Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas e Ingeniería	
Cátedra: Mecánica de Fluidos	Práctica N° 5 – Ecuaciones Integrales I – Conservación de Masa y Cantidad de Movimiento
Docentes: Dra. Miralles / Ing. Jorge Rosasco / Ing. Eduardo Contento	Revisión: 01

1.- Una manguera de jardín, tiene un diámetro interior ϕ_i de 38mm y un pico de descarga cuyo diámetro ϕ_d es de 10mm, se utiliza para llenar un balde de 20 litros de capacidad, para lo cual transcurren 50seg, se pide determinar:

a.- el caudal volumétrico y másico que circulan por la manguera.

$$\text{Caudal Volumétrico} = Q = \frac{20\,10^{-3}\,m^3}{50\ s} = 4\times10^{-4}\,\frac{m^3}{seg}$$

$$\text{Caudal másico} = \forall = \rho\times Q = 1000\,\frac{Kg}{\cancel{m^3}}\cdot 4\times10^{-4}\,\frac{\cancel{m^3}}{seg} = 0{,}4\,\frac{Kg}{seg}$$

b.- la velocidad promedio del agua que sale de la manguera.

$$Q = \text{Velocidad}\times\text{Area} \Rightarrow \text{Vel} = \frac{4\times Q}{\pi\times d^2} = 5{,}09\,\frac{m}{seg}$$

2.- Un depósito cilíndrico, de 0,90m de diámetro interior, contiene agua hasta una altura de 1,2 m y posee muy cerca de su base un tapón de descarga de ϕ_d = 25mm. Cuando se quita el tapón de descarga, el agua se vierte a una velocidad promedio $V = \sqrt{2gh}$, en la cual *h* es la altura de nivel instantáneo y g la aceleración de la gravedad. Determinar en cuanto tiempo se vaciará el depósito hasta alcanzar una altura de reserva mínima de *h = 0.60m.*

Razonemos lo siguiente, el caudal que sale por el orificio es el mismo que deja el tanque, por lo que

$$-Q = A_{ORIFICIO}\,\sqrt{2\,g\,h}$$

Como no tenemos ninguna restricción en cuanto a que si debemos considerar efectos de contracción del flujo asumiremos que no hay pérdidas de ningún tipo, pero tenemos que tener en cuenta que el caudal Q es variable con el tiempo y la altura también por lo que

$$-\frac{dV}{dt} = A_{ORIFICIO}\,\sqrt{2\,g}\,\,h^{1/2}$$

$$-\frac{A_{TANQUE}}{dt} = A_{ORIFICIO}\,\sqrt{2\,g}\,\,h^{1/2}$$

Si llevamos a un lado del signo igual la variable tiempo y h tenemos

$$-\frac{dh}{h^{1/2}} = \frac{A_{ORIFICIO}}{A_{TANQUE}}\,\sqrt{2\,g}\,\,dt$$ podemos hacer algunas cuentas para simplificar y llegamos a lo siguiente

$$-\frac{dh}{h^{1/2}} = 3{,}416\,10^{-3}\ dt$$

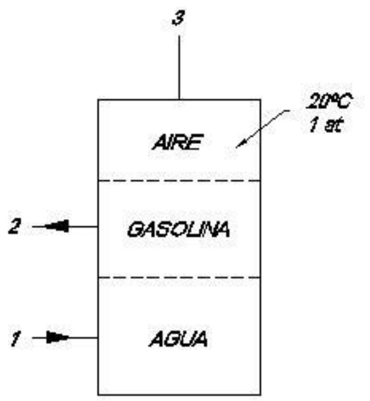
$$-\int_{h1}^{h2} \frac{dh}{h^{1/2}} = 3{,}416\,10^{-3} \int dt$$

$$2\left(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}\right) = 3{,}416\,10^{-3}\left(t_2 - t_1\right)$$

Si asumimos que t_1 es cero tenemos resolviendo que t final es 185,37 segundos

3.- En el depósito representado en la figura, ingresa agua a través del conducto 1 a razón de 100 Kg/seg, mientras se quita gasolina (que es inmiscible en agua) por el conducto 2 a razón de 52 Kg/seg, en la parte superior del depósito hay aire a la presión atmosférica. Si los tres fluidos se consideran incompresibles, determinar cuanto aire pasa por el conducto 3 y en que dirección.

Datos, *ρ (aire) @ 20ºC = 1.204 Kg/m3.*



En este ejemplo asumimos que el aire sale entonces

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \text{ donde } Q_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1} \quad Q_2 = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2} \quad Q_3 = \frac{\dot{m}_3}{\rho_3}$$

$$Q_1 = \frac{100\,Kg/seg}{1000\,\frac{Kg}{m^3}} = 0{,}1 m^3/s\ ,\ Q_2 = \frac{52\,Kg/seg}{690\,\frac{Kg}{m^3}} = 0{,}075\,m^3/s$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0{,}025\,m^3/s$$

Como es positivo el agua sale, por lo que si $Q_3 = \frac{\dot{m}_3}{\rho_3} \Rightarrow \dot{m}_3 = 0{,}025 \times 1{,}204 = 0{,}0301\,\frac{m^3}{s}$

4.- A través de una tubería de 15 cm de diámetro circula aire a una presión manométrica de 2,10 Kg/cm^2 y una temperatura de 38°C. Si la presión barométrica es de 1,030 Kg/cm^2 y la velocidad de 3,20 m/s, ¿Cuál es el caudal en peso que está fluyendo?

El caudal en peso es según la ecuación de continuidad $\dot{m}_3 = \rho \times Q = \rho \times V \times Area = \frac{P}{R\,T} \times 3{,}20 m/s \times \frac{\pi\, d^2}{4}$

$$\dot{m} = \frac{P}{R\,T} \times 3{,}20 m/s \times \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{3{,}1310^4 Kg/m^2}{29{,}27 \frac{Kgm}{Kg\,K} 311 K} \frac{3{,}20\, m}{s} \frac{\pi \times (0{,}15m)^2}{4} = 0{,}1944 \frac{Kg}{s}$$

5.- Por la sección A de una tubería de 7,5 cm de diámetro circula anhídrido carbónico a una velocidad de 4,50 m/s. La presión en A es de 2,10 kg/cm^2 y la temperatura de 21° C, Aguas abajo, en el punto B la presión es de 1,40 kg/cm^2 y la temperatura de 32°C. Para una lectura barométrica de 101,320 KPa, calcular la velocidad en B y comparar los caudales volumétricos en A y B. El valor de R para el anhídrido carbónico es de 19,30 Kgm/ Kg K.

$$\rho = \frac{P}{RT} \Rightarrow \rho_1 = 5{,}65 \frac{Kg}{m^3} \therefore \rho_2 = 4{,}21 \frac{Kg}{m^3}$$

Como se cumple la continuidad la masa que entra es igual a la que sale entonces

$$\rho_1 \times V_1 \times Area_1 = \rho_2 \times V_2 \times Area_2$$

$$V_2 = \frac{\rho_1 \times V_1 \times Area_1}{\rho_2 \times Area_2} = \frac{5{,}65 \times 4{,}5 \times 0{,}075^2}{4{,}21 \times 0{,}075^2} = 6{,}04 \frac{m}{s}$$

$$Caudal = \rho \times V \times Area$$

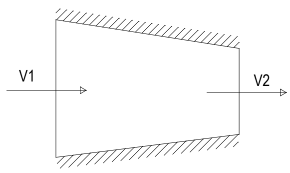
$$Q_1 = 0{,}0198\ m^3/s$$

$$Q_2 = 0{,}0265\ m^3/s$$

6.- Un volumen de control en una cañería sufre una estrangulación como se muestra en la figura, tiene una entrada uniforme de 30 cm de diámetro, a una velocidad de 2 m/s y una presión de 2,10 kg/cm^2 la salida tiene un diámetro de 15 cm.

Utilizando las ecuaciones diferenciales considerando el fluido que circula es agua a 20°C, calcular:

- La presión en el punto 2 (Rta.: 1,79 Kg/cm^2; 175,848 KPa)
- La velocidad en la salida en el punto 2 (Rta.: 8 m/s)
- La fuerza resultante sobre el volumen de control (Rx, 1081 Kg)



Como el volumen de control está en equilibrio necesitamos dibujar el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que aparecen para poder estudiar el volumen de control con la ecuación de la cantidad de movimiento

Planteamos la ecuación $\sum Fuerzas_x = \dot{m}\,\Delta V \quad \sum Fuerzas_y = \dot{m}\,\Delta V$ que es la expresión final de la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control, como el fluido está confinado dentro de un conducto que se contrae tendremos fuerzas de presión y además una variación de la cantidad de movimiento por variar la velocidad en módulo (recordar que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial)

En la dirección y todas las fuerzas están equilibradas por lo que aparecerá solamente una fuerza o reacción en la dirección de x.

$p_1A_1 - p_2A_2 + R_X = \rho_2 \times V_2^2 \times Area_2 - \rho_1 \times V_1^2 \times Area_1$, como el fluido es incompresible podemos considerar que las densidades son constantes y por cumplirse la continuidad podemos plantear que:

$$p_1A_1 - p_2A_2 + R_X = \rho_2 \times V_2^2 \times Area_2 - \rho_1 \times V_1^2 \times Area_1$$

$$p_1A_1 - p_2A_2 + R_X = \rho \times V_2 \times \underbrace{V_2\,Area_2}_{CAUDAL} - \rho \times V_1 \underbrace{V_1 \times Area_1}_{CAUDAL}$$

$$p_1A_1 - p_2A_2 + R_X = \rho \times Q\left(V_2 - V_1\right)(1)$$

Donde las incógnitas son la velocidad en la salida y la presión en el punto 2.

Aplicando la ecuación de continuidad podemos hallar la velocidad en el punto dos dado que el caudal que entra es igual al que sale y si en fluido es incompresible las densidades son iguales, por lo que:

$$\rho_1 \times V_1 \times Area_1 = \rho_2 \times V_2 \times Area_2$$

$$\cancel{\rho_1} \times V_1 \times Area_1 = \cancel{\rho_2} \times V_2 \times Area_2$$

$$V_1 \frac{\pi\, d_1^{\,2}}{4} = V_2 \frac{\pi\, d_2^{\,2}}{4} \Rightarrow V_1 \frac{\cancel{\pi}\, d_1^{\,2}}{\cancel{4}} = V_2 \frac{\cancel{\pi}\, d_2^{\,2}}{\cancel{4}}$$

$$V_2 = V_1 \left(\frac{d_1}{d_1}\right)^2 = 2\frac{m}{s}\left(\frac{30cm}{15cm}\right)^2 = 8\frac{m}{s}$$

La presión puede hallarse aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos de entrada y salida

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V^2{}_2}{2g} + z_2$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V^2{}_2}{2g} + \cancel{z_2}$$

$$P_2 = P_1 - \gamma\left(\frac{V^2{}_2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right)$$

$$P_2 = 2{,}1\frac{Kg}{cm^2} - 1000\frac{Kg}{m^3}\left(\frac{(8m/s)^2 - (2m/s)^2}{2 \times 9{,}8\frac{m}{s^2}}\right) = 1{,}79\frac{Kg}{cm^2}$$

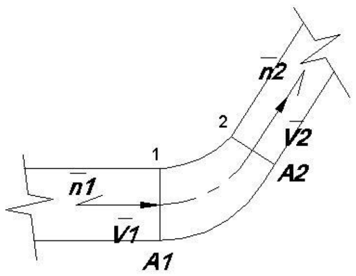
Volviendo a la ecuación (1)

$$p_1A_1 - p_2A_2 + R_X = \rho \times Q\left(V_2 - V_1\right)$$

$$2{,}1\frac{Kg}{cm^2}\frac{\pi\,(30cm)^2}{4} - 1{,}79\frac{Kg}{cm^2}\frac{\pi\,(15cm)^2}{4} + R_X = 1000\frac{Kg}{m^3}\left(2\frac{m}{s} \times \frac{\pi\,(0{,}30m)^2}{4}\right)(8-2)\frac{m}{s}$$

Resolviendo nos queda que Rx = 1081 Kg

7.- Analizar el caso general de un flujo permanente de un fluido compresible a través de un codo convergente curvo y ascendente en un ángulo θ , que forma parte de una tubería como se indica en la figura. Determinar y expresar en función de los datos, la fuerza de sujeción necesaria y la fuerza que el fluido ejerce sobre el codo, entre las secciones de entrada y salida.



$$\frac{DN}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho dv+\int_{SC}\eta\rho\bar{v}*\overline{dA}$$

Considerando que la cantidad de movimiento es $\eta=\frac{m\dot{V}}{m}=\bar{V}$

y también $\frac{DP}{Dt}=\bar{F}$

El volumen de control es el tubo con las presiones manométricas de entrada y salida por lo que sabemos el VC no se modifica (no se expande ni se contrae durante el estudio) entonces

$$\frac{DN}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\cancel{\eta\rho dv}+\int_{SC}\eta\rho\bar{v}*\overline{dA}$$

$$\sum \text{Fuerzas}=\int_{SC}\bar{V}\,\rho\,\bar{V}*\overline{dA}$$

$$\int_{A1}\overline{V_1}\rho_1\,\overline{V}_1*\overline{dA}_1-\int_{A2}\overline{V_2}\rho_2\,\overline{V}_2*\overline{dA}_2=\int_{A1}V_1\,\rho_1\,V_1\,dA_1-\int_{A2}V_2\,\rho_2 V_2\,dA_2$$

Igualando las expresiones tenemos

$$\sum \text{Fuerzas}=\int_{A1}V_1\,\rho_1\,V_1\,dA_1-\int_{A2}V_2\,\rho_2 V_2\,dA_2$$

En dirección de x

$$p_1A_1-p_2A_2\cos\theta+R_X=\rho_2\times V_2^2\times \text{Area}_2\cos\theta-\rho_1\times V_1^2\times \text{Area}_1$$

En dirección de y

$$-p_2A_2\text{sen}\theta-\text{peso}+Ry=\rho_2\times V_2^2\times \text{Area}_2\,\text{sen}\theta$$

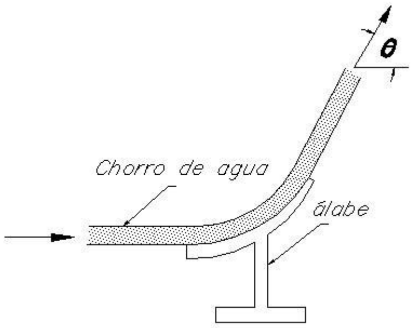
Entonces

$$Rx=\left(p_2A_2\cos\theta-p_1A_1\right)+\rho_2\times V_2^2\times \text{Area}_2\cos\theta-\rho_1\times V_1^2\times \text{Area}_1$$

$$Ry=\rho_2\times V_2^2\times \text{Area}_2\,\text{sen}\theta+p_2A_2\text{sen}\theta+\text{peso}$$

Si el flujo es compresible las densidades son iguales tanto a la entrada como a la salida del volumen de control, siempre debe tenerse en cuenta la ubicación del volumen para considerar o no el peso tanto del fluido que recorre el volumen o bien el peso de la cañería en si.

8.- Considere un flujo permanente de un chorro de agua que impacta en un álabe curvo de una máquina rotatoria, cuyas características geométricas se muestran en la figura, suponga primero que el álabe está quieto. Determinar la fuerza necesaria para que el álabe permanezca quieto.



Si el agua sale de una boquilla hacia la presión atmosférica y si impacta en forma suave de manera de mantener su área constante el caudal de agua a la entrada y a la salida del álabe es la misma además si el fluido es incompresible tenemos que:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$
$$Rx = \rho A V^2 (\cos\theta - 1) = \dot{m} V (\cos\theta - 1)$$
$$Ry = \rho A V^2 (\operatorname{sen}\theta - 1) + Peso = \dot{m} V (\operatorname{sen}\theta - 1) + Peso$$

Como este es un ejemplo de chorro a superficie libre las presiones a la entrada y a la salida del volumen de control son iguales por lo que si tomamos la presión relativa $P_1 = P_2 = 0$

9.- Para el álabe indicado en el problema 8, considere ahora que el chorro golpea con una velocidad de 30 m/seg y que el álabe tiene una velocidad tangencial de 12 m/seg en el sentido de las x positivas, el área de la sección del chorro, permanece constante y es de 6,5 cm², siendo θ = 60º, y la longitud del arco de apoyo o cuna es l = 8 cm, Se pide:

a.- Calcular la base reactiva en la base del álabe que no le permite acelerar y mantener su velocidad de 12 m/seg.

Consideramos Vc como velocidad del chorro y Va como la velocidad del álabe

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$
$$Rx = \rho A (Vc - Va)^2 (\cos\theta - 1)$$
$$Ry = \rho A (Vc - Va)^2 (\operatorname{sen}\theta - 1) + \rho g A l$$

b.- La potencia de se puede calcular como

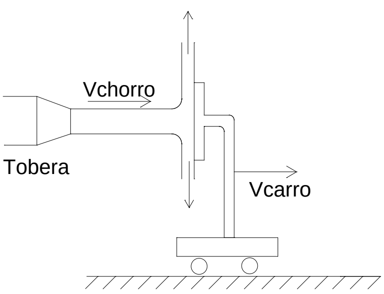
$$Pot = Rx\,Va = \rho A (Vc - Va)^2 (\cos\theta - 1)\,Va$$

c.- la velocidad absoluta de una partícula de fluido al salir del álabe.

La velocidad del fluido que sale del álabe va a ser la suma vectorial relativa según el eje x y la velocidad de salida

$$V_{absoluta} = (Vc - Va)\cos 60° + Va$$

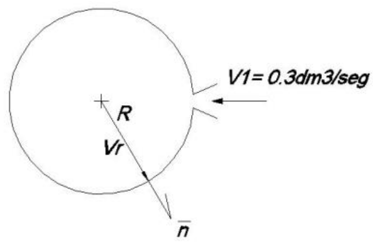
10.- Un chorro de agua de velocidad V_{chorro} sale de una tobera e incide perpendicularmente a una placa plana que se mueve hacia la derecha a velocidad V_{carro}. Calcular la fuerza necesaria para mantener la placa en movimiento a velocidad constante. Si la densidad relativa del chorro del chorro es 1. El área del chorro es 3 cm² V_{chorro} y V_{carro} son 20 y 15 m/s, respectivamente. Despreciar el peso del chorro y de la placa y suponer flujo estacionario respecto a la placa móvil, y que el chorro



se divide en dos chorros iguales, uno hacia arriba y otro hacia abajo.

Ver problema en el libro de Frank White

11.- Se infla un globo con un suministro de aire de 0.3 dm^3/seg. Se pide analizar el problema y obtener una expresión que permita calcular la razón de crecimiento del radio del globo en cada instante, y ver si esta se mantiene constante o varía.



Podemos considerar que es un problema de flujo permanente donde la salida del flujo se produce por infinitas superficies dA que forman la superficie del globo manteniéndose el volumen igual al volumen inicial.

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dv + \int_{SC} \rho \bar{v} * \overline{dA} \; (\eta = 1)$$

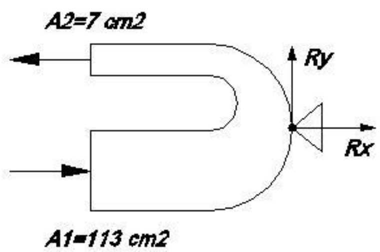
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \cancel{\rho dv} + \int_{SC} \rho \bar{v} * \overline{dA} = 0$$

$$0 = -V_1 A_1 + V_R A_R \Rightarrow V_R = \frac{V_1 A_1}{4\pi R^2}$$

$$V_R = \frac{0{,}0003 m^3 / s}{12{,}56 R^2} = \frac{2{,}3810^{-5}}{R^2}$$

De donde sacamos como conclusión que la velocidad de crecimiento del globo es varía para cada radio

12.- Establezca que fuerza es necesaria para mantener un codo de inversión de 180º, fijo en su posición. El codo y sus características geométricas, se muestran en la figura. Suponga que el codo se encuentra en un plano horizontal, y que ingresa un caudal másico de 14 Kg/seg de agua a una presión de 202 KPa y que la salida se descarga a la atmósfera



Como

$$\dot{m} = \rho_1 \times V_1 \times Area_1 = \rho_2 \times V_2 \times Area = 14\frac{Kg}{s}$$

$$V_1 = \frac{14\ Kg/s}{1000\frac{Kg}{m^3} \times 0{,}0113m^2} \cong 1{,}23\ m/s \quad y \quad V_2 = \frac{14\ Kg/s}{1000\frac{Kg}{m^3} \times 0{,}0007m^2} = 20\ m/s$$

$$R_X = -p_1A_1 - p_2A_2 + \rho \times V_2^2\ Area_2\ \cos\theta - \rho \times V_1^2 \times Area_1$$

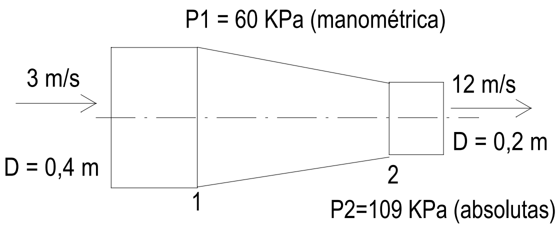
$$con\ \theta = 180°$$

$$Ry = 0 \rightarrow \text{No tenemos entradas o salidas en esa dirección}$$

$$Rx = 202Kpa \times 0{,}0113m^2 + 1000\frac{Kg}{m^3}(20m/s)\left(0{,}0007m^2\right)\cos 180° - 1000\frac{Kg}{m^3}(1{,}23m/s)\left(0{,}0113m^2\right) =$$

$$Rx = -2257\ N\left(\text{hacia la izquierda}\right)$$

13-. Se tiene una reducción en el sistema de la figura, el volumen interno del mismo es 0,2 m[3] y su masa 25 Kg. Evalúe la fuerza total que deben proporcionar los tubos a la reducción para mantenerla en su lugar. Fluido agua

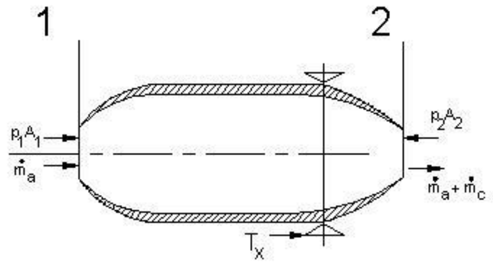


Este problema no se resuelve por ser similar a los ya hechos a fin de que el alumno aplique los conocimientos adquiridos.

14.- Un motor de reacción se prueba estáticamente sobre un banco de pruebas, la velocidad de entrada de aire es 150 m/seg, y la de los gases de escape 1200 m/seg. El aire de entrada y los gases de escape están a la presión atmosférica, la relación de mezcla [combustible / aire] es de 1/50, y las áreas de entrada y salida del motor son de 0.18 m[2].

a.- Determinar la fuerza necesaria para mantener retenido al motor

b.- Si la densidad del aire de entrada es 1,27 Kg/m[3], cuál será la densidad de los gases de salida



$$Rx = -\cancel{p_1A_1} + \cancel{p_2A_2} + \left(\dot{m}_{aire} + \dot{m}_{combustible}\right) \times V_2 - \dot{m}_{aire} \times V_1$$

$$Ry = Peso$$

La cual puede escribirse como

$$R_X = \left(1 + \frac{\dot{m}_c}{\dot{m}_a}\right) \times \dot{m}_a \times V_a - \dot{m}_a \times V_a$$

$$Ry = 0$$

$$\dot{m}_a = \rho_a \times V_1 \times Area_1 = 34{,}83\ kg/s$$

$$R_X = \left(1 + \frac{1}{50}\right) \times 34{,}83 \frac{Kg}{s} \times 1200 \frac{m}{s} - V_a - 34{,}83 \frac{Kg}{s} \times 150 \frac{m}{s} = 37{,}38\ KN$$

La densidad del aire de salida será $\dot{m}_{gases} = \left(1 + \frac{1}{50}\right) \dot{m}_{aire} = \rho_2\ V_2\ A_2 = \rho_2 \times 1200 \frac{m}{s} \times 0{,}18 m^2 = 0{,}16 \frac{Kg}{m^3}$

Es decir ha disminuido la densidad comparada con la entrada del motor