Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas
e Ingeniería

MECÁNICA DE LOS FLUIDOS

EJERCICIOS ADICIONALES

CLASES TEÓRICAS

CAPA LÍMITE

2014

UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA - *SANTA MARÍA DE LOS BUENOS AIRES*
FACULTAD DE FISICOMATEMÁTICAS E INGENIERÍA
CÁTEDRA DE MECÁNICA DE FLUIDOS

GUIA TEÓRICA 5: CAPA LÍMITE

Problema 1

Una placa rectangular lisa de 0.60 m de anchura por 24 m de longitud se mueve a una velocidad de 12.0 m/seg en la dirección de su longitud a través de una masa de aceite. Calcular:

a) La resistencia sobre la placa y el espesor de la capa limite en el borde de salida.
b) ¿Sobre qué longitud de la placa se mantiene la capa limite laminar?

Utilizar la viscosidad dinámica = 1,49 x 10^{-1} kg/m.seg y ρ = 850 kg/m^3.

Rta: a) 5526,5 N; 497,6 mm ; b) 14,6m

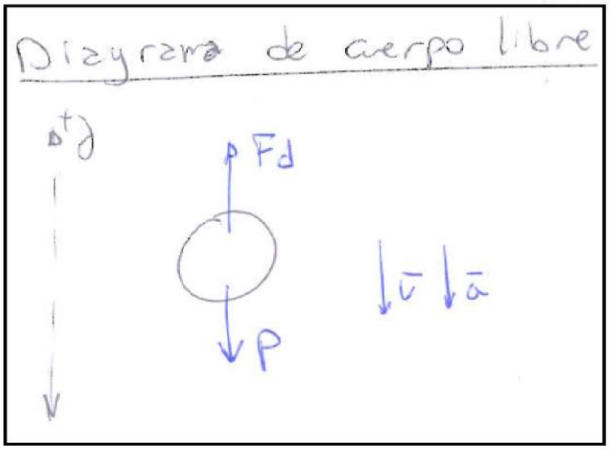
Problema 2

Plantear la ecuación diferencial para la posición y(t) en la caída vertical de una esfera de masa M y diámetro D, considerando el peso propio y la resistencia del aire, para grandes números de Reynolds (donde no es válido el criterio de flujo de Stokes). Calcular la velocidad terminal, suponiendo un Cd constante (buena aproximación entre Re 10^3 y 10^5)

Rta: $V_f = [(8.g.M)/(\pi.\rho.C_d.d^2)]^{1/2}$

·) Hallar ec. diferencial $y(x)$

<u>DATOS</u>: M, D, Cd



<u>Fd</u>: Fuerza de drag

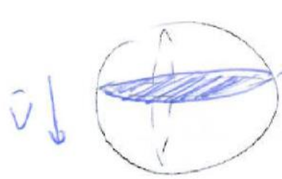
<u>P</u>: peso

$$\boxed{\sum F_y = P - Fd = m \cdot a} \quad (1)$$

$$\boxed{P = M \cdot g} \quad (2)$$

A: área → para esfera es círculo proyectado

$$\boxed{Fd = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot Cd \cdot A} \quad (3)$$



$$\boxed{A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}} \quad (4)$$

reemplazo:

$$(4) \xrightarrow{A} (3) \xrightarrow{Fd} \;\; (2) \xrightarrow{P} \;\; \rightarrow (1) \rightarrow \text{ec.}$$

$$Mg - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \, Cd \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = M \cdot a$$

reacomodando los términos, $\quad y'' = a$
$\quad y' = v$

$$M \cdot y'' + \frac{\rho \cdot Cd \cdot \pi \cdot D^2}{8} \cdot (y')^2 = M \cdot g$$

$$\boxed{y'' + \frac{\rho \cdot Cd \cdot \pi \cdot D^2}{8 \cdot M}(y')^2 = g} \quad (5)$$

Para velocidad terminal; $a = 0$:

$$\frac{\rho \cdot Cd \cdot \pi \cdot D^2}{8 \cdot M} \cdot V^2 = g$$

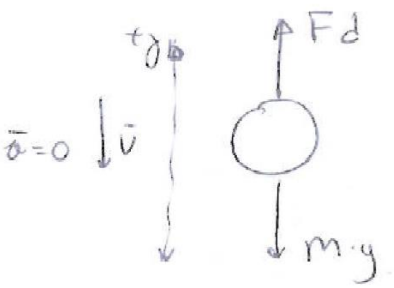
$$\boxed{V = \left[\frac{8 \cdot M \cdot g}{\rho \cdot Cd \cdot \pi \cdot D^2}\right]^{1/2}}$$

Problema 3

En el viscosímetro de Stokes se usa la relación **D=3πdVμ** (Ley de Stokes) donde d es el diámetro de la esfera, V la velocidad relativa del fluido y μ la viscosidad. Deducir de esta expresión el valor del CD de una esfera para Re < 1.

Rta: C_d= 24/Re

DCL:



Por ley de Stokes:

$$\boxed{Fd = 3\pi D \cdot V \cdot \mu} \quad (1)$$

Llegar a $\boxed{Cd = \frac{24}{Re}}$ (2)

En el caso de la esfera;

$$\boxed{Fd = \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 \cdot Cd \cdot A} \quad (3)$$

donde A: área proyectada (círculo)

$$\boxed{A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}} \qquad Fd = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot cd \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$\boxed{Fd = \frac{\rho \cdot V^2 \cdot Cd \cdot \pi \cdot D^2}{8}} \quad (4)$$

·) por el nro de Reynolds para esfera:

$$\boxed{Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu}} \quad (5) \quad ; \qquad \text{vemos que } (4) = (1)$$

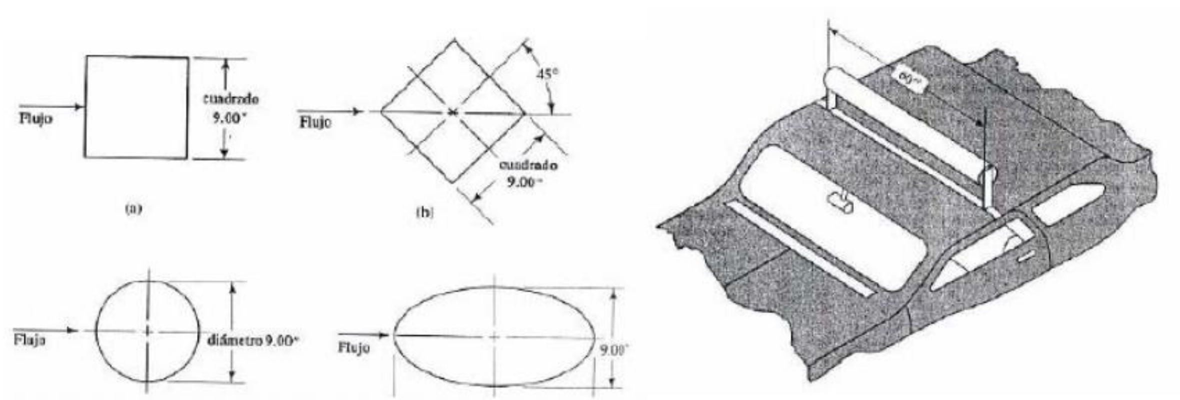
$$\frac{\rho \cdot V^{\cancel{2}} \cdot cd \cdot \cancel{\pi} \cdot D^{\cancel{2}}}{8} = 3 \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{D} \cdot \mu \cdot \cancel{V}$$

$$Cd = \frac{24 \cdot \mu}{\rho \cdot V \cdot D} = \frac{1}{Re}$$

$$\boxed{Cd = \frac{24}{Re}}$$

Problema 4

Se debe diseñar el cartel de publicidad de un auto, para el cual se proponen las siguientes cuatro geometrías. Determinar cuál es la óptima.



para todas las geometrías.

$$\boxed{F_d = \frac{1}{2}\,\rho \cdot v^2 \cdot A \cdot C_d} \quad (1) \qquad \text{tenemos: } \frac{1}{2}\,\rho \cdot v^2 = cte = C$$

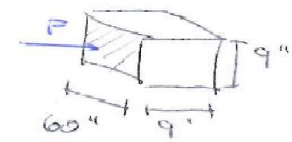
Para los cálculos de Cd, uso tabla de pág 460 del White.

•)

$\boxed{Cd_1 = 1{,}07}$

$A_1 = b \cdot h = 60'' \cdot 9''$

$1'' = 2{,}054 \cdot 10^{-2}\ m$

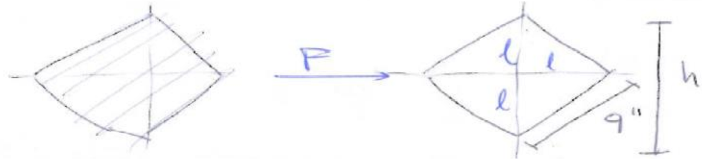


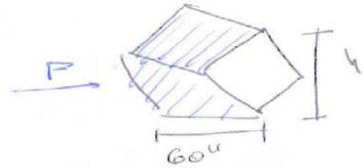
$$A_1 = 60'' \cdot 9'' \cdot \frac{(2{,}054 \cdot 10^{-2})^2\ m^2}{''^2} \quad ; \quad \boxed{A_1 = 0{,}23\ m^2}$$

queda: $Fd_1 = C \cdot 1{,}07 \cdot 0{,}23\ m^2$

$\boxed{Fd_1 = 0{,}246\ C}$

•)





$(9'')^2 = l^2 + l^2$

$9^2 = 2\,l^2 ; \quad \frac{81}{2} = l^2 ; \quad l = \frac{9}{\sqrt{2}} ; \quad h = 2l$

$\boxed{h = \sqrt{2}\ 9''}$

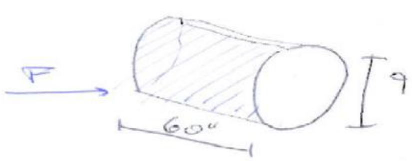
$\boxed{A_2 = h \cdot 60'' = \sqrt{2} \cdot 9'' \cdot 60'' = \sqrt{2}\ 0{,}23\ m^2}$

$\boxed{Cd_2 = 0{,}81}$

$Fd_2 = C \cdot 0{,}81 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}23$

$\boxed{Fd_2 = C \cdot 0{,}263}$

•)



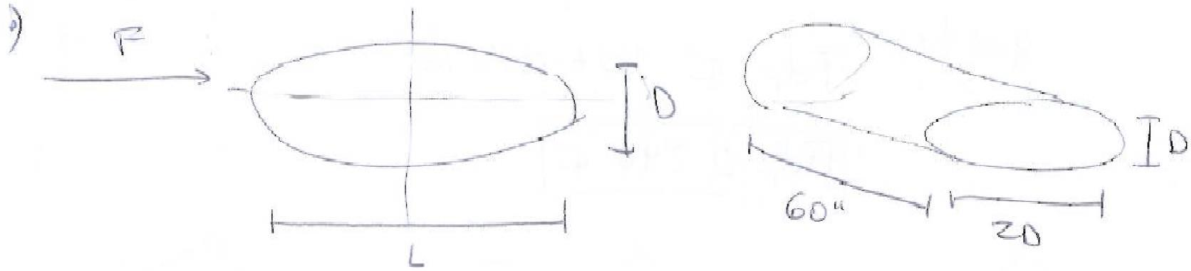
$\boxed{A_3 = 60'' \cdot 9'' = 0{,}23\ m^2}$

$\frac{L}{D} = \frac{60''}{9''} = 6{,}66 \longrightarrow$ de tabla

$\boxed{Cd_3 = 0{,}78}$

$\boxed{Fd_3 = \mathbb{C} \cdot 0,179}$

d)



(Asumo L = 20)

de tabla; Pág 460 White, $\frac{L}{D} = \frac{20}{D} = 2$

Asumo flujo turbulento: $\boxed{Cd_4 = 0,27}$

$\left[A_4 = 60'' \cdot D = 60'' \cdot 9'' = 0,23\ m^2\right]$

$Fd_4 = \mathbb{C} \cdot 0,27 \cdot 0,23$; $\boxed{Fd_4 = 0,062\ \mathbb{C}}$

Vemos que: $Fd_4 < Fd_3 < Fd_1 < Fd_2$

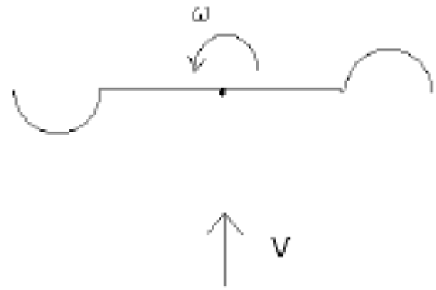
La geometría óptima es la elipse (Fd4)

Problema 5

La figura muestra un anemómetro de copas compuesto por dos cáscaras semiesféricas de 5 cm. de diámetro conectadas al eje por una varilla de longitud total 30 cm.

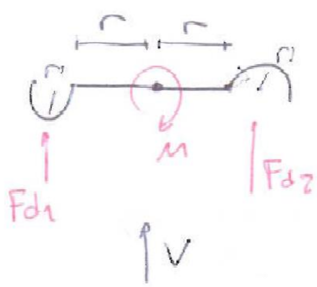
a) ¿Cuánto vale la cupla si el anemómetro está fijo (ω = 0), con una velocidad de viento de 20 m/s?

b) Deducir una expresión que vincule la velocidad de rotación con la velocidad del viento incidente para que la cupla total en la posición mostrada en la figura sea = 0. (Recordar que la resistencia de un cuerpo depende de la velocidad relativa del viento). Despreciar la resistencia aerodinámica de la varilla. Si el eje central se opone con un momento de 0.004 N.m, constante, graficar la curva de velocidad de rotación (ω) vs velocidad del viento (U) para 0<U<25 m/seg.



Rta: a) M = 0,081Nm; b) ω = 1,733U

a) Hallar Cupla



Datos: r, v, ri (esfera)

Dado que $\Sigma M = 0$ por $\bar{\alpha} = 0$, $V = cte$,

$$F_{d2} \cdot (r + r_i) - M - F_{d1} (r + r_i) = 0$$

$$\boxed{M = (F_{d2} - F_{d1})(r + r_i)} \quad (1)$$

$$\boxed{F_{d1} = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \, c_{d1} \cdot A_1} \quad (2) \qquad \boxed{A_1 = \pi \cdot r_i^2}$$

de tabla; $c_{d1} = 0{,}4$; reemplazo;

$$\boxed{F_{d1} = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \, 0{,}4 \cdot \pi \cdot r_i^2} \quad (2')$$

$$\boxed{F_{d2} = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \, c_{d2} \cdot A_2} \rightarrow \boxed{A_2 = \pi \cdot r_i^2}$$

$\rightarrow c_{d2} = 1{,}4$

$$\boxed{F_{d2} = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot 1{,}4 \cdot \pi \cdot r_i^2} \quad (3)$$, reemplazo (2) y (3) en (1):

$$M = \frac{1}{2}\rho\cdot V^2\cdot\pi\cdot r_i^2\left(1{,}4-0{,}4\right)\cdot(r+r_i)$$

(4) $\boxed{M = \frac{1}{2}\rho\cdot V^2\cdot\pi\cdot r_i^2\cdot(r+r_i)}$ reemplazo datos

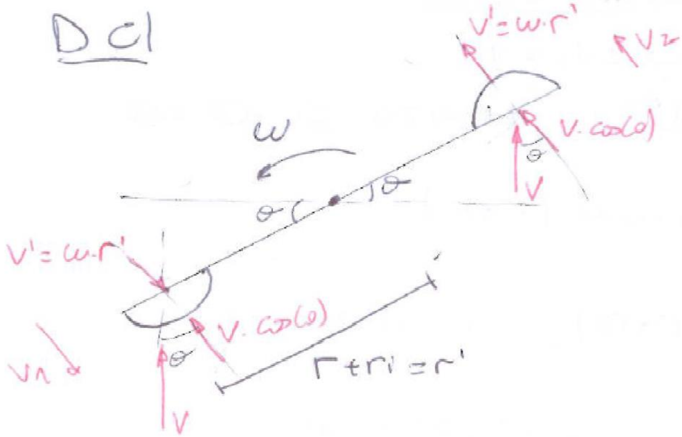
$$r_i = \frac{0{,}05\,m}{2} = 0{,}025\,m$$

$$M = \frac{1}{2}\cdot 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}\cdot\left(20\,\frac{m}{s}\right)^2\cdot\pi\cdot\left(\frac{0{,}05}{2}\,m\right)^2\cdot\left(\frac{0{,}3+0{,}05}{2}\,m\right)$$

$$\boxed{M = 0{,}082\ Nm}$$

b) Hallar $\omega = f(V)$; dato ; $\boxed{M_{eje} = 0{,}004\ Nm}$

DCL



V: velocidad del viento

V': velocidad de centro de semiesfera

Mo: momento del eje.

de (1): $\boxed{M_o = (F_{d2} - F_{d1})(r+r_i)}$

$$M_o = \frac{1}{2}\rho\cdot A\left(C_{d2}\cdot V_2^2 - C_{d1}\cdot V_1^2\right)\cdot(r+r_i)$$

$C_{d2} = 1{,}4$

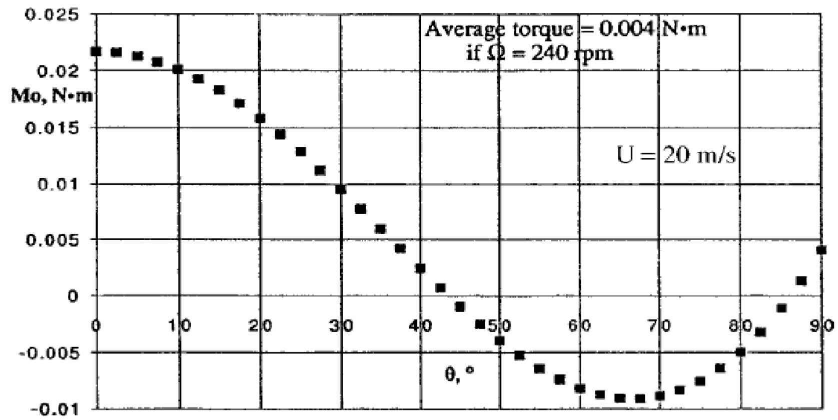
$C_{d1} = 0{,}4$

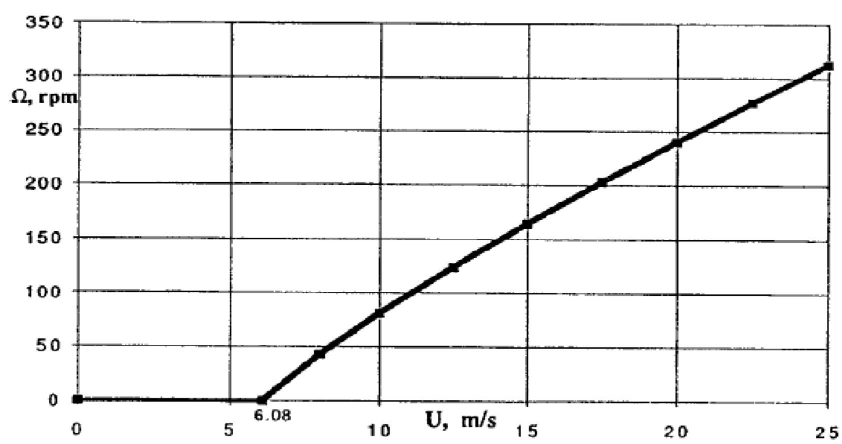
$$V_2 = V\cos(\theta) + \omega\cdot r'$$
$$V_1 = V\cos(\theta) - \omega\cdot r'$$

$$Mo = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot \left[Cd_2 \cdot (V\cos(\theta) + \omega \cdot r') - Cd_1 (V\cos(\theta) - \omega \cdot r') \right] (r + r_1)$$

queda ecuación en función de θ y ω

con valores fijos de ω, obtengo gráficas sinusoides de momento. Tomo promedio de velocidades y obtengo el gráfico neto:





Problema 6

El vagón de ferrocarril que se muestra en la figura pesa 20 toneladas y mide 13 mts. de largo, se mueve sobre una vía cuyos rieles están separados 2 m. ¿Qué velocidad lateral de viento lo hará volcarse? El aire está a 15ºC.

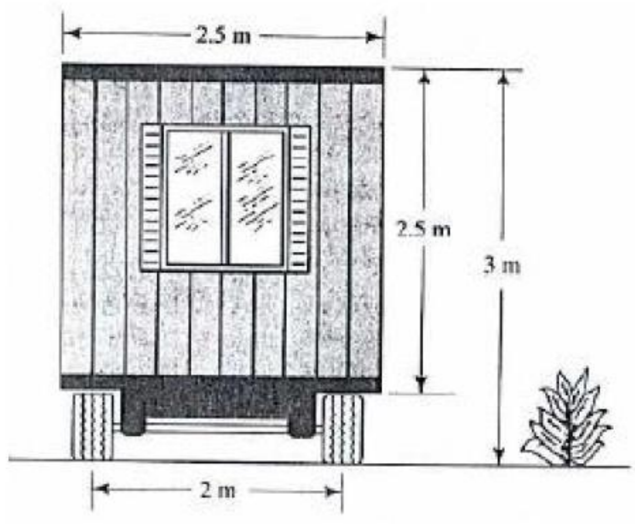
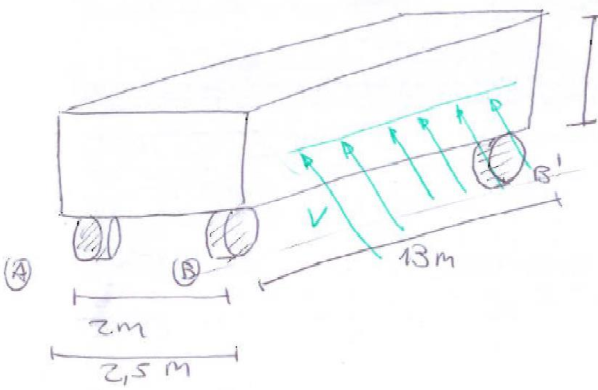
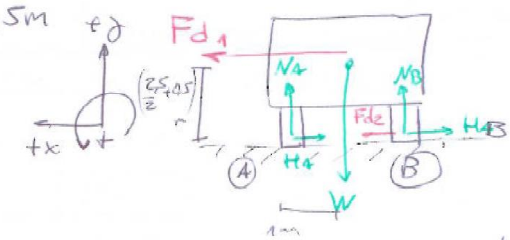


Diagrama:



DCl frontal



Cuando el vagón está a punto de volcar, se cumple:

$\boxed{\Sigma F_x = 0}$ $\boxed{\Sigma F_y = 0}$

$\boxed{\Sigma M_A = 0}$

Fd1: Fuerza de drag 1 sobre cara lateral del vagón

Fd2: Fd sobre rodamiento.

Sólo tomo las F_{d2} sobre las ruedas B y B', no sobre A y A'

$$\boxed{\Sigma F_x = F_{d1} + 2F_{d2} - 2H_A - 2H_B = 0}$$

$$\boxed{\Sigma F_y = 2N_A + 2N_B - W = 0}$$

$N_B \rightarrow 0$, $H_B \rightarrow 0$

$$\Sigma M_A = Fd_1 \cdot \left(\frac{2,5}{2} + 0,5\right)\cancel{m} - W \cdot 1\cancel{m} + Fd_2 \cdot \frac{0,5\cancel{m}}{2} = 0$$

$$\boxed{1,75 \cdot Fd_1 - W + 0,25\, Fd_2 = 0}$$

Tenemos:

·) $\boxed{Fd_1 = \frac{1}{2}\rho \cdot Cd_1 \cdot A_1 \cdot V^2} \longrightarrow A_1 = b \cdot h = 13 \cdot 2,5 m^2$

$\boxed{A_1 = 32,5 m^2}$

$\boxed{\rho)_{15°C} = 1,225 kg/m^3}$ $\quad \to \boxed{Cd_1 = 1.07}$ (Tabla de pag 460 white)

$$Fd_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \frac{kg}{m^3} \cdot 1,07 \cdot 32,5 m^2 \cdot V^2$$

$$\boxed{Fd_1 = 21,3\ V^2 \frac{kg}{m}}$$

2 ruedas

·) $\boxed{Fd_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot Cd_2 \cdot A_2 \cdot V^2} \longrightarrow A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{(0,5 m)^2}{4}$

$\boxed{A_2 = 0,196\ m^2}$

$\to \boxed{Cd_2 = 1,17}$ (Tabla)

$$Fd_2 = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 1,225 \frac{kg}{m^3} \cdot 1,17 \cdot 0,196\ m^2 \cdot V^2$$

$$\boxed{Fd_2 = 0,28 \frac{kg}{m} \cdot V^2}$$

·) $W = 20\ \cancel{Ton} \cdot \frac{10^3 kg \cdot g}{\cancel{Ton}}$; $\boxed{W = 2 \cdot 10^4\ kg \cdot g}$

reemplazamos datos:

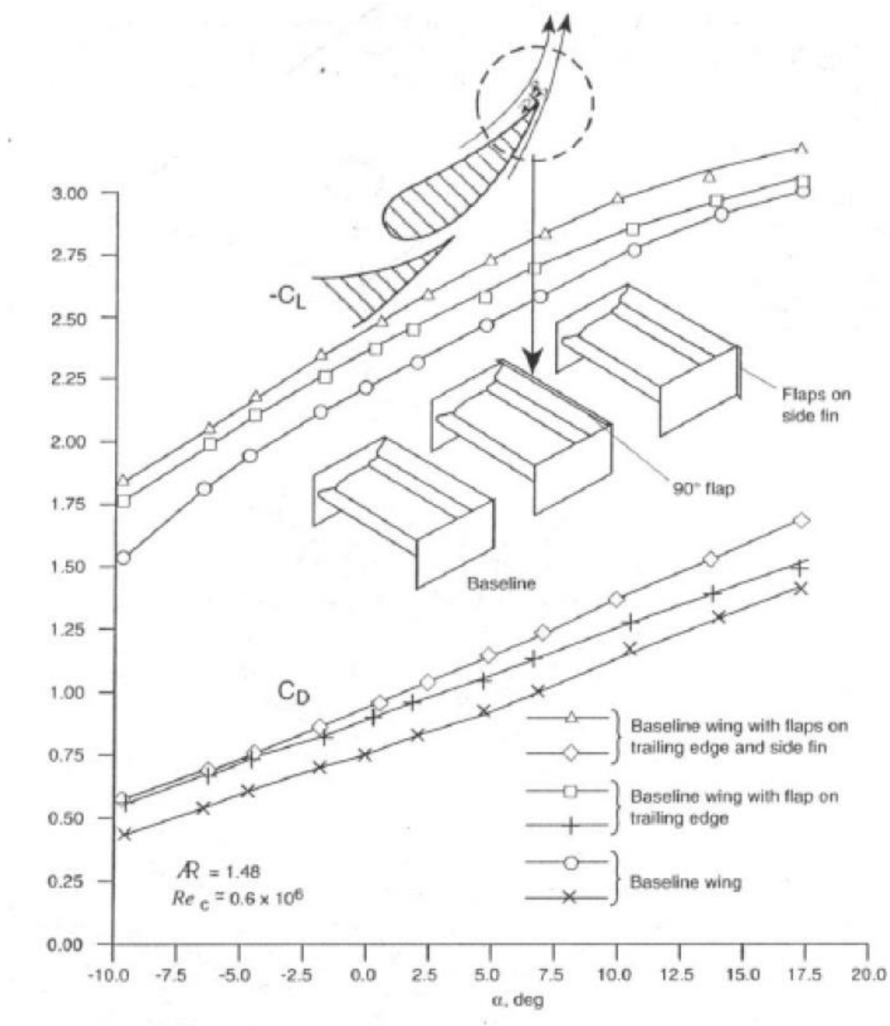
$$1,75 \cdot 21,3 \cdot V^2 \frac{\cancel{kg}}{m} - 2 \cdot 10^4 \cancel{kg} \cdot g + 0,25 \cdot 0,28 \frac{\cancel{kg}}{m} \cdot V^2 = 0$$

$$37,3 \frac{V^2}{m} - 1,962 \cdot 10^5 \frac{m}{s^2} = 0 \qquad 37,3 \frac{V^2}{m} = 1,962 \cdot 10^5 \frac{m}{s^2}$$

$$V^2 = \frac{1,962 \cdot 10^5\ m \cdot m}{s^2 \cdot 37,3} \qquad \boxed{V = 72,5 \frac{m}{s} = 261 km/h}$$

Problema 7

Calcular en N y kgf. el empuje y la resistencia obtenidos utilizando la configuración de alerón ranurado con flap a 90º de la figura, de 40 cm de cuerda y 80 cm de ancho, suponiendo flujo bidimensional, a 200 km/h, con ángulo de ataque 5 y 8 grados.
Si el auto tiene un área frontal de 1 m2 y un Cd de 0.3 basado en esa área, ¿en qué porcentaje se incrementa la resistencia aerodinámica del auto debido al alerón?

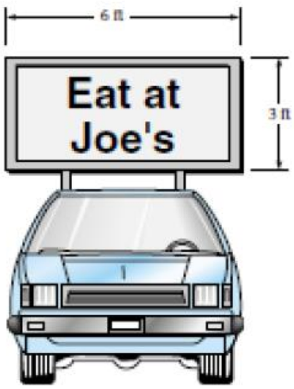


Rta: a) α = 5º, D = 611,85N, L = 1485,93N; α = 8º, D = 699,26N, L = 1584,99N
b) α = 5º, 112% ; α = 8º, 128%

Problema 8

Un camión tiene un factor C_d A = 3,25 m^2 y una resistencia al rodado de 670 N. Estimar la potencia requerida por el móvil para trasladarse a una velocidad de 90 km/h bajo las siguientes condiciones:

a) Sin el cartel;
b) Con el cartel de 6 ft x 3 ft.

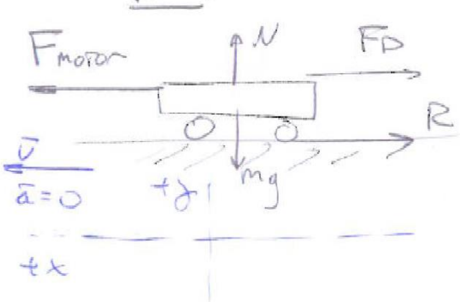


Rta: a) 62 HP; b) 86 HP

Datos: Cd.A, Resistencia al rodado "R", V

a) Hallar potencia (sin cartel)

DCL



Sabemos:

$$\boxed{\Sigma F_y = 0} \quad (1)$$

$$\boxed{\Sigma F_x = F_m - F_D - R = 0} \quad (2)$$

$\dot{L}$: potencia; $\boxed{\dot{L} = F_m \cdot V}$ (3)

de (2): $\boxed{F_m = F_D + R}$ (4)

$\boxed{R = 670\ N}$ (5) ; (dato)

$$\boxed{F_D = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot A \cdot V^2 \cdot \rho_{aire}} \quad (6)$$

Esquema:

$C_d \cdot A,\ \rho_{aire},\ V \to (6) \xrightarrow{F_D} (4) \xrightarrow{F_m} (3) \to \boxed{\dot{L}}$

$R \to (4)$; $V \to (3)$

$\dot{L} = (F_D + R)\cdot V$

$$\boxed{\dot{L} = \left(\frac{1}{2} C_d \cdot A \cdot V^2 \cdot \rho_a + R\right)\cdot V} \quad (7)$$

Datos:) $V = 90 \frac{km}{h}\cdot\frac{1h}{3600s}\cdot\frac{10^3 m}{km}$ $\quad \boxed{V = 25 \frac{m}{s}}$

) $[C_d \cdot A = 3,25\ m^2]$

) $[\rho_a = 1,29\ kg/m^3]$

reemplazo:

$$\dot{L} = \left[\frac{1}{2}\cdot 3,25 m^2 \cdot (25)^2 \frac{m^2}{s^2}\cdot 1,29 \frac{kg}{m^3} + 670 N\right]\cdot 25\frac{m}{s}$$

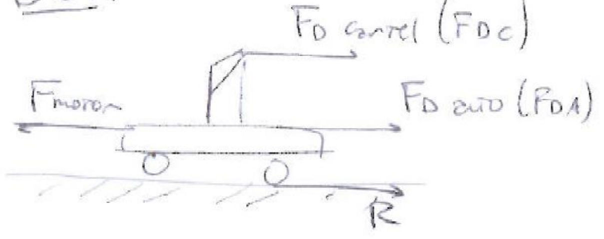
Unidades: $kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$

$\boxed{\dot{L} = 49504\ W}$; en HP: $1 HP = 745 W$

$\boxed{\dot{L} = 66,44\ HP}$ → con $\rho_a = 1,2$; $\dot{L} \approx 62\ HP$

b) Sumo cartel.

DCL:



$$\boxed{\dot{L} = F_m \cdot V} \quad (1)$$

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \quad (2)$$

$$\boxed{\Sigma F_y = 0} \quad (3)$$

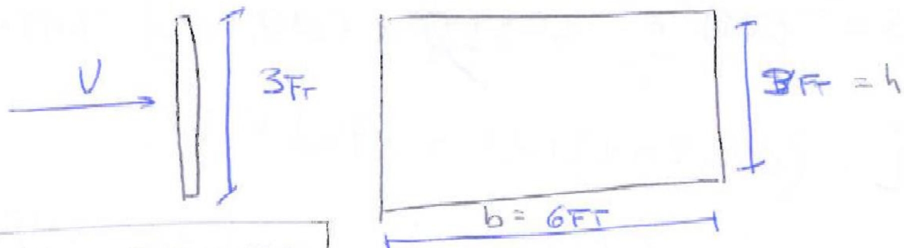
$\Sigma F_x = F_m - F_{DC} - F_{DA} - R = 0$

$$\boxed{F_m = F_{DC} + F_{DA} + R} \quad (4)$$

$$\boxed{F_{DA} = \frac{1}{2} Cd \cdot A \cdot V^2 \cdot \rho_{aire}} \quad (5)$$

$$\boxed{F_{DC} = \frac{1}{2} \cdot Cd' \cdot A' \cdot V^2 \cdot \rho_{aire}} \quad (6)$$

Para (6):



Tomo $\boxed{1FT = 0{,}3048\ m}$

De tabla del White: $\frac{b}{h} = 2$, $\boxed{Cd' \approx 1{,}19}$

$\boxed{A' = b \cdot h}$

en (6):

$$\boxed{F_{DC} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}19 \cdot b \cdot h \cdot V^2 \cdot \rho_a} \quad (6)$$

Esquema:

$$\left.\begin{array}{l} (6) \xrightarrow{F_{DC}} \\ (5) \xrightarrow{F_{DA}} \end{array}\right| \xrightarrow{(4)} F_m \longrightarrow (1) \longrightarrow \boxed{\dot{L}}$$

reemplazo (5) y (6) a (4).

$$F_M = \frac{1{,}19}{2} \cdot b \cdot h \cdot V^2 \cdot \rho_a + \frac{Cd}{2} \cdot A \cdot V^2 \rho_a + R$$

reemplazo a (1):

$$\dot{L} = \left[\frac{1{,}19}{2} \cdot b \cdot h \cdot V^2 \cdot \rho_a + \frac{Cd}{2} \cdot A \cdot V^2 \rho_a + R\right] \cdot V$$

$$\cdot)\left[\frac{1{,}19}{2}\cdot 6\cancel{ft}\cdot\frac{0{,}3048\,m}{\cancel{ft}}\cdot 3\cancel{ft}\cdot\frac{0{,}3048\,m}{\cancel{ft}}\cdot(25)^2\frac{m^2}{s^2}\cdot 1{,}24\,\frac{kg}{m^3}\right.$$
$$\left.= 802{,}2\ N\right]$$

$$\cdot)\left[\frac{3{,}25}{2}m^2\cdot(25)^2\frac{m^2}{s^2}\cdot 1{,}24\,\frac{kg}{m^3} = 1310{,}1\ N\right]$$

$$\dot{L} = (802{,}2 + 1310{,}1 + 670)\,N\cdot 25\,\frac{m}{s}$$

$$\boxed{\dot{L} = 69557{,}5\ W} \rightarrow \boxed{\dot{L} = 93{,}36\ HP}$$

$$\text{Con } \rho_{aire} = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3},\quad \boxed{\dot{L} = 88\ HP}$$

Problema 9

La velocidad a la que puede viajar Juan con su bicicleta en un camino recto y sin viento es de 10 m/s. la resistencia al rodado de la bicicleta es de 0,80 N s/m. El factor C_d A de la bicicleta y Juan es de 0,422 m^2. La masa de Juan y la de la bicicleta son de 80 kg y 15 kg respectivamente.
A Juan ahora atraviesa un viento de frente de 5 m/s. Se pide:

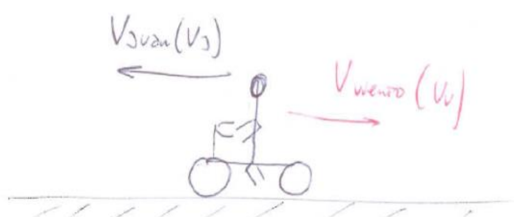
a) Desarrollar una ecuación para la velocidad a la cual Juan puede pedalear con el viento de frente.
b) La velocidad a la que irá para la condición de viento dada.

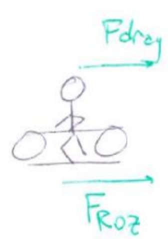
Rta:

a) $$V^3+\left(2V_w+\frac{2C_{RR}}{\rho C_D A}\right)V^2+\left(V_w^2\right)V-\left(V_{nw}^3+\frac{2C_{RR}}{\rho C_D A}V_{nw}^2\right)=0$$

b) V = 7,4 m/s

Diagrama:





Datos: V_J, V_v, C_{RR}, $C_D A)_{Juan}$, M_{Juan}, $m_{bicicleta}$

$$\boxed{\sum F = F_{rozamiento} + F_{drag}} \quad (1)$$

Para Fuerza de drag: tomo una velocidad relativa V'

$$\boxed{V' = V_{Juan} + V_v} \quad (2)$$

$$\boxed{F_{drag} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_d A (V')^2} \quad (3) \qquad \boxed{F_{roz} = C_{RR} \cdot V_J} \quad (4)$$

donde $C_{RR} = \frac{\text{rozamiento}}{\text{velocidad}_{Juan}}$, reemplazo (3),(4),(2) en (1):

$$\boxed{\sum F = C_{RR} \cdot V + \frac{1}{2} \rho \cdot C_d \cdot A \cdot (\overbrace{V_J + V_v}^{V'})^2} \quad (5)$$

Llamo $\dot{L}$ = potencia, tenemos $\boxed{\dot{L} = \sum F \cdot V_J}$ (6)

$$\boxed{\dot{L} = C_{RR} \cdot V_J^2 + \frac{\rho}{2} C_d \cdot A \cdot V_J (V_J + V_v)^2} \quad (7)$$

¡Importante! La potencia de Juan será la misma con viento o sin viento; pedaleará de la misma manera en las 2 condiciones.

Llamo $V_{J\cancel{V}}$: velocidad de Juan sin viento;

$$V_{J\cancel{V}} = 10 \text{ m/s},$$

$$\boxed{\dot{L}_{J\cancel{V}} = C_{RR} \cdot V_{J\cancel{V}}^2 + \frac{\rho}{2} \cdot C_d \cdot A \cdot V_{J\cancel{V}}^3} \quad (8)$$

dado que $\dot{L} = \dot{L}_{J\cancel{V}}$, (7) = (8).

$$\boxed{C_{RR} \cdot V_J^2 + \frac{\rho}{2} \cdot Cd \cdot A \cdot V_J (V')^2 = C_{RR} \cdot V_{J\emptyset}^2 + \frac{\rho}{2} Cd\, A\, V_{J\emptyset}^3}$$

con $V' = V_J + V_V$

$$(V')^2 = (V_J + V_V)^2 = V_J^2 + 2 V_J \cdot V_V + V_V^2$$

$$\frac{\rho}{2} Cd\, A \cdot V_J (V')^2 = \frac{\rho}{2} Cd\, A \left[V_J^3 + 2 V_J^2 V_V + V_J V_V^2 \right]$$

reemplazamos;

$$\frac{\left[C_{RR} \cdot V_J^2 + \frac{\rho}{2} Cd\, A\, V_J^3 + \frac{\rho}{2} Cd\, A \cdot 2 \cdot V_J^2 V_V + \frac{\rho}{2} Cd \cdot A\, V_J V_V^2 \right]}{\frac{\rho}{2} Cd\, A} = \frac{\left[C_{RR} \cdot V_{J\emptyset}^2 + \frac{\rho}{2} \cdot Cd \cdot A \cdot V_{J\emptyset}^3 \right]}{\frac{\rho}{2} Cd\, A}$$

$$V_J^3 + V_J^2 \left(2 V_V + \frac{2 C_{RR}}{\rho\, Cd\, A} \right) + V_J \cdot V_V^2 = \frac{2 \cdot V_{J\emptyset}^2}{\rho \cdot Cd \cdot A} + V_{J\emptyset}^3$$

$$\boxed{V_J^3 + V_J^2 \left(2 \cdot V_V + \frac{2 C_{RR}}{\rho \cdot Cd \cdot A} \right) + V_J \cdot V_V^2 - \left[V_{J\emptyset}^3 + \frac{2 \cdot C_{RR} V_{J\emptyset}^2}{\rho \cdot Cd\, A} \right] = 0}$$

b) para la condicion de viento dada:

$\boxed{V_{J\emptyset} = 10\, m/s}$; $\boxed{\rho = 1{,}2\, kg/m^3}$

$\boxed{Cd \cdot A = 0{,}422\, m^2}$ $\boxed{V_V = +5\, m/s}$

reemplazo:

$$\cdot) \left[2 V_V + \frac{2 C_{RR}}{\rho\, Cd\, A} = 2 \cdot \left(+5 \frac{m}{s}\right) + \frac{2 \cdot 0{,}8\, N}{\frac{m}{s} \cdot 1{,}2 \frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot 0{,}422\, \cancel{m^2}} = \right.$$

$$= +10 \frac{m}{s} + 3{,}16 \frac{\cancel{kg} \cdot m \cdot s}{s^2 \cdot \cancel{kg}} = 13{,}16 \frac{m}{s} \Big]$$

$$\cdot) \; V_{J\emptyset}^3 + \frac{2 \cdot V_{J\emptyset}^2}{\rho \cdot Cd \cdot A} = \left(10 \frac{m}{s}\right)^3 + \frac{2 \cdot 10^2\, \cancel{m^2} \cdot 0{,}8\, N}{1{,}2 \frac{kg}{m^3} \, 0{,}422\, s^2 \cdot \cancel{m^2} \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}} =$$

$$= 10^3 \frac{m^3}{s^3} + \frac{316\ N \cdot m^2}{kg \cdot s} \longrightarrow \frac{\cancel{kg} \cdot m \cdot m^2}{s^2 \cdot \cancel{kg} \cdot s}$$

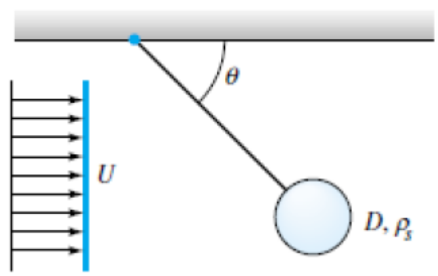
$$= 1316 \frac{m^3}{s^3}$$

$$\boxed{V_s^3 + 13{,}16 \cdot V_s^2 + 25\, V_s - 1316 = 0}$$

↳ resuelvo con software: $\boxed{V_s = 7{,}4\ m/s}$

Problema 10

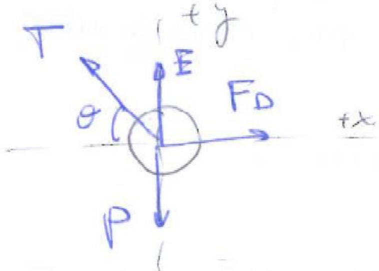
Una esfera de densidad ρ_s y diámetro D se encuentra unida a una cuerda. Cuando la misma es bañada por una corriente de aire cuya velocidad es U, forma un angulo θ, tal como se ilustra en la figura. Encontrar una expresion para θ en función de los datos de la esfera. Despreciar la resistencia de la cuerda.



Rta: $$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(\rho_s - \rho)g(\pi/6)D^3}{(\pi/8)C_D \rho U^2 D^2}\right]$$

Datos: U, θ, D, ρe . hallar θ = f(datos)

-) planteo diagrama de cuerpo libre:



T: tension de la cuerda

FD: Fuerza de drag

P = peso

E: empuje

Se cumple: $\boxed{F_D = \frac{1}{2} Cd \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A_e}$ (1)

$\boxed{A_e = \frac{\pi \cdot D^2}{4}}$ (2) $\xrightarrow{\text{a } (1)}$ $\boxed{F_D = \frac{1}{2} \cdot Cd \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}}$ (1')

$\boxed{\Sigma F_x = 0}$ (3) $\quad$ $\boxed{\Sigma F_y = 0}$ (4)

$$E = m_{aire} \cdot g = \rho \cdot Vol \cdot g = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \cdot g$$

$\boxed{E = \rho \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g}$ (5) $\quad$ $\boxed{P = m_{esfera} \cdot g = \rho_s \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3 \cdot g}$ (6)

de (3): $F_D - T \cdot \cos(\theta) = 0$

$$\cos(\theta) = \frac{F_D}{T}$$

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{Cd \cdot \rho \cdot U^2 \cdot (\pi/8) \cdot D^2}{T}} \quad (7)$$

de (4): $E + T \cdot \text{sen}(\theta) - P = 0$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{P - E}{T}$$

$$\boxed{\text{sen}(\theta) = \frac{(\rho_s - \rho) \cdot (\pi/6) \cdot D^3 \cdot g}{T}} \quad (8)$$

de (7) y (8): $\text{Tan}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{(8)}{(7)}$

$$\text{Tan}(\theta) = \left[\frac{(\rho_s - \rho) \cdot (\pi/6) \cdot D^3 \cdot g}{T}\right] \left[\frac{Cd \cdot \rho \cdot U^2 (\pi/8) \cdot D^2}{T}\right]$$

$$\boxed{\theta = \text{atan}\left[\frac{(\rho_s - \rho)(\pi/6) \cdot D^3 \cdot g}{Cd \cdot \rho \cdot U^2 \cdot (\pi/8) \cdot D^2}\right]}$$