre serían idénticas también (Fig. 7-20).

Problema 2

Algunos niños juegan con pompas de jabón, y el lector tiene curiosidad acerca de la relación entre el radio de la pompa de jabón y la presión adentro de la misma (Fig. 7-29). Razona que la presión adentro de la pompa de jabón debe ser mayor que la presión atmosférica, y que el cascarón de la pompa está bajo tensión, en gran parte como la piel de un globo. Conoce que la propiedad de tensión superficial debe ser importante en este problema. Sin saber algo más de física, decide enfrentar el problema con el uso del análisis dimensional. Establezca una relación entre la diferencia de presión $\Delta P = P_{\text{adentro}} - P_{\text{afuera}}$, el radio de la pompa de jabón R y la tensión superficial σ_s de la película jabonosa.

SOLUCIÓN La diferencia de presión entre el interior de una pompa de jabón y el aire exterior se analizará mediante el método de repetición de variables.

Hipótesis 1 La pompa de jabón está neutralmente flotante en el aire, y la gravedad no es relevante. 2 En este problema no son importantes otras variables o constantes.

Análisis Se emplea paso a paso el método de repetición de variables.

Paso 1 Existen tres variables y constantes en este problema; $n = 3$. Con las mismas se hace una lista en forma funcional, y la variable dependiente se menciona como una función de las variables y constantes independientes:

Lista de parámetros relevantes: $\Delta P = f(R, \sigma_s) \quad n = 3$

Paso 2 Se hace una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro. Las dimensiones de la tensión superficial se obtienen a partir del Ejemplo 7-1 y las de la presión a partir del Ejemplo 7-2:

$$\begin{array}{ccc} \Delta P & R & \sigma_s \\ \{m^1L^{-1}t^{-2}\} & \{L^1\} & \{m^1t^{-2}\} \end{array}$$

Paso 3 Como primera suposición, j se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

Reducción (primera suposición): $j = 3$

Si este valor de j es correcto, el número esperado de Π es $k = n - j = 3 - 3 = 0$. Pero ¿cómo se puede tener cero Π ? Obviamente algo no está bien (Fig. 7-30). En momentos como éste es necesario primero regresar y cerciorarse de que no se está despreciando alguna variable o constante importante en el problema. Dado que se está seguro que la diferencia de presión debe depender sólo del radio y la tensión superficial de la pompa de jabón, el valor de j se reduce por uno:

Reducción (segunda suposición): $j = 2$

Si este valor de j es correcto, $k = n - j = 3 - 2 = 1$. Por ende, se espera una Π , que físicamente es más realista que cero Π .

Paso 4 Es necesario escoger dos parámetros repetitivos porque $j = 2$. Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3, las únicas opciones son R y σ_s , porque ΔP es la variable dependiente.

Paso 5 Estos parámetros repetitivos se combinan en un producto con la variable dependiente ΔP para crear la Π dependiente:

$$\Pi \text{ dependiente:} \quad \Pi_1 = \Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1} \quad (1)$$

Se aplican las dimensiones primarias del paso 2 en la ecuación 1 y se fuerza a la Π a ser adimensional:

Dimensiones de Π_1 :

$$\{\Pi_1\} = \{m^0 L^0 t^0\} = \{\Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1}\} = \{(m^1 L^{-1} t^{-2}) L^{a_1} (m^1 t^{-2})^{b_1}\}$$

Se igualan los exponentes de cada dimensión primaria para resolver a_1 y b_1 :

$$\text{Tiempo:} \quad \{t^0\} = \{t^{-2} t^{-2b_1}\} \quad 0 = -2 - 2b_1 \quad b_1 = -1$$

$$\text{Masa:} \quad \{m^0\} = \{m^1 m^{b_1}\} \quad 0 = 1 + b_1 \quad b_1 = -1$$

$$\text{Longitud:} \quad \{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_1}\} \quad 0 = -1 + a_1 \quad a_1 = 1$$

Por fortuna, los primeros dos resultados concuerdan uno con otro y, por lo tanto, la ecuación 1 se convierte en:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} \quad (2)$$

A partir de la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a la ecuación 2 es el **número de Weber**, que se define como presión (ρV^2) por una longitud dividida entre tensión superficial. No hay necesidad de manipular más esta Π .

Paso 6 Se escribe la relación funcional final. En el caso a la mano, sólo existe una Π , que es una función de *nada*. Esto sólo es posible si la Π es constante. Cuando se coloca la ecuación 2 en la forma funcional de la ecuación 7-11:

Relación entre las Π :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} = f(\text{nada}) = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \Delta P = \text{constante} \frac{\sigma_s}{R} \quad (3)$$

Discusión Éste es un ejemplo de cómo en ocasiones se pueden predecir *tendencias* con análisis dimensional, inclusive sin saber mucho de la física del problema. Por ejemplo, se conoce a partir del resultado que, si el radio de la pompa de jabón se duplica, la diferencia de presión disminuye por un factor de 2. De manera similar, si el valor de la tensión superficial se duplica, ΔP aumenta por un factor de 2. El análisis dimensional no puede predecir el valor de la constante en la ecuación 3; un análisis ulterior (o un experimento) revela que la constante es igual a 4 (capítulo 2),

Problema 3

5.1. La fuerza axial de una hélice, completamente sumergida en agua, se ha visto que depende de : D(diámetro de la helice), V(velocidad de desplazamiento), ρ (densidad del fluido), N (Velocidad de rotación), g (aceleración de la gravedad) y μ (viscosidad dinámica del fluido).

- a) Calcular los parámetros π adimensionales, eligiendo como variables repetidas, las indicadas en los primeros lugares, siempre que sea posible.

Resolución

Como se indica en el enunciado se sabe por la experiencia que la fuerza axial F de una helice depende de una serie de variables , es decir:

$$F = f (D, V, \rho, N, g, \mu)$$

Intervienen en el proceso 7 variables de las cuales 6 son independientes

Las entidades o variables físicas fundamentales son 3 : M, L, T

Por tanto el número de parámetros adimensionales es : 7-3 = 4

Lo fundamental primeramente es establecer la ecuación de dimensiones correcta de cada variable del proceso:

	F	D	V	ρ	N	g	μ
M	1	-	-	1	-	-	1
L	1	1	1	-3	-	1	-1
T	-2	-	-1	-	-1	-2	-1

Las variables repetidas para obtener los parámetros son: D, V, ρ. Con todo definido, se calculará los parámetros π

$$\begin{aligned} \pi_1 &= F \cdot D^\alpha \cdot V^\beta \cdot \rho^\gamma = M^0 L^0 T^0 \\ \pi_2 &= N \cdot D^{\alpha'} \cdot V^{\beta'} \cdot \rho^{\gamma'} = M^0 L^0 T^0 \\ \pi_3 &= g \cdot D^{\alpha''} \cdot V^{\beta''} \cdot \rho^{\gamma''} = M^0 L^0 T^0 \\ \pi_4 &= \mu \cdot D^{\alpha'''} \cdot V^{\beta'''} \cdot \rho^{\gamma'''} = M^0 L^0 T^0 \end{aligned}$$

Sustituyendo las variables por su ecuación de dimensiones:

$$\pi_1 = M L T^{-2} L^\alpha L^\beta T^{-\beta} M^\gamma L^{-3\gamma} = M^0 L^0 T^0$$

Estableciendo y resolviendo las ecuaciones de igualdad de exponentes :

$$\begin{aligned} \text{En M :} & \quad 1 + \gamma = 0 & \rightarrow & \quad \gamma = -1 \\ \text{en L :} & \quad 1 + \alpha + \beta - 3\gamma = 0 & \rightarrow & \quad \alpha = -3 + 2 - 1 = -2 \\ \text{en T :} & \quad -2 - \beta = 0 & \rightarrow & \quad \beta = -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo: $\pi_1 = F \cdot D^{-2} \cdot V^{-2} \cdot \rho^{-1} = F / D^2 V^2 \rho$

De la misma forma se resuelven los restantes parámetros, resultando:

$$\pi_2 = N D / V$$

$$\pi_3 = g D / V^2 \text{ , el inverso elevado a } 1/2 \text{ : N}^\circ \text{ Froude} = F_r = V / (gD)^{1/2}$$

$$\pi_4 = \mu / \rho V D \text{ , tomando el inverso : n}^\circ \text{ Reynolds} = R_e = \rho V D / \mu$$

De la función inicial con las variables físicas, se pasa a una función con parámetros adimensionales:

$$F / D^2 V^2 \rho = \phi (N D / V , F_r , R_e)$$

Problema 4

5.4. La resistencia F al avance y el comportamiento de un cuerpo flotante depende de las siguientes variables: gravedad g , longitud característica L , densidad del fluido ρ , viscosidad dinámica del mismo μ , y de la velocidad V .

- a) Deducir los parámetros π adimensionales que intervienen en el fenómeno y la ley adimensional de dicho fenómeno.
- b) Se quiere hacer un ensayo con un modelo a escala $1/4$, de un prototipo que se prevee que pesará 1000 kg y navegará en agua dulce a 20 °C con una velocidad de 20 km/h. ¿ Cómo podrá realizarse el ensayo ?. ¿ Qué fluido se empleará ?. ¿Cuál debe ser el peso del modelo ?.
- c) Si la resistencia media en el modelo es de 50 kg y la potencia que consume de 2,66 CV; Determinar la resistencia al avance y el rendimiento del prototipo.

Nota : Variables repetidas: ρ, L, V .

Resolución

a) Tal como se indica en el enunciado del problema :

$$F = f(g, L, \rho, \mu, V)$$

n^a de variables = 6 n^o de parámetros = 3

Variables repetidas: ρ, L, V .

	F	G	L	ρ	μ	V
M	1	-	-	1	1	-
L	1	1	1	-3	-1	1
T	-2	-2	-	-	-1	-1

Los parámetros que se obtienen son:

$$\pi_1 = F/(\rho V^2 L^2) ; \quad \pi_2 = gL / V^2 ; \quad \pi_3 = \mu / (VD\rho)$$

$$\pi_2 \equiv n^o \text{ Froude} ; \quad \pi_3 \equiv n^o \text{ Reynolds}$$

Ley adimensional : $F/(\rho V^2 L^2) = f(F_r, Re) \rightarrow F = (\rho V^2 L^2) f(F_r, Re)$

b)

<u>Modelo(C)</u>	<u>Prototipo</u>
$\lambda = 1/4 = L'/L$	
Peso ?	Peso = 1000 kg
Fluido ?	Agua ($v = 9,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$)
V'	$V = 20 \text{ km/h}$
Resistencia = 50 kg	R ?
Potencia = 2,66 CV	P' ?
η	η

Para semejanza absoluta se tendrá que verificar la igualdad de números de Froude y Reynolds como indica la ley adimensional

$$Fr = V'^2 / gD' = V^2 / gD \quad \rightarrow \quad V'/V = (D'/D)^{1/2} = \lambda^{1/2} = 1/2$$

$$Re = V'L'/v' = VL/v \quad \rightarrow \quad v' = v (V'/V) (L'/L) = v \cdot \lambda^{1/2} \cdot \lambda = \lambda^{3/2}$$

$$V' = V/2 = 10 \text{ km/h} = 10 \cdot 1000 / 3600 = 2,78 \text{ m/s}$$

$v' = 9,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \cdot (1/4)^{3/2} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \rightarrow$ mirando en ábaco de viscosidades cinemáticas

en función de la temperatura corresponde a: **Mercurio a 25 °C.**

como: $F/(\rho V^2 L^2) = F'/(ρ' V'^2 L'^2) \rightarrow \text{Peso}' = P \cdot (\rho'/\rho) \cdot (V'/V)^2 \cdot (L'/L)^2$

$\text{Peso}' = P \cdot (\rho'/\rho) \cdot \lambda^3$; tomando $S_{\text{hg}} = 13,6$ y $S_{\text{agua}} = 1$

Peso' = $1000 \cdot 13,6 \cdot (1/4)^3 = 212,5 \text{ kg}$

Resistencia = $R' \cdot (\rho/\rho') \cdot (1/\lambda)^3 = 50 \cdot (1/13,6) \cdot 4^3 = 235,3 \text{ kg}$

$\eta = \text{Potencia utilizada} / \text{Potencia consumida}$

Potencia utilizada = resistencia . velocidad de desplazamiento = $R \cdot V$

Potencia consumida = $2,66 \text{ CV} = 2,66 \cdot 75 \text{ kg.m/s}$

$\eta = (50 \cdot 2,78 \text{ kg.m/s}) / (2,66 \cdot 75 \text{ kg.m/s}) = 0,6967 \rightarrow \eta = 69,67 \%$

Problema 5

Considere el flujo de un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad μ a través de una larga sección horizontal de tubo redondo de diámetro D . El perfil de velocidad se bosqueja en la figura 7-34; V es la velocidad promedio a través de la sección transversal del tubo, que por conservación de masa permanece constante a lo largo del tubo. Para un tubo muy largo, el flujo finalmente se volverá **totalmente desarrollado**, lo que significa que el perfil de velocidad también permanece uniforme a lo largo del tubo. Debido a las fuerzas de fricción entre el fluido y la pared del tubo, existe un esfuerzo de corte τ_w sobre la superficie interior del tubo, como se ilustra. El esfuerzo de corte también es constante a lo largo del tubo en la región totalmente desarrollada. Se supone cierta rugosidad promedio constante ϵ a lo largo de la superficie interior del tubo. De hecho, el único parámetro que *no* es constante a lo largo del tubo es la presión, que debe disminuir (linealmente) a lo largo del tubo con la finalidad de “empujar” el fluido a través del tubo para superar la fricción. Desarrolle una relación adimensional entre esfuerzo de corte τ_w y los otros parámetros en el problema.

SOLUCIÓN Se debe generar una relación adimensional entre el esfuerzo de corte y otros parámetros.

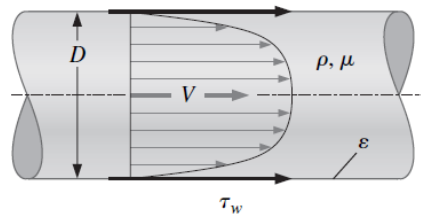


FIGURA 7-34

Fricción en la superficie interior de un tubo. El esfuerzo de corte τ_w sobre las paredes del tubo es una función de la velocidad promedio del fluido V , la rugosidad promedio de la superficie interior del tubo ϵ , la densidad del fluido ρ , la viscosidad del fluido μ y el diámetro interior del tubo D .

Hipótesis 1 El flujo está totalmente desarrollado. 2 El fluido es incompresible. 3 En el problema no son significativos otros parámetros.

Análisis Se emplea paso a paso el método de repetición de variables para obtener los parámetros adimensionales.

Paso 1 En este problema existen seis variables y constantes; $n = 6$. Con ellos se elabora una lista en forma funcional, y la variable dependiente se menciona como una función de las variables y constantes independientes:

$$\text{Lista de parámetros relevantes: } \tau_w = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D) \quad n = 6$$

Paso 2 Se hace una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro. Note que el esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área y, por lo tanto, tiene las mismas dimensiones que presión:

$$\begin{array}{cccccc} \tau_w & V & \varepsilon & \rho & \mu & D \\ \{m^1L^{-1}t^{-2}\} & \{L^1t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1L^{-3}\} & \{m^1L^{-1}t^{-1}\} & \{L^1\} \end{array}$$

Paso 3 Como primera suposición, j se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

$$\text{Reducción: } j = 3$$

Si este valor de j es correcto, el número esperado de Π 's es $k = n - j = 6 - 3 = 3$.

Paso 4 Se eligen tres parámetros repetitivos pues $j = 3$. Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3, no se puede elegir la variable dependiente τ_w . No se pueden elegir simultáneamente ε y D pues sus dimensiones son idénticas y no sería deseable que ni μ ni ε aparecieran en todas las Π . La mejor elección de parámetros repetitivos es por tanto V , D y ρ .

$$\text{Parámetros repetitivos: } V, D \text{ y } \rho$$

Paso 5 Se genera la Π dependiente:

$$\Pi_1 = \tau_w V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \rightarrow \{\Pi_1\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})(L^1t^{-1})^{a_1}(L^1)^{b_1}(m^1L^{-3})^{c_1}\}$$

a partir de lo cual $a_1 = -2$, $b_1 = 0$, y $c_1 = -1$, y por lo tanto la Π dependiente es:

$$\Pi_1 = \frac{\tau_w}{\rho V^2}$$

A partir de la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a esta Π_1 es el **factor de fricción de Darcy**, que se define con un factor de 8 en el numerador (Fig. 7-35). Por lo tanto, esta Π se puede manipular del modo siguiente de acuerdo con los lineamientos mencionados en la Tabla 7-4:

$$\Pi_1 \text{ modificada: } \Pi_{1, \text{modificada}} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \text{factor de fricción de Darcy} = f$$

De manera similar se generan las dos Π independientes, cuyos detalles se dejan al lector:

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \rightarrow \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{número de Reynolds} = Re$$

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \rightarrow \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{rugosidad relativa}$$

Paso 6 La relación funcional final se escribe como:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (1)$$

Discusión El resultado se aplica a flujo en tubo totalmente desarrollado tanto laminar como turbulento; sin embargo, se evidencia que la segunda Π independiente (rugosidad relativa ε/D) no es tan importante en flujo laminar como en flujo turbulento. Este problema presenta una interesante conexión entre similitud geométrica y análisis dimensional. A saber, es necesario empatar ε/D pues es una Π independiente en el problema. Desde una perspectiva diferente, si se considera la rugosidad como una propiedad geométrica, es necesario empatar ε/D para garantizar *similitud geométrica* entre dos tubos.

Problema 6

Un modelo de tractocamión (18 ruedas) a un dieciseisavo de escala se prueba en un túnel de viento, como se ilustra en la figura 7-38. El modelo mide 0.991 m de largo, 0.257 m de alto y 0.159 m de ancho. Durante las pruebas, la veloci-

dad de la banda móvil del suelo se ajusta de modo que siempre empata con la velocidad del aire que corre a través de la sección de prueba. La fuerza aerodinámica de arrastre F_D se mide como función de la velocidad del túnel de viento; los resultados experimentales se presentan en la Tabla 7-7. Grafique el coeficiente de arrastre C_D como función del número de Reynolds Re , donde el área que se usa para el cálculo de C_D es el área frontal del modelo (es el área que ve cuando mira al modelo desde corriente arriba) y la longitud característica que se usa para calcular Re es el ancho del tractocamión W . ¿Se ha logrado similitud dinámica? ¿Se ha logrado independencia del número de Reynolds en la prueba del túnel de viento? Estime la fuerza de arrastre sobre el tractocamión prototipo que viaja sobre la autopista a 26.8 m/s. Suponga que tanto el aire del túnel de viento como el aire que fluye sobre el prototipo están a 25°C y a presión atmosférica estándar.

TABLA 7-7

Datos del túnel de viento: fuerza de arrastre sobre un modelo de tractocamión como función de la velocidad del túnel de viento

V , m/s	F_D , N
20	12.4
25	19.0
30	22.1
35	29.0
40	34.3
45	39.9
50	47.2
55	55.5
60	66.0
65	77.6
70	89.9

SOLUCIÓN Se debe calcular y graficar C_D como función de Re para un conjunto dado de mediciones del túnel de viento y determinar si se han logrado similitud dinámica y/o independencia del número de Reynolds. Finalmente, se debe estimar la fuerza aerodinámica de arrastre que actúa sobre el tractocamión prototipo.

Hipótesis 1 El tractocamión modelo es geoméricamente similar al tractocamión prototipo. 2 La fuerza de arrastre sobre los soportes que sostienen al tractocamión modelo es despreciable.

Propiedades Para aire a presión atmosférica y a $T = 25^\circ\text{C}$, $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$.

Análisis Se calculan C_D y Re para el último renglón de datos en la Tabla 7-7 (a la mayor velocidad del túnel de viento).

$$C_{D,m} = \frac{F_{D,m}}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 A_m} = \frac{89.9 \text{ N}}{\frac{1}{2}(1.184 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})^2(0.159 \text{ m})(0.257 \text{ m})} \left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right)$$

$$= 0.758$$

y

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m W_m}{\mu_m} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s})(0.159 \text{ m})}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 7.13 \times 10^5 \quad (1)$$

Estos cálculos se repiten para todos los puntos de datos en la Tabla 7-7 y C_D se grafica contra Re en la figura 7-41.

¿Se ha logrado similitud dinámica? Bueno, se tiene similitud *geométrica* entre modelo y prototipo, pero el número de Reynolds del tractocamión prototipo es:

$$Re_p = \frac{\rho_p V_p W_p}{\mu_p} = \frac{(1.184 \text{ kg/m}^3)(26.8 \text{ m/s}) [16(0.159 \text{ m})]}{1.849 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 4.37 \times 10^6 \quad (2)$$

donde el ancho del prototipo se especifica como 16 veces el del modelo. La comparación de las ecuaciones 1 y 2 revela que el número de Reynolds es más de seis veces mayor que el del modelo. Dado que no se pueden empatar las P independientes en el problema, **no se ha logrado similitud dinámica**.

¿Se ha logrado independencia del número de Reynolds? A partir de la figura 7-41 se ve que, **de hecho, se ha logrado independencia del número de Reynolds**: a Re mayor que aproximadamente 5×10^5 , C_D se estabiliza a un valor de aproximadamente 0.76 (a dos cifras significativas).

Dado que se logró independencia del número de Reynolds, se puede extrapolar el resultado al prototipo de tamaño real, ya que se supone que C_D permanece constante conforme Re aumenta al del prototipo de tamaño real.

Fuerza de arrastre predicha sobre el prototipo:

$$F_{D,p} = \frac{1}{2}\rho_p V_p^2 A_p C_{D,p}$$

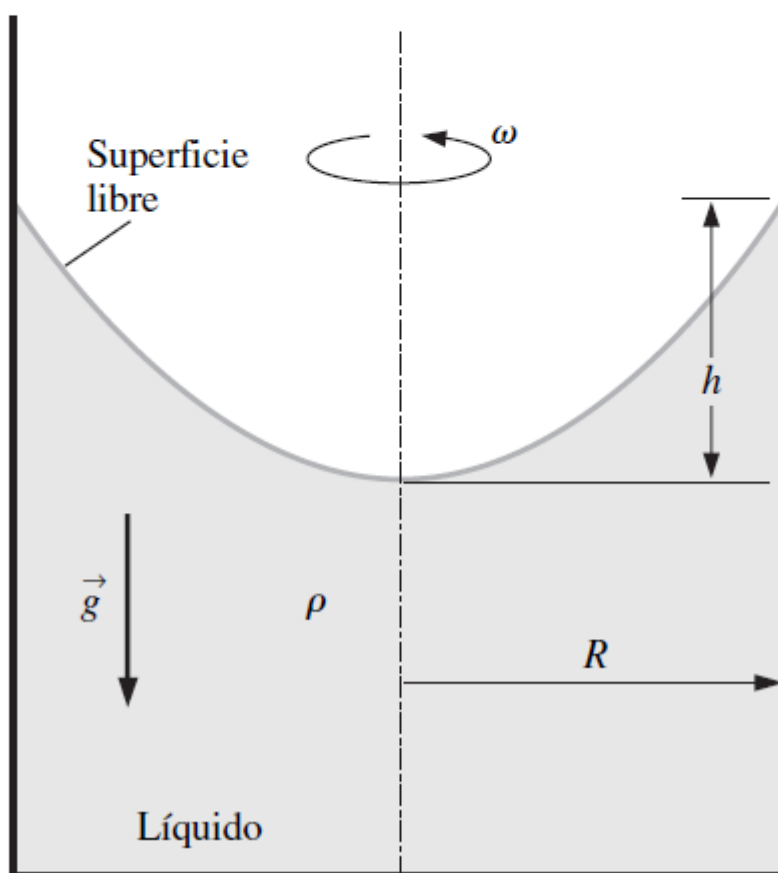
$$= \frac{1}{2}(1.184 \text{ kg/m}^3)(26.8 \text{ m/s})^2 [16^2(0.159 \text{ m})(0.257 \text{ m})](0.76) \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right)$$

$$= \mathbf{3\ 400 \text{ N}}$$

Discusión El resultado final se proporciona a dos cifras significativas. Más de eso no se puede justificar. Como siempre, se debe tener cuidado cuando se realice una extrapolación porque no se tiene garantía de que los resultados extrapolados son correctos.

Problema 7

7-48 Considere un líquido en un contenedor cilíndrico en el que tanto el contenedor como el líquido rotan como un cuerpo rígido (rotación de cuerpo sólido). La diferencia de elevación h entre el centro de la superficie del líquido y el borde de la superficie del líquido es función de la velocidad angular ω , la densidad del fluido ρ , la aceleración gravitacional g y el radio R (Fig. P7-48). Use el método de repetición de variables para encontrar una relación adimensional entre los parámetros. Muestre todo el procedimiento. *Respuesta:* $h/R = f(Fr)$



Solution We are to use dimensional analysis to find the functional relationship between the given parameters.

Assumptions 1 The given parameters are the only relevant ones in the problem.

Analysis The step-by-step method of repeating variables is employed to obtain the nondimensional parameters (the Π s).

Step 1 There are four parameters in this problem; $n = 4$,

List of relevant parameters:
$$\dot{Q} = f(\dot{m}, c_p, (T_{\text{out}} - T_{\text{in}})) \quad n = 4 \quad (1)$$

Step 2 The primary dimensions of each parameter are listed,

$$\begin{array}{cccc} \dot{Q} & \dot{m} & c_p & T_{\text{out}} - T_{\text{in}} \\ \{m^1 L^2 t^{-3}\} & \{m^1 t^{-1}\} & \{L^2 t^{-2} T^{-1}\} & \{T^1\} \end{array}$$

Step 3 As a first guess, j is set equal to 4, the number of primary dimensions represented in the problem (m, T, L, and t).

Reduction:
$$j = 4$$

If this value of j is correct, the expected number of Π s is

Number of expected Π s:
$$k = n - j = 4 - 4 = 0$$

Obviously this is not correct, so we re-examine our initial assumptions. We are convinced that our list of parameters is sufficient, so we reduce j by one and continue,

Reduction:
$$j = 4 - 1 = 3$$

If this revised value of j is correct, the expected number of Π s is

Number of expected Π s:
$$k = n - j = 4 - 3 = 1$$

We now expect only one Π .

Step 4 We need to choose three repeating parameters since $j = 3$. We only have one choice in this problem, since there are only three independent parameters on the right-hand side of Eq. 1,

Repeating parameters:
$$\dot{m}, c_p, \text{ and } (T_{\text{out}} - T_{\text{in}})$$

Step 5 The dependent Π is generated:

$$\Pi_1 = \dot{Q} m^{a_1} c_p^{b_1} (T_{\text{out}} - T_{\text{in}})^{c_1} \quad \{\Pi_1\} = \left\{ (m^1 L^2 t^{-3}) (m^1 t^{-1})^{a_1} (L^2 t^{-2} T^{-1})^{b_1} (T^1)^{c_1} \right\}$$

mass:
$$\{m^0\} = \{m^{1+a_1}\} \quad 0 = 1 + a_1 \quad a_1 = -1$$

length:
$$\{L^0\} = \{L^2 L^{2b_1}\} \quad 0 = 2 + 2b_1 \quad b_1 = -1$$

temperature:
$$\{T^0\} = \{T^{-b_1+c_1}\} \quad c_1 = b_1 \quad c_1 = -1$$

time:
$$\{t^0\} = \{t^{-3-a_1-2b_1}\} \quad 0 = -3 - a_1 - 2b_1 \quad 3 = 1 + 2$$

Fortunately the result for the time exponents is consistent with that of the other dimensions. The dependent Π is thus

Π_1 :
$$\Pi_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p (T_{\text{out}} - T_{\text{in}})}$$

Step 6 Since there is only one Π , it is a function of nothing. This is only possible if we set the Π equal to a constant. We write the final functional relationship as

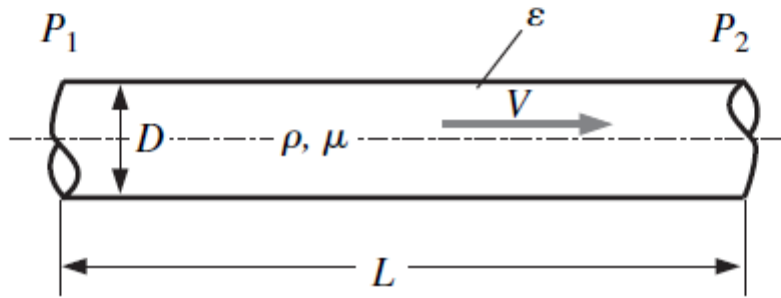
Relationship between Π s:
$$\boxed{\Pi_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p (T_{\text{out}} - T_{\text{in}})} = \text{constant}} \quad (2)$$

Discussion When there is only one Π , we know the functional relationship to within some (unknown) constant. In this particular case, comparing to Eq. 1 of Problem 7-24, we see that the constant is unity, $\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_{\text{out}} - T_{\text{in}})$. There is no way to obtain the constant in Eq. 2 from dimensional analysis; however, one experiment would be sufficient to determine the constant.

Problema 8

7-66 Un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad μ fluye a una velocidad promedio V a través de un largo tramo horizontal de tubería redonda de longitud L , diámetro interior D y rugosidad de superficie interior ε (Fig. P7-66). La tubería es lo suficientemente larga como para que el flujo esté totalmente desarrollado, lo que significa que el perfil de velocidad no cambia a lo largo de la tubería. La presión disminuye (linealmente) a lo largo de la tubería con la finalidad de “empujar” el fluido a través de la tubería para superar la fricción. Con el método de repetición de variables, desarrolle una relación adimensional entre caída de presión $\Delta P = P_1 - P_2$ y los otros parámetros en el problema. Asegúrese de modificar sus grupos Π según sea necesario para lograr parámetros adimensionales establecidos y nómbrelos. (Sugerencia: por consistencia, elija D en lugar de L o ε como uno de sus parámetros repetitivos.)

Respuesta: $Eu = f(Re, \varepsilon/D, L/D)$



Solution We are to generate a nondimensional relationship between the given parameters.

Assumptions 1 The flow is fully developed. 2 The fluid is incompressible. 3 No other parameters are significant in the problem.

Analysis The step-by-step method of repeating variables is employed to obtain the nondimensional parameters.

Step 1 All the relevant parameters in the problem are listed in functional form:

List of relevant parameters:
$$\Delta P = f(V, \varepsilon, \rho, \mu, D, L) \quad n = 7$$

Step 2 The primary dimensions of each parameter are listed:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta P & V & \varepsilon & \rho & \mu & D & L \\ \{m^1 L^{-1} t^{-2}\} & \{L^1 t^{-1}\} & \{L^1\} & \{m^1 L^{-3}\} & \{m^1 L^{-1} t^{-1}\} & \{L^1\} & \{L^1\} \end{array}$$

Step 3 As a first guess, j is set equal to 3, the number of primary dimensions represented in the problem (m, L, and t).

Reduction:
$$j = 3$$

If this value of j is correct, the expected number of Π s is

Number of expected Π s:
$$k = n - j = 7 - 3 = 4$$

Step 4 We need to choose three repeating parameters since $j = 3$. Following the guidelines listed in Table 7-3, we cannot pick the dependent variable, ΔP . We cannot choose any two of parameters ε , L , and D since their dimensions are identical. It is not desirable to have μ or ε appear in all the Π s. The best choice of repeating parameters is thus V , D , and ρ .

Repeating parameters:
$$V, D, \text{ and } \rho$$

Step 5 The dependent Π is generated:

$$\Pi_1 = \Delta P V^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \quad \{\Pi_1\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-2}) (L^1 t^{-1})^{a_1} (L^1)^{b_1} (m^1 L^{-3})^{c_1} \right\}$$

mass:
$$\{m^0\} = \{m^1 m^{c_1}\} \quad 0 = 1 + c_1 \quad c_1 = -1$$

time:
$$\{t^0\} = \{t^{-2} t^{-a_1}\} \quad 0 = -2 - a_1 \quad a_1 = -2$$

length:
$$\{L^0\} = \{L^{-1} L^{a_1} L^{b_1} L^{-3c_1}\} \quad \begin{array}{l} 0 = -1 + a_1 + b_1 - 3c_1 \\ 0 = -1 - 2 + b_1 + 3 \end{array} \quad b_1 = 0$$

The dependent Π is thus

Π_1 :
$$\Pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$$

From Table 7-5, the established nondimensional parameter most similar to our Π_1 is the **Euler number** Eu. No manipulation is required.

We form the second Π with μ . By now we know that we will generate a **Reynolds number**,

$$\Pi_2 = \mu V^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \quad \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = \text{Reynolds number} = \text{Re}$$

The final two Π groups are formed with ε and then with L . The algebra is trivial for these cases since their dimension (length) is identical to that of one of the repeating variables (D). The results are

$$\Pi_3 = \varepsilon V^{a_3} D^{b_3} \rho^{c_3} \quad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \text{Roughness ratio}$$

$$\Pi_4 = L V^{a_4} D^{b_4} \rho^{c_4} \quad \Pi_4 = \frac{L}{D} = \text{Length-to-diameter ratio or aspect ratio}$$

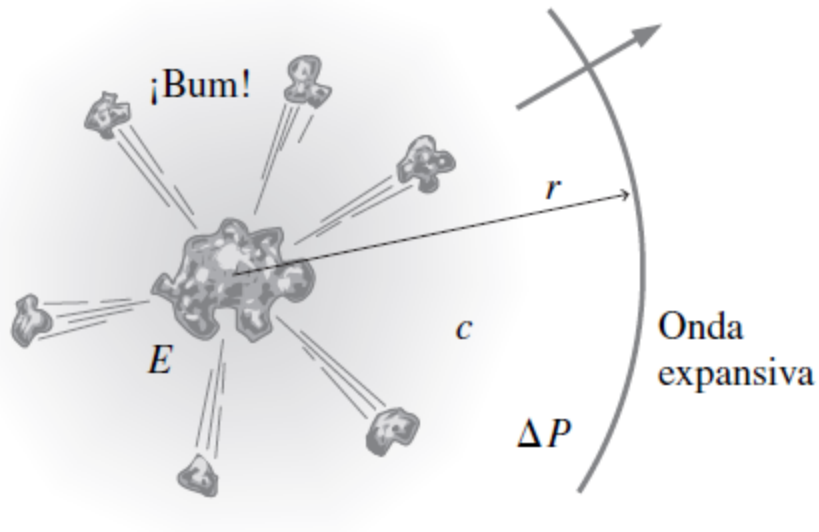
Step 6 We write the final functional relationship as

Relationship between Π s:
$$\boxed{\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{L}{D}\right)} \quad (1)$$

Discussion The result applies to both laminar and turbulent fully developed pipe flow; it turns out, however, that the second independent Π (roughness ratio) is not nearly as important in laminar pipe flow as in turbulent pipe flow. Since ΔP drops linearly with distance down the pipe, we know that ΔP is linearly proportional to L/D . It is not possible to determine the functional relationships between the other Π s by dimensional reasoning alone.

Problema 9

7-84 En la atmósfera ocurre una explosión cuando un misil antiaéreo alcanza su objetivo (Fig. P7-84). Una **onda de choque** (también llamada **onda expansiva**) se dispersa radialmente desde la explosión. La diferencia de presión a través de la onda expansiva ΔP y su distancia radial r desde el centro son funciones del tiempo t , la velocidad de sonido c y la cantidad de energía E liberada por la explosión. *a)* Genere relaciones adimensionales entre ΔP y los otros parámetros y entre r y los otros parámetros. *b)* Para una explosión dada, si el tiempo t desde la explosión se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor disminuirá ΔP ?



Solution We are to generate dimensionless relationships among given parameters, and then we are to discuss how ΔP decreases if the time is doubled.

Assumptions 1 The given parameters are the only relevant ones in the problem.

Analysis (a) We perform dimensional analyses using the method of repeating variables. First we analyze ΔP :

Step 1 There are four parameters in this problem; $n = 4$,

List of relevant parameters:
$$\Delta P = f(t, c, E) \quad n = 4 \quad (1)$$

Step 2 The primary dimensions of each parameter are listed,

$$\begin{array}{cccc} \Delta P & t & c & E \\ \{m^1 L^{-1} t^{-2}\} & \{t^1\} & \{L^1 t^{-1}\} & \{m^1 L^2 t^{-2}\} \end{array}$$

Step 3 As a first guess, j is set equal to 3, the number of primary dimensions represented in the problem (m, L, and t).

Reduction:
$$j = 3$$

If this value of j is correct, the expected number of Π s is

Number of expected Π s:
$$k = n - j = 4 - 3 = 1$$

Step 4 We need to choose three repeating parameters since $j = 3$. We pick all the independent parameters – time t , speed of sound c , and energy E .

Repeating parameters:
$$t, c, \text{ and } E$$

Step 5 The dependent Π is generated:

$$\Pi_1 = \Delta P \times t^{a_1} c^{b_1} E^{c_1} \quad \{\Pi_1\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-2}) (t^1)^{a_1} (L^1 t^{-1})^{b_1} (m^1 L^2 t^{-2})^{c_1} \right\}$$

mass:
$$\{m^0\} = \{m^1 m^{c_1}\} \quad 0 = 1 + c_1 \quad c_1 = -1$$

length:
$$\{L^0\} = \{L^{-1} L^{b_1} L^{2c_1}\} \quad \begin{array}{l} 0 = -1 + b_1 + 2c_1 \\ b_1 = 1 - 2c_1 \end{array} \quad b_1 = 3$$

time:
$$\{t^0\} = \{t^{-2} t^{a_1} t^{-b_1} t^{-2c_1}\} \quad \begin{array}{l} 0 = -2 + a_1 - b_1 - 2c_1 \\ a_1 = 2 + b_1 + 2c_1 \end{array} \quad a_1 = 3$$

The dependent Π is thus

Π_1 for ΔP :
$$\Pi_1 = \frac{t^3 c^3 \Delta P}{E}$$

This Π is not an established one, so we leave it as is.

Step 6 We write the final functional relationship as

Relationship between Π s:
$$\Delta P = \text{constant} \frac{E}{t^3 c^3} \quad (2)$$

We perform a similar dimensional analysis using the same repeating variables, but this time for radius r . We do not show the algebra since the Π can be found by inspection. We get

Π_1 for r :
$$\Pi_1 = \frac{r}{ct}$$

Since this is the only Π , it must be equal to a constant,

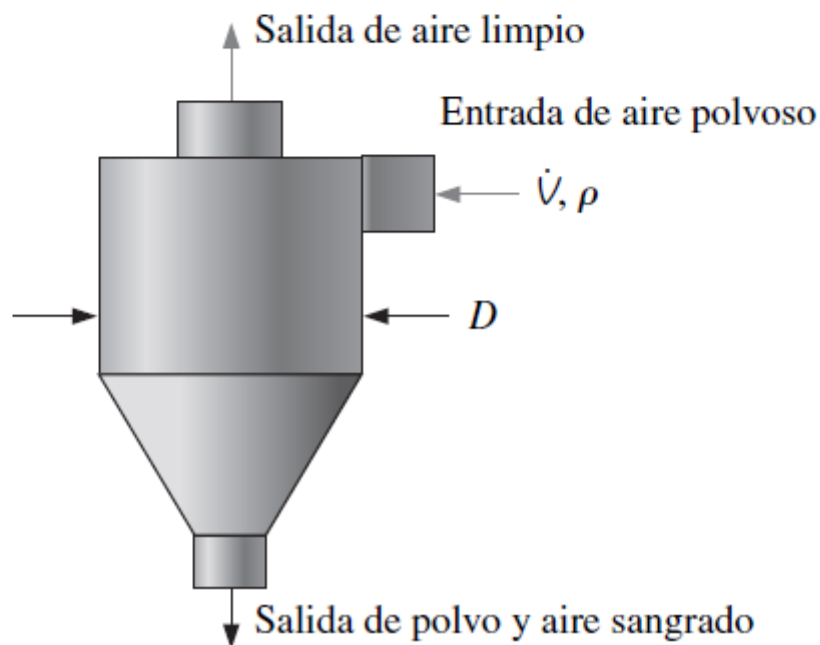
Relationship between Π s:
$$r = \text{constant} \cdot ct \quad (3)$$

(b) From Eq. 2 we see that if t is doubled, ΔP decreases by a factor of $2^3 = 8$.

Discussion The pressure rise across the blast wave decays rapidly with time (and with distance from the explosion). The speed of sound depends on temperature. If the explosion is of sufficient strength, T will increase significantly and c will not remain constant.

Problema 10

7-104 Un dispositivo común, que se usa en varias aplicaciones para limpiar aire lleno de polvo es el **ciclón de flujo inverso** (Fig. P7-104). El aire polvoso (flujo volumétrico \dot{V} y densidad ρ) entra tangencialmente a través de una abertura en el lado del ciclón y da vueltas en el tanque. Las partículas de polvo se arrojan hacia fuera y caen al fondo, mientras que el aire limpio se extrae hacia la parte superior. Los ciclones de flujo inverso que se estudian son todos geoméricamente similares; por lo tanto, el diámetro D representa la única escala de longitud necesaria para especificar por completo la geometría total del ciclón. Los ingenieros se preocupan por la caída de presión dP a través del ciclón. *a)* Genere una relación adimensional entre la caída de presión a través del ciclón y los parámetros dados. Muestre todo el procedimiento. *b)* Si el tamaño del ciclón se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la caída de presión? *c)* Si el flujo volumétrico se duplica, y todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la caída de presión? *Respuestas:* *a)* $D^4 \delta P / \rho V^2 = \text{constante}$; *b)* 1/16; *c)* 4



Solution We are to find the functional relationship between the given parameters, and then answer some questions about scaling.

Assumptions 1 The given parameters are the only relevant ones in the problem.

Analysis

(a) The step-by-step method of repeating variables is employed to obtain the nondimensional parameters (the Π s).

Step 1 There are four parameters in this problem; $n = 4$,

List of relevant parameters:
$$\delta P = f(\rho, \dot{V}, D) \quad n = 4 \quad (1)$$

Step 2 The primary dimensions of each parameter are listed,

$$\begin{array}{cccc} \delta P & \rho & \dot{V} & D \\ \{m^1 L^{-1} t^{-2}\} & \{m^1 L^{-3}\} & \{L^3 t^{-1}\} & \{L^1\} \end{array}$$

Step 3 As a first guess, j is set equal to 3, the number of primary dimensions represented in the problem (m , L , and t).

Reduction:
$$j = 3$$

If this value of j is correct, the expected number of Π s is

Number of expected Π s:
$$k = n - j = 4 - 3 = 1$$

Step 4 We need to choose three repeating parameters since $j = 3$. We only have one choice in this problem, since there are only three independent parameters on the right-hand side of Eq. 1,

Repeating parameters:
$$\rho, \dot{V}, \text{ and } D$$

Step 5 The dependent Π is generated:

$$\Pi_1 = \delta P \rho^{a_1} \dot{V}^{b_1} D^{c_1} \quad \{\Pi_1\} = \left\{ (m^1 L^{-1} t^{-2}) (m^1 L^{-3})^{a_1} (L^3 t^{-1})^{b_1} (L^1)^{c_1} \right\}$$

mass:
$$\{m^0\} = \{m^{1+a_1}\} \quad 0 = 1 + a_1 \quad a_1 = -1$$

time:
$$\{t^0\} = \{t^{-2-b_1}\} \quad 0 = -2 - b_1 \quad b_1 = -2$$

length:
$$\{L^0\} = \{L^{-1-3a_1+3b_1+c_1}\} \quad 0 = -1 - 3a_1 + 3b_1 + c_1 \quad c_1 = 4$$

The dependent Π is thus

Π_1 :
$$\Pi_1 = \frac{D^4 \delta P}{\rho \dot{V}^2}$$

Step 6 Since there is only one Π , it is a function of nothing. This is only possible if we set the Π equal to a constant. We write the final functional relationship as

Relationship between Π s:
$$\boxed{\Pi_1 = \frac{D^4 \delta P}{\rho \dot{V}^2} = \text{constant}} \quad (2)$$

(b) We re-write Eq. 2 as

Equation for δP :
$$\delta P = \text{constant} \frac{\rho \dot{V}^2}{D^4} \quad (3)$$

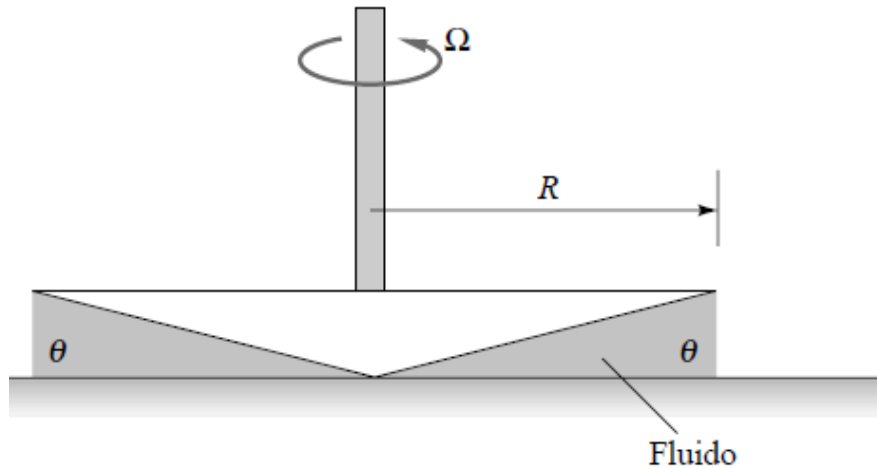
Thus, if we double the size of the cyclone, the pressure drop will decrease by a factor of $2^4 = 16$.

(c) Also from Eq. 3 we see that if we double the volume flow rate, the pressure drop will increase by a factor of $2^2 = 4$.

Discussion The pressure drop would be smallest for the largest cyclone operating at the smallest volume flow rate. (This agrees with our intuition.)

Problema 11

El par M requerido para hacer girar el viscosímetro cono-placa de la Figura P5.35 depende del radio R , la velocidad de rotación Ω , la viscosidad μ del fluido y el ángulo θ del cono. Escriba esta relación en forma adi-



mensional. ¿Cómo se simplifica la relación si se sabe que M es proporcional a θ ?

Solution: Establish the variables and their dimensions:

$$M = \text{fcn}(R , \Omega , \mu , \theta)$$
$$\{ML^2/T^2\} \quad \{L\} \quad \{1/T\} \quad \{M/LT\} \quad \{1\}$$

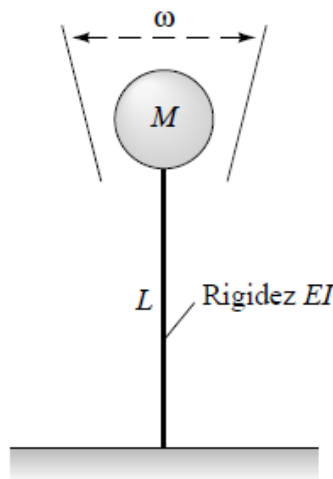
Then $n = 5$ and $j = 3$, hence we expect $n - j = 5 - 3 = 2$ Pi groups, capable of only one reasonable arrangement, as follows:

$$\frac{M}{\mu\Omega R^3} = \text{fcn}(\theta); \quad \text{if } M \propto \theta, \quad \text{then } \frac{M}{\mu\Omega\theta R^3} = \text{constant} \quad \text{Ans.}$$

Problema 12

La frecuencia natural ω de vibración de una masa M situada en el extremo de una barra, como muestra la

Figura P5.64, sólo depende de M y de la rigidez EI y la longitud L de la barra. Un ensayo con una masa de 2 kg situada en el extremo de una barra de acero al carbono 1040 de 12 mm de diámetro y 40 cm de largo proporciona una frecuencia natural de 0,9 Hz. Utilice estos datos para predecir la frecuencia natural de una masa de 1 kg situada en el extremo de una barra de aleación de aluminio 2024 del mismo tamaño.



Solution: For steel, $E \approx 29E6 \text{ psi} \approx 2.03E11 \text{ Pa}$. If $\omega = f(M, EI, L)$, then $n = 4$ and $j = 3$ (MLT), hence we get only 1 pi group, which we can evaluate from the steel data:

$$\frac{\omega(ML^3)^{1/2}}{(EI)^{1/2}} = \text{constant} = \frac{0.9[(2.0)(0.4)^3]^{1/2}}{[(2.03E11)(\pi/4)(0.006)^4]^{1/2}} \approx 0.0224$$

For 2024 aluminum, $E \approx 10.6E6 \text{ psi} \approx 7.4E10 \text{ Pa}$. Then re-evaluate the same pi group:

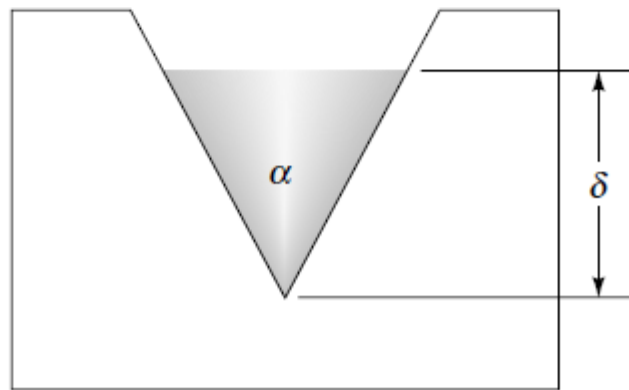
$$\text{New } \frac{\omega(ML^3)^{1/2}}{(EI)^{1/2}} = 0.0224 = \frac{\omega [(1.0)(0.4)^3]^{1/2}}{[(7.4E10)(\pi/4)(0.006)^4]^{1/2}}, \quad \text{or } \omega_{\text{alum}} \approx \mathbf{0.77 \text{ Hz}} \quad \text{Ans.}$$

Problema 13

Un dispositivo muy sencillo para medir el flujo de una corriente o un canal consiste en un vertedero triangular de ángulo α , como muestra la Figura P5.69. El caudal Q depende sólo de α , la aceleración de la gravedad g y la altura δ del nivel del agua sobre el vértice inferior del vertedero aguas arriba del mismo. Del ensayo de un dispositivo de este tipo, con ángulo $\alpha = 55^\circ$, se obtienen los siguientes resultados:

δ , cm	10	20	30	40
Q , m ³ /s	8	47	126	263

- (a) Halle una correlación adimensional para los datos.
(b) Utilice los datos del modelo para predecir el flujo a través de un vertedero prototipo, también con ángulo $\alpha = 55^\circ$, cuando el nivel del agua δ es de 3,2 m.



Solution: (a) The appropriate functional relation is $Q = \text{fcn}(\alpha, g, \delta)$ and its dimensionless form is $Q/(g^{1/2} \delta^{5/2}) = \text{fcn}(\alpha)$. Recalculate the data in this dimensionless form, with α constant:

$$Q/(g^{1/2} \delta^{5/2}) = \mathbf{0.224 \quad 0.233 \quad 0.227 \quad 0.230} \quad \text{respectively} \quad \text{Ans. (a)}$$

Problema 14

43.1 Enunciado

Aplique el teorema de π para determinar las pérdidas de energía en una tubería. Realice nuevamente el problema utilizando el método matricial.

Conceptos generales del teorema de π o Buckingham.

Si se sabe que un proceso físico está gobernado por una relación dimensionalmente homogénea que comprenda a “n” parámetros dimensionales, tales como:

$$X_1 = f(X_2, X_3, X_4, \dots);$$

donde las X son variables dimensionales, existe una relación equivalente que contiene un número menor (n-k) de parámetros adimensionales tales como:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{(n-k)});$$

π : son grupos adimensionales que se constituyen a partir de las X (variables originales)

K: es generalmente el número de dimensionales fundamentales retenido en las X (variables originales)

K nunca puede ser mayor que dicho número de variables originales.

43.2 Resolución

1. Las variables que influyen en el fenómeno de pérdida de energía en un conducto se establecen:

$$Y = g \cdot h = f(L, D, V, \rho, \mu, \epsilon);$$

$Y = g \cdot h$: pérdida de energía mecánica entre dos puntos de un conducto.

Utilizando el sistema [M, L, T], las dimensiones se expresan:

$$\left[\frac{L^2}{T^2} \right] = f\left([L], [L], \left[\frac{L}{T} \right], \left[\frac{M}{L^3} \right], \left[\frac{M}{L \cdot T} \right], [L] \right);$$

2. Determinación del número de parámetros adimensionales que se requieren construir.

El número de dimensiones fundamentales es 3 (K=3), \rightarrow M; L; T.

Si se eligen D, ρ , V, la masa sólo aparecerá en ρ y el tiempo sólo en V, de tal manera que ninguna combinación de D, ρ , V, puede ser adimensional, con lo cual K=3;

El número de parámetros adimensionales que se requiere construir es:

$$n - k = 7 - 3 = 4$$

3. Si se eligen como variables fundamentales D, ρ , V, los grupos adimensionales serán:

$$1.^{\text{f}} \text{ grupo adimensional: } \pi_1 = y \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[\frac{L^2}{T^2} \right] \left[\frac{M}{L^3} \right]^a \left[\frac{L}{T} \right]^b [L]^c$$

$$\text{como: } \pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow 2 - 3a + b + c = 0 \\ T \rightarrow -2 - b = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

Se obtiene:
$$\pi_1 = \frac{L^2}{T^2} \left[\frac{L}{T} \right]^{-2} = \frac{Y}{V^2}$$

2.º grupo adimensional: $\pi_2 = L \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[\frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[\frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow -b = 0 \\ T \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:
$$\pi_2 = \frac{L}{D}$$

3.º grupo adimensional: $\pi_3 = \mu \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[\frac{M}{L \cdot T} \right] \cdot \left[\frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[\frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow 1 + a = 0 \\ L \rightarrow -1 - b = 0 \\ T \rightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:
$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$$

4.º grupo adimensional: $\pi_4 = \varepsilon \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[\frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[\frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow -b = 0 \\ T \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:
$$\pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

con lo cual se obtiene: $\pi_1 = \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \pi_4$

$$\frac{Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}; \frac{\varepsilon}{D}\right) = f\left(\frac{L}{D}; \frac{1}{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

4. La ecuación buscada se puede obtener, como ejemplo:

- multiplicando por una constante cualquiera de los grupos adimensionales
- elevando a cualquier potencia cualquiera de los grupos.

con lo cual la relación anterior se puede dar:

$$\frac{2Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \text{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right).$$

dado que desde el punto de vista adimensional: $\frac{1}{\text{Re}} = \frac{L}{D} \cdot \frac{V}{\nu}$, y también $\frac{Y}{V^2} \equiv \frac{2 \cdot Y}{V^2}$

El número 2 se obtiene de establecer una contrastación experimental.

puesto que la pérdida de energía es directamente proporcional a la longitud del conducto, se establece:

$$Y = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot f\left(\text{Re} \cdot \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Siendo ésta la ecuación que indica la pérdida de energía a lo largo de un conducto cerrado. El término $f\left(\text{Re} \cdot \frac{\varepsilon}{D}\right)$ ha de ser determinado mediante el diagrama de Moody.

Resolución del problema utilizando el sistema matricial

Las variables que intervienen en el fenómeno son las mismas que en el caso anterior:

$$Y = f(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$$

Sistema dimensional [M, L, T]

Las unidades correspondientes a cada parámetro eran:

$$Y = \left[\frac{L^2}{T^2}\right]; \quad D = [L]; \quad \rho = \left[\frac{M}{L^3}\right]; \quad \varepsilon = [L];$$

$$L = [L]; \quad V = \left[\frac{L}{T}\right]; \quad \mu = \left[\frac{M}{T \cdot L}\right];$$

Se eligen como variables fundamentales D, ρ, V, obteniéndose la tabla siguiente:

		D	ρ	V	Y	e	L	m
(a)	M	0	1	0	0	0	0	1
(b)	L	1	-3	1	2	1	1	-1
(c)	T	0	0	-1	-2	0	0	-1
(3a+b+c)	D	1	0	0	0	1	1	1
(a)	ρ	0	1	0	0	0	0	1
(-c)	V	0	0	1	2	0	0	1

$\pi_1 = \frac{Y}{V^2} \quad \pi_2 = \frac{L}{D} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \quad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$

Problema 15

Determine los grupos adimensionales que caracterizan la caída de presión de un fluido compresible que fluye en el interior de un conducto.

44.2 Resolución

1. Las variables que influyen en este fenómeno son:

$$\Delta p = \text{diferencia de presión entre dos puntos del conducto} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$l = \text{longitud del conducto} \left[\text{m} \right]$$

$$D = \text{diámetro del conducto} \left[\text{m} \right]$$

$$\varepsilon = \text{rugosidad del tubo} \left[\text{m} \right]$$

$$\rho = \text{densidad del fluido} \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$\mu = \text{viscosidad absoluta del fluido} \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$$

$$g = \text{aceleración de la gravedad} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$v = \text{velocidad del fluido} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\beta = \text{módulo de elasticidad del fluido} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

Eligiendo como magnitudes fundamentales MLT y como variables fundamentales D, V, ρ , aparecerán $9 - 3 = 6$ grupos adimensionales. Estos grupos son:

		D	ρ	v	Δp	l	ε	μ	g	β
a	M	0	1	0	1	0	0	1	0	1
b	L	1	-3	1	-1	1	1	-1	1	-1
c	T	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-2
3a+b+c	D	1	0	0	0	1	1	1	-1	0
a	ρ	0	1	0	1	0	0	1	0	1
(-c)	v	0	0	1	2	0	0	1	2	2

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \frac{l}{D} \quad \frac{\varepsilon}{D} \quad \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \quad \frac{g D}{V^2} \quad \frac{\beta}{\rho V^2}$$

El nombre de estos grupos adimensionales es:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \text{número de Euler}$$

$$\frac{l}{D} \quad \text{longitud relativa}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} \quad \text{rugosidad relativa}$$

$$\frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \quad \text{inversa del número de Reynolds}$$

$$\frac{g D}{V^2} \quad \text{inversa del número de Froude}$$

La caída de presión entre dos puntos de un conducto vendrá dada por:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f \left(\frac{\mu}{D \rho V}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}, \frac{\beta}{\rho V^2}, \frac{g D}{V^2} \right)$$

Problema 16

Determine los grupos adimensionales que caracterizan el comportamiento de una turbo máquina que trabaja con un fluido compresible.

45.2 Resolución

1. Las variables características del fenómeno son:

Variables del fluido:

A la entrada de la máquina: P_{01} = presión de estancamiento $\left[\frac{N}{m^2} \right]$
 T_{01} = temperatura de estancamiento [K]

A la salida de la máquina: P_{02} = presión de estancamiento $\left[\frac{N}{m^2} \right]$
 T_{02} = temperatura de estancamiento [K]

μ = viscosidad absoluta del fluido $\left[\frac{Kg}{m s} \right]$

R = constante del gas $\left[\frac{J}{Kg K} \right]$

$K = \frac{C_p}{C_v}$ relación de calores específicos

Variables de la máquina:

D = diámetro característico [m]

Ω = velocidad angular $\left[\frac{rad}{s} \right]$

\dot{m} = caudal másico circulante $\left[\frac{Kg}{s} \right]$

η = rendimiento del compresor

Como magnitudes fundamentales, se elegirán M L T θ .

Se eligen cuatro variables fundamentales que caracterizan las magnitudes fundamentales elegidas. Dichas variables son: \dot{m} , D , ω , T_{01} .

Existirán siete grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno. Estos son:

		\dot{m}	D	ω	T_{01}	P_{01}	μ	K	R	P_{02}	ΔT_0	η
a	M	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	L	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
c	T	-1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	-2	0	0
d	θ	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0
a	\dot{m}	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	D	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
(-1)(c+a)	ω	0	0	1	0	1	0	0	2	1	0	0
d	T_{01}	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0

$$\pi_1 = \frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu D}{\dot{m}} = \frac{\mu D}{Q \rho} = \frac{\nu D}{s \rho} = \frac{\nu 4}{\pi D V} \equiv \frac{1}{Re} \quad \text{inversa del número de Reynolds}$$

$$\pi_3 = K \quad \text{índice de politropía.}$$

$$\pi_4 = \frac{R T_{01}}{D^2 \omega^2}$$

$$\pi_5 = \frac{P_{02} D}{\dot{m} \omega}$$

$$\pi_6 = \frac{\Delta T}{T_{01}} \quad \text{relación de temperaturas}$$

$$\pi_6 = \eta \quad \text{rendimiento de la máquina}$$

Una combinación de números adimensionales es asimismo un número adimensional, con lo cual se tiene:

$$\frac{\Pi_1}{\sqrt{\Pi_4}} = \frac{\frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}}{\sqrt{\frac{R T_{01}}{D^2 \omega^2}}} = \frac{P_{01} D^2}{\dot{m} \sqrt{T_{01} R}}; \quad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\dot{m} \sqrt{T_{01} R}}{P_{01} D^2}; \quad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\sqrt{T_{01} R}}{\frac{P_{01} D^2}{\dot{m}}}$$

Este nuevo número adimensional es función del número de Mach a la entrada de la máquina.

Por otro lado:

$$\frac{\Pi_5}{\Pi_1} = \frac{\frac{P_{02} D}{\dot{m} \omega}}{\frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}} = \frac{P_{02}}{P_{01}}; \quad \text{relación de presiones, salida-entrada de la máquina.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi_4}} = \sqrt{\frac{D^2 \omega^2}{R T_{01}}} = \frac{\omega D}{\sqrt{R T_{01}}}; \quad \text{este número es proporcional a la relación entre la velocidad del álabe y la velocidad del sonido. Vendría a ser el número de Mach del álabe.}$$

Del colectivo de números adimensionales hallados, se eligen tres como básicos, los restantes son función de los elegidos.

Por otro lado, dichos grupos básicos han de definir el comportamiento del fluido. Por tanto incluirán P_{02} ; η ; ΔT_0 . Así, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}; \eta; \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left[\frac{\omega D}{\sqrt{R T_{01}}}; \frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{P_{01} D^2}; \frac{\dot{m}}{\mu D}; K \right]$$

Estos números adimensionales relacionan características de ventiladores que trabajen con: presiones diferentes, temperaturas diferentes, medidas diferentes, gases diferentes, etc.

Problema 17

Halle los grupos adimensionales que caracterizan el flujo de un fluido incompresible a través de un vertedero triangular. Determine la altura h que tendría el líquido diferente al original y para un modelo a escala. Determine asimismo la relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido entre modelo y prototipo.

46.2 Resolución

1. Las variables que intervienen en el fenómeno son:

Variables geométricas: α = ángulo del vertedero

h = altura del nivel del líquido respecto al vértice del vertedero [m]

Z = altura desde la base al vértice del vertedero [m]

Variables cinemáticas: Q = caudal volumétrico que atraviesa el vertedero. $\left[\frac{m^3}{s} \right]$

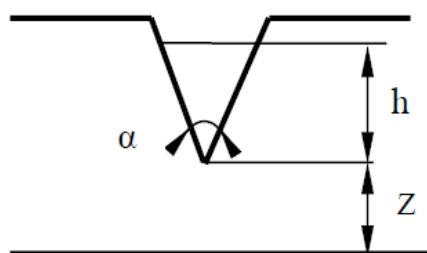
Variables dinámicas: ρ = densidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m^3} \right]$

μ = viscosidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m \cdot s} \right]$

g = aceleración de la gravedad $\left[\frac{m}{s^2} \right]$

P = presión $\left[\frac{Kg}{m^3} \right]$

σ = tensión superficial $\left[\frac{Kg}{s^2} \right]$



Las magnitudes fundamentales elegidas son M, L, T.

Se eligen las variables fundamentales como: h, Q, ρ , con lo cual han de aparecer cinco grupos adimensionales, estos son:

		h	Q	ρ	α	Z	μ	g	P	σ
a	M	0	0	1	0	0	1	0	1	1
b	L	1	3	-3	0	1	-1	1	-1	0
c	T	0	-1	0	0	0	-1	-2	-2	-2
$b+3c+3a$	h	1	0	0	0	1	-1	-5	-4	-3
$-c$	Q	0	1	0	0	0	1	2	2	2
a	ρ	0	0	1	0	0	1	0	1	1

$$\alpha \quad \frac{z}{h} \quad \frac{\mu h}{Q \rho} \quad \frac{g h^5}{Q^2} \quad \frac{p h^4}{Q^2 \rho} \quad \frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho}$$

Los números adimensionales obtenidos son:

α ángulo del vertedero

$\frac{Z}{h}$ longitud relativa

$\frac{\mu h}{Q \rho} = \frac{1}{Re}$ inversa del número de Reynolds

$\frac{g h^5}{Q^2} = \frac{1}{Fr^2}$ inversa del número de Fraude al cuadrado

$\frac{p h^4}{Q^2 \rho}$ número de Euler.

(Puesto que se trata de un flujo con superficie libre, el número de Euler se puede desestimar.)

$\frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho}$ inversa del número de Weber

(Este número sería relevante si la lámina de fluido fuese delgada.)

2. Suponiendo que la lámina de fluido fuese suficientemente gruesa, los números adimensionales relevantes serían:

$$\frac{\mu h}{Q \rho} = \frac{\mu_1 h_1}{Q_1 \rho_1}; \quad \frac{v h}{Q} = \frac{v_1 h_1}{Q_1}; \quad \frac{v}{v_1} = \frac{Q h_1}{Q_1 h}$$

$$\frac{g h^5}{Q^2} = \frac{g h_1^5}{Q_1^2}; \quad \frac{Q^2}{Q_1^2} = \frac{h^5}{h_1^5};$$

de donde:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{h_1}{h} \frac{h^{\frac{5}{2}}}{h_1^{\frac{5}{2}}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{h_1^{\frac{3}{2}}};$$

siendo ésta la relación entre las viscosidades cinemáticas y las alturas de la lámina de fluido.

3. La relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido para dos vertederos a escala es:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{h_1}{h} \frac{Q}{Q_1}; \quad \frac{h}{h_1} = \frac{Q^{\frac{2}{5}}}{Q_1^{\frac{2}{5}}};$$

$$\text{así: } \frac{v}{v_1} = \frac{Q_1^{\frac{2}{5}}}{Q^{\frac{2}{5}}} \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q^{\frac{3}{5}}}{Q_1^{\frac{3}{5}}};$$

Problema 18

Suponiendo que el empuje F de una hélice propulsora depende de su diámetro " D ", de la velocidad de avance " V ", la masa volumétrica del fluido " ρ ", el número de revoluciones por segundo " n " y del coeficiente de viscosidad " μ ", mostrar que puede expresarse como:

$$F = \rho D^2 V^2 \phi \left\{ \frac{\mu}{\rho D V}, \frac{D n}{V} \right\}$$

Resolución:

F depende de: D, V, ρ, n, μ

$$\Rightarrow F = F(D, V, \rho, n, \mu)$$

Por lo tanto: $F = \sum_i K_i D^a V^b \rho^c n^d \mu^e \dots\dots\dots(1)$

$K_i = \text{constante adimensional}$

Dimensionalmente: $F = M L T^{-2}$

$$D = L$$

$$V = L T^{-1}$$

$$\rho = M L^{-3}$$

$$n = T^{-1}$$

$$\mu = M L^{-1} T^{-1}$$

Como cada término de la sumatoria en (1) tiene las mismas dimensiones, puedo utilizar sólo uno:

$$\Rightarrow M L T^{-2} = L^a (L^b T^{-b}) M^c T^{-3c} T^{-d} M^e L^e T^{-e}$$

para M : $1 = c + e$

para L : $1 = a + b - 3c - e$

para T : $-2 = -b - d - e$

a, b, c en función de d, e : $a = 2 - e - d$

$$b = -e + 2 - d$$

$$c = 1 - e$$

En (1): $F = \sum_i K_i D^{2-e-d} V^{-e+2-d} \rho^{1-e} n^d \mu^e = \sum_i D^2 \rho V^2 K_i \left(\frac{\mu}{\rho D V} \right)^e \left(\frac{D n}{V} \right)^d$

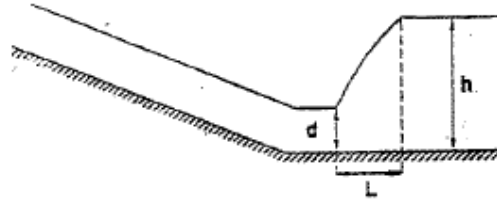
$$F = D^2 \rho V^2 \sum_i K_i \left(\frac{\mu}{\rho D V} \right)^e \left(\frac{D n}{V} \right)^d$$

Si: $\phi = \sum_i K_i \left(\frac{\mu}{\rho D V} \right)^e \left(\frac{D n}{V} \right)^d = \phi \left\{ \frac{\mu}{\rho D V}, \frac{D n}{V} \right\} \Rightarrow \boxed{F = \rho D^2 V^2 \phi \left\{ \frac{\mu}{\rho D V}, \frac{D n}{V} \right\}}$

Problema 19

Determinar la relación entre "h" y "L" para el salto hidráulico que se producirá al pie de una represa si el tirante de agua "d" anterior al salto ha de ser 0.35 m y la velocidad 2.5 m/s. Para hacer esta determinación se indica a continuación las características de diferentes saltos hidráulicos observados:

	Tirante "d _m "	m/s	Tirante "h _m "	L _m
SALTO N° 1	0.80	2.80	2.60	11.20
SALTO N° 2	0.25	1.89	1.96	7.65
SALTO N° 3	0.83	3.15	3.20	12.70
SALTO N° 4	0.38	2.61	2.17	9.86



Resolución:

En cambios bruscos y resaltos hidráulicos se cumple el Número de Froude porque las fuerzas predominantes son la inercia y gravedad:

$$N^{\circ} \text{ Froude} = \frac{V^2}{g \cdot L}$$

Ahora se calculará el Número de Froude para los saltos 1, 2, 3, 4, como también para el salto dado. En los saltos donde su Número de Froude coincida, habrá similitud hidráulica:

Para el salto dado:

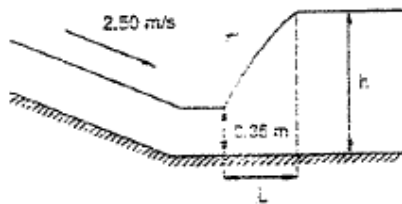
$$N^{\circ} F = \frac{(2.5)^2}{9.8 \times 0.35} = 1.82$$

$$N^{\circ} F_1 = \frac{(2.80)^2}{9.8 \times 0.80} = 1.00$$

$$N^{\circ} F_2 = \frac{(1.89)^2}{9.8 \times 0.25} = 1.47$$

$$N^{\circ} F_3 = \frac{(3.15)^2}{9.8 \times 0.83} = 1.22$$

$$N^{\circ} F_4 = \frac{(2.61)^2}{9.8 \times 0.38} = 1.82$$



~~De lo que se deduce que hay similitud hidráulica entre el salto dado con el salto N° 4.~~

Luego, la relación pedida será la misma que la del salto N° 4, por ser figuras semejantes:

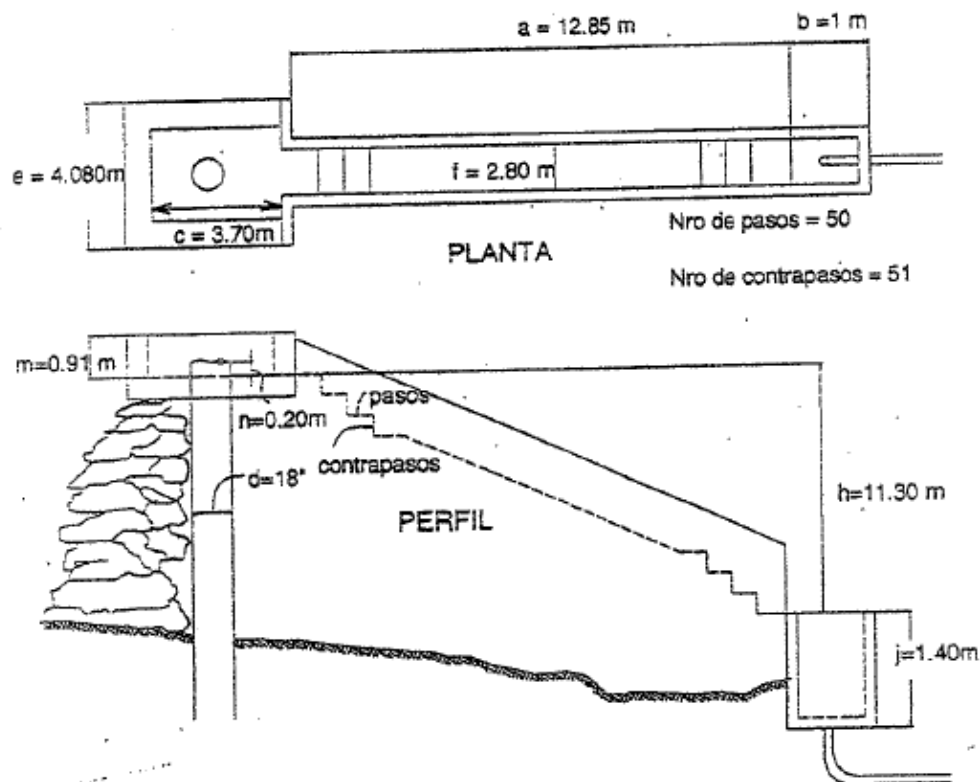
$$\frac{h}{L} = \frac{2.17}{9.86}$$

$$\frac{h}{L} = \frac{0.22}{1}$$

Problema 20

En la planta de tratamiento de la ciudad de Arequipa existe un aereador del tipo de gradas, de las dimensiones mostradas en la figura. Se quiere construir un modelo hidráulico para estudiar su eficiencia en el laboratorio.

El gasto que fluye en el prototipo es 300 l/s. Escoger una escala, diseñar el modelo y determinar todas las escalas necesarias para la investigación. ¿Cuál será el gasto del modelo?



Resolución:

Para el problema propuesto, designaremos un diámetro de 2" para el modelo.

La escala de longitud será: $L_r = \frac{L_m}{L_p} = \frac{2''}{18''} = \frac{1}{9}$

Entonces, las dimensiones del modelo serán 9 veces menores que las de la figura.

O sea:

	a	b	c	d	e	f	h	j	m	n
PROTOTIPO	12.85	1.00	3.70	18"	4.80	2.80	11.30	1.40	0.91	0.20
MODELO	1.43	0.111	0.41	2"	0.53	0.331	1.255	0.155	0.101	0.022

Nº de pasos = 50 ; Nº de contrapasos = 51

Con estas medidas del modelo, ya se puede diseñar el modelo.

Calculo del gasto que circula:

Como el líquido está sometido a una caída, las fuerzas dominantes son la inercia y la gravedad, por lo que debe haber igualdad de Nº de Froude en modelo y prototipo:

$$\frac{V_m^2}{g \cdot L_m} = \frac{V_p^2}{g \cdot L_p} \Rightarrow \frac{V_m^2}{L_m} = \frac{V_p^2}{L_p}$$

Multiplicando y dividiendo ambos miembros por su área al cuadrado:

$$\frac{V_m^2 \cdot A_m^2}{L_m \cdot A_m^2} = \frac{V_p^2 \cdot A_p^2}{L_p \cdot A_p^2} \Rightarrow \frac{Q_m^2}{L_m \cdot L_m^4} = \frac{Q_p^2}{L_p \cdot L_p^4}$$

Despejando la incógnita:

$$Q_m = Q_p \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{5/2}$$

donde: $\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{9} \quad \therefore Q_m = 300 \left(\frac{1}{9} \right)^{5/2}$

$Q_m = 1.235 \text{ l/s}$