



Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas e Ingeniería

Cátedra: Mecánica de Fluidos

Práctica N° 3 - Cinemática

Docentes: Dra. Miralles / Ing. Jorge Rosasco / Ing. Eduardo Contento

Revisión: 01

1.- Dada la línea de trayectoria de un punto material en el espacio, del flujo definida por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 3 \cos 2t \vec{i} + 3 \sin 2t \vec{j} + 8(t-4) \vec{k} \text{ hallar:}$$

- A. -la velocidad como función del tiempo.
- B. -el versor tangente a la trayectoria del punto en cada instante.
- C. -idem para la aceleración tangencial.
- D.-idem para la aceleración normal.
- E. -idem para la curvatura en cada punto de la trayectoria
- F. -idem para el versor normal a la curva en cada punto de la trayectoria.
- F.- idem para la expresión de la aceleración neta.

1.  $\vec{r} = 3 \cos(2t)\vec{i} + 3 \sin(2t)\vec{j} + (8t - 4)\vec{k}$

a) Velocidad como función del tiempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -6 \sin 2t \vec{i} + 6 \cos 2t \vec{j} + 8 \vec{k}$$

b) Versor tangente

$$\text{como } \vec{v} = v \vec{T} \rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} \text{ siendo } v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \sqrt{(-6 \sin 2t)^2 + (6 \cos 2t)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \rightarrow$$

$$\vec{T} = -0.6 \sin 2t \vec{i} + 0.6 \cos 2t \vec{j} + 0.8 \vec{k}$$

c) Aceleración tangencial

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{T}$$

$$\vec{a}_t = a_t \vec{T}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(10)}{dt} = 0 \rightarrow \vec{a}_t = 0$$

d) Aceleración normal

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{N} = kv^2 \vec{N}$$

$$k\tilde{N} = \left[ \frac{d\tilde{T}}{ds} \right] = \frac{d\tilde{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( \frac{d\tilde{T}}{dt} \right) \frac{1}{ds/dt} = \left( \frac{d\tilde{T}}{dt} \right) \frac{1}{v}$$

$$k\tilde{N} = (-1.2 \cos 2t \hat{i} - 1.2 \sin 2t \hat{j}) \frac{1}{10} \\ = -0.12 \cos 2t \hat{i} - 0.12 \sin 2t \hat{j}$$

Entonces,

$$\vec{a}_n = v^2(k\tilde{N}) = 100(k\tilde{N}) = -12 \cos 2t \hat{i} - 12 \sin 2t \hat{j}$$

e) La curvatura en cada punto de la trayectoria

$$\text{Como } k\tilde{N} = \left[ \frac{d\tilde{T}}{ds} \right] \rightarrow k = \left| \frac{d\tilde{T}}{ds} \right| \text{ siendo:}$$

$$\frac{d\tilde{T}}{ds} = -0.12 \cos 2t \hat{i} - 0.12 \sin 2t \hat{j}$$

Entonces,

$$k = \sqrt{(-0.12 \cos 2t)^2 + (-0.12 \sin 2t)^2} = 0.12$$

$$\text{Radio de curvatura: } R = \frac{1}{k} = 8.33$$

f) El vector normal a la curva en cada punto

$$\frac{d\tilde{T}}{ds} = k\tilde{N} \therefore \tilde{N} = \frac{\left( \frac{d\tilde{T}}{ds} \right)}{k}$$

$$\tilde{N} = \frac{\left( \frac{d\tilde{T}}{ds} \right)}{k} = \frac{1}{0.12} (-0.12 \cos 2t \hat{i} - 0.12 \sin 2t \hat{j})$$

$$\tilde{N} = -\cos 2t \hat{i} - \sin 2t \hat{j}$$

g) Expresión general de la aceleración

$$\vec{a} = a_t \tilde{T} + \frac{v^2}{R} \tilde{N} = 0 \tilde{T} + \frac{100}{8.33} \tilde{N} = 0 \tilde{T} + 12 \tilde{N}$$

$$\vec{a} = 0 \tilde{T} + (-12 \cos 2t \hat{i} - 12 \sin 2t \hat{j}) = -12 \cos 2t \hat{i} - 12 \sin 2t \hat{j}$$

2.- Un campo de velocidad bidimensional permanente, está dado por la expresión:

$\vec{V} = (0.5 + 0.8x) \vec{i} + (1.5 - 0.8y) \vec{j}$  Para el cual las coordenadas  $x, y$  se dan en  $[m]$  y la velocidad en  $[m/s]$  se pide:

- determinar si hay un punto de estancamiento o estagnación.
- trazar un esquema de vectores de velocidad representando su módulo, dirección y sentido para varios puntos dentro de la región del campo:  $-2 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 5$
- trate de establecer algunas líneas de corriente y describa aproximadamente la tendencia de este flujo. Observamos que:

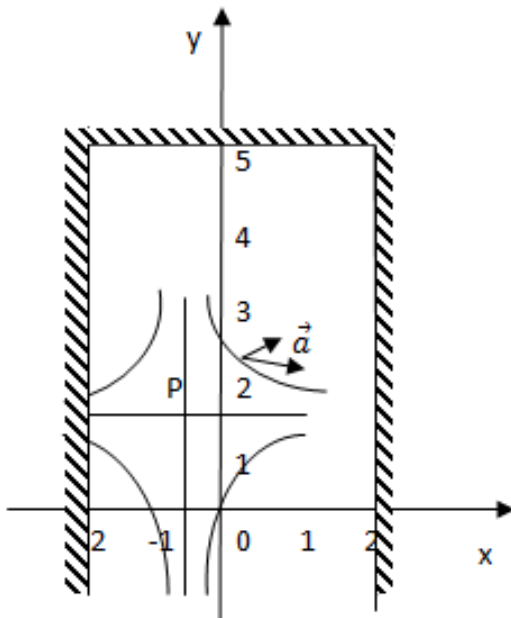
- El campo es plano (2D) ya que no tiene componente en  $\vec{k}$ .
  - El campo es permanente ya que la variable  $t$  no aparece en forma explícita.
- a) Si hay puntos de estancamiento son aquellos en los que  $\vec{V} = \vec{0}$ ; para ver esto ponemos  $\vec{V}$  en sus componentes:

$$u = 0.5 + 0.8x = 0 \rightarrow x = -0.625 [m]$$

$$v = 1.5 - 0.8y = 0 \rightarrow y = 1.875 [m]$$

$\therefore$  Hay un solo  $P = (-0.625, 1.875)$

- b) Se establece la región del campo comprendida entre  $(-2 \leq x \leq 2)$  e  $(0 \leq y \leq 5)$   
 Se toman varios puntos de la región y se calcula el módulo y la dirección. Primero se representa el punto de estancamiento P.



Los vectores forman una envolvente asintótica sobre los ejes del punto de estancamiento. El flujo entra desde arriba y de abajo en forma paralela casi al eje vertical ( $x = -0.625$ ) y se dispersa hacia derecha e izquierda asintóticamente con ( $y = 1.875$ ). El flujo es convergente sobre este eje hacia derecha e izquierda.

3.- Considerando el campo de velocidades del problema 2:

- A. Calcular la aceleración sustancial en el punto  $x=2$ ;  $y=3$ .
- B. Trace un esquema de vectores de aceleración representando su módulo, dirección y sentido para varios puntos del mismo entorno del problema 2.
- C. Explique por que si el campo es permanente existen valores de  $\vec{a} \neq 0$  en el campo.

2. Respuestas:

- a) Aceleración sustancial en el punto  $x=2$  e  $y=3$

$$\vec{V} = (0.5 + 0.8 x)\vec{i} + (1.5 - 0.8 y)\vec{j}$$

Se trata de un campo de velocidades plano:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \times \text{grad})\vec{V}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{=0 \text{ (cpo permanentes)}} + \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} V_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} V_y \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y \\ a_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y \end{cases}$$

$$a_x = 0 + 0.8(0.5 + 0.8 x) + 0 = 0.8(0.5 + 0.8 x)$$

$$a_y = 0 + 0 - 0.8(1.5 - 0.8 y) = -0.8(1.5 - 0.8 y)$$

Reemplazamos en ( $x=2$   $y=3$ ):

$$a_x = 0 + 0.8(0.5 + 1.6) = 1.68 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$a_y = -0.8(1.5 - 2.4) = 0.72 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

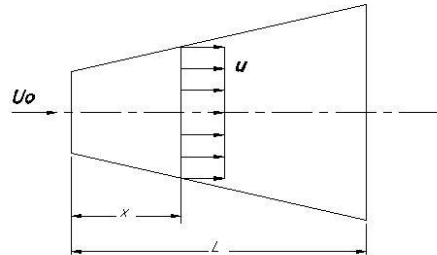
La aceleración sustancial en el punto es:

$$\vec{a} = 1.68 \vec{i} + 0.72 \vec{j} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

- b) Con los valores de  $a_x, a_y$  se reemplazan en los puntos y se calculan los vectores aceleración que dan direcciones hacia el interior de la trayectoria. Son aceleraciones centrípetas respecto a las trayectorias. Se ve que cuando la curvatura aumenta también lo hace la aceleración.

4.- En un conducto divergente cónico la velocidad medida sobre un plano que contenga al eje principal y promediada esta dada por la expresión  $u = \frac{U_0}{[1 + 0.5x/L]}$  siendo  $U_0$  la velocidad a la entrada del conducto  $L$  la longitud del conducto y  $x$  la coordenada de las posiciones intermedia genéricas, como se indica en la figura. Se pide:

- definir si el flujo es permanente, y si no lo es explicar por que.
- obtener una expresión general para la aceleración del flujo para un punto genérico  $x = 1/2 L$ .



3. Respuestas:

- El flujo es permanente ya que  $t$  no aparece en la ecuación del campo de velocidades; observamos que el campo tiene una sola componente o sea el campo es uniaxial. Solamente aparece  $x$  como variable (observe que el flujo es ideal ya que en la pared  $u \neq 0$ )
- Expresión general para la aceleración del flujo:

$$V_x = \frac{U_0}{(1 + 0.5 x/L)}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \times \text{grad}) \vec{V} \rightarrow \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} V_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} V_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} V_z \right)$$

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z} V_z \right)$$

$$a_x = \frac{-U_0 \cdot 0.5/L}{(1 + 0.5x/L)^2} \frac{U_0}{(1 + 0.5x/L)} = \frac{-U_0^2 \cdot 0.5/L}{(1 + 0.5x/L)^3}$$

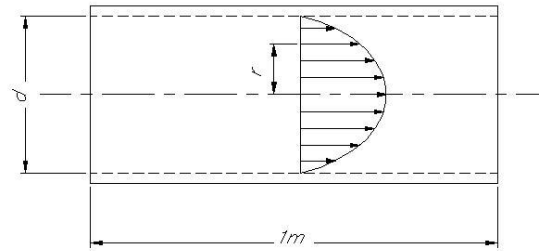
5.- Un fluido se mueve dentro de un tubo de sección circular, verificándose que se ha establecido un flujo laminar con una distribución de velocidades dada por:

$$u = \left[ \frac{\beta}{4\mu} \right] \left[ \frac{d^2}{4} - r^2 \right]$$

En la cual  $\beta$  es una constante,  $\mu$  es la viscosidad,  $r$  una posición genérica contabilizada desde el eje,  $d$  el diámetro interior del tubo, se pregunta:

- cual es la tensión de corte en la pared debido al pasaje de fluido.
- cual es la fuerza por unidad de longitud del tubo, ejercida por el flujo.

c.- cual será la tensión de corte a una distancia  $r=d/4$ .



4. Las tensiones se establecen a partir de la ecuación de viscosidad de Newton para fluidos newtonianos:

$$\tau = \mu \left( \frac{dV_r}{dr} \right)$$

En nuestro cono:

$$V_r = \frac{\beta}{4\mu} \left( \frac{d^2}{4} - r^2 \right) \text{ en la cual } d=\text{cte } \beta \text{ y } \mu=\text{cte}$$

$$V_r = \frac{\beta d^2}{16\mu} - \frac{\beta r^2}{4\mu} \rightarrow \frac{dV_r}{dr} = \frac{-2\beta r}{4\mu} = \frac{-\beta r}{2\mu} \text{ Reemplazando:}$$

$$\tau = -\frac{\beta r}{2}$$

a) Tensión en la pared:

$$r = \frac{d}{2} \rightarrow \tau = -\frac{\beta d}{4}$$

b) Fuerza por unidad de longitud del tubo:

$$F = \tau \times A = \frac{\beta r}{2} (\pi dr) = \frac{\beta r^2 \pi d}{2}$$

c) Tensión de corte a una distancia  $d/4$ :

$$\tau = -\frac{\beta d}{8}$$

Probar que es un flujo real

Homogeneidad de la ecuación

$$r = 0 \rightarrow V_r = \frac{\beta d^2}{4\mu \cdot 4} \text{ (positivas)}$$

$$r = \frac{d}{2} \rightarrow V_r = 0$$

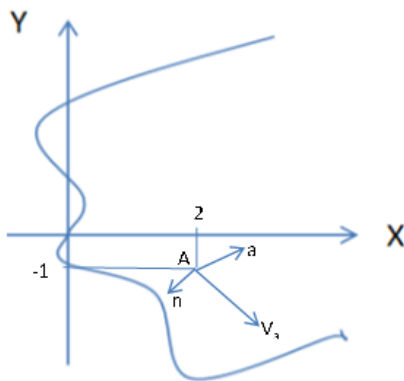
Cumple con la condición de no deslizamiento; para la región de  $0 \leq r \leq \frac{d}{2}$  el gradiente de velocidad es negativo y la tensión en la pared resulta positiva  $\tau = \beta d/4$ .

Si giramos el diagrama ( $V_r$ ) tendrá sentido opuesto en la región de  $r < 0, V_r$

será negativa pero el gradiente será positivo, y la tensión en la pared semi-circular inferior tendrá también sentido a la derecha.

6.- Un campo de velocidades para un flujo de fluido plano está dado por  $\vec{V} = 2x \vec{i} - y \vec{j}$  [m/seg] donde x, y están dados en [m] y t en [seg]. Se pide:

- obtener la ecuación de la línea de corriente que pase por un punto A (2, -1) para t=4 seg, y
- el vector unitario normal a la línea de corriente en el mismo punto e instante.
- el campo de aceleraciones.



- Línea de corriente instantánea que pasa por A (2;-1) en t=4 seg

El vector  $\vec{v}$  es tangente a la línea de corriente, por tanto

$\vec{v} \times d\vec{s} = 0$ ; en t = 4 el cuerpo de velocidad es:

$$\vec{v} = 2x\vec{i} - 4y\vec{j} \rightarrow \text{aplicando lo anterior}$$

$$\vec{v} \times d\vec{s} = (2x\vec{i} - 4y\vec{j}) \times (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc} & i & j & k \\ & 2x & -4y & 0 \\ & dx & dy & 0 \end{array} =$$

$$2x \, dy \, \vec{k} + 4y \, dx \, \vec{k} = 0 \rightarrow 2x \, dy = -4y \, dx \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4y}{2x} = \frac{-2y}{x} \quad \text{separando variables:}$$

$$\frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x} \quad \text{integrando} \rightarrow \ln y = -2 \ln x + C$$

$$\ln y = -2 \ln x + \ln C$$

$$\ln y + 2 \ln x = \ln C \rightarrow y x^2 = C, \text{ en el punto A: } (-1)(2^2) = C \rightarrow C = -4$$

Reemplazando,  $y x^2 = -4$  (ecuación de la línea de corriente)

- Para el vector normal a la línea de corriente en A:

$$\vec{V}_a \times \vec{n} = 0 \rightarrow (4\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (n_x\vec{i} + n_y\vec{j}) = 0 \rightarrow 4n_x + 4n_y = 0 \rightarrow n_x = -n_y$$

$$\rightarrow n_x^2 = n_y^2$$

Como  $\vec{n}$  es el vector unitario:  $n_x^2 = n_y^2 = \sqrt{2}$ , reemplazando:

$$n_x^2 = \sqrt{2} - n_y^2 \rightarrow n_y^2 = \sqrt{2} - n_y^2 \rightarrow 2n_y^2 = \sqrt{2} \rightarrow n_y = 1/2$$

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} = -n_y\vec{i} + n_y\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

c- El campo de aceleraciones:

$$\vec{v} = 2x \hat{i} - y t \hat{j}$$

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} =$$

$$\left[ (2x \hat{i} - y t \hat{j}) \cdot \left( \frac{\delta}{\delta x} \hat{i} + \frac{\delta}{\delta y} \hat{j} \right) \right] (2x \hat{i} + y t \hat{j}) - y \hat{j} =$$

$$= \left( 2x \frac{\delta}{\delta x} - y t \frac{\delta}{\delta y} \right) \cdot (2x \hat{i} + y t \hat{j}) - y \hat{j} =$$

$$= 4x \hat{i} - y t^2 \hat{j} - y \hat{j} = 4x \hat{i} - y (t^2 + 1) \hat{j} \rightarrow \text{campo de aceleraciones}$$

d- En el punto A (2,-1,0) t=4  $\rightarrow \vec{a} = 8 \hat{i} + 17 \hat{j}$

7.- El campo de temperaturas sobre el espejo de un lago está dado por la función escalar: bidimensional:  $T = T(x, y, t) = 3xy + 2xyt$  [°C], cuando x, y se dan en [Km] y t en [h].

Un bote con un pequeño motor lo recorre según una recta que forma 45° respecto al muelle siguiendo un patrón de movimientos dado por las ecuaciones paramétricas a partir del origen:

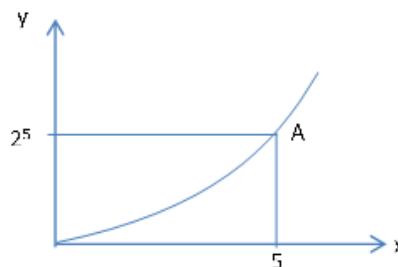
$$x = k_1 t$$

$$y = k_2 t$$

El bote arriba al punto A (1Km, 1Km) en t=1h. Se pide determinar que valor de temperatura medirán los ocupantes del bote en la superficie del lago, en ese punto, y cual será la derivada total para el entorno del punto en la dirección del movimiento.

$$\text{Campo de temperaturas: } T = (3xy + 2xyt) 10^{-4} + 5 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

El bote alcanza el punto A=(5,2<sup>5</sup>) en t=5seg según una trayectoria parabólica desde el origen.



La función de aproximación al punto es una parábola que debemos definir matemáticamente:

$$y = k x^2 \text{ cuando } x = 5 \quad y = 2.4 \rightarrow k = \frac{2.5}{25} = 0.1$$

Cuando la velocidad sea a[m/s] podemos plantear las ecuaciones paramétricas de la parábola como función del tiempo:

$$x = a \cdot t$$

$$y = k (a \cdot t)^2$$

$$\rightarrow 5 \text{ m} = a \text{ [m/s]} \cdot 5 \text{ seg} \rightarrow a = 1 \text{ m/s}$$

Entonces las ecuaciones paramétricas son:

$$x = t$$

$$y = 0.1 t^2$$

$$\rightarrow V_x = \frac{\delta x}{\delta t} = 1$$

$$\rightarrow V_y = \frac{\delta y}{\delta t} = 0,2t$$

Calculo de la temperatura inicial:

$$\left. \begin{array}{l} X=0 \\ Y=0 \\ t=0 \end{array} \right\} T_0 = 5^\circ\text{C}$$

Calculo de la temperatura inicial en A:  $T_A = (3 \times 5 \times 2^5) 10^{-4} + 5$

$$T_{oA} = 5.00575$$

Calculo de la T cuando el bote llegue a A (derivada total)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta T}{\delta x} V_x + \frac{\delta T}{\delta y} V_y + \frac{\delta T}{\delta t} V_z + \frac{\delta T}{\delta t}$$

$$\frac{\delta T}{\delta x} = (3y + 2yt)10^{-4} \quad [^\circ\text{C}/\text{m}]$$

$$\frac{\delta T}{\delta y} = (3x + 2xt)10^{-4} \quad [^\circ\text{C}/\text{m}]$$

$$\frac{\delta T}{\delta t} = (2xy)10^{-4} \quad [^\circ\text{C}/\text{seg}]$$

a- Reemplazando valores:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (3y + 2yt) 10^{-4} \cdot 1 + (3x + 2xt)10^{-4} (0,2t) + 2xy 10^{-4} = \\ &= \{3y + 2yt + (3x + 2xt)(0,2t) + 2xy\} 10^{-4} \end{aligned}$$

Lo evaluamos en el punto A: (5, 2.5, 0.5)

$$= \{7,5 + 25 + 65 + 25\} 10^{-4} = 122,5 \cdot 10^{-4} = 0,01225 \quad (^\circ\text{C}/\text{seg})$$

b- En el cambio de T por segundo en la dirección del movimiento: cálculo de la T en A cuando llegue el bote a A:

$$T_A = (3xy + 2xyt)10^{-4} + 5 = 5^\circ\text{C} + 0,0162 = 5,0162 \quad ^\circ\text{C}$$

8.- Dado un campo de velocidades Euleriano  $\vec{V}(x, y, z, t) = 3t \vec{i} + xz \vec{j} + y^2t \vec{k}$

a.- hallar la expresión de la aceleración de una partícula genérica del campo o campo de aceleraciones.

b.- se trata de un campo permanente o no – permanente.

c.- el resultado que se obtenga en a, corresponde a la evaluación de una derivada sustancial o de una derivada total, ¿Por qué?

a- establecer el campo de aceleraciones

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{V} + \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} \\ \vec{a} &= \left\{ (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) \cdot \left( \frac{\delta}{\delta x} \vec{i} + \frac{\delta}{\delta y} \vec{j} + \frac{\delta}{\delta z} \vec{k} \right) \right\} (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) + \\ &\quad \left( \frac{\delta V_x}{\delta x} \vec{i} + \frac{\delta V_y}{\delta y} \vec{j} + \frac{\delta V_z}{\delta z} \vec{k} \right) \end{aligned}$$

→ desarrollando en componentes:

$$a_x = V_x \left( \frac{\delta V_x}{\delta x} \right) + V_y \left( \frac{\delta V_x}{\delta y} \right) + V_z \left( \frac{\delta V_x}{\delta z} \right) + \frac{\delta V_x}{\delta t}$$

$$a_x = 3$$

$$a_y = V_x \left( \frac{\delta V_y}{\delta x} \right) + V_y \left( \frac{\delta V_y}{\delta y} \right) + V_z \left( \frac{\delta V_y}{\delta z} \right) + \frac{\delta V_y}{\delta t}$$

$$a_y = 3tz + 0 + y^2tx + 0 = 3zt + xy^2t$$

$$a_z = V_x \left( \frac{\delta V_z}{\delta x} \right) + V_y \left( \frac{\delta V_z}{\delta y} \right) + V_z \left( \frac{\delta V_z}{\delta z} \right) + \frac{\delta V_z}{\delta t}$$

$$a_z = 0 + 2yt(xz) + 0 + y^2 = 2xyzt + y^2$$

Expresión para la aceleración de una partícula genérica del campo:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + (3z + xy^2)t\vec{j} + (2xyzt + y^2)\vec{k}$$

- b- Se trata de un campo no permanente ya que la variable "t" aparece en forma explícita.  
 c- Se calculó la aceleración para las posiciones de las partículas fluidas en los diferentes puntos del campo es por tanto una derivada sustancial.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  pero, para su cálculo se utilizó la técnica euleriana.

9.- Con que ángulo debe ser apuntado el pico de una manguera contra incendios para alcanzar la terraza de un edificio de altura  $h$  desde una distancia  $b$  con la mínima velocidad de salida de agua posible

Consideremos cada partícula de agua como un móvil:

$$b = V_o t \cos \alpha$$

$$h = V_o t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

de la primera  $\rightarrow t = \frac{b}{V_o \cos \alpha}$  y reemplazando en la segunda:

$$h = V_o \left( \frac{b}{V_o \cos \alpha} \right) \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left( \frac{b}{V_o \cos \alpha} \right)^2$$

$$h = b \tan \alpha - \left( \frac{g b^2}{2V_o^2} \right) \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$$

$$\left( \frac{g b^2}{2V_o^2} \right) = (b \tan \alpha - h) (\cos \alpha)^2 \quad (1)$$

Llamamos R al primer miembro,

$$R = b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\cos \alpha)^2 - h (\cos \alpha)^2 = b \sin \alpha \cos \alpha - h (\cos \alpha)^2$$

Aplicamos máximos y mínimos respecto de  $R(\alpha)$

$$\frac{dR}{d\alpha} = b ((\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2) + 2h \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\frac{2h}{b} = \frac{(\sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

De las relaciones trigonométricas sabemos que:

$$(\sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Reemplazando,

$$\frac{2h}{b} = \frac{(1 - \cos 2\alpha) - (1 + \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{-2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{-1}{\tan 2\alpha} \rightarrow \frac{-b}{h} = \tan(2\alpha)$$

$\rightarrow$  como dan negativo  $\alpha = (90 - \alpha)$

Conocidos  $b$  y  $h$  como datos obtenemos  $\alpha$  que reemplazada en la (1) permite calcular  $V_o$  como es una raíz cuadrada elegimos un valor positivo.

