Problema 1 (33%)

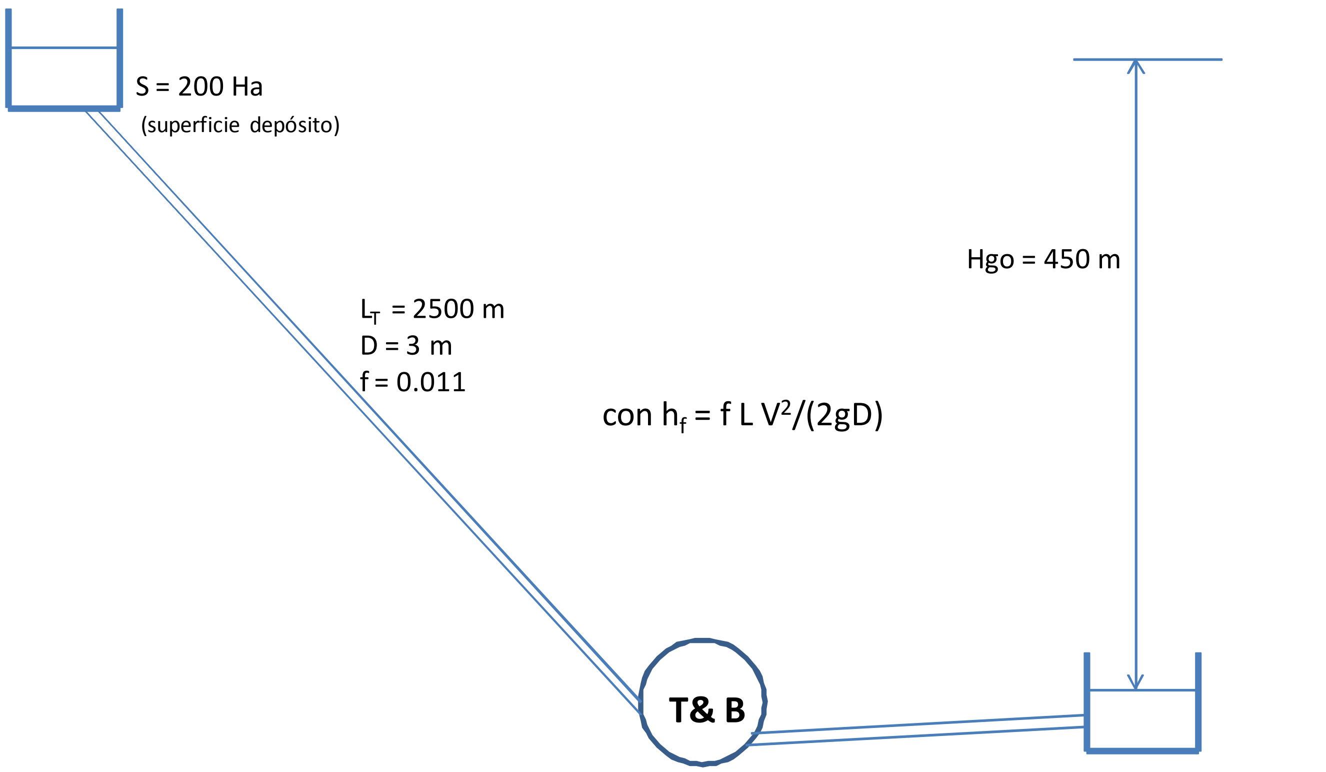
El esquema muestra una central hidroeléctrica reversible. Durante 14 horas seguidas (entre las 18 horas y las 8 de la mañana siguiente) se bombea agua desde el depósito inferior al superior, siendo la red eléctrica la que suministra la energía. Las 10 horas restantes (desde las 8 horas hasta las 18 horas) se turbina desde el superior al inferior entregándose la energía generada a la red. Suponer que la diferencia entre el nivel superior y el inferior de agua es constante en todo momento e igual a 450 m. Otros datos son:

En fase de turbinación:

- Velocidad del agua V = 4.62 m/s
- Precio medio de venta del kWh en fase de turbinación = 0.12 €/kWh

En fase de bombeo:

- Velocidad del agua V = 3.30 m/s
- Coste medio del kWh en fase de bombeo = 0.04 €/kWh.



Rendimientos: Cuando se turbina, $?_g$ = 0.93 (Turbina + alternador)
Cuando se bombea $?_g$= 0.90 (Motor + bomba)

Problema 1 (continuación)

A partir de cuanto antecede se pregunta:

1. Potencia total absorbida de la red eléctrica durante la fase de bombeo
2. Potencia útil cedida a la red eléctrica durante la fase de turbinación
3. La máxima variación de nivel durante las 24 horas del ciclo. Justificar que es correcto suponer una variación despreciable y que, en consecuencia, asumir una altura constante de 450 m es una hipótesis razonable.
4. Balance económico anual, diferencia entre el valor de la energía anual turbinada y de la anual bombeada.

5. El balance de energías diario tanto en la etapa de bombeo como en la de turbinación (En el bombeo la energía demandada a la red es igual a la útil final más las pérdidas en máquinas y tuberías. En la turbinación la útil disponible es igual a la generada más las pérdidas en máquinas y tuberías).
6. Admitiendo que ni los precios de la energía ni la inversión a efectuar cambian en el tiempo, ¿cuántos años se necesitan para recuperar la inversión de esta central reversible estimada en 350 millones de euros?
7. Recordado que la comparación entre la ecuación de la energía y la de Bernouilli para líquidos, permite interpretar el destino de las pérdidas por fricción con la expresión que se adjunta, y que la suma de las alturas de los niveles de agua en los dos depósitos a cualquier hora del día permanece constante y es igual 6 m (se desprecia la evaporación que pueda haber y el volumen de agua que ocupa la tubería), se pregunta:
    a. ¿El aumento de la temperatura del agua en el trayecto del bombeo?
    b. ¿El aumento de la temperatura del agua en el trayecto de la turbinación?
    c. ¿El aumento de la temperatura media del agua de todo el sistema debida a la fricción tras un día de operación?

Expresiones cuestión 7 $h_f = (u_2-u_1)/g$, con $u_2-u_1 = C_p\,(T_2-T_1)$

Problema 2 (33%)

La figura muestra una instalación de aire comprimido (R = 287 J/kg/K) que transporta un caudal másico constante de 1 kg/s, y todo ello a una temperatura constante de 25ºC. Dicha instalación consta de:

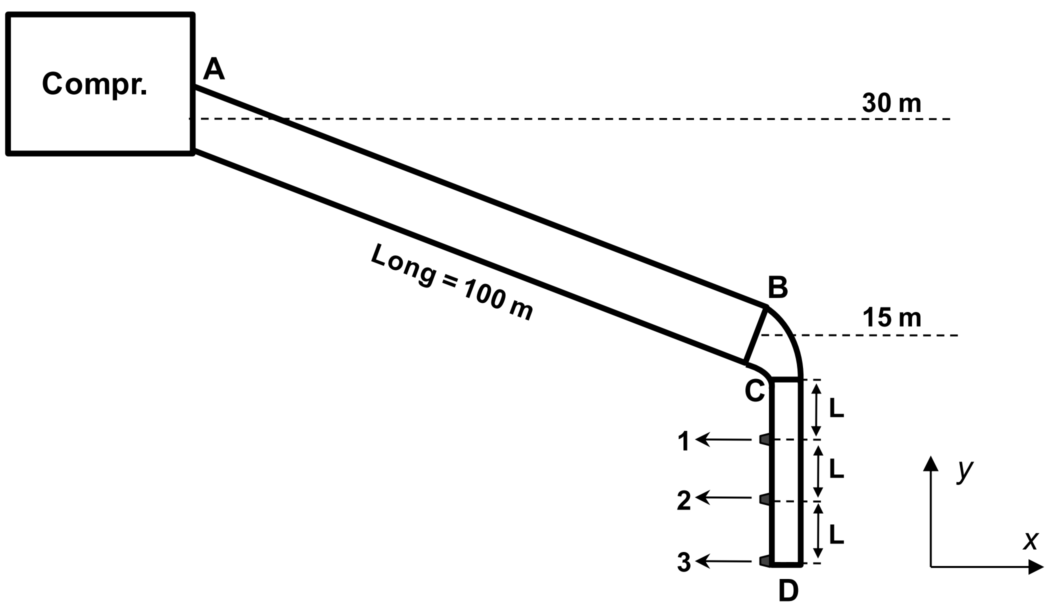
- Una tubería de 100 m de longitud, 110 mm de diámetro y 0,018 de factor de fricción. Esta tubería transporta el aire desde la salida del compresor, sección A (a 30 metros de cota y una presión relativa de 6 bar), hasta la entrada del codo, sección B (a 15 metros de cota).
- Un codo ubicado entre las secciones B y C. La salida del codo en C tiene un diámetro de 75 mm y se supone a la misma cota que B.
- Un segundo tramo de tubería cerrada en su extremo final (sección D), pero a lo largo de la cual hay instaladas 3 boquillas de salida de aire. La sección de cada boquilla tiene un diámetro de 1 cm y la longitud L es de 20 cm. El caudal circulante por el sistema sale a través de las tres boquillas a partes iguales.

Notas:

- Para el codo (B a C) y tubería con boquillas (C a D), asumir directamente que el flujo de aire es incompresible y que las pérdidas de carga son despreciables
- Cuando sea necesario utilizar ejes coordenados, tomar los que aparecen junto a la figura

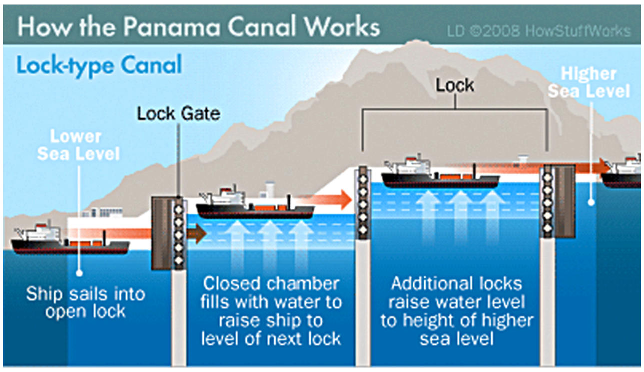
Se pide:

a) Calcular la presión que tiene el aire en la sección B, y justificar a continuación la ecuación y las hipótesis de trabajo utilizadas para ello.
b) Calcular la reacción vertical que haría falta en el apoyo del codo para compensar sólo el efecto de la circulación del aire, es decir, sin tener en cuenta ningún peso.
c) Calcular el par que debe resistir el material de la sección C para evitar que el efecto de la salida del aire por las boquillas partiese dicha sección.

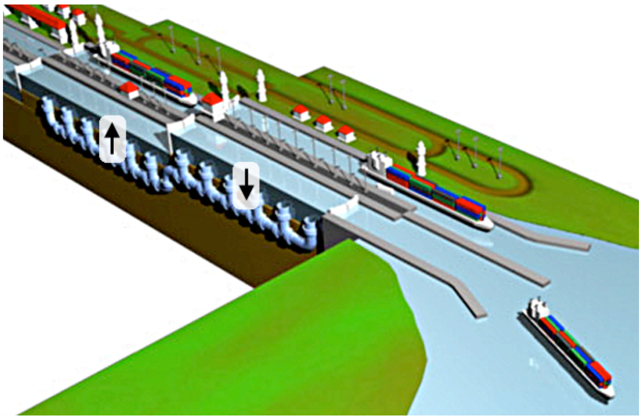


Cuestión 1 (16,66%)

El Canal de Panamá conecta los océanos Pacífico y Atlántico a través de un sistema de esclusas, que permiten salvar los desniveles entre los dos océanos y el lago Gatún situado en el interior. Para facilitar el paso de los barcos, las esclusas pueden subir o bajar el nivel del agua de manera individual. En la figura, de la derecha, el barco entra por el nivel inferior y sube en cada esclusa antes de que la compuerta se abra para acceder a la siguiente.

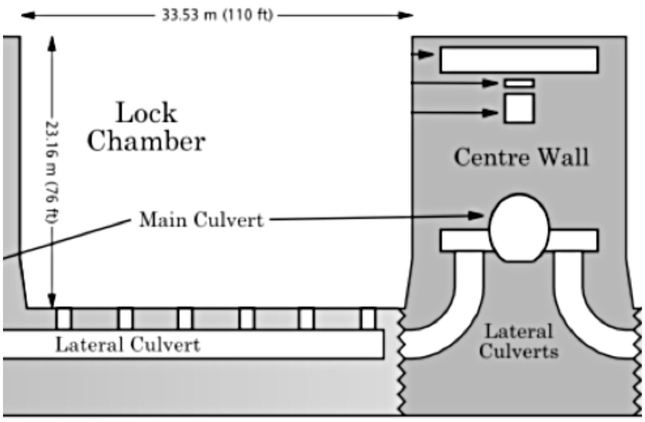


Las esclusas se llenan y vacían por gravedad, mediante un conjunto de tuberías de gran diámetro que aspiran e impulsan el agua desde el fondo de las mismas (ver figura). Es decir, el agua de la esclusa superior (flecha hacia abajo) va rellenando la de la esclusa inferior (flecha hacia arriba).



Calcular:

1) Momento máximo de apertura debido al agua (eje vertical) que tienen que contrarrestar las bisagras de las hojas de la compuerta cuando está cerrada. Las compuertas tienen dos hojas cierran en el centro.



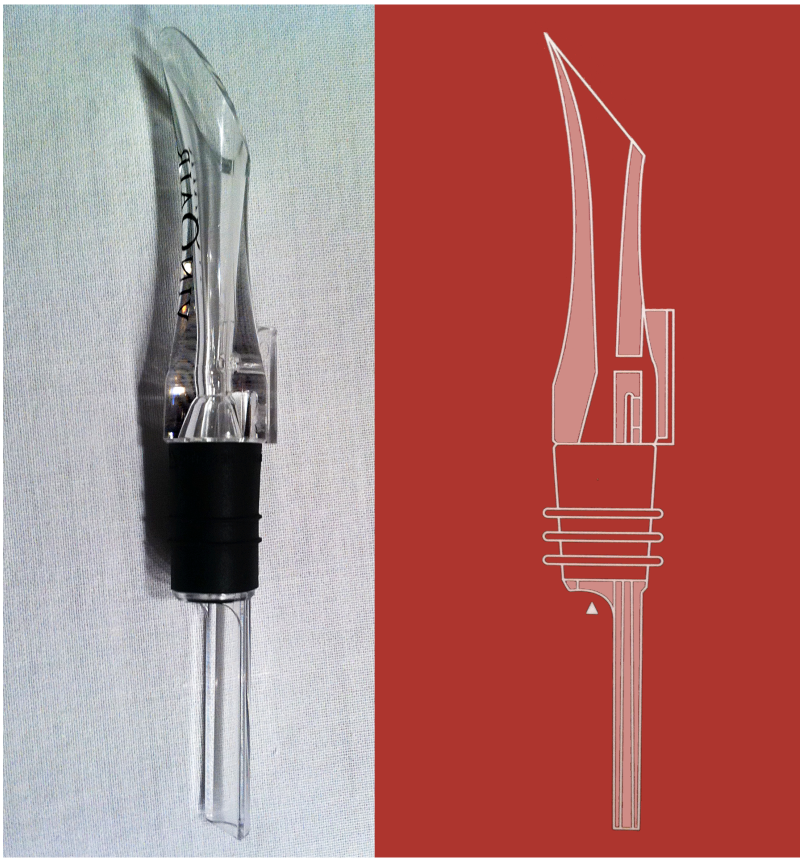
2) Plantear (sin resolver) la ecuación que gobierna el llenado / vaciado de las esclusas y que permite calcular el tiempo necesario para llenarla en función de las pérdidas por fricción y los desniveles del agua, despreciando el término de inercia.

   Condiciones del problema:

   - Considerar que cuando una esclusa esta completamente llena, la contigua se encuentra a medio llenar (h/2).
   - Despreciar el momento generado por el peso de las compuertas (flotan)

DATOS
Peso hoja compuerta: 662 t
Altura hoja compuerta: 25 m
Ancho hoja compuerta: 19,81 m
Espesor hoja compuerta: 2,13 m
Peso bisagras: 16,7 t
Longitud esclusa: 320 m
Ancho esclusa: 33,53 m
Alto esclusa: 23,16 m /
Densidad relativa agua de mar: 1,05

Cuestión 2 (16,66%)



a) En una cena de amigos un abogado pijo se presenta con el artefacto de la figura para servir el vino y reta al ingeniero industrial a que explique:

1. Para qué sirve
2. Cómo funciona

La inspección del aparato revela que se trata de una boquilla con un estrechamiento en diámetro y un orificio lateral practicado en la sección de paso más estrecha.

Explicar la finalidad del aparato y su principio de funcionamiento utilizando para ello expresiones y conceptos vistos durante el curso. Además, valorar los posibles parámetros de diseño (diámetros, longitudes, ángulos, etc.) y cómo pueden afectar al funcionamiento del aparato.

b) Los coeficientes de corrección α y β permiten generalizar la ecuación de Euler (valida a lo largo de una línea de corriente) a una conducción. Durante la asignatura se proporcionan valores numéricos de dichos coeficientes para una tubería de sección circular en regímenes laminar y turbulento.

1. ¿Variarán esos valores para una conducción de sección cuadrada?
2. ¿Serán necesarios coeficientes de corrección para los otros términos de la ecuación en el caso anterior? En caso de no ser necesarios, ¿en qué condiciones podrían aparecer factores de corrección de los términos de presión y cota?

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.}\rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall + \int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Flujo laminar incompresible (simetría plana)

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible (simetría cilíndrica)

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

1.- Potencia absorbida en fase de bombeo

$$P_b = \frac{\gamma Q_b H_b}{\eta_b} = \frac{9.81}{0.9} Q_b H_b \text{ kw} = 10,9\ H_b\ Q_b \text{ kw h}$$

$$Q_b = \frac{\pi D^2}{4} V_b = \frac{9\pi}{4} \times 3,30 \ m^3/s = 23,326 \ m^3/s$$

$$H_b = 450 + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 450 + 0,11 \ \frac{2500}{3} \times \frac{3.30^2}{19.62} = 455,09 \ m$$

$$\underline{P_b} = 10,9 \times 23,326 \times 455,09 \text{ kw} = 115708 \text{ kw} = \underline{115,708 \text{ Mw}}$$

2.- Potencia eléctrica generada en fase de turbinación (cedida a la red)

$$P_e = (\gamma Q_t H_t)\,\eta_t = 9,81 \times 0.93\ Q_t\ H_t = 9.123\ Q_t\ H_t$$

$$Q_t = \frac{\pi D^2}{4} \times 4.62 \ m^3/s = 32,657 \ m^3/s$$

$$H_t = 450 - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 450 - 0,011 \ \frac{2500}{3} \times \frac{4.62^2}{19.62} = 440,03 \ m$$

$$\underline{P_e} = 9,123 \times 32,657 \times 440,03 \text{ kw} = 131098 \text{ kw} = \underline{131,098 \text{ Mw}}$$

3.- Volumen turbinado: $Q_t \cdot t_t = 32,657 \times 10 \times 3600 \ m^3 =$

$$= \underline{\underline{1175652 \ m^3 = 1,176 \ Hm^3}}$$

Volumen bombeado: $Q_b\ t_b = 23,326 \times 14 \times 3600 \ m^3 =$

$$= \underline{\underline{1175630 \ m^3 = 1,176 \ Hm^3}}$$

Evidentemente los números se han ajustado, creo que en la práctica se hace, en periodos establecidos, para que lo bombeado coincida con lo turbinado.

La máxima variación de nivel se producirá al final de cada etapa (turbinación o bombeo). Su valor será en cada uno de los embalses (tomamos las secciones de referencia, que no coinciden por errores de redondeo)

$$\Delta z = \frac{V}{S} = \frac{1\,175\,641 \ m^3}{200 \times 10^4 \ m^2} = 0,59 \ m$$

La variación máxima será el doble $2 \times 0.59 = \underline{1.18 \ m}$

que porcentualmente supone

a) En fase de turbinación $\frac{1,18 \times 100}{440,03} = 0,27\%$

b) En fase de bombeo $\frac{1,18 \times 100}{455,09} = 0,26\%$

es decir, menos del 0.3% en cualquiera de las dos etapas.

El error, pues, será muy poco significativo

(4) Energía eléctrica diaria requerida en bombeo:

$$E_r = 115,708 \ Mw \times 14 \ h = \underline{1619,91 \ Mwh/día}$$

Energía eléctrica cedida a la red en fase de turbinación:

$$E_c = 131.098 \ Mw \times 10 \ h = \underline{1310,98 \ Mwh/día}$$

Ingresos : $1310,98 \times 10^3 \ Kwh/día \times 0,12 \ €/Kwh = 157\,316,6 \ €/día$

Gasto : $1619,91 \times 10^3 \ Kwh/día \times 0.04 \ €/Kwh = 64\,796,4 \ €/día$

BALANCE NETO DIARIO = 92 520,2 €

BALANCE NETO AL AÑO : 33.769.873 €

5 Balance energía diario

EN BOMBEO

a) Energía repuesta $= 1619{,}91 \frac{Mwh}{día}$

b) Energía útil

$$E_u = \gamma \forall H = 9810 \times 1175630 \times 450 \text{ julios/día} =$$

$$= \frac{9{,}81 \times 1175630 \times 450}{3600} \frac{kwh}{día} = 1441616 \frac{kwh}{día}$$

$$\underline{\underline{E_u = 1441{,}62 \text{ Mwh/día}}}$$

c) Pérdidas (corresponde a la fricción en bombeo)

En tuberías $\gamma h_f Q = 9{,}81 \times 5{,}09 \times 23{,}326 \text{ kw} =$

$$= 1164{,}73 \text{ kw} = \underline{\underline{1{,}165 \text{ Mw}}}$$

Energía perdida : $1{,}165 \times 14 \text{ Mwh} = 16{,}31 \text{ Mwh}$

d) Perdidas en máquinas:

$$P_m = \frac{\gamma Q H}{\eta} - \gamma Q H = \gamma Q_b H_b \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = 0{,}111 \; 9{,}81 \times \overset{23{,}326}{\cancel{5{,}09}} \times 455{,}09 \text{ kw} =$$

$$= 11570{,}70 \text{ kw} = 11{,}57 \text{ MW}$$

Energía perdida $= 11{,}57 \times 14 \equiv 161{,}98 \text{ Mwh}$

Balance final $1619{,}91 \simeq 1441{,}62 + 16{,}31 + 161{,}98 \equiv 1619{,}91$

que cuadra a la perfección

EN TURBINACIÓN ES ANALOGO. Pero es la energía útil, la misma que antes, la suma de las otras tres: Tenemos $\underline{\underline{E_u = 1441{,}62 \text{ Mwh/día}}}$

4

Energía turbinada = 1310,98 Mwh/día

Energía en fricción en las tuberías (Potencia disipada × tiempo)

$$\underbrace{\gamma h_f Q_t}_{\text{Potencia}} \times \underline{10h} = \frac{9,81 \times 9,97 \times 32,657}{1000}\ Mw \times 10h = \underline{\underline{31,94 Mwh}}$$

Energía perdida en máquinas. Calculamos primero la potencia:

$$\gamma Q_t H_t (1-\eta) = 9,81 \times 32,657 \times 440,03 \times 0,07 \text{ kw} = \underline{9867,9 \text{ kw}}$$

Energía perdida en máquinas $9,868 Mw \times 10h = \underline{\underline{98,68 Mwh}}$

Debe cumplirse

$$1441.62 \simeq 1310,98 + 31.94 + 98,68 \equiv 1441,60$$

que se verifica a la perfección.

---

6 Es una simple división (I / rentabilidad anual)

$$t = \frac{350 \times 10^6 \text{ €}}{33,77 \times 10^6 \text{ €/año}} = 10,36 \text{ años}$$

Vemos, pues, que la central reversible se amortizaría en relativa rapidez.

---

7 Sabemos que $h_f = \frac{c_p}{g}(T_2 - T_1) = \Delta T \cdot \frac{c_p}{g}$

En fase de bombeo, se tendrá $\Delta T_b = \frac{g h_{fb}}{c_p} = \frac{9,81 \times 5,09 \frac{m^2}{s^2}}{4180 \frac{J}{kg\,°K}}$

$\Delta T_b = 0,01$ °C mientras en turbinación $\Delta T_t = \frac{9,81 \times 9,97}{4180}$

$\Delta T_t = 0,02$ °C

Finalmente para calcular el recalentamiento de ambos embalses (el superior e inferior), suponiendo una mezcla perfecta (buena convección), hay que hacer un balance térmico extendido a todo el día.

Calor total aportado en fase de bombeo:

$$\rho Q_b t_b C_e \Delta T_b = \rho Q_b t_b \cancel{C_e} \frac{g h_{f,b}}{\cancel{C_e}}$$

Idem en fase de turbinación $\rho Q_t t_t g h_{f,t}$

CALOR TOTAL APORTADO:

$$\rho g \left[Q_b \cdot t_b \, h_{f,b} + Q_t \cdot t_t \cdot h_{ft} \right] =$$

$$= 1000 \frac{kg}{m^3} \; 9,81 \frac{m}{s^2} \left[\underbrace{23,326}_{m^3/s} \times 14 \times \underbrace{3600}_{s/día} \times \underbrace{5,09}_{m} + 32,657 \times 10 \times 3600 \times 9,97 \right]$$

$$= 1,737 \times 10^{11} \frac{Julios}{día} = 48246,70 \; kWh/día = 48,25 \frac{MWh}{día}$$

Una potencia que coincide con la disipación por fricción previamente calculada $= 16,31\,MWh + 31,94\,MWh = 48,25\,MWh$, porque, lógicamente, las pérdidas en máquinas no contribuyen a aumentar la temperatura del agua.

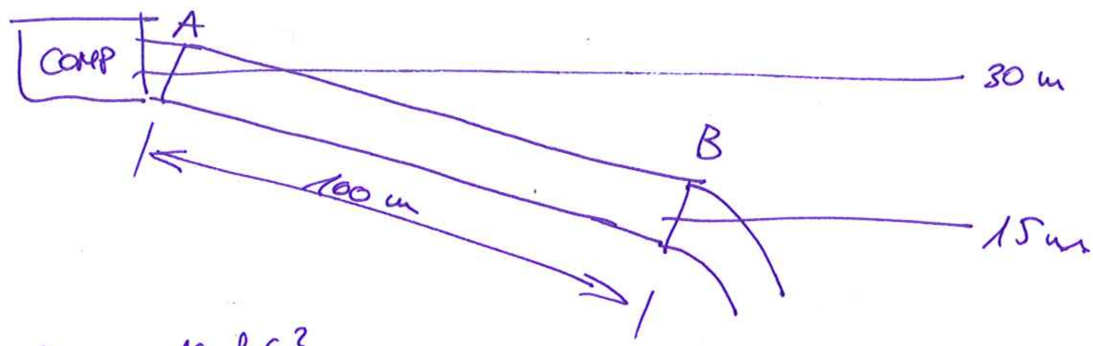
Esta energía térmica disipada generará un aumento térmico, calculado a partir del balance

$$E_{térmica\ disipada} = M_{Total} \times C_e \times \Delta T \qquad \Delta T = \frac{48,25\,MWh}{400 \times 10^4 \times 6 \times 10^3\,kg \cdot 4180 \frac{J}{°C\,kg}}$$

$$\Delta T = 0,01\,°C$$

Problema

a)



$$P_A^{*2} = P_B^{*2} + \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

$$(6\cdot10^5+101337)^2 = P_B^{*2} + \frac{16\cdot 0'018\cdot 1^2}{\pi^2\, 0'11^5}\, 287\cdot 298\cdot 100$$

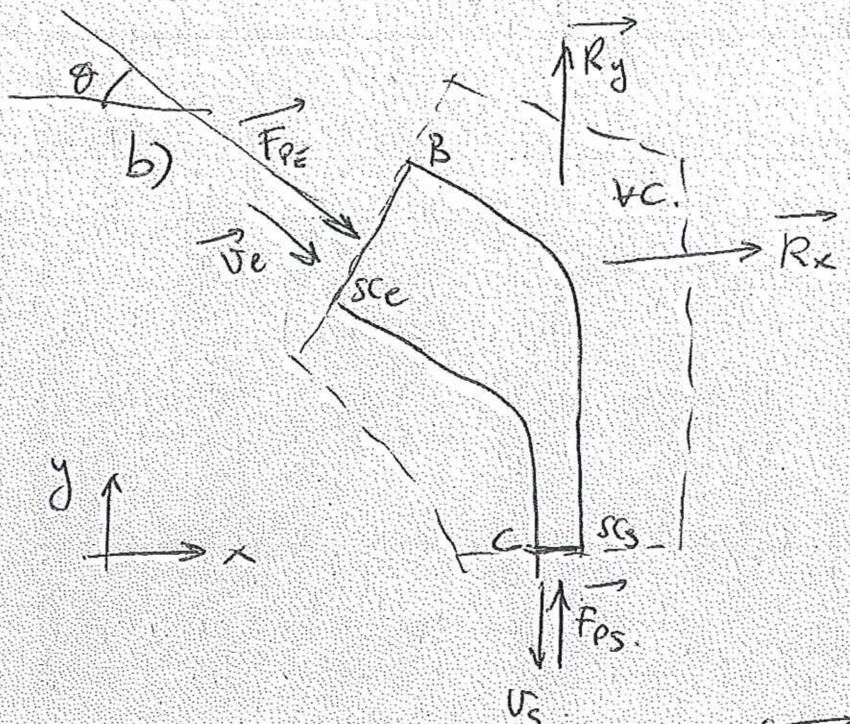
$\hookrightarrow$ $P_B^* = 690201$ Pa / $P_B = 588864$ Pa

$$\rho_A = \frac{P_A^*}{RT} = \frac{701337}{287\cdot 298} = 8'20\ \mathrm{kg/m^3} \quad / \quad \rho_B = 8'07\ \mathrm{kg/m^3}$$

$\frac{0'13}{8'2} \simeq 1'5\%$ de variación en ρ

$\rightarrow$ Puede tomarse como incompresible y resolverse igualmente con Bernoulli.

$\rightarrow$ Lo hemos resuelto como flujo compresible isotermo, y para ello se ha despreciado el término cinético ($v_A \neq v_B$, en realidad) y el término potencial (los 15 m de desnivel).



$$|\vec{v_e}| = |\vec{v_B}| = \frac{Q_B}{A_B} =$$

$$|\vec{v_e}| = \frac{G/\rho_B}{A_B} = \frac{1/8'07}{0'01} =$$

$$|\vec{v_e}| = (\ldots) = 13'0\ m/s$$

$$\theta = \text{arc sen}\frac{15}{100} = 8'62°$$

Ahora: $\overrightarrow{\Sigma F_{ext}} = \rho Q\left(\vec{v_s} - \vec{v_e}\right)$

$$\overrightarrow{\Sigma F_{ext}} = \vec{F_{PE}} + \vec{F_{PS}} + \vec{R_x} + \vec{R_y}$$

$$\vec{F_{PE}} = P_B \cdot A_B\left(\cos\theta\,\vec{i} - \text{sen}\,\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F_{PS}} = P_C \cdot A_C\,\vec{j}\ /\ \vec{R_x} = R_x\vec{i}\ /\ \vec{R_y} = R_y\vec{j}$$

$$\rho Q\left(\vec{v_s} - \vec{v_e}\right) = \rho_B Q_B\left[-v_C\vec{j} - \left(v_B\left(\cos\theta\,\vec{i} - \text{sen}\,\theta\,\vec{j}\right)\right)\right]$$

Nos interesa sólo el eje y:

$$-P_B A_B\,\text{sen}\,\theta\,\cancel{\vec{j}} + P_C A_C\,\cancel{\vec{j}} + R_y\cancel{\vec{j}} = \rho_B Q_B\left[-v_C\cancel{\vec{j}} + v_B\,\text{sen}\,\theta\,\cancel{\vec{j}}\right]$$

$$\hookrightarrow R_y = \rho_B Q_B\left[v_B\,\text{sen}\,\theta - v_C\right] - P_C \cdot A_C + P_B \cdot A_B \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$v_c = \frac{Q_B}{A_c} = \frac{\left(\frac{1}{8'07}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot 0'075^2}{4}\right)} = (\ldots) = 28'0\ m/s$$

$$\frac{p_B}{\gamma} + \cancel{z_B} + \frac{v_B^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma_c} + \cancel{z_c} + \frac{v_c^2}{2g}$$

$$\frac{700210}{8'07 \cdot 9'81} + \frac{13'0^2}{2g} = \frac{P_c^*}{\gamma} + \frac{28'0^2}{2g}$$

$P_c^* = 687760$ Pa / $P_c = 586423$ Pa.

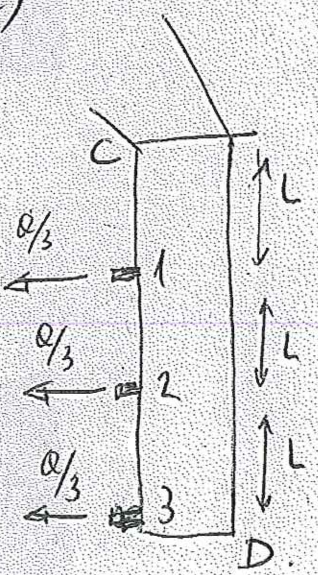
$$\Rightarrow R_y = 8'07\,\frac{1}{8'07}\left(13'0 \cdot \text{Sen}\, 8'6 - 28'0\right) - 586423 \cdot 0'004 +$$

$$+ 588\,863 \cdot 0'01 \cdot \text{Sen}\, 8'6$$

$R_y = -1777'2$ N

(arrastrando decimales).

c)



$$\sum \vec{M}_{ext} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \wedge \vec{v})\rho\, dV}^{\,0} + \int_{SC} (\vec{r} \wedge \vec{v})\,\rho\,(\vec{v_{rsc}} \cdot \vec{dA})$$

Rég. Perm.

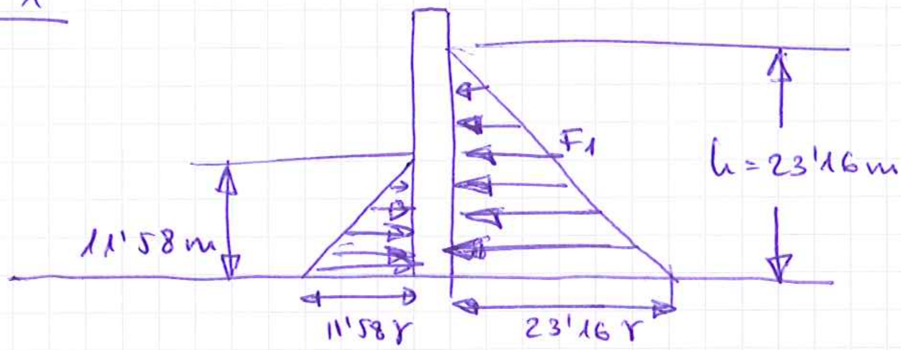
$$\int_{SC} = \int_1 + \int_2 + \int_3$$

$$\int_1 = \int_{As_1} \left(-L\vec{j} \wedge \frac{-Q/3}{A_s}\vec{i}\right) \rho\,(\vec{v_{rsc}} \cdot \vec{dA}) = -L\,\frac{Q}{3A_s}\vec{K}\rho\,\frac{Q}{3}$$

$$\int_2 = -2L\,\frac{Q}{3A_s}\vec{K}\rho\,\frac{Q}{3} \quad / \quad \int_3 = -3L\,\frac{Q}{3A_s}\vec{K}\rho\,\frac{Q}{3}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = \vec{M}_{resist} = \frac{Q^2 \rho L}{9A_s}(1+2+3)(-\vec{K}) = -\frac{2L\rho Q^2}{3A_s}\vec{K} = -210 \text{ N·m.}$$

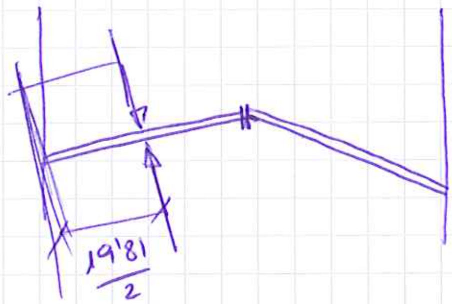
CUESTIÓN 1



El canal funciona con agua dulce del lago → $\rho = 1000\ kg/m^3$
En la corrección se dio como válida $\rho = 1'05$

—

Las dos fuerzas se aplican en el eje de simetría de la hoja:

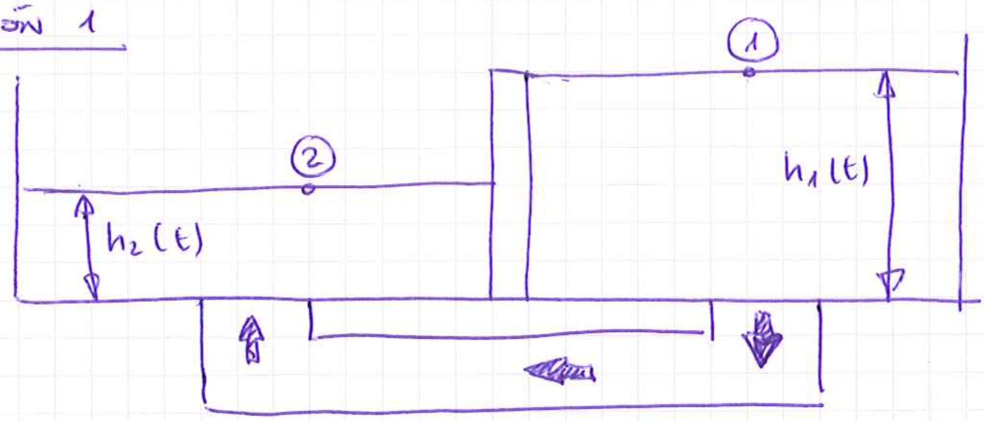


$$F_2 = \frac{1}{2}\,\frac{h}{2}\cdot\gamma\cdot\frac{h}{2}\cdot \text{Prof.} = \frac{1}{2}\,11'58^2\cdot 9810\cdot 19'81 = \boxed{1'30\cdot 10^7\ N}$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\,h\,\gamma\,h\cdot \text{Prof} = \frac{1}{2}\,23'16^2\cdot 9810\cdot 19'81 = \boxed{5'21\cdot 10^7\ N}$$

$$\boxed{M_R = -1'3\cdot 10^7\cdot\frac{19'81}{2} + 5'21\cdot 10^7\cdot\frac{19'81}{2} = 3'87\cdot 10^8\ N\,m}$$

CUESTIÓN 1



Aplicando Bernoulli entre ① y ②:

$$h_1(t) = h_2(t) + h_f$$

Podemos expresar las pérdidas como función del término cinético $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ o del caudal:

$$h_1(t) = h_2(t) + k \cdot Q^2(t) \quad \Big\| \quad \boxed{Q(t) = \sqrt{\frac{(h_1(t) - h_2(t))}{k}}}$$

Aplicando la ecuación de continuidad a una de las 2 esclusas:

(2) $h_{2i} = 11'58\ m$ // $\boxed{h_{2f}} = \frac{11'58 + 23'16}{2} = \boxed{17'37\ m}$

$$\boxed{A_{esclusa} = 320\ m \times 33'53\ m = 10729'6\ m^2}$$

$$A_{esc.} \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} = Q(t)$$

↓ INTEGRANDO

$$\boxed{\int_{11'58}^{17'37} dh_2(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{h_1(t) - h_2(t)}{k}} \cdot dt}$$

Donde $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son función de h_1, h_2 y $dh_2(t)$

CUESTIÓN 2

a) El aparato presenta un venturi en su interior, con un orificio en la zona en la que se produce el estrechamiento.

Dado que la velocidad en ese punto aumenta, la presión disminuye creando un efecto de succión. Al tener una presión inferior a la atmosférica el aire del exterior entra en el aparato mezclándose con el vino.

Se trata pues de un aparato de aireación.

El diseño del aparato deberá tener en cuenta que cuanto más estrecha sea la sección, mas aire entrará, pero también se reducirá más el caudal (pérdidas de carga). Por ello, hay que buscar una solución de compromiso.

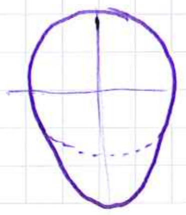
Cuestion 2

b) α y β son el resultado de generalizar Euler para una tubería en lugar de una línea de corriente. Ambos se originan debido a que la velocidad no es la misma en todos los puntos de la sección recta (perfil de velocidades) y además ninguno de los dos términos es lineal.

En una sección cuadrada el perfil de velocidades será distinto del perfil en un tubo circular. Por lo tanto los valores de α y β tanto para flujo laminar como turbulento serán, en principio, distintos.

En el caso de los términos de presión y cota, su generalización para tuberías circulares no requiere de coeficientes al ser simétricas respecto a un plano horizontal que pase por el eje (la distribución de cotas y presiones a ambos lados se compensa y da la media).

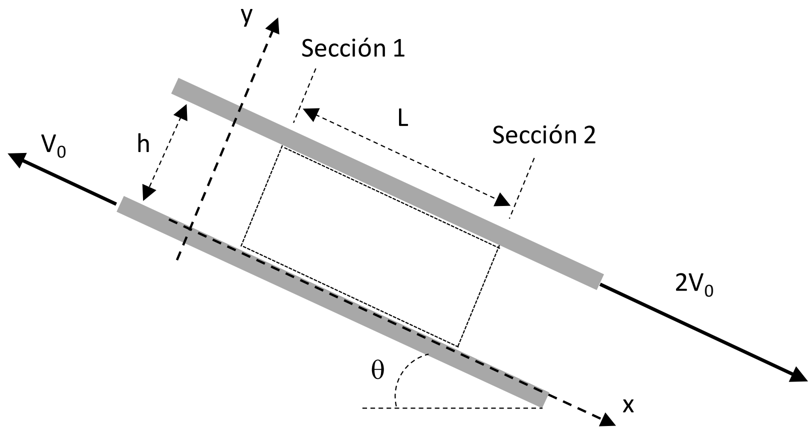
Ambos términos necesitarían de un coeficiente corrector si la tubería no fuera simétrica. Por ejemplo:



APELLIDOS: NOMBRE:

Problema 1 (33%)

Un fluido de viscosidad μ y peso específico γ fluye entre dos placas paralelas de grandes dimensiones inclinadas un ángulo θ cuya separación es h. Una de las placas se mueve con velocidad V_0 y la otra con velocidad $2V_0$, tal y como se muestra en la figura. Asimismo, se mide la presión en un punto de la sección transversal 1, y ésta adopta un valor P_0.



Se pide:

1. Determinar la presión necesaria en un punto de la sección transversal 2, situado a la misma distancia del eje x que el anterior, para que el caudal neto circulante por cualquier sección transversal sea nulo. La sección transversal 2 está separada de la 1 por una distancia de L metros.
2. Determinar la expresión del campo de velocidades u(y) de la manera más compacta posible.
3. Dibujar de manera aproximada el perfil de velocidades en una sección transversal cualquiera, determinando las coordenadas del punto en el que la velocidad local se anula.
4. Demostrar que se cumple el balance de potencias para el volumen de control definido en la figura (longitud L, altura h y profundidad unidad).

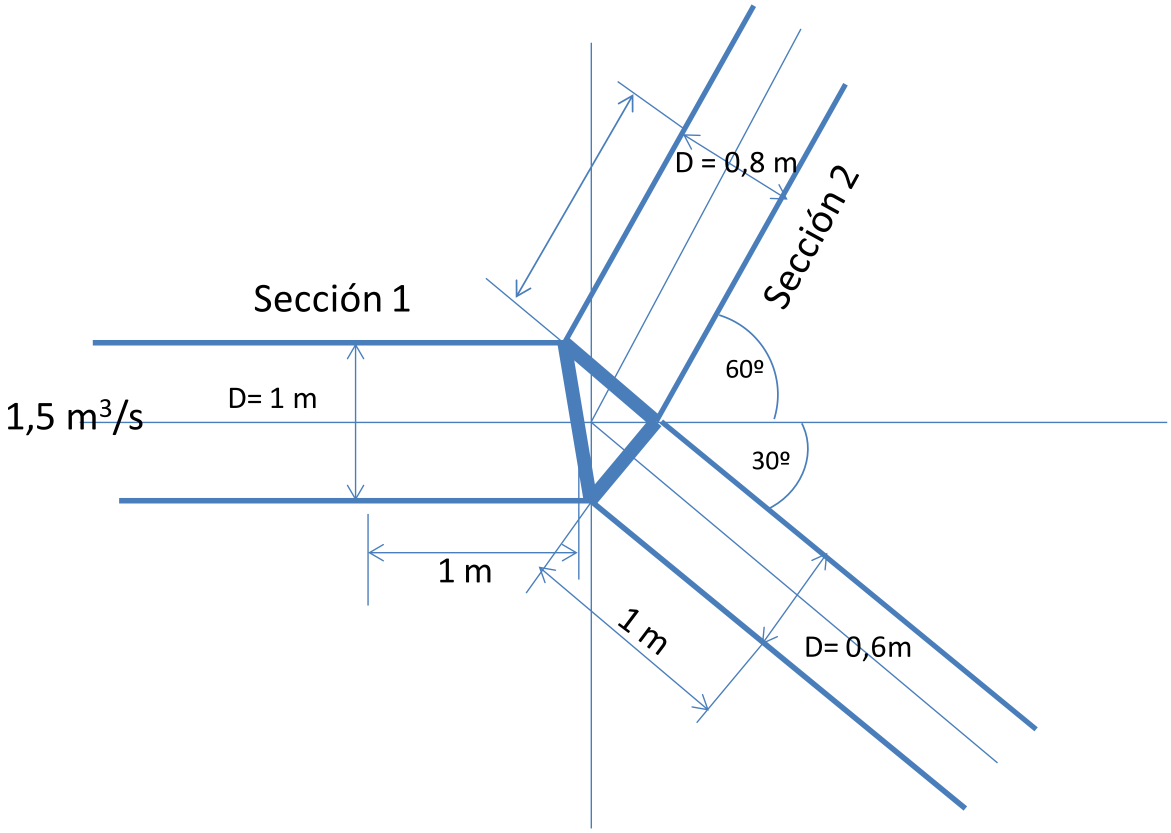
Nota importante:

Todos los resultados se darán en función de los valores conocidos: P_0, V_0, μ, γ, h, θ, L.

APELLIDOS: NOMBRE:

Problema 2 (33%)

Por la tubería de la izquierda circula un caudal de agua de 1,5 m^3/s. Al llegar a la bifurcación un 60% del mismo circula por la tubería de mayor diámetro mientras que el 40% restante lo hace por la de menor diámetro. La presión manométrica en la sección 1 es de 2 Kp/cm^2. El conjunto del sistema está en un plano horizontal. El volumen de control a considerar es el entronque constituido por 1 m de cada uno de los tubos, despreciando la contribución del volumen menor de la unión propiamente dicha, es decir, del triangulo destacado con trazo más ancho.



Despreciando todas las pérdidas de fricción que puedan haber (sistema ideal), se pregunta:

1. La presión manométrica (en bares) en las secciones 2 y 3 de las otras dos tuberías del nudo.
2. Las fuerzas de reacción necesarias para mantener el nudo en reposo (en N).
3. Si mientras la presión en la sección 1 permanece constante e igual a 2 Kp/cm^2, el caudal se duplica en un minuto (desde 1,5 m^3/s hasta 3,5 m^3/s) con un crecimiento lineal para después estabilizarse en 3 m^3/s . En estas condiciones se pregunta:
   a. El valor del término de la ecuación de la cantidad de movimiento que caracteriza el régimen transitorio.
   b. Calcular la fuerza de reacción necesaria para inmovilizar el codo una vez el flujo se ha estabilizado en 3 m^3/s.

Nota:

La figura no está a escala.

APELLIDOS: NOMBRE:

Cuestiones (33%)

1. (6 puntos) En un partido con los amigos, el conocido de un ingeniero se presenta con el casco de la foto con el objeto de beber cerveza de dos latas situadas en los lados del mismo. De ellas parten dos tubos independientes (uno por lata) que se unen al final en un tramo de longitud despreciable. Los tubos entran en la lata por su orificio superior y llegan hasta el fondo de la misma.

El ingeniero, nuevamente desafiado sobre el modo de funcionamiento de un aparato, debe establecer (sin resolver):

a) La ecuación que modela el funcionamiento del aparato y que con la debida succión inicial permitiría que se vaciaran las latas a través de los tubos sin otra acción exterior (es decir, una vez los tubos están completamente llenos de líquido y sin succión). Considerar todo el sistema ideal y sin pérdida alguna.

b) La ecuación que permitiría determinar el tiempo mínimo necesario para vaciar las latas por parte del individuo de la fotografía (con succión constante) con los datos reales proporcionados.

DATOS:
Dimensiones lata (cilíndrica): D=65mm, H=100mm
Capacidad pulmonar de succión de una persona= -10kPa
Diámetro tubos= 6mm
Factor de fricción del tubo = 0,01
Longitud tubos = 50cm
Diferencia cotas boca-solera lata= 8cm

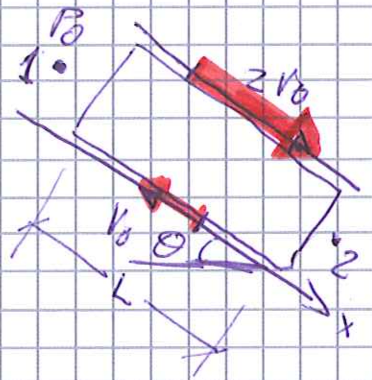
2. (4 puntos) Explicar las diferencias entre líneas de alturas piezométricas y líneas de alturas totales. En concreto:

a) ¿Qué representan cada una de ellas?
b) ¿Es posible determinar precisamente la distancia entre las mismas?
c) ¿Son paralelas? ¿Cuándo?
d) ¿Pueden cruzarse?¿Cuándo?

PROB. 1 ENERO 2012 Mecánica fluidos 2º II

1/3

(1)



$$\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_2 - P_0}{L}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) = \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) y + A$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

$$q = \int_0^h u(y)\,dy = \boxed{\frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^3}{6} + \frac{Ah^2}{2} + Bh = 0}$$

$$u(0) = -V_0 ; \quad -V_0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{0^2}{2} + A \cdot 0 + B$$

$$\boxed{B = -V_0}$$

$$u(h) = 2V_0 ; \quad 2V_0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^2}{2} + Ah + B$$

$$B = -V_0$$

$$A = \left[2V_0 + V_0 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2 - P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^2}{2}\right]\frac{1}{h}$$

$$0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^3}{6} - V_0 h + \frac{h^2}{2}\left(3V_0 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L}-\gamma\operatorname{sen}\theta\right)\frac{h^2}{2}\right)\frac{1}{h}$$

$$0 = \frac{h^3}{6\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) - V_0 h + \frac{3V_0}{2}h - \frac{h^3}{4\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$0 = \frac{h^3}{\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) + V_0 h\left(\frac{3}{2}-1\right)$$

$$\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{P_2-P_0}{L} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) = \frac{V_0 h}{2}$$

$$\frac{P_2-P_0}{L} = \quad + \frac{V_0 h}{2}\frac{12\mu}{h^3} + \gamma \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{P_2-P_0}{L} = \frac{V_0 6\mu}{h^2} + \gamma \operatorname{sen}\theta \;;\quad P_2 = P_0 + \left(\frac{6\mu V_0}{h^2} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right)L$$

$$\boxed{P_2 = P_0 + \gamma \operatorname{sen}\theta L + 6\frac{\mu V_0 L}{h^2}}$$

(2)

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\cancel{P_0} + \cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta L} + 6\frac{\mu V_0 L}{h^2} - \cancel{P_0}}{L} - \cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta}\right)\frac{y^2}{2} +$$

$$+ y\left(3V_0 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\cancel{P_0} + \cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta L} + 6\frac{\mu V_0 L}{h^2} - \cancel{P_0}}{L} - \cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta}\right)\frac{h^2}{2}\right)\frac{1}{h} - V_0$$

$$u(y) = \frac{1}{\cancel{\mu}}\frac{6\cancel{\mu}V_0\cancel{L}}{\cancel{L}h^2}\frac{y^2}{2} + \frac{y}{h}3V_0 - \frac{y}{\cancel{\mu}}\frac{6\cancel{\mu}V_0\cancel{L}}{\cancel{h^2}\cancel{L}}\frac{\cancel{h^2}}{2}\frac{1}{h} - V_0$$

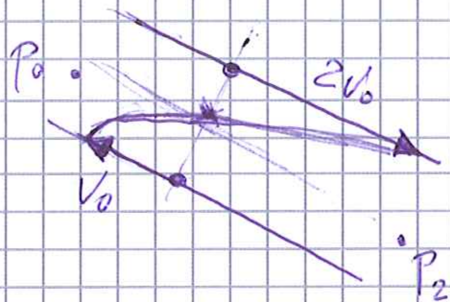
$$u(y) = \frac{3V_0 y^2}{h^2} + \cancel{3V_0\frac{y}{h}} - \cancel{3y\frac{V_0}{h}} - V_0 = \frac{3V_0}{h^2}y^2 - V_0$$

Asunto: | Fecha: 3/3

$$u(y) = \frac{3V_0}{h^2}y^2 - V_0$$

(3)

$$u(y) = 0 \rightarrow \frac{3V_0 y^2}{h^2} = V_0 \rightarrow y = h\sqrt{\frac{\cancel{V_0}}{3\cancel{V_0}}} = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0'58h$$



$$\frac{du}{dy} = \frac{6V_0}{h^2}y$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{6V_0}{h^2} > 0$$

en $y=0$ mínimo

(4)

Balance: $(P_1 - P_2)\cancel{Q} + (z_1 - z_2)\gamma\cancel{Q} + \tau_{y=h} \cdot V(y=h)\,L - \tau_{y=0} V(y=0)\,L = \int \Phi\, dV$

($\cancel{Q}$ = 0, 0)

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \frac{6\mu V_0 y}{h^2}$$

$$\frac{6\mu V_0 h}{h^2}(2V_0)L - 0 = \int \Phi\, dV \;;\; 12\mu V_0^2\frac{L}{h} = \int\Phi\, dV$$

$$\Phi = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu\frac{36V_0^2y^2}{h^4} \;;\; \int\Phi\, dV = \int_0^h \mu\frac{36V_0^2}{h^4}y^2\, dy \cdot L =$$

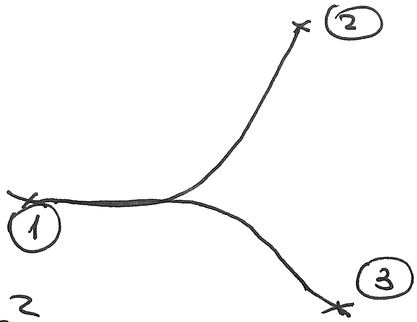
$dV = dy\, L$

$$= \mu\frac{36V_0^2L}{h^4}\frac{h^3}{3} = \mu 12V_0^2\frac{L}{h}$$

cqd.

$\boxed{\text{PRIMER APARTADO}}$

Aplicando Bernoulli a lo largo de una línea de corriente: (sin fricción)



$$B_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3$$

con $z_1 = z_2 = z_3$

$$B_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{2\ kp/cm^2 \cdot 10^4\ \frac{cm^2}{m^2}}{1000\ kp/m^3} + \frac{1.91^2}{19.62}\ m = 20.19\ m\ c\ a$$

$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = 1.91\ m/s$ $\quad V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 1.79\ m/s$ $\quad V_3 = 2.12\ m/s$

$$B_2 = B_1 \Rightarrow \frac{p_2}{\gamma} = B_1 - \frac{V_2^2}{2g} = 20.19 - \frac{1.79^2}{19.62} = 20.03\ m$$

$$\frac{p_3}{\gamma} = B_1 - \frac{V_3^2}{2g} = 20.19 - \frac{2.12^2}{19.62} = 19.96\ m$$

Las presiones, en bares, serán

$p_1 = 9810 \times 20.19\ \frac{N}{m^2} = 1.962\ bar$

$p_2 = 9810 \times 20.03\ \frac{N}{m^2} = 1.965\ bar$

$p_3 = 9810 \times 19.96\ \frac{N}{m^2} = 1.958\ bar$

Son valores casi iguales. Las diferencias vienen del término cinético que influye muy poco.

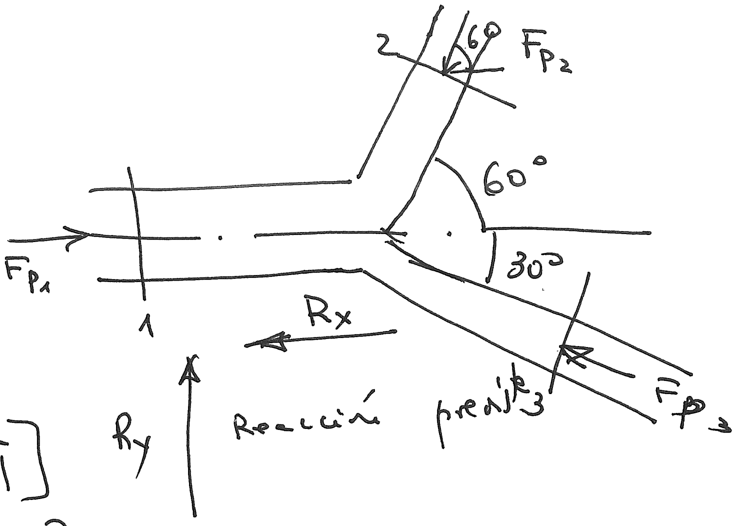
$\boxed{\text{PARA EL TERCER APARTADO}}$, estabilizado el flujo, las velocidades se duplican y se tiene:

$B_1 = 20 + \frac{(2 \times 1.91)^2}{19.62} = 20,74\ m$ | $p_1 = 1.962\ bar$ (igual que antes. NO CAMBIÓ)

$\frac{p_2}{\gamma} = 20.74 - \frac{(2 \times 1.79)^2}{19.62} = 20,09\ m$ | $p_2 = 1,898\ bar$

$\frac{p_3}{\gamma} = 20.74 - \frac{(2 \times 2.12)^2}{19.62} = 19.82\ m$ | $p_3 = 1,945\ bar$

SEGUNDO APARTADO



Fuerzas exteriores de presión

$$\vec{F}_{p_1} = (p_1 A_1)\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{p_2} = (p_2 A_2)\left[-\cos 60\,\vec{i} - \operatorname{sen} 60\,\vec{j}\right]$$

$$\vec{F}_{p_3} = (p_3 A_3)\left[-\cos 30\,\vec{i} + \operatorname{sen} 30\,\vec{j}\right]$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = p_1 A_1\,\vec{i} - p_2 A_2\left(\cos 60\,\vec{i} + \operatorname{sen} 60\,\vec{j}\right) - p_3 A_3\left(\cos 30\,\vec{i} - \operatorname{sen} 30\,\vec{j}\right) - R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j}}$$

Término de variación de cantidad de movimiento a través de la superficie de control

$$\iint_{sc} \rho\,\vec{v}\,(\vec{v}\,d\vec{A}) = \rho Q_2 \vec{V}_2 + \rho Q_3 \vec{V}_3 - \rho Q_1 \vec{V}_1 = \rho\left[\frac{Q_2^2}{A_2}\left(\cos 60\,\vec{i} + \operatorname{sen} 60\,\vec{j}\right) + \frac{Q_3^2}{A_3}\left(\cos 30\,\vec{i} - \operatorname{sen} 30\,\vec{j}\right) - \frac{Q_1^2}{A_1}\vec{i}\right]$$

con $\vec{V}_1 = 1.91\,\vec{i}$; $\vec{V}_2 = 1.79\left(\cos 60\,\vec{i} + \operatorname{sen} 60\,\vec{j}\right)$; $\vec{V}_3 = 2.12\left(\cos 30\,\vec{i} - \operatorname{sen} 30\,\vec{j}\right)$

Teniendo en cuenta que $\sum \vec{F}_{ext} = \iint_{sc} \rho\,\vec{v}\,(\vec{v}\,d\vec{A})$, separando por componentes y despejando las reacciones R_x y R_y, resulta:

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos 60 - p_3 A_3 \cos 30 + \rho\left(\frac{Q_1^2}{A_1} - \frac{Q_2^2}{A_2}\cos 60 - \frac{Q_3^2}{A_3}\cos 30\right)$$

$$R_y = p_2 A_2 \operatorname{sen} 60 - p_3 A_3 \operatorname{sen} 30 + \rho\left(\frac{Q_2^2}{A_2}\operatorname{sen} 60 - \frac{Q_3^2}{A_3}\operatorname{sen} 30\right)$$

Sustituyendo valores (en el SI) resulta

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= 58417\ \text{N} \\ R_y &= 60198\ \text{N} \end{aligned}}$$

TERCER APARTADO

Término característico del transitorio: $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{vc} \rho \bar{V}\, \delta \forall =$

$$= \rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc_1} \bar{V}_1\, \delta\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc_2} \bar{V}_2\, \delta\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int \bar{V}_3\, \delta\forall\right] =$$

$$= \rho\left[\forall_1 \frac{d\bar{V}_1}{dt} + \forall_2 \frac{d\bar{V}_2}{dt} + \forall_3 \frac{d\bar{V}_3}{dt}\right]$$ válida para $0 \le t \le 60$

siendo $Q_1 = 1{,}5\left(1+\frac{t}{60}\right)$; $Q_2 = 0.9\left(1+\frac{t}{60}\right)$; $Q_3 = 0.6\left(1+\frac{t}{60}\right)$

$\vec{V}_1(t) = 1.91\left(1+\frac{t}{60}\right)\vec{i}$; $\bar{V}_2(t) = 1.79\left(1+\frac{t}{60}\right)(\cos 60\,\bar{i} + \operatorname{sen} 60\,\bar{j})$

$\vec{V}_3(t) = 2{,}12\left(1+\frac{t}{60}\right)(\cos 30\,\bar{i} - \operatorname{sen} 30\,\bar{j})$

Derivando y operando

$$\frac{d\vec{V}_1}{dt} = \frac{0.1}{\pi}\vec{i} \; ; \; \frac{d\bar{V}_2}{dt} = 0.03\left(0.5\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right)$$

$$\frac{d\bar{V}_3}{dt} = 0.035\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - 0.5\bar{j}\right)$$

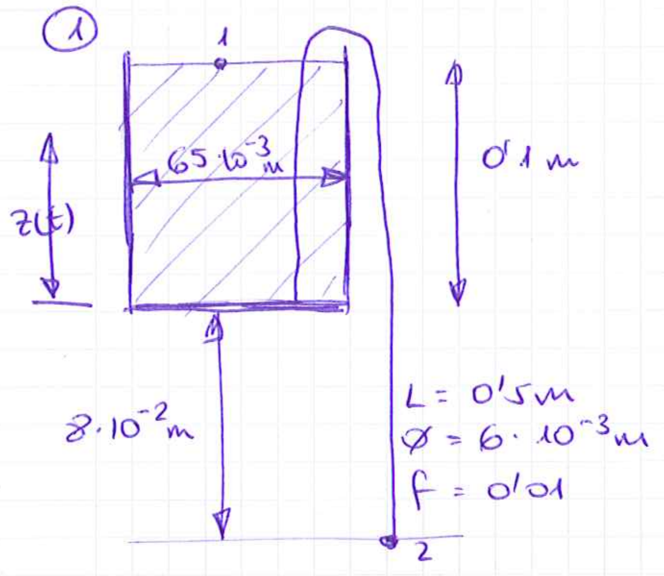
POR LO QUE LAS DOS COMPONENTES DEL TERMINO EN CUESTION SERAN:

x) $\rho\left[0.032\forall_1 + 0.015\forall_2 + 0.030\forall_3\right] = \rho\left[0.032\, L_1 A_1 + 0.015\, L_2 A_2 + 0.030\, L_3 A_3\right]$ en N

y) $\rho\left[0.030\frac{\sqrt{3}}{2}\forall_2 - 0.035 \times 0.5\forall_3\right] = \rho\left[0.026\forall_2 - 0.018\forall_3\right] =$

$$= \rho\left[0.026\, L_2 A_2 - 0.018\, L_3 A_3\right]$$

La Reacción, ya en régimen estacionario se calcula con la expresión del apartado 2 para los nuevos valores de presión y velocidad.



$$\frac{dV(t)}{dt} = -Q_{sal}$$

$$\boxed{A_{lata}\cdot\frac{dz}{dt} = -V_{sal}\cdot A_{tubo}}$$

Planteando Bernoulli entre 1 y 2 (despreciando V_1)

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} \longrightarrow 8\cdot10^{-2} + z = \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow \boxed{V_2 = \sqrt{2g\,(z+8\cdot10^{-2})}}$$

Por lo tanto la ecuación queda (sustituyendo las áreas)

$$\frac{\pi\cdot(65\cdot10^{-3})^2}{4}\cdot\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g\,(z+8\cdot10^{-2})}\cdot\frac{\pi\cdot(6\cdot10^{-3})^2}{4}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -0'085\cdot\sqrt{2g\,(z+0'08)}}$$

Los dos tubos / latas son independientes, por lo que a efectos de calcular el tiempo basta con modelar uno de los sistemas.

(1b) En el apartado b hay que considerar succión y pérdidas en Bernoulli:

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + h_f \quad \Bigg\| \quad \frac{P_2}{\gamma} = -10\,\text{kpa} = -1\,\text{mca}$$

$$\boxed{h_f} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0'01 \cdot \frac{0'5}{6\cdot 10^{-3}} \cdot \frac{V_2^2}{2g} = \boxed{0'043 \cdot V_2^2}$$

$$\downarrow$$

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} - 1 + 0'043\,V^2 \rightarrow$$

$$\boxed{V_2 = \frac{\sqrt{(z_1 + 1)\cdot 2g}}{1'043}}$$

$$\boxed{V_2 = \frac{\sqrt{(z + 1'08)\cdot 2g}}{1'043}}$$

y por lo tanto

$$\frac{dz}{dt} = 0'085 \cdot \left(\frac{\sqrt{(z + 1'08)\cdot 2g}}{1'043} \right)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 0'081 \cdot \sqrt{(z + 1'08 \cdot 2g)}}$$

2

a) Altura piezométrica ≡ cota + presión

$$z + \frac{P}{\gamma}$$

Altura total = Energía total = cota + presión + E. cinética

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

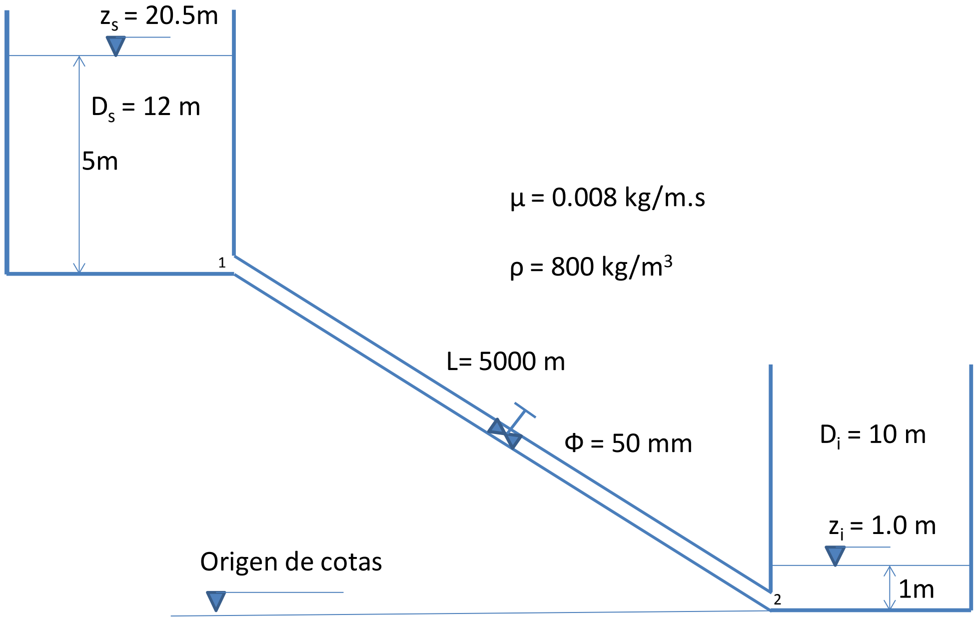
b) Sí. Corresponde al término cinético $\frac{V^2}{2g}$

c) Siempre que $\frac{V^2}{2g}$ sea constante (en fluidos incompresibles siempre que la sección de la conducción sea constante)

d) NO. La energía cinética $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ no puede ser negativa. En reposo $(V=0)$ ambas líneas son la misma.

APELLIDOS: NOMBRE:

Problema 1 (33%)



La figura muestra dos depósitos cilíndricos unidos por una conducción. Inicialmente el superior está casi lleno de petróleo y el inferior casi vacío. Una válvula cerrada controla el paso del fluido cuya viscosidad y densidad detalla la figura que también muestra las dimensiones del sistema. Admitiendo que:

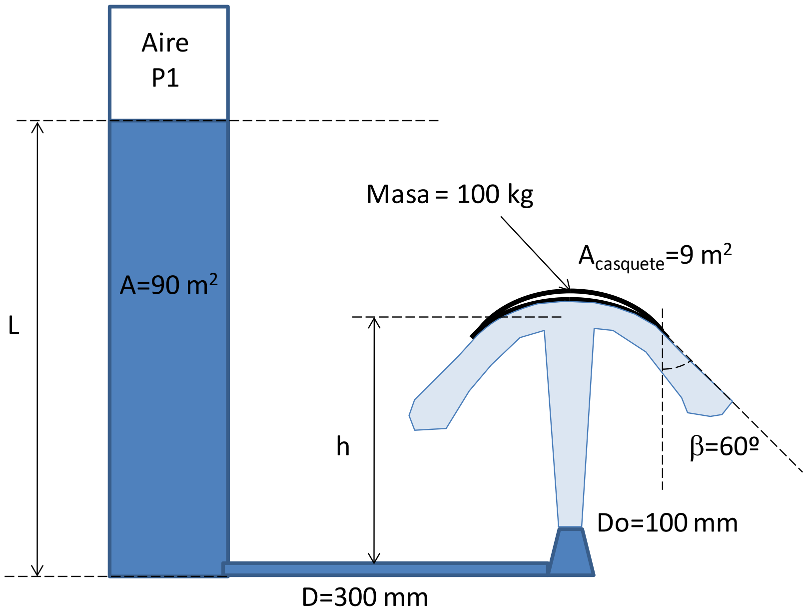
a) La única pérdida de energía es la fricción del fluido en la tubería
b) El régimen es estacionario (despreciar los efectos transitorios)
c) El perfil de velocidades es el mismo en toda la conducción (desde el punto 1 al 2). Se desprecia el efecto de entrada en la tubería.

En estas condiciones, tras la apertura instantánea de la válvula que se mantiene abierta una hora, calcular:

1. El caudal circulante por la conducción
2. El régimen del flujo
3. El perfil de velocidades en la conducción
4. El volumen trasegado durante el tiempo que la válvula permanece abierta.
5. La variación de niveles en los depósitos al cabo de una hora. Justificar a partir del resultado la hipótesis adoptada de régimen estacionario.
6. La presión en la válvula situada en el punto medio de la tubería (su pendiente es constante). Valorar la incidencia del factor de corrección de la energía cinética.
7. Potencia aportada y potencia disipada en la tubería (entre los puntos 1 y 2). Verificar la igualdad correspondiente al régimen estacionario.
8. El incremento de temperatura del petróleo en su discurrir entre los puntos 1 y 2, sabiendo que su calor específico es 0.5 cal/gr.ºC es decir, la mitad que el del agua. Recordar que se en estas condiciones se puede suponer $h_f = (u_2\text{-}u_1)/g$, con $u_2\text{-}u_1 = C_e\,(T_2\text{-}T_1)$
9. Evaluar la energía perdida por fricción en la hora de trasiego del fluido, justificando que es igual a la diferencia de energía del sistema entre el instante inicial y la existente al cabo de una hora.

APELLIDOS: NOMBRE:

Problema 2 (33%)



La figura muestra un dispositivo hidráulico de sustentación/elevación de un casquete esférico de masa 100 kg.

a) Suponiendo una presión de aire (P1) constante en el depósito e igual a la presión atmosférica (P1=Patm): ¿Qué altura de agua sobre el suelo (L) se requeriría para mantenerlo estable a una altura de 1 metro (h=1 m)?

b) Suponiendo que la presión del aire en el depósito está controlada por un sistema de regulación automática que permita (pasado un breve transitorio inicial) que el disco ascienda a velocidad constante de 1 m/s. ¿Qué presión de aire, en Pascales, habría en el interior del depósito cuando la posición del disco es h=3 m (y este asciende a la velocidad de 1 m/s)? Suponer que el nivel del agua en el depósito es constante e igual al resultado obtenido en el apartado a) (Nota: En caso de no haber resuelto el apartado a) selecciónese un valor entre 5 y 10 m para la longitud L)

Nota: Para la resolución despreciar las pérdidas por fricción en la tubería y cualquier otro elemento. Suponer la salida por la boquilla a una cota h=0 m y velocidad uniforme en toda la sección de salida.

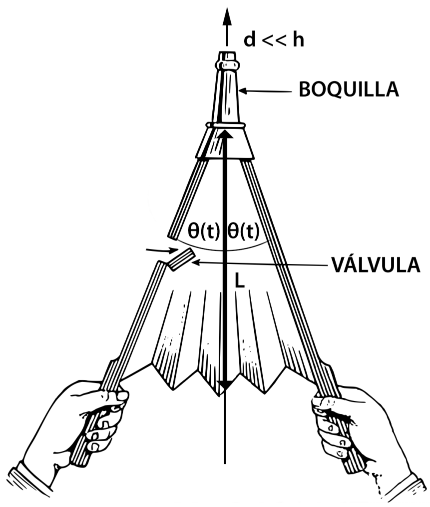
Mecánica de Fluidos
Jueves 15 de Septiembre de 2011

APELLIDOS: NOMBRE:

Cuestiones (33%)

a) (2 puntos) Un globo esférico se llena a nivel de mar con helio y asciende rápidamente. La fuerza vertical ascendente sobre el globo es de 800N ¿Cuál es el diámetro del globo?.
Masa del globo = 20Kg ; Densidad del aire = 1,2 kg/m^3 ; Densidad del Helio = 0,18 kg/m^3

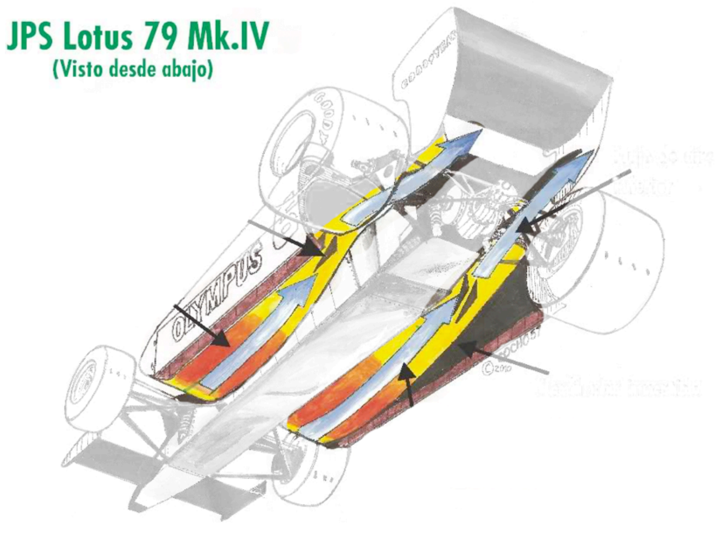
b) (3 puntos) Un fuelle se puede modelar como un volumen deformable en forma de cuña triangular. La válvula de entrada está cerrada mientras se acciona el fuelle para expulsar el aire. Obtener una expresión del caudal másico en función del ángulo θ(t). Suponer la presión P y la temperatura T en e interior del fuelle constante.
Volumen pirámide = 1/3 base x altura

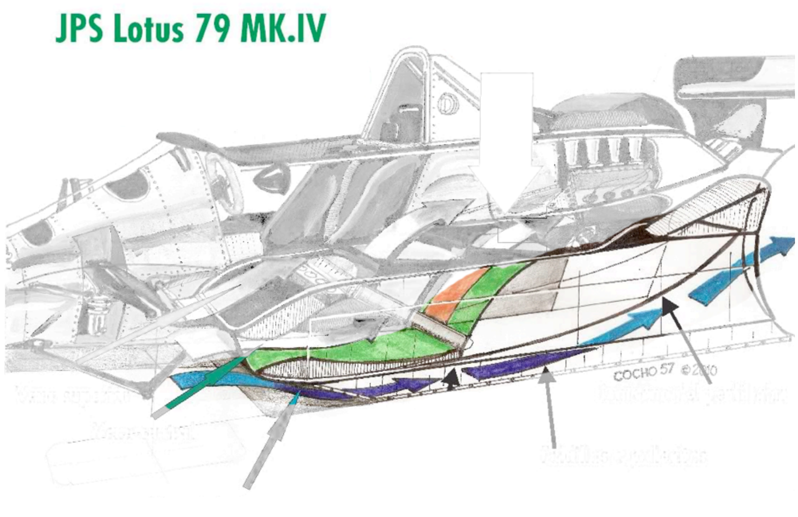


c) A finales de los 70 los coches de Fórmula 1 incorporaron un nuevo diseño para canalizar el aire por la parte inferior del vehículo y que conseguía el llamado "efecto suelo". El aire circulaba atrapado entre los faldones laterales y recorría un perfil de ala invertido que disminuía la sección efectiva de paso del aire en la parte inferior del coche. ¿Por qué este diseño consigue mejorar la fuerza vertical descendente sobre el coche?

d)

Suponer que el coche clásico de la figura circula a 210 Km/h en un circuito sin viento y que de una sección de entrada de 80000 mm2 se pasa a una sección mínima de 30000 mm2 (suponer el aire incompresible). ¿Qué fuerza vertical se genera por unidad de superficie en el estrangulamiento máximo?





EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Flujo laminar incompresible (simetría plana)

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible (simetría cilíndrica)

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

(1)

(1) Establecemos Bernoulli entre los puntos extremos suponiendo que el Régimen es laminar

$$(20,5-1) = \frac{64}{Re}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{64\nu}{VD}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{64\nu}{2gD^2}LV$$

$$D^2 = \cancel{2,5}\;6{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$V = 19.5\,\frac{2g\,D^2}{64\,\nu\,L} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{8\cdot 10^{-3}}{800} = 10^{-5}$$

$$V = 19.5\,\frac{2\times 9.81\times 2{,}5\times 10^{-3}}{64\times 8\times 10^{3}\times \cancel{8}\times 10^{-5}} = \frac{39\times 9{,}81\times 2{,}5}{320\times 10^{+1}} = \frac{39\times 9.81\times 2.5}{3200} =$$

$$\boxed{\bar V = 0{,}299\ m/s \equiv 0{,}30\ m/s}$$

Esta es la velocidad media del flujo

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\times \bar V = \frac{\pi}{4}\,2{,}5\;10^{-3}\times 0{,}3\ m^3/s = \frac{\pi}{4}\times 0{,}75\ l/s$$

$$\boxed{Q = 0{,}59\ l/s}$$

(2)

$$Re = \frac{\bar V D}{\nu} = 0{,}30\times 0{,}05\times 10^{5} \equiv 1500 \qquad \text{LAMINAR}$$

Está bien la hipótesis del apartado 1.

en lo que sigue a la velocidad media $\bar V$ la notamos V, respecto.

(3) En régimen laminar el perfil es parabólico con

$V_{max} = 2\bar V = 0{,}6\ m/s$. luego el perfil es

$$u(r) = 0{,}6\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \boxed{0{,}6\,(1-1600\,r^2) = u(r)}$$

También puede obtenerse este perfil de velocidades a partir de la expresión:

(2)

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)\left[1-\frac{r^2}{R^2}\right]$$

$$-\frac{d}{dl}(p+\gamma h) = \frac{(p_1+\gamma h_1)-(p_2+\gamma h_2)}{L} \quad \text{con} \longrightarrow \begin{cases} p_1 = \gamma\left(5-\frac{\phi}{2}\right) \\ \gamma h_1 = \left(15,5+\frac{\phi}{2}\right)\gamma \\ p_2 = \gamma\left(1-\frac{\phi}{2}\right) \\ \gamma h_2 = \gamma\left(0+\frac{\phi}{2}\right) \end{cases}$$

luego $-\frac{d}{dl}(p+\gamma h) = \frac{20,5\,\gamma - 1\,\gamma}{5000} = \frac{\gamma \cdot 19,5}{5000}$

con el coeficiente de $u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h) = \frac{R^2}{4\mu}\frac{\gamma\, 19,5}{5000}$

$$+\frac{R^2}{4\mu}\frac{\rho g\, 19,5}{5000} = \frac{R^2}{4\nu\cancel{\rho}}\frac{\cancel{\rho} g\, 19,5}{5000} = \frac{6,25\times10^{-4}\times 9,81\times 19,5}{4\times10^{-5}\times 5\times 10^3} = 0,6$$

Obteniendose $u(r) = 0,6\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = 0,6\left(1-1600\,r^2\right)$

---

(4)

$$\forall = \int Q\,dt = 0,59\,\frac{l}{s}\times 3600\,s = 2124\,l = 2,124\,m^3$$

---

(5) En una hora las variaciones de nivel son

$$\Delta Z_s = -\frac{\forall\, 4}{\pi D_s^2} = -\frac{4\times 2,124}{\pi\, 12^2}\,m = -0,019\,m = -1,9\,cm$$

$$\Delta Z_i = +\frac{4\,\forall}{\pi D_i^2} = \frac{4\times 2,124}{\pi\, 10^2}\,m = +0,027\,m = 2,7\,cm$$

El nuevo desnivel sería $19,5 - 0,019 - 0,027 = 19,454\,m$

y la nueva velocidad $V_n = 0,3\,\frac{19,454}{19,5} = 0,3\times 0,997 \cong 0,3$

ESTA BIEN LA HIPOTESIS

Se cumple Potencia aportada = Potencia disipada (3)

APORTE $\gamma Q H_T = \gamma Q \; 19.5$

Potencia disipada $\gamma Q h_f$

$\Big\} \Rightarrow h_f = 19.5$ m

una condición ya supuesta

un resultado que también proporciona la función de disipación ϕ

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dr}\right)^2 \Rightarrow P_d = \int_0^R \phi \; 2\pi r \, dr \; L \quad \text{con} \quad \phi = \mu\left(\frac{du}{dr}\right)^2 = 4\mu V^2\left(-\frac{2r}{R^2}\right)^2$$

Sustituyendo :

$$P_d = \int_0^R \Phi \; 2\pi r \, dr \, . L = 4\mu V^2 \int_0^R \frac{4r^2}{R^4} 2\pi r \, dr \, . L =$$

$$= 8 \mu \pi L V^2$$

que coincide con $\gamma Q h_f = \rho g V \dfrac{\pi D^2}{4} \dfrac{64\nu}{2gD^2} . LV = \underline{8\pi\mu L V^2}$

Su valor $8\pi \times 0.008 \frac{kg}{ms} \; 5000 \, m \times 0.09 \frac{m^2}{s^2} = 90.48 \, W$

un valor pequeño porque Q también lo es.

También $\gamma Q h_f = 9{,}81 \times 800 \times 0{,}59 \times 10^{-3} \times 19{,}5 = 90{,}29 \, W$

---

(6) Aplicando Bernoulli entre el punto superior y la válvula:

$$B_S = z_S = 20{,}5 \; ; \quad B_v = \left.\frac{p}{\gamma}\right)_v + \alpha \frac{0.30^2}{2g} + \frac{19.5}{2} + \phi/2 \; ; \quad h_{f_{S\to v}} = f \frac{2500}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Sustituyendo

$$\left.\frac{p}{\gamma}\right)_v = 20{,}5 - 2\frac{0{,}3^2}{2g} - \left(7{,}75 + \frac{0{,}05}{2}\right) - \frac{64}{Re}\frac{2500}{0{,}05}\frac{0{,}3^2}{19{,}62}$$

↳ $h_f = \frac{19.5}{2}$

$$\left.\frac{p}{\gamma}\right)_v = 20{,}5 - \frac{19.5}{2} - 7{,}775 - 2\times 0{,}005 = 2{,}975 - 0{,}01 = 2{,}965 \, m$$

Sin f. corrección α $\left.\frac{p}{\gamma}\right)_v = 2{,}975 - 0{,}005 = 2{,}970$ m, casi

Despreciable (0,004/3)

~ 23.760 N/m²

---

(7) $h_f = \dfrac{c_e \Delta T}{g} \Rightarrow \Delta T = \dfrac{g h_f}{c_e} = \dfrac{9{,}81 \times 19{,}5}{0{,}5 \times 4.18 \times 10^3}$ °C $= 0{,}09$ °C

---

(8) $E = P \times t = 90{,}48 \times 3600 \, J = 325728 \, J$

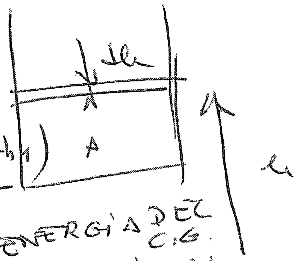
(8) $h_f = \dfrac{c_e \, \Delta T}{g} \Rightarrow \Delta T = \dfrac{g \, h_f}{c_e} = \dfrac{9{,}81 \times 19{,}5}{0{,}5 \times 4{,}18 \times 10^3} \approx 0{,}09\,°C = \Delta T$

4

(9) La energía disipada es:

$$E = P \times t = 90{,}48 \times 3600 = 325\,728 \text{ J}$$

Procede ahora determinar la energía que almacena un depósito para, después, determinar su variación



$$dE = dm \, g \, h = A \, dh \, \rho \, g \, h$$

$$E_D = \gamma A \int_1^2 h \, dh = \gamma A \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} = \gamma A \frac{(h_2+h_1)(h_2-h_1)}{2}$$ COINCIDE CON ~~LA~~ ENERGÍA DEL C.G. del depósito superior:

$$= \gamma A \, H_G \cdot \Delta h = M g H_G \longrightarrow$$

luego la variación de energía del depósito

$$\gamma A_1 \left[\frac{20{,}5^2 - 15{,}5^2}{2} - \frac{20{,}481^2 - 15{,}5^2}{2} \right] = \frac{\gamma A_1}{2} \left(20{,}5^2 - 20{,}481^2 \right) = \cancel{363\,700 \text{ J}} = 345\,555$$

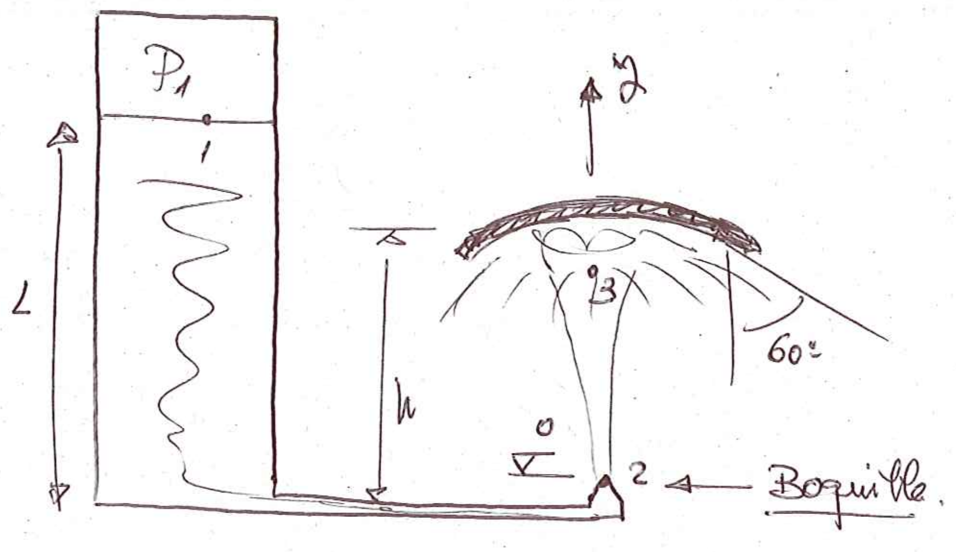
Y el aumento de energía del inferior:

$$\frac{\gamma A_2}{2} \left(1{,}02704^2 - 1^2 \right) = 0{,}0548 \times \frac{9{,}81 \times 800 \times \pi \times 100}{8} \text{ J} = 16892 \text{ J}$$

Se cumple $345\,555 \approx 16892 + 325\,728 \approx 342\,620$

Con un error inferior al 1%, fruto de los redondeos!! Consecuencia de truncamientos y simplificaciones!

PROBLEMA 2



① Bernoulli entre 1 y 2

$P_1/\gamma = 0$ en apartado 1 (p. atmosférica)

$P_2/\gamma = 0$ chorro en la atmósfera

$$\cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{0} + \underset{L}{z_1} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = \cancel{\frac{P_2}{\gamma}}^{0} + \underset{0}{z_2} + \frac{V_2^2}{2g}$$

la sección del depósito es muy ancha $\simeq 0$ → $\boxed{V_2 = \sqrt{2gL}}$

$$\boxed{Q = V_2 \cdot A_0 = A_0\sqrt{2gL}}$$

$D_0 = 100$ mm → $A_0 = \frac{\pi \cdot 0'1^2}{4}$

En la casoleta el chorro tiene mayor sección (menor velocidad)

$$V_2 A_0 = V_3 \cdot A_3$$

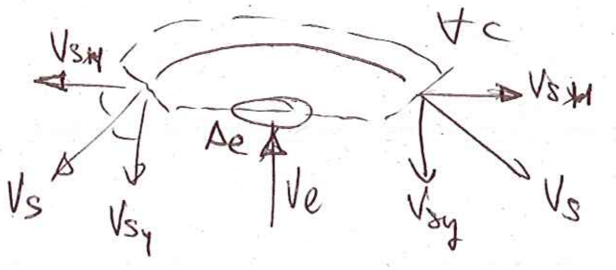
Aplicando Bernoulli entre 2 y 3:

$$\cancel{\frac{P_2}{\gamma}}^{0} + \underset{0}{z_2} + \frac{V_2^2}{2g} = \cancel{\frac{P_3}{\gamma}}^{0} + \underset{h}{z_3} + \frac{V_3^2}{2g}$$

chorro en atmósfera

como $V_2 = \sqrt{2gL}$ → $\boxed{V_3 = \sqrt{2g(L-h)}}$

Esta es la velocidad de entrada al VC.

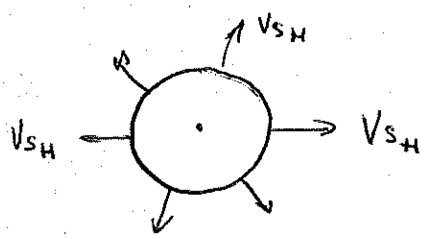


El vector velocidad de entrada $\vec{V_e} = V_3 \vec{j}$

La velocidad de salida es la misma que la de entrada, lo que se demuestra aplicando Bernoulli entre la entrada y salida del casquete, sin considerar el desnivel geométrico entre entrada y salida.

El vector velocidad de salida puede descomponerse siempre en dos componentes, una vertical y otra situada en un plano horizontal.

Si vemos desde arriba el casquete y representamos solo las componentes de la velocidad de salida en el plano horizontal:



Aplicamos la E.C.Mov. En nuestro caso el casquete está quieto, por lo que el término corrector es 0.

$$\Sigma \bar{F} = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \bar{V} d\forall + \int_{SC} \rho \bar{V}(\bar{V}\cdot d\bar{A})$$

$$\Sigma \bar{F} = -mg\vec{j}$$

Dentro del $\forall C$ la velocidad no varía con el tiempo, por lo que si bien el término $\int_{\forall c} \rho \bar{V} d\forall$ es $\neq 0$, la $\frac{d}{dt}$ es nula.

Respecto a la $\int_{SC}$, la dividimos en dos partes:

$$\int_{SS} \rho \bar{V}(\bar{V}\cdot d\bar{A}) + \int_{SE} \rho \bar{V}(\bar{V}\cdot d\bar{A})$$

Analizamos primero la $\int_{SE}$:

Si suponemos que en la superficie de entrada la velocidad es constante, $\bar{V}e = \sqrt{2g(L-h)}\,\vec{J}$, la podemos sacar fuera de la integral, al igual que ρ:

$$\int_{SE} \rho \bar{V}(\bar{V}\cdot d\bar{A}) = \rho \bar{V}\int_{SE}\bar{V}\cdot d\bar{A} = \rho\sqrt{2g(L-h)}\,\vec{j}\int_{SE}\bar{V}\cdot d\bar{A} = -\rho A_0\sqrt{2gL}\sqrt{2g(L-h)}\,\vec{j}$$

$$\bar{V}\cdot d\bar{A} < 0 \qquad |\bar{V}\cdot d\bar{A}| = dQ \longrightarrow \int_{SE}\bar{V}\cdot d\bar{A} = -Q = -A_0\sqrt{2gL}$$

Respecto a la otra integral : $\bar{V}_S = \bar{V}_{Sy} + \bar{V}_{SH}$

$$\int_{SS}\rho\bar{V}(\bar{V}\cdot d\bar{A}) = \int_{SS}\rho\bar{V}_{Sy}(\bar{V}\cdot d\bar{A}) + \int_{SS}\rho\vec{V}_{SH}(\vec{V}\cdot d\vec{A})$$

$\bar{V}_{Sy} = -V_S\cos 60\,\vec{j}$

Este término se anula pues las $|\bar{V}_H|$ en los diferentes $d\bar{A}$ son iguales y siempre hay uno opuesto de signo contrario para cada uno

$$\int_{SS} = \rho(-V_S\cos 60\,\vec{j})\underbrace{\int\bar{V}\cdot d\bar{A}}_{Q}$$

$$= -\rho V_S\cos 60\, Q\,\vec{j} = -\rho\sqrt{2g(L-h)}\,A_0\sqrt{2gL}\,\cos 60\,\vec{j}$$

$Q = A_0\sqrt{2gL}$ $\qquad V_S = V_e = V_3 = \sqrt{2g(L-h)}$

Quedando:

$$-mg\,\vec{j} = -\rho A_0\sqrt{2g(L-h)}\sqrt{2gL}\,\cos 60\,\vec{j} - \rho A_0\sqrt{2g(L-h)}\cdot\sqrt{2gL}\,\vec{j}$$

$$mg = \rho A_0\sqrt{2g(L-h)}\sqrt{2gL}\,(1+\cos 60)$$

$$mg = \rho A_0 2g\sqrt{L^2-Lh}\,(1+\cos 60)$$

$$\sqrt{L^2-Lh} = \frac{m\cancel{g}}{\rho A_0 2\cancel{g}(1+\cos 60)} = \frac{m}{2\rho A_0 1'5} = \frac{m}{3\rho A_0}$$

$$L^2-Lh = \frac{m^2}{3^2\rho^2A_0^2} \longrightarrow L^2 - Lh - \frac{m^2}{9\rho^2A_0^2} = 0 \qquad L^2 - L - 18'01 = 0$$

$h = 1$ $\qquad \frac{m^2}{9\rho^2A_0^2} \longrightarrow 18'01$

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 18'01}}{2} = \text{tomando solución } + = \underline{\underline{4'77 \text{ m}}}.$$

(2) El casquete asciende a velocidad constante, por lo que el $\forall C$. sigue siendo inercial ($\nexists$ término corrector pues si bien $\dot{R} \neq 0$, $\ddot{R} = 0$).

La diferencia con el caso anterior es que no todo el caudal que sale de la boquilla ~~que~~ impacta en el casquete, y la velocidad que hay que tomar en la ecuación de la cantidad de movimiento es la del chorro relativa al casquete, que se mueve a 1 m/s (ascendiendo).

Por otro lado, la presión P_1/γ es distinta de 0.

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2

$$\frac{P_1}{\gamma} + L + \underbrace{\cancel{\frac{V_1^2}{2g}}}_{\simeq 0} = \underbrace{\cancel{\frac{P_2}{\gamma}}}_{0} + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \longrightarrow V_2 = \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma} + L\right)}$$

La velocidad a una altura h sale de aplicar Bernoulli entre 2 y 3

$$\underbrace{\cancel{\frac{P_2}{\gamma}}}_{0} + 0 + \frac{V_2^2}{2g} = h + \frac{V_3^2}{2g} \longrightarrow V_3 = \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma} + L - h\right)}$$ (Velocidad absoluta del chorro a la entrada de la cazoleta)

Falta averiguar la sección del chorro en 3. El caudal sigue siendo $A_0 V_2 = A_0 \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L\right)}$ pero el que impacta en la cazoleta hay que determinarlo con la velocidad relativa chorro/cazoleta

Aplicando continuidad $\quad Q = A_0 V_2 = A_0 \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L\right)} = A_3 V_3 = A_3 \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}$

$$A_3 = \frac{A_0 \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L\right)}}{\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}} = A_0 \sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+L}{\frac{P_1}{\gamma}+L-h}}$$

La velocidad relativa de entrada a la cazoleta, suponiendo que esta se mueve a velocidad $\vec{u} = u\vec{j}$ será:

$$\overline{V_{abs}} = \overline{V_{rel}} + \overline{V_{arr}} \longrightarrow \overline{V_{rel}} = \underbrace{\overline{V_{abs}}}_{V_3\vec{j} = \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}} - \underbrace{\overline{V_{arr}}}_{u\vec{j}} = \left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)} - u\right)\vec{j}$$

velocidad de los ejes ligados a la cazoleta $u\vec{j}$

la velocidad relativa $\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)\vec{j}$ es la de entrada. El módulo de la velocidad de salida será el mismo, y ocurrirá lo mismo que en el apartado 1 con las componentes de la velocidad de salida en un plano horizontal.

Las fuerzas serán las mismas, y la $\frac{d}{dt}\int_{Vc}$ será $\emptyset$, ya que $\int_{Vc} \neq 0$ pero no depende de t.

$$-mg\vec{j} = \int_{SC} \rho \bar{V}(\bar{V}\cdot d\bar{A}) = \int_{Ss} \rho \bar{V}_s(\bar{V}_s\cdot d\bar{A}) + \int_{SE} \rho \bar{V}_e(\bar{V}_e\cdot d\bar{A})$$

$$-mg\vec{j} = \int_{Ss} \rho \bar{V}_{Sy}(\bar{V}_s\cdot d\bar{A}) + \int_{SE} \rho \bar{V}_E(\bar{V}_0\cdot d\bar{A})$$

$$-mg\vec{j} = -\rho\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)\underset{\cos 60}{\vec{j}}\int_{SS}\bar{V}_0\cdot d\bar{A} + \rho\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)\vec{j}\int_{SE}\bar{V}\,d\bar{A}$$

$$Q = \left|\int_{SE}\bar{V}_E\cdot d\bar{A}\right| = \left|\int_{SS}\bar{V}_s\cdot d\bar{A}\right|; \quad \int_{SE}\bar{V}\cdot d\bar{A} = \bar{V}_E\int_{SE}d\bar{A} = V_E\vec{j}\cdot(-A_e\vec{j}) = \underline{\underline{-V_E A_e}}$$

la velocidad es uniforme

$A_e = A_3$

$$Q = V_E A_e = \left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)A_0\sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+L}{\frac{P_1}{\gamma}+L-h}}$$

$$-mg = -\rho\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)\cos 60\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)A_0\sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+L}{\frac{P_1}{\gamma}+L-h}} -$$

$$-\rho\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)}-u\right)A_0\sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+L}{\frac{P_1}{\gamma}+L-h}}$$

$$mg = \rho \Delta_0 (1+\cos 60)\left(\sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma}+L-h\right)} - u\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+L}{\frac{P_1}{\gamma}+L-h}}$$

$h = 3\,m$ $\rho = 10^3$ $m = 100$

$L = 4'77\,m$ $\cos 60 = 0'5$

$\Delta_0 = \frac{\pi \cdot 0'1^2}{4}$ $u = 1\,m/s$

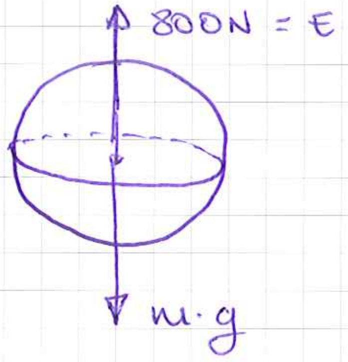
$$100 \cdot 9'81 = 10^3 \frac{\pi \cdot 0'1^2}{4}(1+0'5)\left(\sqrt{2 \cdot 9'81\left(\frac{P_1}{\gamma}+4'77-3\right)} - 1\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+4'77}{\frac{P_1}{\gamma}+4'77-3}}$$

$$83'27 = \left(\sqrt{19'62\left(\frac{P_1}{\gamma}+1'77\right)} - 1\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{P_1}{\gamma}+4'77}{\frac{P_1}{\gamma}+1'77}}$$

Iterando $\frac{P_1}{\gamma} = 2'31\,mca$

$$P_1 = \gamma \cdot 2'31 = 9810 \cdot 2'31 = \underline{\underline{22661'1\ Pa}}$$

a)



La fuerza ascendente tan solo depende del volumen desalojado de aire. Por lo tanto

$$800\ N = V_{globo} \cdot \rho_{aire} \cdot g$$

$$800 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1'2 \cdot 9'8$$

$$\boxed{r = 2'53\ m}$$

Si hubiera que tener en cuenta el peso del globo para obtener una fuerza resultante, habría que considerar el peso del helio y del globo:

$$m_{TOT} = 20 \cdot [illegible] + \frac{4}{3}\pi \cdot (2'53)^3 \cdot 0'18 =$$

$$= \boxed{32'2\ kg}$$

$$\boxed{Peso_{TOT} = 315'6\ N(-\vec{j})}$$

$$\boxed{R_{ES} = \overset{484'4}{\cancel{}}\ N\ \vec{j}}$$

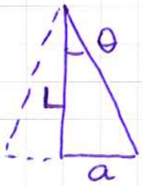
484

b) Siendo el aire incompresible, la variación de volumen del fuelle corresponderá al caudal volumétrico de salida (ec. continuidad):

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

$$\boxed{\rho \frac{d\forall}{dt} = -\rho Q_s}$$

Volumen del fuelle:



$$\tan\theta = \frac{a}{L} \longrightarrow a = \tan\theta \cdot L$$

$$\boxed{\forall_{pirámide} = \frac{1}{3}(2a \cdot b) \cdot L = \frac{2}{3} b L^2 \tan\theta(t)}$$

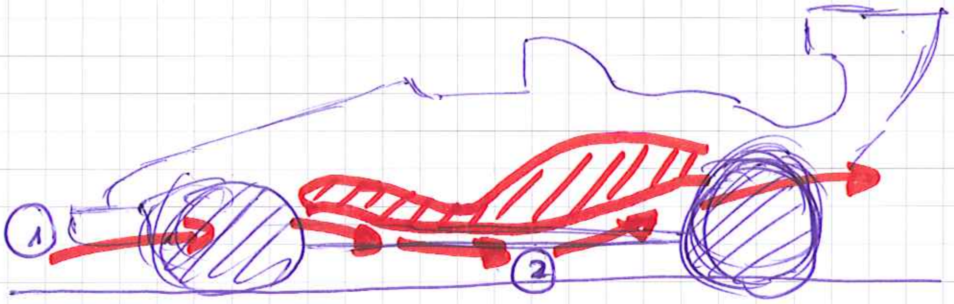
$$\boxed{G} \equiv \dot{m} = \rho Q_s = \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{3} b L^2 \tan\theta(t)\right] =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} b L^2 \frac{1}{\cos^2\theta(t)}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE VALENCIA
Camino de Vera, s/n. 46022 VALENCIA • Tel. 96 387 71 70 • Fax 96 387 71 79 • E-Mail: etsii@upvnet.upv.es

Asunto: / /

c) El efecto suelo es lo mismo que el efecto Venturi.



El aire al entrar en la parte inferior del coche es obligado a circular por un recorrido de sección decreciente. Aplicando Bernoulli (aire incompresible)

$$\frac{\cancel{P_1}}{\gamma} + \cancel{z_1} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} + \frac{V_2^2}{2g}$$

0 (atm)

$$\boxed{\frac{P_2}{\gamma} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}}$$

Como $V_2 >> V_1$ se crea una depresión $(P_2 < 0)$ que "pega" el coche al suelo.

APLICACIÓN NUMÉRICA

$\boxed{S_1 = 80000 \text{ mm}^2 = 0'8 \text{ m}^2}$ $\boxed{S_2 = 30000 \text{ mm}^2 = 0'3 \text{ m}^2}$

$\boxed{V_1 = 210 \text{ km/h} = 58'33 \text{ m/s}}$

$\boxed{Q = 58'33 \cdot 0'8 = 46'67 \text{ m}^3/\text{s}}$ $V_2 = \frac{Q}{S_2} = \boxed{155'55 \text{ m/s}}$

$$\boxed{\frac{P_2}{\gamma} = \frac{-155'55^2 + 58'33^2}{2 \cdot 9'8} = -1060'96 \text{ m.c. aire} = 12477 \text{ Pa}}$$

Problema 1 (33%)

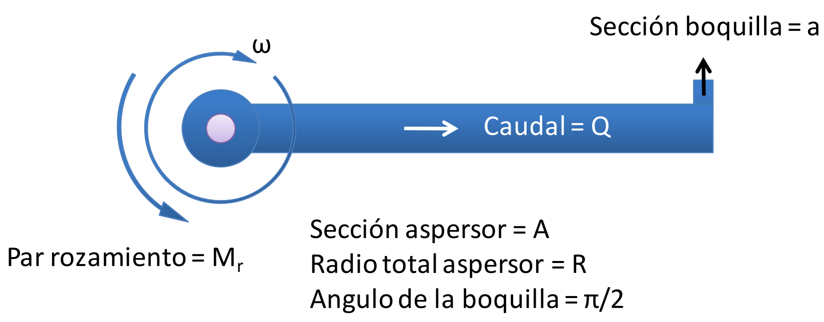
Con relación al aspersor asimétrico de la figura se pregunta:

1. Su velocidad de giro cuando el rozamiento es despreciable. Interpretar el resultado.
2. Su velocidad de giro cuando el rozamiento es constante e igual (M_r = constante = M_{r0}). Interpretar el resultado, comparándolo con el valor calculado en el primer apartado.
3. Su velocidad de giro en régimen estacionario si el rozamiento es proporcional a la velocidad de giro ($M_r = k\ \omega$). Interpretar el resultado, comparándolo con los valores calculados en los apartados precedentes.
4. La ecuación que modela el arranque del aspersor $\omega = \omega(t)$, partiendo del reposo, suponiendo que el rozamiento es proporcional a la velocidad de giro ($M_r = k\ \omega$). Frente al volumen del aspersor, el de la boquilla es totalmente despreciable.
5. Calcular el tiempo que tarda el aspersor en alcanzar el 95% de la velocidad de régimen (utilizar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores).

Recordar que la solución de la siguiente ecuación diferencial es:

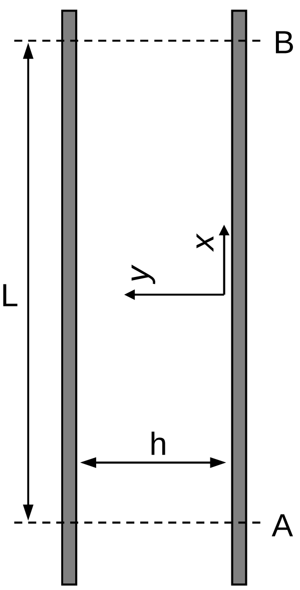
$$\dot{\omega}(t) + B\,\omega(t) = C \quad \Longrightarrow \quad \omega(t) = \frac{C}{B} + De^{-Bt}$$

siendo D la constante a determinar a partir de las condiciones iniciales del problema.



Problema 2 (33%)

La figura muestra un sistema de impulsión vertical para un aceite de densidad ρ y viscosidad μ. El flujo (Couette) de aceite asciende entre dos placas fijas paralelas una altura L, entre las secciones A y B, gracias a la diferencia de presión existente entre dichas secciones. Se pide:



a) Calcular, para una sección cualquiera entre A y B, el perfil de velocidades, la velocidad máxima, la velocidad media y la relación numérica entre ambas.

b) Representar, para una sección cualquiera entre A y B, el perfil resuelto en el apartado anterior y calcular, o bien justificar adecuadamente, el signo del esfuerzo cortante en cada punto de la sección.

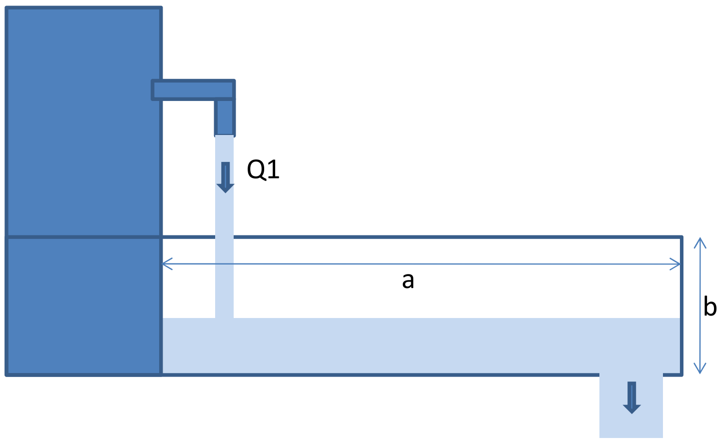
c) Sabiendo que la aplicación numérica del problema es ρ=750 kg/m^3; μ=0,0525 kg/m/s; L=3 m; h=25 cm; ΔP = P_B-P_A = -0,221 bar, se pide calcular las potencias aportadas al flujo y razonar la magnitud de los valores resultantes y el signo de las mismos. Además, ¿cuál es la cifra de potencia disipada? ¿tiene sentido su magnitud?

d) Sabiendo que para calcular el número de Reynolds en un flujo de Couette se usa la distancia h como longitud característica (en lugar del diámetro D), se pide calcular el valor del incremento de presión entre A y B (ΔP = P_B-P_A), por encima del cual, el flujo del aceite dejaría de ser laminar (se recomienda resolver este apartado con los parámetros del flujo y sustituir los valores numéricos al final).

Cuestiones (33%)

a) Se dice que Arquímedes descubrió las leyes de la flotación cuando el rey Hiero de Siracusa sospechó que el orfebre real le había estafado sisando el oro destinado a la elaboración de la corona del rey. Arquímedes quedó encargado de determinar si la corona era de oro puro (ρ'=19,3). Arquímedes determinó que el peso de la corona en el aire era 11,8N y su peso en el agua 10,9N. ¿Era de oro puro?

b) Una fuente llena hasta rebosar un depósito de ancho "a", alto "b" y 1 metro de profundidad con un caudal Q1. Para limpiar el depósito se abre el desagüe, de sección S, suficientemente grande, y coeficiente de descarga C_D mientras la fuente sigue abierta.



Plantear la ecuación diferencial que permite calcular el tiempo de vaciado, pasarla a incrementos y explicar cómo se resolvería el problema (especificando columnas y método) con una hoja de cálculo.

c) Explicar qué condiciones deben cumplirse para poder aplicar el Teorema de Arrastre de Reynolds (TAR). En concreto, a qué propiedades puede aplicarse y a qué clase de fluidos. Utilizando la expresión del TAR que aparece en el formulario, interpretar conceptualmente las variables que allí aparecen así como los recintos de integración.

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

gp

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

(1)

Problema as pectos Junio 2010

Aplicamos Ecuación Momento Cinético
VC ligado a referencia móvil,

(a)

$$\Sigma \vec{M}_{ext} - \iiint_{VC} \left\{ \bar{r} \wedge \left[\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \bar{r} + 2\bar{\omega} \wedge \bar{V} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}) \right] \right\} \rho \, d\forall =$$

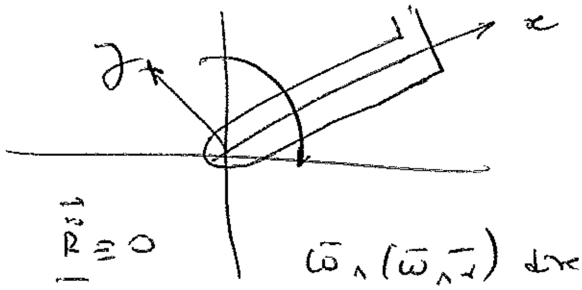
$$= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \bar{V}_{rel} \, \rho \, d\forall + \iint_{SC} (\bar{r} \wedge \bar{V}_{rel}) \, \rho \, (\bar{V} \cdot d\bar{A})$$

Utilizamos sólo la componente axial z del eje del aspersor

PRIMER APARTADO

$\Sigma \vec{N}_{ext} = 0$

REGIMEN ESTACIONARIO | La ecuación queda



Primer miembro: sólo queda el término de coriolis

$\ddot{\vec{R}} = 0$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$

$\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r})$ dirección radial.
Momento cinético nulo

Segundo miembro: el primer término es nulo

$$- \iiint \left\{ \bar{r} \wedge \left[2\bar{\omega} \wedge \bar{V} \right] \right\} \rho \, d\forall = \iint_{SC} (\bar{r} \wedge \bar{V}_{rel}) \, \rho \, dQ$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\omega} = -\omega \vec{k} \\ \vec{V} = \dfrac{Q}{A} \vec{i} \\ \vec{r} = r \, \bar{i} \end{array} \right] - \omega \frac{Q}{A} \vec{j} \Bigg] \Rightarrow -2\omega r \frac{Q}{A} \vec{k} = \bar{r} \wedge \left[2\bar{\omega} \wedge \bar{V} \right]$$

$$- \left. \iiint_{VC} \bar{r} \wedge \left[2\bar{\omega} \wedge \bar{V} \right] \rho \, d\forall \right|_k =$$

$$= \int_0^R 2\omega r \frac{Q}{\cancel{A}} \rho (\cancel{A} dr) = \rho 2\omega Q \frac{R^2}{2} = \boxed{\rho \omega Q R^2}$$

(2)

$$\iint_{SC} (\bar r \wedge \bar V_{rel})\, \rho \, dQ \Big|_k = \int_{\Sigma_2} - \underbrace{\int_{\Sigma_1}}_{\equiv 0} = \left[R\,\vec i \wedge \frac{Q}{a}\,\vec j \right]_k \rho\, Q =$$

$$= R\,\frac{Q^2}{a}\cdot \rho$$

Luego $\cancel{\rho}\, \omega\, \cancel{Q}\, R^{\cancel{2}} = \cancel{\rho}\, \cancel{R}\, \frac{Q^{\cancel{2}}}{a} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{Q}{a\,R}}$

El aspersor se estabiliza hasta que la velocidad relativa se iguala al arrastre, toda vez que no hay par resistente

(2) Todo es igual salvo la existencia del par de rozamiento constante $\sum \vec M = +M_r\,\vec k = M_{ro}\,\vec k$

La ecuación resultante será:

$$M_{ro} + \rho R^2 \omega Q = R\,\frac{Q^2}{a}\,\rho$$

luego $\omega = \left[\rho R \frac{Q^2}{a} - M_{ro}\right] \frac{1}{\rho R^2 Q}$

$$\boxed{\omega = \frac{Q}{a\,R} - \frac{M_{ro}}{\rho\, Q\, R^2}}$$

La velocidad es menor porque debe vencer el par resistente. Y debe haber un par ~~resistente~~ motor

3) Todo igual con otra expresión para el rozamiento:

$$k\omega + \rho R^2 \omega Q = R\,\frac{Q^2}{a}\,\rho$$

Despejando $\boxed{\omega = \dfrac{R\,\frac{Q^2}{a}\,\rho}{\rho R^2 Q + k} = \omega_0}$

(4) Consideramos el transitorio, con un par de rozamiento proporcional a la velocidad de giro. Los tres términos anteriores tiene idéntica expresión, pero aparece un nuevo sumando debido a que ω ya no es constante. Es:

(3)

$$- \iiint_{vc} \{ \bar{r} \wedge [\dot{\vec{\omega}} \wedge \bar{r}] \} \rho \, d\forall$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -\dot{\omega}\,\bar{k} \qquad \bar{r} = r\,\vec{i} \quad \Big| \quad \bar{r} = r\,\bar{i} \qquad \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} = -\dot{\omega}\, r\, \vec{j} \quad \Big| \quad \bar{r} \wedge [\dot{\bar{\omega}} \wedge \vec{r}] = -\dot{\omega}\, r^2\, \vec{k}$$

$$+ \int_{vc} \dot{\omega}\, r^2 \rho\, A\, dr \Big|_k = \rho\, A\, \dot{\omega}\, \frac{R^3}{3}$$

En realidad este término es $I\,\dot{\omega}$, puesto que el momento de inercia de una barra que gira alrededor de su extremo es $I = \frac{1}{3} M R^2$

En nuestro caso $\rho\, A\, R\, \frac{R^2}{3} \cdot \dot{\omega} = \rho\, \forall\, \frac{R^2}{3} \cdot \dot{\omega} = M\, \frac{R^2}{3} \cdot \dot{\omega} =$
$= I \cdot \dot{\omega}$

En consecuencia la ecuación queda:

$$k\omega + \rho\, R^2 Q\, \omega + \rho\, A\, \frac{R^3}{3} \cdot \dot{\omega} = \rho\, R\, \frac{Q^2}{a}$$

una ED que ordenada resulta:

$$\rho\, A\, \frac{R^3}{3}\, \dot{\omega} + \left(k + \rho\, R^2 Q\right) \omega = \rho\, R\, \frac{Q^2}{a}$$

4

$$\dot{\omega} + \frac{k + \rho R^2 Q}{\rho A \frac{R^3}{3}} \cdot \omega = \frac{\rho R \frac{Q^2}{a}}{\rho A \frac{R^3}{3}} = \frac{3 Q^2}{a A R^2}$$

luego la ED es $\quad \dot{\omega} + B\,\omega = C$

con $\quad B = \dfrac{k + \rho R^2 Q}{\rho A \frac{R^3}{3}} \quad$ y $\quad C = \dfrac{3 Q^2}{a A R^2}$

el valor de B puede escribirse en función de la velocidad final (ver apartado 3)

$$\omega_0 = \frac{R \frac{Q^2}{a} \rho}{\rho R^2 Q + k} = \frac{R \frac{Q^2}{a} \cancel{\rho}}{B \cancel{\rho} A \frac{R^3}{3}} \Rightarrow B = \frac{3 Q^2}{A a R^2} \cdot \frac{1}{\omega_0}$$

y la ED resultante queda

$$\dot{\omega} + \frac{3 Q^2}{a A R^2} \frac{1}{\omega_0} \cdot \omega = \frac{3 Q^2}{a A R^2}$$

cuya solución es

$$\omega(t) = \frac{\frac{3 Q^2}{a A R^2}}{\frac{3 Q^2}{a A R^2} \cdot \cancel{\omega_0} \frac{1}{\omega_0}} + D\, e^{-\frac{3 Q^2}{a A R^2} \frac{1}{\omega_0} t}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + D\, e^{-\frac{3 Q^2}{a A R^2} \frac{1}{\omega_0} \cdot t}$$ con $t = 0 \Rightarrow \omega = 0 \quad D = -\omega_0$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 \left[1 - e^{-\frac{3 Q^2}{a A R^2} \frac{1}{\omega_0} t} \right]} = \omega_0 \left(1 - e^{-\lambda t} \right)$$

con $\quad \lambda = \dfrac{3 Q^2}{a A R^2} \dfrac{1}{\omega_0}$

Cuando $\omega = 0.95\,\omega_0$ $\quad t = T_e$

$$0.95\,\omega_0 = \omega_0\left(1 - e^{-\lambda T_e}\right)$$

$$e^{-\lambda T_e} = 0.05 \qquad T_e = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.05 = \frac{3}{\lambda}$$

$$T_e = 3\,\omega_0\left(\frac{a\,A\,R^2}{3Q^2}\right) \sim \omega_0\,\frac{a\,A\,R^2}{Q^2} \text{ segundos}$$

$$\boxed{T_e \sim \frac{a\,A\,R^2}{Q^2}\cdot\omega_0 \text{ segundos}}$$

$$\boxed{T_e \sim \frac{R^2\,\omega_0}{\frac{Q}{a}\cdot\frac{Q}{A}}\,s}$$

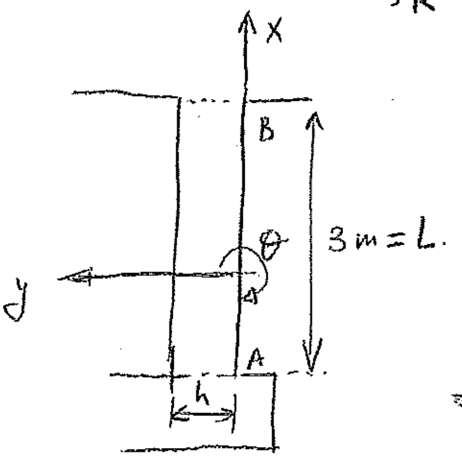
resultado así muy fácil de interpretar!!

PROBLEMA COUETTE

$\theta = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \operatorname{sen}\theta = -1.$

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P}{L} = \frac{P_B - P_A}{L}.$

a) $u(y) = \underbrace{\frac{\partial P/\partial x - \gamma \operatorname{sen}\theta}{2\mu}}_{K} y^2 + C_1 y + C_2$



$u(y=0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0.$

$u(y=h) = 0 \longrightarrow 0 = Kh^2 + C_1 h$

$\longrightarrow C_1 = -Kh.$

$\Longrightarrow u(y) = Ky^2 - Khy \longrightarrow \boxed{u(y) = \frac{\frac{\Delta P}{L} + \gamma}{2\mu}(y^2 - hy)}$

Perfil velocidades.

$\frac{du}{dy} = K(2y - h) = 0 \longrightarrow y = h/2 \longrightarrow$ ordenada de v_{max}

$u(h/2) = K\left(\frac{h^2}{4} - h\frac{h}{2}\right) = K\frac{-h^2}{4} \longrightarrow \boxed{v_{max}\Big|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{-\left(\frac{\Delta P}{L} + \gamma\right)}{8\mu} h^2}$

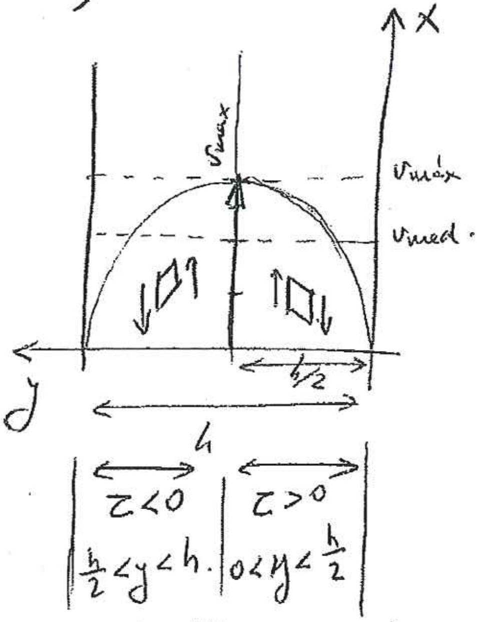
$Q = \int_0^h u(y)\,dy = \int_0^h K(y^2 - hy)\,dy = K\left[\frac{y^3}{3}\Big|_0^h - h\frac{y^2}{2}\Big|_0^h\right] = Kh^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$

$\longrightarrow Q = \frac{\Delta P/L + \gamma}{2\mu} h^3 \left(\frac{-1}{6}\right) \longrightarrow \boxed{Q = \frac{-\left(\Delta P/L + \gamma\right)}{12\mu} h^3}$

$\boxed{v_{med} = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{-\Delta P/L + \gamma}{12\mu} h^3}{h} = \frac{-\left(\Delta P/L + \gamma\right)}{12\mu} h^2}$

$$\frac{v_{máx}}{v_{med}} = \frac{\dfrac{\frac{-\Delta P}{L}+\gamma}{8\mu}h^2}{\dfrac{\frac{-\Delta P}{L}+\gamma}{12\mu}h^2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1'5.$$

b)



Sobre τ:

Entre $0<y<\frac{h}{2} \rightarrow \frac{du}{dy}>0$
$\longrightarrow \tau>0.$

Entre $\frac{h}{2}<y<h \longrightarrow \frac{du}{dy}<0$
$\longrightarrow \tau<0.$

c) Potencias aportadas $= \underbrace{-\Delta P Q}_{\text{Fuerzas Presión}} - \underbrace{L\gamma Q}_{\text{Peso.}}$

$$\text{Potencia Aport}\Big|_{\text{Fuerza Presión}} = -(-0'221\cdot10^5)\left(\frac{-1}{12}\left(\frac{-0'221\cdot10^5}{3}+750\cdot9'81\right)\frac{0'25^3}{0'0525}\right)$$

$\hookrightarrow = 5024\ W$

$$\text{Pot. Aport}\Big|_{\text{Peso}} = -3\cdot750\cdot9'81\cdot\left(\frac{-1}{12}\left(\frac{-0'221\cdot10^5}{3}+750\cdot9'81\right)\frac{0'25^3}{0'0525}\right)$$

$\hookrightarrow = -5018\ W.$

Lógicamente las fuerzas de presión, como motrices del flujo, tienen una potencia aportada positiva. Lo contrario ocurre con el peso: oponiéndose al movimiento detrae potencia del mismo.

La magnitud de ambas potencias debe ser similar pues el flujo resultante, laminar, tiene poca velocidad, y ~~...~~ poco caudal y, por tanto, poco consumo energético. 3

Así:

Pot. Disipada = 5024 − 5018 = 6 W. Lógicamente, mucho menor que cualquiera de las otras dos.

Si queremos comprobarlo:

$$u(y) = \frac{\frac{\Delta P}{L} + \gamma}{2\mu}(y^2 - yh) = K(y^2 - hy)$$

$$\frac{du}{dy} = K(2y - h) \rightarrow \phi = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu K^2(4y^2 + h^2 - 4hy)$$

$$\int_V \phi\, dV = \int_0^h \mu K^2(4y^2 + h^2 - 4hy)\, L\, dh = \mu K^2 L\left[4\frac{h^3}{3} + h^2 h - 4h\frac{h^2}{2}\right] =$$

$$= \mu K^2 L h^3\left[\frac{4}{3} + 1 - 2\right] = \mu K^2 L h^3\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \mu K^2 h^3 L \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Pot. Disip}}} = 0'0525\left[\frac{\frac{-0'221\cdot 10^5}{3} + 750\cdot 9'81}{2\cdot 0'0525}\right]^2 3\cdot 0'25^3\,\frac{1}{3} = \underline{6'25\ W}.$$

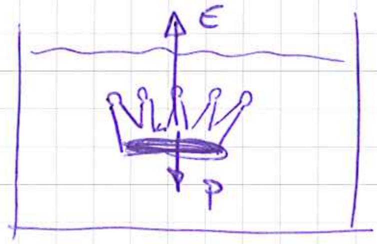
d) La fuerza motriz del flujo es la debida al gradiente de presiones entre las secciones A y B. Cuanto mayor sea éste mayores serán la velocidad y el caudal, llegando a alcanzarse el régimen turbulento (Re ≥ 4000). En ese momento el flujo ya no podrá ser asumido como de Couette.

$$Re = \frac{(v_{med})\, h}{\nu} = \left(\frac{-\left(\frac{\Delta P}{L} + \gamma\right)}{12\mu} h^2\right)\frac{h}{\nu} = \frac{-\left(\Delta P/L + \gamma\right)}{12\mu^2} h^3 \rho.$$

$$\longrightarrow \boxed{\Delta P = \left[\frac{-12\mu^2 Re}{h^3 \rho} - \gamma\right]\cdot L} \longleftarrow \text{con } \underline{Re = 4000}$$

Con la aplicación numérica: $\boxed{\Delta P = P_B - P_A = -22106'5\ Pa = -0'22106\, bar.}$

a) El peso de la corona en el agua, era resultado de:



$$F = P - E = P - V_c \cdot \gamma_{agua} = 10'9 \text{ N}$$

Mientras que en el aire (despreciando el empuje):

$P = 11'8$ N $\longrightarrow$ Por lo tanto

$$11'8 - V_c \cdot 9810 = 10'9 \rightarrow$$

$$V_c = \frac{11'8 - 10'9}{9810} = 9'17 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = \boxed{9'17 \cdot 10^{-2} \text{ l}}$$

Con este dato es inmediato hallar la densidad de la corona

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{P_c}{g \cdot V_c} = \frac{11'8}{9'8 \cdot 9'17 \cdot 10^{-5}} =$$

$$= \boxed{13150'66 \text{ kg/m}^3}$$

y su densidad relativa

$$\boxed{\rho'_c = \frac{13150'66}{1000}} = \boxed{13'13} \longrightarrow \text{NO ERA DE ORO PURO}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE VALENCIA
Camino de Vera, s/n. 46022 VALENCIA • Tel. 96 387 71 70 • Fax 96 387 71 79 • E-Mail: etsii@upvnet.upv.es

b) $dV(t) = A_{dep} \cdot dz(t) = a \cdot dz(t)$

$$a \cdot \frac{dz(t)}{dt} = Q_1 - \sqrt{2g}\sqrt{z(t)} \cdot C_D \cdot S$$

$$\boxed{\frac{dz - Q_1}{\sqrt{z(t)}} = -\frac{\sqrt{2g}\, C_D \cdot S}{a} \cdot dt}$$

$\Downarrow$ Con $\Delta t, \Delta z$ suficientemente pequeños

$$\frac{\Delta z - Q_1}{\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{2g} \cdot C_D \cdot S}{a} \cdot \Delta t$$

$$\boxed{\Delta z = \frac{\sqrt{2g z_{in}} \cdot C_D \cdot S}{a} \cdot \Delta t - Q_1}$$

$z_{in} = b \qquad \Delta t = 0'5\ s$

EXCEL

~~z_{in}~~

Δt	z_{in}	t_{in}	$t_f = t_{in} + \Delta t$	$z_f = z_{in} + \Delta z$

Calculando el z_{fin}, se repite el ciclo.

c)

- Puede aplicarse a cualquier propiedad EXTENSIVA del fluido.
- Puede aplicarse a CUALQUIER fluido

$\frac{d\vec{H}}{dt}$ ≡ Variación de propiedad total del SISTEMA con el tiempo

$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{Vc} \rho\,\vec{h}\cdot d\forall}_{\vec{H}}$ ≡ Variación total de la propiedad contenida en el Volumen de control con el tiempo

$\int_{SC} \underbrace{\underbrace{\rho\,\vec{h}\,\underbrace{\vec{V}\cdot d\vec{A}}_{Q}}_{G\cdot\vec{h}}}_{\frac{\vec{H}}{t}}$ ≡ flujo neto de propiedad a través de las paredes del volumen de control (superficie de control)

Problema 1 (33%)

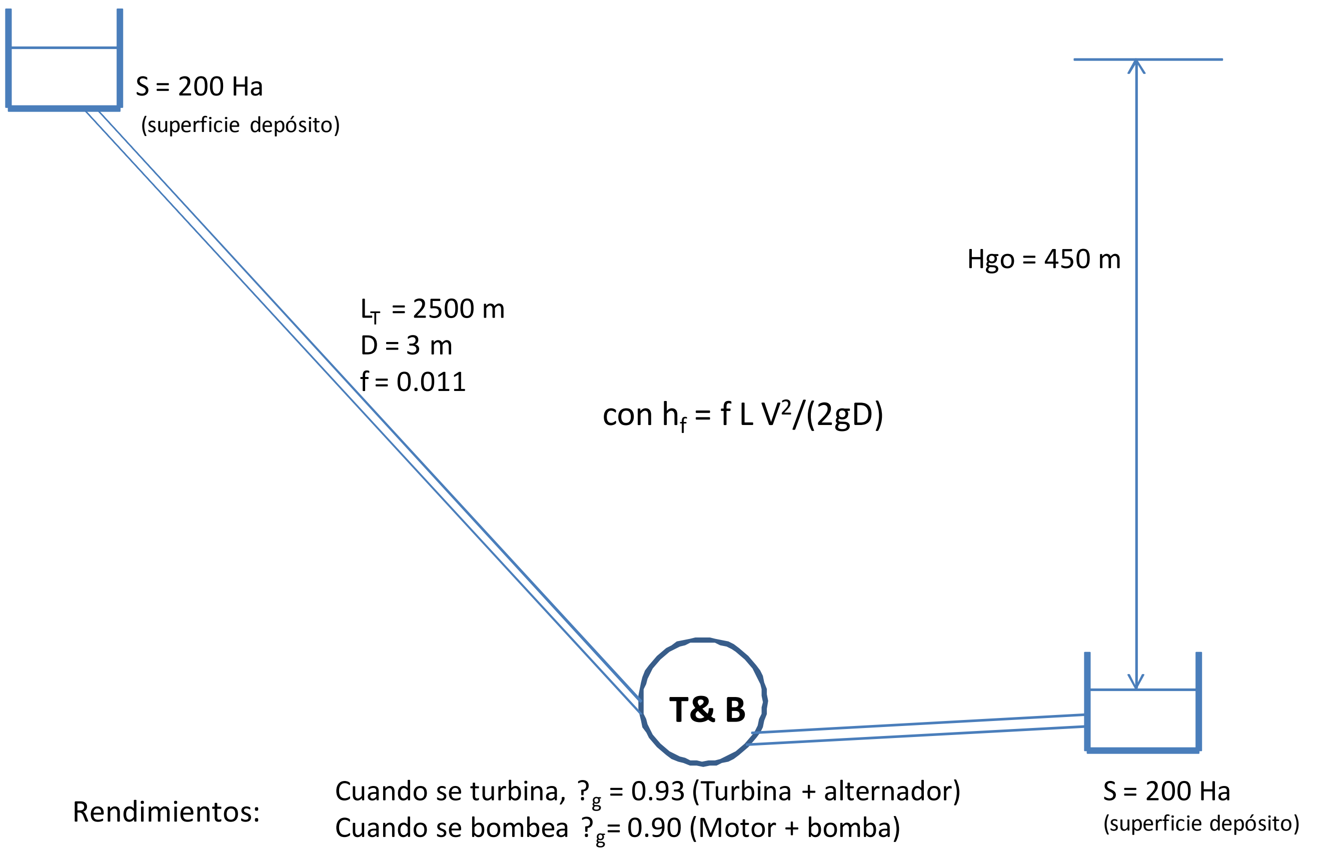
El esquema muestra una central hidroeléctrica reversible. Durante 14 horas seguidas (entre las 18 horas y las 8 de la mañana siguiente) se bombea agua desde el depósito inferior al superior, siendo la red eléctrica la que suministra la energía. Las 10 horas restantes (desde las 8 horas hasta las 18 horas) se turbina desde el superior al inferior entregándose la energía generada a la red. Suponer que la diferencia entre el nivel superior y el inferior de agua es constante en todo momento e igual a 450 m. Otros datos son:

En fase de turbinación:

- Velocidad del agua V = 4.62 m/s
- Precio medio de venta del kWh en fase de turbinación = 0.12 €/kWh

En fase de bombeo:

- Velocidad del agua V = 3.30 m/s
- Coste medio del kWh en fase de bombeo = 0.04 €/kWh.



Rendimientos: Cuando se turbina, ?$_g$ = 0.93 (Turbina + alternador)
Cuando se bombea ?$_g$= 0.90 (Motor + bomba)

Problema 1 (continuación)

A partir de cuanto antecede se pregunta:

1. Potencia total absorbida de la red eléctrica durante la fase de bombeo
2. Potencia útil cedida a la red eléctrica durante la fase de turbinación
3. La máxima variación de nivel durante las 24 horas del ciclo. Justificar que es correcto suponer una variación despreciable y que, en consecuencia, asumir una altura constante de 450 m es una hipótesis razonable.
4. Balance económico anual, diferencia entre el valor de la energía anual turbinada y de la anual bombeada.

5. El balance de energías diario tanto en la etapa de bombeo como en la de turbinación (En el bombeo la energía demandada a la red es igual a la útil final más las pérdidas en máquinas y tuberías. En la turbinación la útil disponible es igual a la generada más las pérdidas en máquinas y tuberías).
6. Admitiendo que ni los precios de la energía ni la inversión a efectuar cambian en el tiempo, ¿cuántos años se necesitan para recuperar la inversión de esta central reversible estimada en 350 millones de euros?
7. Recordado que la comparación entre la ecuación de la energía y la de Bernouilli para líquidos, permite interpretar el destino de las pérdidas por fricción con la expresión que se adjunta, y que la suma de las alturas de los niveles de agua en los dos depósitos a cualquier hora del día permanece constante y es igual 6 m (se desprecia la evaporación que pueda haber y el volumen de agua que ocupa la tubería), se pregunta:
    a. ¿El aumento de la temperatura del agua en el trayecto del bombeo?
    b. ¿El aumento de la temperatura del agua en el trayecto de la turbinación?
    c. ¿El aumento de la temperatura media del agua de todo el sistema debida a la fricción tras un día de operación?

Expresiones cuestión 7 $h_f = (u_2-u_1)/g$, con $u_2-u_1 = C_p\,(T_2-T_1)$

Problema 2 (33%)

La figura muestra una instalación de aire comprimido (R = 287 J/kg/K) que transporta un caudal másico constante de 1 kg/s, y todo ello a una temperatura constante de 25ºC. Dicha instalación consta de:

- Una tubería de 100 m de longitud, 110 mm de diámetro y 0,018 de factor de fricción. Esta tubería transporta el aire desde la salida del compresor, sección A (a 30 metros de cota y una presión relativa de 6 bar), hasta la entrada del codo, sección B (a 15 metros de cota).
- Un codo ubicado entre las secciones B y C. La salida del codo en C tiene un diámetro de 75 mm y se supone a la misma cota que B.
- Un segundo tramo de tubería cerrada en su extremo final (sección D), pero a lo largo de la cual hay instaladas 3 boquillas de salida de aire. La sección de cada boquilla tiene un diámetro de 1 cm y la longitud L es de 20 cm. El caudal circulante por el sistema sale a través de las tres boquillas a partes iguales.

Notas:

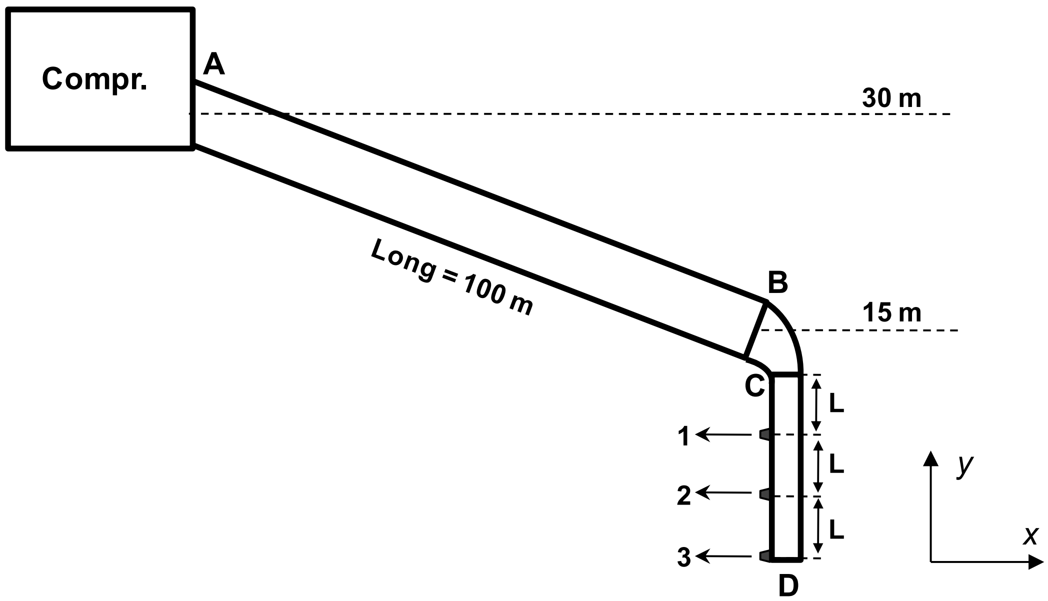
- Para el codo (B a C) y tubería con boquillas (C a D), asumir directamente que el flujo de aire es incompresible y que las pérdidas de carga son despreciables
- Cuando sea necesario utilizar ejes coordenados, tomar los que aparecen junto a la figura

Se pide:

a) Calcular la presión que tiene el aire en la sección B, y justificar a continuación la ecuación y las hipótesis de trabajo utilizadas para ello.

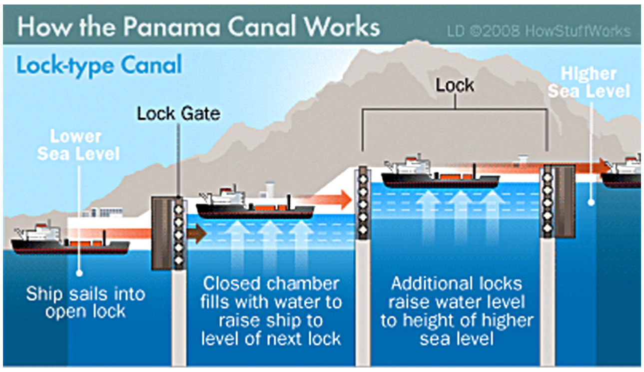
b) Calcular la reacción vertical que haría falta en el apoyo del codo para compensar sólo el efecto de la circulación del aire, es decir, sin tener en cuenta ningún peso.

c) Calcular el par que debe resistir el material de la sección C para evitar que el efecto de la salida del aire por las boquillas partiese dicha sección.

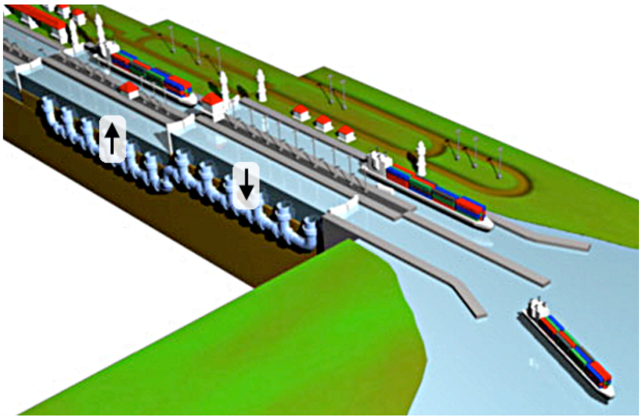


Cuestión 1 (16,66%)

El Canal de Panamá conecta los océanos Pacífico y Atlántico a través de un sistema de esclusas, que permiten salvar los desniveles entre los dos océanos y el lago Gatún situado en el interior. Para facilitar el paso de los barcos, las esclusas pueden subir o bajar el nivel del agua de manera individual. En la figura, de la derecha, el barco entra por el nivel inferior y sube en cada esclusa antes de que la compuerta se abra para acceder a la siguiente.

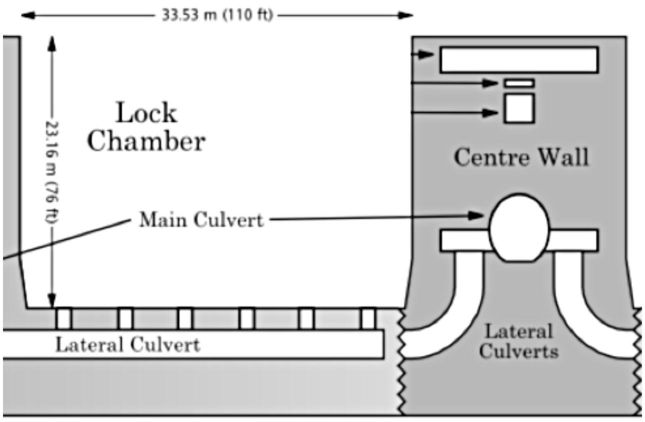


Las esclusas se llenan y vacían por gravedad, mediante un conjunto de tuberías de gran diámetro que aspiran e impulsan el agua desde el fondo de las mismas (ver figura). Es decir, el agua de la esclusa superior (flecha hacia abajo) va rellenando la de la esclusa inferior (flecha hacia arriba).



Calcular:

1) Momento máximo de apertura debido al agua (eje vertical) que tienen que contrarrestar las bisagras de las hojas de la compuerta cuando está cerrada. Las compuertas tienen dos hojas cierran en el centro.



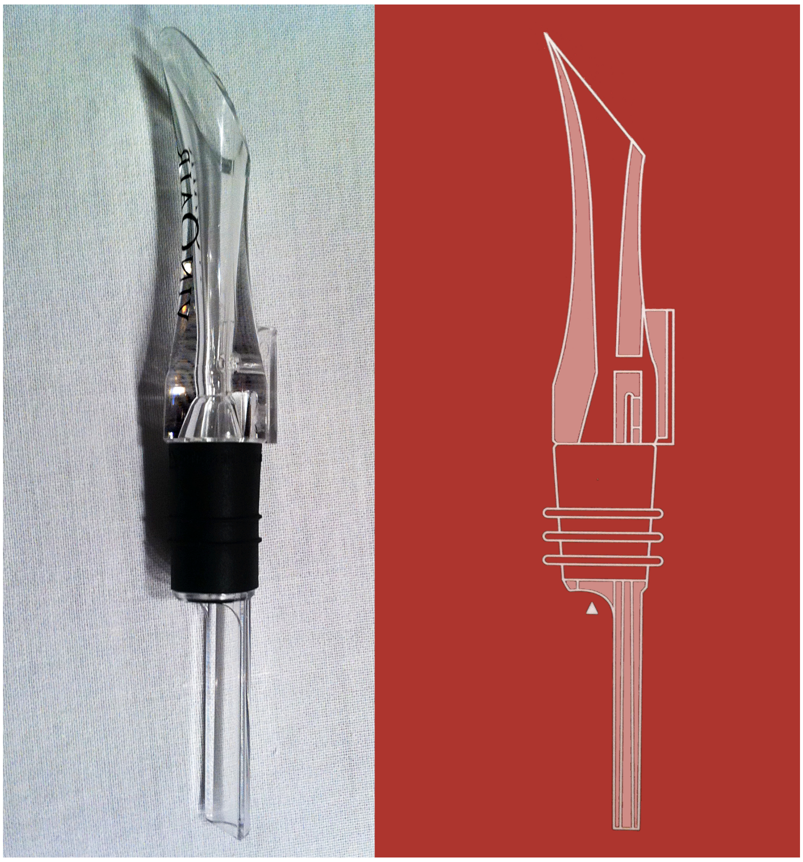
2) Plantear (sin resolver) la ecuación que gobierna el llenado / vaciado de las esclusas y que permite calcular el tiempo necesario para llenarla en función de las pérdidas por fricción y los desniveles del agua, despreciando el término de inercia.

Condiciones del problema:

- Considerar que cuando una esclusa esta completamente llena, la contigua se encuentra a medio llenar (h/2).
- Despreciar el momento generado por el peso de las compuertas (flotan)

DATOS
Peso hoja compuerta: 662 t
Altura hoja compuerta: 25 m
Ancho hoja compuerta: 19,81 m
Espesor hoja compuerta: 2,13 m
Peso bisagras: 16,7 t
Longitud esclusa: 320 m
Ancho esclusa: 33,53 m
Alto esclusa: 23,16 m /
Densidad relativa agua de mar: 1,05

Cuestión 2 (16,66%)



a) En una cena de amigos un abogado pijo se presenta con el artefacto de la figura para servir el vino y reta al ingeniero industrial a que explique:

1. Para qué sirve
2. Cómo funciona

La inspección del aparato revela que se trata de una boquilla con un estrechamiento en diámetro y un orificio lateral practicado en la sección de paso más estrecha.

Explicar la finalidad del aparato y su principio de funcionamiento utilizando para ello expresiones y conceptos vistos durante el curso. Además, valorar los posibles parámetros de diseño (diámetros, longitudes, ángulos, etc.) y cómo pueden afectar al funcionamiento del aparato.

b) Los coeficientes de corrección α y β permiten generalizar la ecuación de Euler (valida a lo largo de una línea de corriente) a una conducción. Durante la asignatura se proporcionan valores numéricos de dichos coeficientes para una tubería de sección circular en regímenes laminar y turbulento.

1. ¿Variarán esos valores para una conducción de sección cuadrada?
2. ¿Serán necesarios coeficientes de corrección para los otros términos de la ecuación en el caso anterior? En caso de no ser necesarios, ¿en qué condiciones podrían aparecer factores de corrección de los términos de presión y cota?

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\, \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Flujo laminar incompresible (simetría plana)

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible (simetría cilíndrica)

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

1.- Potencia absorbida en fase de bombeo

$$P_b = \frac{\gamma Q_b H_b}{\eta_b} = \frac{9.81}{0.9} Q_b H_b \text{ Kw} = 10,9 \, H_b Q_b \text{ kw h}$$

$$Q_b = \frac{\pi D^2}{4} V_b = \frac{9\pi}{4} \times 3,30 \text{ m}^3/s = 23,326 \text{ m}^3/s$$

$$H_b = 450 + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 450 + 0,11 \frac{2500}{3} \times \frac{3.30^2}{19.62} = 455,09 \text{ m}$$

$$\underline{P_b} = 10,9 \times 23.326 \times 455,09 \text{ kw} = 115708 \text{ Kw} = \underline{115,708 \text{ Mw}}$$

2.- Potencia eléctrica generada en fase de turbinación (cedida a la red)

$$P_c = (\gamma Q_t H_t)\, \eta_t = 9,81 \times 0.93 \, Q_t H_t = 9.123 \, Q_t H_t$$

$$Q_t = \frac{\pi D^2}{4} \times 4.62 \text{ m}^3/s = 32,657 \text{ m}^3/s$$

$$H_t = 450 - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 450 - 0,011 \frac{2500}{3} \times \frac{4.62^2}{19.62} = 440,03 \text{ m}$$

$$\underline{P_c} = 9,123 \times 32,657 \times 440,03 \text{ kw} = 131098 \text{ Kw} = \underline{131,098 \text{ Mw}}$$

3.- Volumen turbinado: $Q_t \cdot t_t = 32,657 \times 10 \times 3600 \text{ m}^3 =$

$$= \underline{\underline{1175652 \text{ m}^3 = 1,176 \text{ Hm}^3}}$$

Volumen bombeado: $Q_b \, t_b = 23,326 \times 14 \times 3600 \text{ m}^3 =$

$$= \underline{\underline{1175630 \text{ m}^3 = 1,176 \text{ Hm}^3}}$$

Evidentemente los números se han ajustado, creo que en la práctica se hace, en períodos establecidos, para que lo bombeado coincida con lo turbinado.

La máxima variación de nivel se producirá al final de cada etapa (turbinación o bombeo). Su valor será en cada uno de los embalses (tomamos las secciones de referencia, que no coinciden por errores de redondeo) (2)

$$\Delta Z = \frac{V}{S} = \frac{1\,175\,641 \ m^3}{200 \times 10^4 \ m^2} = 0,59 \ m$$

La variación máxima será el doble $2 \times 0.59 = \underline{1.18 \ m}$

que porcentualmente supone

a) En fase de turbinación $\dfrac{1,18 \times 100}{440,03} = 0,27\%$

b) En fase de bombeo $\dfrac{1,18 \times 100}{455,09} = 0,26\%$

es decir, menos del 0.3% en cualquiera de las dos etapas.

El error, pues, será muy poco significativo.

(4) Energía eléctrica diaria requerida en bombeo:

$$E_r = 115,708 \ Mw \times 14 \ h = \underline{1619,91 \ Mwh/día}$$

Energía eléctrica cedida a la red en fase de turbinación:

$$E_c = 131.098 \ Mw \times 10 \ h = \underline{1310,98 \ Mwh/día}$$

Ingresos : $1310,98 \times 10^3 \ kwh/día \times 0,12 \ €/kwh = 157\,316,6 \ €/día$

Gastos : $1619,91 \times 10^3 \ kwh/día \times 0.04 \ €/kwh = 64\,796,4 \ €/día$

BALANCE NETO DIARIO = 92 520,2 €

BALANCE NETO AL AÑO : 33.769.873 €

5 Balance energía diario

EN BOMBEO

a) Energía requerida $= 1619{,}91 \ \frac{\text{MWh}}{\text{día}}$

b) Energía útil

$$E_u = \gamma \, \forall \, H = 9810 \times 1175630 \times 450 \ \text{julios/día} =$$

$$= \frac{9{,}81 \times 1175630 \times 450}{3600} \ \frac{\text{kWh}}{\text{día}} = 1441616 \ \frac{\text{kWh}}{\text{día}}$$

$$\underline{\underline{E_u = 1441{,}62 \ \text{MWh/día}}}$$

c) Pérdidas (corresponde a la fricción en bombeo)

En tuberías $\gamma h_f Q = 9{,}81 \times 5{,}09 \times 23{,}326 \ \text{kW} =$

$$= 1164{,}73 \ \text{kW} = \underline{\underline{1{,}165 \ \text{MW}}}$$

Energía perdida : $1{,}165 \times 14 \ \text{MWh} = 16{,}31 \ \text{MWh}$

d) Pérdidas en máquinas:

$$P_m = \frac{\gamma Q H}{\eta} - \gamma Q H = \gamma Q_b H_b \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = 0{,}111 \ 9{,}81 \times \overset{23{,}326}{\cancel{5{,}09}} \times 455{,}09 \ \text{kW} =$$

$$= 11570{,}70 \ \text{kW} = 11{,}57 \ \text{MW}$$

Energía perdida $= 11{,}57 \times 14 \equiv 161{,}98 \ \text{MWh}$

Balance final $\quad 1619{,}91 \simeq 1441{,}62 + 16{,}31 + 161{,}98 \equiv 1619{,}91$

que cuadra a la perfección

EN TURBINACIÓN ES ANÁLOGO. Pero es la energía útil, lo mismo que antes, la suma de las otras tres: Tenemos $\underline{\underline{E_u = 1441{,}62 \ \text{MWh/día}}}$

Energía turbinada = 1310,98 Mwh/día

Energía en fricción en las tuberías (Potencia disipada × tiempo)

$$\underbrace{\gamma h_f Q_t}_{\text{Potencia}} \times 10h = \frac{9,81 \times 9,97 \times 32,657}{1000} Mw \times 10h = \underline{\underline{31,94 Mwh}}$$

Energía perdida en máquinas. Calculamos primero la potencia:

$$\gamma Q_t H_t (1-\eta) = 9,81 \times 32,657 \times 440,03 \times 0,07 \text{ Kw} = \underline{9867,9 \text{ Kw}}$$

Energía perdida en máquinas $9,868 Mw \times 10h = \underline{\underline{98,68 Mwh}}$

Debe cumplirse

$$1441.62 \simeq 1310,98 + 31.94 + 98,68 \equiv 1441,60$$

que se verifica a la perfección.

---

(6) Es una simple división (I / rentabilidad anual)

$$t = \frac{350 \times 10^6 \text{ €}}{33,77 \times 10^6 \text{ €/año}} = 10,36 \text{ años}$$

Vemos, pues, que la central reversible se amortiza en relativa rapidez.

---

(7) Sabemos que $h_f = \frac{c_p}{g}(T_2 - T_1) = \Delta T \cdot \frac{c_p}{g}$

En fase de bombeo, se tendrá $\Delta T_b = \frac{g h_{fb}}{c_p} = \frac{9,81 \times 5,09 \frac{m^2}{s^2}}{4180 \frac{J}{Kg\,°K}}$

$\Delta T_b = 0,01$ °C mientras en turbinación $\Delta T_t = \frac{9,81 \times 9,97}{4180}$

$\Delta T_t = 0,02$ °C

Finalmente para calcular el recalentamiento de ambos embalses (el superior e inferior), suponiendo una mezcla perfecta (buena convección), hay que hacer un balance térmico extendido a todo el día.

Calor total aportado en fase de bombeo:

$$\rho Q_b t_b C_e \Delta T_b = \rho Q_b t_b \cancel{C_e} \frac{g h_{f,b}}{\cancel{C_e}}$$

Idem en fase de turbinación $\rho Q_t t_t g h_{f,t}$

CALOR TOTAL APORTADO:

$$\rho g \left[Q_b \cdot t_b \, h_{f,b} + Q_t \cdot t_t \cdot h_{ft} \right] =$$

$$= 1000 \frac{kg}{m^3} \; 9,81 \frac{m}{s^2} \left[23,326 \times 14 \times 3600 \times 5,09 + 32,657 \times 10 \times 3600 \times 9,97 \right]$$

m^3/s $\quad$ $s/\text{día}$ $\quad$ m

$$= 1,737 \times 10^{11} \frac{\text{Julios}}{\text{día}} = 48246,70 \; kWh/\text{día} = 48,25 \frac{MWh}{\text{día}}$$

Una potencia que coincide con la disipación por fricción previamente calculada = 16,31 MWh + 31,94 MWh = 48,25 MWh, por que, lógicamente, las pérdidas en máquinas no contribuyen a aumentar la temperatura del agua.

Esta energía térmica disipada generará un aumento térmico, calculado a partir del balance

$$E_{\text{térmica disipada}} = M_{Total} \times C_e \times \Delta T$$

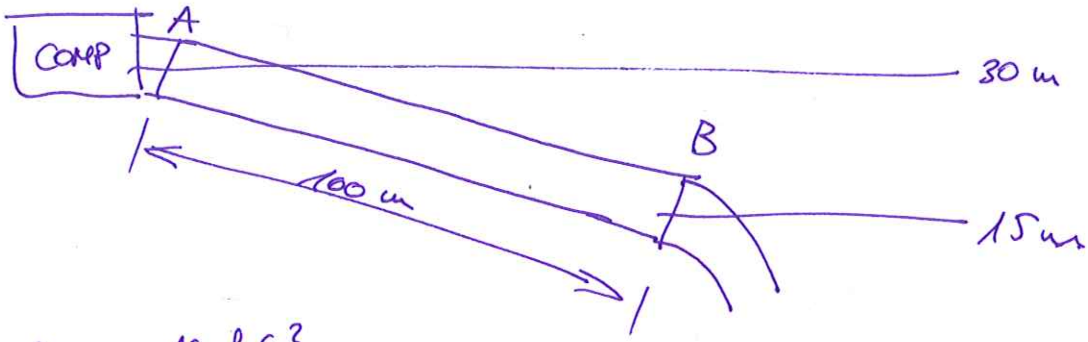
$$\Delta T = \frac{48,25 \; MWh}{400 \times 10^4 \times 6 \times 10^3 \; kg \cdot 4180 \frac{J}{°C \; kg}}$$

$$\Delta T = 0,01 \; °C$$

(1)

Problema

a)



$$P_A^{*2} = P_B^{*2} + \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

$$(6 \cdot 10^5 + 101337)^2 = P_B^{*2} + \frac{16 \cdot 0'018 \cdot 1^2}{\pi^2 \, 0'11^5} 287 \cdot 298 \cdot 100$$

$\hookrightarrow$ $P_B^* = 690201$ Pa / $P_B = 588864$ Pa

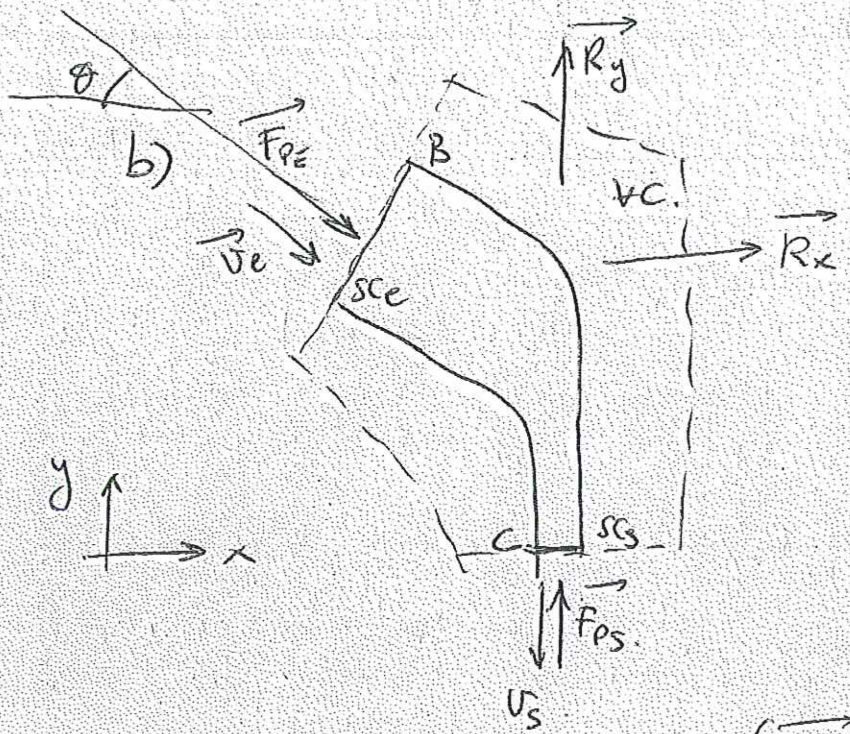
$\rho_A = \frac{P_A^*}{RT} = \frac{701337}{287 \cdot 298} = 8'20$ kg/m³ / $\rho_B = 8'07$ kg/m³

$\frac{0'13}{8'2} \simeq 1'5\%$ de variación en ρ

→ Puede tomarse como incompresible y resolverse igualmente con Bernoulli.

→ Lo hemos resuelto como flujo compresible isotermo, y para ello se ha despreciado el término cinético ($v_A \neq v_B$, en realidad) y el término potencial (los 15 m de desnivel).

b)



$$\left|\vec{v_e}\right| = \left|\vec{v_B}\right| = \frac{Q_B}{A_B} =$$

$$\left|\vec{v_e}\right| = \frac{G/\rho_B}{A_B} = \frac{1/8'07}{0'01} =$$

$$\left|\vec{v_e}\right| = 13'0 \ m/s$$

$$\theta = \text{arc sen} \frac{15}{100} = 8'62°$$

Ahora: $\quad \sum \vec{F_{ext}} = \rho Q \left(\vec{v_s} - \vec{v_e}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \sum \vec{F_{ext}} = \vec{F_{PE}} + \vec{F_{PS}} + \vec{R_x} + \vec{R_y} \\ \vec{F_{PE}} = P_B \cdot A_B \left(\cos\theta \vec{i} - \text{sen}\theta \vec{j}\right) \\ \vec{F_{PS}} = P_c \cdot A_c \vec{j} \ / \ \vec{R_x} = R_x \vec{i} \ / \ \vec{R_y} = R_y \vec{j} \end{array}\right.$$

$$\rho Q \left(\vec{v_s} - \vec{v_e}\right) = \rho_B Q_B \left[-v_c \vec{j} - \left(v_B \left(\cos\theta \vec{i} - \text{sen}\theta \vec{j}\right)\right)\right]$$

Nos interesa sólo el eje y:

$$-P_B A_B \,\text{sen}\theta \cancel{\vec{j}} + P_C A_c \cancel{\vec{j}} + R_y \cancel{\vec{j}} = \rho_B Q_B \left[-v_c \cancel{\vec{j}} + v_B \,\text{sen}\theta \cancel{\vec{j}}\right]$$

$$\hookrightarrow R_y = \rho_B Q_B \left[v_B \,\text{sen}\theta - v_c\right] - P_c \cdot A_c + P_B \cdot A_B \cdot \text{sen}\theta$$

$$v_c = \frac{Q_B}{A_c} = \frac{\left(\frac{1}{8'07}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot 0'075^2}{4}\right)} = 28'0 \ m/s$$

$$\frac{P_B}{\gamma} + \cancel{z_B} + \frac{v_B^2}{2g} = \frac{P_c}{\gamma_c} + \cancel{z_c} + \frac{v_c^2}{2g}$$

$$\frac{700210}{8'07 \cdot 9'81} + \frac{13'0^2}{2g} = \frac{P_c^*}{\gamma} + \frac{28'0^2}{2g}$$

$P_c^* = 687760$ Pa / $P_c = 586423$ Pa.

$$\Rightarrow R_y = 8'07 \, \frac{1}{8'07}\left(13'0 \cdot \text{Sen } 8'6 - 28'0\right) - 586423 \cdot 0'004 +$$

$$+ 588\,863 \cdot 0'01 \cdot \text{Sen } 8'6 \neq$$

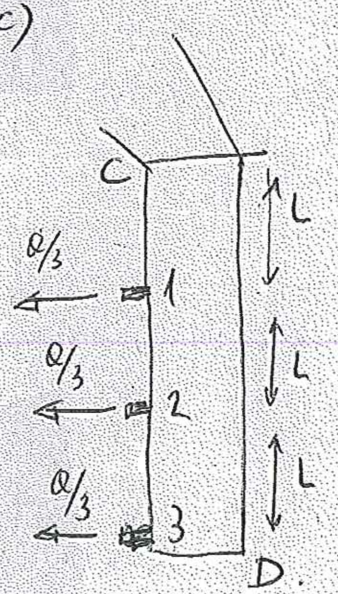
$R_y = -1777'2$ N

(arrastrando decimales).

c)

$$\sum \vec{M}_{ext} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \rho \, dV}^{\,0} + \int_{SC} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \rho (\vec{v_{r_{sc}}} \cdot \vec{dA})$$

Rég. Perm.



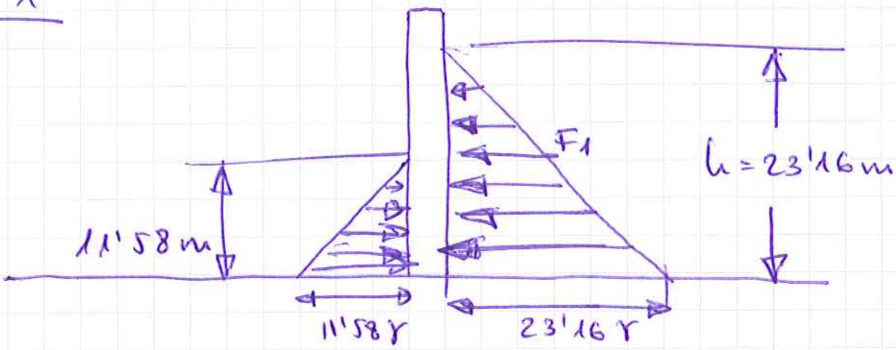
$$\int_{SC} = \int_1 + \int_2 + \int_3$$

$$\int_1 = \int_{A_{S_1}} \left(-L\vec{j} \wedge \frac{-Q/3}{A_s}\vec{i}\right) \rho \left(\vec{v_{r_{sc}}} \cdot \vec{dA}\right) = -L \cdot \frac{Q}{3A_s} \vec{K} \rho \frac{Q}{3}$$

$$\int_2 = -2L \frac{Q}{3A_s} \vec{K} \rho \frac{Q}{3} \quad / \quad \int_3 = -3L \frac{Q}{3A_s} K \rho \frac{Q}{3}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = \vec{M}_{Resist} = \frac{Q^2 \rho L}{9 A_s}(1+2+3)(-\vec{K}) = -\frac{2 L \rho Q^2}{3 A_s} \vec{K} = -210 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

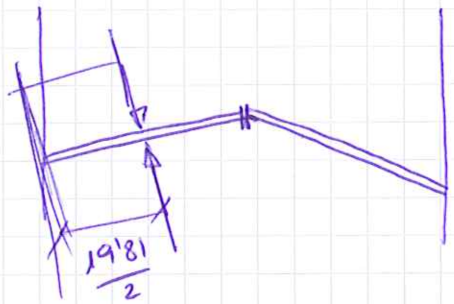
CUESTIÓN 1



El canal funciona con agua dulce del lago → $\rho = 1000\ kg/m^3$
En la corrección se dio como válida $\rho = 1'05$

—

Las dos fuerzas se aplican en el eje de simetría de la hoja:

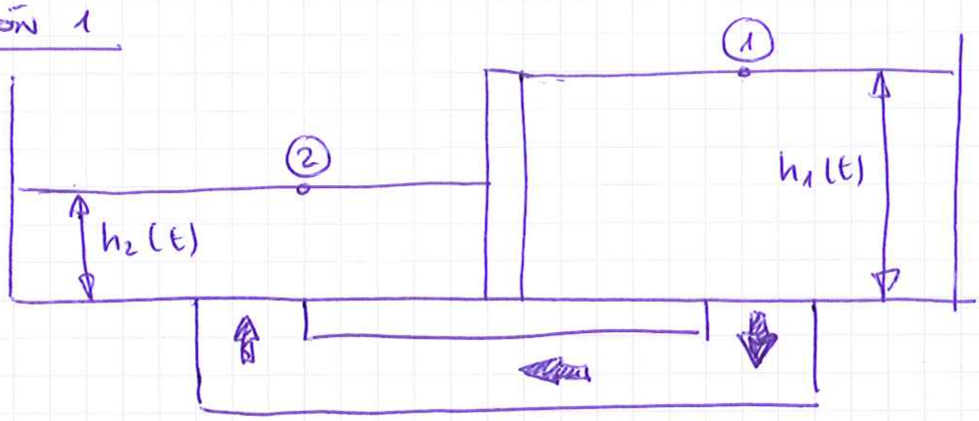


$F_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot Prof. = \frac{1}{2}\, 11'58^2 \cdot 9810 \cdot 19'81 = \boxed{1'30 \cdot 10^7\ N}$

$F_1 = \frac{1}{2} h \gamma h \cdot Prof = \frac{1}{2}\, 23'16^2 \cdot 9810 \cdot 19'81 = \boxed{5'21 \cdot 10^7\ N}$

$\boxed{M_R = -1'3 \cdot 10^7 \cdot \frac{19'81}{2} + 5'21 \cdot 10^7 \cdot \frac{19'81}{2} = 3'87 \cdot 10^8\ N m}$

CUESTIÓN 1



Aplicando Bernoulli entre 1 y 2:

$$h_1(t) = h_2(t) + h_f$$

Podemos expresar las pérdidas como función del término cinético $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ o del caudal:

$$h_1(t) = h_2(t) + k \cdot Q^2(t) \quad \Big\| \quad \boxed{Q(t) = \sqrt{\frac{(h_1(t) - h_2(t))}{k}}}$$

Aplicando la ecuación de continuidad a una de las 2 esclusas:

(2) $h_{2i} = 11'58\ m$ // $\boxed{h_{2f}} = \frac{11'58 + 23'16}{2} = \boxed{17'37\ m}$

$$\boxed{A_{esclusa}} = 320\ m \times 33'53\ m = \boxed{10729'6\ m^2}$$

$$A_{esc.} \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} = Q(t)$$

$\downarrow$ INTEGRANDO

$$\boxed{\int_{11'58}^{17'37} dh_2(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{h_1(t) - h_2(t)}{k}} \cdot dt}$$

Donde $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son función de h_1, h_2 y $dh_2(t)$

CUESTIÓN 2

a) El aparato presenta un venturi en su interior, con un orificio en la zona en la que se produce el estrechamiento.

Dado que la velocidad en ese punto aumenta, la presión disminuye creando un efecto de succión. Al tener una presión inferior a la atmosférica el aire del exterior entra en el aparato mezclándose con el vino.

Se trata pues de un aparato de aireación.

El diseño del aparato deberá tener en cuenta que cuanto más estrecha sea la sección, mas aire entrará, pero también se reducirá más el caudal (pérdidas de carga). Por ello, hay que buscar una solución de compromiso.

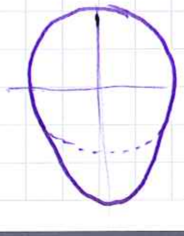
Cuestion 2

b) α y β son el resultado de generalizar Euler para una tubería en lugar de una línea de corriente. Ambos se originan debido a que la velocidad no es la misma en todos los puntos de la sección recta (perfil de velocidades) y además ninguno de los dos términos es lineal.

En una sección cuadrada el perfil de velocidades será distinto del perfil en un tubo circular. Por lo tanto los valores de α y β tanto para flujo laminar como turbulento serán, en principio, distintos.

En el caso de los términos de presión y cota, su generalización para tuberías circulares no requiere de coeficientes al ser simétricas respecto a un plano horizontal que pase por el eje (la distribución de cotas y presiones a ambos lados se compensa y da la media).

Ambos términos necesitarían de un coeficiente corrector si la tubería no fuera simétrica. Por ejemplo:



Problema 1 (33%)

Un aerodeslizador (hovercraft) es un vehículo utilizado para transportar personas y mercancías sobre superficies de agua (aunque también sobre superficies planas y sin obstáculos terrestres). La fotografía muestra uno de planta rectangular utilizado por la marina de los Estados Unidos.

Su funcionamiento, tanto para su propulsión como para elevarse sobre la superficie para disminuir su fricción, se basa en la ecuación integral de la cantidad de movimiento. Este ejercicio se centra sólo en la sustentación de un aerodeslizador de planta circular (ver esquema). Se consigue cambiando la dirección del flujo de aire que el ventilador superior inyecta en el interior del aerodeslizador (también denominado colchón de suspensión). La entrada a través del ventilador es vertical y la salida, a través de unos faldones anulares, horizontal y con simetría radial.

Suponiendo que:

- El régimen es estacionario.
- La densidad del aire (gas perfecto R= 287 Nwm/Kg ºK) es constante en todo el trayecto seguido (su variación de presión es pequeña).
- La velocidad de salida del aire la establece la presión en el interior del colchón del aerodeslizador, p_i, constante en todo el recinto interior, donde se supone que el aire está en reposo.
- Suponer el sistema totalmente ideal (no hay pérdidas, la vena fluida no se contrae, etcétera).
- D=6m ; d=1m

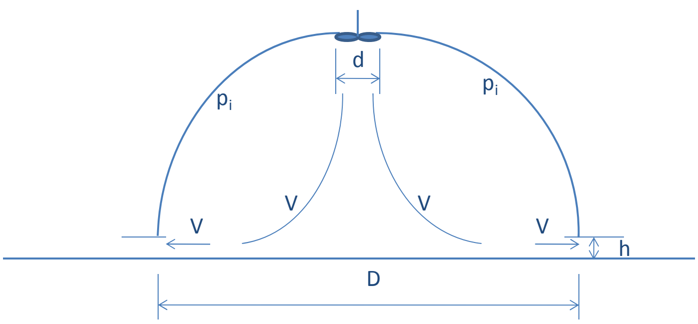
A partir de cuanto antecede y del esquema anexo,

1. Calcular, cuando se desliza sobre el mar con una carga total de 2,5 Tm (p_{at} = 1,030 bares y t = -2 ºC):
   a) Los caudales másicos y volumétricos que debe trasegar el ventilador.
   b) La presión del aire en el interior del colchón (en este apartado, al estar el aire en reposo en el interior del aerodeslizador, se pueden utilizar ecuaciones de estática de fluidos)
   c) La velocidad del flujo de aire a la entrada y salida del aerodeslizador.
   d) La altura h de sustentación del aerodeslizador
   e) La potencia del ventilador que, inyectando el caudal de aire en el interior del colchón y venciendo la presión en su interior p_i, permite que el aerodeslizador se sustente sobre el agua.

2. Repetir los cálculos, en las mismas condiciones atmosféricas, para una carga total de 3 Tm.

3. Comparar e interpretar los resultados en los dos escenarios.

Esquema del colchón de aire del aerodeslizador



Problema 2 (33%)

La figura adjunta muestra un ventilador que aspira aire de la atmósfera y lo impulsa a través de una tubería. La entrada al sistema (sección 1) es la del ventilador y su salida es el extremo de la tubería (sección 2).

El sistema está funcionando en régimen permanente y se tienen los siguientes datos:

- En la sección 1, de 60 mm de diámetro, el flujo de aire es laminar (perfil de velocidades parabólico), tiene una temperatura de 20ºC y una presión absoluta de 1 atm, mientras que en la sección 2, de 30 mm de diámetro, el flujo es turbulento (perfil de velocidades uniforme), tiene una temperatura de 10ºC y ha ganado 0,1 kPa con respecto a la presión de entrada.

- Las cotas en las dos secciones pueden considerarse iguales y el sistema funciona en régimen permanente.

- El ventilador impulsa un caudal másico de aire de G = 0,1 kg/min y le aporta una potencia de 0,15 W.

- El aire puede considerarse como gas perfecto de constante R = 287 (N·m)/(kg·K), calor específico Ce = 1012 J/(kg·K) y viscosidad cinemática $\upsilon = 1{,}5\cdot10^{-5}$ m^2/s.

Se pide:

a) Justificar mediante los cálculos adecuados si el flujo se puede considerar o no como incompresible.

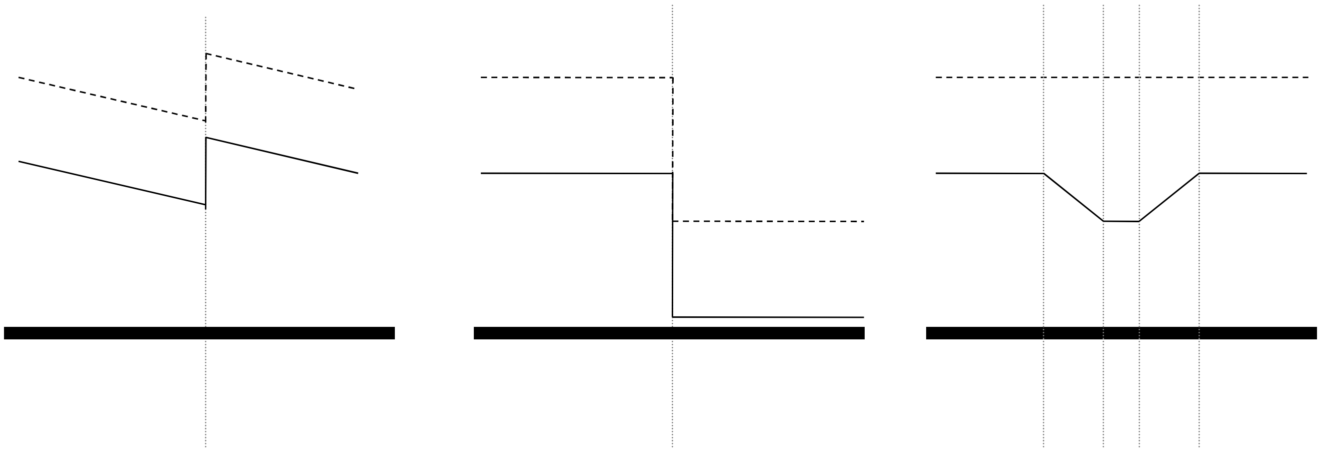
b) Asumiendo ahora flujo incompresible, calcular utilizando la ecuación de Bernoulli las pérdidas de carga del aire en su recorrido entre 1 y 2. Justificar, a continuación, y con los cálculos necesarios si el error de suponer en 1 un perfil uniforme sería despreciable o no.

c) Asumiendo ahora flujo incompresible y perfil uniforme en 1, calcular de nuevo las pérdidas de carga del aire en su recorrido entre 1 y 2, pero utilizando ahora la ecuación integral de la energía. Y además, ¿cuál es la potencia calorífica que ha perdido el aire en su recorrido entre 1 y 2?

Cuestiones 1 (16,66%)

a) Las siguientes figuras presentan la línea de altura piezométrica y la altura total de una conducción que transporta agua a presión. Explicar cuáles son las características del flujo y las posibles causas físicas de dicho comportamiento en cada uno de los casos representados. Realizar un esquema del sistema que generaría estas figuras (los casos pueden ser ideales o reales).

———— **Altura piezométrica** - - - - - **Altura total**

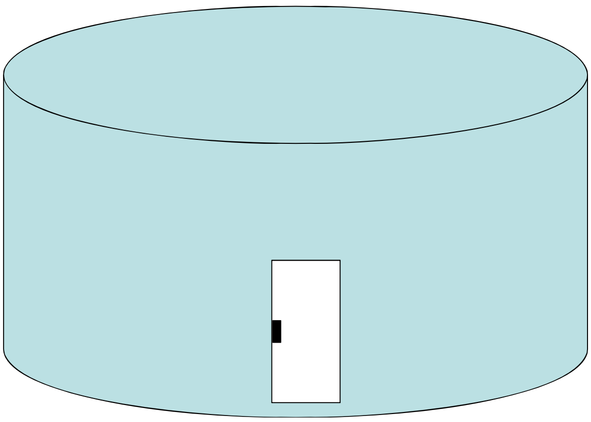


b) Definir trayectoria, línea de corriente y línea de traza. ¿Cuándo son iguales? Poner un ejemplo real en el cual las líneas NO sean iguales y definir claramente cómo se comportarían los elementos que las definen (partículas, campos, etc.)

Cuestiones 2 (16,66%)

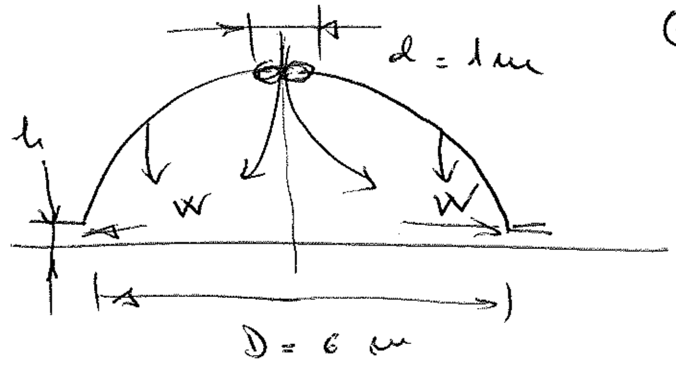
a) La puerta de la figura da acceso al interior de un tanque cilíndrico de agua. La puerta se abre hacia dentro del tanque mediante un tirador dispuesto a tal efecto justo en el borde de la puerta. Se estima que una persona media puede tirar con una fuerza de hasta 70 Kp. Estimar, en caso de emergencia, el volumen máximo de agua que permitiría que una persona atrapada en el interior del tanque pudiera escapar.

Datos:
Sección del tanque: 30 m^2
Ancho puerta: 60 cm (considerarla plana)
Suponer que las bisagras absorben cualquier fuerza vertical



b) Explicar físicamente como es capaz de medir la viscosidad un viscosímetro de Canon-Feske (práctica de laboratorio) y el porqué de su geometría. ¿Cómo influye la serie del viscosímetro?

Solución



La densidad del aire en las condiciones del apartado 1 es

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{103000\ N/m^2}{287 \times 271\ \frac{N\,m}{kg\,K}\ K} = 1{,}32\ kg/m^3$$

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al VC que limita el aerodeslizador, en (régimen estacionario):

$$\Sigma \vec{F}_{ex} = \rho Q \left(\vec{V}_s - \vec{V}_e \right)$$

Como interesa en la dirección vertical, se tiene

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = -W \quad , \quad \vec{V}_s \Big|_{vertical} = 0 \qquad \vec{V}_e \Big|_{vert} = \frac{Q}{A_e}$$

luego

$$-W = \rho Q \left(0 - \frac{Q}{A_e} \right)$$

resultando

$$W = \rho \frac{Q^2}{A_e} \Rightarrow Q = \sqrt{A_e \frac{W}{\rho}}$$

$$A_e = \frac{\pi}{4} 1^2\ m^2 \qquad \rho = 1.32\ kg/m^3 \qquad W = 2500 \cdot 9.81\ N = 24\,525\ N$$

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{24\,525}{1.32}}\ m^3/s = 120{,}80\ m^3/s$$

$$V_e = \frac{120.80}{\pi/4}\ m/s = 153{,}81\ m/s$$

(2)

El caudal másico entrante es $G = 120.80 \times 1.32 = 159,46\ \frac{kg}{s}$

b) El aire del colchón de aire está sometido a una presión interior p_i que debe ser suficiente para compensar el peso. Por estática sabemos que (fuerza sobre superficie curva)

$$F_v = W = A_{proyectada} \times p_i$$

luego

$$p_i = \frac{24\,525\ Nw}{\frac{\pi}{4}\left(6^2 - 1^2\right)} = 892,18\ \frac{Nw}{m^2}$$

c) Esta presión interior condiciona la velocidad de salida. Aplicando Bernoulli entre un punto interior del colchón y un punto periférico del faldón anular, se obtendría la velocidad de descarga a través de un orificio:

$$V_s = \sqrt{2\,\frac{p_i}{\rho}} = \sqrt{2\,\frac{892,18}{1.32}} = 36,77\ m/s$$

d) La altura de sustentación la proporciona la ecuación de continuidad: $V_s \cdot \pi D \cdot h = Q$

$$h = \frac{Q}{\pi V_s D} = \frac{120.80}{\pi \times 36,77 \times 6}\ m = 0,174\ m = \underline{\underline{17.4\ cms}}$$

e) Por último la potencia del ventilador será:

$$\underline{\underline{P}} = Q \cdot p_i = 120,80 \times 892,18\ w = 107\,787,4 = \underline{\underline{107,79\ Kw}}$$

Segundo apartado

Hay que repetir todos los cálculos, pero con la nueva carga $\underline{W} = 3000 \times 9.81 \text{ Nw} = \underline{29430 \text{ Nw}}$

Los resultados son:

$$Q = \sqrt{A_e \frac{W}{\rho}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{29430}{1.32}} = 132,33 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_e = \frac{132,33}{\pi/4} = 168,49 \text{ m/s}$$

$$P_i = \frac{29430}{\frac{\pi}{4}(6^2-1)} \frac{\text{Nw}}{\text{m}^2} = 1070,61 \frac{\text{Nw}}{\text{m}^2}$$

$$V_S = \sqrt{2 \frac{P_i}{\rho}} = \sqrt{2 \frac{1070,61}{1.32}} \text{ m/s} = 40,28 \text{ m/s}$$

$$h = \frac{Q}{V_s \pi D} = \frac{132,33}{40,28 \times \pi \times 6} = 0.174 = 17.4 \text{ cms}$$

3er apartado $P = Q \, P_i = 132,33 \times 1070,61 = 141\,674 \text{ w} = 141,67 \text{ Kw}$

El resumen final queda:

	Q (m³/s)	G (kg/s)	v_e (m/s)	V_s (m/s)	P_i (Nw/m²)	h (m)	P (Kw)
W = 2,5 Tn	120,80	159,46	153.81	36,77	892,18	0,174	107,79
W = 3,0 Tn	132,33	174,67	168,49	40.28	1070,61	0,174	141.67

Los resultados muestran que al aumentar la carga todos los parámetros aumentan para poder soportarla. La excepción es la altura h que no cambia, por la superior velocidad de salida V_s.

Problema ventilador

a) $\rho_1 = \frac{P_1^*}{RT_1} = \frac{101337}{287 \cdot 293} = 1'205 \ kg/m^3$

$\rho_2 = \frac{P_2^*}{RT_2} = \frac{101437}{287 \cdot 283} = 1'249 \ kg/m^3$

$\rightarrow \Delta\rho \simeq 3'5\%$

Muy pequeño, el flujo sí se puede considerar incompresible.

$\Rightarrow \rho_1 = 1'205 \frac{kg}{m^3} = \rho_2 = \rho$

b) $\cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{0} + \cancel{z_1} + \frac{v_1^2}{2g}\alpha_1 + h_B = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} + \frac{v_2^2}{2g}\cancel{\alpha_2}^{1} + h_f$

$$h_f = \frac{v_1^2 \cdot \alpha_1 - v_2^2}{2g} + h_B - \frac{P_2}{\gamma}.$$

$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{G/\rho}{A_1} = \frac{G}{\rho A_1} = \frac{0'1/60}{1'205 \cdot \pi \cdot 0'03^2} = 0'489 \ m/s$

$v_2 = \frac{Q}{A_2} = 1'957 \ m/s$ // $\gamma = \rho \cdot g = 1'205 \cdot 9'81 = 11'822 \frac{N}{m^3}$

$h_B = \gamma \cdot Q \cdot h_B \rightarrow h_B = \frac{Pot_B}{\gamma Q} = \frac{0'15}{11'822 \cdot Q} = 9'174$ m.c. aire.

$$h_f = \frac{0'489^2 \cdot 2 - 1'957^2}{2 \cdot 9'81} + 9'174 - \frac{100}{11'822} = 0'545 \text{ m.c. aire}$$

Si consideramos flujo uniforme en 1 $\Rightarrow \alpha_1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_f = 0'533$ m.c. aire $\rightarrow$ Diferencia $< 2'5\%$

$\Rightarrow$ sí se puede considerar flujo uniforme.

c) $\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt}\iiint_{VC}\left(u + gz + \frac{v^2}{2g}\right)\rho \, dV}^{0 \text{ Rég. Perm}} + \iint_{SC}\left(u + \frac{P}{\rho} + \cancel{gz} + \frac{v^2}{2g}\right)\rho\left(\vec{v_{r_{SC}}} \cdot \vec{dA}\right).$

Si flujo uniforme en 1

Si flujo uniforme en 1 y en 2:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \left[\left(u_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}\right) - \left(u_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2}\right)\right]\rho Q$$

Potencia perdida en fricción $= (u_2 - u_1)\rho Q - \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{dW_{eje}}{dt} - \left[\dfrac{P_2 - \cancelto{0}{P_1}}{\rho} + \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right]\rho Q$

$$= 0'15 - \left[\frac{100}{1'205} + \frac{1'957^2 - 0'489^2}{2}\right] 1'205 \cdot 1'4 \cdot 10^{-3}$$

$$= 0'0087 \text{ W}$$

Altura perdida en fricción $= h_f = \dfrac{Pot_f}{Q \cdot \gamma} = 0'533$ m.c.aire (igual que antes para flujo uniforme)

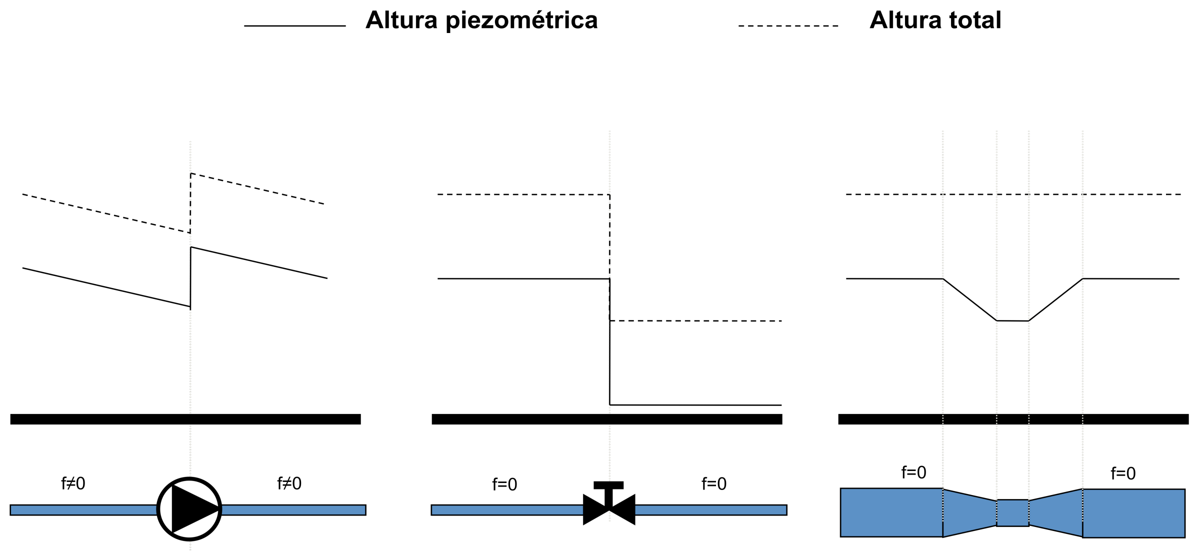
$$Pot_f = (u_2 - u_1)\rho Q - \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dQ}{dt} = c_e(T_2 - T_1)\rho Q - Pot_f =$$

$$= 1012\,(10-20)\,1'205 \cdot 1'4 \cdot 10^{-3} - 0'0087 = -16'87 \text{ W}$$

Negativo. Calor cedido por el fluido al entorno

Cuestiones 1 (16,66%)



a) En el primer caso, aumentan las dos líneas, lo que implica un aporte de energía al fluido en el punto intermedio. Un aporte que puede estar justificado por la presencia de una bomba.

En el segundo caso, la caída de presión (la cota se mantiene) puede darse por cualquier elemento puntual que introduzca pérdidas (por ejemplo una válvula). El hecho de que las dos líneas sean horizontales antes y después demuestra que se trata de una conducción ideal sin fricción.

El tercer caso corresponde a un venturi como el visto en prácticas, eso sí, teniendo en cuenta una tubería ideal sin fricción. El aumento de la velocidad produce una disminución de la presión, y por tanto de la altura piezométrica. La altura total, en ausencia de pérdidas se mantiene constante.

b) La trayectoria es la línea que queda definida por todos los puntos del espacio que ha ocupado una partícula. La línea de corriente es una envolvente de los vectores velocidad del fluido. La línea de traza es aquella que une los lugares que ocupan las partículas que han pasado por un punto en concreto del espacio al que va asociado dicha traza.

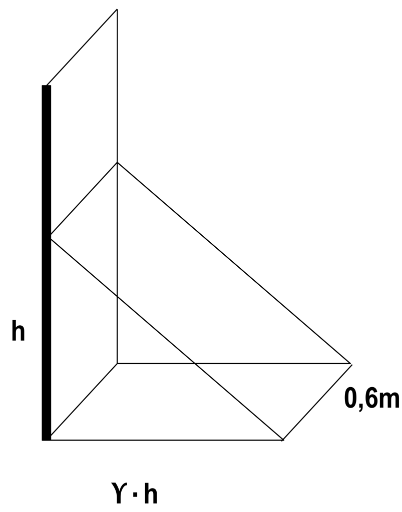
Las líneas no son iguales cuando hay cambios en el campo de velocidades con el tiempo, es decir en régimen transitorio. Cuando esto ocurre, las partículas que pasan por un mismo punto no seguirán la misma dirección ni tendrán la misma velocidad al atravesarlo. Por ello, aunque quedarán unidas por la línea de traza, dicha traza no coincidirá con la trayectoria. Al cambiar el campo de velocidades, también cambiará la línea de corriente, por lo que será imposible que las tres coincidan.

Cuestiones 2 (16,66%)

a) Al estar limitada la fuerza con la que puede estirar la persona, el problema consiste en averiguar cuándo el momento creado por la fuerza hidrostática del agua sobre la puerta, se igualará con el momento creado por la fuerza aplicada por la persona en el tirador.

Suponiendo que el nivel del agua solo cubre parcialmente la puerta, calcular la fuerza sobre la misma es inmediato:

La fuerza resultante sobre la puerta (normal a la misma, hacia fuera) puede calcularse mediante el volumen del prisma que se muestra en la figura. En concreto, trabajando en unidades del SI:



(1) $F = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot 0{,}6 = 2943 \cdot h^2\ N$

Dicha fuerza se aplicará en el eje de simetría vertical de la puerta, a 0,3m de las bisagras, y el momento que generará será:

(2) $M = 0{,}3 \cdot 2943 \cdot h^2\ N \cdot m = 882{,}9 \cdot h^2\ N \cdot m$

Tan solo queda igualar dicha fuerza al momento de apertura que genera la persona, y que resulta de aplicar la fuerza de 70 Kp a 0,6m de las bisagras:

(3) $M = 0{,}6 \cdot 70 \cdot 9{,}81\, N \cdot m = 412{,}02\ N \cdot m$

Igualando (1) y (3) el nivel máximo de agua h que permite la apertura es:

h = 0,68 m

Lo que multiplicado por la sección del depósito, nos proporciona el volúmen máximo de agua:

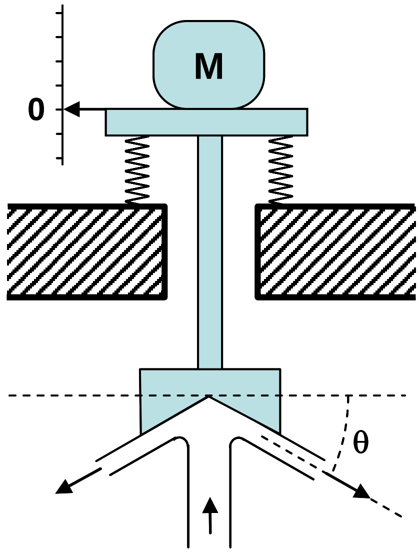
$\forall = 0{,}68 \cdot 30 = 20{,}49 m^3$

b) El viscosímetro de Canon-Feske se aprovecha del balance de fuerzas a las que está sometido el fluido. Por una parte, la gravedad. Por otra, las fuerzas tangenciales debidas a la viscosidad. Al obligar al fluido a circular por un fino capilar, la magnitud de las fuerzas viscosas (proporcionales al perímetro) es notable con respecto al peso (proporcional al volumen) por lo que el fluido desciende muy despacio, lo que permite determinar con precisión el tiempo empleado por el mismo para recorrer una distancia.

Dado que dicho tiempo es proporcional a lo viscoso que sea el fluido, el viscosímetro puede ser calibrado mediante una constante que multiplicada por el tiempo, proporciona la viscosidad del fluido. La serie del viscosímetro depende de su geometría, y por lo tanto series distintas arrojan valores distintos de tiempo para un mismo fluido. De ahí que sus constantes sean (lógicamente) distintas.

Problema 1 (33%)

La figura muestra un dispositivo para medir la fuerza de un chorro de agua de 1 cm de diámetro, mediante una pieza circular que desvía el chorro un ángulo θ en toda su periferia. En ausencia del chorro y de la masa M, los muelles están calibrados para que la plataforma se sitúe en la posición cero.



Sabiendo que el ángulo de desviación θ es de 30º, se realizan 5 ensayos para 5 velocidades distintas del chorro. En cada ensayo:

- Se ha obtenido el peso del agua bombeada durante el ensayo, W_a, y medido el tiempo del ensayo, t.
- Se ha determinado el valor de la masa M que mantiene la plataforma en la posición cero.

Los valores de cada ensayo son los mostrados por la tabla siguiente:

Ensayo	W_a (kp)	t (s)	M (g)
1	3,470	26,8	33
2	3,897	18,2	90
3	4,014	12,6	275
4	3,951	10,0	304
5	4,482	10,6	348

Se pide:

a) Realizar los cálculos adecuados para comprobar si los valores obtenidos en cada ensayo son correctos, o bien ha habido algún error en alguno de ellos (90%).

b) Razonar adecuadamente para qué valor del ángulo θ se necesitarán los valores máximos de la masa M (10%).

Problema 2 (33%)

Sobre la cinta de la adjunta figura hay una capa de aceite en contacto con la atmósfera. El rozamiento en la interfase aceite aire es despreciable.

Sabiendo que el caudal neto circulante coincide con el de un flujo uniforme ascendente de velocidad 0,2 U_0, se pregunta:

a) Número de Reynolds del flujo medio (utilizar la longitud característica del problema para calcularlo). Comentar el resultado.

b) El perfil de velocidades real del flujo.

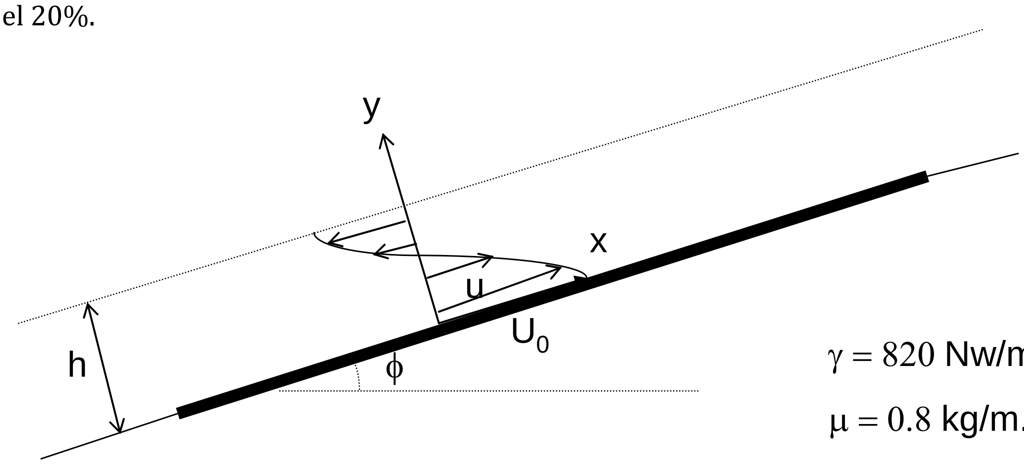
c) La pendiente de inclinación del plano (en radianes) así como la coordenada, y, en la que la velocidad del flujo, en función de los parámetros básicos del problema, coincide con la del flujo uniforme.

d) La potencia necesaria para arrastrar la placa (por metro^2) así como la potencia que se disipa debida a la viscosidad del fluido (también por metro^2).

e) El balance energético completo del sistema (por metro^2).

f) Aplicación: responder numéricamente a las preguntas del apartado c (pendiente del plano y ordenada a la cual la velocidad u(y) coincide con la velocidad del flujo medio) para los valores numéricos que detalla la figura.

PUNTUACION.- Las dos primeras cuestiones suponen cada una el 10% de la nota global. Las cuatro restantes el 20%.



$\gamma = 820$ Nw/m

$\mu = 0.8$ kg/m.s

h = 0.15 m

U_0 = 2 m/s

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

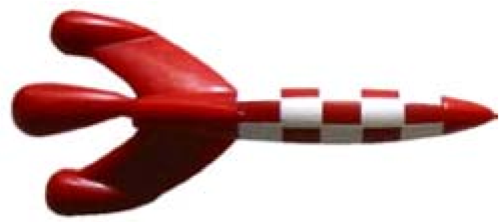
Examen de Mecánica de Fluidos
Jueves 18 de diciembre de 2008

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

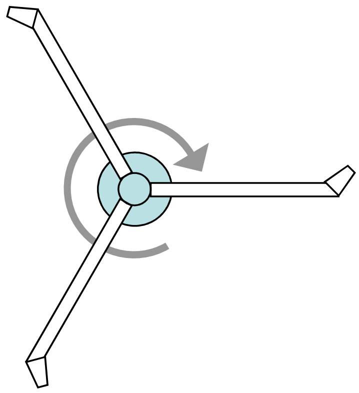
Cuestiones (33%)

La NASA decide lanzar una misión tripulada a Marte.

a) Explicar qué principio físico posibilita que el vehículo espacial acelere en el vacío espacial. Relacionar la explicación con ecuaciones fundamentales de la asignatura. ¿De qué factores depende la velocidad final del cohete?
Argumentar (40%)



b) El reloj Omega Speedmaster que los astronautas utilizan especifica en su catálogo que puede soportar profundidades de hasta 30m. En el caso de encontrar agua líquida en Marte, los astronautas realizarán misiones subacuáticas. ¿Qué profundidad soportará el reloj en el planeta rojo? Justificar. (40%)



c) Se pretende estudiar la posibilidad de instalar invernaderos piloto en Marte, en los que los cultivos se rieguen mediante aspersores como el de la figura. ¿Variará el funcionamiento con respecto a la Tierra? Argumentar. (30%)

Datos de Marte (fuente: Wikipedia)

Diámetro ecuatorial : 6794,4 km		
Área superficial: 144 millones km^2		
Masa: 6,4191 × 1023 kg		
Densidad media 3,94 g/cm^3		
Gravedad superficial 3,71 m/s^2		
Temperatura superficial		
mín.	media	máx.
186 K -87 °C	227 K -46 ºC	268 K -5 °C[1
Presión atmosférica: 0,7-0,9 kPa		

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

PROBLEMA 1

a) $$\sum \vec{F}_{ext} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{v}\, dV} + \int_{SC} \vec{v}\, \rho (\vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA})$$

$$\vec{F} = \int_{SC_e} \vec{v_e}\, \rho (\vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA}) + \int_{SC_s} \vec{v_s} \cdot \rho (\vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA}) =$$

$$\vec{F} = \rho Q_s \cdot \vec{v_s} - \rho Q_e \vec{v_e} = \rho Q (\vec{v_s} - \vec{v_e}).$$

$$\vec{F} = \rho Q v (-\operatorname{sen}\theta - 1)\vec{j}.$$

$$\cancel{-}F = \cancel{-}\rho Q v (\operatorname{sen}\theta + 1) \qquad \theta = 30^\circ$$

$$\boxed{F = \rho Q v \cdot 1'5}$$

$$\boxed{Q = \frac{M_a}{\rho t}} \qquad \boxed{v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot 0'01^2}{4}}}$$

Ensayo	Ma (kg)	t (s)	Q (m³/s)	v (m/s)	F (N)
1	3'47	26'8	$1'29 \cdot 10^{-4}$	1'64	0'32
2	3'897	18'2	$2'14 \cdot 10^{-4}$	2'73	0'88
3	4'014	12'6	$3'19 \cdot 10^{-4}$	4'06	1'94
4	3'951	10'0	$3'95 \cdot 10^{-4}$	5'03	2'98
5	4'482	10'6	$4'23 \cdot 10^{-4}$	5'38	3'41

Ensayo	F(N)	F(Kp)	W(Kp)
1	0'32	0'033	0'033
2	0'88	0'089	0'090
3	1'94	0'198	0'275
4	2'98	0'304	0'304
5	3'41	0'348	0'348

← ERROR.

↑ Calculado (F(Kp))

↑ Tomado en el ensayo. (W(Kp))

b) El máximo valor de M será necesario cuando se tengan θ de sen θ máximo. Es decir, θ = 90°C.

($F = 2 \rho Q v.$).

Sobre la cinta de la adjunta figura hay una capa de aceite en contacto con la atmósfera. El rozamiento en la interfase aceite aire es despreciable.

Sabiendo que el caudal neto circulante coincide con el de un flujo uniforme ascendente de velocidad 0.2 U_0, se pregunta:

a) Número de Reynolds del flujo medio (utilizar la longitud característica del problema para calcularlo). Comentar el resultado.

b) El perfil de velocidades real del flujo

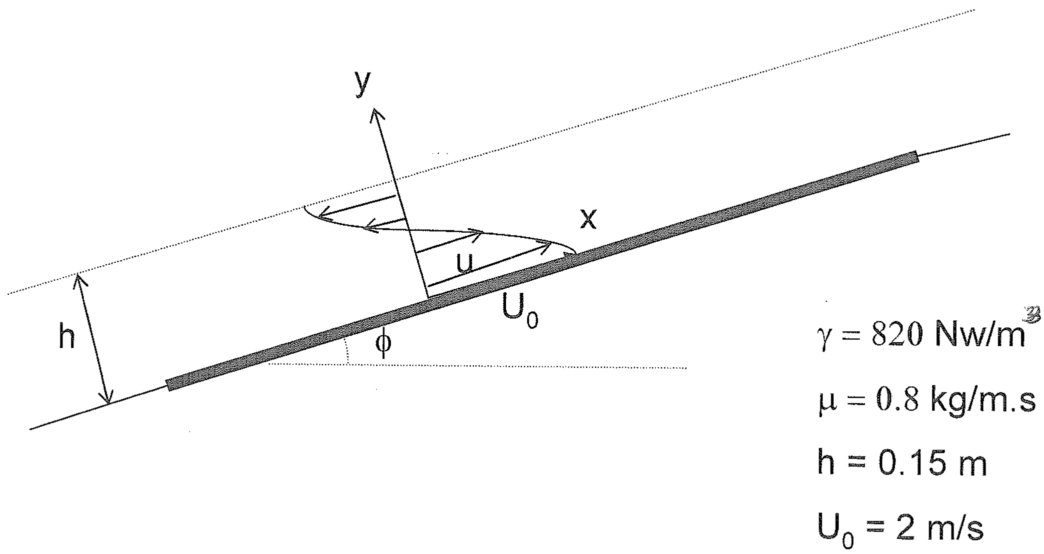
c) La pendiente de inclinación del plano (en radianes) así como la coordenada, y, en la que la velocidad del flujo, en función de los parámetros básicos del problema, coincide con la del flujo uniforme.

d) La potencia necesaria para arrastrar la placa (por metro^2) así como la potencia que se disipa debida a la viscosidad del fluido (también por metro^2).

e) El balance energético completo del sistema (por metro^2).

f) Aplicación: responder numéricamente a las preguntas del apartado c (pendiente del plano y ordenada a la cual la velocidad u(y) coincide con la velocidad del flujo medio) para los valores numéricos que detalla la figura.

PUNTUACION.- Las dos primeras cuestiones suponen cada una el 10% de la nota global. Las cuatro restantes el 20%.



Nota previa

En el enunciado se deslizó un error. El peso específico $\gamma = 820 \frac{Nw}{m^3}$ debía ser $\gamma = 820\ Kp/m^3$. La única razón que lo justifica es que el dato corresponde a un aceite extremadamente ligero que es imposible encontrar en la práctica.

Con todo, y sin tener en cuenta que se trata de un dato que no se corresponde con la realidad, no hay ninguna incoherencia si se resuelve el problema con un aceite "tan ligero que no existe".

Además, como se verá, una serie de resultados (que denominamos cinemáticos) no dependen para nada de γ. Los dinámicos (pendiente, balance de potencias, etc) sí se ven afectados.

En lo que sigue se resuelve el problema con los datos del enunciado y al final se muestra una comparativa entre estos valores y los que corresponderían a $\gamma = 820 \frac{Kp}{m^3}$

CUESTIÓN A

$$Re = \frac{\bar{V} \cdot D \cdot \rho}{\mu} = \frac{0.4 \times 0{,}15 \times 83{,}59}{0.8}$$

$\mu = 0.8\ Kp/ms$

$\bar{V} = 0{,}2\, U_0 = 0{,}4\ m/s$

$D \sim h = 0.15\ m$

$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{820}{9.81}\ Kp/m^3 = 83.59\ Kp/m^3$

$$\boxed{Re = 6{,}26}$$

Valor extremadamente laminar. Es un flujo MUY LENTO.

CUESTIÓN B

El balance de fuerzas y además las dos condiciones de contorno

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= U_0 \\ \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dan lugar a una ecuación diferencial cuya integral es

$$\boxed{u(y) = U_0 - \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\, y\left(h - \frac{y}{2}\right)}$$

Se conocen todos los parámetros, salvo $\operatorname{sen}\theta$. Dejamos la aplicación numérica, tras la determinación del valor correspondiente.

APARTADO C

El valor del ángulo se determina imponiendo el valor del caudal, que es conocido

$$Q = 0{,}2\, U_0 \cdot h$$

$$Q = \int_0^h u(y)\, dy = U_0\, h - \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{3\mu} h^3$$

IGUALANDO VALORES $0{,}2\, U_0\, h = U_0\, h - \dfrac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{3\mu} h^3$, de donde resulta

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = 0{,}8 \cdot \frac{3\, U_0\, \mu}{\gamma\, h^2}}$$

sustituyendo resulta $\operatorname{sen}\theta = 0{,}8\, \dfrac{3 \times 2 \times 0.8}{820 \times 0.15^2} = 0{,}208$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0{,}208 = 12^\circ$$

En consecuencia el perfil de velocidades unitario es

$$u(y) = 2 - \frac{820 \times 0{,}208}{0.8}\, y\left(0{,}15 - \frac{y}{2}\right)$$

$$\boxed{u(y) = 2 - 213{,}2\, y\left(0{,}15 - y/2\right)}$$

El punto en el que la velocidad coincide con la media del flujo $(y = \xi)$ lo proporciona la ecuación:

$$u(\xi) = 0{,}2U_0 = 0{,}4 = 2 - 213{,}2\,\xi\left(0{,}15 - \frac{\xi}{2}\right)$$

que operando proporciona

$$\xi^2 - 0{,}3\,\xi + 0.015 = 0$$

con $\xi = 0{,}15 - \sqrt{0.15^2 - 0{,}015} = \left(0{,}15 - \sqrt{0.0075}\right)$ m

$$\xi = (0{,}15 - 0{,}0866)\text{ m} = \underline{0{,}0634\text{ m}}$$

Un valor que no depende de γ, pues se trata de una cuestión cinemática.

En efecto, la ecuación en función de los parámetros resulta:

$$0.2U_0 = U_0 - \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\,\xi\left(h - \frac{\xi}{2}\right)$$ que operando resulta:

$$\xi^2 - 2h\,\xi + 1.6\,\frac{\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta} = 0 \qquad \boxed{\xi = h - \sqrt{h^2 - \frac{1.6\,\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta}}}$$

o bien recordando que $\operatorname{sen}\theta = 2.4\,\dfrac{U_0\,\mu}{\gamma h^2}$

$$\xi = h\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\text{ m} = 0.15\,(0.4226)\text{ m} = 0.0634\text{ m}$$

$$\boxed{\xi = h\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}$$ es un resultado independiente de γ.

APARTADO D

Potencia de arrastre de la placa:

$$W_a = F.V = \tau\big|_{y=0} \cdot 1.1.\,U_0 = \mu U_0 \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left(h - \frac{y}{2}\right) + \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\cdot y\,\frac{1}{2}\Bigg|_{y=0} = -\frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\cdot h$$

$$W_a = \cancel{\mu}\, U_0\, \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\mu}}\cdot h = \boxed{W_a = U_0\,\gamma \operatorname{sen}\theta\, h}$$

Mientras que la potencia disipada es

$$W_d = \int_0^h \Phi\, \delta V = \mu \int_0^h \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy \cdot 1 \cdot 1$$ que operando

$$\boxed{W_d = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta\, h^3}{3\mu}}$$

APARTADO E

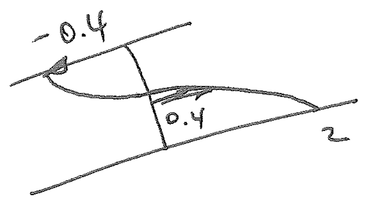
La potencia útil entregada al fluido por unidad de tiempo corresponde a la ascensión neta del flujo

$$W_u = \gamma Q H = \gamma\left[U_0 h - \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{3\mu} h^3\right] 1 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

por lo que $$\boxed{W_u = \gamma U_0 h \operatorname{sen}\theta - \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta}{3\mu} h^3}$$

que lógicamente coincide con la diferencia de

$$\boxed{W_a - W_d \equiv W_u}$$



APARTADO F

YA RESUELTO

$$\zeta = 0.0634$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0.208 = 12^\circ$$

5 Finalmente se compara los principales resultados para los dos pesos específicos:

	$\gamma = 820 \ \frac{Nw}{m^3}$ $\rho = 83,59 \ \frac{kp}{m^3}$	$\gamma = 820 \ \frac{kp}{m^3} = 8044 \ \frac{kp}{m^3}$ $\rho = 820 \ \frac{kp}{m^3}$
ξ	0.0634 m	0.0634 m
sen θ	0,208	0.0265
θ	12°	1.52°
w_a	51,168 $\frac{W}{m^2}$	63,95 W/m^2
w_{el}	40,909 W/m^2	63,90 W/m^2
w_u	10,259 W/m^2	0,05 W/m^2

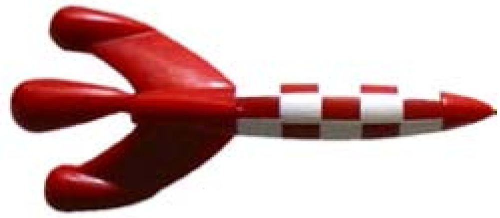
Como se ve en el fluido más pesado la pendiente es muy inferior y la ganancia de energía potencial (potencia útil x tiempo) casi nula.

El problema, pese al error en el dato de partida, es desde un punto de vista formal, coherente.

Cuestiones (33%)

La NASA decide lanzar una misión tripulada a Marte.

a) Explicar qué principio físico posibilita que el vehículo espacial acelere en el vacío espacial. Relacionar la explicación con ecuaciones fundamentales de la asignatura. ¿De qué factores depende la velocidad final del cohete?
Argumentar (40%)



El vehículo espacial es capaz de acelerar en el espacio mediante el intercambio de cantidad de movimiento que se produce al expulsar los productos de la combustión (gases) por las toberas situadas en su parte posterior. En función de la masa de gas expulsada y su velocidad, el cohete experimentará una aceleración en sentido contrario. No existe ninguna otra fuerza ni un principio de acción/reacción.

La ecuación que rige dicho movimiento es la ecuación de la cantidad de movimiento, que en el caso de querer estudiar la aceleración deberá incluir el término corrector para volúmenes de control no inerciales (o en su defecto ser utilizada con velocidades absolutas).

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} \right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r} \right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r \right) \right) \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A} \right)$$

En ausencia de rotación, ω y α serán nulas. No existen fuerzas exteriores (el rozamiento en el espacio exterior puede asumirse como nulo) y considerando que el combustible no acelera dentro del cohete, el término de la integral del volumen de control será nulo (constante).

La velocidad máxima del cohete tan sólo depende de la cantidad de combustible que lleve el mismo, pudiendo acelerar (en principio) hasta el infinito (sin tener en cuenta efectos relativistas al aproximarse a la velocidad de la luz). En la práctica, la cantidad de combustible limita la velocidad máxima, así como los problemas que incluso pequeñas partículas pueden causar al impactar con la nave a altas velocidades.

b) El reloj Omega Speedmaster que los astronautas utilizan especifica en su catálogo que puede soportar profundidades de hasta 30m. En el caso de encontrar agua líquida en Marte, los astronautas realizarán misiones subacuáticas. ¿Qué profundidad soportará el reloj en el planeta rojo? Justificar. (40%)

Los 30m de profundidad del Speedmaster están calculados en la tierra teniendo en cuenta:

1. El peso específico del agua en la Tierra
2. La presión atmosférica a nivel del mar en la Tierra

En el caso de Marte, la presión atmosférica máxima es de 900Pa (frente a los 101325Pa en la Tierra).

En cuanto al peso específico del agua, será menor (aunque la densidad sea la misma, la fuerza de la gravedad es tan sólo de 3,71 m/s^2). Por lo tanto la presión que generará una columna de agua será también menor.

En definitiva, la presión absoluta que podrá soportar el Omega en **cualquier** lugar del universo sería:

$P_\Omega = P_{atm} + P_{30m} = P_{atm} + \rho*g*h = 101325 + 1000*9.81*30 = 395625$ Pa

En el caso de Marte,

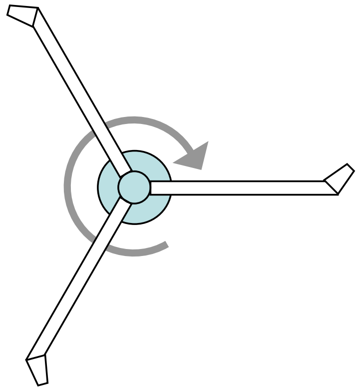
$P_\Omega = 395625$ Pa $= P_{atm} + P_{hm} = 900 + 1000*3.71*h$

$h = (395625-900) / 3710 = 106.39$ m

Datos de Marte (fuente: Wikipedia)

Diámetro ecuatorial : 6.794,4 km		
Área superficial: 144 millones km^2		
Masa: 6,4191 × 1023 kg		
Densidad media 3,94 g/cm^3		
Gravedad superficial 3,71 m/s^2		
Temperatura superficial		
mín.	media	máx.
186 K	227 K	268 K
-87 °C	-46 ºC	-5 °C[1
Presión atmosférica: 0,7-0,9 kPa		

c) Se pretende estudiar la posibilidad de instalar invernaderos piloto en Marte, en los que los cultivos se rieguen mediante aspersores como el de la figura. ¿Variará el funcionamiento con respecto a la Tierra? Argumentar. (30%)



El movimiento de los aspersores también se origina en el intercambio de la cantidad de movimiento. Por tanto es la masa del agua, la que al ser expulsada a una cierta velocidad, hace que rote el aspersor.

En Marte, la densidad del agua sigue siendo la misma. Por lo tanto, un mismo aspersor alimentado por un mismo caudal rotará a la misma velocidad (funcionará igual) en la Tierra que en Marte en principio.

Posibles diferencias pueden venir dadas por un rozamiento distinto con el aire (posiblemente mucho menor en Marte) que podría reducir el par resistente al giro, o incrementar la distancia a la que llega el agua una vez deja el aspersor.

Otras posibles diferencias menores podrían estar relacionadas con la menor gravedad en el planeta rojo (que en casos muy particulares pudiera afectar al par resistente al giro –según construcción-).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

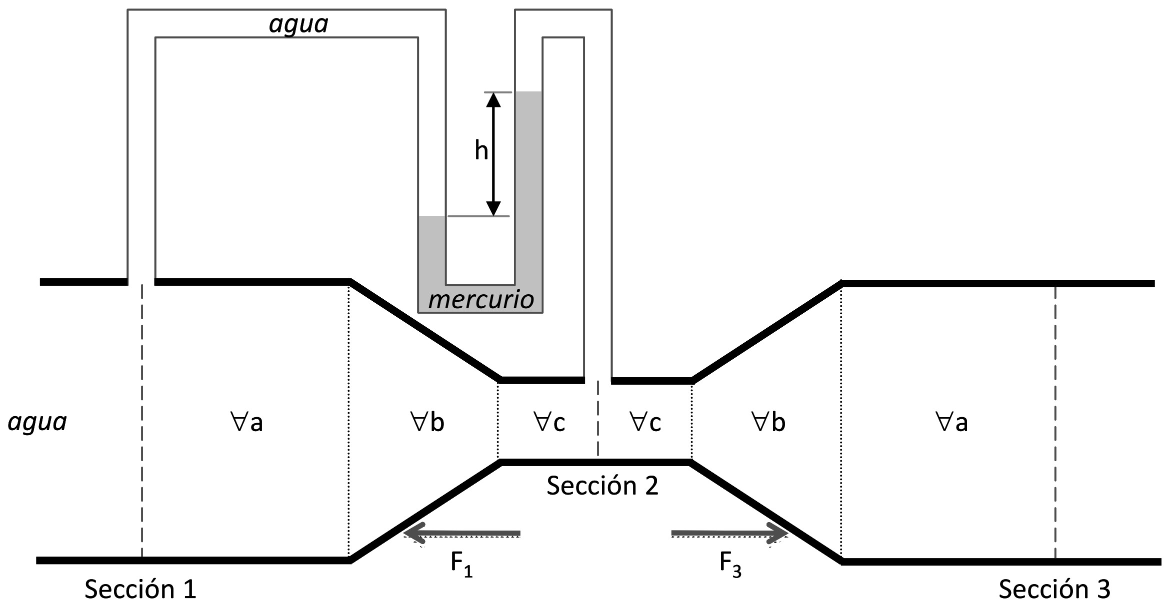
Examen de Mecánica de Fluidos
Martes 2 de junio de 2009

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Problema 1 (33,33%)

El venturi de la figura está equipado con un manómetro diferencial que permite relacionar el caudal con la diferencia de presión que registra. Inicialmente circula un caudal de 8 l/s y en un minuto aumenta, con una variación lineal, hasta 16 l/s. Sabiendo que:

- El flujo es ideal (no hay pérdidas).
- Densidades: ρ_{agua} = 1000 kg/m^3; $\rho_{mercurio}$ = 13600 kg/m^3.
- La presión en la Sección 1 es constante, P_1 = 2 bar (manométrica).
- Diámetros: D_1 = 200 mm; D_2 = 80 mm; D_3 = 200 mm.
- El venturi es simétrico, y cada mitad del mismo se divide en tres volúmenes distintos:
  - $\forall$a tiene 1 m^3, y la velocidad en el mismo es v_1.
  - $\forall$b tiene 0,5 m^3, y se asume que la velocidad del agua en el mismo es $(v_1+v_2)/2$.
  - $\forall$c tiene 0,5 m^3, y la velocidad del agua en el mismo es v_2.



Se pide calcular:

a) La evolución de la diferencia de presión $P_1 - P_2$ (en bares) en función del tiempo durante el minuto en que el caudal varía. Para este apartado, despreciar las inercias del sistema.

b) La altura h que registra el manómetro diferencial durante el tiempo en que varía el caudal.

c) Determinar las fuerzas horizontales F_1 y F_3 necesarias para evitar que el sistema se mueva. (aplicar la ecuación de cantidad de movimiento a los volúmenes de control respectivos, el primero limitado por las secciones 1 y 2 y el segundo por las secciones 2 y 3) durante el minuto que dura el transitorio. ¿Se compensan? Interpretar los resultados.

Problema 2 (33,33%)

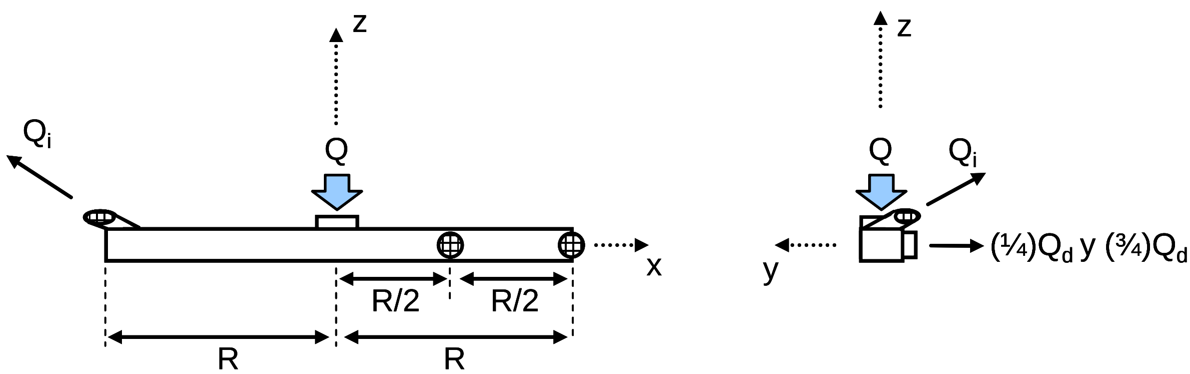
El aspersor de la figura tiene la entrada de agua en su parte superior, alineada con su eje de giro (eje z). El caudal entrante Q, se divide en dos partes no iguales, una por cada brazo:

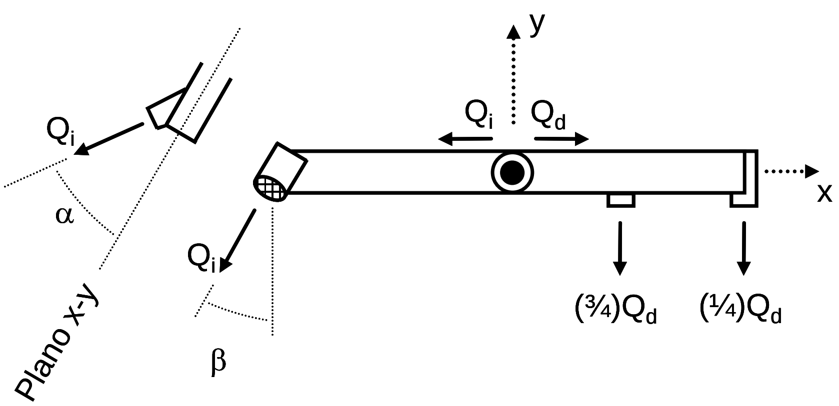
- El caudal que entra en el brazo izquierdo, Q_i, sale íntegramente por una boquilla situada al final del mismo, que está orientada un ángulo α con respecto al plano horizontal (x-y) y un ángulo β con respecto al plano vertical (y-z) perpendicular al propio brazo del aspersor.

- Del caudal que entra en el brazo derecho, Q_d, tres cuartas partes (¾ Q_d) salen por una primera boquilla horizontal situada a la mitad del brazo y el resto (¼ Q_d) sale por una segunda boquilla horizontal situada en el extremo del mismo brazo.

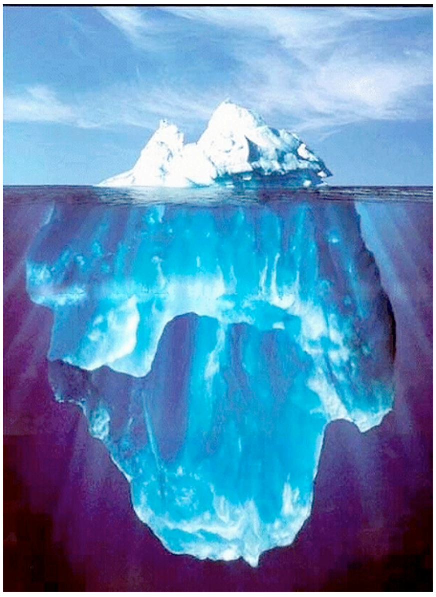
Datos: caudal entrante Q, longitud de cada brazo R, área transversal de cada brazo A, área de cada boquilla de salida A_s, densidad del agua ρ.

Si no hay par de anclaje, pero al mismo tiempo se desea que el aspersor no gire, se pide calcular cuál tiene que ser entonces el caudal que derive por cada brazo (el resultado debe ser una expresión para Q_i y otra para Q_d).





Cuestiones (33,33%)

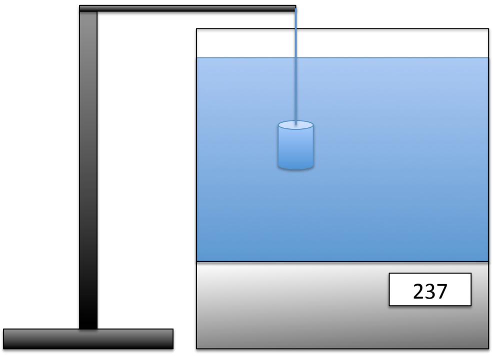


a) La punta del iceberg: El volumen de iceberg que asoma por encima de la superficie del agua es mucho menor que el que permanece sumergido.
1. Determinar qué porcentaje representa la punta del iceberg.

2. El iceberg se hunde al aplicar un peso de 360 Kg sobre el mismo. Calcular la masa del iceberg.

Densidad del hielo a 0ºC: 0.9167 g/cm^3
Densidad del agua de mar: 1020 kg/m^3

b) Un bloque de acero de $20cm^3$ de volumen se introduce en un recipiente con agua que reposa en una bascula electrónica. El bloque cuelga de un hilo de nylon que lo mantiene sin tocar el fondo del recipiente. El recipiente pesa 37 g. y la báscula marca 237 g. ¿Qué cifra marca la báscula cuando retiramos el bloque de acero?



Si una vez retirado el bloque de acero metemos el dedo índice en el agua ¿variará la lectura de la báscula?¿Cuánto?

c) Listar en qué casos y con qué condiciones pueden aplicarse las ecuaciones de Couette y Hagen-Poiseuille.

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\,d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\vec{V}_r\,d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$ Ec

uaEcuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\,d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo de Couette

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Expresiones del Flujo de Hagen Poiseuille

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

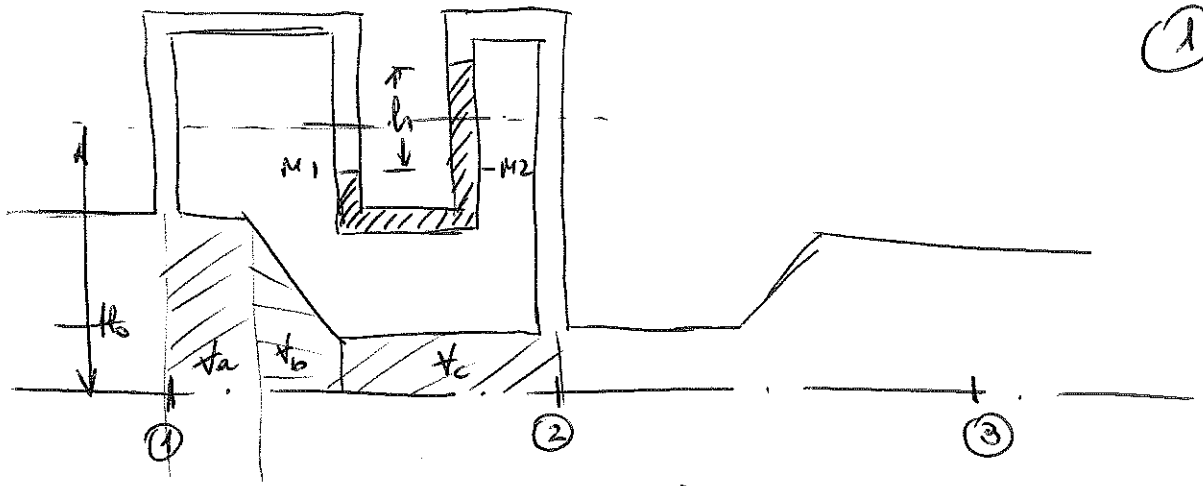
Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

(1)



$\forall_a = 1\ m^3$, velocidad flujo $\vec{V}_1$

$\forall_b = 0{,}5\ m^3$, velocidad flujo $\sim \dfrac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2}$ $\qquad p_1 = 2$ bares

$\forall_c = 0.5\ m^3$, velocidad flujo $\vec{V}_2$

a) Cálculo $\Delta p = p_1 - p_2$

Bernoulli entre 1 y 2 (sin fricción)

$$\frac{p_1}{\gamma} + \cancel{z_1} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \cancel{z_2} + \frac{V_2^2}{2g} \qquad z_1 = z_2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{\rho}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{\rho Q^2}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

$$\boxed{\Delta p = \frac{\rho Q^2}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)}$$

$$Q(t) = Q_0 + \frac{Q_f - Q_0}{\Delta t}\cdot t = 8\left(1 + \frac{t}{60}\right) l/s \quad \text{válido para } \underline{0 \le t \le 60}$$

luego $$\Delta p(t) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)\left[8 \times 10^{-3}\left(1 + \frac{t}{60}\right)\right]^2 \frac{Nw}{m^2}$$

$$\Delta p(t) = \frac{500 \times 16}{\pi^2}\left(\frac{1}{0{,}08^4} - \frac{1}{0.2^4}\right) 64 \times 10^{-6}\left(1 + \frac{t}{60}\right)^2 \frac{Nw}{m^2}$$

$$\boxed{\Delta p(t) = 1234\left(1 + \frac{t}{60}\right)^2 \frac{Nw}{m^2}}$$

En el instante inicial $t = 0$ $\Delta p = 1234 \ Nw/m^2$ (2)

" " " final $t = 60$ $\Delta p = 4396 \ Nw/m^2$

(b) Para calcular en el manómetro diferencial la altura h del mercurio hay que igualar las presiones de dos puntos al mismo nivel y unidos por un mismo líquido, el mercurio.

Se tiene, pues: $p_{M1} = p_{M2}$

$$p_{M1} = p_1 - \gamma_a H_0 + \frac{h}{2}\gamma_a = p_2 - \gamma_a H_0 - \gamma_a \frac{h}{2} + \gamma_m h$$

Despejando h, resulta $h = \dfrac{p_1 - p_2}{\gamma_m - \gamma_a} = \dfrac{\Delta p}{\gamma_m - \gamma_a}$

Por tanto $h = \dfrac{1234\left(1 + \frac{t}{60}\right)^2}{12\,600 \times 9.81} \ m = 9.98\left(1 + \frac{t}{60}\right)^2 \ mm \ Hg$

En los instantes extremos $t = 0$ $h = 9.98 \ mm \ Hg$

$t = 60$ $h = 39.92 \ mm \ \underline{Hg}$

(c) Hay que aplicar la ecuación de CM sobre el volumen de control. El régimen es NO ESTACIONARIO

Calculemos cada uno de los tres términos

$$\Rightarrow \sum \vec{F}\Big)_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_1 = \cancel{2\frac{\pi\, 0.2^2}{4}}$$

$$= p_1 A_1 - (p_1 - \Delta p) A_2 - F_1 = p_1 (A_1 - A_2) - \Delta p A_2 - F$$

$$\Sigma F = 2 \times 10^5 \ \frac{\pi}{4}\left(0.2^2 - 0.08^2\right) - \frac{\pi}{4} 0.08^2 \times 1234\left(1 + \frac{t}{60}\right)^2 - F_1 =$$

$$= \boxed{\left[5277{,}88 - 6{,}20\left(1 + \frac{t}{60}\right)^2 - F\right] Nw = \sum \vec{F}\Big)_x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(M_{vc}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} v\,\rho\, d\forall = \frac{d}{dt}\left[V_1 \cdot \rho\,\forall_a + \frac{V_1+V_2}{2}\cdot\rho\,\forall_b + V_2\,\rho\,\forall_c\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\, V_1\left(\forall_a + \frac{\forall_b}{2}\right) + \rho\, V_2\left(\frac{\forall_b}{2} + \forall_c\right)\right] = \rho\,\frac{d}{dt}\left[\frac{Q}{A_1}\left(\forall_a + \frac{\forall_b}{2}\right) + \frac{Q}{A_2}\left(\forall_b/_2 + \forall_c\right)\right]$$

$$= \rho\left(\frac{\forall_a + \forall_b/2}{A_1} + \frac{\forall_b/2 + \forall_c}{A_2}\right)\frac{dQ}{dt}$$, sustituyendo:

$$1000\left(\frac{1+0.25}{\pi\,\frac{0.2^2}{4}} + \frac{0{,}25+0{,}5}{\frac{\pi\times 0.08^2}{4}}\right)\frac{d}{dt}\left[0{,}008\left(1+\frac{t}{60}\right)\right] \ Nw =$$

$$= \cancel{129{,}000} = 1511{,}97\ \frac{1}{60}\ Nw = \boxed{25{,}20\ Nw = \frac{d}{dt}\left(M_{vc}\right)}$$

$$\Rightarrow \rho\, Q\left(V_2 - V_1\right) = \rho\, Q^2\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right) = \rho\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right) 64\times 10^{-6}\left(1+\frac{t}{60}\right)^2 =$$

$$= 10{,}70\left(1+\frac{t}{60}\right)^2\ Nw$$

Por tanto la ecuación de CM queda:

$$5277{,}88 - 6{,}20\left(1+\frac{t}{60}\right)^2 - F = 25{,}20 + 10{,}70\left(1+\frac{t}{60}\right)^2$$

y el valor de F queda:

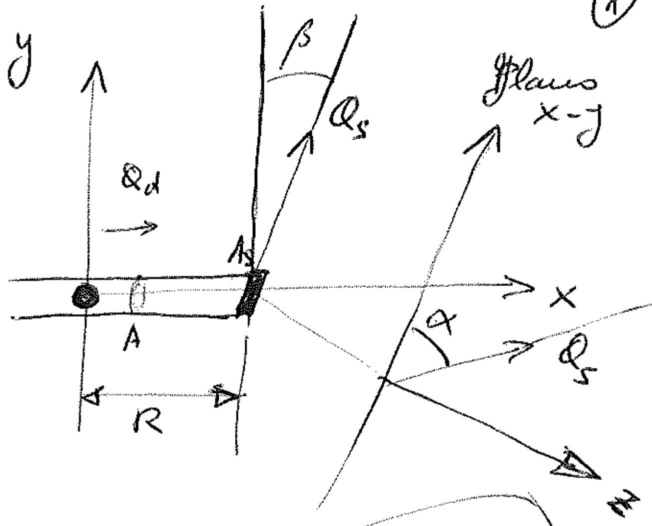
$$\boxed{F_1 = 5252{,}68 - 16{,}90\left(1+\frac{t}{60}\right)^2}\ Nw$$

en $t=0$ $\quad F_1 = 5235{,}78$ Nw || En el sentido supuesto.

en $t=60$ $\quad F_1 = 5185{,}08$ Nw

OBVIAMENTE, AL NO HABER PERDIDAS $F_1(t) = F_3(t)$ y la resultante sobre el reductor es nula!!

Problema Aspersor



Brazo derecho

(Aspersor sin giro)

$$\frac{d}{dt}\int_{VC}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho\, d\forall = \left| \begin{array}{l} \vec{r} = x\vec{i} \\ \vec{v} = \frac{Q}{A}\vec{i} \end{array} \right| = 0 .$$

Qd y Qi están intercambiados con respeto al enunciado.

$$\int_{SC}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho(\vec{v_{rsc}}\cdot\vec{dA}) = \left| \begin{array}{l} \vec{r} = R\vec{i} \\ \vec{v} = \frac{Q_d}{A_s}\left(\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\,\vec{i} + \cos\alpha\cos\beta\,\vec{j} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{K}\right) \\ (\vec{v_{rsc}}\cdot\vec{dA}) = dQ \end{array} \right| =$$

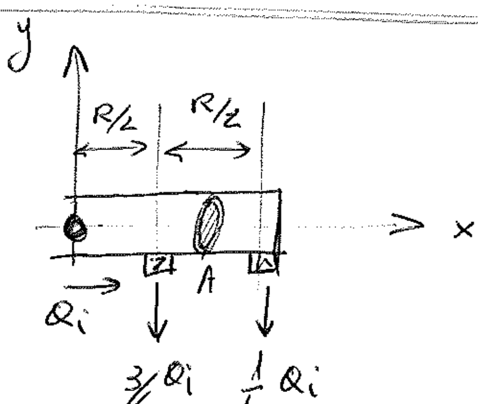
$$= \vec{r}\wedge\vec{v} = \frac{R Q_d}{A_s}\left(\cos\alpha\cos\beta\,\vec{K} - \cancel{\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}}\right)$$

No influye en el giro.

$$\int_{SC}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho(\vec{v_{sc}}\cdot\vec{dA}) = \rho\frac{R Q_d}{A_s}\cos\alpha\cos\beta\,\vec{K}\int_{A_s} dQ = \rho\frac{R Q_d^2}{A_s}\cos\alpha\cos\beta\,\vec{K} .$$

Brazo izquierdo

(Aspersor sin giro)



$$\frac{d}{dt}\int_{VC}\vec{r}\wedge\vec{v}\,\rho\, d\forall = 0$$

(igual que antes)

$$\int_{SC} (\vec{r} \wedge \vec{v})\, \rho (\vec{v}_{sc} \cdot \vec{dA}) = \int_{\substack{\text{Boquilla} \\ \text{intermedia}}} + \int_{\substack{\text{Boquilla} \\ \text{Extremo.}}}$$

$$\int_{\substack{\text{Boquilla} \\ \text{intermedia}}} = \left| \begin{array}{l} \vec{r} = \frac{R}{2} \vec{i} \\ \vec{v} = \frac{3Q_i/4}{A_s} (-\vec{j}) \end{array} \right| = \int_{A_s} \frac{R}{2} \vec{i} \wedge \frac{3Q_i}{4A_s} (-\vec{j}) \Big) \rho\, dQ =$$

$$= -\frac{3RQ_i}{8A_s} \vec{K} \rho \frac{3Q_i}{4} = \frac{-9\rho R Q_i^2}{32 A_s}.$$

$$\int_{\substack{\text{Boquilla} \\ \text{extremo}}} = \left| \begin{array}{l} \vec{r} = R \vec{i} \\ \vec{v} = \frac{Q_i/4}{A_s} (-\vec{j}) \end{array} \right| = \int_{A_s} R \vec{i} \wedge \frac{Q_i}{4A_s} (-\vec{j}) \Big) \rho\, dQ =$$

$$= -\frac{RQ_i}{4A_s} \vec{K} \rho \frac{Q_i}{4} = \frac{-\rho R Q_i^2}{16 A_s}$$

$$= \frac{-\rho R Q_i^2}{A_s} \left(\frac{9}{32} + \frac{1}{16} \right) = \frac{-11}{32} \rho \frac{R Q_i^2}{A_s}.$$

Asporsor completo.

$$\cancel{\Sigma \vec{M}_{ext}}^{\,0} = \cancel{\frac{d}{dt} \int_{VC} (\vec{r} \wedge \vec{v})\, \rho\, d\forall}^{\,0} + \int_{SC} (\vec{r} \wedge \vec{v})\, \rho (\vec{v}_{sc} \cdot \vec{dA})$$

$$0 = \frac{\cancel{\rho} \cancel{R} Q_d^2}{\cancel{A_s}} \cos\alpha \cos\beta - \frac{11}{32} \cancel{\rho} \frac{\cancel{R} Q_i^2}{\cancel{A_s}}$$

$$\boxed{Q_d^2 \cos\alpha \cos\beta = \frac{11}{32} Q_i^2} \leftarrow$$

Relación entre los caudales Q_i y Q_d para que no gire.

Ecuación continuidad: $Q = Q_i + Q_d$.

Ec. conserv. momento cinético: $Q_d^2 \cos\alpha \cos\beta = \frac{11}{32} Q_i^2$

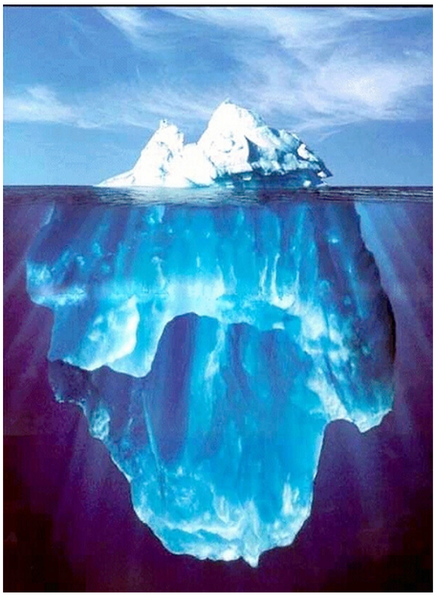
$$Q_i = Q - Q_d$$

$$Q_d^2 \cos\alpha \cos\beta = \frac{11}{32} \left(Q - Q_d\right)^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Q_d \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \frac{32}{11}} = Q - Q_d \longrightarrow \boxed{Q_d = \frac{Q}{1 + \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \frac{32}{11}}}}$$

$$\boxed{Q_i = \frac{Q \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \frac{32}{11}}}{1 + \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \frac{32}{11}}}}$$

Cuestiones (33,33%)



a) **La punta del iceberg**: El volumen de iceberg que asoma por encima de la superficie del agua es mucho menor que el que permanece sumergido.
1. Determinar qué porcentaje representa la punta del iceberg.

2. El iceberg se hunde al aplicar un peso de 360 Kg sobre el mismo. Calcular la masa del iceberg.

Densidad del hielo a 0ºC: 0.9167 g/cm^3
Densidad del agua de mar: 1020 kg/m^3

1.

La condición de flotación del iceberg es Peso = Empuje

Peso = $\gamma_{Hielo} * Vol_{total} = 916,7 * 9,8 * Vol_{total}$

Empuje = $\gamma_{agua} * Vol_{sumergido} = 1020 * 9,8 * Vol_{sumergido}$

Despejando:

$Vol_{sumergido} = (\gamma_{Hielo} * Vol_{total} / \gamma_{agua}) = = (\gamma_{Hielo} / \gamma_{agua}) * Vol_{total}$ **=**

= $(916,7/1020) *Vol = 0,8987 * Vol_{total} = 89,87\% \ Vol_{total}$

La punta del iceberg, que es el volumen no sumergido, supone el **$10,13\% \ Vol_{total}$**

2.

Si el iceberg se hunde con 360 Kg, el empuje tendrá que equilibrar el peso total del iceberg (incluyendo el propio y los 360 Kg) cuando el iceberg esté totalmente sumergido. Por lo tanto

Empuje = $\gamma_{agua} * Vol_{sumergido} = \gamma_{agua} * Vol_{total} = 1020 * 9,8 * Vol_{total}$

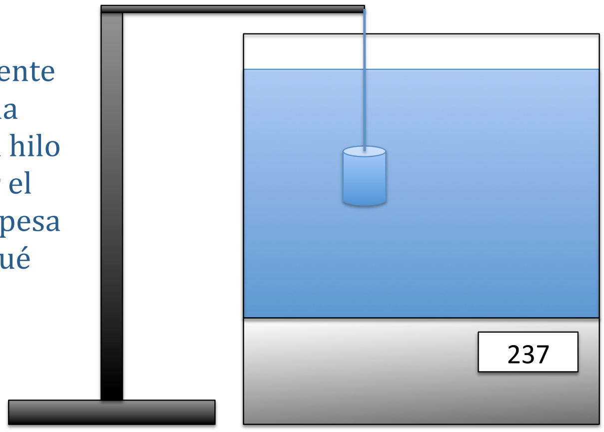
$Peso_{total} = 360*9,8 + \gamma_{Hielo} * Vol_{total} = 360 * 9,8 + 916,7 * 9,8 * Vol_{total}$

Peso = Empuje → $Vol_{total} * (1020 - 916,7) = 360;$

$Vol_{total} = 3,485 \ m^3$

masa Iceberg = $Vol_{total} * \gamma_{Hielo} = 3{,}485 * 916{,}7 =$ **3194,69kg**

b) Un bloque de acero de 20cm³ de volumen se introduce en un recipiente con agua que reposa en una bascula electrónica. El bloque cuelga de un hilo de nylon que lo mantiene sin tocar el fondo del recipiente. El recipiente pesa 37 g. y la báscula marca 237 g. ¿Qué cifra marca la báscula cuando retiramos el bloque de acero?



Si una vez retirado el bloque de acero metemos el dedo índice en el agua ¿variará la lectura de la báscula?¿Cuánto?

Al introducirse el bloque dentro del recipiente, el nivel del agua sube. Por lo tanto, la presión en el fondo del mismo habrá aumentado. La fuerza que ese aumento de presión genera es la misma fuerza que el agua le transmite al bloque (es decir, el empuje debido al desalojo de 20 cm^3 de volumen).

Para verlo de otro modo, la fuerza ascendente que el agua ejerce sobre el bloque crea una reacción hacia abajo que registra la báscula.

Por lo tanto el empuje equivalente será el del peso de 20g (20 cm^3) de agua.

La báscula marcará el total del peso del agua, el recipiente y la fuerza adicional ya mencionada expresada en gramos:

Lectura (antes) = $37 + masa_{agua} + 20$;

$237 = 37 + masa_{agua} + 20$

$masa_{agua} = 180$ g

Lectura después = masa agua + masa recipiente = 37 + 180 = **217 g**

Una vez retirado el bloque, y por la misma razón, la báscula marcará mayor peso conforme se introduzca un mayor volumen en el recipiente. En concreto, la cifra de la báscula será igual a 217 g más una masa igual al volumen introducido en cm^3.

c) Listar en qué casos y con qué condiciones pueden aplicarse las ecuaciones de Couette y Hagen-Poiseuille.

Las ecuaciones mencionadas pueden aplicarse en las condiciones derivadas de su demostración en clase:

- Flujo laminar
- Régimen estacionario
- Flujo no ideal (efectos viscosos relevantes)
- Fluido incompresible

Couette

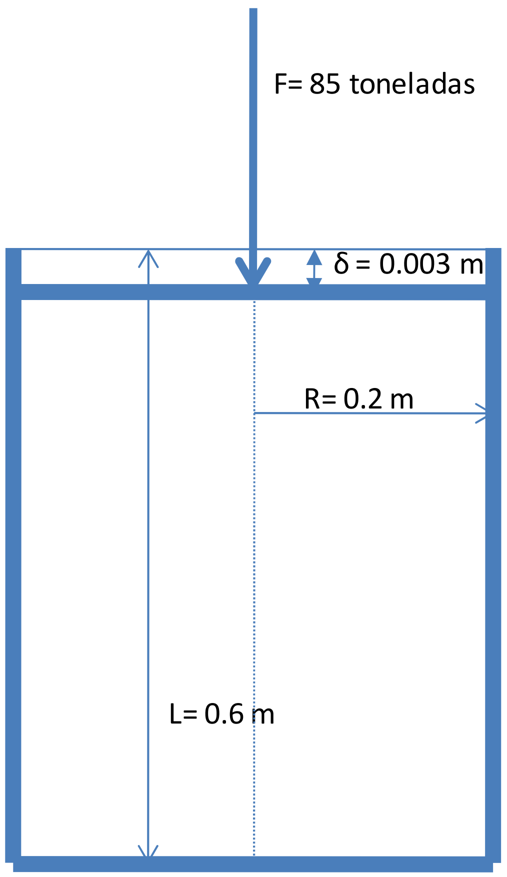
- Flujo plano con dimensiones infinitas en la dirección x

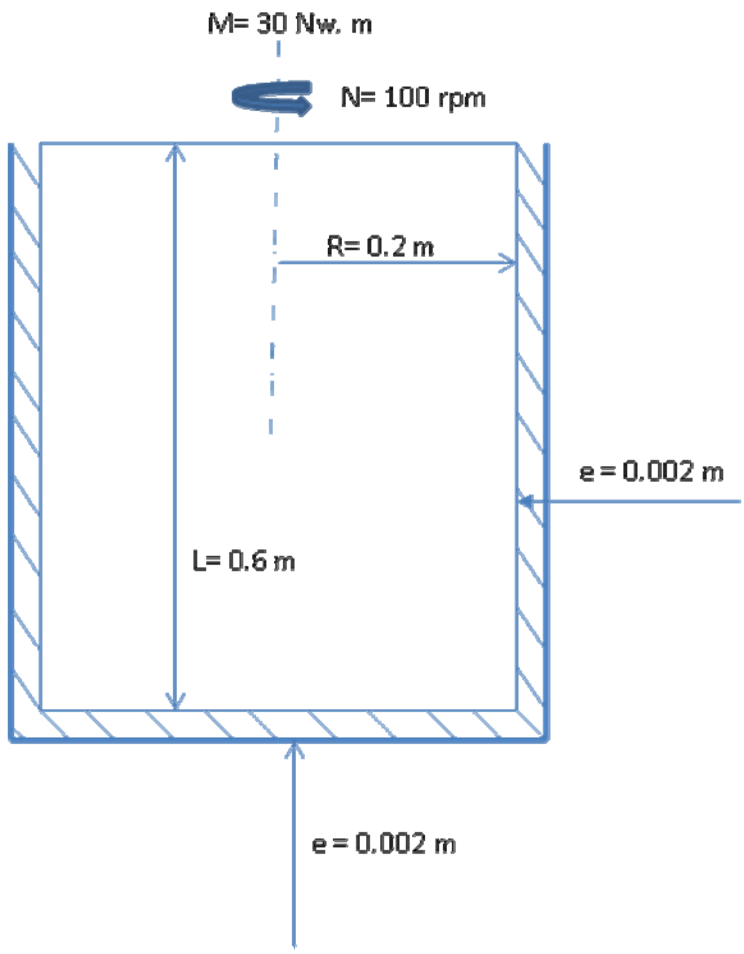
Hagen Poiseuille

- Flujo cilíndrico con dimensiones infinitas en la dirección x

Problema 1 (33,33%)

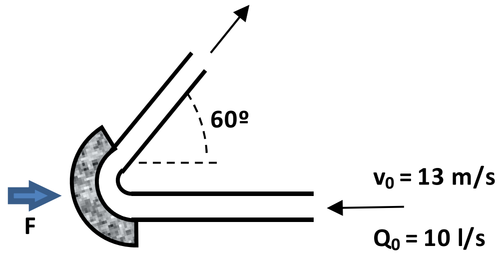
Determinar el módulo elástico K y la viscosidad μ de un fluido a partir de las figuras adjuntas. La primera (izquierda) muestra el desplazamiento de la tapadera de un cilindro lleno del fluido a caracterizar al aplicar la fuerza que se indica. La segunda muestra un viscosímetro cilíndrico, con una capa de fluido uniforme (tanto en los laterales como en el fondo) de 2 mm de espesor y sabiendo que cuando gira a la velocidad N para vencer el rozamiento hay que aplicar el par M. La distribución de velocidades del fluido tanto en los laterales como en el fondo es lineal.



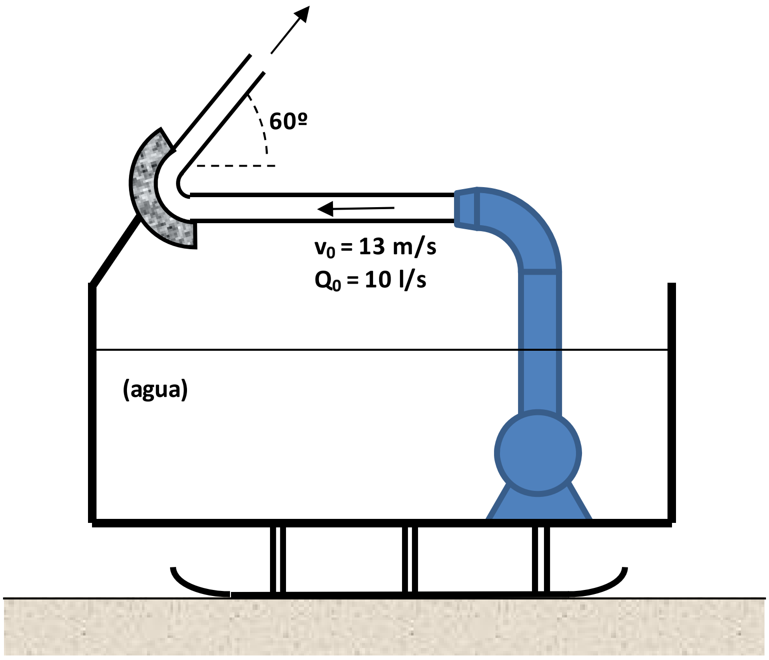


Problema 2 (33,33%)

a) Según la figura adjunta, se pide calcular cuál es el valor de la fuerza F necesaria para impedir que el álabe sea desplazado, en horizontal, por efecto del chorro de agua.



b) Un trineo, de masa en vacío 50 kg, está cargado con 400 litros de agua. Se desea poner en movimiento dicho trineo acoplándole los conjuntos de bomba y álabe que sean necesarios (la figura muestra su funcionamiento). Si la masa de cada conjunto de bomba y álabe es de 12 kg y el coeficiente de rozamiento del trineo con el suelo es de $\mu = 0{,}02$, se pide calcular el número mínimo de conjuntos necesarios para poner en marcha el trineo.



c) Finalmente se instalan en el trineo 5 conjuntos de bomba y álabe. En ese caso, se pide calcular qué aceleración tendrá el trineo en el momento en que se termine el agua contenida en el mismo.

Notas:
- Despreciar el rozamiento del agua con el álabe.
- Despreciar el movimiento del agua en el interior de cualquier volumen de control que se tome.
- Calcular la fuerza de rozamiento como $F_r = \mu$*Peso

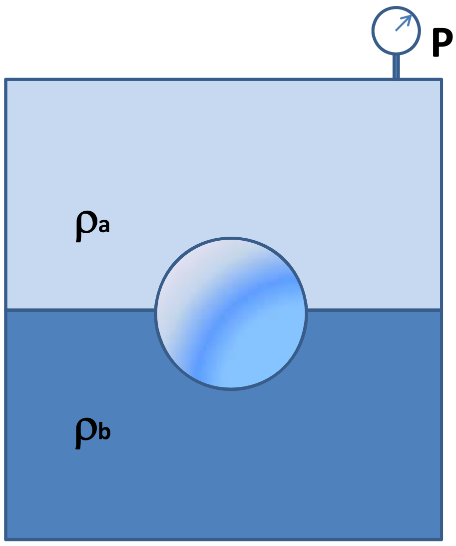
Problema 2 (33,33%)

a) Obtener el caudal y la velocidad media del fluido que atraviesa una tubería circular de diámetro 160mm a partir del siguiente campo de velocidades con r y V expresadas en m:

$$V(r) = 0{,}006 \cdot \left(1 - \frac{1000 \cdot r^2}{64}\right)$$

b) Determinar la masa que tiene que tener la esfera (de radio R) de la figura para mantenerse en equilibrio dentro del tanque, con media esfera en el líquido a y la otra en el líquido b. El tanque está presurizado a presión relativa P.

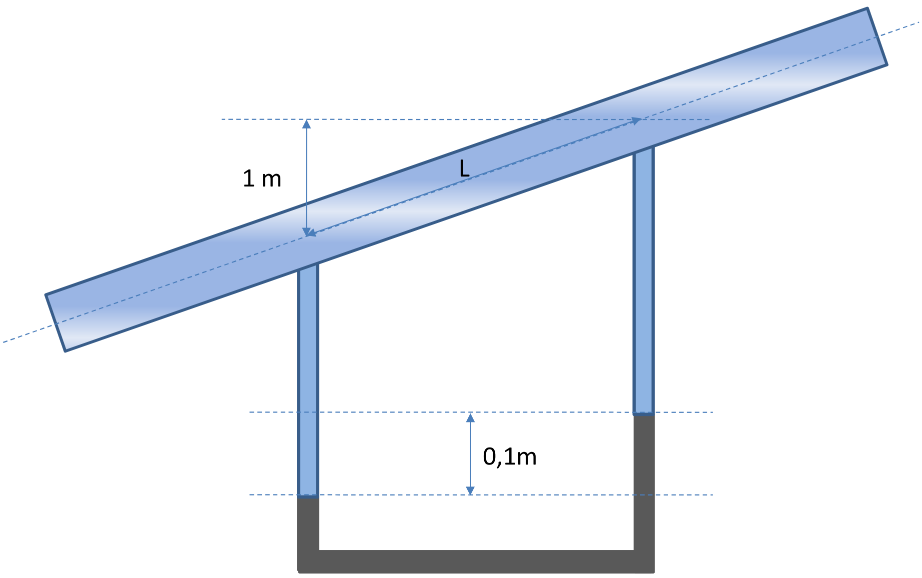
Datos: ρ_a, ρ_b, P, R (unidades en S.I.)
Nota: $\rho_a > \rho_b$



c) Determinar la longitud L que debería tener la tubería de la figura entre los dos puntos de toma del manómetro diferencial mercurio-agua, sabiendo que el factor de fricción es f=0,02, el diámetro es de 80mm y la velocidad del agua en la tubería de 0,7 m/s. Las pérdidas de carga pueden calcularse con la expresión de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

γ_{Hg}=13600 Kp/m^3



d) EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho \vec{h} d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$ Ecua

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo de Couette

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Expresiones del Flujo de Hagen Poiseuille

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

PRIMERA PARTE

$$k = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \qquad \Delta p = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{85 \times 9.81 \times 10^3 \ Nw}{\pi \ 4 \cdot 10^{-2} \ m^2}$$

$$\Delta p = \frac{85 \times 9.81}{4\pi} \cdot 10^5 \frac{Nw}{m^2} = 6{,}64 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$$

$$-\frac{\Delta V}{V} = +\frac{x \pi R^2}{L \pi e^2} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-1}} = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$k = \frac{6{,}64 \cdot 10^{+6}}{5 \cdot 10^{-3}} = \boxed{1.32 \cdot 10^9 \ \frac{Nw}{m^2} = K}$$

SEGUNDA PARTE

La viscosidad fuerza y provoca un rozamiento a vencer.

El de la pared lateral y el del fondo del cilindro

Cálculo del par de rozamiento en la pared lateral

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{\omega \cdot R - 0}{e} \Rightarrow F = \tau \cdot A_L = \mu \frac{\omega R}{e} \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$M_L = F \times R = \mu \frac{\omega R}{e} 2\pi R L \cdot R = \mu \frac{\omega \pi}{e} 2 L R^3$$

En el fondo de tiene (el radio es variable)

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{\omega r}{e} \Rightarrow dF = \mu \frac{\omega r}{e} 2\pi r \, dr$$

$$dM = dF \cdot r = \left(\mu \frac{\omega}{e} 2\pi r^2 dr\right) \cdot r$$

$$M_F = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e} 2\pi r^3 dr = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4} = \mu \frac{\omega}{e} \pi \frac{R^4}{2}$$

El par total tiene

$$M_T = F_F + M_L = \mu \frac{\omega}{e} \pi \frac{R^4}{2} + \mu \frac{\omega \pi}{e} 2 L R^3 =$$

$$= \mu \frac{\pi \omega}{e} \left(\frac{R^4}{2} + 2 L R^3 \right)$$

Y por tanto $$\mu = \frac{M_T}{\frac{\pi \omega}{e} \left(\frac{R^4}{2} + 2 L R^3 \right)}$$

Con $\omega = \frac{2\pi N}{60}$ con ω en $\frac{rad}{s}$ y N en rpm

$$\mu = \frac{M_T}{\frac{2\pi^2 N}{60} \frac{1}{e} \left(\frac{R^4}{2} + 2 L R^3 \right)}$$

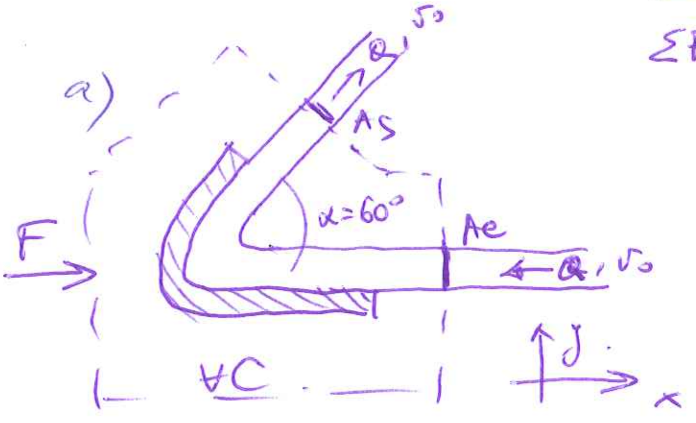
Sustituyendo

$$\mu = \frac{30}{\frac{2\pi^2 100}{60} \frac{1}{e} \left(8 \cdot 10^{-4} + 1{,}2 \times 8 \times 10^{-3} \right)} \frac{kg}{m\,s}$$

$$\mu = \frac{30}{\frac{\pi^2 10}{3} \cdot \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \times 104 \times 10^{-4}} \frac{kg}{m\,s} = 0.175 \frac{kg}{m\,s}$$

PROBLEMA

a)



$$\sum \vec{F}_{ext} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \vec{v}\, \rho\, d\forall}^{\,0} + \int_{SC} \vec{v}\, \rho\, \vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA}.$$

$$\sum \vec{F} = F\, \vec{i}.$$

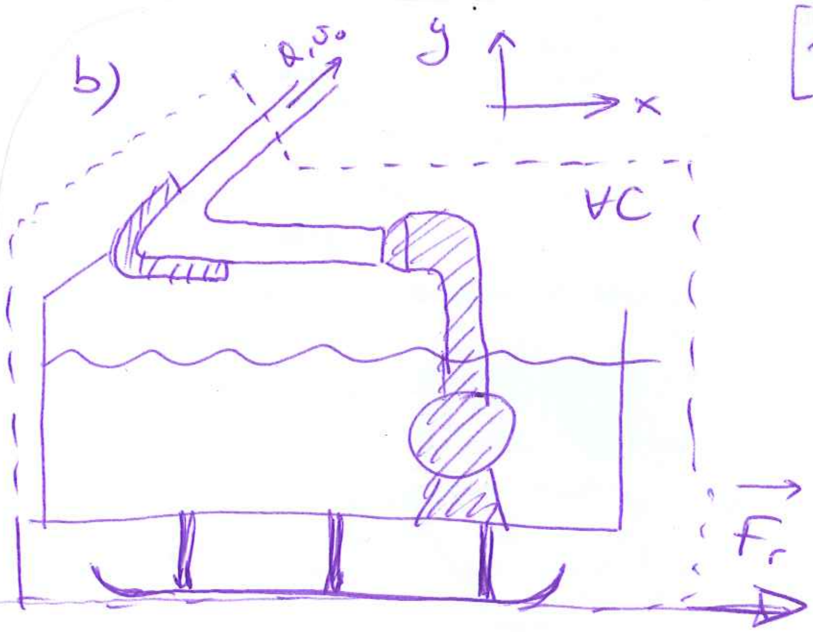
$$\int_{SC} \vec{v}\, \rho\, \vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA} = \rho Q \left(\vec{v_s} - \vec{v_e} \right).$$

Trabajando sólo en el eje horizontal:

$$F = \rho Q v_0 \left(\cos\alpha - (-1) \right) = 1000 \cdot 0'01 \cdot 13\, (1'5) =$$

$$F = 195\ N.$$

b)



[$n \equiv$ nº de conjunto bomba y álabe]:

En el inicio del movimiento:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{1} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \vec{v}\, \rho\, d\forall}^{\,0} + \underbrace{\int_{SC} \vec{v}\, \rho\, \vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA}}_{2}.$$

(1) $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F_r} = F_r\, \vec{i} = \mu N \vec{i} = \mu g\, m_{VC}\, \vec{i} =$

$$= \mu g \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{masa trineo}}}{M_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Masa agua inicial.}}}{m_0} + n \cdot M_{bya} \right] \vec{i}$$

(En el eje horizontal).

② $$\int_{SC} \vec{v}\, \rho\, \vec{v_{rsc}} \cdot \vec{dA} = n \cdot \left[\rho\, Q\, v_0 \cos\alpha \right] \vec{i}.$$

$$\Longrightarrow \mu\, g \left[M_0 + m_0 + M_{bya} \cdot n \right] = n\, \rho\, Q\, v_0 \cos\alpha$$

$$0'1962 \left[540 + 12\, n \right] = n \cdot 1000 \cdot 0'01 \cdot 13 \cdot \cos 60 = 65\, n$$

$\hookrightarrow n = 1'7$

$\Longrightarrow$ Harán falta 2 conjuntos de bomba y álabe para que el trineo se desplace.

c) Ecuación correspondiente al trineo en movimiento, con 5 conjuntos de bomba y álabe y para cualquier instante de tiempo y con el mismo VC que en el apartado b):

$$\underbrace{\sum \vec{F_{ext}}}_{①} - \underbrace{\int_{VC} \ddot{\vec{R}}\, \rho\, dV}_{②} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \vec{v_r}\, \rho\, dV}^{\,0} + \underbrace{\int_{SC} \vec{v_r}\, \rho\, \vec{v_{rsc}} \cdot \vec{dA}}_{③}.$$

① $$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{F_r} = F_r\, \vec{i} = \mu N\, \vec{i} = \mu\, g\, m_{VC}\, \vec{i}.$$

$$= \mu\, g \left[M_0 + m_0 - 5 \cdot \rho\, Q \cdot t + 5 \cdot M_{bya} \right] \vec{i}.$$

$$② \; -\int_{\forall c} \ddot{\vec{R}}\, \rho\, d\forall = \frac{d\vec{u}}{dt}\, m_{\forall c} = \left[-\frac{du}{dt}\, m_{\forall c}\, \vec{i} \right] =$$

$$= \frac{+du}{dt}\left[M_0 + m_0 - 5\rho Q t + 5 \cdot M_{bye} \right] \vec{i}.$$

$$③ \; \int_{SC} \vec{v}_r\, \rho\, \vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA} = 5 \cdot \rho Q \vec{v}_s = 5 \cdot \rho Q v_0 \cos\alpha\, \vec{i}$$

Sólo eje horizontal.

$$\Longrightarrow \left[\mu g + \frac{du}{dt} \right] m_{\forall c} = 5 \rho Q v_0 \cos\alpha.$$

$$\boxed{\left[\mu g + \frac{du}{dt} \right]\left[M_0 + m_0 - 5\rho Q t + M_{bye} \cdot 5 \right] = 5 \rho Q v_0 \cos\alpha.}$$

↳ Ecuación diferencial del movimiento del trineo.

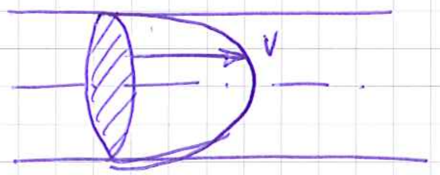
El agua se acaba cuando: $t = \dfrac{400}{5 \cdot \rho Q} = \dfrac{400}{5 \cdot 10^3\, 0'01}$

$t = 8$ segundos.

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=8} = \left.\frac{5\rho Q v_0 \cos\alpha}{M_0 + m_0 - 5\rho Q t + M_{bye} \cdot 5} - \mu g\right|_{t=8} = \boxed{2'76\ m/s^2.}$$

Para $t = 8$

a)



Para obtener el caudal, integraremos el campo de velocidades:

$$Q = \int_0^R \bar{V} \cdot d\vec{A} = \int_0^{0'08} 0'006 \cdot \left(1 - \frac{1000 r^2}{64}\right) 2\pi r \, dr$$

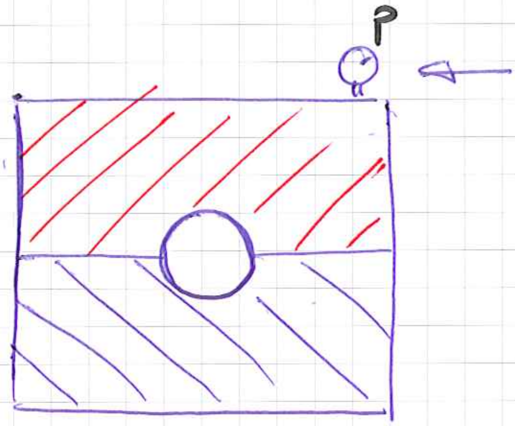
$$= 0'006 \cdot 2\pi \cdot \left[0'08 - \frac{1000 \cdot 0'08^3}{3 \cdot 64}\right] = \boxed{0'0029 \ m^3/s}$$

$$= 2'9 \ l/s$$

$$\boxed{V_m} = \frac{Q}{A} = \frac{0'0029}{\pi \cdot 0'08^2} = \boxed{1'45 \ m/s}$$

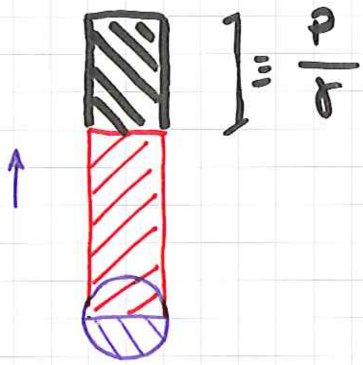
Camino de Vera, s/n. 46022 VALENCIA • Tel. 96 387 71 70 • Fax 96 387 71 79 • E-Mail: etsii@upvnet.upv.es
Asunto: / /

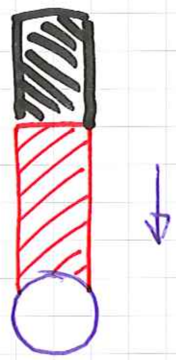
b)



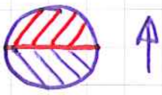
la presión adicional no afecta al resultado final, ya que tanto las fuerzas con sentido ascendente, como las descendentes se verán incrementadas en una misma cantidad:

Fuerza ascendente | Fuerza descendente





NETO :



$$P = F = \gamma_a \cdot \frac{V_e}{2} + \gamma_b \cdot \frac{V_e}{2} = g \cdot \frac{V_e}{2} \left[\rho_a + \rho_b \right] ;$$

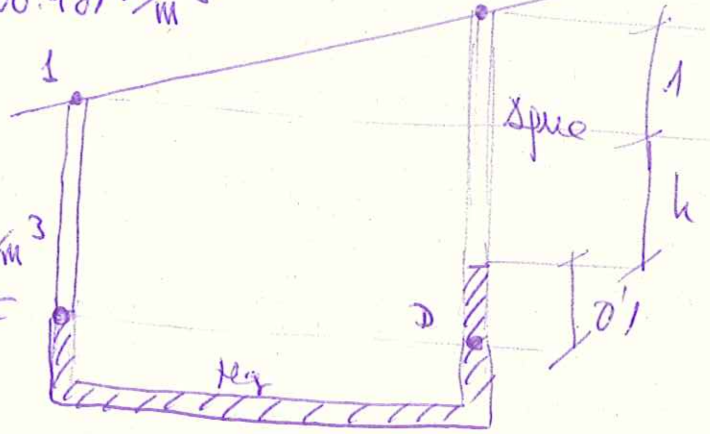
$$P = m \cdot \cancel{g} = \cancel{g} \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{2} \left[\rho_a + \rho_b \right]$$

$$\boxed{m = \frac{2}{3} \pi R^3 \left[\rho_a + \rho_b \right]}$$

c) La diferencia de presión es:

$\gamma_{Hg} = 13600\ kp/m^3 =$
$= 13600 \cdot 9'81\ N/m^3$

$\rho_{Hg} = \frac{\gamma_{Hg}}{g} =$
$= 13600\ kg/m^3$



$P_C = P_D$ (misma horizontal mismo fluido)

$P_C = P_1 + \gamma_{Ag}(h + 0'1)$

$P_D = P_2 + \gamma_{Ag}(1+h) + \gamma_{Hg} \cdot 0'1$

$P_C = P_D \rightarrow P_1 + \gamma_{Ag}(h+0'1) = P_2 + \gamma_{Ag}(1+h) + \gamma_{Hg} \cdot 0'1$

$P_1 - P_2 = \gamma_{Ag}(1 + \cancel{h} - \cancel{h} - 0'1) + \gamma_{Hg} \cdot 0'1 = \rho_{ag} \cdot g\, 0'9 + \rho_{Hg} g \cdot 0'1 =$

$= 10^3 \cdot 9'81 \cdot 0'9 + 13'6 \cdot 10^3 \cdot 9'81 \cdot 0'1 = 22170'6\ Pa$

$\frac{P_1 - P_2}{\gamma_{Ag}} = \frac{22170'6}{9'81 \cdot 10^3} = 2'26$ mca.

Bernouilli entre 1 y 2 $\rightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + h_f$

$\underbrace{\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma}}_{2'26\ mca} = \underbrace{z_2 - z_1}_{1\ m} + h_f \longrightarrow h_f = 2'26 - 1 = \underline{1'26\ mca}$

$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

$1'26 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0'02 \frac{L}{0'08} \frac{0'7^2}{2 \cdot 9'81} \rightarrow L = \frac{1'26 \cdot 0'08 \cdot 2 \cdot 9'81}{0'02 \cdot 0'7^2} = 201'8\ m$

Problema 1 (25%)

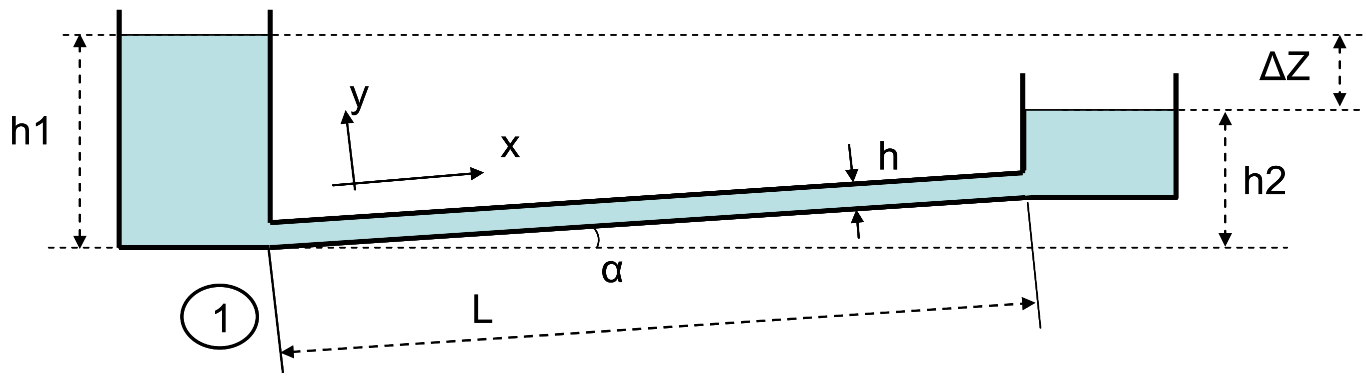
En régimen estacionario circula un fluido entre dos depósitos (ver figura 1). El fluido es trasegado entre dos placas planas paralelas de longitud L = 100 m, separadas ambas una distancia h = 5 cm. El caudal es de 10 l/s/m profundidad (perpendicular al papel).

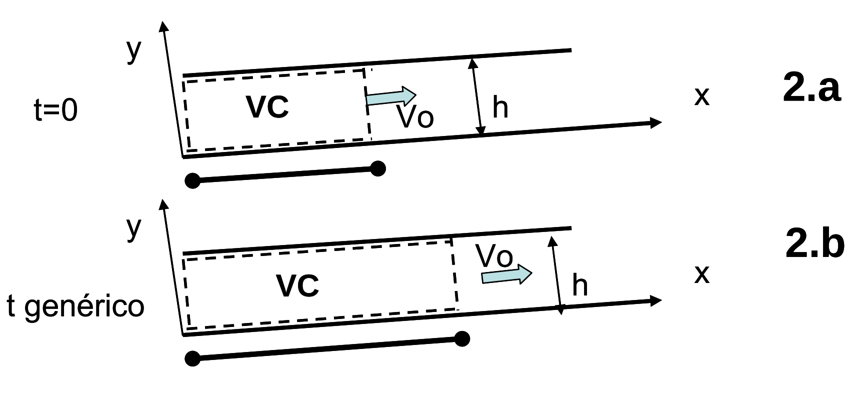
El fluido tiene una densidad de 800 kg/m3 y una viscosidad absoluta μ = 0,04 Poiseuille.

a) Determinar si el flujo es laminar (tomar como longitud característica la separación h entre las placas.
b) Determinar el desnivel ΔZ que debe haber entre la superficie del fluido en ambos depósitos para lograr ese caudal.
c) Obtener la expresión del campo de velocidades.
d) Realizar un balance de potencias para el flujo. Comprobar que se verifica.
e) Deducir la ecuación general de las líneas de corriente, y en particular la que pasa por el punto de coordenadas x = 50 m, y = h/2.
f) Deducir la ecuación general de las trayectorias, y en particular la de la partícula que en t=0 seg está en el punto de coordenadas x = 70 m, y = h/4.
g) Demostrar que se verifica el Teorema de arrastre de Reynolds para la propiedad masa, para el Volumen de control indicado en la figura 2.a. El citado volumen de control es deformable, de manera que:

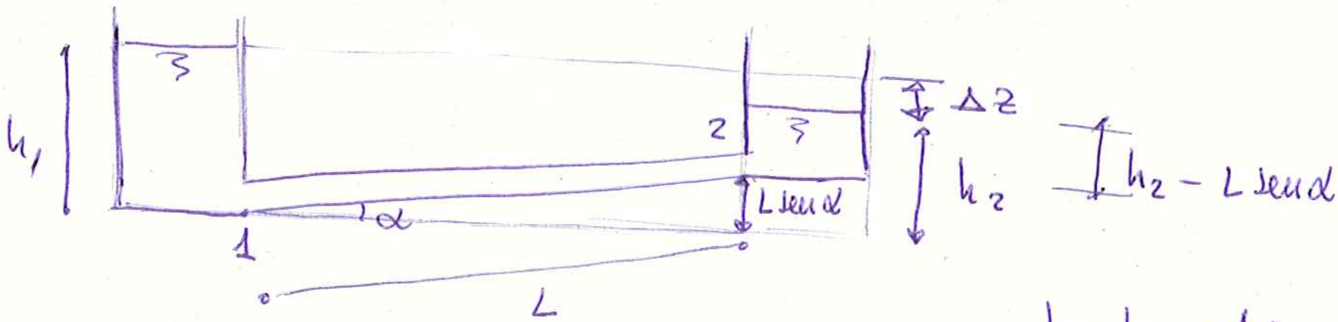
- en t=0 segundos, está delimitado por las placas y una longitud de 2 m, a partir del punto 1 (inicio de las placas en el depósito situado a la izquierda). Tiene 1 m de profundidad perpendicular al papel.

- el lado derecho se mueve hacia la derecha a una velocidad constante de 1 m/s. En la figura 2.b se representa el Volumen de control en un t genérico.





(1)



$h_1 - h_2 = \Delta z$

$$P_1 = \gamma h_1 \qquad P_2 = \gamma (h_2 - L \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{\gamma(h_2 - L\operatorname{sen}\alpha) - \gamma h_1}{L} = \gamma \frac{-L\operatorname{sen}\alpha - \Delta z}{L} = -\gamma\left(\frac{\Delta z}{L} + \operatorname{sen}\alpha\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\alpha = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$-\gamma\left(\frac{\Delta z}{L} + \operatorname{sen}\alpha\right) + \gamma \operatorname{sen}\alpha = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$-\gamma \frac{\Delta z}{L} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{\gamma \Delta z}{L}\right)$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\gamma \Delta z}{\mu L} y + A \qquad \boxed{u = -\frac{\gamma \Delta z}{\mu L}\frac{y^2}{2} + Ay + B}$$

$$u(y=0) = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$u(y=h) = 0 \longrightarrow 0 = -\frac{\gamma \Delta z}{\mu L}\frac{h^2}{2} + Ah \rightarrow A = \frac{\gamma \Delta z h}{2\mu L}$$

$$\boxed{u = \frac{\gamma \Delta z}{2\mu L}(hy - y^2)}$$

$$Q = \int_0^h \frac{\gamma \Delta z}{2\mu L}(hy - y^2)\,dy = \frac{\gamma \Delta z}{2\mu L}\left(h\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right) \rightarrow \boxed{Q = \frac{\gamma \Delta z h^3}{12\mu L}}$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{h} = \frac{\gamma \Delta z \cdot h^2}{12\mu L}$$

a) Para ver si el régimen es laminar para $Q = 0'01 \frac{m^3/s}{m\ prof}$

$$\bar{V} = \frac{Q}{h} = \frac{0'01}{0'05} = 0'2\ m/s$$

$$Re = \frac{\bar{V} \cdot h}{\nu} = \frac{0'2 \cdot 0'05}{0'04/800} = 200'3 \text{ laminar}$$

b) $$Q = 0'01 = \frac{\gamma \Delta z h^3}{12 \mu L} \longrightarrow \Delta z = \frac{12 \cdot \mu \cdot L \cdot 0'01}{\gamma h^3} =$$

$$= \frac{12 \cdot 0'04 \cdot 100 \cdot 0'01}{9'81 \cdot 800 \cdot 0'05^3} = 0'489\ m.$$

c) Campo de velocidades

$$u(y) = \frac{9'81 \cdot 800 \cdot 0'489}{2 \cdot 0'04 \cdot 100} (0'05y - y^2) = 479'709 (0'05y - y^2) \longrightarrow$$

$$\boxed{u(y) \simeq 480\,(0'05y - y^2)}$$

d) Balance energético

Sólo intervienen en el 1er miembro las fuerzas debidas a la presión y el peso, ya que aunque $\tau \neq 0$, la $V = 0$ en contacto con las placas.

$$(P_1 - P_2) Q + \gamma (z_1 - z_2) Q = \int \Phi \, d\forall$$

1er miembro

$$z_1 - z_2 = -L \operatorname{sen}\alpha$$

$$P_1 - P_2 = \gamma (h_1 - h_2 + L \operatorname{sen}\alpha) = \gamma (\Delta z + L \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\gamma (\Delta z + L \operatorname{sen}\alpha) Q + \gamma (-L \operatorname{sen}\alpha) Q = \gamma Q \Delta z =$$

2º miembro

$$= 9'81 \cdot 800 \cdot 0'01 \cdot 0'489 = 38'4 \ \frac{W}{m}$$

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0'04 \left(480 (0'05 - 2y)\right)^2 =$$

$$= 9216 (0'05 - 2y)^2 = 9216 (0'05^2 - 0'2y + 4y^2)$$

$$P_d = \int \Phi \, dV = \int_0^{0'05} 9216 (0'05^2 - 0'2y + 4y^2) \, L \cdot dy \cdot 1 =$$

$$= 921600 \left(0'05^3 - 0'2 \cdot \frac{0'05^2}{2} + 4 \frac{0'05^3}{3}\right) = 38'4 \ W/m$$ cqd.

(e)

a partir del campo de velocidades determinamos la ec. de las LDC

$$u(y) = 480 (0'05y - y^2)$$

$$\frac{dx}{u(y)} = \frac{dy}{v} \rightarrow u(y) \cdot dy = \cancel{v}_0 \cdot dx = 0 \leadsto \text{como } u(y) \neq 0$$

$$dy = 0 \rightarrow \boxed{y = cte}$$

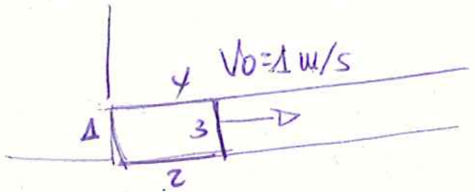
En $y = h/2$ la ecuación es $y = h/2 = 0'05/2 = 0'025$ m.

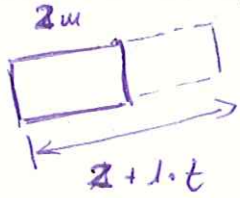
(f) Como el campo de velocidades es estacionario, la ecuación de la trayectoria es igual a la de la ldc.

$$y = h/4 = 0'0125 \text{ m}.$$

9

4





$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho\, \vec{V}_{sc} \cdot \vec{dA}$$

$\vec{dA}$

① Como la pared 1 está quieta → $u(y)$

② $v(y)$ pero en $y=0 \to u=0$

④ " "

③ $V = u(y) - 1$

$$\int_{\forall c} \rho\, d\forall = \rho \int d\forall =$$

$$= \rho\, \forall(t) = 800 \cdot h\,(2+1\cdot t)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(800 h\,(2+1\cdot t)\right) + \rho\int \underbrace{\vec{V}_1}_{u(y)\vec{i}} \cdot \underbrace{d\vec{A}_1}_{-\vec{i}dy} + \rho\int \underbrace{\vec{V}_3}_{(u(y)-1)\vec{i}} \cdot \underbrace{d\vec{A}_3}_{dy\vec{i}} \Rightarrow$$

$$0 = 800 \cdot h - \underbrace{\rho\int u(y)\,dy}_{Q} + \underbrace{\rho\int u(y)\,dy}_{Q} - \rho\int_0^h 1\,dy$$

$$0 = 800h - \rho \cdot h \rightarrow 0 = 800h - 800h$$

cdq

Problema 2 (25%)

Un depósito de agua, presurizado con aire a la presión que indica el manómetro, descarga agua a través de una tubería horizontal de 100 mm de diámetro y 2000 m de longitud. Tal cual muestra la figura adjunta la tubería consta de dos tramos iguales que forman entre sí un ángulo de 60º, ambos sobre el mismo plano horizontal. El factor de fricción de la tubería para las condiciones de la descarga es f=0.02 y su peso 30 Kp/ml.

El régimen es estacionario. Se supone que el depósito es lo suficientemente grande como para que el volumen desaguado no modifique las condiciones mostradas en la figura. Suponer $g \approx 10$ m/s^2.

En estas condiciones se desea saber:

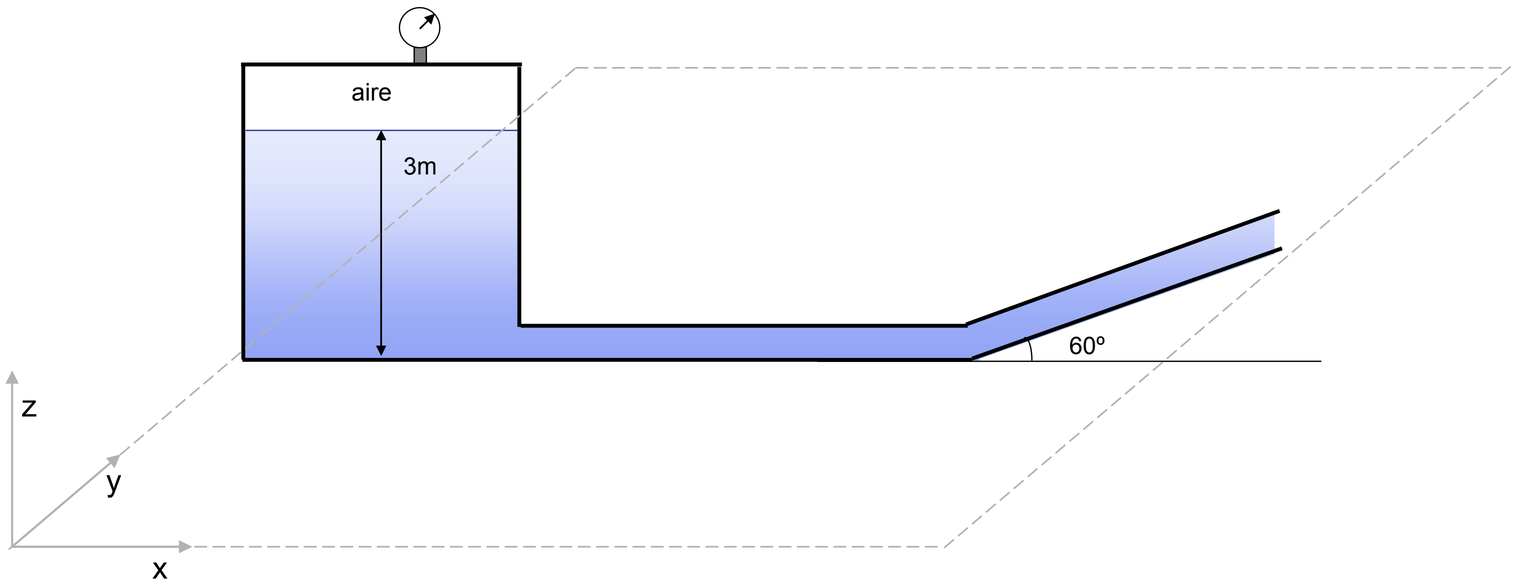
a) El caudal de salida.

b) La fuerza exterior de reacción (sus tres dimensiones) que transmite la tubería al medio exterior que la mantiene fija.

   a) Calcular el perfil de velocidades a la entrada de la tubería, supuesto parabólico, determinando en estas condiciones la cantidad de movimiento que ingresa en el volumen de control y cómo afecta a la fuerza de reacción resultante.

NOTA: Para calcular las pérdidas por fricción, utilícese la ecuación de Darcy-Weisbach:

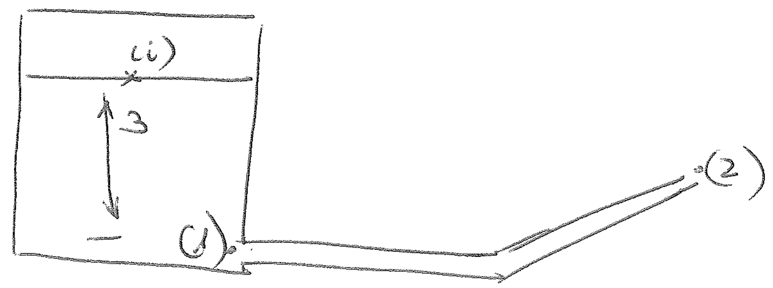
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$



1

SOLUCION PROBLEMA CANTIDAD MOVIMIENTO

a)



Bernoulli entre punto inicial (i) y final (2)

$\rho g = 10^4$

$$B_i = \frac{P_i}{\gamma} + Z_i = \frac{1.7 \times 10^5}{\rho \cdot g} + 3 = \underline{20\ m}$$

$$B_f = \frac{V^2}{2g}$$

$$20 = \frac{V^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}\left(1 + f\frac{L}{D}\right)$$

$$V = \sqrt{\frac{20 \times 2g}{1 + 0.02\frac{2000}{0.1}}} = \sqrt{\frac{400}{401}} = \underline{\underline{1\ m/s}}$$

$$\boxed{Q = \pi\frac{\phi^2}{4} \cdot 1 = 10^{-2}\frac{\pi}{4}\ m^3/s} \qquad Q = \frac{10\pi}{4}\ l/s$$

b)

$$\sum \overline{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{vc} \rho \bar{v}\, d\forall + \iint_{sc} \rho \bar{v}\,(\bar{v}\, d\bar{A})$$

Se aplica en el plano horizontal que contiene a la tubería que es donde se produce el intercambio de C.M.

$$\sum \overline{F}_{ext} \begin{cases} \text{Debidas a la presión} \equiv P_1 \bar{A}_1 - P_2 \vec{A}_2 \equiv P_1 \bar{A}_1 \\ \qquad P_2 \equiv 0 \text{ : Descarga a tmósf.} \\ \text{Debidas a la reacción} \quad -F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \end{cases}$$

(se les asigna un sentido supuesto) $\uparrow F_y \quad \leftarrow F_x$

(2)

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_i}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g} + z_i = B_i \equiv 20$$

$z_1 \equiv 0$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = 20 \qquad p_1 = \left(20 - \frac{v^2}{2g}\right)\gamma$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{20} = 0.05 \implies p_1 = 19.95 \times 10^4 \frac{Nw}{m^2} \sim 2 \text{ bares} = 2 \cdot 10^5 \frac{Nw}{m^2}$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\pi \phi^2}{4}\vec{i} = \frac{10^{-2}\pi}{4} m^2\, \vec{i} \qquad \boxed{p_1 \vec{A}_1 = \frac{10^3 \pi}{2}\vec{i}\, Nw}$$

$$\int_{sc} \rho \bar{v} \cdot \bar{v}\, d\bar{A} = \rho Q (\bar{V}_2 - \bar{V}_1)$$

$V_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{i}$

$\bar{V}_1 = \vec{i}$

$$\bar{V}_2 - \bar{V}_1 \equiv -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\rho Q(\bar{V}_2 - \bar{V}_1) = 10^3 \cdot 10^{-2}\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{2}\left(-\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\right) = \frac{5\pi}{4}\left(-\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\right) N$$

Efectuando el balance:

eje $\vec{i}$ $\qquad \frac{10^3\pi}{2} - F_x = -\frac{5\pi}{4}$

eje $\vec{j}$ $\qquad F_y = \frac{5\pi}{4}\cdot\sqrt{3}$

$$\boxed{F_x = \left(500 + \frac{5}{4}\right)\pi\ Nw \qquad F_y = \frac{5\sqrt{3}\cdot\pi}{4}\ Nw}$$

La componente VERTICAL ES EL PESO

$$W = P_{tubería} + P_{agua} = p \cdot L + \rho g A \cdot L$$

$p = 30 kp/ml \sim 300 \frac{Nw}{m^2}$

$\rho g = 10^4 \frac{Nw}{m^3}$

(3)

$$W = \left(300 + 10^4 \frac{\pi \times 10^{-2}}{4}\right) 2000 \; Nw = (300 + 25\pi)\frac{Nw}{m} \times 2000\, m =$$

$$= \underline{\underline{(600 + 50\pi) \cdot 10^3 \; Nw}} \equiv W$$

c) Distribución parabólica $\qquad D = 100\,mm \Rightarrow R = 0.05\,m = 5 \cdot 10^{-2}\,m$

$$\bar{v} = 1\,m/s \Rightarrow v_{max} = 2\bar{v} = 2\,m/s$$

Distribución velocidad $\quad v(r) = 2\left(1 - \frac{r^2}{(5 \cdot 10^{-2})^2}\right) = 2\,(1 - 400\,r^2)$

Se verifica $\quad \displaystyle\int_0^{0.05} 2(1 - 400\,r^2)\, 2\pi r\, dr \equiv 10^{-2}\frac{\pi}{4}\; m^3/s$

CANTIDAD MOVIMIENTO ENTRANTE POR UNIDAD DE TIEMPO

$$(CM)_E \equiv \int \rho\, \bar{v}\, (\bar{v}\, d\bar{A}) = 10^3 \int_0^{0.05} 2\,(1 - 400\,r^2) \cdot 2\,(1 - 400\,r^2)\, 2\pi r\, dr =$$

$$= 8\pi \cdot 10^3 \int_0^{0.05} (1 - 800\,r^2 + 16 \cdot 10^4\, r^4)\, r\, dr =$$

$$= 8\pi \cdot 10^3 \left(\frac{r^2}{2} - 800\frac{r^4}{4} + 16 \cdot 10^4 \frac{r^6}{6}\right)_0^{0.05 = R} =$$

$$= 8\pi \cdot 10^3 \frac{R^2}{2}\left(1 - 400\,R^2 + 16 \cdot 10^4 \frac{R^4}{3}\right) =$$

$$= 4\pi\; 25 \cdot 10^{-1}\left(1 - 400 \cdot 25 \times 10^{-4} + 16 \cdot 10^4 \frac{625 \cdot 10^{-8}}{3}\right) =$$

$$= 10\pi\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = 10\frac{\pi}{3}\; Nw$$

ANTES ERA $\quad \rho Q \bar{V}_1 = 10^3 \cdot \frac{10^{-2}\pi}{4} \cdot 1 = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ $\quad$ Relación $\quad \dfrac{\frac{10\pi}{3}}{\frac{10\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

Factor corrección CM

Sólo afecta a F_x que quedaría

$$\frac{10^3\pi}{2} - F_x = \rho Q \frac{1}{2} - 10\frac{\pi}{3} = -\frac{25\pi}{12}$$

$$\boxed{F_x = \left(500 + \frac{25}{12}\right)\pi}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Examen de Mecánica de Fluidos
Martes 8 de enero de 2008

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Problema 3 (25%)

A una tubería de polietileno, de 51,5 mm de diámetro interior y 900 m de longitud, entra gas natural con una presión manométrica de 4,5 kg/cm^2. Si la temperatura de trabajo del sistema es constante e igual a 15ºC y no se acepta una caída de presión del gas por la tubería superior a los 20 mca, se pide

a) Calcular si un caudal circulante de 700 Nm^3/h cumplirá las condiciones planteadas.
b) En el caso de que no las cumpla, calcular el valor de caudal máximo (en Nm^3/h) que sí lo haría.
c) Resolver el apartado a) tratando el flujo de gas como incompresible, y justificar si esta forma de proceder puede considerarse aceptable.

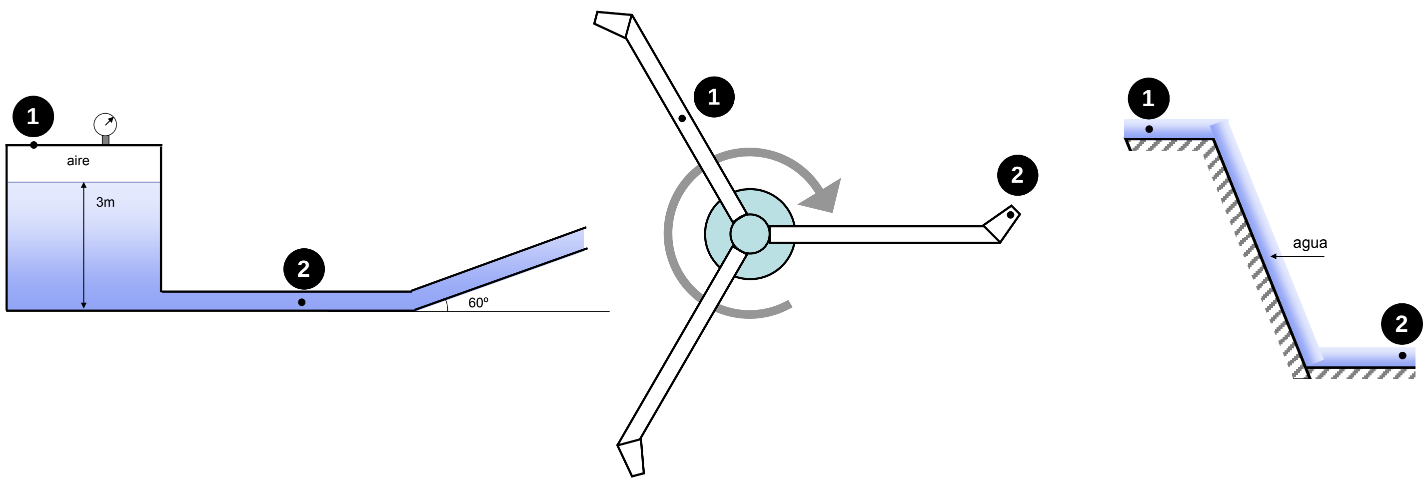
Datos adicionales:
Factor de fricción: f = 0,023
Constante del gas natural: R = 520 m^2/s^2·K
Condiciones normales: 1 atm de presión y 20ºC de temperatura

Cuestiones (25%)

1) Explicar físicamente el significado del término $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall$ en la ecuación del momento cinético para volúmenes de control inerciales. En un aspersor, ¿a qué corresponden exactamente cada una de las variables incluidas en el mismo? Poner un ejemplo de problema de aspersor en el que dicho término **no valga cero**.

2) **Contestar cualitativamente (sin ecuaciones)** a las siguientes preguntas: ¿Qué es un tubo de corriente? ¿Qué lo forma? ¿Y una línea de corriente? ¿Se pueden cruzar las líneas de corriente y en qué condiciones? ¿Y los tubos? ¿Qué relación tienen todos ellos con el campo de velocidades?

3) ¿Se puede aplicar la ecuación de Bernoulli **entre los puntos 1 y 2** de los siguientes ejemplos? Explicar por qué.



(1)

a)

$$\left[\begin{array}{l} P_1 = 4'5\ Kg/cm^2 = 441450\ Pa. \\ P_1^* = P_1 + P^*_{atm} = 542787\ Pa. \end{array}\right]$$

$$Q = 700\ Nm^3/h \quad ; \quad \rho_N = \frac{P^*}{RT} = \frac{101337}{520 \cdot 293} = 0'665\ Kg/m^3.$$

$$G = Q \cdot \rho_N = 700 \cdot \frac{1}{3600} \cdot 0'665 = 0'13\ Kg/s.$$

$$P_2^{*2} = P_1^{*2} - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL = 542787^2 - \frac{16 \cdot 0'023 \cdot 0'13^2}{\pi^2 (51'5 \cdot 10^{-3})^5} \cdot 520 \cdot 28 \cdot 900$$

$$P_2^{*2} = 6'017 \cdot 10^{10}\ \cancel{Pa} \quad \boxed{P_2^* = 245306\ Pa.}$$

$$P_1^* - P_2^* = 297481\ Pa = 30'3\ mca. > 20\ mca$$

b) $20\ mca = 196200\ Pa \longrightarrow P^*_{2\,min} = 346587\ Pa$

$$\frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL = P_1^{*2} - P_2^{*2} = 1'745 \cdot 10^{11}\ (Pa^2)$$

$$\hookrightarrow G_{máx} = 0'112\ Kg/s \rightarrow Q_{máx} = \frac{G}{\rho_N} = \frac{0'112}{0'665} = 0'169\ Nm^3/s$$

$$\downarrow$$

$$Q_{máx} = 607\ N \cdot m^3/h.$$

c)
$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{z_1} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = \frac{P_1}{\gamma} - f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} = \frac{441450}{3'62 \cdot 9'81} - 0'023 \cdot \frac{900}{51'5 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{17^2}{2g} =$$

$$\rho_1 = \frac{P_1^*}{RT} = \frac{542787}{520 \cdot 288} = 3'62 \ kg/m^3$$

$$G = \rho Q = \rho_N \cdot Q_N = \rho_1 \cdot Q_1 \longrightarrow Q_1 = \frac{\rho_N Q_N}{\rho_1} = \frac{0'665 \cdot \frac{700}{3600}}{3'62} = 0'0357 \ m^3/s$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0'0357}{\frac{\pi \cdot (51'5 \cdot 10^{-3})^2}{4}} = 17 \ m/s$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = 6510'5 \ \text{mcgas} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} P_2 = 231200 \ Pa \\ P_2^* = 332537 \ Pa. \end{array}\right.$$

$$P_1^* - P_2^* = 210250 \ Pa = 21'4 \ mca.$$

↳ Tratando el flujo como incompresible, el caudal de 700 Nm^3/h sería excesivo (por pérdidas de carga), pero por muy poco.

Justificación: $\rho_1 = 3'62 \ kg/m^3$; $\rho_2 = \frac{P_2^*}{RT} = \frac{245306}{520 \cdot 288} = 1'64 \ kg/m^3$

$\rho_1 - \rho_2 = 1'98 \ kg/m^3 \longrightarrow$ Esto es, un 54 % de ρ_1. Demasiada diferencia $\longrightarrow$ El tratamiento INCOMPRESIBLE <u>NO</u> se puede considerar aceptable.

Cuestiones (25%)

1) Explicar físicamente el significado del término $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall$ en la ecuación del momento cinético para volúmenes de control inerciales. En un aspersor, ¿a qué corresponden exactamente cada una de las variables incluidas en el mismo? Poner un ejemplo de problema de aspersor en el que dicho término **no valga cero**.

El término de la pregunta evalúa la variación con el tiempo del momento de la cantidad de movimiento en el volumen de control (la masa de un diferencial de volumen, multiplicada por la velocidad y de la que se obtiene el momento con el producto vectorial del vector de posición de dicho diferencial de volumen).

En la mayoría de los problemas de aspersores descritos en clase, este término vale cero ya que la velocidad **relativa** del fluido dentro del volumen de control NO es función del tiempo (régimen permanente). Para que el término sea distinto de cero, debe darse:

- $V=V(t)$. Por ejemplo, el transitorio de arranque de un aspersor (se va abriendo la válvula y el caudal que circula por el aspersor aumenta, y por tanto la velocidad relativa también)
- $\rho=\rho(t)$. Si la densidad del fluido es variable con el tiempo (un "aspersor" que funcionara con un gas) entonces el término también puede ser distinto de cero.

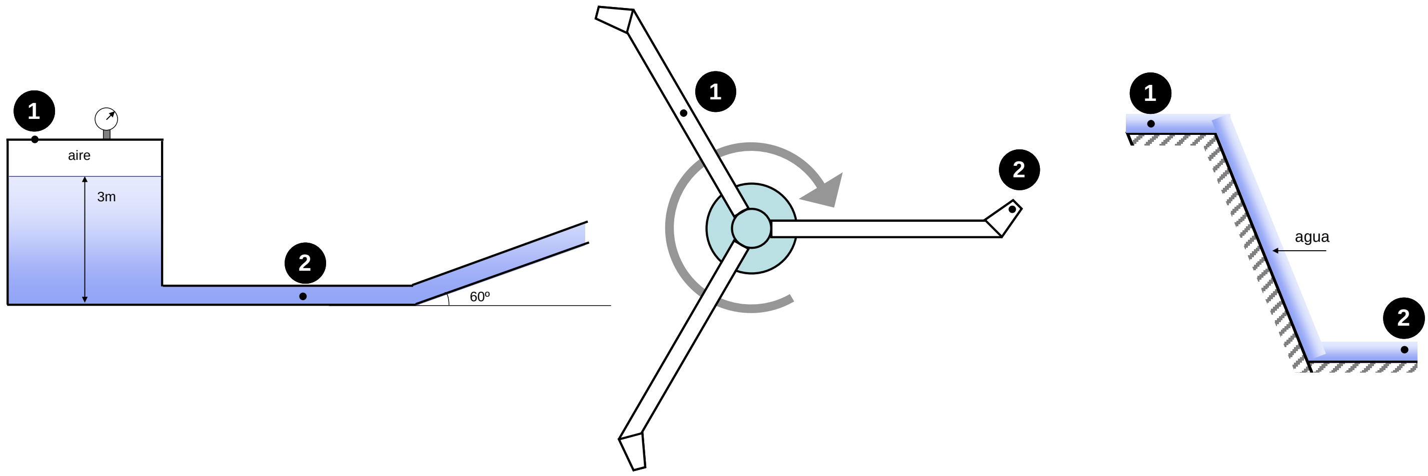
2) **Contestar cualitativamente (sin ecuaciones)** a las siguientes preguntas: ¿Qué es un tubo de corriente? ¿Qué lo forma? ¿Y una línea de corriente? ¿Se pueden cruzar las líneas de corriente y en qué condiciones? ¿Y los tubos? ¿Qué relación tienen todos ellos con el campo de velocidades?

Un tubo de corriente es **el volumen** definido por las **líneas de corriente que se apoyan sobre una línea cerrada**. Las líneas de corriente, por su parte, son **la envolvente de los vectores velocidad para un instante dado**. Es decir, una línea tangente a cada uno de los vectores de velocidad para un determinado t.

Dos líneas de corriente **no pueden cruzarse, porque implicaría que un punto tiene dos velocidades en el mismo instante**. Por la misma razón dos tubos de corrientes tampoco pueden cruzarse porque están formados por líneas de corriente, e implicaría el cruce de las mismas.

Las líneas de corriente presentan una instantánea del campo de velocidades en un momento dado, al "dibujar" todos los vectores de velocidad del campo para ese instante.

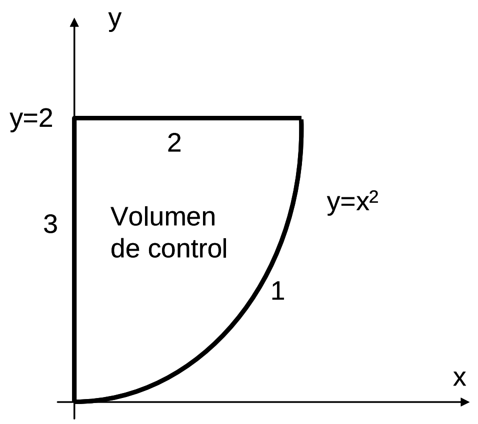
3) ¿Se puede aplicar la ecuación de Bernoulli **entre los puntos 1 y 2** de los siguientes ejemplos? Explicar por qué.



1) NO. Los puntos 1 y 2 no pertenecen al mismo fluido, y por lo tanto no se encuentran en una misma línea de corriente. Además, el aire no es incompresible.
2) NO. Los puntos 1 y 2 no se encuentran en una misma línea de corriente. Ninguna partícula que esté en el punto 1 llegará al punto 2.
3) SÍ. Se cumplen todas las condiciones para aplicar Bernoulli.

Problema 1 (25%)

Dado el campo de velocidades: $\vec{V} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j}$ determinar:



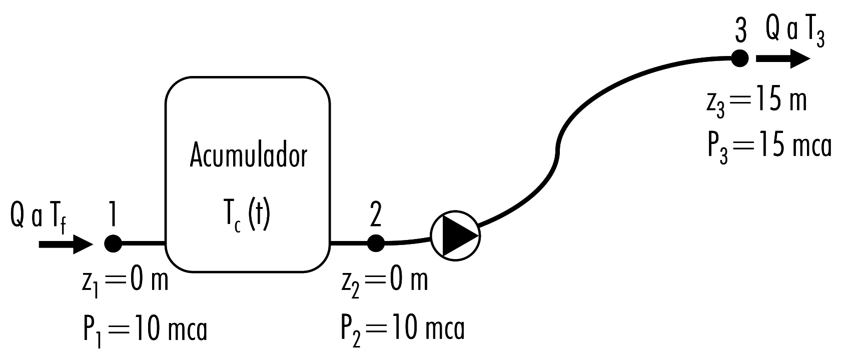
1. Ecuación de la línea de corriente, en t_1, que pasa por el punto x_1,y_1.
2. Ecuación de la trayectoria de la partícula que en t_0 está en x_0,y_0. Expresarla en la forma x(t), y(t).
3. Ecuación de la trayectoria de la partícula que en t_0 está en x_0,y_0. Expresarla en la forma y=f(x). Comentarios respecto al apartado 1.
4. Calcular la densidad del campo fluido en cualquier punto y cualquier instante de tiempo, sabiendo que en el instante t_0, la densidad en cualquier punto del campo es ρ_0.
5. Calcular el caudal que atraviesa las secciones 1, 2 y 3 de la figura (módulo y sentido) y comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa para el volumen de control de la figura.

Problema 2 (25%)

La figura muestra un sistema para suministrar un caudal constante (Q=1,5 l/s) de agua caliente al punto de consumo 3. El acumulador, de 1500 litros de capacidad, se rellena constantemente de agua fría, a T_f = 15ºC, a través del punto 1. La potencia que calienta el agua del acumulador es de 50 kW. El agua caliente sale del acumulador por el punto 2 y entra en una tubería que, gracias a una bomba instalada en la misma, transporta el agua finalmente hasta el punto 3.
Datos adicionales:

- Altura útil de la bomba: h_B = 23 mca
- Pérdida de calor en la tubería = $2{,}2 \cdot L_{Tub} \cdot \Delta T$ (kcal/h)
- $\Delta T = (T_2+T_3)/2 - T_{ambiente}$
- Longitud de la tubería: L_{Tub} = 150 m
- $T_{ambiente} = T_{agua\ fría}$ = 15ºC
- Temperatura inicial del agua en el acumulador: 80ºC
- Calor específico del agua: Ce = 1 kcal/(kg·ºK)
- Despreciar en el acumulador: los términos de energía cinética y los términos de energía potencial
- Despreciar en la tubería: la variación con el tiempo de la energía de la masa de agua contenida en la tubería y los términos de energía cinética

Se pide: Calcular la temperatura en el punto de consumo 3 (¿T_3?) tras 15 minutos de funcionamiento.

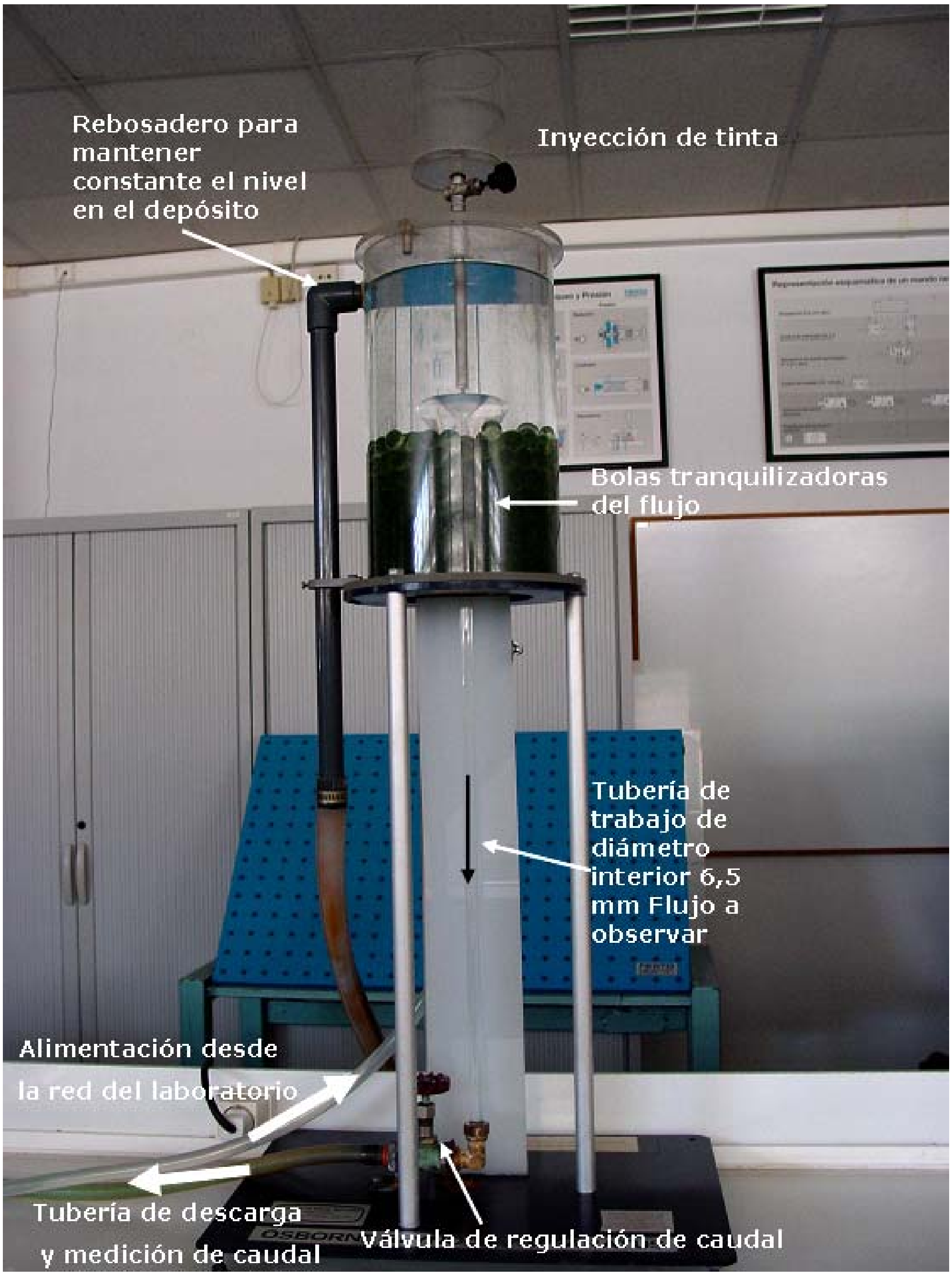


Cuestiones (25%)

1) Explicar conceptualmente por qué los coeficientes correctores α y β de la ecuación de Euler tienen valores cercanos a la unidad para flujo turbulento. ¿En qué condiciones (no reales) tendrían ambos coeficientes un valor igual a la unidad?

2) ¿De qué manera se ven reflejadas en la ecuación integral de la energía las pérdidas mecánicas por fricción? ¿Qué cambios (desde el punto de vista termodinámico) sufren fluido y entorno cuando existen pérdidas por fricción?

3) Explicar qué finalidad práctica tiene el experimento realizado mediante el aparato de Osborne-Reynolds mostrado en la figura y desarrollado en las sesiones prácticas de la asignatura. ¿Qué información útil proporciona y por qué es valiosa dicha información?



Problema 3 (25%)

Sobre la cinta de la figura hay una capa de aceite viscoso. La parte superior del aceite está en contacto con la atmósfera de manera que se puede despreciar la tensión viscosa en la interfase aceite-aire. En estas condiciones, y sabiendo que el caudal a través de la sección recta es nulo, se pregunta:

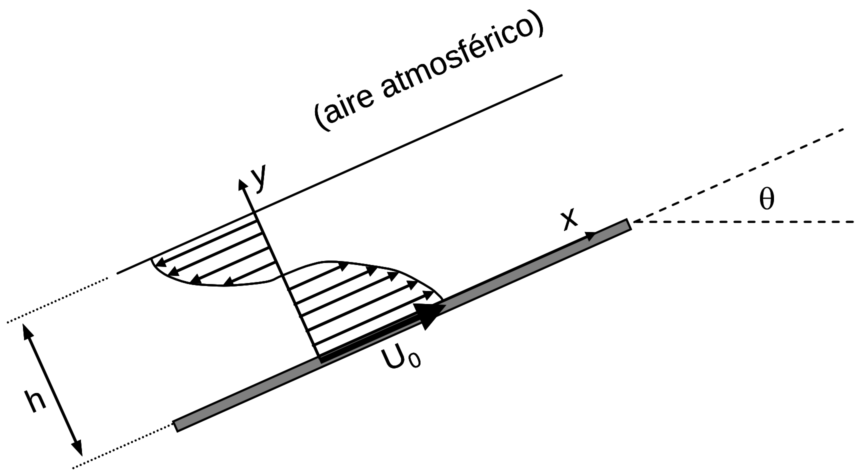
a) El perfil de velocidades $u = u\ (y)$.

b) El valor del ángulo de inclinación θ así como de la ordenada ζ en la cual la velocidad es cero en función de los parámetros básicos del problema (μ, U_o, h, γ).

c) La potencia invertida en arrastrar la placa por cada L metros de longitud y 1 metro de profundidad, así como la potencia viscosa disipada por el movimiento del flujo (también para L y 1 m de profundidad).

d) El balance energético completo.

e) Determinar el valor del ángulo θ así como de la ordenada ζ en la que la velocidad se anula para los siguientes valores numéricos: $\mu = 0{,}8$ kg/m.s; $U_o = 1{,}8$ m/s; $h = 0{,}1$ m; $\gamma = 864$ Nw/m^3



Examen de Mecánica de Fluidos
ETSII - 3 de Junio 2008

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h} d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$ E

cuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

$$\boxed{\bar{v} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j}}$$

1 Como el flujo es permanente, no interviene t.

$$\frac{xy}{dx} = \frac{-y^2/2}{dy} \longrightarrow \frac{\cancel{y}\,dy}{-y^2/2} = \frac{dx}{x} \longrightarrow -2\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\longrightarrow -2\ln y = \ln x + C_1 \longrightarrow y^{-2} = x \cdot C_2$$

$$C_2: \quad y_1^{-2} = x_1 \cdot C_2 \rightarrow C_2 = \frac{y_1^{-2}}{x_1}$$

$$\longrightarrow y^{-2} = x\frac{y_1^{-2}}{x_1} \longrightarrow y = \sqrt{\frac{x_1}{x}}\, y_1$$

2

$$\frac{dx}{dt} = xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{2}$$

Sistema acoplado

$$\longrightarrow 2\int\frac{dy}{y^2} = -\int dt \rightarrow \boxed{\frac{-2}{y} = -t + C_3}$$

luego $\boxed{y = \frac{2}{-C_3 + t}}$

Sustituyendo en la primera

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{2}{t - C_3} \longrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{2\,dt}{t - C_3}$$

$$\ln x = 2\ln(t - C_3) + C_4 \longrightarrow \boxed{x = (t - C_3)^2 C_5}$$

$t_0 . x_0 . y_0$

$$y_0 = \frac{2}{t_0 - C_3} \rightarrow t_0 - C_3 = \frac{2}{y_0} \rightarrow \boxed{C_3 = t_0 - \frac{2}{y_0}}$$

$$x_0 = (t_0 - C_3)^2 C_5 = \left(\cancel{t_0} - \cancel{t_0} + \frac{2}{y_0}\right)^2 C_5 \rightarrow \boxed{C_5 = x_0\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}$$

2

$$y = \frac{2}{t - t_0 + \frac{2}{y_0}}$$

$$x = \left(t - t_0 + \frac{2}{y_0}\right)^2 x_0 \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

*

3 Tendrá la misma forma que la ldc pues estas son estacionarias al serlo el campo de velocidades

$$y = \sqrt{\frac{x_0}{x}}\, y_0$$

De todas maneras se puede calcular eliminando t en *

De la 1:

$$t = \frac{2}{y} + t_0 + \frac{2}{y_0}$$

en la 2:

$$x = \left(\frac{2}{y} + \cancel{t_0} + \cancel{\frac{2}{y_0}} - \cancel{t_0} - \cancel{\frac{2}{y_0}}\right)^2 x_0 \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{2}{y}\right)^2 x_0 \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \rightarrow x = x_0 \left(\frac{y_0}{y}\right)^2 \rightarrow$$

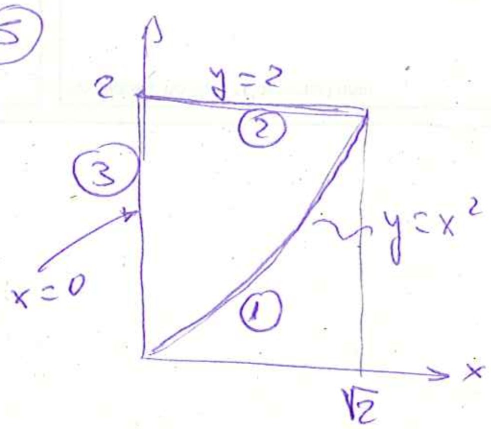
$\rightarrow y = \sqrt{\frac{x_0}{x}}\, y_0$ que coincide con la ldc para el mismo punto de paso.

4 $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0 \qquad \nabla \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

$\vec{v} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} \rightarrow \nabla \vec{v} = y - \frac{2y}{2} = 0$ Incompresible

$\rightarrow \rho = cte = \rho_0 \quad \forall pto \text{ y } \forall t$

(5) (3)



$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Como ρ = cte y $\forall C$ no deformable

$$\int \rho \, d\forall = cte$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \, d\forall = 0$$

(1)

$$y = x^2$$

$$F = x^2 - y = 0 \qquad \nabla \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = 2x\vec{i} - \vec{j}$$

$$\frac{\nabla \vec{F}}{|\nabla F|} = \frac{2x\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{4x^2+1}} = \vec{n} \qquad dA = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Como $y = x^2$ $\quad dy = 2x\,dx \quad dy^2 = 4x^2 dx^2$

$$dA = \sqrt{dx^2 + 4x^2 dx^2} = dx\sqrt{1+4x^2}$$

$$d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA = \frac{2x\vec{i} - \vec{j}}{\cancel{\sqrt{4x^2+1}}} \cancel{\sqrt{4x^2+1}}\, dx = \underline{(2x\vec{i} - \vec{j})\,dx}$$

$$\vec{V}_1 = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} = x^3\vec{i} - \frac{x^4}{2}\vec{j}$$

$$\uparrow \; y = x^2$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \vec{V} d\vec{A} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2x^4 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{5}{2}\int_0^{\sqrt{2}} x^4 dx = \frac{\cancel{5}}{2}\frac{\sqrt{2}^5}{\cancel{5}} = \frac{1}{2} 2^{5/2} =$$

$$= \frac{2^{1/2} 2^{4/2}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

(2) $\vec{V} = xy\vec{i} - \frac{y^2}{2}\vec{j} \overset{y=2}{=} 2x\vec{i} - 2\vec{j}$ $\quad \vec{V} \cdot d\vec{A} = -2dx$

$d\vec{A} = dx\vec{j}$

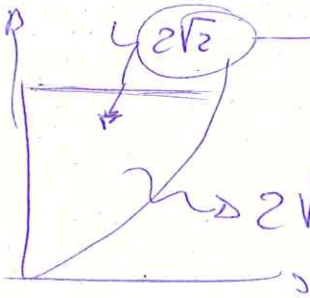
$$\int \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\sqrt{2}} -2dx = \underline{\underline{-2\sqrt{2}}}$$

(3) $\bar V = xy\,\vec i - \frac{y^2}{2}\vec j \overset{x=0}{=} -\frac{y^2}{2}\vec j$

$d\vec A = -dy\,\vec i$

$\left.\begin{array}{l} \bar V = -\frac{y^2}{2}\vec j \\ d\vec A = -dy\,\vec i \end{array}\right\} \bar V \cdot d\bar A = 0$

$Q = 0$



$2\sqrt2$ → negativo (entrante en V.C.)

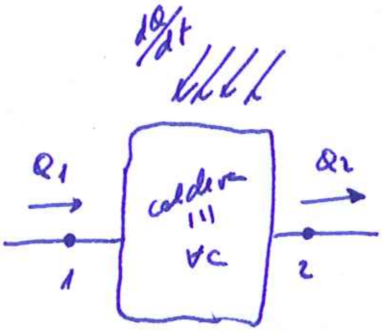
→ $2\sqrt2$ → saliente (V.C.)

Se verifica **TAR**

Problema Ecuación Energía.

Planteamos la ecuación sobre un 1er VC que contiene la caldera:

$$\frac{dQ}{dt} + \cancel{\frac{dW_{eje}}{dt}}^{\,0} = \frac{d}{dt}\int_{VC}\left(u + \cancel{\frac{v^2}{2}} + \cancel{gz}\right)\rho\, d\forall + \left[\left(u + \cancel{\frac{p}{\rho}} + \cancel{\frac{v^2}{2}} + \cancel{gz}\right)_2 - \left(u + \cancel{\frac{p}{\rho}} + \cancel{\frac{v^2}{2}} + \cancel{gz}\right)_1\right]\dot{m}$$



$$\frac{dQ}{dt} = M_{VC}\, Ce\, \frac{dT_c}{dt} + Ce\left(T_c - T_f\right)\cdot \dot{m}$$

$$T_c \equiv T_2 \quad ; \quad T_f \equiv T_1 .$$

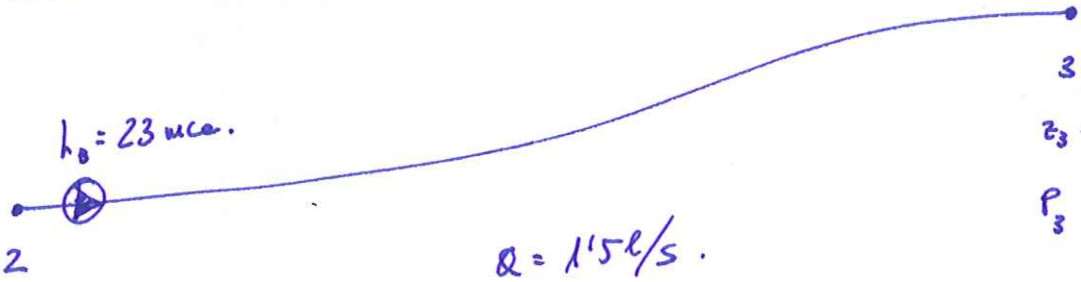
$$50 \cdot 10^{3} = 1500 \cdot 4180\, \frac{dT_c}{dt} + 4180\left(T_c - 15\right)\cdot 1'5$$

$$5 \cdot 10^4 = 627 \cdot 10^4\, \frac{dT_c}{dt} + 6270\, T_c - 94050 .$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dT_c}{dt} = 0'023 - 10^{-3}\, T_c .}$$

← Evolución de la temperatura en la caldera con el tiempo.

Planteamos la ecuación sobre un 2º VC que contiene la tubería:



$z_3 = 15$ m.

$P_3 = 15$ mca

$Q = 1'5\ l/s$.

$L = 150$ m.

$T_{amb} = T_f = 15°C$

D = cte

$z_2 = 0$ m

$P_2 = 10$ mca.

(2)

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC}\left(u+\frac{v^2}{2}+gz\right)\rho\, d\forall} + \left[\left(u+gz+\frac{p}{\rho}+\cancel{\frac{v^2}{2}}\right)_3 - \left(u+gz+\frac{p}{\rho}+\cancel{\frac{v^2}{2}}\right)_2\right]\dot{m}$$

Desprec.

Por partes:

$$\frac{dQ}{dt} = -2'2\cdot\frac{4180}{3600}\cdot 150\left(\frac{T_3+T_2}{2} - T_{amb}\right) = -383'2\left(\frac{T_3+T_c}{2} - 15\right)\ (W)$$

$$\frac{dW_{eje}}{dt} = \gamma Q h_B = 9810\cdot 1'5\cdot 10^{-3}\cdot 23 = 338'5\ W.$$

$$(u_3-u_2)\,\dot{m} = C_e(T_3-T_c)\,\dot{m} = 4180(T_3-T_c)\cdot 1'5 = 6270(T_3-T_c)\ (W)$$

$$g(z_3-z_2)\,\dot{m} = 9'81(15-0)1'5 = 220'7\ W.$$

$$\frac{P_3-P_2}{\rho}\,\dot{m} = \frac{15-10}{1000}\cdot 9810\cdot 1'5 = 73'6\ W$$

$$-383'2\left(\frac{T_3+T_c}{2} - 15\right) + 338'5 = 6270(T_3-T_c) + 220'7 + 73'6$$

$$T_3 + T_c - 30 = 0'23 + 32'8\,(T_c - T_3).$$

$$\boxed{33'8\,T_3 = 30'23 + 31'8\,T_c}$$

Relación (lineal) entre la T de la caldera y la T en el punto de consumo.

Transcurridos 15 minutos:

$$\int_{80}^{T_c}\frac{dT_c}{0'023 - 10^{-3}T_c} = \int_0^t dt = \int_0^{15\cdot 60} dt = 900$$

$$\frac{-1}{10^{-3}} \Big| \ln\left(0'023 - 10^{-3} T_c\right) \Big|_{80}^{T_c} = 900$$

$$\ln\left(\frac{0'023 - 10^{-3} T_c}{-0'057}\right) = -10^{-3} \cdot 900 = -0'9 \rightarrow \frac{0'023 - 10^{-3} T_c}{-0'057} = e^{-0'9}$$

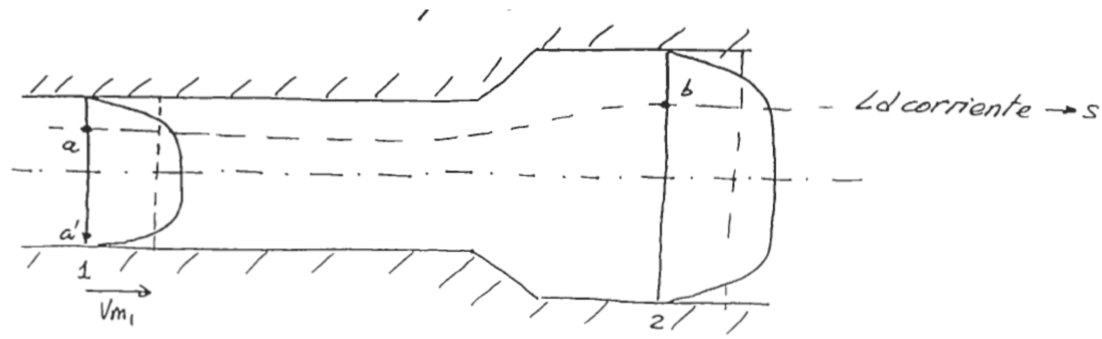
$$\rightarrow \boxed{T_c = 23 + 57 \cdot e^{-0'9} = 46'2\,°C .}$$

$$\boxed{T_3 = \frac{30'23 + 31'8 \cdot 46'2}{33'8} = 44'4\,°C .}$$

1) Explicar conceptualmente por qué los coeficientes correctores α y β de la ecuación de Euler tienen valores cercanos a 1 para flujo turbulento. ¿En qué condiciones (no reales) tendrían ambos coeficientes un valor igual a 1?

Los coeficientes α y β permiten utilizar la ecuación de Euler en conductos cerrados, introduciendo en la misma valores de la velocidad media (la ecuación se deduce para una única línea de corriente y valores de la velocidad de una única partícula).

En el caso del flujo turbulento, el perfil de velocidades es prácticamente uniforme. Por ello, la integral del campo de velocidades para una sección recta de la conducción, prácticamente equivale a utilizar la velocidad media Vm para todos los puntos (y por lo tanto α y β son prácticamente 1)



Para flujo sin fricción en r. permanente :

Por lo tanto, α y β serán 1 cuando no sea necesario realizar tal corrección. Es decir, con un perfil de velocidades rectangular (todos los puntos la misma velocidad y ausencia de viscosidad).

2) ¿De qué manera se ven reflejadas en la ecuación integral de la energía las pérdidas mecánicas por fricción? ¿Qué cambios (desde el punto de vista termodinámico) sufren fluido y entorno cuando existen pérdidas por fricción?

PARA UN SISTEMA EN EL QUE NO EXISTA $\delta W_{eje}/\delta t$:

$$\boxed{h_f = \frac{u_2 - u_1}{g} - \frac{dQ}{dt}\frac{1}{\dot{m} g}} \quad 4.20$$

ES UNA ENERGÍA QUE SE PIERDE DEBIDO A QUE EL PROCESO ES IRREVERSIBLE.

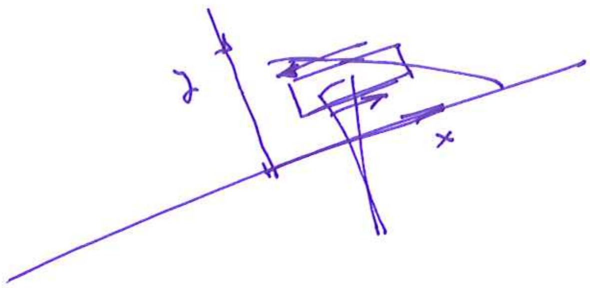
LA FRICCIÓN (EN TUBERÍA Y ELEMENTOS ACCESORIOS) (h_f [illegible] SIEMPRE, YA QUE NOS DA MEDIDA DEL GRADO DE IRREVERSIBILIDAD), CONTRIBUYE A AUMENTAR LA ENERGÍA INTERNA (Y POR TANTO LA T SI $\Delta u = C\Delta T$) Y A DAR CALOR AL MEDIO ($\frac{dQ}{dt} < 0$).

3) Explicar qué finalidad práctica tiene el experimento realizado mediante el aparato de Osborne-Reynolds mostrado en la figura y desarrollado en las sesiones prácticas de la asignatura. ¿Qué información útil proporciona y por qué es valiosa dicha información?

El aparato sirve para constatar visualmente si el régimen del flujo que circula por el tubo del mismo es laminar, turbulento o de transición.

Mediante la repetición sistemática de esta experiencia, sería posible determinar los rangos del nº de Reynolds para los que el flujo es laminar y turbulento, así como para fijar la zona de transición. No hay que olvidar que dichos rangos son **empíricos** y por tanto han sido obtenidos mediante trabajo en laboratorio.

(a)



– No hay gradiente de presiones

Balance de fuerzas:

$$\cancel{\tau}\,\delta x - \left(\cancel{\tau} + \frac{d\tau}{dy}\,dy\right) dx - \gamma\,\delta x\,\delta y \cdot \operatorname{sen}\theta = 0$$

con $\tau = -\mu \dfrac{du}{dy}$

$$-\frac{d\tau}{dy} - \gamma \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu} \cdot y + A$$

pero $\left.\dfrac{du}{dy}\right|_{y=h} = 0$ $\qquad A = -\dfrac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu} h$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}(y - h)$$

$$u(y) = \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + B$$

$\left.u(y)\right|_{y=0} = U_0 \Longrightarrow B = U_0$ $\qquad \boxed{u(y) = U_0 - \dfrac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\, y \left(h - \dfrac{y}{2}\right)}$

b) $Q = \displaystyle\int_0^h u(y)\,dy = \boxed{U_0 h - \dfrac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{3\mu} h^3 = Q}$

pero siendo $Q = 0 \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3\mu U_0}{\gamma h^2}}$

La ordenada a la cual la velocidad sea cero (2)

se determina a partir de la ecuación:

$$u(\delta) = 0 = U_0 - \frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu} \delta \left(h - \frac{\delta}{2}\right)$$

luego hay que resolver

$$\delta^2 - 2h\delta + 2\frac{\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta} = 0$$

$$\boxed{\delta = h - \sqrt{h^2 - 2\frac{\mu U_0}{\gamma \operatorname{sen}\theta}}}$$

c) En este ejercicio sólo interviene el arrastre de la placa y la disipación de energía. No hay gradiente de presiones y por otra parte al ser $Q \equiv 0$, no hay cambio global de energía potencial (lo que sube por lo que baje)

Arrastre de la placa

$$W_a = F \cdot V = \tau\Big|_{y=0} \cdot L \cdot 1 \cdot U_0$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \mu \left[\frac{\gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}(y-h)\right]\Big|_{y=0} = -\frac{\cancel{\mu}\,\gamma \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\mu}} \cdot h$$

$$\boxed{W_a = \gamma h \operatorname{sen}\theta \cdot L \cdot U_0}$$

$F_a = -\tau \cdot L \cdot 1 = h\gamma \operatorname{sen}\theta \cdot L$

~~Fuerza~~ Potencia disipada $W_d = \int \Phi \, dV$ (3)

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \mu \left\{ \frac{\gamma \operatorname{sen} \theta}{\mu} (h - y) \right\}^2$$

$$\Phi = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\mu} \left[h^2 + y^2 - 2hy \right]$$

$$W_d = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\mu} \int_0^h \left[h^2 + y^2 - 2hy \right] L \cdot 1 \cdot dy =$$

$$= \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\mu} \cdot L \, \frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot L \cdot h^3}{3\mu} = W_d}$$

d) En este caso, toda vez que no hay otros aportes o términos energéticos, ambos deben coincidir. Es decir

$$\boxed{W_d = \frac{\gamma^2 \operatorname{sen}^2 \theta \; L \cdot h^3}{3\mu} = W_a = \gamma h \operatorname{sen} \theta \, L \, U_0}$$

Para evidenciarlo utilizamos la relación que debe cumplirse en este flujo $\boxed{\operatorname{sen} \theta = \frac{3 \mu U_0}{\gamma h^2}}$

Conviene sustituir en W_a el valor de U_0, toda vez que es el único parámetro que no encuentra su equivalente en W_d. Por tanto ~~$W_a = \gamma h L U_0 \frac{3\mu U_0}{\gamma h^2}$~~

$$W_a = \gamma h \, \text{sen}\theta \, L \, . \, U_0$$

con $$U_0 = \frac{h^2 \gamma \, \text{sen}\theta}{3\mu}$$

luego $$W_a = \gamma h \, \text{sen}\theta \, . \, L \, \frac{h^2 \gamma \, \text{sen}\theta}{3\mu} = \frac{\gamma^2 \text{sen}^2\theta \, . \, L \, h^3}{3\mu}$$

En resumen $$\boxed{W_a \equiv W_d}$$

e) Aplicación numérica

$$\text{sen}\theta = \frac{3\mu U_0}{\gamma h^2} = \frac{3 \times 8 \times 10^{-1} \times 1.8}{864 \times 10^{-2}} \equiv 0.5$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\delta = 0.1 - \sqrt{h^2 - \frac{2\mu U_0}{\gamma \, \text{sen}\theta}} =$$

$$= 0.1 - \sqrt{0.01 - \frac{2 \times 0.8 \times 1.8}{864 \times 0.5}}$$

$$= 0.1 - \sqrt{0.01 - 0.007} = 0.1 - 0{,}0555 \equiv$$

$$= 0.045 \, m$$

Problem 1 (25%)

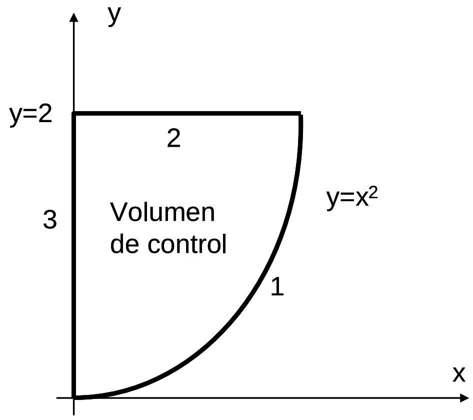
Given the following velocity field: $\vec{V} = xy\vec{i} - \dfrac{y^2}{2}\vec{j}$ determine:

1. Equation of the streamline which in t_1 is located in the point x_1, y_1.

2. Equation of the trajectory of the particle which in t_0 is in x_0, y_0. Provide the equation in the format x(t), y(t).

3. Equation of the trajectory of the particle which in t_0 is in x_0, y_0. Provide the equation in the format y=f(x). Make any comments you consider valuable comparing to section 1.

4. Calculate the density of the fluid field in any point and time, knowing that in instant t_0, the density at any point of the field is ρ_0.



5. Calculate the flowrate flowing through sections 1, 2 and 3 in the figure (magnitude and direction) and check that Reynolds Transport Theorem is fulfilled for property mass in the control volume shown in the figure.

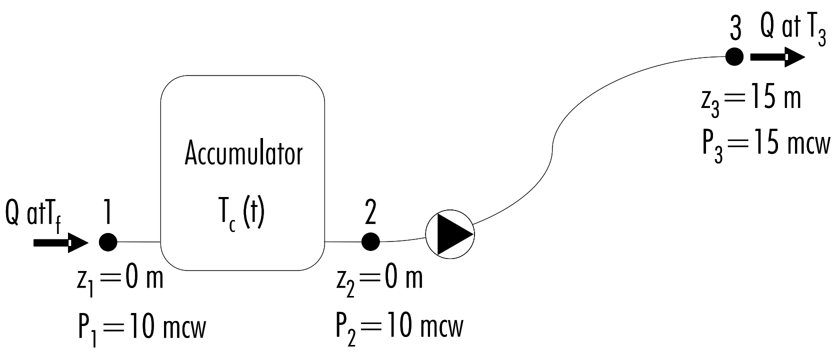
Problem 2 (25%)

The figure shows a system that delivers a constant hot wáter flowrate (Q=1,5 l/s) to consumption point 3. The accumulator, with a capacity of 1500 liters is constantly filled with cold water at T_f = 15ºC, through point 1. The water in the accumulator is heated with a power of 50 kW. The hot water leaves the accumulator through point 2 and enters a pipe which takes water to point 3 by means of a pump.

Additional data:

- Pump head (useful): h_B = 23 mcw
- Heat loss in the pipe = $2{,}2 \cdot L_{Tub} \cdot \Delta T$ (kcal/h)
- $\Delta T = (T_2+T_3)/2 - T_{ambient}$
- Length of pipe: L_{Tub} = 150 m
- $T_{ambient} = T_{cold\ water}$ = 15ºC
- Initial temperature in the accumulator: 80ºC
- Specific heat of water: Ce = 1 kcal/(kg·ºK)
- Neglect the potential energy terms in the accumulator
- Neglect the variation with time of the potential and internal energies of the water in the pipe
- Neglect ALL terms of kinetic energy

Calculate the temperature at the consumption point 3 (¿T_3?) after 15 minutes of operation.

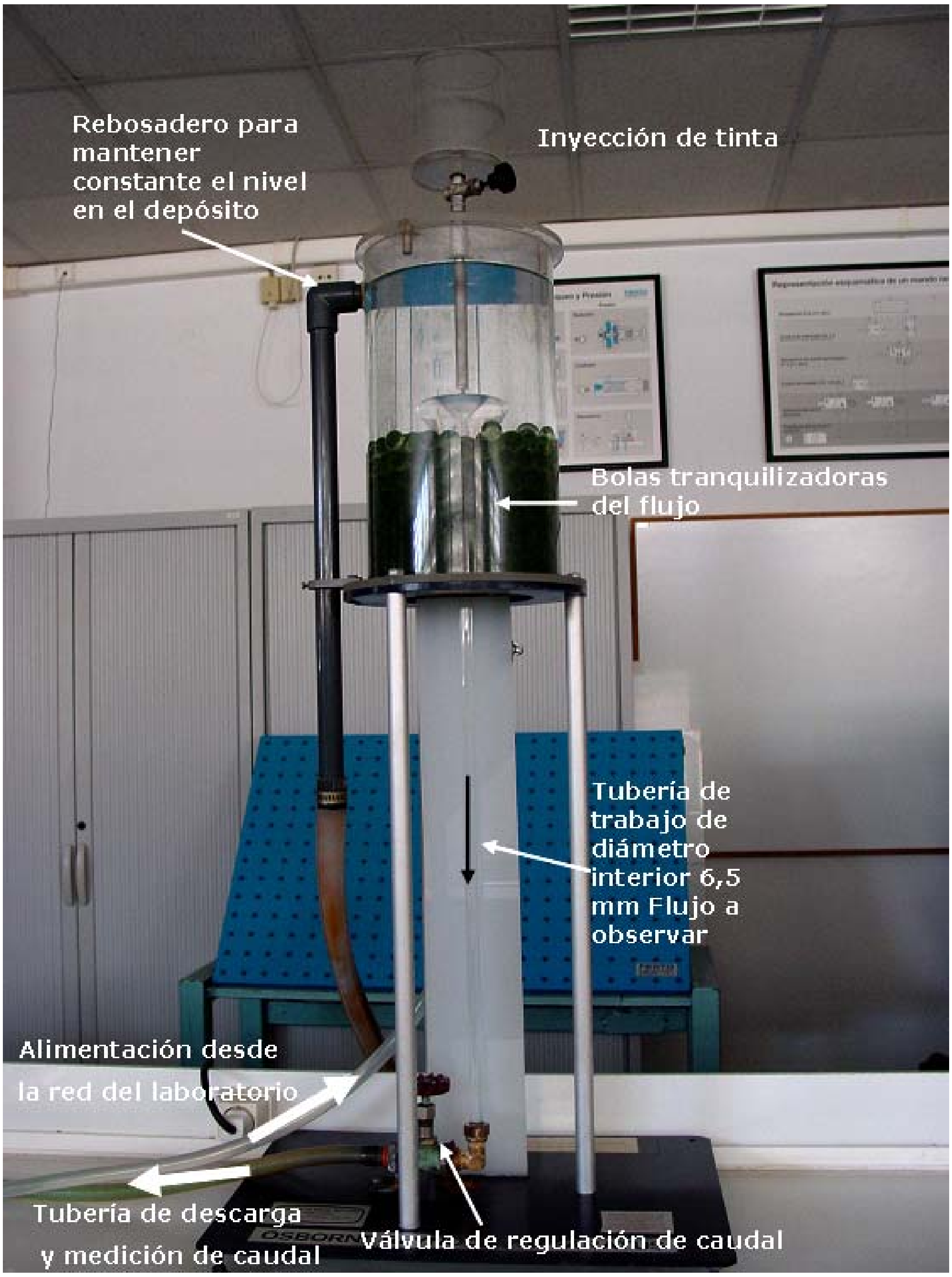


Cuestions (25%)

1) Explain conceptually why the correcting coefficients α and β in Euler's equation have values close to 1 for turbulent flows. Under which conditions (not real) would both coefficients have values equal to 1?

2) In which way are mechanical friction losses reflected in the integral energy equation? Which changes take place (from a thermodynamic point of view) in the fluid and its environment when friction losses take place?

3) Explain the practical goal of the experiment developed with the Osborne-Reynolds apparatus shown in the figure and included in the lab session of the course. Which useful information does it provide and why is such information valuable?



Problem 3 (25%)

The belt in the figure carries a layer of viscous oil. The upper part of the oil is in contact with the atmosphere, and therefore, viscous forces in that point can be neglected. Under these conditions, and knowing that the net flowrate through the cross section is zero, calculate:

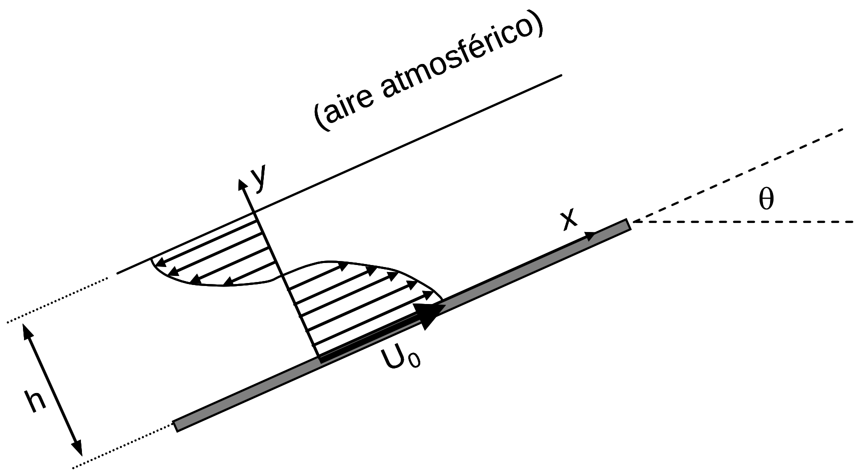
a) The velocity profile $u = u\,(y)$.

b) The slope angle θ and the ordinate ζ in which the value of the velocity is zero as a function of the basic parameters of the problem (μ, U_o, h, γ).

c) The power used in dragging the plate for every L meters of length and 1 meter of depth, as well as the viscous power dissipated by the motion of the fluid (also for L and 1 m of depth).

d) The full energy balance.

e) The value of the slope angle θ and the ordinate ζ in which the velocity is annulled for the following numerical values: $\mu = 0{,}8$ kg/m.s; $U_0 = 1{,}8$ m/s; $h = 0{,}1$ m; $\gamma = 864$ Nw/m^3



FUNDAMENTAL EQUATIONS

Reynolds Transport Theorem:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h} \vec{V} d\vec{A}$$

Continuity equation in differential form:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Euler's equation in differential form:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Continuity equation in integral form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Reynolds number expression:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Friction losses in a circular pipe:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Euler's equation for isothermal compressible flow

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

State equation for a perfect gas:

$$p^* = \rho RT$$

Linear momentum equation for non-inertial control volumes:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Angular momentum equation for non-inertial control volumes:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Energy equation in integral form:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Laminar flow expressions

Non-compressible laminar flow with plane symmetry

Velocity field:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Newton's law of viscosity:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Dissipation function:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Non-compressible laminar flow with cylindrical symmetry

Velocity field:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Newton's law of viscosity:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

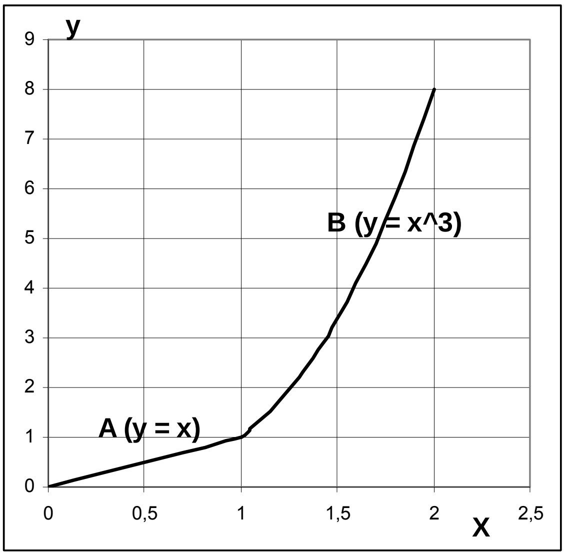
Dissipation function:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Problema 1 (25%)

La velocidad de una partícula (la que en t = 0 seg ocupa la posición x_0, y_0) sigue la siguiente expresión:

$$\vec{V}_p = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3}\vec{i} + \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2}\vec{j}$$



1.- Determinar la ecuación de la trayectoria de la partícula.

2.- Determinar el campo de velocidades.

3.- Determinar la ecuación de la línea de corriente, en el instante t_2, que pasa por el punto de coordenadas x_1,y_1.

4.- Las ecuaciones de la línea de corriente y la de la trayectoria, que pasan por el mismo punto, ¿son iguales o diferentes? Razonar la respuesta.

5.- Calcular el caudal que atraviesa la superficie de la figura en el instante t (suponer 1 metro de profundidad perpendicular al papel). La superficie se divide en dos partes:

A: Recta de ecuación y = x entre los puntos (0,0) y (1,1).
B: Curva de ecuación $y = x^3$ entre los puntos (1,1) y (2,8).

Determinar el sentido del caudal considerando que el flujo neto es positivo si atraviesa la superficie de izquierda a derecha.

Nota: Si no se ha podido deducir la ecuación del campo de velocidades (apartado 2), utilizar el campo de velocidades siguiente (atención: no es el resultado correcto del ejercicio).

$\vec{V} = -xy\vec{i} + y^3\vec{j}$

Problema 2 (25%)

El chorro que sale del depósito de la adjunta figura descarga a través del orificio de salida en la atmósfera. Admitiendo que los niveles de agua y gasolina en ningún momento cambian y que, por ello, la presión de aire es siempre la misma se pregunta:

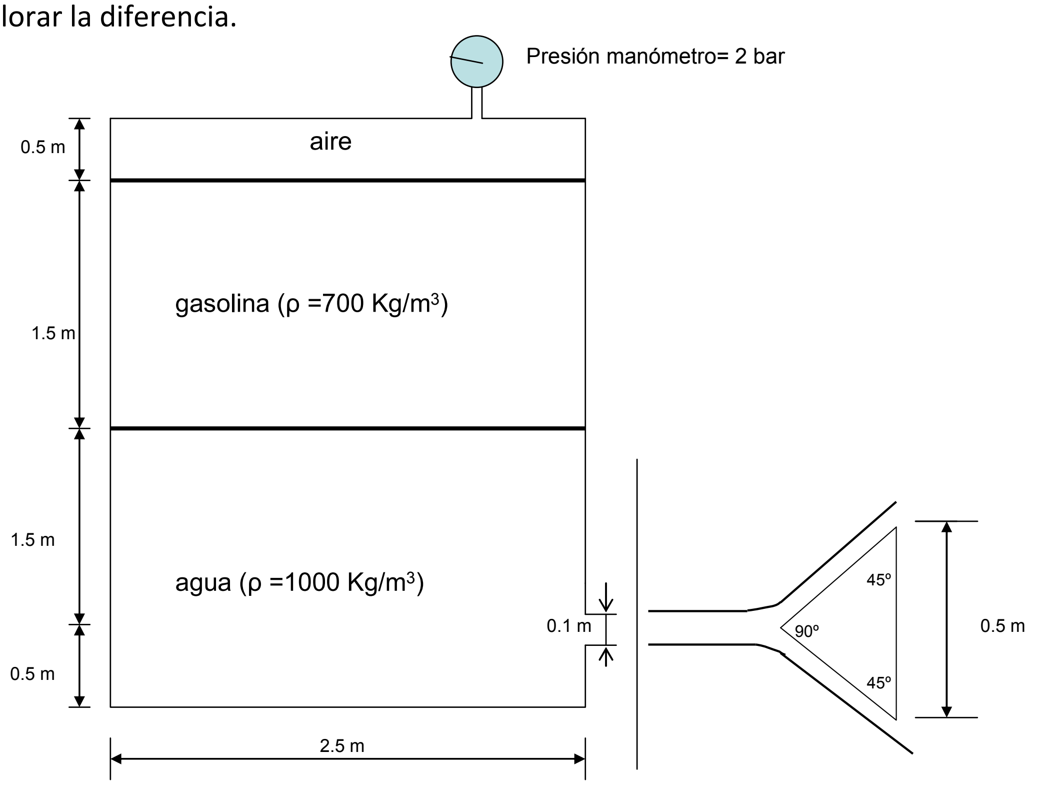
1. La velocidad de salida del chorro de agua libre. La longitud de la tubería es despreciable y las únicas pérdidas a considerar son las del estrechamiento a la entrada del orificio. Su valor es = 1,5 ($v^2/2g$).

2. La fuerza de reacción (en sus dos componentes, vertical y horizontal) que neutraliza la fuerza que transmite el depósito a los anclajes que lo soportan en el momento en el que el chorro de agua está saliendo, sabiendo que el peso del depósito vacío es de 1000 Kp y que se debe incluir el peso del gas atrapado (está a una temperatura de 20ºC). La presión atmosférica exterior es = 1,013 bar y la constante universal de los gases perfectos R = 287 N·m/ºK·kg.

3. A partir de los resultados del apartado precedente, cuantificar la influencia de la presencia del gas atrapado en las dos componentes de la fuerza de reacción. Establecer la comparación con relación a las fuerzas que existirían si el depósito estuviese abierto a la atmósfera.

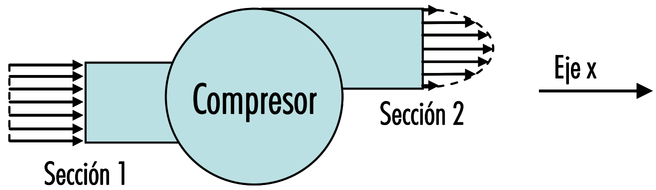
4. Para taponar el chorro se dispone de un tapón cónico de peso despreciable que en la etapa inicial está muy alejado del depósito y no interfiere para nada en el chorro libre. Cuando se aproxima al chorro este es desviado según tal cual la figura muestra. Determinar en estas condiciones la fuerza que en ese momento hay que ejercer sobre el tapón (la fuerza de aproximación requerida) cuando el chorro del apartado 1 es desviado tal cual se muestra. Suponer que el módulo de la velocidad del chorro (calculado en el apartado 1) no se ve afectado por el rozamiento y que tan sólo la dirección se adapta perfectamente a los contornos del tapón cónico.

5. Cuál es la fuerza que debe ejercerse sobre el tapón cuando el orificio ya ha sido totalmente obturado. Comparar la fuerza de obturación con la de aproximación del apartado 4 y, si la hay, valorar la diferencia.



Problema 3 (25%)

La figura muestra un compresor que comprime 6 kg/s de aire desde la sección de entrada (1) a la de salida (2), y del que se pide calcular la potencia que comunica al aire en su funcionamiento.



Datos:

- Temperatura de entrada T_1 = 27ªC y temperatura de salida T_2 = 117ªC.
- Presión de entrada P_1 = 1 bar y presión de salida P_2 = 3 bar (ambas son presiones absolutas).
- La sección de la tubería es igual a la entrada y a la salida, siendo su radio R = 0,25 m.
- La velocidad a la entrada v_1 es uniforme en toda la sección: $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$
- La velocidad a la salida v_2 tiene un perfil parabólico: $\vec{v}_2 = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$
- Calor específico del aire: C_e = 720 J/kg·K.
- El aire se comporta como gas perfecto con la constante 287 N·m/kg·K.
- El flujo de aire es permanente y adiabático.
- La diferencia de cotas entre la entrada y la salida es despreciable.

Cuestiones (25%)

1. ¿Qué valor presentaría el módulo de elasticidad volumétrico K para un fluido totalmente incompresible? Justificar la respuesta. Si K = 20000 Kg/cm^2 en el caso del agua, ¿cómo afecta esto a los valores de la densidad? Poner un ejemplo numérico considerando un cambio significativo de presión.

2. ¿Por qué en el flujo de Couette se considera que las fuerzas tangenciales en la interfase agua-aire son despreciables? ¿En qué caso serían verdaderamente cero?

3. Relacionar los siguientes casos reales con uno o varios de los conceptos correspondientes de línea de corriente, de traza y trayectoria. **Justificar las respuestas.**
   a. Las líneas formada por las migas de pan de Pulgarcito, referidas al propio Pulgarcito.
   b. Las líneas de tinta en el experimento de Osborne Reynolds. Distinguir entre los casos de régimen laminar y régimen turbulento
   c. La estela de luz que deja cada uno de los coches por la noche en una foto de exposición prolongada (foto izquierda).
   d. Las líneas del flujo alrededor de un coche en un túnel de viento (foto derecha).

4. EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

$$u_0 = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3} = \frac{dx_p}{dt}$$

$$v_0 = \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2} = \frac{dy_p}{dt}$$

Calculamos la trayectoria:

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3} \rightarrow \int_{x_0}^{x_p} \frac{-dx_p}{2x_0 y_0} = \int_0^t \frac{dt}{(y_0 t - 1)^3}$$

$$\frac{-x_p}{\cancel{2}x_0 \cancel{y_0}} + \frac{\cancel{x_0}}{\cancel{2}\cancel{x_0}\cancel{y_0}} = -\frac{1}{\cancel{2}\cancel{y_0}}\left(\frac{1}{(y_0 t - 1)^2} - 1\right)$$

$$-\frac{x_p}{x_0} = -\frac{1}{(y_0 t - 1)^2} + \cancel{1} - \cancel{1} \rightarrow \boxed{x_p = \frac{x_0}{(y_0 t - 1)^2}}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2} \rightarrow \int_{y_0}^{y_p} \frac{dy_p}{y_0^2} = \int_0^t \frac{dt}{(y_0 t - 1)^2}$$

$$\frac{y_p}{y_0^{\cancel{2}}} - \frac{\cancel{y_0}}{y_0^{\cancel{2}}} = \frac{-1}{\cancel{y_0}}\left[\frac{1}{y_0 t - 1} - \frac{1}{-1}\right]$$

$$\frac{y_p}{y_0} = +\cancel{1} - \frac{1}{y_0 t - 1} - \cancel{1} \rightarrow \boxed{y_p = \frac{-y_0}{y_0 t - 1}}$$

Para calcular el campo de velocidades a partir de la velocidad de la partícula, necesitamos perder la identidad de la partícula.

$$x = \frac{x_0}{(y_0 t - 1)^2} \quad *$$

$$y = \frac{-y_0}{y_0 t - 1} \rightarrow y = \frac{-1}{t - \frac{1}{y_0}} \rightarrow$$

$$\rightarrow t - \frac{1}{y_0} = -\frac{1}{y} \rightarrow -\frac{1}{y_0} = -\frac{1}{y} - t$$

$$\rightarrow \frac{1}{y_0} = \frac{1}{y} + t \rightarrow \boxed{y_0 = \frac{1}{\frac{1}{y} + t} = \frac{y}{1 + yt}}$$

Sustituyendo en *

$$x_0 = x(y_0 t - 1)^2 = x\left(\frac{yt}{1+yt} - 1\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x_0 = x \frac{1}{(1+yt)^2}}$$

Sustituyendo x_0 e y_0 en la velocidad de la partícula:

$$u = \frac{-2x_0 y_0}{(y_0 t - 1)^3} = \frac{-2x}{(1+yt)^2} \cdot \frac{y}{(1+yt)} \frac{1}{\left(\frac{yt}{1+yt} - 1\right)^3} = 2xy$$

$$v = \frac{y_0^2}{(y_0 t - 1)^2} = \frac{y^2}{(1+yt)^2} \frac{1}{\left(\frac{yt}{1+yt} - 1\right)^2} = y^2$$

$$\boxed{\vec{V} = 2xy\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}}$$

no depende de t : TRY. = LDC.

$$\frac{dx}{2x\cancel{y}} = \frac{dy}{y^{\cancel{2}}} \rightarrow \int \frac{dx}{2x} = \int \frac{dy}{y}$$

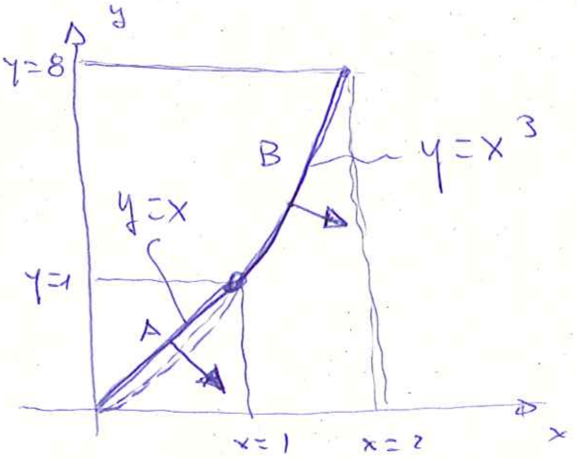
$$\frac{1}{2}\ln x = \ln y + C \qquad (x_1, y_1) \qquad C = \frac{1}{2}\ln x_1 - \ln y_1$$

$$\frac{1}{2}\ln x = \ln y + \frac{1}{2}\ln x_1 - \ln y_1 \rightarrow$$

$$\ln x - \ln x_1 = 2(\ln y - \ln y_1)$$

$$\ln \frac{x}{x_1} = 2 \ln \frac{y}{y_1} \rightarrow \ln \frac{x}{x_1} = \ln\left(\frac{y}{y_1}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{x}{x_1} = \left(\frac{y}{y_1}\right)^2}$$

Cálculo del caudal



(A) $y = x \qquad x - y = 0$

$$\nabla(x-y) = \frac{\partial x}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}} \qquad dy = dx$$

$$dA = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{2}$$

$$d\vec{s} = \vec{n}\, dA = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\, dx = (\vec{i}-\vec{j})\, dx$$

(B) $y = x^3 \quad dy = 3x^2 dx$

$$\nabla(x^3 - y) = \frac{\partial x^3}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} = 3x^2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\bar{n} = \frac{3x^2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{9x^4+1}} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + 9x^4 dx^2} = dx\sqrt{1+9x^4}$$

$$d\vec{s} = \bar{n}\, ds = (3x^2\vec{i} - \vec{j})\, dx$$

4

$$Q_A = \int_{x=0}^{x=1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (2xy\vec{i} + y^2\vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j})\, dx =$$

$$= \int_0^1 (2xy - y^2)\, dx \overset{y=x}{=} \int_0^1 (2x^2 - x^2)\, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$Q_B = \int_1^2 (2xy\vec{i} + y^2\vec{j})\,(3x^2\vec{i} - \vec{j})\, dx =$$

$$= \int_1^2 (6x^3y - y^2)\, dx \overset{y=x^3}{=} \int_1^2 (6x^6 - x^6)\, dx =$$

$$= \int_1^2 5x^6 dx = 5\left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 = \frac{5}{7}(2^7 - 1) = \frac{5 \cdot 127}{7} = \frac{635}{7}$$

$$Q_t = \frac{1}{3} + \frac{635}{7} = \frac{1912}{21}$$

MECANICA DE FLUIDOS
(Solución)

SOLUCION (1)

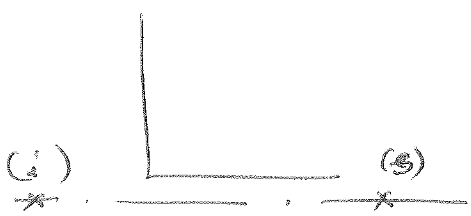
① Presión de agua en el depósito a la altura del eje del chorro

$$P_e = P_m + \gamma_g h_g + \gamma_a h_a = p_m + g \overset{h_a}{\overset{\shortparallel}{h_g}} (\rho_a + \rho_g) =$$

$$= 2\times 10^5 + 9{,}8 \times 1{,}5 \; (700 + 1000) \; \frac{Nw}{m^2} \simeq 2{,}25 \times 10^5 \; \frac{Nw}{m^2} =$$

$$= 2.25 \text{ bares}$$

Bernoulli: a lo largo del eje del tubo (entre el interior y el exterior del depósito)



$p_i = p_e = 2{,}25 \times 10^5 \; \frac{Nw}{m^2}$

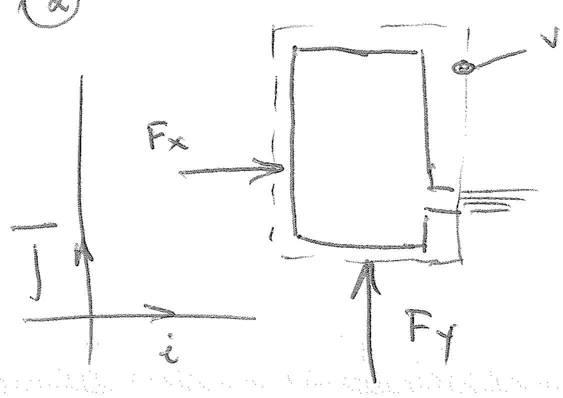
$V_i \simeq z_i \simeq z_s = p_s \simeq 0$

$$\frac{p_i}{\gamma} + \cancel{\frac{V_i^2}{2g}} + \cancel{z_i} = \cancel{\frac{p_s}{\gamma}} + \frac{V_s^2}{2g} + \cancel{z_s} + K \frac{V_s^2}{2g}$$

$$\frac{2{,}25 \times 10^5}{1000 \, \cancel{g}} = \frac{V_s^2}{2\cancel{g}} + 1{,}5 \, \frac{V_s^2}{2\cancel{g}} \quad \Rightarrow \quad V_s = \sqrt{\frac{4{,}50 \times 10^5}{2{,}5 \times 10^3}} = 13{,}41 \; \frac{m}{s}$$

---

②



Ecuación cantidad de movimiento

$$\sum \bar F = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar M_{vc}\right) + \iint_{sc} \bar v \, \rho \, (\bar v \cdot d\bar A)$$

Las fuerzas de reacción (ver esquema precedente) se suponen positivas. En estas condiciones: ②

componente horizontal : $F_x = \rho Q (V_s - V_e)$ con $V_e \equiv 0$

$V_s = 13,416 \, m/s$

Componente vertical : $F_T - Mp \equiv 0$ (el chorro de salida es horizontal)

Sustituyendo :

$$F_x = 10^3 \times A_s \times V_s \times V_s = 10^3 \, \pi \, \frac{0.1^2}{4} \times V_s^2 = 1413,63 \, Nw =$$

$$= \underline{144,10 \, kp} = F_x$$

VERTICAL

$$F_T = PESO = P_{depósito} + P_{aire} + P_{gasolina} + P_{agua} =$$

$$= P_{de} + P_{ai} + P_{ga} + P_{ag}$$

$P_{de} = 1000 \, kp = \underline{1000 \, g \, Nw}$

$P_{ag} = \rho_{ag} g \, V_{ag} = g \left[1000 \cdot \pi \, \frac{2,5^2}{4} \times 2.0 \right] Nw = \underline{9817.48 \, g \, Nw}$ ~~7363,11 g Nw~~

$P_{ga} = \rho_{ga} \, g \, V_{ag} = g \left[700 \cdot \pi \, \frac{2,5^2}{4} \times 1.5 \right] Nw = \underline{5154,18 \, g \, Nw}$

Densidad aire $\rho_{ai} = \dfrac{P}{RT} = \dfrac{(1.013 + 2) \, 10^5}{287 \times (273 + 20)} \, kg/m^3 = 3,58 \, \dfrac{kg}{m^3}$

$$\text{Peso AIRE} = \rho_{ai} \, g \, \frac{\pi D^2}{4} \times h_{ai} = 0,5 \times 3,58 \times \frac{\pi \, 2,5^2}{4} g = 8,79 g \, Nw$$

$$F_y = (9817{,}48 + 5154{,}18 + 8{,}79 + 1000)\, g \text{ Nw} =$$

$$= 15980\, g \text{ Nw} = \underline{\underline{156768{,}21 \text{ Nw} = 15980 \text{ Kp}}} = F_y$$

(3) El gas tiene una contribución simbólica (~~en~~ peso) en la fuerza vertical $\left(\frac{8.79}{15980}\right) = 0{,}00055$ (la presión se reparte por todas las paredes, y no aumenta el peso del sistema).

Por lo que a la contribución horizontal es mucho más relevante porque la presión es la principal causante de la velocidad del chorro de salida.

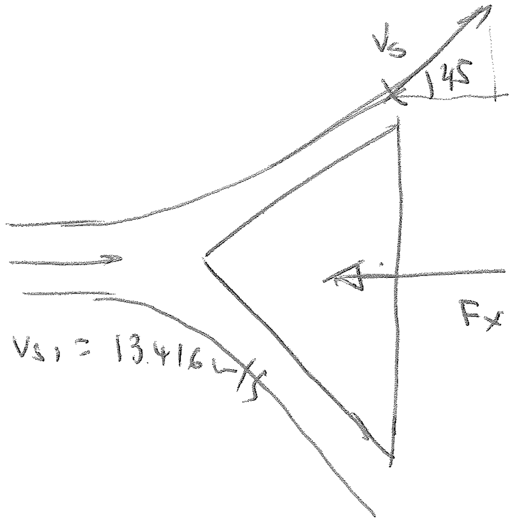
En efecto en su ausencia

$$p_i' = 0{,}25 \times 10^5 \frac{\text{Nw}}{\text{m}^2} \Rightarrow V_s' = \sqrt{\frac{0{,}50 \times 10^5}{2{,}5 \times 10^3}} = \underline{\underline{4{,}47 \text{ m/s}}}$$

En estas condiciones $F_x' = F_x \left(\frac{V_s'}{V_s}\right)^2 = \underline{\underline{F_x \cdot 0.11}} = 156.93 \text{ N}$ (la fuerza horizontal es proporcional al cuadrado de la velocidad), luego se reduce a algo más del 10%.

(4) En estas condiciones sobre el carro sólo actúan fuerzas dinámicas, tal cual se muestra:

4



Y siendo el problema simétrico (el peso del cono se desprecia) sólo hay componente horizontal (el eje vertical se compensa)

$$\sum F_x = \rho Q \left(V_{s2} - V_{s1} \right) = - F_x$$

$$V_{s2} = V_{s1} \times \cos 45^\circ = 13{,}416 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Al mantenerse el caudal y repartirse esta acción es independiente de las dimensiones del cono.

$$Q = V_s \, \pi \frac{D^2}{4}$$

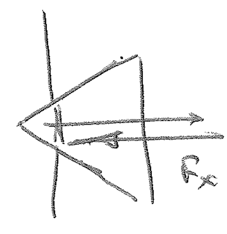
$$- F_x = 10^3 \, V_s \frac{\pi \, 0.1^2}{4} \left(V_s \frac{\sqrt{2}}{2} - V_s \right)$$

$$\underline{\underline{F_x}} = 10^3 \frac{\pi \times 0.1^2}{4} V_s^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \text{Nw} = \underline{414{,}04 \text{ Nw}}$$

(el signo supuesto es el correcto)

5

$p_{eje} = 2{,}25$ bares



En este caso es un problema de estática

$$F_x = p_e \times A_{proyectada} =$$

$$= 2{,}25 \times 10^5 \times \frac{\pi \times 0{,}1^2}{4} \text{ Nw} = \underline{\underline{1767{,}15 \text{ Nw}}}$$

La fuerza necesaria para sostener es muy superior (cuatro veces más) a la fuerza de aproximación. Y es que en general las fuerzas de presión son muy superiores a las dinámicas.

Problema Compresor

→ Calculamos las variables necesarias:

$$\rho_1 = \frac{P_1^*}{RT_1} = \frac{10^5}{287\cdot 300} = 1'16\ \frac{Kg}{m^3} \quad // \quad \rho_2 = \frac{P_2^*}{RT_2} = \frac{3\cdot 10^5}{287\cdot 390} = 2'68\ \frac{Kg}{m^3}$$

$$A = \pi\cdot R^2 = \pi\cdot 0'25^2 = 0'196\ m^2$$

$$G = \rho_1\cdot Q_1 = \rho_1\cdot v_1\cdot A \longrightarrow v_1 = \frac{G}{\rho_1\cdot A} = \frac{6}{1'16\cdot 0'196} = 26'3\ m/s$$

$$G = \rho_2\cdot Q_2 = \rho_2\int_A \vec{v_2}\cdot\vec{dA} = \rho_2\int_0^R v_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\cdot dr$$

$$G = \rho_2\, 2\pi\, v_{max}\int_0^R\left[r - \frac{r^3}{R^2}\right]dr = \rho_2\, 2\pi\, v_{max}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{1}{\cancel{R^2}}\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4}\right]$$

$$G = \rho_2\, 2\pi\, v_{max}\, R^2\cdot\frac{1}{4} \longrightarrow v_{max} = \frac{2\cdot G}{\rho_2\pi R^2} = 22'8\ m/s$$

→ Ecuación integral de la energía aplicada al VC entre las secciones 1 y 2:

$$\cancelto{0\,(Adiab)}{\frac{dQ}{dt}} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \cancelto{0\,\left(\begin{smallmatrix}Rég.\\ Perm.\end{smallmatrix}\right)}{\frac{d}{dt}\int_{VC}\left(gz+u+\frac{v^2}{2}\right)\rho\, dV} + \int_{SC}\left(\cancelto{Desp.}{gz}+u+\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right)\rho\,\vec{v_{rsc}}\cdot\vec{dA}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{eje}}{dt} = \underbrace{\int_{SC}\frac{v^2}{2}\rho\,\vec{v_{rsc}}\cdot dA}_{1} + \underbrace{\int_{SC}\left(u+\frac{P}{\rho}\right)\rho\,\vec{v_{rsc}}\cdot\vec{dA}}_{2}$$

$$1 = \int_{SC_s} + \int_{SC_e} = \underbrace{\int_A \frac{v_2^2}{2} \rho_2 v_2 \, dA}_{1.1} - \underbrace{\int_A \frac{v_1^2}{2} \rho_1 v_1 \, dA}_{1.2}$$

$$1.1 = \frac{\rho_2}{2} \int_A v_2^2 \cdot dA = \frac{\rho_2}{\cancel{2}} \int_0^R v_{max}^3 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3 \cancel{2} \pi r \, dr =$$

$$= \rho_2 \pi v_{max}^3 \int_0^R \left[1 - 3\frac{r^2}{R^2} + 3\frac{r^4}{R^4} - \frac{r^6}{R^6}\right] r \, dr =$$

$$= \rho_2 \pi v_{max}^3 \int_0^R \left[r - 3\frac{r^3}{R^2} + 3\frac{r^5}{R^4} - \frac{r^7}{R^6}\right] dr$$

$$= \rho_2 \pi v_{max}^3 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{3}{R^2}\frac{R^4}{4} + \frac{3}{R^4}\frac{R^6}{6} - \frac{1}{R^6} \cdot \frac{R^8}{8}\right] = \rho_2 \pi v_{max}^3 R^2 \frac{1}{8}$$

$$1.2 = \rho_1 \frac{v_1^3}{2} A = \frac{\rho_1 v_1^3 \pi R^2}{2}$$

$$2 = \int_{SC_s} \left(u_2 + \frac{P_2}{\rho_2}\right) G - \int_{SC_e} \left(u_1 + \frac{P_1}{\rho_1}\right) G = \left[(u_2 - u_1) + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right)\right] G =$$

$$= \left[c_e (T_2 - T_1) + \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right)\right] G$$

→ Sustituyendo valores numéricos:

$$1.1 = \rho_2 \pi v_{max}^3 R^2 \frac{1}{8} = 2'68 \cdot \pi \cdot 22'8^3 \cdot 0'25^2 \frac{1}{8} = 780 \text{ W}$$

$$1.2 = \frac{\rho_1 v_1^3 \pi R^2}{2} = \frac{1'16 \cdot 26'3^3 \cdot \pi \cdot 0'25^2}{2} = 2072 \text{ W}.$$

$$2 = \left[720(390-300) + \left(\frac{3 \cdot 10^5}{2'68} - \frac{1 \cdot 10^5}{1'16} \right) \right] \cdot 6 = 543200 \text{ W}.$$

→ Sustituyendo en la ec. de la energía:

$$\boxed{\frac{dW_{eje}}{dt} = 780 - 2072 + 543200 = 542 \text{ kW}.}$$

↳ Potencia que el compresor le aporta al aire circulante.

Cuestiones (25%)

1. ¿Qué valor presentaría el módulo de elasticidad volumétrico K para un fluido totalmente incompresible? Justificar la respuesta. Si K=20.000 Kg/cm^2 en el caso del agua, ¿cómo afecta esto a los valores de la densidad? Poner un ejemplo numérico considerando un cambio significativo de presión.

El módulo de elasticidad relaciona la variación que experimenta el volumen ocupado por un fluido ante un cambio de presión:

$$K = -\frac{dp}{\left(\frac{d\forall}{\forall}\right)}$$

Dado que un fluido totalmente incompresible no varía su volumen, el denominador sería cero y por lo tanto el valor de K infinito. En el caso del agua, si K=20000 Kg/cm^2, para que un volumen de agua experimente un cambio de un 1% (0,01), el cambio en presión debe ser de 200 Kgf/cm^2 (196 atm).

2. ¿Por qué en el flujo de Couette se considera que las fuerzas tangenciales en la interfase agua-aire son despreciables? ¿En qué caso serían verdaderamente cero?

La razón es que el aire tiene una viscosidad muy baja (puede considerarse un fluido prácticamente ideal) por lo que los esfuerzos tangenciales debidos a la viscosidad son prácticamente nulos. Evidentemente serían cero en el caso de que no existiera fluido en contacto con el agua (vacío) o que dicho fluido tuviera una viscosidad nula (fluido ideal)

3. Relacionar los siguientes casos reales con uno o varios de los conceptos correspondientes de línea de corriente, de traza y trayectoria. **Justificar las respuestas.**
   a. Las líneas formada por las migas de pan de Pulgarcito, referidas al propio Pulgarcito

Trayectoria. La línea uniría todos los lugares del espacio por los que ha pasado Pulgarcito.

   b. Las líneas de tinta en el experimento de Osborne Reynolds

Líneas de traza. La tinta marca el lugar de los puntos que ocupan las partículas de agua que han pasado por un determinado lugar en el espacio (inyector de tinta). También puede ser una buena representación de las líneas de corriente.

c. La estela de luz que deja cada uno de los coches por la noche en una foto de exposición prolongada (foto izquierda)

Trayectoria. La estela de luz (como la de un barco) marca los lugares por los que ha pasado el coche.

d. Las líneas del flujo alrededor de un coche en un túnel de viento (foto derecha)

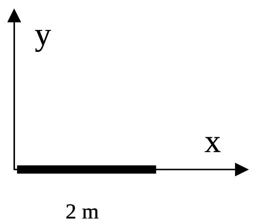
Líneas de corriente. Muestran la velocidad instantánea del viento alrededor del perfil del coche. En el caso de régimen estacionario coinciden con las trayectorias y con las líneas de traza.

Problema 1 (25%)

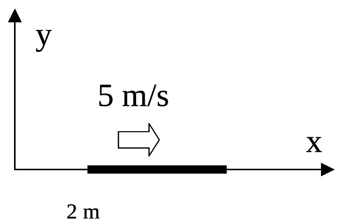
La velocidad de la partícula que en t = t0 está en el punto x0, y0 viene dada por la expresión:

$$\vec{V}_p(t) = t \cdot x_0 \cdot e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} \vec{i} - t \cdot x_0 \cdot e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} \vec{j}$$

1. Determinar la ecuación de la trayectoria de esta partícula, y escribirla en la forma y = f(x, x0, y0).
2. Determinar la ecuación del campo de velocidades.
3. Determinar si el flujo es compresible o incompresible. Sabiendo que la densidad es, para el instante t=0, constante e igual a K en todo el campo fluido. Determinar la evolución de la densidad con el tiempo.
4. Calcular la ecuación general de las líneas de corriente, y concretamente la que pasa por el punto de coordenadas x1, y1 en el instante t1.
5. Comparar las ecuaciones de la trayectoria y las de las líneas de corriente para el mismo punto de paso. ¿Qué hay que decir al respecto?
6. Determinar el caudal que atraviesa el segmento de la figura para un instante genérico t, y para un instante t= 5s , indicando el sentido del caudal, e interpretar el resultado.
7. Si el segmento anterior comienza a moverse en t=0 hacia la derecha, con velocidad constante respecto al origen de coordenadas, calcular el caudal que lo atravesará en un instante t, y en t = 5 seg. Indicar el sentido del caudal e interpretar el resultado.



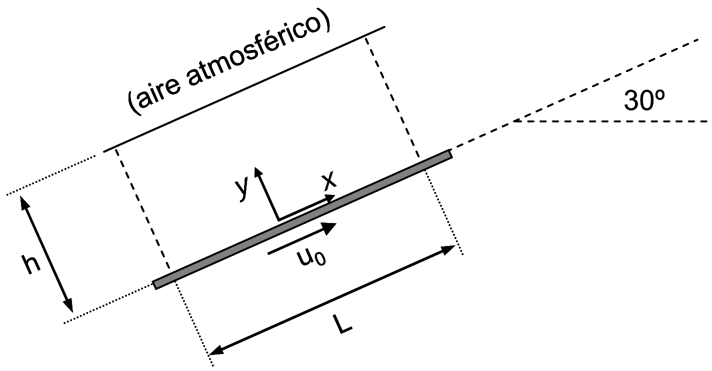
Apartado 6



Apartado 7

Problema 2 (25%)

La figura muestra un flujo de Couette. La placa inferior se desplaza, tal y como está indicado, a una velocidad constante u_0. No hay placa superior, de modo que el fluido se encuentra en contacto con la atmósfera. Según los datos y ejes mostrados en la figura, se pide hacer todos los cálculos necesarios para comprobar que se cumple el balance de potencias, y expresar el resultado sólo en función de las siguientes variables: γ, L, h, μ.



Problema 3 (25%)

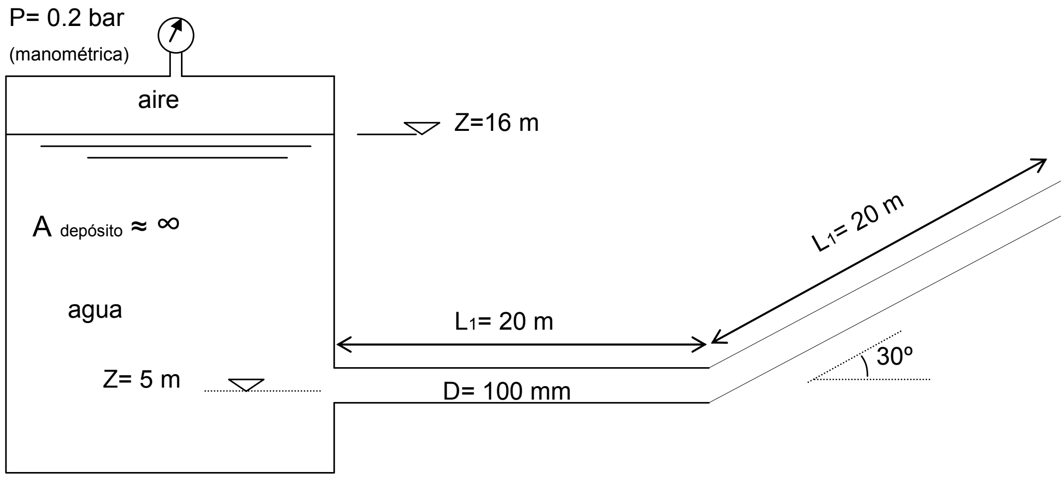
A partir del esquema de la figura, y admitiendo que el flujo es ideal, se desea averiguar:

a) La fuerza resultante total que soporta el tramo de tubería inclinado en el instante que muestra la figura.

b) La acción resultante del chorro sobre el conjunto de todo el sistema en el instante que muestra la figura.

c) Si en el instante que muestra la figura bruscamente se despresuriza la cámara de aire superior (por ejemplo agujereando la tapa de cierre), se pregunta la deceleración que sufrirá la columna de agua circulante en ese mismo momento.

d) Calcular la velocidad final a la que tenderá el fluido circulante tras la despresurización de la cámara superior así como el tiempo que transcurrirá desde ese instante inicial hasta que la velocidad del chorro supere un 10 % el valor final al que tiende el flujo.



Cuestiones (25%)

Responder de manera sintética y precisa a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuáles de las ecuaciones fundamentales explicadas durante el curso han sido obtenidas a partir de la aplicación del Teorema de Arrastre de Reynolds? ¿Cuál ha sido la propiedad extensiva a la que se ha aplicado el Teorema para llegar a cada una de las ecuaciones anteriores?

b) ¿Por qué se proporcionan los caudales de gas en Nm3/h? ¿Qué alternativa existiría para proporcionar exactamente la misma información en unidades del sistema internacional?

c) Definir viscosidad (absoluta y cinemática): Conceptos, expresiones matemáticas, factores que la influencian y ejemplos.

d) Definir coeficiente de descarga ¿Para un depósito que se vacía a través de un orificio, de unas características fijas, dicho coeficiente varía? ¿Cómo? En dicho caso, ¿qué opciones existen para considerar dicha variación en los cálculos de la evolución del nivel de agua con el tiempo cuando se vacía ese depósito?

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho \vec{h} d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h} \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

#1

Velocidad de la partícula que en $t=t_0$ está en $x_0 y_0$

$$\vec{v}_p(t) = t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \vec{i} - t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{v}_p(t) \quad \left\langle \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u_p(t) \\ \frac{dy}{dt} = v_p(t) \end{array} \right.$$

- $\frac{dx}{dt} = t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \rightarrow x = x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} + C_1$

  Para $t=t_0$ $x = x_0 \rightarrow C_1 = 0$

$$\boxed{x = x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}$$

- $\frac{dy}{dt} = -t x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} \rightarrow y = -x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} + C_2$

  Para $t=t_0$ $y=y_0$

$$y_0 = -x_0 \cdot 1 + C_2 \rightarrow C_2 = y_0 + x_0$$

$$\boxed{y = y_0 + x_0\left(1 - e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}\right)}$$

~~Campo de velocidades~~

Ecuación de la trayectoria $\quad e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} = \frac{x}{x_0}$

$$\boxed{y = y_0 + x_0\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}$$

$$y = y_0 + x_0 - x$$

Campo de velocidades:

de la trayectoria $x_0 = \dfrac{x}{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}$

$$y \longrightarrow \quad y = y_0 + \frac{x}{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}\left(1 - e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}\right)$$

$$\rightarrow y_0 = y - \frac{x}{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}} + x$$

Sustituyendo en la ec. de la velocidad de la partícula:

$$\bar{V} = t\frac{x}{\cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}}\cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}\,\vec{i} - t\frac{x}{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}\,\cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}\,\vec{j} \quad = tx\vec{i} - tx\vec{j}$$

Compresibilidad

$$\nabla\bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = t + 0 = t$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0 \longrightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\rho t \rightarrow \ln\rho = -\frac{t^2}{2} + C$$

$$t = 0 \quad \rho = K \qquad c = \ln K$$

$$\ln\rho = -\frac{t^2}{2} + \ln K \longrightarrow \frac{\rho}{K} = e^{-t^2/2} \longrightarrow \boxed{\rho = Ke^{-t^2/2}}$$

Líneas de corriente

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \longrightarrow \frac{dx}{x\cancel{t}} = \frac{dy}{-x\cancel{t}} \longrightarrow dx = -dy$$

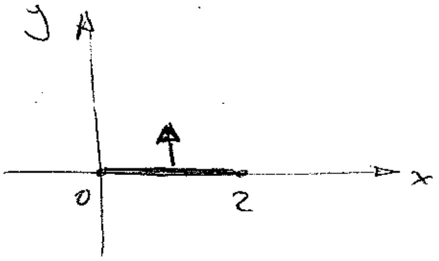
$$\longrightarrow \boxed{x = -y + C'}$$ No dependen del tiempo

Para $x_1 y_1$ en t_1 (en cualquier t igual)

$$C = x_1 + y_1 \longrightarrow x = -y + x_1 + y_1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{y = x_1 + y_1 - x}$$

So iguales a las trayectorias. Lógico pues la ecuación general de las ldc no dependen del tiempo.



$$d\vec{A} = dx\,\vec{j}$$

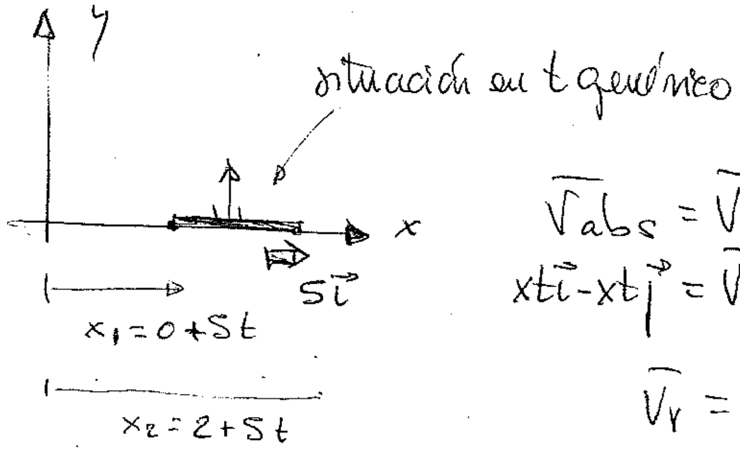
$$dQ = \vec{v}\cdot d\vec{A} = (xt\,\vec{i} - xt\,\vec{j})\cdot dx\,\vec{j} =$$

$$= -xt\,dx$$

$$Q = \int_{x=0}^{2} -xt\,dx = -t\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \mathbf{-2t}$$

En $t = 5$ seg. $Q = -2\cdot 5 = -10\ m^3/s.m$ profundidad

Interpretación: Caudal ↓ ya que hemos orientado la superficie hacia arriba, y por lo tanto la "v" va en sentido contrario al $d\vec{A}$



$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_r + \vec{V}_{arr}$$

$$xt\vec{i} - xt\vec{j} = \vec{V}_r + 5\vec{i}$$

$$\vec{V}_r = (xt - 5)\vec{i} - xt\vec{j}$$

$$dQ = \vec{V} \cdot d\vec{A} = -xt\,dx$$

$$Q = \int_{0+5t}^{2+5t} (-xt\,dx) = -t\left(\frac{x^2}{2}\right]_{0+5t}^{2+5t} =$$

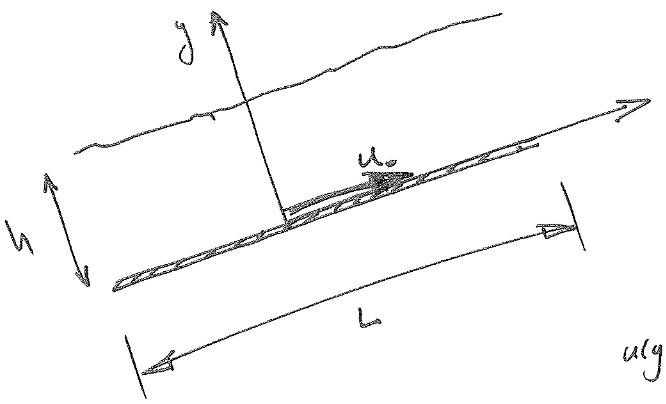
$$= -\frac{t}{2}\left(4 + \cancel{25t^2} + 20t - \cancel{25t^2}\right) = -\frac{t}{2}(4 + 20t)$$

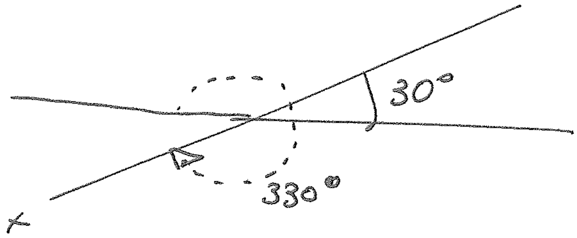
<u>negativo</u>

Para $t = 5$ seg.

$$Q = -\frac{5}{2}(4 + 20 \cdot 5) = -260 \ \frac{m^3}{s \cdot m}.$$

Problema Couette.





$$u(y) = \frac{\overbrace{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta}^{K}}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta x}^{\nearrow 0} - \gamma \operatorname{sen}\theta = -\gamma \cdot \operatorname{sen} 330° = -\gamma \cdot \frac{-1}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

Campo de velocidades:

$$\longrightarrow u(y=0) = u_0 = C_2$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[\frac{K}{\mu} y + C_1 \right] = K y + C_1 \mu$$

$$\longrightarrow \tau(y=h) = 0 \longrightarrow 0 = K \cdot h + C_1 \mu \longrightarrow C_1 = \frac{-Kh}{\mu}$$

Sustituyendo:

$$u(y) = \frac{K}{\mu} \frac{y^2}{2} - \frac{Kh}{\mu} y + u_0 = \frac{K}{\mu} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) + u_0$$

$$\longrightarrow \boxed{u(y) = \frac{\gamma}{2\mu} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) + u_0}$$

Esfuerzos cortantes:

$$\boxed{\tau(y) = \mu \left[\frac{K}{\mu} y - \frac{Kh}{\mu} \right] = K(y-h)} = \boxed{\frac{\gamma}{2}(y-h)}$$

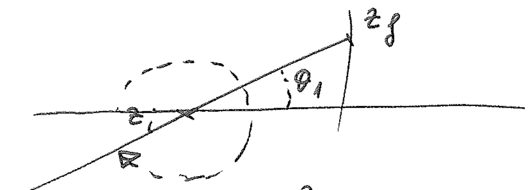
Caudal:

$$Q = \int_0^h u(y)\,dy = \int_0^h \left(\frac{K}{\mu}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + u_0\right) dy = \frac{K}{\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2}\right] + u_0 h$$

$$\boxed{Q = u_0 h - \frac{K h^3}{3\mu} = u_0 h - \frac{\gamma h^3}{6\mu}}$$

Balance de potencias: Pot Aport = Pot. Disipada.

$$\text{Pot. Aportada} = -\gamma Q \Delta z + \vec{F}_{(y=0)} \vec{v}_{(y=0)} = -\gamma Q (z_f - z_i) + \vec{F}_{(y=0)} \vec{v}_{(y=0)}$$



$\theta = 330°$

$$z_f - z_i = L \operatorname{sen}\theta_1 = -L \operatorname{sen}\theta$$

$$\longrightarrow -\gamma Q (z_f - z_i) = -\gamma Q(-L \operatorname{sen}\theta) = -\gamma Q L \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-\gamma Q L}{2} = \frac{-\gamma L}{2}\left[u_0 h - \frac{\gamma h^3}{6\mu}\right] = \frac{\gamma^2 L h^3}{12\mu} - \frac{\gamma L u_0 h}{2}$$

$$\longrightarrow \vec{F}_{(y=0)} \cdot \vec{v}_{(y=0)} = -\tau(y=0) L \cancel{\vec{i}} \cdot u_0 \cancel{\vec{i}} = -\tau(y=0) \cdot L \cdot u_0$$

$$= -\frac{\gamma}{2}(-h) L u_0 = \frac{\gamma h L u_0}{2}$$

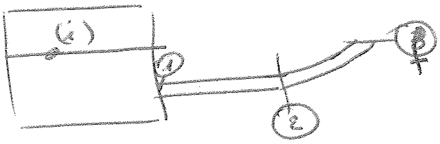
$$\boxed{\text{Pot. Aportada} = \frac{\gamma^2 L h^3}{12\mu}} - \cancel{\frac{\gamma L u_0 h}{2}} + \cancel{\frac{\gamma h L u_0}{2}}$$

$$\boxed{\text{Pot. Disipada}} = \int_0^h \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 L\,dy = \int_0^h \mu \left[\frac{K}{\mu}(h-y)\right]^2 L\,dy =$$

$$= \frac{K^2}{\mu}\int_0^h (h^2 + y^2 - 2hy) L\,dy = \frac{\gamma^2 L}{4\mu}\left[h^2 h + \frac{h^3}{3} - 2h\frac{h^2}{2}\right] = \boxed{\frac{\gamma^2 L h^3}{12\mu}} \quad \text{c.q.d.}$$

Fluido ideal, se desprecia el PESO

<u>SOLUCIÓN</u>   NOTACIÓN



(1)

cálculo de las condiciones iniciales $z_f = 5 + 20 \operatorname{sen} 30 = \underline{15\,m}$

$$B_i = B_f \Rightarrow \frac{0.2 \times 10^5}{9.81 \times 10^3} + 16 = 15 + \frac{v_f^2}{2g} \Rightarrow v_f = \sqrt{2g\left(\frac{20}{9.81}+1\right)} = 7.72\ m/s$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = 1 + \frac{v_f^2}{2g}$$

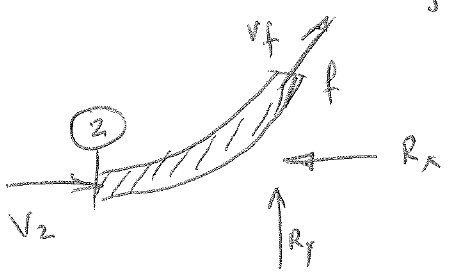
<u>APARTADO a</u>

$$\Sigma \vec{F} = \rho Q (\vec{v}_f - \vec{v}_2) \quad \text{con}$$

$$\Sigma F_{ext} = p_2 A \vec{i} - R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$\vec{v}_f = v_f(\cos 30\,\vec{i} + \operatorname{sen} 30\,\vec{j}) = 7.72\left(0.5\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$
$$= 6{,}67\,\vec{i} + 3.86\,\vec{j}\ m/s$$

$$\vec{v}_2 = 7.72\,\vec{i}\ m/s$$



Reacciones supuestas

$$\text{con } Q = \frac{\pi \phi^2}{4} \cdot V = \frac{\pi \phi^2}{4} v_f = \frac{\pi \times 0.01}{4} \cdot 7.72 = 0.0606\ m^3/s$$

$$\boxed{\rho Q = 60.6\ kg/s}$$

sustituyendo

Componente x $\left\{ -R_x + p_2 A = 60.6\,(-7.72 + 6.67) \Rightarrow R_x = (63{,}63 + p_2 A)\ Nw \right.$

" y $\quad R_y = 60.6\ (3.86)\ Nw$ $\boxed{R_y = 233{,}92\ Nw}$

<u>Cálculo p_2</u>:

$$\frac{p_i}{\gamma} + 16 = 5 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad \text{SUSTITUYENDO} \quad \frac{p_2}{\gamma} = 11 - \left(\underset{1+v_f^2/2g}{\frac{p_i}{\gamma}} - \underset{v_f^2/2g}{\frac{v_2^2}{2g}}\right) = 10$$

$$\text{POR TANTO}: \quad p_2 A = 10\ \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times 10^3 \times 9.81 = 770.46\ Nw$$

2° APARTADO

$$\boxed{\begin{array}{l} R_x = 834.10\ Nw \\ R_y = 233{,}92\ Nw \end{array}}$$

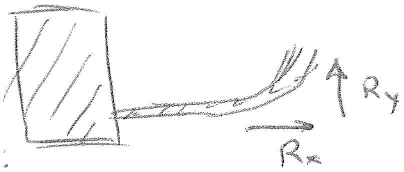
luego $R_x = (770.46 + 63.63)\ Nw$

$$\boxed{R_x = 834.10\ Nw}$$

CON LOS SIGNOS SUPUESTOS : LUEGO $\vec{R} = -834{,}10\,\vec{i} + 233{,}92\,\vec{j}$

(b) Al considerar todo el conjunto, sólo hay flujo de salida.

El conjunto está envuelto en su totalidad por la atmósfera:



sólo hay fuerzas de reacción (no hay de presión)

$$\bar{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \qquad \bar{V}_f = 6{,}67\,\bar{i} + 3.86\,\bar{j}$$

$$R_x = \rho Q \times 6{,}67 \Longrightarrow R_x = 404.2 \text{ Nw}$$

$$R_y = \rho Q \times 3.86 \Longrightarrow R_y = 233.92 \text{ Nw}$$

$$\boxed{\vec{R} = 404.2\,\vec{i} + 233.92\,\vec{j}}$$

(c) ECUACIÓN DEL TRANSITORIO, TRAS LA DESPRESURIZACIÓN:

$$16 = 15 + \frac{L}{g}\frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{2g} \qquad \text{(NO HAY FRICCIÓN)}$$

en $t=0$ $\quad v = V_f = 7.72 \quad$ y $\quad \frac{V^2}{2g} = 3.04$ m

luego en $t=0$ $\quad \left|\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = (1 - 3.04)\frac{g}{L}$ m/s^2 $= -0.5$ m/s^2

$$\boxed{\text{DECELERACIÓN} = -0.5 \text{ m/s}^2}$$

---

d) Hay que integrar la ecuación precedente

$$1 = \frac{L}{g}\frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{2g}$$

a partir de las condiciones iniciales $\left| \begin{array}{l} t = 0 \\ v = V_0 = 7.72 \text{ m/s} \end{array}\right.$

que corresponden al momento en que el calderín se despresuriza

La velocidad a la que tiende el flujo $\left(\frac{dV}{dt} \to 0\right)$, es

$$\frac{V_f^2}{2g} = 1 \qquad \boxed{V_f = 4.43 \text{ m/s}}$$

Y preguntan por el tiempo que transcurrirá hasta que

$$V = 1.1\, V_f = 4.87 \text{ m/s}$$

Reescribiendo la ecuación

$$\frac{V_f^2}{2g} = \frac{L}{g}\frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{2g} \quad , \quad \text{separando variables:}$$

$$\int_{V=V_0}^{V} \frac{dV}{V_f^2 - V^2} = \int_{t=0}^{t} \frac{1}{L}\, dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V_f + V} + \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V_f - V} = \frac{2}{L} \cdot t$$

resolviendo $\quad \ln \frac{V + V_f}{V - V_f}\Big]_{V_0}^{V} = \frac{2}{L} \cdot t$

$$\boxed{\ln \frac{V + V_f}{V - V_f} - \ln \frac{V_0 + V_f}{V_0 - V_f} = \frac{2}{L} \cdot t}$$

Con $\left.\begin{array}{l} V_0 = 7.72 \text{ m/s} \\ V_f = 4.43 \text{ m/s} \\ V = 1.1\, V_f \end{array}\right\}$ queda: $\ln \frac{2.1}{0.1} - \ln \frac{4.43 + 7.72}{7.72 - 4.43} = \frac{2}{40} T_e$

$$\ln 21 - \ln 3.69 = \frac{T_e}{20} \Rightarrow \boxed{T_e = 34.76 \text{ s}}$$

Cuestiones (25%)

Responder de manera sintética y precisa a las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuáles de las ecuaciones fundamentales explicadas durante el curso han sido obtenidas a partir de la aplicación del Teorema de Arrastre de Reynolds? ¿Cuál ha sido la propiedad extensiva a la que se ha aplicado el Teorema para llegar a cada una de las ecuaciones anteriores?

   i. Ecuación de continuidad, aplicando el TAR a la propiedad masa
   ii. Ecuación integral de la energía, aplicando el TAR a la propiedad energía
   iii. Ecuación de la cantidad de movimiento, aplicando el TAR a la propiedad cantidad de movimiento
   iv. Ecuación del momento cinético, aplicando el TAR a la propiedad momento de la cantidad de movimiento

b) ¿Por qué se proporcionan los caudales de gas en Nm3/h? ¿Qué alternativa existiría para proporcionar exactamente la misma información en unidades del sistema internacional?

Es equivalente a dar como dato el caudal másico de gas que circula por la tubería. En flujo compresible la ecuación de continuidad nos garantiza que el caudal másico ($G=\rho\cdot Q$) se mantiene constante. Sin embargo, el caudal volumétrico no tiene por que serlo. Un caudal en Nm3/h es un caudal volumétrico, pero con densidad conocida (la del gas en condiciones normales, por ejemplo 1 atm de presión y 20ºC). A partir de esos datos es posible conocer el valor del caudal másico.

Esta es la única finalidad de esta expresión, ya que de hecho puede que las mencionadas "condiciones normales" no se den en ningún punto de la conducicón.

c) Definir viscosidad (absoluta y cinemática): Conceptos, expresiones matemáticas, factores que la influencian y ejemplos.

Peso específico

Se define como el peso del fluido por unidad de volumen:

$$Peso\ específico \quad \gamma = \rho g$$

siendo sus dimensiones $M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$ y las unidades utilizadas para su medida:

Sistema	Unidad
Internacional	Nw/m^3
CGS	$dina/cm^3$
Técnico	Kp/m^3
Anglosajón	lbf/pie^3

Algunas equivalencias interesantes son:

dina = 10^{-5} Nw
Kp = 9.81 Nw
lbf (libra fuerza) = 4.44822 Nw = 0.4534 Kp

Se define el **peso específico relativo** como:

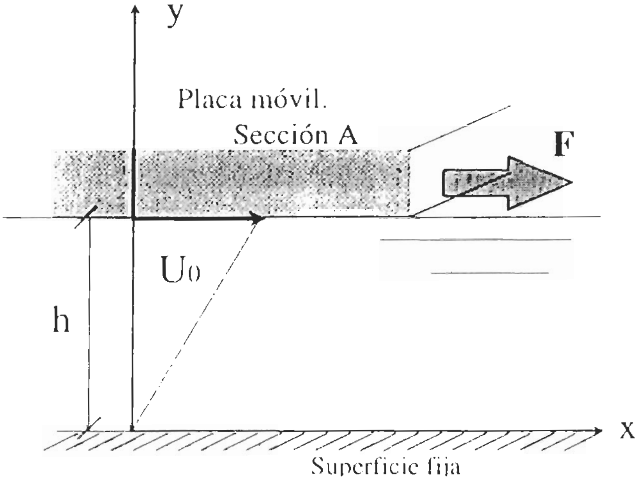
$$Peso\ especifico\ relativo = \frac{\gamma}{\gamma_a} = \frac{\rho g}{\rho_a g} = \frac{\rho}{\rho_a}$$

el cociente entre el peso específico del fluido en cuestión y el peso específico del agua en condiciones normales (γ_{agua} = 9810 Nw/m^3). Lógicamente, coincide con el valor de la densidad relativa.

1.5 VISCOSIDAD

Podemos definir la **viscosidad** como una propiedad característica de cada fluido, que implica o cuantifica la dificultad que ofrece dicho fluido al movimiento (deformación continua). Se define, pues, la viscosidad como el coeficiente de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante τ= F/A y el gradiente de velocidades que se establece cuando una placa plana se desplaza en el seno de un fluido.

Según la ley de Newton de la viscosidad, y tal y como se ve en la Figura:



$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Definimos, así, la viscosidad como ese coeficiente de proporcionalidad entre la tensión de arrastre y el gradiente de velocidad.

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy}$$

En el caso específico de que la variación de la velocidad con el alejamiento de la pared fuese constante (campo de velocidades lineal), la viscosidad absoluta adoptaría, asimismo un valor constante.

$$\text{si} \quad \frac{du}{dy} = \frac{U_0}{h} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \tau = \mu \frac{U_0}{h}$$

La ley de Newton expresa el esfuerzo cortante que se transmite entre las capas de fluido. La existencia de esfuerzos cortantes es inherente al movimiento de los fluidos viscosos y ello implica necesariamente una disipación de energía.

A un fluido que carezca de viscosidad se le denomina ideal, no disponiendo en este supuesto de capacidad para transmitir el movimiento de una capa a la contigua. Como veremos más adelante tampoco disipan energía en sus desplazamientos. Hablando estrictamente, no existen fluidos ideales, podría asimilarse esta situación a los fluidos cuya viscosidad es muy baja (por ejemplo, los gases), o bien aquellos en los cuales las condiciones cinemáticas no dan lugar a que se manifieste la viscosidad, esto es, a la aparición de esfuerzos cortantes.

El inverso de la viscosidad se le denomina por razones obvias, **fluidez.**

La viscosidad de un fluido varía con la presión y la temperatura, siendo mucho más sensible a esta segunda variable. Aunque a un aumento de presión le corresponde un aumento de viscosidad éste, por lo general, no es significativo y la mejor prueba de ello es que no se han propuesto leyes de variación, $\mu=\mu(T_o, p)$.

Sin embargo, la viscosidad experimenta importantes cambios con la temperatura comportándose en líquidos y gases de modo bien diferente. En los primeros la viscosidad

disminuye con la temperatura mostrando en los segundos la tendencia inversa.
En los líquidos la ley, de carácter empírico, que relaciona μ - T resulta ser,

$$\mu = \frac{\mu_o}{A + BT + CT^2}$$

y para el caso particular del agua se tiene:

$$\mu = \frac{0.0178}{1 + 0.0337\,\theta + 0.0002\,\theta^2} \quad (\mu \text{ en poise}, \ \theta \text{ en } ^\circ C)$$

siendo un poise, como veremos, la unidad de viscosidad en el sistema C.G.S.

En el caso de un fluido gas lo más frecuente es recurrir a una ley potencial del tipo,

$$\frac{\mu}{\mu_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^n$$

dependiendo el valor del exponente del gas en cuestión.

Dimensionalmente la viscosidad, según se deriva de la relación esfuerzo cortante-gradiente de velocidades, es:

$$[\,\mu\,] = M\,L^{-1}\,T^{-1}$$

y la unidad en los dos sistemas básicos resulta ser:

C.G.S.:	1 poise = 1 gr/cm seg.
	1 centipoise (cP) = 10^{-2} poise
SI:	1 poiseuille= 1 Kg/m seg = 10 poise
Anglosajón	lbfseg/pie ; slug/ pie·seg

De la relación μ = μ(T) para el agua concluimos que la viscosidad del agua a 0 °C es 1.78 centipoises. Los gases presentan valores inferiores y los aceites bastante superiores. Ver nuevamente en la ref. 1 gráficos que muestran la variación de las viscosidades de los fluidos con la temperatura.

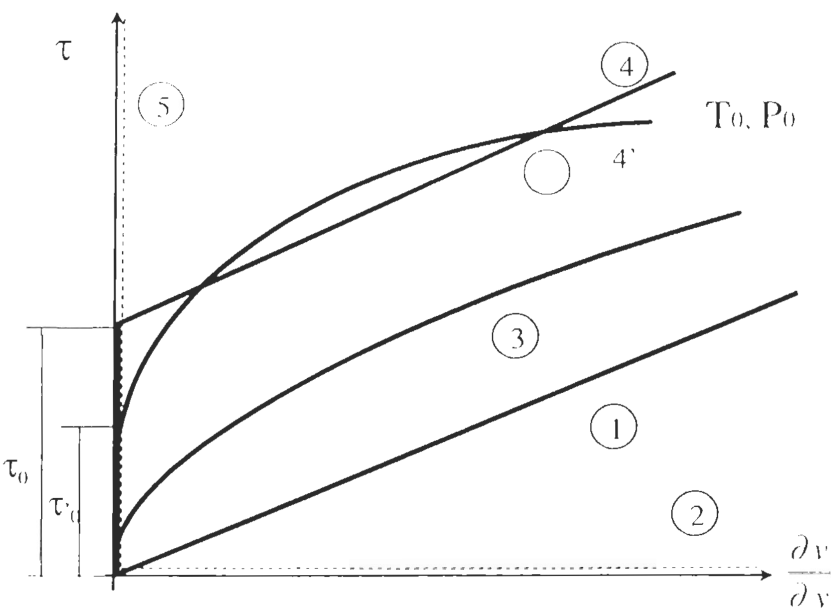
Existen otras medidas poco físicas de la viscosidad como son los grados SAE, los segundos Redwood o Saybolt o los grados Engler. En general se utilizan bastante en la práctica industrial y en realidad son medidas directas del tiempo de vaciado de una cantidad de líquido que llena un determinado volumen de un recipiente de geometría dada o bien el cociente de los tiempos de vaciado entre el líquido en cuestión y el fluido patrón. Se pueden observar al respecto las gráficas anexas al final del Capítulo.

Finalmente diremos que el cociente $\nu = \mu/\rho$ se conoce como viscosidad cinemática por sus dimensiones ($L^2 \cdot T^{-1}$). Sin significado físico alguno resulta en ocasiones útil para simplificar expresiones. En el sistema C.G.S. la unidad se le denomina Stoke. Debido a la altísima densidad másica del mercurio la viscosidad cinemática resulta en este caso tener el valor mínimo.

CGS:	1 stoke= 1 cm^2/seg
	1 centistoke (Cst)= 10^{-2} stoke
SI:	1 m^2/seg = 10^6 centistokes
Anglosajón:	pie^2/seg

La viscosidad es la propiedad más característica de los fluidos por lo que éstos acostumbran a clasificarse atendiendo a su comportamiento en relación con este parámetro.

En la adjunta gráfica están contemplados los diferentes casos que se nos pueden presentar en la relación τ - (dv/dy) y seguidamente los comentaremos con brevedad, apoyándonos en los números que definen las gráficas:



1. Cuando existe proporcionalidad entre esfuerzos cortantes y gradiente de velocidades, la viscosidad es un invariante (supuestos p y T constantes), denominándose el fluido Newtoniano ya que como vimos fue Newton quien introdujo por vez primera este concepto. Son los medios continuos que estudiaremos a lo largo del presente curso.

2. Si la viscosidad es prácticamente nula el fluido es ideal y puede considerarse un caso particular de los Newtonianos.

3. La viscosidad depende del grado de deformación previa. Son los fluidos no newtonianos que pese a tener su importancia (pulpas de fruta, sangre, etc) quedan fuera del alcance del presente curso.

4. Es un cuerpo plástico que precisa de un esfuerzo inicial (τ_0, τ'_0) para iniciar su deformación. Si la gráfica es lineal se trata de un plástico lineal y si es curva se denomina fluido Bingham en cuyo caso la relación entre τ y $(\partial v/\partial y)$ resulta ser:
$$\tau = A + B(\partial v/\partial y)^n$$

5. Medio elástico, p.e. un acero con proporcionalidad entre tensión y deformación pero no entre aquella y el gradiente de velocidades.

1.6 MÓDULO DE ELASTICIDAD VOLUMÉTRICO.

Nos indica lo sensible que es un fluido a los cambios de presión a través de su variación de volumen. Lógicamente se trata de compresiones por cuanto un fluido no tiene resistencia alguna a la tracción.

El modulo de elasticidad se define como:

$$K = -\frac{dp}{\left(\frac{d\forall}{\forall}\right)}$$

y representa la variación unitaria de volumen ante un cambio de presión. El signo negativo representa el decremento de volumen que se produce en el fluido ante una compresión (dp>0) y hace que el módulo de elasticidad sea positivo ya que ambas variaciones son contrarias.

Es frecuente expresar el módulo de elasticidad en función de la densidad, resultando

$$K = -\frac{dp}{d\rho / \rho}$$

Las unidades del módulo de elasticidad son las mismas que las de la magnitud presión.

El módulo de elasticidad es prácticamente un invariante en líquidos (aumenta de modo casi inapreciable con la presión) y presenta valores ciertamente elevados (agua: K = 20.000 kg/cm^2, aceite: K = 15.000 kg/cm^2) en tanto que en los gases es extremadamente sensible a la presión. Se justifica de modo casi inmediato que, en gases perfectos,

d) Definir coeficiente de descarga ¿Para un depósito que se vacía a través de un orificio, de unas características fijas, dicho coeficiente varía? ¿Cómo? En dicho caso, ¿qué opciones existen para considerar dicha variación en los cálculos de la evolución del nivel de agua con el tiempo cuando se vacía ese depósito?

El coeficiente de descarga C_D es un factor empírico que relaciona el caudal que teóricamente sale por un orificio realizado en un depósito con el que realmente sale por el mismo. Las discrepancias en ambos valores se deben a variaciones en el valor teórico de la velocidad (pérdidas energéticas) y en el valor teórico de la sección (la sección efectiva de paso es menor en la realidad).

Dichas discrepancias se compensan con los coeficientes de velocidad C_V y de contracción C_D, ambos menores que uno. El coeficiente de descarga es el producto de ambos y también tiene un valor inferior a la unidad.

El coeficiente de descarga es propio de cada depósito y orificio. Además, varía con el nivel del agua (al variar la velocidad de salida) y por tanto dicha variación debe ser tenida en cuenta al calcular el tiempo de vaciado del depósito. Con el fin de simplificar los cálculos, la variación del C_D se puede modelar a partir de varios valores experimentales del mismo. En concreto y con el fin de simplificar cálculos:

1. Suponiendo una variación lineal del coeficiente (y ajustando por lo tanto una recta a los distintos valores del coeficiente obtenidos midiendo en la realidad). La integral se realizaría con una expresión del coeficiente en función de la altura del agua en el depósito.

2. Considerando la variación del coeficiente como discreta (en lugar de continua) y suponiendo por lo tanto que en cada intervalo considerado su valor permanece constante. Se definirían así una serie de intervalos y se dividiría la integral en tantas integrales como intervalos se hayan definido. En cada una de ellas, el valor de C_D sería distinto y constante.

Problema 1 (25%)

Se acciona el mecanismo de descarga de la cisterna de un WC estando la cisterna totalmente llena de agua (nivel z = 0,2 m sobre la base de la cisterna). El agua sale de la cisterna por un orificio de 50 mm de diámetro y coeficiente de descarga 0,6 situado en el fondo de la misma, fluyendo hacia el exterior (presión atmosférica).

En el momento en que el agua comienza a descender por efecto de la descarga, se abre parcialmente una válvula de llenado accionada por flotador situada en la parte superior de la cisterna. El caudal de entrada a la cisterna es función del nivel de agua en la misma, siguiendo la ley que aparece en la figura.

En el momento en que el nivel del agua es z = 0,02 m, el mecanismo de descarga cierra el orificio de salida. No obstante, la cisterna continúa llenándose con el caudal de entrada hasta que el nivel sea el máximo (z = 0,2 m), instante ne el qu ese cierra también la entrada.

Determinar el tiempo que transcurre desde que se acciona el mecanismo de descarga hasta que se cierra el orificio de salida (T1), así como el tiempo que transcurre desde ese instante hasta que se cierra completamente la válvula de llenado (T2), cuando el caudal de entrada es 0 (z = 0,2 m).

Suponer, como simplificación, que cuando comienza a vaciarse la cisterna (desde 0 hasta T1), el caudal de entrada es despreciable hasta que el nivel de agua es igual o inferior a 0,15 m. Para valores inferiores a z = 0,15 m tener en cuenta el caudal de entrada.

Para la fase de llenado, desde el momento en que se cierra el orificio de salida hasta que se anula el caudal de entrada, considerar el caudal de entrada sin ninguna simplificación.

Las dimensiones de la cisterna aparecen el la figura.

Nota: Posible cambio de variable para resolver una integral (z = a2).

Problema 2 (25%)

Una bomba trasiega en régimen permanente un caudal de 1 l/seg de un fluido de viscosidad cinemática 20•10-6 m2/s desde un depósito hasta la entrada de una máquina. A la salida de la bomba la presión relativa (manométrica) es de 20 bar. La conducción es de sección circular, de diámetro 50 mm. El fluido tiene una densidad de 800 kg/m3.

1. Comprobar si el régimen es laminar, turbulento o de transición.
2. Determinar las presiones en los puntos 2 y 3 de la instalación.
3. Determinar la ecuación del perfil de velocidades u(r), tanto para el tramo 1-2 como para el tramo 2-3.
4. Realizar un balance energético (de potencias) global de la instalación y comprobar que se verifica.

Figura Problema 1

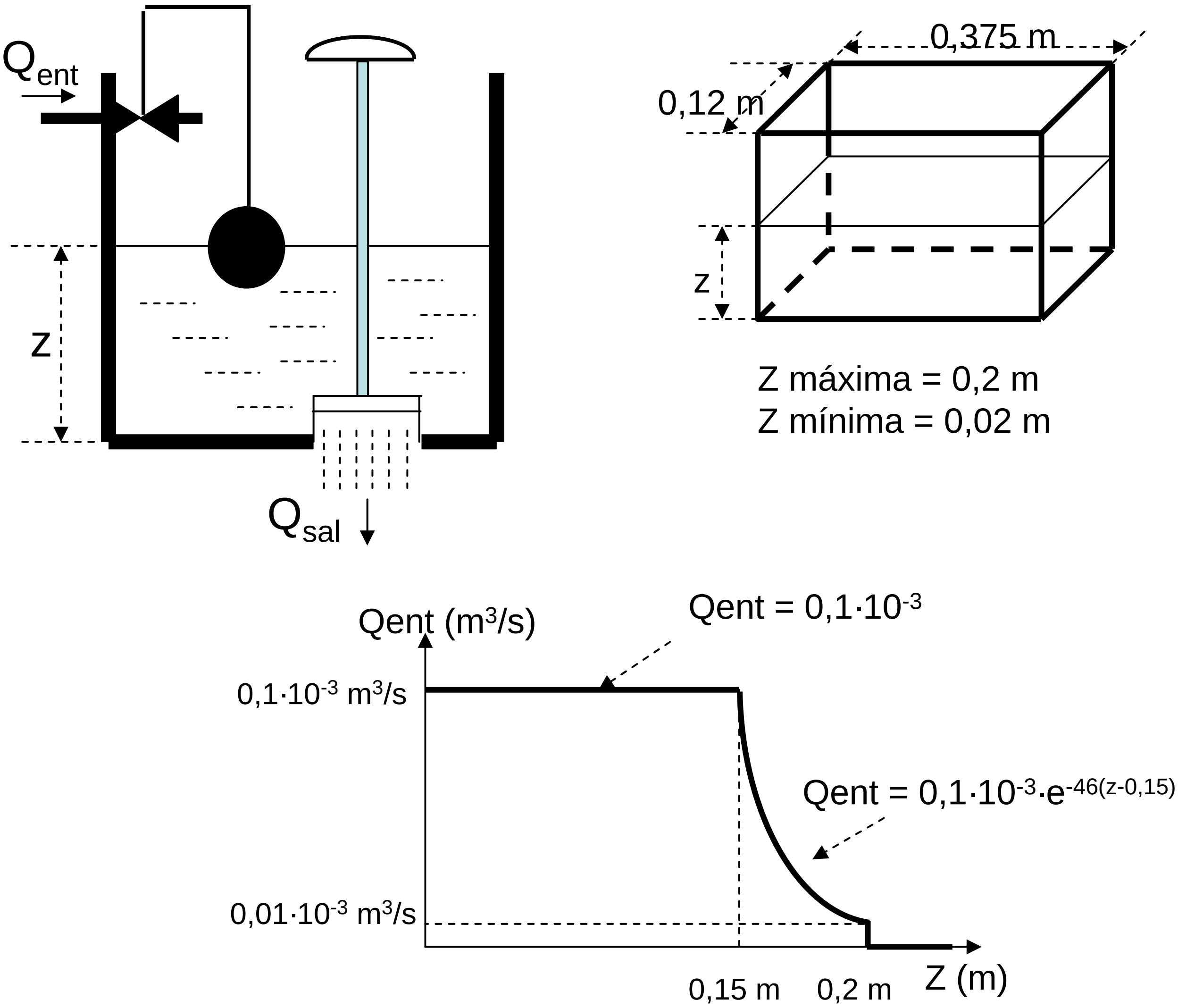
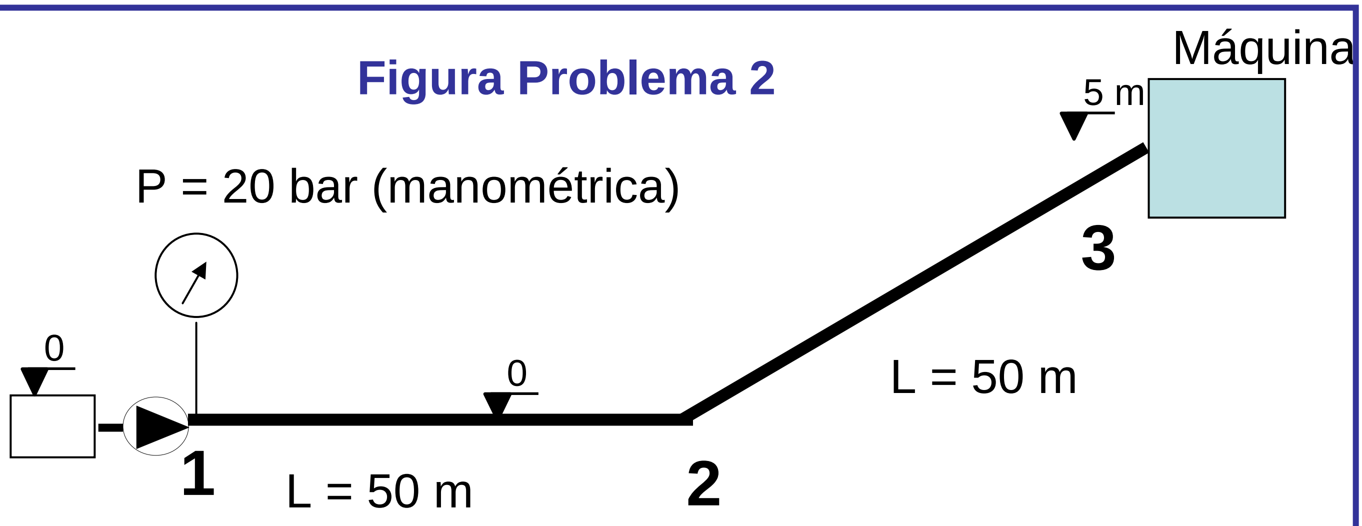


Figura Problema 2



Problema 3 (25%)

El avión de la figura está siendo diseñado para albergar dos motores de propulsión a chorro que lo impulsan mediante la expulsión de gases por su parte posterior.

a) Determinar la velocidad en la tobera de los gases necesaria para que el avión despegue, teniendo en cuenta que la fuerza ascendente en las alas Fy es función de la velocidad horizontal según la ecuación:

$$F_y = 66 \cdot V_x^{\,2}$$

Nota: Se considera que el avión despega a velocidad casi constante cuando la fuerza ascendente es superior al peso en un 10%. Es decir

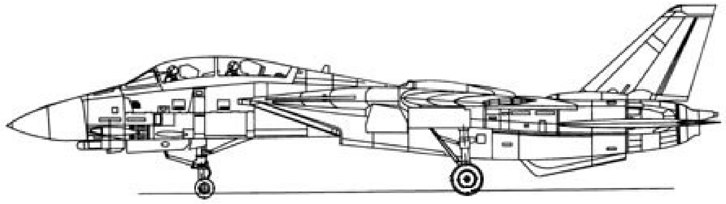
$$\frac{F_y}{Peso} > 1.1$$

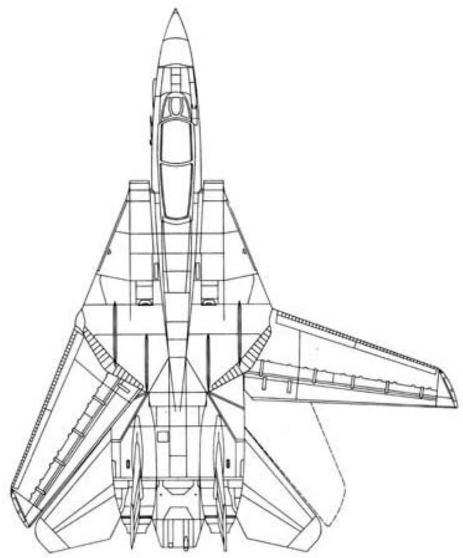
b) El avión se equipa con unos motores que expulsan los gases a una velocidad de salida Vg= 250 m/s. Considerando que el avión parte del reposo, plantear la ecuación diferencial que resuelta proporciona el tiempo que tarda el avión en despegar.

c) Resolver la ecuación diferencial (calcular t) o detallar cómo se resolvería utilizando una hoja de cálculo (p.e. MS Excel)

Datos:

- Fuerza de resistencia al avance (con el aire) $F_D = 2.7 \cdot V_x^{\,2}$
- Masa avión: 24000 Kg
- Densidad gases: 1.2 Kg/m3
- Área tobera de cada motor: 0.2 m2





Cuestiones (25%)

a) Explicar el sentido físico de cada uno de los sumandos que componen la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas no inerciales.

b) Explicar lo más detalladamente posible a qué magnitud física corresponde cada una de las variables de cada uno de los sumandos que componen la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas no inerciales.

c) Explicar qué términos de la ecuación del flujo compresible isotermo se corresponden, atendiendo a la magnitud física que representan, con qué otros términos de la ecuación de Bernoulli generalizada.

d) Explicar qué hipótesis de trabajo justifican el hecho de que en la ecuación del flujo compresible isotermo no aparezcan términos que sí aparecen en la ecuación de Bernoulli generalizada.

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16\,fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

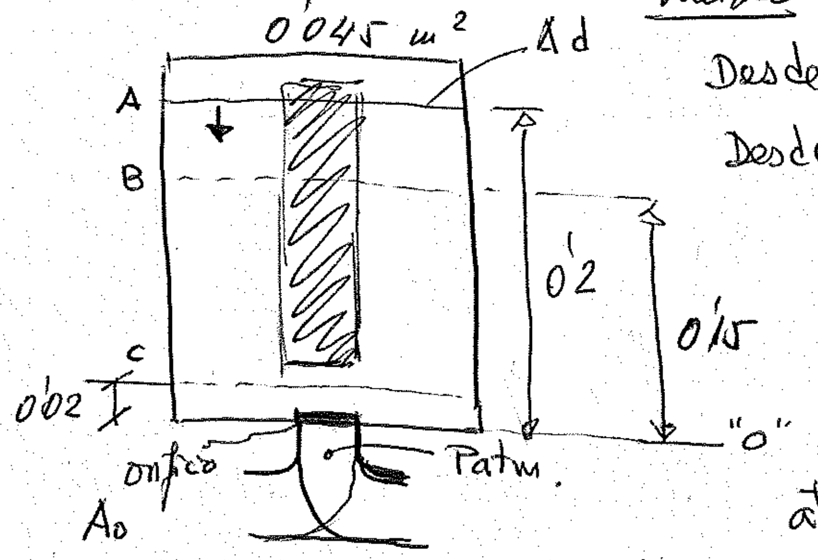
Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Vaciado



Desde A → B Q salida

Desde B → C Q entrada y Q salida

Llamamos z al nivel de agua sobre 0. A la salida del orificio se tiene presión atmosférica. Aplicando Bernoulli entre el nivel de agua (cota z y patm) y la salida (cota 0 y patm). (Tomamos presiones relativas de manera que patm = 0).

$$z = \frac{v^2}{2g} \rightarrow v = \sqrt{2gz}$$

$Q = v \cdot A_0$ (caudal teórico)

$Q = C_d A_0 v = C_d A_0 \sqrt{2gz}$ (Caudal real)

\# A → B Solo se considera el agua que sale $z : 0'2$ a $0'15$.

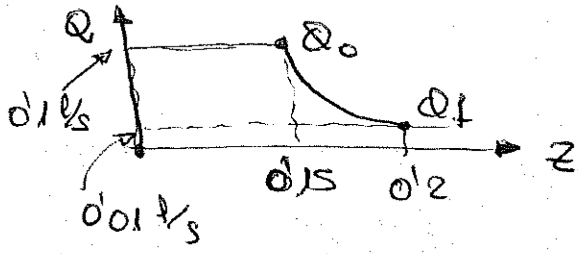
$$A_d \frac{dz}{dt} = -Q_{salida} \rightarrow A_d \frac{dz}{dt} = -C_d A_0 \sqrt{2gz}$$

$$\frac{dV}{dt}$$

$$\int_{0'2}^{0'15} \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\int_0^{t_1} \frac{C_d A_0 \sqrt{2g}}{A_d} dt$$

$$2\sqrt{z}\Big]_{0'2}^{0'15} = -\frac{C_d A_0}{A_d}\sqrt{2g}\, t_1 \rightarrow t_1 = 1'033 \text{ seg.}$$

$B \rightarrow C$



$$A_d \frac{dz}{dt} = Q_e - Q_s$$

$Q_s \rightarrow C_d A_0 \sqrt{2g z}$

$$A_d \frac{dz}{dt} = 0'1 \cdot 10^{-3} - C_d A_0 \sqrt{2g}\sqrt{z}$$

$$\int_{0'15}^{0'02} \frac{dz}{0'1\cdot 10^{-3} - C_d A_0 \sqrt{2g}\sqrt{z}} = \int_0^{t_2} \frac{dt}{A_d}$$

Cambio variable

$z = a^2 \longrightarrow$

$dz = 2a\,da$

$$\int \frac{dz}{A - B\sqrt{z}} = \int \frac{2a\,da}{A - Ba} = -\frac{2}{B}\int \frac{-Ba\,da}{A - Ba} = -\frac{2}{B}\int \frac{A - Ba - A}{A - Ba}\,da =$$

$$= -\frac{2}{B}\int \frac{A - Ba}{A - Ba}\,da + \frac{2A}{B}\int \frac{da}{A - Ba} = -\frac{2}{B}\underbrace{a}_{\sqrt{z}} - \frac{2A}{B^2}\ln(A - B\underbrace{a}_{\sqrt{z}})$$

$A = 0'1 \cdot 10^{-3}$ $\quad B = C_d A_0 \sqrt{2g} = 5'218 \cdot 10^{-3}$

$$\left[-\frac{2}{5'218\cdot 10^{-3}}\left(\sqrt{0'02} - \sqrt{0'15}\right) - \frac{2\cdot 0'1\cdot 10^{-3}}{(5'218\cdot 10^{-3})^2}\ln\frac{0'1\cdot 10^{-3} - 5'218\cdot 10^{-3}\sqrt{0'02}}{0'1\cdot 10^{-3} - 5'218\cdot 10^{-3}\sqrt{0'15}}\right] = \frac{t_2}{0'045}$$

$t_2 = 4'61$ seg.

Total descarga: $\quad V = 0'045\,(0'2 - 0'02) = 8'1 \cdot 10^{-3}\,m^3 = 8'1\,l$

$t = t_1 + t_2 = 1'033 + 4'61 = 5'643$ seg.

Llenado.

(A) Desde 0'02 → 0'15 $Q_e = 0'1 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$ constante

(B) Desde 0'15 → 0'2 ley exponencial $\underline{Q = 0'1 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-46(z-0'15)}}$

FASE A

$$A_d \frac{dz}{dt} = 0'1 \cdot 10^{-3} \longrightarrow \int_{0'02}^{0'15} dz = \frac{0'1 \cdot 10^{-3}}{0'045} \int_0^{t_A} dt \ ;$$

$$0'15 - 0'02 = \frac{0'1 \cdot 10^{-3}}{0'045} t_A \rightarrow \boxed{t_A = 58'5\ seg}$$

FASE B

$$A_d \frac{dz}{dt} = 0'1 \cdot 10^{-3} e^{-46(z-0'15)}$$

$$\int_{0'15}^{0'2} \frac{dz}{e^{-46(z-0'15)}} = \int_0^{t_B} \frac{0'1 \cdot 10^{-3}}{0'045} dt \ ; \frac{1}{46} \int_{0'15}^{0'2} 46 e^{46(z-0'15)} dz = \frac{0'1 \cdot 10^{-3}}{0'045} t_B$$

$$e^{46(0'2-0'15)} - e^{46(0'15-0'15)} = \frac{0'1 \cdot 10^{-3} \cdot 46}{0'045} t_B$$

$$\boxed{t_B = 87'79\ seg.}$$

$$t_{llenado} = t_A + t_B = 58'5 + 87'79 = \underline{146'29\ seg}$$

MF Problema 2 Sept. 07

1/3

Comprobamos que estamos en régimen laminar:

$Q = 1\ l/s = 10^{-3}\ m^3/s$

$D = 50\ mm$

$$v = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0'05^2} = 0'51\ m/s$$

$\nu = 20\ cst = 20 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{0'51 \cdot 0'05}{20 \cdot 10^{-6}} = 1275 < 2000$$

laminar

De la expresión $u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right) r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$

$C_1 = 0$ por ser tubería de sección circular.

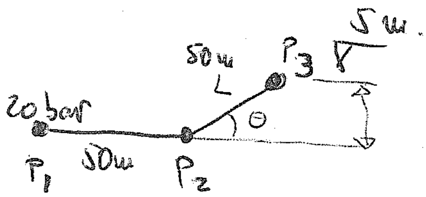
Para determinar C_2 podemos usar la condición de adherencia $r = R_0$ $(u(R_0) = 0)$

Quedando $u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right)(r^2 - R^2)$

falta determinar $\frac{\partial p}{\partial x}$ y $\gamma \operatorname{sen}\theta$, lo hacemos a través del caudal.

$$Q = \int_0^{R_0} u(r)\, 2\pi r\, dr = -\frac{\pi R_0^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right)$$

↳ el caudal es el mismo en 1-2 y 2-3, por lo que este término entre paréntesis debe valer lo mismo.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{50}$

$$Q = -\frac{\pi R_0^4}{8\mu}\,\frac{P_2 - P_1}{50} \rightarrow P_2 = P_1 - \frac{8\mu 50 Q}{\pi R_0^4}$$

$$Q = -\frac{\pi R_0^4}{8\mu}\left(\frac{P_3 - P_2}{50} + \gamma\frac{5}{50}\right) \rightarrow P_3 = P_2 - \gamma 5 - \frac{8\mu 50 Q}{\pi R_0^4}$$

$$\boxed{P_3 = P_1 - \frac{8\mu 50 Q}{\pi R_0^4} \times 2 - \gamma 5}$$

Sustituyendo valores: $\mu = \nu \cdot \rho = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 800 = 0'016$ Poiseuille

$$P_3 = 20 \cdot 10^5 - \frac{8 \cdot 0'016 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0'025^4} \times 2 - 9'81 \cdot 800 \cdot 5 = 1950329'6 \text{ Pa} = $$
$$= 19'5 \text{ bar.}$$

$$P_2 = 20 \cdot 10^5 - \frac{8 \cdot 0'016 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0'025^4} = 1994784'8 \text{ Pa} = 19'95 \text{ bar}$$

Podemos comprobar

$$\frac{P_2 - P_1}{50} = -104'3 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

$$\frac{P_3 - P_2}{50} + \gamma \frac{5}{50} = -104'3 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}.$$

$$u(r) = \frac{1}{4 \cdot 0'016} (-104'3)(r^2 - 0'025^2) = 1629'7 (0'025^2 - r^2) =$$
$$= v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 1,02 \left[1 - 1600 r^2\right]$$

$Q = 10^{-3}$ m³/s.

$$\int \phi \, dV = \int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \mu \, dV = \int \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \mu \, 2\pi r \, dr \cdot L$$

Longitud total de cada tramo.

$$(P_1 - P_2) Q + \gamma (z_1 - z_2) Q = \int_1^2 \phi \, dV$$
$$(P_2 - P_3) Q + \gamma (z_2 - z_3) Q = \int_2^3 \phi \, dV$$
$$\underbrace{(P_1 - P_3)}_{20 \cdot 10^5 - 1950329'6} Q + \gamma \underbrace{(z_1 - z_3)}_{-5} Q = \underbrace{\int_1^3 \phi \, dV}_{10'43} \rightarrow \int_0^{0'025} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 2\pi r \, dr \, \mu \, 2L$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -3259'4 \, r$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = 10623688'4 \, r^2$$

El término de la función de disipación queda: 3/3

$$\int_0^{r=0.025} 10623688,4\ r^2 \cdot 2\pi r \cdot 0.016 \cdot 2 \cdot 50\ dr = 10.43\ W$$

ASÍ ES COMO ESTÁ RESUELTO EN LOS APUNTES

Alternativamente se puede llegar a lo mismo con más sencillez: Pérdidas en régimen laminar $f = \frac{64}{Re}$

$$h_{f\,1\to 2} = \frac{64}{Re}\frac{L}{D}\frac{\bar{v}^2}{2g} = h_{f\,2\to 3} = \frac{64}{1275} \cdot \frac{50}{0.05} \cdot \frac{0.51^2}{19.62} = 0.67\ m$$

Apartado 2

$$\Delta p_{f\,1-2} = \Delta p_{f\,2\to 3} = \gamma h_f = 9.81 \times 800 \times 0.67\ \frac{Nw}{m^2} =$$

$$= 5222\ \frac{Nw}{m^2} \sim \underline{0.05 \times 10^5\ bar}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta p_{f\,1-2} \overset{z_1=z_2}{\Longrightarrow} \underline{p_2} = p_1 - \Delta p_f = 20 - 0.05 = \underline{19.95\ bar}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{p_3}{\gamma} + z_3 + \Delta p_{f\,2-3} \Rightarrow p_3 = p_2 + \underbrace{\gamma(z_2 - z_3)}_{-0.39} - 0.05 \sim 19.51\ bar$$

Perfil de velocidades parabólico (flujo incompresible, igual en los dos tramos!)

Apartado 3

$$v = v_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2\bar{v}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \underline{1.02\left(1 - \frac{r^2}{0.025^2}\right)}$$

Apartado 4

Disipación de energía ≡ Debida a la fricción

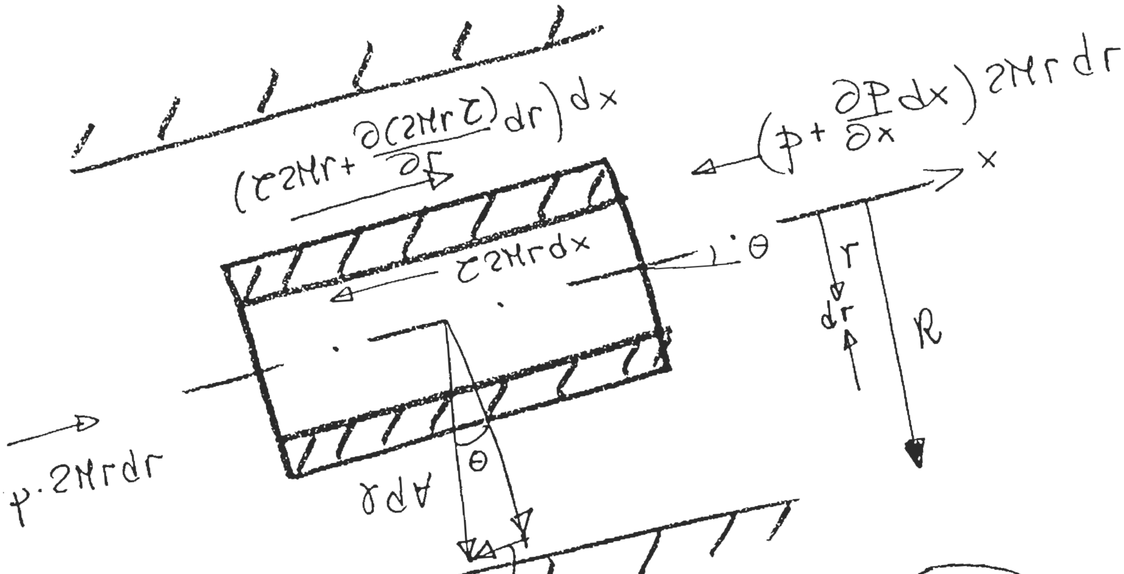
Potencia disipada $= \gamma Q h_f =$

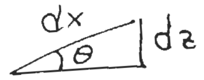
$$= \boxed{\left[9.81 \times 800 \times 10^{-3} \times 0.67\right] 2\ W \cong 10.5\ W}$$

pérdida en un tramo

Dos tramos

FLUJO AXIAL A TRAVÉS DE UN CONDUCTO CIRCULAR DE UN FLUIDO INCOMPRESIBLE





$dx \cdot \operatorname{sen}\theta = dz$

z : Cotas

$$\gamma\, dV \operatorname{sen}\theta = \gamma \cdot 2\pi r\, dr\, dx \operatorname{sen}\theta = \gamma \cdot 2\pi r\, dr\, dz$$

$z = 0$

$$p\, 2\pi r\, dr + \left(\tau 2\pi r + \frac{\partial(\tau 2\pi r)}{\partial r} dr\right) dx = \gamma 2\pi r\, dr\, dx \operatorname{sen}\theta + \tau 2\pi r\, dx + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) 2\pi r\, dr$$

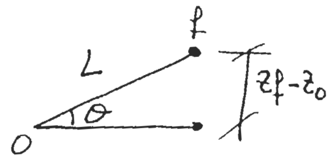
$\vec{V} = u(r)\,\vec{e}_x$

$p = p(x)$

Operando
$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial(\tau \cdot r)}{\partial r}}_{\text{función de } r} = \underbrace{\frac{dp}{dx} + \gamma \operatorname{sen}\theta}_{\text{función de } x}$$

como $\tau = \mu \dfrac{du}{dr}$

constante $\qquad \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p_f - p_o}{L}$



$$\gamma \operatorname{sen}\theta = \frac{\gamma L \operatorname{sen}\theta}{L} = \frac{\gamma}{L}(z_f - z_o)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\tau r)}{\partial r} = \frac{p_f - p_o}{L} + \frac{\gamma}{L}(z_f - z_o) = \frac{p_f + \gamma z_f - (p_o + \gamma z_o)}{L}$$

$H = \dfrac{p}{\gamma} + z \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{r}\dfrac{d(\tau r)}{dr} = \dfrac{\gamma(H_f - H_o)}{L}}$

$\gamma H = p + \gamma z$

$$\frac{d(\tau r)}{dr} = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L} r \longrightarrow \int d(\tau r) = \int \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L} r\,dr$$

$$\tau r = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L} \frac{r^2}{2} + A$$

$$\boxed{\tau = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L} \frac{r}{2} + \frac{A}{r}} \; ; \quad \text{como } \tau = \mu \frac{du}{dr}$$

$$\mu \frac{du}{dr} = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L} \frac{r}{2} + \frac{A}{r} \longrightarrow \int du = \int \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L \cdot \mu} \frac{r}{2} dr + \int \frac{A}{r} dr \frac{1}{\mu}$$

$$\boxed{u = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L\mu} \frac{r^2}{4} + \frac{A}{\mu} \ln r + B}$$

TUBERIA CIRCULAR

$$u(r=0) = u_{máx} \longrightarrow \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=0} = 0$$

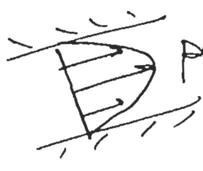
$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=0} = \left.\frac{\gamma(H_f - H_0)}{L\mu} \frac{2r}{4} + \frac{A}{\mu} \frac{1}{r}\right|_{r=0} = 0 \qquad \text{necesariamente } A = 0$$

$$u = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L\mu} \frac{r^2}{4} + B$$

En el contorno, $r = R$, $u = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{B = -\frac{\gamma(H_f - H_0)}{L\mu} \frac{R^2}{4}}$

Por lo tanto
$$u = \frac{\gamma(H_f - H_0)}{L\mu} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{R^2}{4}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{u = \frac{\gamma(H_0 - H_f)}{4L\mu} (R^2 - r^2)} \qquad H_0 > H_f \rightarrow u > 0$$



Caudal

$$Q = \int_0^R u(r)\, dr\, 2\pi r = \int_0^R \frac{\gamma(H_0 - H_f)}{4\mu L} 2\pi \left(R^2 r - r^3\right) dr =$$

$$= \frac{\gamma(H_0 - H_f)\, 2\pi}{4\mu L}\left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right) \Rightarrow \quad Q = \frac{\gamma(H_0 - H_f)}{8\mu L} \pi R^4$$

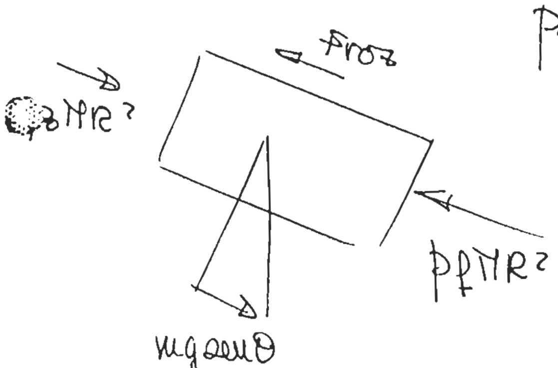
Acción de la pared sobre fluido

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R} = \mu \left.\left(\frac{\gamma(H_0 - H_f)}{4\mu L}(-2r)\right)\right|_{r=R} = -\frac{\cancel{\mu}}{2\cancel{\mu} L}\gamma(H_0 - H_f) R$$

$$\frac{\text{fuerza}}{\text{longit.}} = \tau_0\, 2\pi R = -\frac{\gamma(H_0 - H_f)\pi R^2}{L}$$

$$\text{fuerza} = -\gamma(H_0 - H_f)\pi R^2 \quad < 0 \text{ lógicamente.}$$

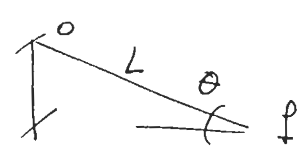
Balance global



$$p_0 \pi R^2 + mg\,\text{sen}\,\theta = F_{roz} + p_f \pi R^2$$

$$F_{roz} = (p_0 - p_f)\pi R^2 + \pi R^2 L \rho \cdot g\,\text{sen}\,\theta$$

$$L\,\text{sen}\,\theta = z_0 - z_f$$



$$F_{roz} = (p_0 - p_f)\pi R^2 + \pi R^2 \gamma (z_0 - z_f)$$

$$\rightarrow F_{roz} = \pi R^2 \Big(\underbrace{p_0 + \gamma z_0}_{\gamma H_0} - \underbrace{(p_f + \gamma z_f)}_{\gamma H_f} \Big) = \pi R^2 (H_0 - H_f)\gamma$$

ojo signo

Velocidad media

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{\gamma(H_0 - H_f)\cancel{\pi} R^4}{8\mu L \cancel{\pi} R^2} = \frac{\gamma(H_0 - H_f)\, R^2}{8\mu L} \quad *$$

Energía por unidad de peso disipada (hf)

Bernoulli $\underbrace{\frac{P_0}{\gamma} + z_0}_{H_0} + \frac{\bar{V}_0^2}{2g} = \underbrace{\frac{P_f}{\gamma} + z_f}_{H_f} + \frac{\bar{V}_f^2}{2g} + h_f$

$\bar{V}_0 = \bar{V}_f$ pues $A = cte$

$H_0 - H_f = h_f$ De * $H_0 - H_f = \dfrac{8\mu L \bar{V}}{\gamma R^2}$

$$\longrightarrow \boxed{h_f = \frac{8\mu L \bar{V}}{\gamma R^2}}$$

Darcy $\boxed{h_f = f\,\dfrac{L}{D}\,\dfrac{\bar{V}^2}{2g}}$

$$\frac{8\mu \cancel{L} \cancel{\bar{V}}}{\gamma R^2} = f\,\frac{\cancel{L}}{D}\,\frac{\bar{V}^{\cancel{2}}}{2g} \longrightarrow \frac{8\mu}{\gamma \frac{D^{\cancel{2}}}{4}} = f\,\frac{\bar{V}}{2g\cancel{D}} \longrightarrow$$

$$\rightarrow f = \frac{64\mu g}{\gamma D \bar{V}} = \frac{64\mu \cancel{g}}{\rho \cancel{g} D \bar{V}} = \frac{64}{\frac{D\bar{V}}{\mu/\rho}} = \frac{64}{\frac{D\bar{V}}{\nu}} = \frac{64}{Re}$$

$\boxed{f = \dfrac{64}{Re}}$ $Re = \dfrac{\bar{V} \cdot D}{\nu}$

$$\boxed{h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{\bar{V}^2}{2g}}$$

Balances energéticos

- Definición de función disipación Φ $\left(\frac{\text{Energía}}{t \cdot \text{vol}}\right)$

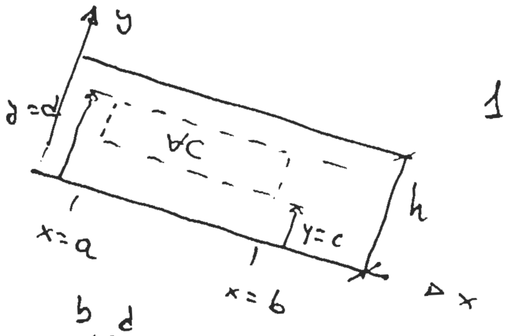
Nos evalua, en un $d\forall$, la potencia disipada debido al rozamiento viscoso entre capas del fluido.

- Energía disipada en un $\forall C$ por unidad de tiempo (Potencia disipada en $\forall . C.$)

$$\text{Pot. dis.} = \int_{\forall C} \Phi \, d\forall$$

- F. disipación flujo de Couette (placas planas paralelas)

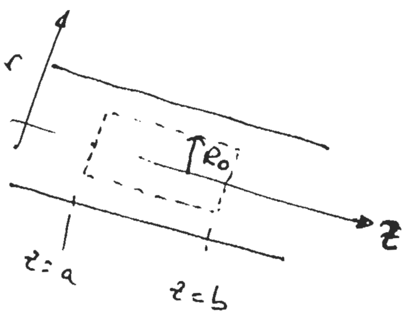
$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$



1 metro de profundidad

$$\text{P. dis.} = \int_{\forall C} \Phi \, d\forall = \int_a^b \int_c^d \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dx\,dy = (b-a)\mu \int_c^d \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy$$

- F. disipación flujo Hagen-Poiseuille (tubería circular)



$$\Phi = \mu \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$$

$$\text{P. dis.} = \int_{\forall C} \Phi \, d\forall = \int_a^b \int_0^{R_0} \mu \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 2\pi r\,dr\,dz$$

$$d\forall = dA \cdot dz = 2\pi r\,dr \cdot dz$$

Luego $\text{Pot. dis.} = (b-a)\,\mu\, 2\pi \int_0^{R_0} \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 r\,dr$

- F. volumen · Peso

Para un $d\forall \rightarrow \vec{g}\,\underbrace{\rho\, d\forall}_{dm}$

- F superficie · $\tau \cdot d\vec{S}$

$-p \cdot d\vec{A}$

Balance:

Pot. f. vol + Pot. f. sup = Pot. disipada

Potencia = $\vec{F} \cdot \vec{V}$

Pot. f. vol. ($d\forall$) $\quad \vec{g}\rho\, d\forall \cdot \vec{V}$

Pot. f. sup. ($d\vec{S}$) $\quad \tau d\vec{S} \cdot \vec{V}$

($d\vec{A}$) $\quad -p\, d\vec{A} \cdot \vec{V}$

Para todo el $\forall$.C.

$$\underbrace{\int_{\forall C} \vec{g}\rho \cdot \vec{V}\, d\forall + \int_{SC} (\tau d\vec{S} + (-p\, d\vec{A})) \cdot \vec{V}} = \int_{\forall C} \Phi\, d\forall$$

$$\int_{\forall C} \Phi\, d\forall \geq 0$$

pueden ser + o − dependiendo del caso a estudiar.

- Gradiente de presiones favorable $p_1 > p_2$ $\quad (p_1 - p_2)Q = Pot_p$
- Esfuerzos τ favorables al movimiento aportando potencia al fluido $\quad \tau \cdot S \cdot V$
- Componente del peso

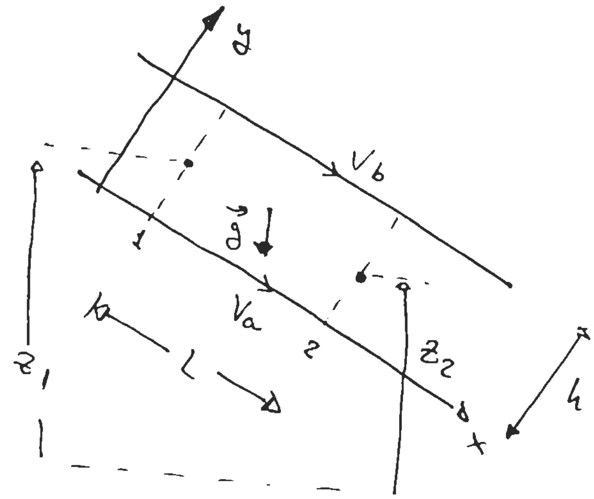
$$g \cdot \rho\, (z_1 - z_2)\, Q$$

favorable si $z_1 > z_2$

F. Couette

Balance de potencias

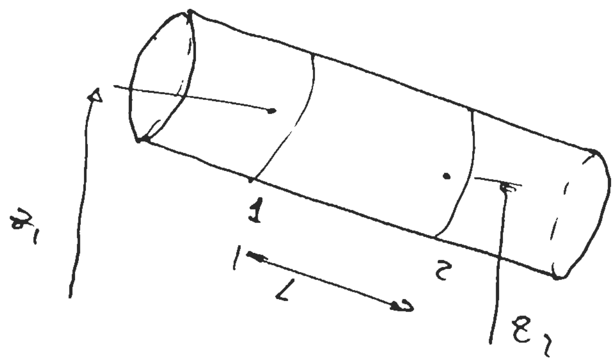
$\tau_a = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0}$ $\tau_b = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=h}$



$$(p_1 - p_2)Q + g \cdot \rho (z_1 - z_2) Q +$$
$$+ \tau_b V_b L - \tau_a V_a L = \int \Phi \, d\forall$$

si V_a ó $V_b = 0 \rightarrow \nexists$ pot. disipada en $y=0$ ó $y=h$

F. Hagen-Poiseuille



$$(p_1 - p_2)Q + g \rho (z_1 - z_2) Q = \int \Phi \, d\forall$$

En este caso, si se trata de un tramo de tubería $v=0$ en las paredes. Ello implica que aunque τ existe, la potencia es nula.

a) NOTA: Si el problema se hace simplificando el avión como un cohete, la entrada de aire en el motor (tobera) no se tendría en cuenta (tan sólo aparecería la velocidad de salida de los gases).

$$F_y = 1'1\,P \longrightarrow \boxed{F_y = 1'1 \cdot 24000 \cdot 9'8 = 258720\,N}$$

$$66\,V_x^2 = F_y \longrightarrow \boxed{V_x = \sqrt{\frac{F_y}{66}} = \sqrt{\frac{258720}{66}} = 62'6\ m/s}$$

$$\boxed{V_x = 225'4\ km/h}$$

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \int_{SC} \rho\, \vec{V}\, \vec{V}_{rsc} \cdot d\vec{A}$$

velocidad de entrada del aire a la tobera

$$-F_D = \rho\, V_g \cdot A_t \cdot 2\,(V_x - V_g)$$

Velocidad de salida de gases + aire en la tobera

$$2'7 \cdot 62'6^2 = 0'8 \cdot V_g \cdot 0'2 \cdot 2\,(62'6 - V_g)$$

$$\boxed{V_g = -153'21\ m/s}$$

b) A diferencia del primer apartado, el término de la inercia ($\ddot{\vec{R}}$) sí se tiene en cuenta:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} - \int_{VC} \ddot{\vec{R}} \rho \, d\forall = \int_{SC} \vec{V_r} \rho \, (\vec{V_{rSC}} \cdot d\vec{A})$$

$$-2'7 \, V_x^2 \, \vec{i} - m \frac{dV_x}{dt} \vec{i} = \rho \, Q \, (V_x - V_g) \, \vec{i}$$

$$-m \frac{dV_x}{dt} = 2'7 \, V_x^2 + 0'8 \cdot 250 \cdot 0'4 \, (V_x - 250)$$

$$\frac{24000 \, dV_x}{-2'7 \, V_x^2 - 80 V_x + 20000} = dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_0^{62'6} \frac{24000}{-2'7 \, V_x^2 - 80 V_x + 20000} \, dV_x = \int_0^t dt}$$

c) $$t = 50'89 \left[\log(102'147 + V_x) - \log(-72'517 + V_x) \right] \Big|_{0}^{62'6}$$

$$\boxed{t = 125'58\ s}$$

En Xcel:

$$\frac{24000\ \Delta V_x}{f(x)} = \Delta t \quad ; \quad \frac{24000\,(V_1 - V_0)}{f(x)} = (t_1 - t_0)$$

$$\boxed{V_1 = \Delta t\ \frac{f(x)}{24000} + V_0}$$

$\Downarrow$

Crear una tabla en la que, por ejemplo, $\Delta t = 0'1\ s$, y para cada incremento se calcule el nuevo valor de V.

① 1.

$$\underbrace{\overrightarrow{\Sigma F_{ext}}}_{①} - \overbrace{\int_{VC} \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}\right) \right) \rho \, dV}^{②} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, \vec{v_r} \cdot dV}_{③} + \underbrace{\int_{SC} \rho \, \vec{v_r} \left(\vec{v_{rsc}} \cdot \vec{dA} \right)}_{④} .$$

① Sumatorio (resultante) de las fuerzas exteriores, ejercidas desde el entorno sobre el VC.

② Término corrector ~~de las~~ de las fuerzas de inercia

③ Variación local, dentro del VC, de la cantidad de movto. con el tiempo.

④ Variación convectiva de la cantidad de movto. flujo neto de $\vec{p}$ ~~con~~ debido al ~~flu~~ caudal circulante a través del VC.

(2)

1 $\vec{F}_{ext}$: Cada una de las fuerzas exteriores

$\ddot{\vec{R}}$: Aceleración lineal del SR móvil resp. del SR. fijo.

$\dot{\vec{\omega}}$: Aceleración angular del SR móvil resp. del SR fijo.

2 $\vec{\omega}$: Velocidad angular del SR móvil resp. del SR fijo.

$\vec{r}$: Vector de posición de una partícula de fluido respecto del SR móvil.

$\vec{v}_r$: Velocidad relativa de una partícula de fluido respecto del SR móvil.

ρ : Densidad de una partícula de fluido

Partícula de fluido dentro del VC

ρ : Densidad de una partícula de fluido

3 $\vec{v}_r$: Velocidad relativa de una partícula de fluido respecto del SR móvil.

Partícula de fluido dentro del VC

ρ : Densidad de una partícula de fluido

4 $\vec{v}_r$: Velocidad relativa de una partícula de fluido respecto del SR móvil.

$\vec{v}_{rsc}$: Velocidad relativa de una partícula de fluido respecto de la S.C.

Partícula de fluido situada sobre la SC.

3ª) Ecuación del flujo compresible isotermo:

$$A: \underset{(1)}{(p_1^*)^2} = \underset{(2)}{(p_2^*)^2} + \underset{(3)}{\frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} R T L}$$

Ecuación de Bernoulli generalizada:

$$B: \underset{(1)}{\frac{p_1}{\gamma}} + \underset{(2)}{z_1} + \underset{(3)}{\frac{v_1^2}{2g}} = \underset{(4)}{\frac{p_2}{\gamma}} + \underset{(5)}{z_2} + \underset{(6)}{\frac{v_2^2}{2g}} + \underset{(7)}{h_f} + \underset{8}{h_m}$$

Correspondencias entre términos:

- A1 $\longleftrightarrow$ B1 : Representan ambos la energía de presión a la entrada del VC (aunque con distintas uds.)
- A2 $\longleftrightarrow$ B4 : Representan ambos la energía de presión a la salida del VC (aunque con distintas uds.)
- A3 $\longleftrightarrow$ B7 : Representan ambos la energía perdida por fricción.

4.- Hipótesis que justifican lo que pide la cuestión:

- Desprecio de la energía potencial
- Desprecio de la energía cinética

(Además de ausencia de bombas o pérdidas menores)

Problema 1 (25%)

La figura representa el sistema de preparación y distribución de Agua caliente sanitaria (ACS) a unas duchas de unos vestuarios. Se conoce la evolución del caudal total a suministrar a las duchas Q_3, así como la temperatura regulada del mismo (Tu). Una válvula de tres vías mezcladora regula en cada momento el aporte de agua fría de la red (Q_2) y de agua caliente procedente del acumulador (Q_1) para lograr que el caudal total mezclado esté a la temperatura deseada Tu. Según la temperatura del agua en el acumulador T(t), la válvula de tres vías regulará la entrada de agua caliente y fría (conforme se vaya enfriando el agua en el acumulador, se abrirá más el paso de la caliente y se cerrará más el paso de la fría en la válvula de tres vías.

El agua caliente a la temperatura T(t) procede de un acumulador que se encuentra a una temperatura inicial To y que se va enfriando conforme va saliendo del mismo agua caliente (caudal Q_1 a temperatura T(t)) y entrando al mismo agua fría (Caudal Q_1 a temperatura Tf). El acumulador tiene en su interior un intercambiador de calor que le cede una potencia efectiva Pef.

Los datos de la instalación son los siguientes:

- Temperatura del agua fría de la red: Tf = 15 ºC
- Temperatura inicial del agua en el acumulador To = T(0) = 80 ºC
- Temperatura de utilización deseada y regulada por la válvula = 40 ºC
- Densidad del agua = 1000 kg/m3
- Calor específico del agua = 4180 Julios/(kg.ºK)
- Potencia efectiva del intercambiador al acumulador: Pef = 40 Kw
- Volumen del acumulador = 1500 litros

Se supone que tanto las tuberías como las válvulas de la instalación están perfectamente aisladas, por lo que no tiene pérdidas caloríficas.

Caudal de consumo:

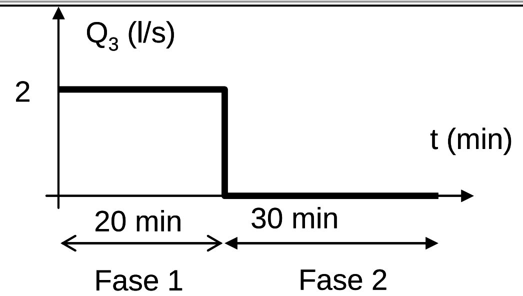
- Fase 1: Q = 2 l/seg durante 20 minutos
- Fase 2: Q = 0 durante 30 minutos

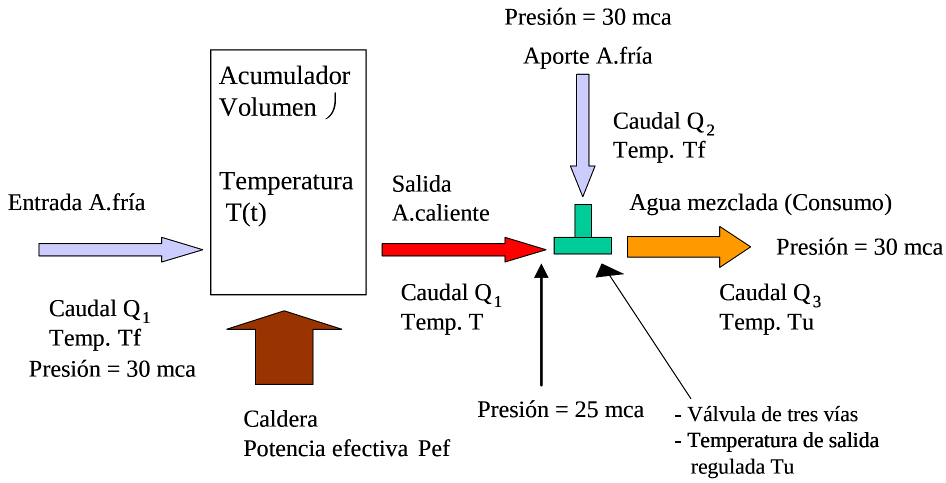
a) Determinar la temperatura del agua en el acumular en t = 20 minutos (final de fase 1).
b) Determinar la proporción de agua caliente y de agua fría en la entrada de la válvula de tres vías en el instante t = 20 minutos.
c) Calcular la temperatura final del agua del acumulador al final de la fase 2, de duración 30 minutos.

Notas:

- Considerar despreciables los términos de energía cinética por unida de masa y energía potencial por unidad de masa frente a la energía interna por unidad de masa.
- Considerar despreciable la masa de agua encerrada en las conducciones frente a la masa de agua en el acumulador.
- No considerar despreciables los valores de la presión. Aparecen en la figura, en metros de columna de agua (mca).

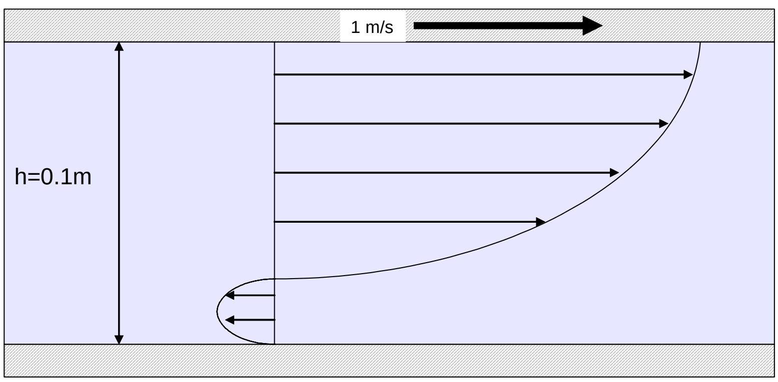
Problema 1 (cont)





Problema 2 (25%)

En el flujo de Couette que muestra la figura, la velocidad media del flujo en el sentido de avance de la placa superior es 0,1 m/s. Determinar



a) Número de Reynolds (tomar como longitud característica la separación de placas)

b) Distribución de velocidades $U = U(y)$

c) Gradiente de presiones que provoca el movimiento

d) Potencia aportada mediante la placa superior al flujo

e) Balance energético del flujo para un volumen correspondiente a 1 m^2 de placa

Datos:

- $\mu = 0{,}06$ kg/s·m
- $\rho = 900 \text{ kg / m}^3$

Examen de Mecánica de Fluidos
Viernes 2 de junio de 2006

Problema 3 (25%)

a) La Figura (a) muestra un trineo de propulsión a chorro. Estando el trineo en reposo, calcular el valor umbral mínimo que debe superar la velocidad de salida de los gases (v_s) para que el motor consiga poner el trineo en movimiento.

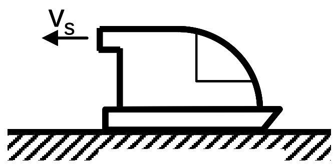


Figura (a)

b) Ahora el trineo está moviéndose hacia la derecha con una velocidad constante de 200 km/h (con el motor en marcha y siendo la velocidad de salida de los gases la que se ha pedido en el apartado a).

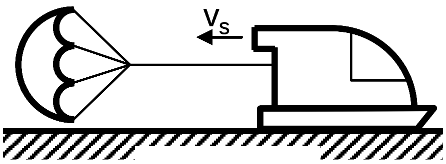


Figura (b)

En la primera fase del frenado se abre un paracaídas tal como muestra la Figura (b), pero se mantiene el motor en marcha. Calcular cuál será la velocidad del trineo después de 15 segundos.

c) En la segunda fase del frenado (después de los 15 segundos) y manteniendo el paracaídas abierto, se para el motor (Figura c). Calcular cuánto tiempo transcurre hasta que el trineo se detiene por completo.

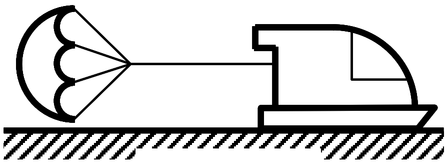


Figura (c)

Datos:

- Masa del trineo: $M = 3000$ kg
- Coef. de rozamiento (estático y dinámico) del trineo con el suelo: $\mu = 0{,}02$
- Área de la tobera de salida de gases: $A_s = 100\ \text{cm}^2$
- Densidad (constante) de los gases de salida: $\rho_{gases} = 0{,}5\ \text{kg/m}^3$
- Densidad (constante) del aire: $\rho_{aire} = 1{,}2\ \text{kg/m}^3$
- Diámetro del paracaídas: $D_p = 3$ m
- Coeficiente de arrastre (constante) del paracaídas: $C_D = 1{,}4$

Notas:

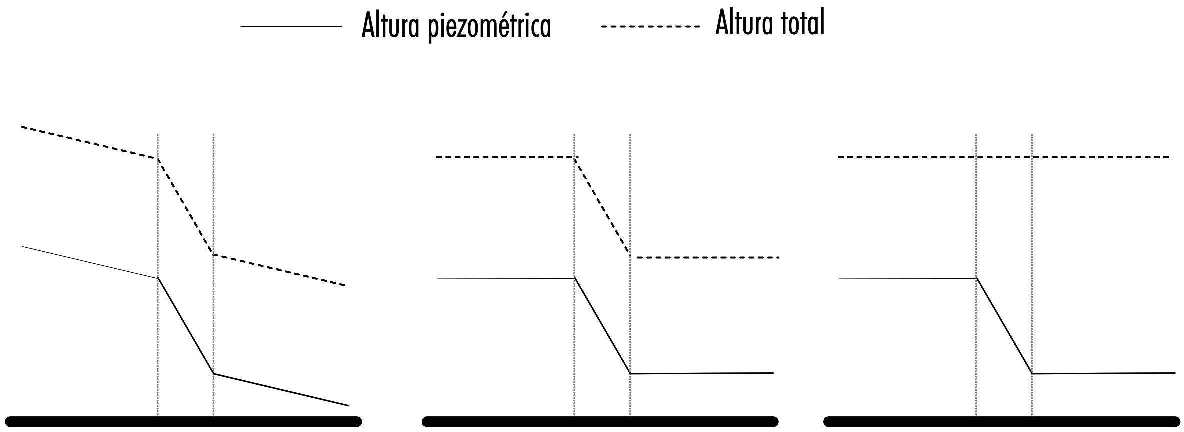
- Despreciar tanto la masa del combustible que contenga el trineo en su depósito, como todo lo relativo a su movimiento por el interior del mismo.
- Asumir que el aire se encuentra en reposo.
- Despreciar cualquier interacción entre los gases de salida del motor y el paracaídas.
- Ténganse en cuenta: $F_D = \dfrac{1}{2}\rho v^2 C_D A$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Cuestiones (25%)

Responder de manera sintética y precisa a las siguientes cuestiones.

a) Las siguientes figuras presentan la línea de altura piezométrica y la altura total de una conducción que transporta agua a presión. Explicar cuáles son las características del flujo y las posibles causas físicas de dicho comportamiento en cada uno de los casos representados. Realizar un esquema del sistema que generaría estas figuras (los casos pueden ser ideales o reales)



b) Explicar cualitativamente las diferencias entre las ecuaciones de Euler y de Bernoulli. ¿Cuándo se puede utilizar cada una? ¿Por qué, y en qué circunstancias es necesario aplicar el coeficiente α en la ecuación de Bernoulli?

c) ¿Qué simplificaciones son necesarias para obtener la Ecuación de Euler para flujo isotermo (tal y como se presenta en el apartado de "Expresiones Fundamentales" de este examen) a partir de la ecuación general de Euler? ¿A qué corresponde físicamente el término $\frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$ de dicha ecuación?

d) ¿Cuáles son los dos posibles orígenes de la resistencia/arrastre sobre un cuerpo inmerso en una corriente de fluido? ¿En qué consiste la paradoja de D'Alembert?

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re}=\frac{VD}{\nu}=\frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2=\left(p_1^*\right)^2-\frac{16fG^2}{\pi^2D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^*=\rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall+\int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall+\int_{S.C.}\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y)=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma sen\theta\right)r^2+\frac{C_1}{\mu}\ln r+C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau=\mu\frac{du}{dr}$$

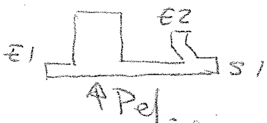
Función disipación:

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{dC}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{\forall c}\left(u+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\, d\forall+\int_{SC}\left(u+\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\,(\vec{V}\cdot\vec{dA})$$

$\underline{\forall.C.}$ Toda la figura



2 ENTRADAS + 1 SALIDA

$$\frac{dW_{eje}}{dt}=0\ ;\ \frac{dC}{dt}=P_{ef}\ ;\ \text{en}\int_{\forall c}\rightarrow\left[u+\frac{V^2}{2}+gz\simeq u\right]$$

$$\text{en}\int_{SS}\rightarrow\left[u+\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz\simeq u+\frac{P}{\rho}\right]\ ;\ u=c_e\cdot T$$

Sustituyendo: SE1 (agua fría termoacumulador)

SE2 (agua fría grifo)

S1 (salida grifo)

$$P_{ef}=\frac{d}{dt}\int_{\forall c}c_eT\rho\, d\forall+\int_{SE1}\left(c_eT_f+\frac{P_1}{\rho}\right)\rho\,\overbrace{(\vec{V}\cdot\vec{dA})}^{<0}+$$

$\int\vec{V}\cdot\vec{dA}=-Q_{E1}=-Q_1$

$\int\vec{V}\cdot\vec{dA}=-Q_2$

$$+\int_{SE_2}\left(c_eT_f+\frac{P_2}{\rho}\right)\rho\,\underbrace{(\vec{V}\cdot\vec{dA})}_{<0}+\int_{S1}\left(c_eT_u+\frac{P_3}{\rho}\right)\rho\,\overbrace{\vec{V}\cdot\vec{dA}}^{>0}$$

$\int_{S1}\vec{V}\cdot\vec{dA}=Q_3$

$$\frac{P(P_a)}{\rho(kg/m^3)}=\frac{\gamma\cdot P(mca)}{\rho}=\frac{g\cdot\cancel{\rho}\,P(mca)}{\cancel{\rho}}$$

Como $Q_1+Q_2=Q_3$

$P_1=P_2=30\,mca$

$$P_{ef}=c_e\rho\forall\frac{dT}{dt}\overbrace{-\left(c_eT_f+P_1(mca)g\right)\rho Q_1-\left(c_eT_f+P_2(mca)g\right)\rho Q_2}+$$

$$+\left(c_eT_u+P_3(mca)g\right)\rho Q_3$$

$$P_{ef}=c_e\rho\forall\frac{dT}{dt}-\left(c_eT_f+P_1(mca)g\right)\rho Q_3+\left(c_eT_u+P_3(mca)g\right)\rho Q_3$$

$$P_{ef}=c_e\rho\forall\frac{dT}{dt}+\rho Q_3\left(c_e(T_u-T_f)+g\left(P_3(m)-\cancel{P_1(m)}\right)\right)$$

$P_1=P_3$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_f - \rho Q_3\, c_e (T_u - T_f)}{c_e \rho \forall}$$

$$\int_{80}^{T} dT = \int_0^{20\cdot 60} \frac{40\cdot 10^3 - 10^3 \cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 4180\,(40-15)}{4180 \cdot 1500}\, dt$$

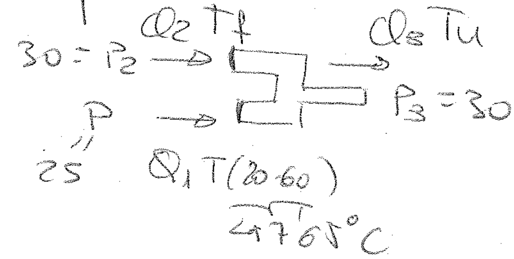
$$T = 80 + \frac{40\cdot 10^3 - 2\cdot 4180\,(40-15)}{4180 \cdot 1500}\,(20\cdot 60) = 47'65\,°C$$

② Aplicando ~~E. Energía~~ al VC formado por la válvula en el que $\frac{dW_{eje}}{dt} \simeq 0$ y $\frac{dC}{dt} \simeq 0$. Además, la masa es despreciable

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\int_{VC} c_e T_{int}\, \rho\, d\forall = \frac{d}{dt}\left(c_e T_{int}\, \cancel{m}^{\,\simeq 0} \right) = 0$$

$\simeq 0$

En la $\int_{SC}$ los términos $\frac{v^2}{2}$ y gz son despreciables



$$0 = \int_{SC} \rho \left(c_e T + p(m)\, g \right) \vec{v}\cdot d\vec{A}$$

2 entradas y 1 salida

$$0 = -\cancel{\rho}(c_e T_f + 30\cdot g)\, Q_2 - \cancel{\rho}(c_e T + 25 g)\, Q_1 + \cancel{\rho}(c_e T_u + 30 g)\, Q_3$$

$$0 = -(4180\cdot 15 + 30\cdot g)\, Q_2 - (4180 \cdot 47'65 + 25 g)\, Q_1 +$$

$$+ (4180\cdot 40 + 30 g)\cdot 2\cdot 10^{-3}$$

$0 = -62994'3\,Q_2 - 199422'25\,Q_1 + 334'99$

$Q_1 + Q_2 = 2\cdot10^{-3} \rightarrow Q_1 = 2\cdot10^{-3} - Q_2$

$0 = -62994'3\,Q_2 - 199422'25\cdot2\cdot10^{-3} + 199422'25\cdot Q_2 + 334'99$

$$Q_2 = \frac{199422'25\cdot2\cdot10^{-3} - 334'99}{199422'25 - 62994'3} = 4'68\cdot10^{-4}\ m^3/s = 0'468\ l/s$$

$Q_1 = 2 - 0'468 = 1'532\ l/s$

$Q_2 \rightarrow \frac{0'468}{2}\times100 \rightarrow 23'4\%$

$Q_1 \rightarrow \frac{1'532}{2}\times100 \rightarrow 76'6\%$

(3) Partiendo de $T = 47'65°C$, solo hay aporte de calor, no hay flujos.

$$P_{ef} = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\, Ce \quad \rightarrow \quad P_{ef} = \rho\,\forall\,Ce\,\frac{dT}{dt}$$

$$\rightarrow \int_{47'65}^{T} dT = \int_0^{30\cdot60} \frac{P_{ef}}{\rho\forall Ce}\,dt \rightarrow T = 47'65 + \frac{40\cdot10^3}{1500\cdot4'180}\,30\cdot60$$

$$\underline{\rightarrow T = 59'13°C}$$

PROBLEMA 2

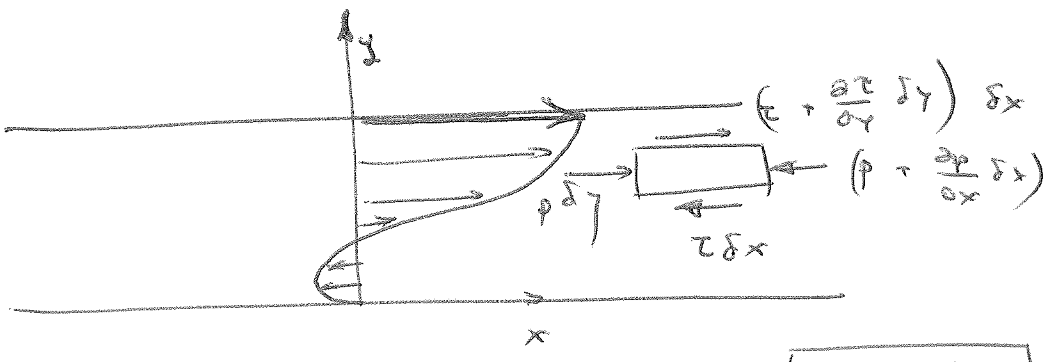
Para dar mayor generalidad al problema (con la excepción del primer apartado que es exclusivamente numérico), el ejercicio se resuelve en primer lugar de manera algebraica y posteriormente de forma numérica. Sin duda si se realiza sólo de manera numérica es mucho más corto.

a) Número de Reynolds. Se adoptan las variables significativas (distancia entre placas h y velocidad media $\bar{V}$). Por tanto se tiene

$$Re = \frac{\bar{V} \cdot h \cdot \rho}{\mu} = \frac{0.1 \times 0.1 \times 900}{0.06} = 150$$

Régimen laminar!!

b) Distribución de velocidades (algebraico)



Del balance de fuerzas resulta $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial \tau}{\partial y}}$

en donde (como se ve en teoría) p es sólo función de x mientras τ sólo depende de y. De ello resulte $\Longrightarrow \boxed{C = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d\tau}{dy}}$ la única posibilidad de que dos funciones que dependen de variables distintas, coincidan (sean iguales).

Combinando la ecuación de estado $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$ con la precedente, resulta:

②

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} = C$$

cuya integración proporciona: $u = u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + Ay + C$

imponiendo las c. de contorno $\left.\begin{cases} y=0 & u=0 \\ y=h & u=U_0 \end{cases}\right\} \Rightarrow u = u(y) = \frac{U_0}{h}y - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(h-y)$

b) Asignando valores numéricos, la distribución de velocidades es:

$$\boxed{u(y) = 10y - \frac{5}{6}\left(\frac{dp}{dx}\right)y(1-10y)}$$

en el S.I (u – m/s, $\frac{dp}{dx} = \frac{Nw}{m^3}$, y – m)

c) Cálculo del gradiente de presión que da lugar a una determinada velocidad media: $\bar{V}$

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int u(y)\,dA = \frac{1}{1.h}\int_0^h \left\{10y - \frac{5}{6}\left(\frac{dp}{dx}\right)y(1-10y)\right\}dy \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{V} = \frac{U_0}{2} - \frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{U_0/2 - \bar{V}}{h^2/12\mu}$$

c) Gradiente de presión numérico: sustituyendo valores:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{0.5 - 0.1}{10^{-2}/(12\times 0.06)} = 28.8 \; Nw/m^3$$

(en el S.I)

es decir un gradiente adverso $\left(\frac{dp}{dx} > 0\right)$, imprescindible lógicamente a un gradiente adverso para dar lugar a un flujo inverso (parcial).

Si ahora en la distribución de velocidades se sustituye este valor numérico $\left(\frac{dp}{dx} = 28.8\right)$ queda:

$$u(y) = 10y - \frac{5}{6}\times 28.8\, y(1-10y) = \boxed{240y^2 - 14y = u(y)}$$

d) Potencia aportada por la placa (algebraica)

$$P = F.\,U_0 = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=h} 1.\,1.\,U_0$$

$$\boxed{P = \mu\left(\frac{U_0}{h} + \frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx}\right) U_0}$$

d) Numérico:

$$P = \left(0.06\ \frac{1^2}{0.1} + \frac{1 \times 0.1}{2}\ 28.8\right)\frac{W}{m^2} = (0.6 + 1.44)\frac{W}{m^2}$$

$$\boxed{P = 2{,}04\ W/m^2}$$ es decir 2,04 watios por metro cuadrado de placa.

e) Balance energético. En este caso se tienen tres términos:

- Arrastre de la placa (aporte externo)
- Potencia hidráulica (puede aportarse o realizarse < bomba / turbina) $\Delta p \cdot Q$ dependiendo del signo Δp
- Disipación viscosa: siempre se consume.

El arrastre de la placa (calculado en e) es aporte externo, pero la potencia hidráulica (por metro de longitud de la placa) $\Delta p = p_2 - p_1 > 0$ (gradiente adverso). El fluido va aumentando su energía de presión o elástica, luego "gana energía". En este caso "absorbe" parte de la energía externa aportada, luego irá en el segundo término con la función de disipación. (Para ir en el primero debemos afectarle el signo negativo $-\Delta p \cdot Q$).

En síntesis:
$$\Delta p \cdot Q = \left(\frac{dp}{dx}\right) \cdot 1 \cdot \bar{V} \cdot A$$ (Δp por unidad de longitud)

siendo $\bar{V}$ (ver c) $\quad \bar{V} = \frac{U_0}{2} - \frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}$, fue

(4)

$$\Delta p \cdot Q = \frac{U_o}{2} h \left(\frac{dp}{dx}\right) - \frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$$

Función de disipación $\Rightarrow$ Disipación viscosa: $\Phi = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2$

$$\Phi = \mu\left(\frac{U_o^2}{h^2} - \frac{U_o}{h}\left(\frac{dp}{dx}\right)(h-2y) + \frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2(h-2y)^2\right)$$

Potencia viscosa disipada $= \int_0^h \left[\underbrace{\mu\frac{U_o^2}{h^2}}_{1} \underbrace{- \frac{U_o}{h}\frac{dp}{dx}(h-2y)}_{2} + \underbrace{\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2(h-2y)^2}_{3}\right] dy \cdot 1 =$

$$= \mu\frac{U_o^2}{h} + 0 + \frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$$

BALANCE FINAL

APORTE

$$\underbrace{\mu\frac{U_o^2}{h} + \frac{U_o h}{2}\frac{dp}{dx}}_{F \cdot U_1} = \underbrace{\frac{U_o}{2}h\left(\frac{dp}{dx}\right) - \cancel{\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}}_{\Delta p \cdot Q} + \underbrace{\mu\frac{U_o^2}{h} + \cancel{\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}}_{\int \Phi\, \delta V}$$

e) Verificación numérica referida a un volumen limitado por un m² cuadrado de superficie y una altura $h = 0.1$ m

— Placa (ya calculada) $= 2{,}04\ W/m^2$

— $\Delta p \cdot Q = \frac{U_o}{2}h\left(\frac{dp}{dx}\right) - \frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = \frac{0.1 \times 1 \times 28.8}{2} - \frac{10^{-3} \times 28.8^2}{12 \times 0.06} =$

$= (1.44 - 1.152)\ W/m^2 = \underline{0{,}288\ \frac{W}{m^2}} = \underline{\Delta p \cdot Q = 28{,}8 \times 0{,}01}$

Luego es una Ganancia energética (en energía elástica) del flujo.

Frente la Disipación viscosa es: $\mu\frac{U_o^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = \frac{0.06}{0.1} + 1.152 = \underline{1{,}752\ \frac{W}{m^2}}$

Obviamente $\boxed{2{,}04 = 1{,}752 + 0{,}288}$

Problema trineo

a) Trineo parado o a velocidad constante

$$\vec{F}_{roz} = \int_{sc} \rho_{gases}\, \vec{v}\,(\vec{v}_{rsc}\cdot d\vec{A}) \longrightarrow -\mu M g\, \vec{i} = -\rho_{gases}\, v_s^2 \cdot A_s\, \vec{i}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu M g}{A_s\, \rho_{gases}}} = \sqrt{\frac{0'02 \cdot 3000 \cdot 9'81}{(100 \cdot 10^{-4})\; 0'5}} = 343 \text{ m/s}$$

b) Motor en marcha, paracaídas abierto, ~~Trineo~~ frenando.

$$\vec{F}_{parac} + \vec{F}_{roz} - \int_{vc} \ddot{\vec{R}}\, \rho\, dV = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{vc} \vec{v}_r\, \rho\, dV}^{\text{Desp}} + \int_{sc} \rho_{gas} \cdot \vec{v}_r\, (\vec{v}_{rsc}\cdot d\vec{A})$$

$$-\frac{1}{2}\rho_{aire}\, C_{D_p}\, v^2 A_p\, \vec{i} - \mu M g\, \vec{i} - \frac{dv}{dt} M\, \vec{i} = -\rho_{gases}\, v_s^2 \cdot A_s\, \vec{i}$$

Son iguales $\Rightarrow$ Se anulan.

$$M\frac{dv}{dt} = \underbrace{-\frac{\rho_{aire}\, C_{D_p}\, A_p}{2}}_{K_2} v^2 \longrightarrow \int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{v^2} = \frac{-K_2}{M}\int_0^t dt$$

$$\cancel{(-1)}\left[\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_0}\right] = \frac{\cancel{-}K_2}{M}\, t$$

$$v_f = \left(\frac{K_2}{M}t + \frac{1}{v_0}\right)^{-1} = \left(\frac{5'94}{3000}\cdot 15 + \frac{1}{55'56}\right)^{-1}$$

$$\boxed{v_f = 21 \text{ m/s}}$$

c) Motor parado, paracaidas abierto, trineo frenando.

$$\overrightarrow{F_{parac}} + \overrightarrow{F_{roz}} - \int_{VC} \ddot{\vec{R}}\, \rho\, d\forall = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \vec{v_r}\, d\forall}^{\,\text{Dcp}} + \int_{SC} \rho_{gas} \cancel{\vec{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_{r_{SC}}} \cdot \overrightarrow{dA})}^{\,0}$$

$$\frac{\rho_{aire}\, C_{D_p}\, A_p}{2} v^2 + \mu M g + M \frac{dv}{dt} = 0 .$$

$$\frac{dv}{dt} = -\underbrace{\mu g}_{K_3} - \underbrace{\frac{K_2}{M}}_{K_4} v^2 \longrightarrow \frac{1}{K_4}\int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{\frac{K_3}{K_4} + v^2} = -\int_0^t dt$$

Siendo $a = \sqrt{\frac{K_3}{K_4}}$

$$t = \frac{1}{K_4}\sqrt{\frac{K_4}{K_3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{K_3/K_4}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{v_f}{\sqrt{K_3/K_4}}\right)\right]$$

Sustituyendo valores ($v_f = 0$):

$$\boxed{t = \frac{1}{0'002}\sqrt{\frac{0'002}{0'196}}\underbrace{\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{21}{\sqrt{\frac{0'196}{0'002}}}\right)\right]}_{64'76^\circ = 1'13 \text{ rad}} = 57 \text{ s.}}$$

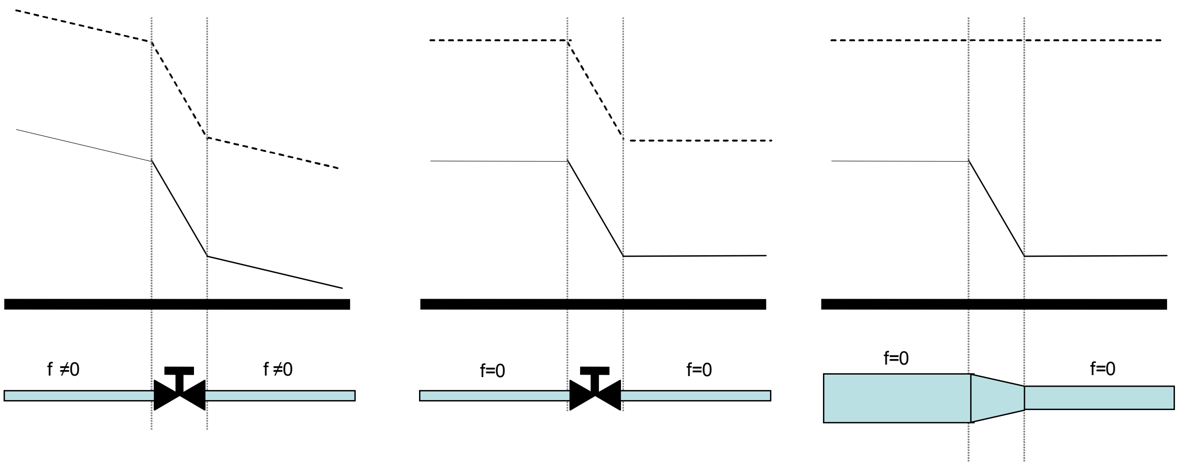
Cuestión

a)

- En la primera figura, la energía total desciende linealmente con la longitud seguramente debido a las pérdidas por fricción. En el tramo intermedio, la energía desciende con una pendiente mayor lo que puede ser debido a un tramo de tubería con un factor de fricción distinto o a un elemento singular (válvula, codo, etc.) que no varíe la velocidad (la altura cinética es la misma)

- En la segunda figura, la conducción no presenta pérdidas por fricción (hidrodinámicamente lisa) en los tramos largos, pero sí presenta pérdidas en el tramo central, que pueden ser debidas como antes a un elemento singular o a una tubería con un determinado factor de fricción.

- En la tercera figura, la energía total se mantiene constante, por lo que no hay pérdidas energéticas. Sin embargo, la línea de alturas piezométricas desciende (lo que implica un incremento del término cinético). Una posible explicación es una disminución de diámetro que incremente la velocidad del fluido en una conducción hidrodinámicamente lisa.



b) La ecuación de Bernoulli no es más que un caso particular de la ecuación de Euler. La integración de la ecuación de Euler entre dos puntos de una línea de corriente para flujo incompresible y estacionario y sin pérdidas de fricción, proporciona la ecuación de Bernoulli. La ecuación de Bernoulli puede luego incorporar distintos términos de pérdidas energéticas.

El coeficiente α permite extrapolar la ecuación de Bernoulli de una línea de corriente a una conducción cerrada. El coeficiente corrige el hecho de considerar la velocidad media en toda la sección a la hora de calcular la energía cinética ($v^2/2g$) en lugar de integrar en toda la sección los distintos valores de la velocidad para hallar la energía cinética total. Dado que para flujo turbulento α es prácticamente 1, será necesario tenerlo en cuenta sobre todo en flujo laminar.

c) Para obtener la ecuación de Euler para flujo isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16\,fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

se consideran las siguientes simplificaciones:

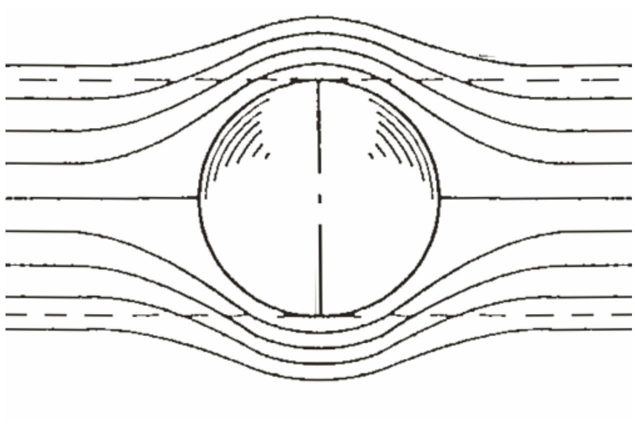
- Gas perfecto / ideal
- Régimen permanente
- Se desprecia la variación de cota (energía potencial)
- Se desprecia la variación de energía cinética

El término $\frac{16\,fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$ corresponde a las pérdidas energéticas por fricción entre los puntos 1 y 2 de la conducción.

d) Origen del arrastre: Resistencia de pared o de fricción (debida a los esfuerzos tangenciales de origen viscoso) y resistencia de forma (debida a la distribución asimétrica de las presiones).

La paradoja de D'Alembert cuestiona que el arrastre o la resistencia a los que se ve sometido un cuerpo inmerso en un fluido sean debidos exclusivamente a esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad.

Para ello, se considera una esfera, cilindro o cualquier cuerpo simétrico en la dirección del flujo, sumergido en un fluido ideal (y por tanto de viscosidad nula). En ese caso, la distribución del flujo a ambos lados del cuerpo será simétrica (idénticas líneas de corriente).



Dado que la distribución de presiones depende tan sólo de la magnitud de la velocidad (Ec. de Bernoulli) las presiones a ambos lados del cuerpo serán idénticas, y por lo tanto generarán una **fuerza resultante nula.**

Esta ausencia de fuerza de arrastre, no se corresponde con la realidad y cuestiona que los esfuerzos viscosos sean el único origen de dicha fuerza. El desprendimiento de la capa límite explica el porqué de las fuerzas debidas a la diferencia de presiones.

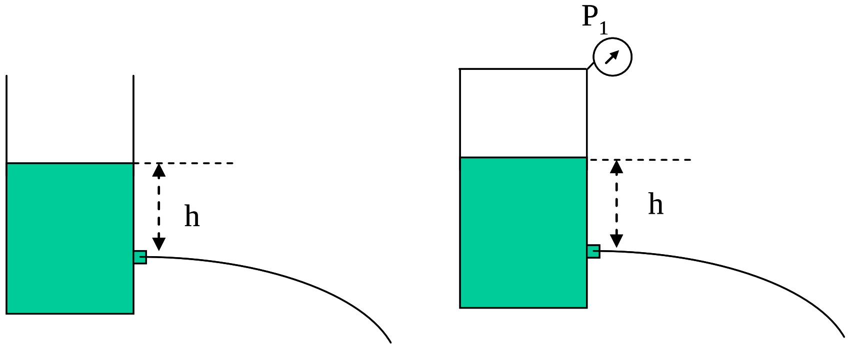
Pregunta 1 (25%)

- ¿Qué condición permite calificar un fluido como Newtoniano? Compleméntese la respuesta con las expresiones y gráficas que se considere oportunas.

- ¿En qué se diferencian las líneas de corriente y las trayectorias? ¿Coinciden alguna vez? Explicar por qué. ¿Dichas líneas (de corriente y trayectoria), corresponden a un enfoque euleriano o lagrangiano?

- Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad para una conducción horizontal de sección constante que transporta un fluido compresible en régimen permanente e isotermo, ¿qué sucede cuando la presión disminuye entre el punto inicial y final? ¿Cómo evolucionarán caudal volumétrico, caudal másico, velocidad y densidad? Considerar que el fluido se comporta como gas perfecto.

- Sabiendo que la velocidad teórica de salida de un líquido incompresible por el orificio de un depósito a presión atmosférica es $\sqrt{2gh}$ (siendo h la distancia vertical entre la superficie libre y el orificio), ¿cuál sería el valor de esa velocidad en un depósito presurizado con aire comprimido a presión relativa P1, sabiendo que el líquido tiene una densidad ρ? Explicar cómo se modela el caudal de salida real en cualquiera de los casos anteriores (qué ecuaciones se utilizan) y describir los fenómenos físicos que explican la diferencia entre caudal teórico y real.



Pregunta 2 (25%)

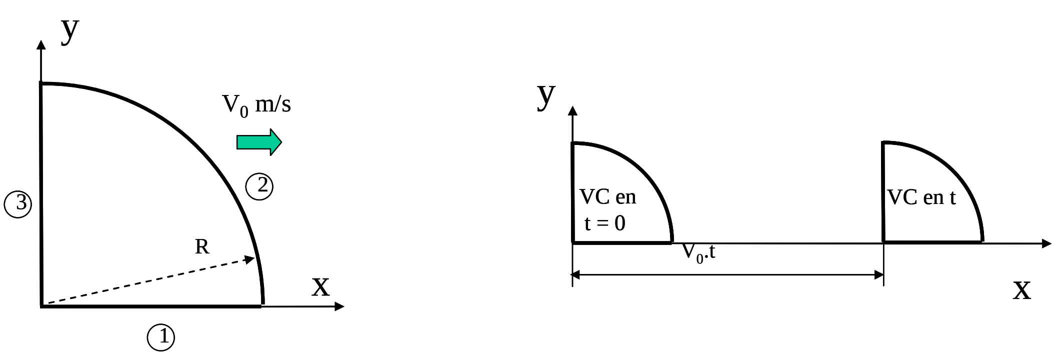
Dado el siguiente campo de velocidades $\vec{V} = 2\,t\,\vec{i} - 2x^2 t\,\vec{j}$ determinar:

1. Ecuación general de las trayectorias, y en particular la ecuación de la trayectoria de la partícula que en t=0 seg, está en el punto de coordenadas x_0, y_0. Dar la trayectoria como una sola ecuación en la que no aparezca el parámetro tiempo, t.

2. Ecuación general de las líneas de corriente en el instante t = 1 seg, y en particular la ecuación de la línea de corriente que en t = 1 seg pasa por el punto de coordenadas x_1, y_1.

3. ¿Qué puede decirse de las ecuaciones de las trayectorias y de las ecuaciones de las líneas de corriente? Razonar la respuesta.

4. Comprobar que se verifica el teorema de arrastre de Reynolds para la propiedad masa, para el volumen de control de la figura. El volumen de control es no deformable y se mueve con velocidad constante: $\vec{V}_{VC} = V_0\,\vec{i}$



Examen de Mecánica de Fluidos
ETSII - 12 de Septiembre 2006

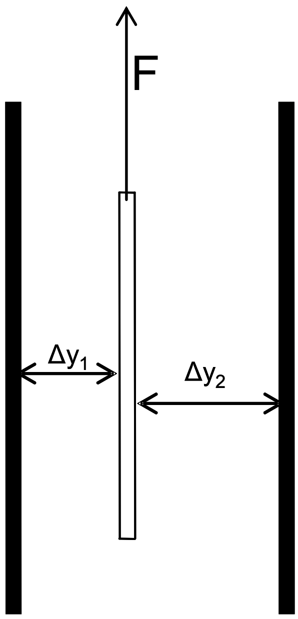
Pregunta 3 (25%)

Posiblemente las dos propiedades que mejor caracterizan el comportamiento de un fluido sean la viscosidad y su módulo elástico. Por ello el alumno debe:

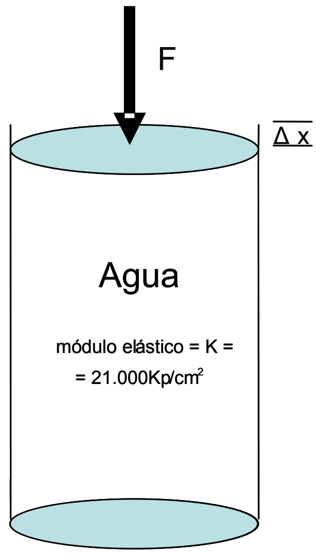
1. Explicar ambos conceptos, las expresiones formales con que se caracterizan y las unidades con que se miden.

2. Calcular el valor de la fuerza necesaria para desplazar (figura izquierda) una placa plana y sin peso a una velocidad constante de 2,5 mm/s. El área de contacto de cada cara es de 2,5 m^2 y la distancia de la placa a uno de los contornos es $\Delta y_1 = 1{,}2$ cm, mientras al otro es el duplo $\Delta y_2 = 2{,}4$ cm. La viscosidad absoluta del líquido en que está sumergida la placa es $1{,}64 \cdot 10^{-3}$ $N \cdot s/m^2$.

3. Calcular el desplazamiento del círculo que cierra la prensa (figura derecha), así como la disminución de volumen total de agua, sabiendo que su diámetro es 1 m, y la longitud total 2 m, cuando se aplica una fuerza de 10.000.000 N.



Segundo apartado



Tercer apartado

Pregunta 4 (25%)

a) Calcular cuál es el **caudal volumétrico máximo, expresado en Nm^3/h**, de gas natural a 10ºC que puede transportar en condiciones isotermas una tubería horizontal de polietileno de 73,1 mm de diámetro interior y 200 m de longitud si la presión manométrica a su entrada es de 3 bares y la máxima pérdida de presión admitida a lo largo de la misma es de 1 metro de columna de agua.
Hipótesis de trabajo: Tratar el gas natural como un **gas perfecto compresible**.
Datos adicionales:
Constante del gas natural: $R = 520\ m^2/s^2K$.
Factor de fricción de la tubería: $f = 0{,}025$.
Condiciones Normales: 1 atmósfera de presión y 20ºC de temperatura.

b) Resolver el mismo problema (es decir, el **caudal volumétrico máximo en Nm^3/h**), tratando ahora el gas natural como un gas perfecto incompresible.
Hipótesis de trabajo: Tratar el gas natural como un **gas perfecto incompresible**, y no despreciar las pérdidas por fricción.
Datos: todos los anteriores.

c) Justificar, con los valores adecuados, si resulta aceptable, en este caso, el tratamiento del gas natural como fluido incompresible.

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.}\rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall + \int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Módulo elástico de un fluido:

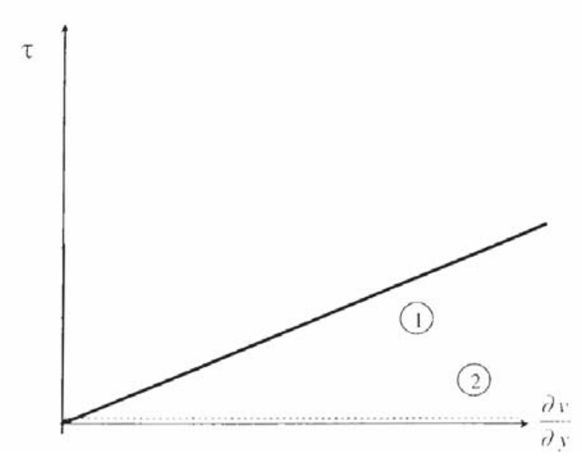
$$K = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$

Pregunta 1

a) Para responder adecuadamente a la pregunta es necesario definir primero el concepto de viscosidad, que relaciona el esfuerzo cortante con el gradiente de velocidades que este genera en un fluido:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

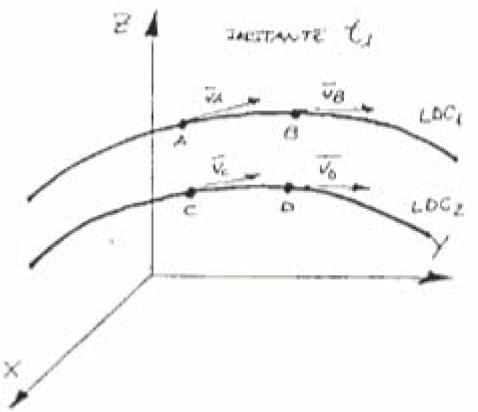
Se denomina a un fluido *Newtoniano*, cuando dicha **relación** existente entre los esfuerzos cortantes y el gradiente de velocidades es **constante** –si se mantienen la **temperatura y la presión constantes-**. En el caso de un fluido ideal (en el que la viscosidad sea nula) éste se puede considerar como un caso particular de un fluido newtoniano.



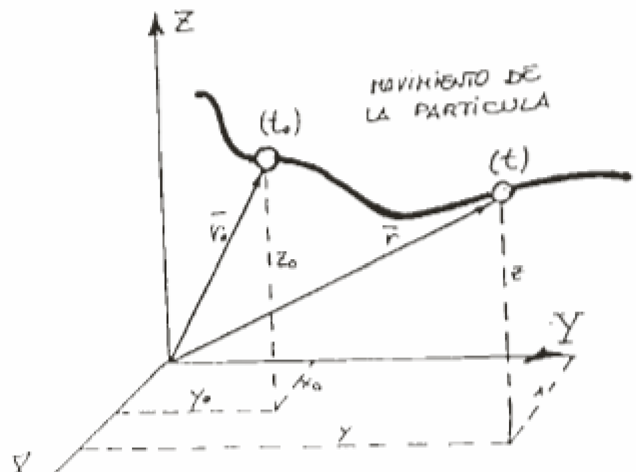
b) Las líneas de corriente son aquellas que en un instante dado son tangentes al vector velocidad en cada punto, y por lo tanto constituyen la **envolvente** de los vectores de velocidad que determina el **campo de velocidades** para cada punto del espacio. Por lo tanto las líneas de corriente pueden definirse para todos los puntos del espacio, para un mismo instante de tiempo. Dado que un punto sólo puede tener un vector velocidad, las líneas de corriente no se cruzan nunca. Esta definición corresponde a un enfoque Euleriano, en el que se estudia todo el espacio para cada instante de tiempo.

La trayectoria de una partícula constituye el lugar geométrico de los puntos que una partícula fluida va ocupando progresivamente en su desplazamiento a lo largo del tiempo. Por lo tanto, para cada partícula existe una trayectoria única (en cada instante t, la partícula se encontrará en uno de los puntos de dicha trayectoria). Esta línea corresponde a un enfoque Lagrangiano, en el que se estudian las variables significativas de una partícula específica a lo largo del tiempo.

La trayectoria de una partícula y la línea de corriente asociada al punto por el que pasa, coinciden en régimen estacionario cuando el campo de velocidades no varía con el tiempo.



Línea de corriente



Trayectoria

c) Atendiendo a la ecuación de Euler para flujo compresible isotermo:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Si la presión disminuye será debido a las pérdidas por fricción representadas por el último término de la ecuación. En dicho caso, considerando que la presión en el punto final es menor, y sabiendo que el gas es perfecto, en el punto final:

- El **caudal másico será igual** que en el punto inicial (ecuación de continuidad)
- La **densidad será meno**r (menor presión, ecuación de los gases perfectos)
- El **caudal volumétrico será mayor** ($\rho \cdot V \cdot A$ constante)
- La **velocidad será mayor** (sección constante, y caudal volumétrico V·A mayor)

d) La velocidad de salida en el caso del depósito presurizado, tras aplicar Bernoulli entre el punto superior (presión P_1) y el punto de salida a presión atmosférica será:

$$V = \sqrt{\left(\frac{P_1}{\rho g} + h\right) \cdot 2g}$$

Despreciando para ello la presión adicional creada por la columna de aire comprimido, dada su baja densidad, y considerando que P_1 está en Pascales (de lo contrario habría que hacer un cambio de unidades).

Para modelar el caudal de salida, se puede utilizar un coeficiente de descarga Cd, que corrija las discrepancias entre la velocidad teórica de salida y la real (debido a pérdidas energéticas) y la diferencia entre el área real de salida y la teórica (siendo el área efectiva de paso menor que la geométrica debida a la contracción de la vena fluida.

En ese caso, el caudal real de salida se podría modelar como:

$$Q = V \cdot A \cdot C_D = \sqrt{\left(\frac{P_1}{\rho g} + h\right) \cdot 2g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot C_D$$

El coeficiente de descarga será particular para cada depósito, e incluso para cada nivel de llenado del depósito.

$u = 2t$

$v = -2x^2 t$

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t$

$\dfrac{dy}{dt} = -2x^2 t$

Sistema de EDO acoplado

Resolvemos la primera

$\int dx = \int 2t\,dt \rightarrow \boxed{x = t^2 + C}$ (a)

Sustituimos en la 2ª: $dy = -2(t^2+C)^2 t \cdot dt$

e integramos: $\int dy = -2 \int (t^2+C)^2 t\,dt$

$$y = -2 \int (t^4 + 2t^2 C + C^2)\, t\,dt = -2\left[\frac{t^6}{6} + 2\frac{t^4}{4}C + C^2\frac{t^2}{2}\right] + B$$

$$\boxed{y = -\frac{t^6}{3} - t^4 C - C^2 t^2 + B} \text{ (b)}$$

De (a) $t^2 = x - C$

En (b) $y = -\frac{1}{3}(x-C)^3 - C(x-C)^2 - C^2(x-C) + B$ Constantes a determinar.

Para determinar las constantes, en (a) $C = x_0 - t_0^2$

y en (b) determinaremos B, sustituyendo x e y por x_0 e y_0.

Para el caso particular $t_0 = 0$ x_0 y_0

(a) $C = x_0$ $\quad x = t^2 + x_0$

(b) $y_0 = B$ $\quad y = -\frac{t^6}{3} - t^4 x_0 - x_0^2 t^2 + y_0$

o bien $y = -\frac{1}{3}(x-x_0)^3 - x_0(x-x_0)^2 - x_0^2(x-x_0) + y_0$ (c)

MF2 Sept 06

Cin-2

② $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$; $\frac{dx}{\cancel{2}\cancel{t}}=\frac{dy}{-\cancel{2}x^2\cancel{t}}$ $\rightarrow$ $\boxed{-x^2dx=dy}$

no depende de t, por lo que no particularizamos en t,

Integrando $\int -x^2dx=\int dy \rightarrow -\frac{x^3}{3}+C=y$

Para $x_1 y_1$ $C=y_1+\frac{x_1^3}{3}$. $\rightarrow$ $y=y_1+\frac{x_1^3-x^3}{3}$ (d)

③ Al no depender de t las LDC, las ecuaciones de las trayectorias y LDC que pasan por el mismo punto coincidirán.

Para comprobarlo, podemos analizar si la expresión (c):

$y=-\frac{1}{3}(x-x_0)^3-x_0(x-x_0)^2-x_0^2(x-x_0)+y_0$ (c)

es igual a la (d) pero para $x_0 y_0$ $\rightarrow y=y_0+\frac{x_0^3-x^3}{3}$ (e)

Desarrollamos (c)

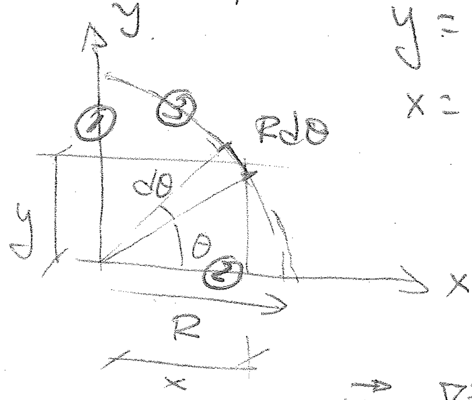
$y=-\frac{1}{3}(x^3-3x^2x_0+3xx_0^2-x_0^3)-(x_0x^2-2xx_0^2+x_0^3)-$

$-x_0^2x+x_0^3+y_0$

$y=-\frac{1}{3}x^3+\cancel{x^2x_0}-\cancel{xx_0^2}+\frac{x_0^3}{3}-\cancel{x_0x^2}+\cancel{2xx_0^2}-\cancel{x_0^3}-\cancel{x_0^2x}+\cancel{x_0^3}+y_0$

$y=-\frac{x^3}{3}+\frac{x_0^3}{3}+y_0$ igual a (e)

(4) "Diferencial de área del arco"



$y = R\,\text{sen}\,\theta \qquad dl = R\,d\theta$

$x = R\cos\theta$

Ecuación $x^2+y^2=R^2$

Función $F = x^2+y^2-R^2=0$

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{x}{R}\vec{i}+\frac{y}{R}\vec{j}$$

$x^2+y^2=R^2$

$$d\vec{A} = dl \cdot 1 \cdot \vec{n} = (R\,d\theta)\left(\frac{x}{R}\vec{i}+\frac{y}{R}\vec{j}\right) = (x\vec{i}+y\vec{j})\,d\theta$$

$y = R\,\text{sen}\,\theta$

$x = R\cos\theta$

$$\boxed{d\vec{A} = R\,d\theta\,(\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j})}$$

- Se tiene que cumplir $\displaystyle 0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho\, \vec{V}_{sc}\cdot d\vec{A}$

En nuestro caso $\rho = cte$

dado que $\nabla\cdot\vec{V} = 0$ $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0+0=0\right)$

$\displaystyle \frac{d}{dt}\int \rho\, d\forall = \rho\frac{d}{dt}\int d\forall = \rho\frac{d\forall}{dt} = 0$ ($\forall$ se mantiene constante al ser indeformable)

- Calculamos $\displaystyle \int_{sc}\rho\,\vec{V}_{rsc}\cdot d\vec{A} = 0 \Longleftrightarrow$ al ser ρ cte $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{sc}\vec{V}_{rsc}\cdot d\vec{A} = 0$

Dado que SC se mueve con $\vec{V}_{sc} = V_0\,\vec{i}$

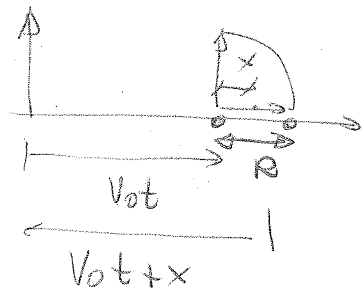
$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel/sc} + \vec{V}_{arr/sc}$

$2t\,\vec{i} - 2x^2t\,\vec{j} = \vec{V}_{rel_{sc}} + V_0\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{V}_{rel_{sc}} = (2t-V_0)\vec{i} - 2x^2t\,\vec{j}}$

CINV

MF2 Sept 06

Referimos los $d\vec{A}$ a los ejes móviles, así como el campo de velocidades.



$$\vec{V}_r = (2t - V_0)\vec{i} - 2(V_0t + x)^2 t\,\vec{j}$$

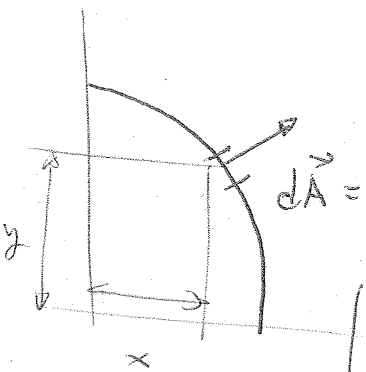
$$d\vec{A} = -dy\,\vec{i}$$

$$d\vec{A} = -dx\,\vec{j}$$

$$\int_0^R \vec{V}\cdot dA = -\int_0^R (2t-V_0)\,dy = -(2t-V_0)R \qquad (f)$$

$$\int_0^R \vec{V}\cdot d\vec{A} = +2t\int_0^R (V_0t+x)^2\,dx =$$

$$= +2t\,\frac{(V_0t+x)^3}{3} = +\frac{2t}{3}\left[(V_0t+R)^3-(V_0t)^3\right] \qquad (g)$$



$$d\vec{A} = R\,d\theta(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$\int_{SC} \vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi/2} (2t-V_0)R\cos\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2} 2R\sin\theta(V_0t+x)^2 t\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (2t-V_0)R\cos\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2} 2R\sin\theta\,(V_0t+R\cos\theta)^2 t\,d\theta =$$

$$= (2t-V_0)R\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} + 2\frac{(V_0t+R\cos\theta)^3}{3}t\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= (2t-V_0)R + \frac{2t}{3}\left[(V_0t)^3-(V_0t+R)^3\right] \qquad (h)$$

Sumando (f) + (g) + (h) se obtiene:

$$-(2t-V_0)R + \frac{2t}{3}\left[(V_0t+R)^3-(V_0t)^3\right] + (2t-V_0)R +$$

$$+ \frac{2t}{3}\left[(V_0t)^3-(V_0t+R)^3\right] = 0 \qquad \text{cqd}$$

También puede resolverse el apartado, refiriendo todo a los ejes fijos

El campo de velocidades será $\vec{V}_{sc} = (2t - V_0)\,\vec{i} - 2x^2 t\,\vec{j}$

con x referida a los ejes fijos.

$-dy\,\vec{i}$ $\qquad \displaystyle\int_0^R \vec{v}\cdot d\vec{A} = -(2t-V_0)R \qquad (f)'$

$-dx\,\vec{j}$ $\qquad \displaystyle\int_{V_0t}^{R+V_0t} \vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_{V_0t}^{R+V_0t} (-2x^2t)(-dx) = 2t\,\frac{(V_0t+R)^3-(V_0t)^3}{3} \qquad (g)'$

La ecuación de la circunferencia será $(x-V_0t)^2 + y^2 = R^2$

$\vec{n} = \dfrac{x-V_0t}{R}\,\vec{i} + \dfrac{y}{R}\,\vec{j} \qquad x - V_0t = R\cos\theta \qquad d\vec{A} = R\,d\theta\,\vec{n}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta$

Referimos el campo de velocidades a la variable θ

$$\vec{V} = (2t-V_0)\,\vec{i} - 2(V_0t + R\cos\theta)^2 t\,\vec{j}$$

$$\int \vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi/2} (2t-V_0)\,R\cos\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/2} 2(V_0t+R\cos\theta)^2\,t\,R\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= (2t-V_0)\,R\,\mathrm{sen}\,\theta\Big]_0^{\pi/2} + 2t\,\frac{(V_0t+R\cos\theta)^3}{3}\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= (2t-V_0)R + \frac{2t}{3}\left[(V_0t)^3 - (V_0t+R)^3\right] \qquad (h')$$

Como vemos, se verifica también que $(f') + (g)' + (h)' = 0$

cqd

SEGUNDO APARTADO

$F = F_1 + F_2$, correspondiendo cada una de las fuerzas a cada cara.

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \tau_1 A = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)_1 \cdot A \\ F_2 &= \tau_2 A = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)_2 \cdot A \end{aligned}\right\} \Longrightarrow F = \mu A \left[\left(\frac{du}{dy}\right)_1 + \left(\frac{du}{dy}\right)_2\right] =$$

$$= 1{,}64 \times 10^{-3} \times 2{,}5 \left[\frac{2{,}5 \times 10^{-3}}{1{,}2 \times 10^{-2}} + \frac{2{,}5 \times 10^{-3}}{2{,}4 \times 10^{-2}}\right] Nw$$

$$= 1{,}64 \times 2{,}5 \left(\frac{0{,}25}{1{,}2} + \frac{0{,}25}{2{,}4}\right) 10^{-3} \; Nw = \underline{\underline{1{,}281 \times 10^{-3} \; Nw}}$$

Tercer apartado

En un líquido $K \simeq cte$ luego $\Rightarrow K = -\dfrac{dp}{dV/V} \simeq -\dfrac{\Delta p}{\Delta V/V}$

$$\Delta p = \frac{10.000.000 \; Nw}{\frac{\pi \cdot 1^2}{4} \; m^2} = \frac{4000}{\pi} \frac{Nw}{cm^2} = 1273{,}24 \frac{Nw}{cm^2} \sim \underline{\underline{129.79 \; kp/cm^2}}$$

$$K = 21000 \; kp/cm^2 = -\frac{129{,}79 \; kp/cm^2}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow \cancel{\Delta V = 21000}$$

$$\Delta V = -V \frac{129{,}79}{21000} = -0{,}0062 V$$

$$\Delta V = -\left(\frac{\pi \cdot 1}{4} \times 2 \times 0.0062\right) m^3 = 0.0097 \; m^3 \simeq \underline{\underline{0.01 \; m^3}}$$

$$\underline{\underline{\Delta x}} = \frac{\Delta V}{\pi D^2} = \frac{0.0097}{\pi} = 0.003 \; m = \underline{\underline{3 \; mm}}$$

Pregunta Flujo Compresible Isotermo

a)

Presiones

$$P_1 = 3 \text{ bar} \longrightarrow P_1^* = 3\cdot 10^5 + 101337 = 401337 \text{ Pa}.$$

$$P_2^* = P_1^* - \Delta P = 401337 - 1\cdot 9810 = 391527 \text{ Pa}.$$

$$(P_2 = 290190 \text{ Pa})$$

Densidades

$$\rho_1 = \frac{P_1^*}{RT} = \frac{401337}{520\cdot 283} = 2'73 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho_2 = \frac{P_2^*}{RT} = \frac{391527}{520\cdot 283} = 2'66 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho_{CN} = \frac{P_{CN}^*}{RT_{CN}} = \frac{101337}{520\cdot 293} = 0'67 \text{ Kg/m}^3$$

Ahora, flujo isotermo compresible de gas perfecto:

$$P_2^{*2} = P_1^{*2} - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5}\cdot RTL \longrightarrow G = \sqrt{\frac{P_1^{*2} - P_2^{*2}}{RTL}\cdot\frac{\pi^2 D^5}{f\cdot 16}}$$

$$G = \sqrt{\frac{401337^2 - 391527^2}{520\cdot 283\cdot 200}\cdot\frac{\pi^2 (73'1\cdot 10^{-3})^5}{0'025\cdot 16}} = \sqrt{0'014} = 0'12 \text{ Kg/s}$$

Caudal volumétrico máximo en condiciones normales:

$$Q_{máx_{CN}} = \frac{G}{\rho_{CN}} = \frac{0'12}{0'67} = 0'18 \text{ N·m}^3/\text{s} = 631'5 \text{ Nm}^3/\text{h}.$$

b) Como incompresible:

$$\frac{P_1}{\gamma_{gas}} + \cancel{z_1} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} = \frac{P_2}{\gamma_{gas}} + \cancel{z_2} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}} + h_f.$$

$$\gamma_{gas} = \rho_1 \cdot g = 2'73 \cdot 9'81 = 26'78 \ N/m^3$$

$$h_f = \frac{P_1 - P_2}{\gamma_{gas}} = \frac{3 \cdot 10^5 - 290190}{26'78} = 366'3 \ mcf.$$

Ahora: $h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \longrightarrow v^2 = \frac{2g \, D \, h_f}{f L} = \frac{2 \cdot 9'81 \cdot 73'1 \cdot 10^{-3} \cdot 366'3}{0'025 \cdot 200}$

$\longrightarrow v^2 = 105'1 \longrightarrow v = 10'25 \ m/s.$

$\longrightarrow Q = v \cdot A = 10'25 \cdot \frac{\pi \, (73'1 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0'043 \ m^3/s$ (a 10°C).

Para ~~saberla~~ en condiciones normales:

$G = \rho_1 \cdot Q = \rho_{CN} \cdot Q_{CN} \longrightarrow Q_{CN} = Q \cdot \frac{\rho_1}{\rho_{CN}} = 0'043 \cdot \frac{2'73}{0'67} = 0'175 \ m^3/s$

$Q_{CN} = 631'0 \ Nm^3/h.$

alternativa como incompresible;

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} Q^2 \quad / \quad P_1 - P_2 = \gamma \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} Q^2 = \rho \cancel{g} \frac{8fL\rho}{\pi^2 \cancel{g} D^5 \rho} \cdot Q^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{8fLG^2}{\pi^2 D^5 \rho} \longrightarrow G = \sqrt{\frac{\pi^2 D^5 \rho}{8fL}(P_1 - P_2)}$$

$$G = \sqrt{\frac{\pi^2 (73'1 \cdot 10^{-3})^5 \cdot 2'73}{8 \; 0'025 \cdot 200}(3 \cdot 10^5 - 290190)} = 0'1174 \; Kg/s.$$

$$Q_{CN} = \frac{G}{\rho_{CN}} = \frac{0'11744}{0'67} = 0'175 \; m^3/s = 631 \; m^3/h.$$

c) Comparando datos a la entrada y la salida de la tubería, comprobamos que la diferencia de densidades:

$\rho_1 - \rho_2 = 0'07$ Kg/m^3 supone poco más de una reducción del 2'5%, por lo que se puede aceptar el tratamiento incompresible del gas.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Examen de Mecánica de Fluidos
Martes 28 de junio de 2005

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

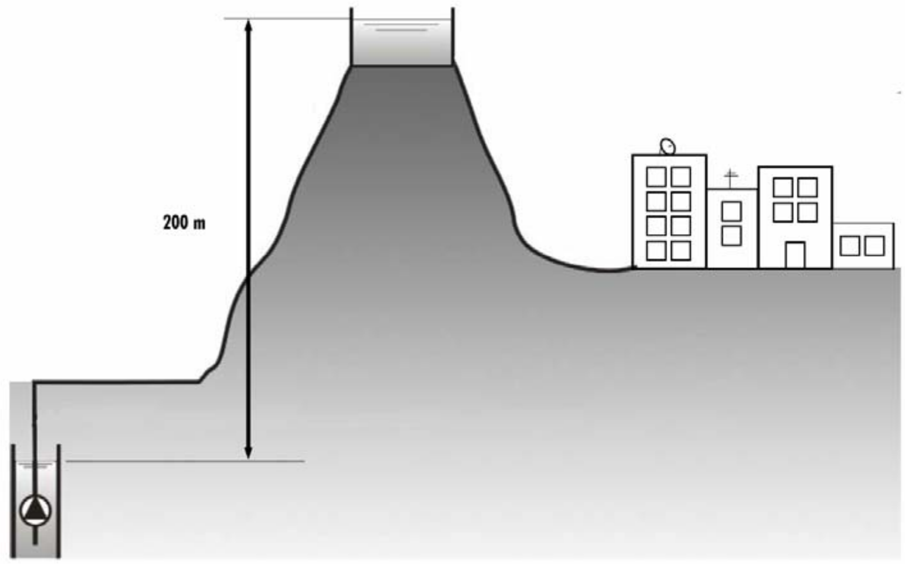
Problema 1 (25%)

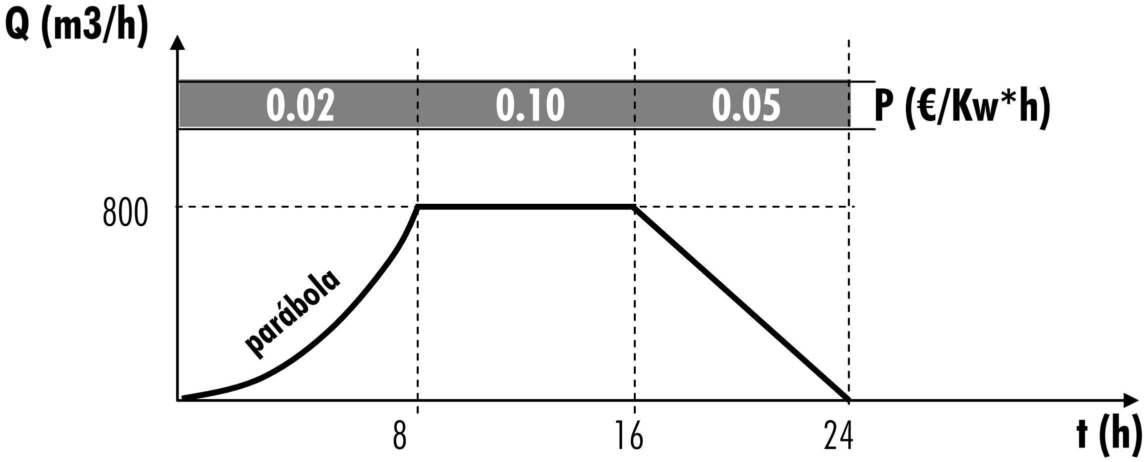
La demanda de agua diaria de una ciudad y el coste de la energía de bombeo siguen las evoluciones temporales de la figura. El agua bombeada se distribuye a partir de un depósito situado a una cota superior (su base tiene una superficie de 4000 m^2). Si se desprecian tanto las pérdidas por fricción en la tubería como las variaciones de nivel del depósito (son de un orden de magnitud muy inferior al desnivel a vencer), y admitiendo que la bomba tiene un rendimiento igual a la unidad. El depósito se debe dimensionar de manera que cuando alcance su nivel de agua más bajo, aún quede un volumen de reserva igual al consumo de agua diario.

a) Cuando la bomba trabaja en continuo las 24 horas del día, ¿cuál es el caudal a elevar, cuál el volumen del depósito necesario y cuál el nivel máximo del agua?. Asimismo calcular el gasto energético diario.

b) Si la bomba sólo trabaja entre las 0 y las 8 de la madrugada, ¿cuál es el caudal a elevar, cuál el volumen del depósito necesario y cuál el nivel máximo del agua?. Asimismo calcular el gasto energético diario.

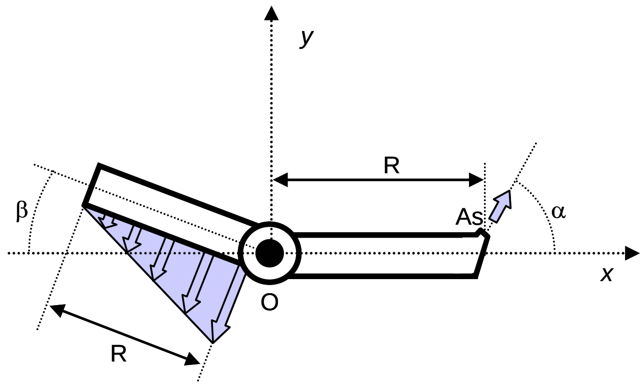
c) Sabiendo que aumentar el volumen del depósito comporta una inversión superior (se estima un sobre coste de 300 €/m^3) y que triplicar la potencia de la bomba supone una gasto adicional de 30.000 €, analizar cuál de las dos soluciones calculadas (apartados a y b) es, desde la óptica económica, mejor. La vida media de los depósitos es de 50 años y la de las bombas 15 años. El valor del dinero es constante en el tiempo.





Problema 2 (25%)

La figura muestra, visto en planta, un aspersor asimétrico con dos brazos, ambos de longitud R. Donde:



- La entrada de agua en el aspersor está situada en el punto O, donde también está ubicado su eje de giro. El caudal total entrante es Q y se distribuye entre los dos brazos a partes iguales.
- Por el brazo de la derecha, el agua sale a través de una boquilla, cuya sección es As, con una orientación marcada por el ángulo α.
- El brazo de la izquierda está orientado según el ángulo β, y el agua sale del mismo, de forma continua y con un perfil de velocidades lineal (según muestra la figura), a través de una ranura de anchura ε y longitud R.

a) Si se desea que el aspersor **no gire**, calcular el valor del par de anclaje que será necesario aplicar sobre el eje de giro en O.

b) Explicar razonadamente la influencia del ángulo β sobre el valor de dicho par de anclaje.

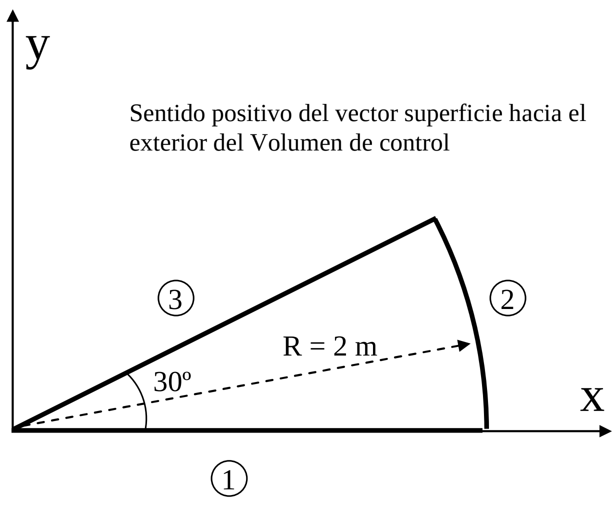
Datos del problema son: R, As, ε, Q, α y β. Trabajar de acuerdo con los ejes de la figura:

Problema 3 (25%)

Dado el siguiente campo de velocidades $\vec{V} = y\,t\,\vec{i} - t\,\vec{j}$ determinar:

a) Ecuación general de las trayectorias, y en particular la ecuación de la trayectoria de la partícula que en t=0 seg, está en el punto de coordenadas x_0, y_0. dar la trayectoria como una sola ecuación en la que no aparezca el parámetro tiempo, t.

b) Ecuación general de las líneas de corriente en el instante t = 1 seg, y en particular la ecuación de la línea de corriente que en t = 1 seg pasa por el punto de coordenadas x_1, y_1.



c) ¿Qué puede decirse de las ecuaciones de las trayectorias y de las ecuaciones de las líneas de corriente?. Razonar la respuesta.

d) Calcular la ecuación del campo de aceleraciones, determinando la aceleración local y la aceleración convectiva. Deducir, a partir del campo de aceleraciones, cuál será, para cualquier instante t, la aceleración de la partícula que en t=0 está en el punto de coordenadas x_0, y_0.

e)Comprobar que se verifica el teorema de arrastre de Reynolds para la propiedad masa, para el volumen de control de la figura. El volumen de control está quieto y es no deformable.

Examen de Mecánica de Fluidos
Martes 28 de junio de 2005

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

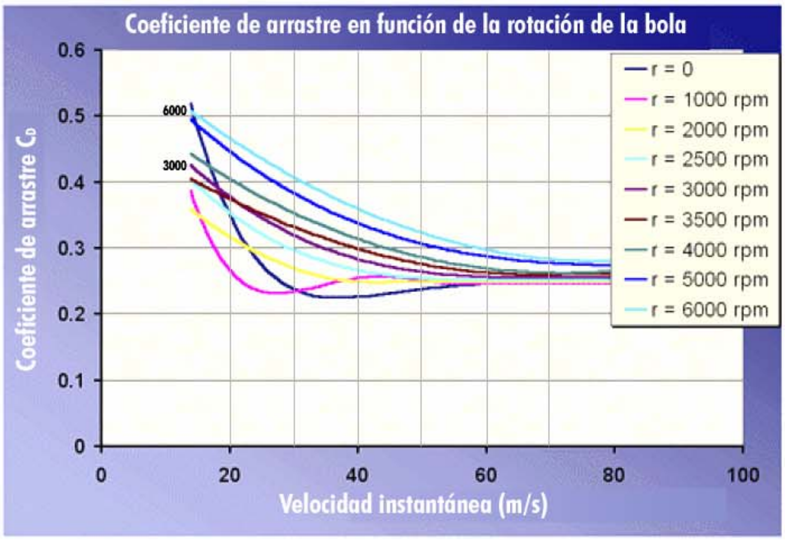
Problema 4 (25%)

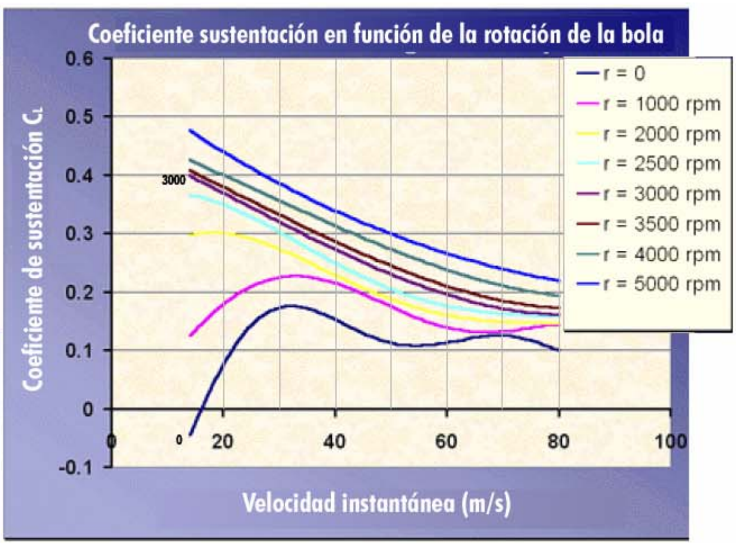
Una bola de golf es golpeada por un jugador y describe la trayectoria que se muestra en la figura. En las tres posiciones mostradas, la bola lleva las velocidades (medidas desde tierra) y ángulos con la horizontal que se especifican. La velocidad de rotación de la bola (spin)es de 3000 rpm y el viento sopla a 30 Km/h en contra (paralelo a la horizontal), ÚNICAMENTE en la posición de mayor altura.

a) Dibujar el balance de fuerzas a las que está sujeta la bola en cada una de las tres posiciones, y calcular el valor de las fuerzas resultantes en cada caso (módulo, dirección y sentido).

b) La misma bola se suelta en caída libre desde una altura suficiente con una rotación de 3000 rpm. ¿Cual será la velocidad vertical terminal de caída aproximada? ¿Influye en este caso la velocidad de rotación (spin) de la bola?

c) La distancia qué alcanza una bola de golf puede depender de las condiciones atmosféricas. ¿De cuales? (presión, temperatura, humedad, altitud). Argumentar con expresiones utilizadas en clase.





- Densidad del aire: 1.2 Kg/m^3
- Viscosidad cinemática del aire: $15 \cdot 10^{-6}$ m^2/s

Bola Callaway HX Tour:

- Diámetro: 4.27cm
- Peso: 45.6 gr

- **EXPRESIONES FUNDAMENTALES**

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

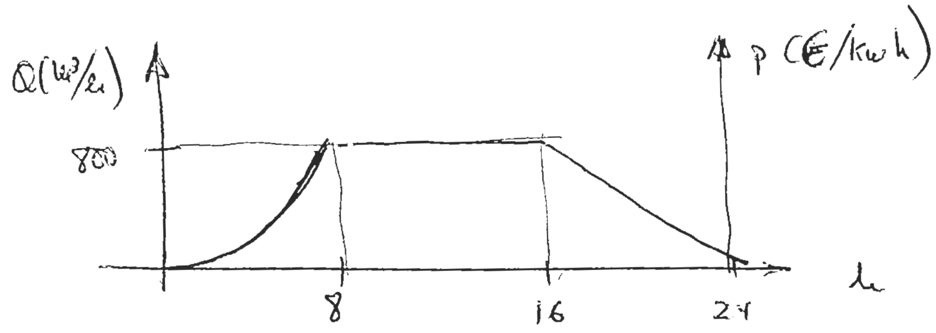
Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

CONSUMO DIARIO



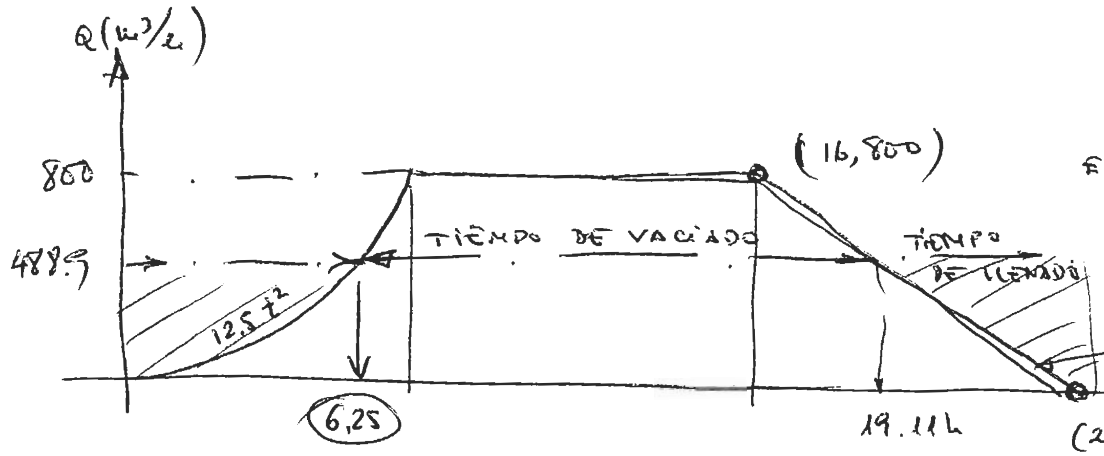
$Q(t) = k \cdot t^2$

$k = \dfrac{800}{8^2} = 12,5 \qquad Q(t) = 12.5\, t^2 \qquad \begin{vmatrix} Q \text{ en } m^3/h \\ t \text{ en } h \end{vmatrix}$

$$V = \int_0^8 12.5 t^2\, dt + 800\,(16-8) + \frac{1}{2}\, 800\,(24-16) =$$

$$= 12.5 \left[\frac{t^3}{3}\right] + 6400 + 3200 = (2133 + 6400 + 3200)\ m^3 = \underline{\underline{11733{,}33\ m^3/día}}$$

b) $\bar{Q}$ (sobre 24h) $= \dfrac{11733{,}33}{24} = \underline{488.9\ m^3/h}$



Ecuación recta

$$\frac{Q-800}{-800} = \frac{t-16}{24-16}$$

$Q = 800 - 100\,(t-16)$

Puntos de corte

1) $488,9 = 12,5\ t^2$

$t = \sqrt{\dfrac{488.9}{12.5}} = \underline{6.25\ h}$

2) $488.9 = 800 - 100\,(t-16)$

$\hookrightarrow t = 16 + \cancel{\dfrac{488.9}{800}}\ \dfrac{800 - 488.9}{100}$

$\underline{\underline{t}} = (16 + 3{,}11)\ h = \underline{\underline{19{,}11\ h}}$

2

$$\forall = 11733,33 + \underbrace{\int_{19,11}^{24} 488,9 - \left[800 - 100(t-16)\right] dt}_{A_{triang} = \frac{1}{2}(24 - 19,11)\, 488,9} + \int_{0}^{6,25} \left(488,9 - 12,5\,t^2\right) dt =$$

$$= 11733,33 + 1195,36 + 488,9\,(6,25) - 12,5\left(\frac{6,25^3}{3}\right) =$$

$$= (11733,33 + 1195,36 + 3055,63 - 1017,25)\ m^3 = \underline{\underline{14967\ m^3}}$$

ALTURA MÁXIMA $= \dfrac{14967}{4000} = \cancel{4,98}\ 3,74\ m \sim \underline{\underline{5\ m}}$

Se alcanza a las 6,25 h de la mañana.

COSTE ENERGÍA $\quad C = \sum P_i\, t_i\, c_i =$

$$= \gamma Q_1 H_1 t_1 c_1 + \gamma Q_2 H_2 t_2 c_2 + \gamma Q_3 H_3 t_3 c_3 =$$

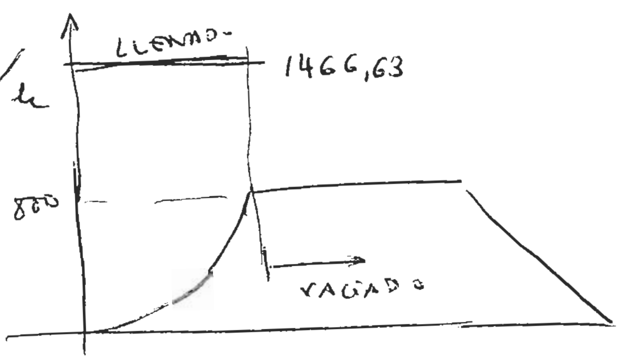
$$= \gamma Q H \Delta t\,(c_1 + c_2 + c_3) = \underbrace{\frac{9800 \times 200 \times 488,9}{1000} \frac{1}{3600}}_{kW} \times 8 \times 0,17\ \frac{€}{h}$$

$$= \cancel{1810\ €/día} = 9,81 \times 200 \times \frac{488,9}{3600} \times 8 \times 0,17$$

$$= 362,37\ €/día$$

b)

$$\bar{Q} = \frac{11733,33}{8} = 1466,63\ m^3/h$$



$$\forall = 11733,33 + \int_0^8 \left(1466,63 - 12,5\,t^2\right) dt =$$

$$= \left(11733,33 + 1466,63 \times 8 - 12,5\ \frac{8^3}{3}\right) m^3 =$$

$$= 11733,33 + 11733,33 - 2133,33 = 21333,33\ m^3$$

Altura máxima $\dfrac{21333,33}{4000} = 5,33$ m

Coste energía $\gamma Q H \Delta t \times p = \dfrac{9800}{1000} \times 1466,63 \times 250 \times 8 \times 0,02 =$

$= 9,8 \times \dfrac{1466,63}{3600} \times 250 \times 8 \times 0.02 = 127,76$ €

Diferencia coste energéticos por día $(362,37 - 127,76)$ €/día $= 234,61$ €/día

INVERSIÓN ADICIONAL

Depósito $= (21\,333,33 - 11\,733,33)\,m^3 \times 300$ €/m³ $= 9600 \times 300 = \cancel{5\,760.000}$ 2.880.000 €

Bomba $= 30.000$ €

Coste anual $\left(\dfrac{30000}{15} + \dfrac{\cancel{5760.000}\ 2880.000}{50}\right)$ €/año $=$ 2000 + 57600 ~~115200~~ = ~~117200~~ 59600 €/año

SOBRE COSTE ANUAL → 59600

AHORRO ENERGÉTICO ANUAL $234,61 \times 365 = 85632,65$

⟹ MEJOR BOMBEAR OCHO HORAS (mejor solución b)

Ahorro por año 85632,65 − 59600 = **26032,65 €/año**

(1)

Problema Aspersor

a) $$\overrightarrow{M}_R = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho\, dV} + \int_{VC}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho(\vec{v}_{rsc}\cdot\vec{dA}) = \int_{\substack{\text{Brazo}\\\text{Izdo}}}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho(\vec{v}_{rsc}\cdot\vec{dA}) + \int_{\substack{\text{Brazo}\\\text{Dcho.}}}(\vec{r}\wedge\vec{v})\rho(\vec{v}_{rsc}\cdot\vec{dA})$$

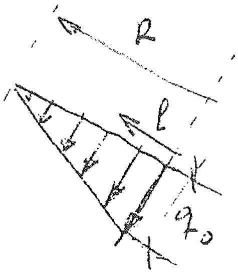
Brazo Derecho.

$$\left[\begin{array}{l}\vec{v} = \frac{Q/2}{A_s}(\cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{Sen}\alpha\,\vec{j}) \\ \vec{r} = R\,\vec{i}\end{array}\right] \to \vec{r}\wedge\vec{v} = \frac{QR}{2A_s}\operatorname{Sen}\alpha\,\vec{K}.$$

$$\left[\begin{array}{l}\vec{dA} = dA(\cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{Sen}\alpha\,\vec{j}) \\ \vec{v} = \vec{v}_{rsc}\end{array}\right] \to \vec{v}_{rsc}\cdot\vec{dA} = \frac{Q}{2A_s}\cdot dA.$$

$$\int_{\substack{\text{Brazo}\\\text{Dcho}}} = \int_{A_s}\frac{QR}{2A_s}\operatorname{Sen}\alpha\,\vec{K}\rho\frac{Q}{2A_s}\,dA \overset{\operatorname{sen}\alpha}{=} \frac{\rho Q^2 R}{4A_s^2}\vec{K}\int_{A_s}dA = \frac{\rho Q^2 R}{4A_s}\operatorname{Sen}\alpha\,\vec{K}.$$

Brazo Izquierdo.



$$q = q(l) = a + b\cdot l$$

$$\left[\begin{array}{l} l=0 \to q=q_0 \\ l=R \to q=0\end{array}\right] \begin{array}{l}\to a = q_0 \\ \to 0 = q_0 + bR \to b = \frac{-q_0}{R}\end{array}$$

$$\longrightarrow q(l) = q_0 - \frac{q_0}{R}l = q_0\left(1-\frac{l}{R}\right)$$

Ahora: $$\frac{Q}{2} = \int_0^R q(l)\cdot dl = \int_0^R q_0\left(1-\frac{l}{R}\right)dl = q_0\left[R - \frac{1}{R}\frac{R^2}{2}\right] = \frac{q_0 R}{2}$$

$$\Rightarrow q_0 = \frac{Q}{R} \Longrightarrow \boxed{q(l) = \frac{Q}{R}\left(1-\frac{l}{R}\right)} \to \boxed{v = v(l) = \frac{q(l)}{\mathcal{E}}}$$

2

$$\left[\begin{array}{l}\vec{v} = \dfrac{Q}{\mathcal{E}R}\left(1-\dfrac{l}{R}\right)\left(-\operatorname{Sen}\beta\,\vec{i} - \operatorname{Cos}\beta\,\vec{j}\right)\\ \vec{r} = l\left(-\operatorname{Cos}\beta\,\vec{i} + \operatorname{Sen}\beta\,\vec{j}\right)\end{array}\right]$$

$$\rightarrow \vec{r}\wedge\vec{v} = \frac{Ql}{\mathcal{E}R}\left(1-\frac{l}{R}\right)\left[\operatorname{Cos}^2\beta\,\vec{K} - \operatorname{Sen}^2\beta\,(-\vec{K})\right] = \frac{Ql}{\mathcal{E}R}\left(1-\frac{l}{R}\right)\vec{K}$$

$$\left[\begin{array}{l}\vec{v_{r_{SC}}} = \vec{v}\,.\\ \vec{dA} = dl\,\mathcal{E}\left(-\operatorname{Sen}\beta\,\vec{i} - \operatorname{Cos}\beta\,\vec{j}\right)\end{array}\right] \rightarrow \vec{v_{r_{SC}}}\cdot\vec{dA} = \frac{Q}{\cancel{\mathcal{E}}R}\left(1-\frac{l}{R}\right)\cancel{\mathcal{E}}\cdot dl$$

$$\int_{Dcho} = \int_0^R \frac{Ql}{\mathcal{E}R}\left(1-\frac{l}{R}\right)\vec{K}\,\rho\,\frac{Q}{R}\left(1-\frac{l}{R}\right)dl = \frac{Q^2\rho}{\mathcal{E}R^2}\vec{K}\int_0^R l\left(1+\frac{l^2}{R^2}-\frac{2l}{R}\right)dl$$

$$\int_{Dcho} = \frac{Q^2\rho}{\mathcal{E}R^2}\vec{K}\left[\frac{R^2}{2}+\frac{1}{R^2}\frac{R^4}{4}-\frac{2}{R}\frac{R^3}{3}\right] = \frac{Q^2\rho}{\mathcal{E}\cancel{R^2}}\vec{K}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right]\cancel{R^2}$$

$$\int_{Dcho} = \frac{\rho Q^2}{\mathcal{E}}\,\frac{1}{12}\,\vec{K}\,. \quad (\text{No depende de } \beta)$$

Retomando:

$$\boxed{\vec{M_R} = \int_{Izdo} + \int_{Dcho} = \frac{\rho Q^2 R}{4A_S}\operatorname{Sen}\alpha\,\vec{K} + \frac{\rho Q^2}{12\mathcal{E}}\vec{K} = \frac{\rho Q^2}{4}\left[\frac{R\operatorname{Sen}\alpha}{A_S}+\frac{1}{3\mathcal{E}}\right]\vec{K}}$$

b) En lo que al brazo izquierdo se refiere, si el par de anclaje depende de algún ángulo, es del que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Y este ángulo es siempre de 90°, para cualquier valor de β.
Conclusión: β no influye en el par, y por eso no aparece en la ecuación final.

$\vec{v} = yt\vec{i} - t\vec{j}$

1

Tray.

$$\frac{dx}{dt} = yt$$

$$\frac{dy}{dt} = -t \rightarrow \int dy = -\int t\,dt \rightarrow y = -\frac{t^2}{2} + A$$

Sustit. en $\frac{dx}{dt} = yt \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \left(-\frac{t^2}{2} + A\right)t$

$$\int dx = \int \left(-\frac{t^3}{2} + At\right)dt \longrightarrow x = -\frac{t^4}{8} + A\frac{t^2}{2} + B$$

Particulariz. $t = 0 \quad y = y_0 \quad x = x_0$

$A = y_0 \quad B = x_0$

$$y = -\frac{t^2}{2} + y_0$$

$$x = -\frac{t^4}{8} + y_0\frac{t^2}{2} + x_0$$

Puedo obtener $y = f(x)$ eliminando t de ambas ecuaciones.

De la 1: $\frac{t^2}{2} = y_0 - y$ además $\frac{t^4}{4} = \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 = (y_0 - y)^2$

$$x = -\frac{1}{2}(y_0 - y)^2 + y_0(y_0 - y) + x_0$$

$$x_0 - x = \frac{1}{2}(y_0^2 - 2y_0y + y^2) + (y - y_0)y_0$$

$$x_0 - x = \frac{y_0^2}{2} - \cancel{y_0y} + \frac{y^2}{2} + \cancel{yy_0} - y_0^2 \rightarrow x_0 - x = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}$$

LÍNEAS DE CORRIENTE

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}; \quad \frac{dx}{yt} = \frac{dy}{-t} \rightarrow \int dx = -\int y\,dy \rightarrow x = -\frac{y^2}{2} + C$$

L.d. corriente estacionarias. Deben coincidir con trayectorias

$t = t_1 \quad y = y_1 \quad x = x_1 \qquad x_1 = -\frac{y_1^2}{2} + C \rightarrow C = x_1 + \frac{y_1^2}{2}$

$$x_1 - x = \frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}$$

si el punto es el mismo, coincidirán lógicamente.

ACELERACIÓN

#2

Campo de aceleraciones: $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} =$

$$= \underbrace{(y\vec{i} - \vec{j})}_{\vec{a}_l} + yt \cdot 0 + \underbrace{(-t)\, t\vec{i}}_{a_c} = y\vec{i} - \vec{j} - t^2\vec{i} = (y - t^2)\vec{i} - \vec{j}$$

Para la partícula que en $t=0$ esté en x_0 y_0

$$y(t) = y_0 - \frac{t^2}{2} \qquad \vec{a}_p = \left(y_0 - \frac{t^2}{2} - t^2\right)\vec{i} - \vec{j} = \left(y_0 - \frac{3t^2}{2}\right)\vec{i} - \vec{j} \quad (1)$$

A partir de la trayectoria:

$$x_p = x_0 - \frac{t^4}{8} + y_0\frac{t^2}{2} \qquad \vec{r}_p = x_p(t)\,\vec{i} + y_p(t)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_p(t) = \frac{d\,\vec{r}_p(t)}{dt}$$

$$y_p = y_0 - \frac{t^2}{2}$$

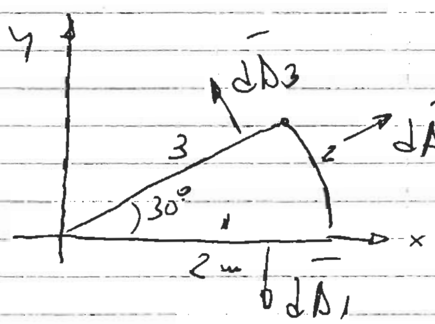
$$\vec{v}_p = \left(-\frac{4t^3}{8} + y_0\frac{2t}{2}\right)\vec{i} - \frac{2t}{2}\vec{j} = \left(-\frac{t^3}{2} + y_0 t\right)\vec{i} - t\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \left(-\frac{3t^2}{2} + y_0\right)\vec{i} - \vec{j} \quad \text{equivalente a (1)}$$

FLUJO

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho\, \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

$\rho = cte$ pues $\nabla\cdot\vec{v} = 0$ $\rightarrow \rho\int_{sc} \vec{v}\cdot d\vec{s} = 0$
incompresible



① v en $y=0$

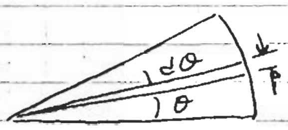
$\vec{v} = -t\,\vec{j}$ $\qquad \vec{v}\cdot d\vec{s} = t\,dx$

$d\vec{s} = -dx\,\vec{j}$

$$Q_1 = \int_0^2 t\,dx = 2t$$

#3

(2)

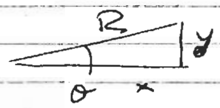


$R\,d\theta = 2\,d\theta$

Ecuación circunferencia $x^2+y^2=R^2$

$$\phi = x^2+y^2-R^2=0$$

$$\vec n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\vec i+2y\vec j}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{x\vec i+y\vec j}{R}$$



$x = R\cos\theta$

$y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \vec n = \cos\theta\,\vec i + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec j$

$d\vec s = R\vec n\,d\theta$

$$\vec V\cdot d\vec s = (yt\vec i - t\vec j)\cdot R(\cos\theta\,\vec i + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec j)\,d\theta$$

$y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \vec V\cdot d\vec s = Rt\,(R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec i - \vec j)(\cos\theta\,\vec i + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec j)\,d\theta =$

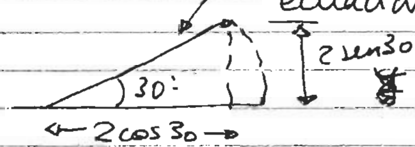
$$= Rt\,(R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$\int_0^{\pi/6} Rt(R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = Rt\left[\frac{R}{2}\mathrm{sen}^2\theta + \cos\theta\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= Rt\left[\frac{R}{2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)^2 + \cos\frac{\pi}{6} - 1\right] = Rt\left(\frac{R}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt3}{2} - 1\right) =$$

$$= (R=2) = 2t\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt3}{2} - 1\right)$$

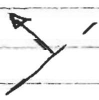
(3)



$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,30° \rightarrow y = x\,\frac{\mathrm{sen}\,30}{\cos 30} = x\,\frac{1/2}{\sqrt3/2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{\sqrt3} \quad ; \quad \phi = y - \frac{x}{\sqrt3} = 0$$

$$\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{-\frac{1}{\sqrt3}\vec i + \vec j}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{\sqrt3\left(-\frac{1}{\sqrt3}\vec i + \vec j\right)}{2} = \frac{-\vec i + \sqrt3\,\vec j}{2}$$



sentido correcto

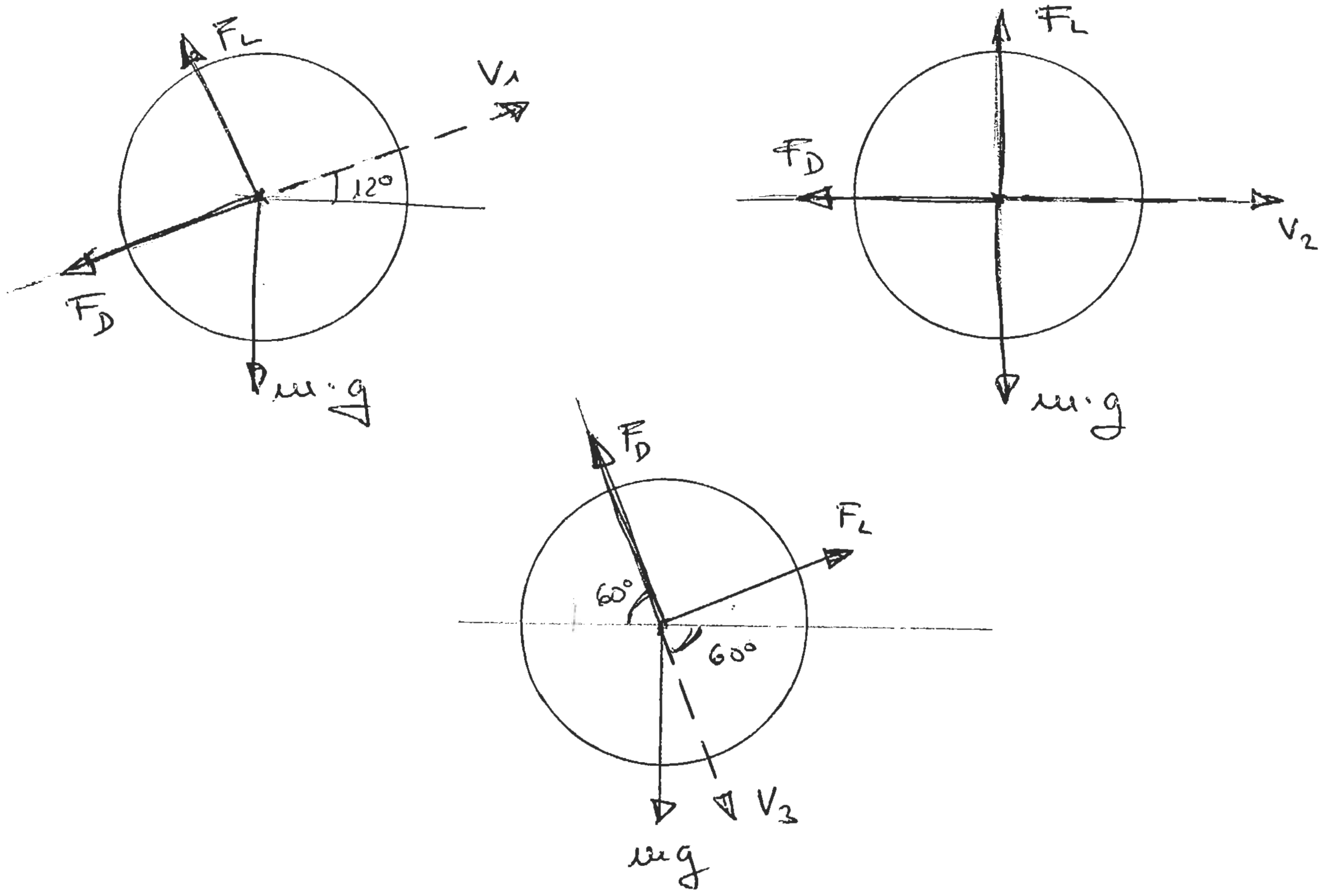
$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(\sqrt3\,dy)^2+dy^2} = 2\,dy \qquad d\vec s = \vec n\,ds$$

$dx = \sqrt3\,dy \qquad \vec V\cdot d\vec s = (yt\vec i - t\vec j)\left(\frac{-\vec i+\sqrt3\,\vec j}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}\,dy$

$$\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,30}\vec V\,d\vec s = \int_0^{2\cdot 0'5}(-yt - t\sqrt3)\,dy = \left[-\frac{y^2}{2}t - t\sqrt3\,y\right]_0^1 = -t\left(\sqrt3+\frac12\right)$$

TOTAL $\cancel{2t} - \cancel{t\sqrt3} - \cancel{t\frac12} + \cancel{\frac{2t}{4}} + \cancel{2t\frac{\sqrt3}{2}} - \cancel{2t} = 0$ cqd

a) El balance de fuerzas variará en función de la velocidad de la bola (su ángulo con la horizontal). En concreto para cada una de las posiciones:



El valor de la fuerza resultante dependerá de la suma de estas fuerzas.

<u>CASO 1</u> $\alpha = 12°$ $V = 232\ km/h = 64'44\ m/s$

$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D S \cdot V^2$ $S = \frac{\pi \cdot 0'427^2}{4} = 0'1432 \cdot 10^{-2}\ m^2$

El empuje es claramente despreciable.

$\rho_{bola} > \rho_{agua}$ (se hunden en el agua) $\frac{\rho_{bola}}{\rho_{aire}} \simeq 1000$ (relación órdenes de magnitud)

$r = 3000$ rpm $\quad V = 64'44$ m/s

$C_D \simeq 0'26 \quad C_L \simeq 0'18$

$$\boxed{F_D = \frac{1}{2}\, 1'2 \cdot 0'26 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3} \cdot 64'44^2 = 0'93\,N}$$

$$\boxed{F_L = \frac{1}{2}\, 1'2 \cdot 0'18 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3} \cdot 64'44^2 = 0'64\,N}$$

Vectorialmente: $\vec{F}_D = -0'93 \cdot \cos 12\,\vec{i} - 0'93 \operatorname{sen} 12\,\vec{j} = -0'91\,\vec{i} - 0'19\,\vec{j}\ N$

$$\boxed{\vec{F}_L = -0'13\,\vec{i} + 0'63\,\vec{j}\ N}$$

$$\boxed{\text{Peso} = -m \cdot g\vec{j} = -\frac{45'6}{1000} \cdot 9'8\,\vec{j} = -0'447\,N\vec{j}}$$

$$\boxed{F_{R1} = -1'06\,\vec{i} - 0'007\,\vec{j}\ N}$$

De igual manera para el caso 2:

$V = 27'78$ m/s

$V_{viento} = 8'33$ m/s

$V_{relativa} = 27'78 + 8'33 = 36'11$ m/s

$C_D = 0'3 \quad C_L = 0'29$

$$\boxed{\vec{F}_D = \frac{1}{2}\, 1'2 \cdot 0'3 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3} \cdot 36'11^2 \,(-\vec{i}) = 0'336\,N\,(-\vec{i})}$$

$$\boxed{\vec{F}_L = \frac{1}{2}\, 1'2 \cdot 0'29 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3} \cdot 36'11^2\,\vec{j} = 0'325\,N\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{F}_R = -0'336\,\vec{i} - 0'122\,\vec{j}\ N}$$

CASO 3

$V = 22'22\ m/s \longrightarrow C_D = 0'37 \quad C_L = 0'35$

$$\boxed{\vec{F}_D} = \frac{1}{2}\,1'2 \cdot 0'37 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3}\,(22'22)^2\,(-\cos 60\,\vec{i} + \operatorname{sen} 60\,\vec{j})\ N$$

$$= \boxed{-0'078\,\vec{i} + 0'136\,\vec{j}\ N}$$

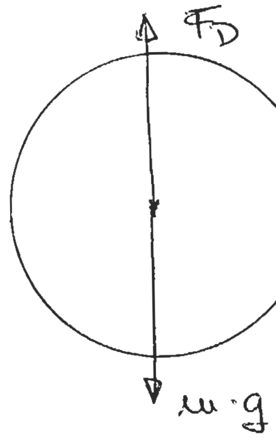
$$\boxed{\vec{F}_L} = \frac{1}{2}\,1'2 \cdot 0'35 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3}\,(22'22)^2 \cdot (\cos 30\,\vec{i} + \operatorname{sen} 30\,\vec{j}) =$$

$$= \boxed{0'129\,\vec{i} + 0'074\,\vec{j}\ N}$$

$$\boxed{\vec{F}_R = 0'051\,\vec{i} - 0'237\,\vec{j}\ N}$$

b) El spin afectará al valor de C_D y C_L (según el spin cambia la curva). La propia rotación genera asimismo la sustentación (la bola es simétrica y pese a ello $C_L \neq 0$). Por lo tanto si gira aparecerá también F_L (función del sentido de rotación).

b)



$$m \cdot g = \frac{1}{2}\, 1'2 \cdot 1'432 \cdot 10^{-3} \cdot C_D \cdot V^2$$

$$0'447 = 0'0008592\ C_D V^2$$

$$\boxed{C_D \cdot V^2 = 520'25}$$

Condición de equilibrio de fuerzas.

Tomando un $C_D = 0'26$ (horizontal en la gráfica)

$$V^2 = \frac{520'25}{0'26} \Rightarrow \boxed{V = 44'73\ m/s}$$

Para $V = 44'73\ m/s \longrightarrow C_D = 0'28 \quad \| \quad C_D V^2 = 560$

Para $V = 47\ m/s \rightarrow C_D \simeq 0'27 \quad \| \quad C_D V^2 = 596$

Para $V = 43\ m/s \rightarrow C_D \simeq 0'28 \quad \| \quad \boxed{C_D V^2 = 517'7}$

$$\boxed{V \simeq 43\ m/s} = \boxed{154'8\ km/h}$$

c)

La distancia que alcanza la bola depende de los valores de arrastre y sustentación.

$$F_D / F_L = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot C_D / C_L$$

Por lo tanto depende linealmente del valor de la densidad del aire. Según ciertos parámetros atmosféricos dicha densidad varía:

- ALTITUD ⟹ ↑ menor densidad // ↓ mayor ρ

- HUMEDAD ⟹ ↑ menor ρ // ↓ mayor ρ

- TEMPERATURA ⟹ ↑ menor ρ // ↓ mayor ρ

- PRESIÓN ⟹ ↑ mayor ρ // ↓ menor ρ

También influirá a través del nº de Reynolds el valor de la viscosidad, aunque en el caso del aire esta sea baja, por eso que su variación no afecta tanto al vuelo.

Por último hay que reseñar que una disminución de densidad conllevará una disminución del arrastre pero también de la sustentación. (que mantiene la bola más tiempo en el aire). Sin embargo la influencia es menor que la del arrastre y en general

↓ ρ → ↑ distancia y viceversa.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Examen de Mecánica de Fluidos
Jueves 8 de Septiembre de 2005

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

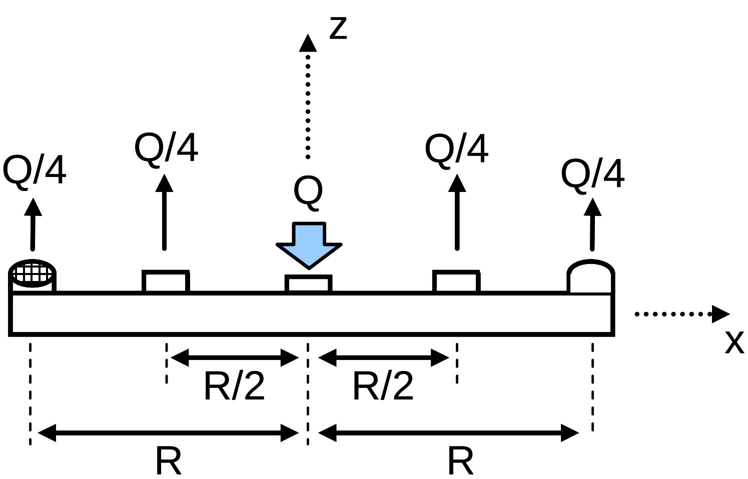
Problema 1 (25%)

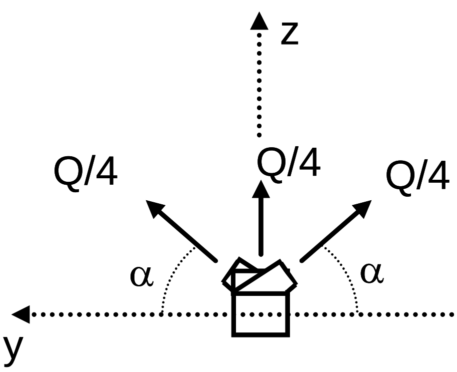
La figura representa el aspersor de un lavavajillas. El caudal de agua, Q, entra (hacia abajo) por el orificio central y sale a partes iguales por las cuatro boquillas. Datos:

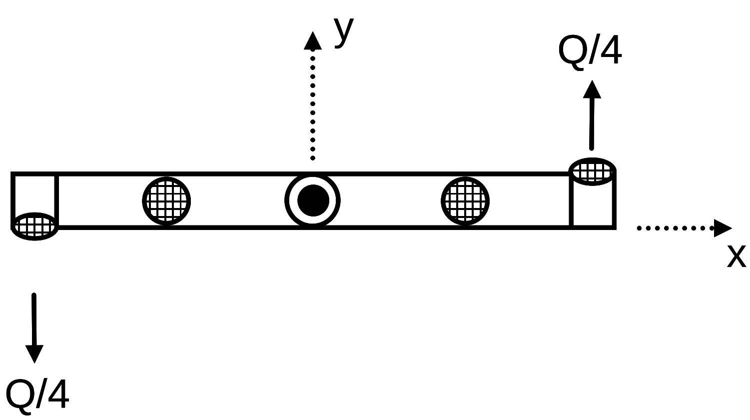
- Las dos boquillas interiores, en la parte central de cada brazo, están orientadas hacia arriba.
- Las dos boquillas exteriores, en los extremos de cada brazo, están orientadas según un ángulo α con respecto del eje horizontal.
- El área de cada una de las boquillas de salida es As, mientras que el área transversal de cada brazo (de sección rectangular) es A.
- Utilizar los ejes coordenados de la figura.

1. Suponiendo conocido y constante el par de fricción en el eje M, calcular la velocidad de giro ω **constante de régimen permanente**.
   Datos: Q, R, α, ρ, As, A, M (todos son constantes).
   Nota: Este apartado debe resolverse con los datos parametrizados, tal como se indican. No se aceptarán resoluciones utilizando los valores numéricos del apartado 2).

2. A partir del resultado anterior, y dada la siguiente aplicación numérica, calcular el valor numérico final de ω.
   Q = 1,5 litros/minuto
   R = 21 cm
   $\alpha = 30^{\circ}$
   A = 2 cm^2
   As = 0,25 cm^2
   M = 0 (despreciable)





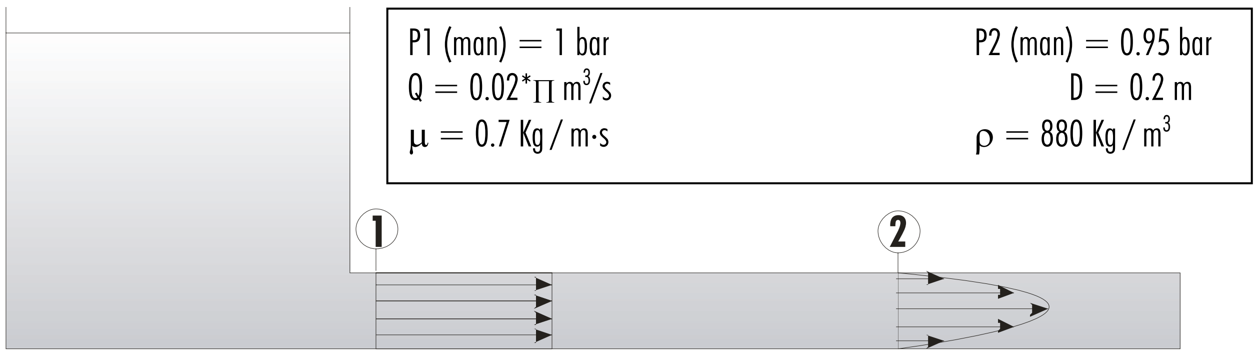


Problema 2 (25%)

El perfil de velocidades parabólico característico del flujo laminar se va estableciendo de modo progresivo a lo largo de un tramo de tubería, a partir del perfil de velocidades uniforme propio de la salida del fluido de un depósito, tal cual muestra la figura adjunta. Con los datos numéricos que figuran (no es necesario conocer la longitud del tramo de tubería L a lo largo del cual se va estableciendo el perfil de velocidades parabólico propio del flujo laminar) se pide:

1. Comprobar que el régimen de circulación del fluido es laminar
2. Expresar analíticamente el perfil de velocidad del flujo en función del radio r en la sección 2.
3. A partir de la ecuación de la cantidad de movimiento, determinar cuál es la fuerza de arrastre a la que se ve sometida el tramo de tubería L por parte del fluido.

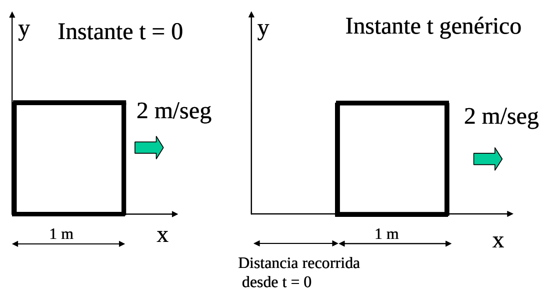
NOTA IMPORTANTE.- Dado que se pide resolver el punto 3 a partir de la ecuación de la cantidad de movimiento no es menester utilizar ninguna ecuación de dinámica diferencial.



Problema 3 (25%)

La trayectoria de una partícula que en el instante t_0 está en el punto de coordenadas x_0,y_0 viene dada por:

$$x = x_0\, e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} \qquad y = y_0\, e^{\frac{t_0^2 - t^2}{2}}$$



(a) (b)

1. Deducir la trayectoria de la partícula como una relación entre las variables espaciales x,y
2. Calcular la velocidad de la citada partícula, así como su aceleración.
3. Determinar la expresión del campo de velocidades (variables de Euler)
4. Determinar la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto de coordenadas x_1, y_1 en el instante t_1. ¿Qué puede decirse de las ecuaciones de las trayectorias y de las ecuaciones de las líneas de corriente?. Razonar la respuesta.
5. Comprobar que se verifica el teorema de arrastre de Reynolds para la propiedad masa, para un instante genérico t, para el volumen de control de la figura. El volumen de control es indeformable, y se mueve con velocidad horizontal uniforme de 2 m/s hacia la derecha, partiendo de la posición inicial reflejada en la figura (a). La figura (b) representa la posición del citado volumen de control en un instante genérico t.

Problema 4 (25%)

Una *kupela* (tonel) de 3m de diámetro, 5m de profundidad y apoyada en el suelo se encuentra llena de sidra. Con objeto de servir correctamente la sidra, ésta se deja romper en el vaso tras describir una parábola. Para ello, la kupela se perfora y se le acopla un grifo que permite la salida del líquido en horizontal. A medida que se va vaciando, se tapona el agujero antiguo y se cambia el grifo a una ubicación más cercana al suelo.

1. Con la kupela completamente llena y el grifo ubicado a 50 cm del borde superior se llena una botella de litro en 15 segundos. Si el diámetro del orificio (redondo) del grifo es de 7 mm, determinar el coeficiente de descarga del conjunto.

2. Tomando como constante el coeficiente de descarga obtenido en el apartado anterior, y considerando que el 100% de la superficie del grifo es de paso para la sidra, determinar a qué nivel hay que cambiar el agujero, y en qué posición habrá que situar el siguiente grifo en la kupela para que la sidra caiga dentro del rango de posiciones posibles que puede tomar el cubo que hay en el suelo (distancia 0.5m$<$d$<$ 2m. Ver gráfico)

3. Determinar la fuerza total que soporta la pared de la kupela (redonda) cuando está llena.

NOTA: Simplificar y tomar las propiedades de la sidra como si fuera agua. Despreciar el rozamiento con el aire.

• EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16\,fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

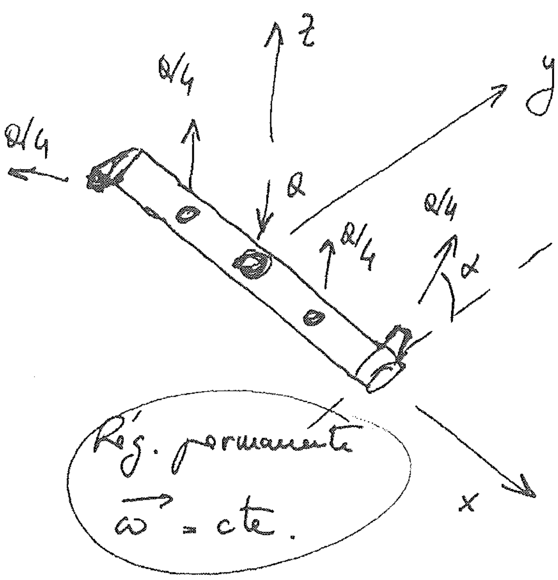
Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Problema Aspersor



Ec. Conserv. Mto Cinético:

$$\vec{M}_{ext} = \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \left(\cancel{\ddot{\vec{R}}}^{\,0} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}}^{\,0} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \right) \rho\, d\forall =$$

$$= \cancel{\frac{d}{dt} \int_{\forall C} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \rho\, d\forall}^{\,0} + \int_{SC} (\vec{r} \wedge \vec{v}_r)\, \rho\, (\vec{v}_{r_{SC}} \cdot d\vec{A}) .$$

$$\vec{\omega} = -\omega \vec{K} \quad / \quad \vec{M}_{ext} = M \vec{K} .$$

---

a)

Dentro del $\forall C$ (para un brazo)

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = -\omega \vec{K} \wedge x \vec{i} = -\omega x \vec{j} .$$

$$\to \quad \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega \vec{K} \wedge -\omega x \vec{j} = +\omega^2 x (-\vec{i}) .$$

$$\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})) = x\vec{i} \wedge -\omega^2 x \vec{i} = 0$$

Ahora:

$$\to \int_{\substack{\forall C \\ (1\ \text{brazo})}} \vec{r} \wedge (2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) \rho\, d\forall = \int_0^{R/2} x\vec{i} \wedge \left[\cancel{2}(-\omega \vec{K}) \wedge \frac{Q}{\cancel{2}A} \vec{i} \right] \rho A\, dx +$$

$$+ \int_{R/2}^{R} x\vec{i} \wedge \left[2(-\omega \vec{K}) \wedge \frac{Q}{4A} \vec{i} \right] \rho A\, dx =$$

$$= \int_0^{R/2} x\vec{i} \wedge \left[\frac{-\omega Q}{\cancel{A}} \vec{j} \right] \rho \cancel{A} dx + \int_{R/2}^{R} x\vec{i} \wedge \left[\frac{1}{2} \frac{-\omega Q}{\cancel{A}} \vec{j} \right] \rho \cancel{A} dx =$$

$$= \int_0^{R/2} -\omega Q \rho\, x\, dx\, \vec{K} + \int_{R/2}^{R} \frac{-\omega Q \rho}{2}\, x\, dx\, \vec{K} =$$

$$= -\omega Q \rho \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^{R/2} \vec{K} - \frac{\omega Q \rho}{2} \left| \frac{x^2}{2} \right|_{R/2}^{R} \vec{K} =$$

$$= -\omega Q \rho \vec{K} \left[\frac{R^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{8} \right) \right] = -\omega Q \rho \vec{K} R^2 \left[\frac{2}{16} + \frac{4}{16} - \frac{1}{16} \right] =$$

$$= \frac{-5}{16} \rho \omega Q R^2 \vec{K}$$

Para los 2 brazos el resultado de la integral es el doble del obtenido:

$$\int_{VC} = \frac{-5}{8} \rho \omega Q R^2 \vec{K}.$$

En la SC (para un brazo):

Consideraremos sólo la boquilla del extremo. Las boquillas interiores no influyen en el giro y su efecto torsor se anula mutuamente (esto no hace falta calcularlo).

$$\left[\begin{array}{l} \vec{r} = R \vec{i}. \\ \vec{v}_r = \dfrac{Q}{4A_s} (\cos\alpha \vec{j} + \operatorname{sen}\alpha \vec{K}) = \vec{v}_{rsc} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{r} \wedge \vec{v}_r = \dfrac{RQ}{4A_s} (\cos\alpha \vec{K} - \cancel{\operatorname{sen}\alpha \vec{j}}) \\ \vec{v}_{rsc} \cdot \vec{dA} = \dfrac{Q}{4A_s} dA \end{array} \right.$$

se anulará con el otro brazo.

$$\underset{(1\,brazo)}{\int_{SC}} = \int_{A_s} \frac{RQ}{4A_s} \cos\alpha \vec{K} \rho \frac{Q}{4A_s} dA = \frac{\rho R Q^2}{16 \cancel{A_s^2}} \cos\alpha \vec{K} \cancel{\int_{A_s} dA} =$$

$$= \frac{\rho R Q^2}{16 A_s} \cos\alpha \vec{K}.$$

De nuevo, para los dos brazos el resultado de la integral será el doble del obtenido:

$$\int_{sc} = \frac{\rho R Q^2}{8 A_s} \cos\alpha \, \vec{K} .$$

Retomando la ecuación inicial:

$$M \cancel{\vec{K}} + \frac{5}{\cancel{8}} \rho \omega Q R^2 \cancel{\vec{K}} = \frac{\rho R Q^2}{8 A_s} \cos\alpha \, \cancel{\vec{K}}$$

$$\hookrightarrow \frac{5}{8} \rho \omega Q R^2 = \frac{\rho R Q^2}{8 A_s} \cos\alpha - M$$

$$\hookrightarrow \boxed{\omega = \frac{8}{5} \frac{1}{\rho Q R^2} \left[\frac{\rho R Q^2}{8 A_s} \cos\alpha - M \right]}$$

b) Si $M = 0$

$$\boxed{\omega = \frac{Q \cdot \cos\alpha}{5 R A_s} = \frac{\left(\frac{1'5 \cdot 10^{-3}}{60}\right) \cdot \cos 30^\circ}{5 \left(21 \cdot 10^{-2}\right)\left(0'25 \cdot 10^{-4}\right)} = 0'82 \ \text{rad}/s}$$

(1)

Problema

1) $Re = \frac{V D \rho}{\mu} \leq 2000$ RÉGIMEN LAMINAR

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}02\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\frac{D^2}{4}} = \frac{0.02}{\frac{0.2^2}{4}} = \frac{0.02}{\frac{0.04}{4}} = \frac{0.02}{0.01} = \underline{\underline{2\ m/s}}$$

$$Re = \frac{2 \times 0{,}2 \times 880}{0{,}7} = \underline{503 < 2000}$$ (todas las variables en SI)

2) Se trata de un perfil de velocidades parabólico. Su expresión es:

$$u(r) = U_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

que debe cumplir la ecuación de continuidad, es decir:

$$Q = \int 2\pi r\, dr\, u(r) = \int \bar{V}\, dA = 2\pi \int_0^{R=0{,}1\,m} r \cdot U_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr$$

$$0{,}02\pi = 2\pi \cdot U_{max} \int_0^{0{,}1} r\left(1 - \frac{r^2}{0{,}01}\right) dr = 2\pi U_{max}\left[\int_0^{0{,}1} r\, dr - 100\int_0^{0{,}1} r^3 dr\right]$$

$$0{,}02 = 2 U_{max}\left[\frac{0{,}1^2}{2} - 100\,\frac{0{,}1^4}{4}\right] = 2 \cdot U_{max} \cdot \frac{10^{-2}}{4} = \frac{10^{-2}}{2} U_{max}$$

$$\boxed{U_{max} = \frac{2 \times 10^{-2} \times 2}{10^{-2}} = 4\ m/s} \Rightarrow u_r = 4\left(1 - \frac{r^2}{0{,}01}\right) = 4\left(1 - 100 r^2\right)$$

Este es un resultado del todo lógico porque

dado su ramo es una distribución parabólica el valor de la velocidad media $(2\ m/s)$ es la mitad del valor máximo $(4\ m/s)$

g) Aplicamos la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control entre las secciones 1 y 2. Se tiene:

$$\Sigma F_{ext} = p_1 A - p_2 A - F_r = \int_{SC} \rho \underbrace{u(r)}_{v} \underbrace{u(r)}_{\vec{V}} \cdot \underbrace{2\pi r\, dr}_{d\vec{A}}$$

Calculamos el 2º miembro:

$$\int_{SC} = \int_{\Sigma_2} - \int_{\Sigma_1} = \rho \int u^2(r)\, 2\pi r\, dr - \rho \bar{V}^2 A$$

porque en la sección 1 la velocidad es uniforme y en la 2 varía parabólicamente.

$$\rho \int_0^{0.1} \left[4(1-100 r^2)\right]^2 2\pi r\, dr = 2\pi\rho \cdot 16 \int_0^{0.1} \left(1 + 10^4 r^4 - 200 r^2\right) r\, dr$$

$$= 32\pi\rho \left[\frac{0.1^2}{2} + 10^4 \frac{0.1^6}{6} - 200 \frac{0.1^4}{4}\right] = 32\pi\rho\left[\cancel{\frac{10^{-2}}{2}} + \frac{10^{-2}}{6} - \cancel{\frac{10^{-2}}{2}}\right]$$

$$= \frac{16}{3}\pi\rho \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}w = \frac{0.16}{3}\pi\rho\ \mathrm{N}w$$

También, recordando que el factor de corrección de cantidad de movimiento es $\beta = \frac{4}{3}$ se tendría

$$\underline{\int \rho\, u(r) \cdot u(r) \cdot 2\pi r\, dr} = \beta \rho \bar{V}^2 A = \frac{4}{3}\rho\, \overset{=(2)^2}{4} \cdot \pi \frac{0.04}{\cancel{4}} = \underline{\frac{0.16}{3}\rho\,\pi}$$

Sustituyendo en la expresión general de tie:

$$p_1 A - p_2 A - F_r = \frac{0.16}{3}\pi \rho - \pi \frac{0.04}{4} \cdot 4 \rho = \pi \cdot \rho \left(\frac{0.16}{3} - 0.04\right)$$

$$p_1 A - p_2 A - F_r = \frac{0.04}{3}\pi \rho$$

$$F_r = \left(1 \times 10^5 - 0.95 \cdot 10^5\right) A - \frac{0.04}{3}\pi \rho =$$

$$= 0.05 \times 10^5 \, \pi \, \frac{0.04}{4} - \frac{0.04}{3}\pi \rho =$$

$$= \left(50\pi - \frac{0.04}{3}\pi \underset{880}{\rho}\right) Nw = (50 - 11,73)\pi \, Nw =$$

$$= \boxed{120,22 \; Nw}$$

La fuerza de arrastre tiene la misma intensidad que la de rozamiento pero ~~su~~ sentido va en la dirección del flujo

a) $x = x_0\, e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}$

$y = y_0\, e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}}$

Las trayectorias serán de la forma (eliminando el t)

$e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} = \frac{x}{x_0}$

$e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}} = \frac{y}{y_0} \rightarrow e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} = \frac{y_0}{y}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{y} \\ x \cdot y = x_0 y_0 \quad (2) \end{array} \right.$$

b) La velocidad de la partícula. La aceleración

(1) $u_p = \frac{dx}{dt} = x_0 t\, e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}$ $\quad a_{x_p} = \frac{d^2x}{dt^2} = x_0 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} + x_0 t^2 e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} = x_0(1+t^2)e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}$

$v_p = \frac{dy}{dt} = -y_0 t\, e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}}$ $\quad a_{y_p} = \frac{d^2y}{dt^2} = -y_0 e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}} + y_0 t^2 e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}} = y_0(t^2-1)e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}}$

c) Para calcular el campo de velocidades a partir de la velocidad de la partícula hemos de perder la identidad de esta (paso de Coord. de Lagrange a Euler)

De la trayectoria: $x_0 = x\, e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}}$ $\quad y_0 = y\, e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}$

Sustituyo en (1)

$u = x\, \cancel{e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}}}\, t\, \cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}} = x t$ $\quad \vec{V} = x t\, \vec{i} - y t\, \vec{j}$

$v = -y\, \cancel{e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}}\, t\, \cancel{e^{\frac{t_0^2-t^2}{2}}} = -y t$

d) Ecuación de las l. de c.

$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$; $\frac{dx}{x\cancel{t}} = \frac{dy}{-y\cancel{t}} \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \rightarrow$ Integramos.

Como vemos ha desaparecido el tiempo lo que indica que las líneas de corriente son estacionarias, luego la ecuación de la ldc que pase por un punto $x_1 y_1$ es la misma que la ecuación de la partícula que pase por $x_1 y_1$.

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y} \rightarrow \ln x = -\ln y + C$$

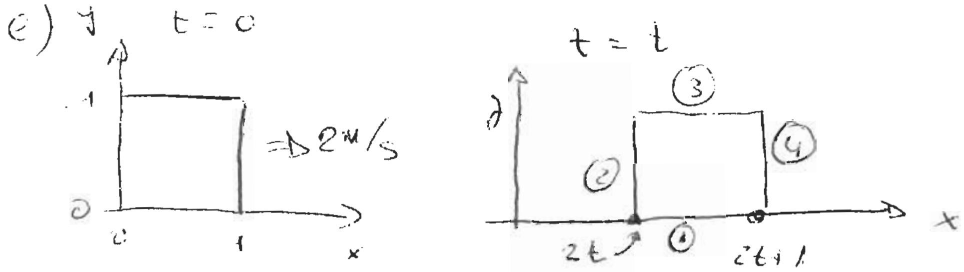
$$\ln x = \ln \frac{1}{y} + C \qquad e^{\ln x} = e^{\ln \frac{1}{y}} e^{C} \rightarrow x = \frac{1}{y} \cdot C'$$

$$\boxed{xy = C'} \qquad \text{Para } x_1 y_1 \rightarrow C' = x_1 y_1$$

Luego queda: $xy = x_1 y_1$

y la ecuación de la trayectoria sería $\underset{(2)}{} \; xy = x_1 y_1$

c)



$$0 = \frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \, dV + \int_{SC} \rho \, \vec{V}_r \cdot d\vec{A}$$

($\vec{V}_r$: Velocidad relativa a la superficie de control).

① $d\vec{A} = -dx\,\vec{j}$ $\quad \vec{V}_{abs} = xt\,\vec{i} + 0\,t\,\vec{j} = xt\,\vec{i}$

② $d\vec{A} = -dy\,\vec{i}$ $\quad \vec{V}_{abs} = 2t^2\,\vec{i} + yt\,\vec{j}$

③ $d\vec{A} = dx\,\vec{j}$ $\quad \vec{V}_{abs} = xt\,\vec{i} + 1\,t\,\vec{j}$

④ $d\vec{A} = dy\,\vec{i}$ $\quad \vec{V}_{abs} = (2t+1)\,t\,\vec{i} + y\,t\,\vec{j}$

$\vec{V}_r = \vec{V}_{abs} - \underset{(2\vec{i})}{\vec{V}_{arrastre}}$ $\qquad$ Todas las S.C. se mueven a igual velocidad.

1 $d\vec{A}\cdot\vec{V_r} = -dx\,\vec{j}\cdot(xt\vec{i}-2\vec{i}) = 0$

2 $d\vec{A}\cdot\vec{V_r} = -dy\,\vec{i}\cdot(2t^2\vec{i}+yt\vec{j}-2\vec{i}) = -dy\,(2t^2-2)$

3 $d\vec{A}\cdot\vec{V_r} = dx\,\vec{j}\cdot(xt\vec{i}+t\vec{j}-2\vec{i}) = -dx\,t$

4 $d\vec{A}\cdot\vec{V_r} = dy\,\vec{i}\cdot((2t+1)t\vec{i}+yt\vec{j}-2\vec{i}) = dy\,(2t^2+t-2)$

En lo que respecta al termino $\frac{d}{dt}\int \rho\, d\forall$

$$\nabla\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = t-t=0 \quad\rightarrow \rho = cte \rightarrow \frac{d}{dt}\int\rho\, d\forall = 0$$

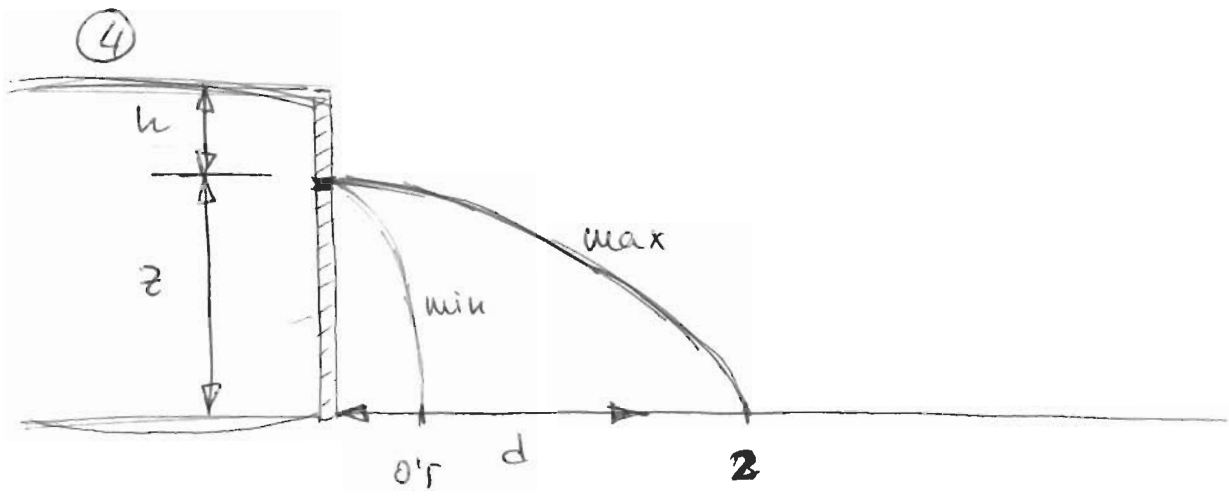
ya que el $\forall C$ es constante (se mueve pero ello no implica cambio de volumen).

Luego $\quad 0 = \int_{SC}\rho\,\vec{V_r}\cdot d\vec{A} = \sum\int_{SCi}\rho\,\vec{V_{ri}}\cdot d\vec{A_i} \rightarrow 0 = \sum\int_{SCi}\vec{V_{ri}}\cdot d\vec{A_i}$

$$0 = \int_{1} 0 + \int_{y=0}^{1}(-dy)(2t^2-2) + \int_{2t}^{2t+1} t\,dx + \int_{0}^{1} dy\,(2t^2+t-2)$$

$$0 = -(2t^2-2)+t\,(2t+1-2t)+2t^2+t-2 =$$

$$= -\cancel{2t^2}+\cancel{2}-\cancel{2t^2}-\cancel{t}+\cancel{2t^2}+\cancel{2t^2}+\cancel{t}-\cancel{2} = 0 \qquad \underline{\text{cqd.}}$$



1) Para calcular C_D obtenemos el caudal teórico

$$V_t = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9'8 \cdot 0'5} = 3'13 \ m/s$$

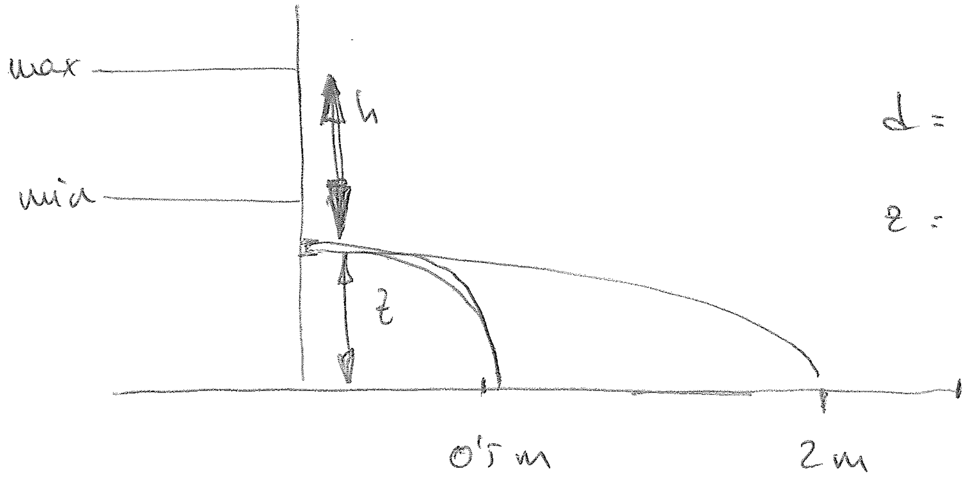
$$A_t = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0'007^2}{4} = 3'85 \cdot 10^{-5} \ m^2$$

$$\boxed{Q_t = 3'13 \cdot 3'85 \cdot 10^{-5} = 1'2 \cdot 10^{-4} \ m^3/s}$$

$$\boxed{Q_r = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{15} = 6'67 \cdot 10^{-5} \ m^3/s}$$

$$Q_r = Q_t \cdot C_D \longrightarrow \boxed{C_D = \frac{Q_r}{Q_t} = 0'56}$$

2) La distancia que alcanza el chorro dependerá del tiempo que tarda en caer la sidra al suelo y de la velocidad de salida.



$$d = C_0 \sqrt{2gh} \cdot t \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo la sidra es sólo función de z.

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$$

SITUACIÓN INICIAL $z = 2'5$ $\rightarrow$ $\boxed{t = 0'71\ s}$

El grifo se cambiará cuando $d = 0'5$

(1) $0'5 = 0'55 \cdot \sqrt{2gh} \cdot 0'71 \longrightarrow \boxed{h = 0'083}$

sobre z

SEGUNDO AGUJERO ($z_2 < 2'5$) $z_2 \Rightarrow$ nueva altura grifo

(2) $t = \sqrt{\frac{2 z_2}{9'8}}$

$\boxed{\text{Nivel sidra} = z + h = 2'5 + 0'083 = 2'583\ m}$

(1) $2 = 0'55 \sqrt{2g(2'583 - z_2)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot z_2}{9'8}}$

$$4 = 0'3025 \cdot 2 \cdot \cancel{g}\,(2'583 - z_2)\ \frac{2 \cdot z_2}{\cancel{g}}$$

$$4 = -1'21\ z_2^2 + 3'125 \cdot z_2$$

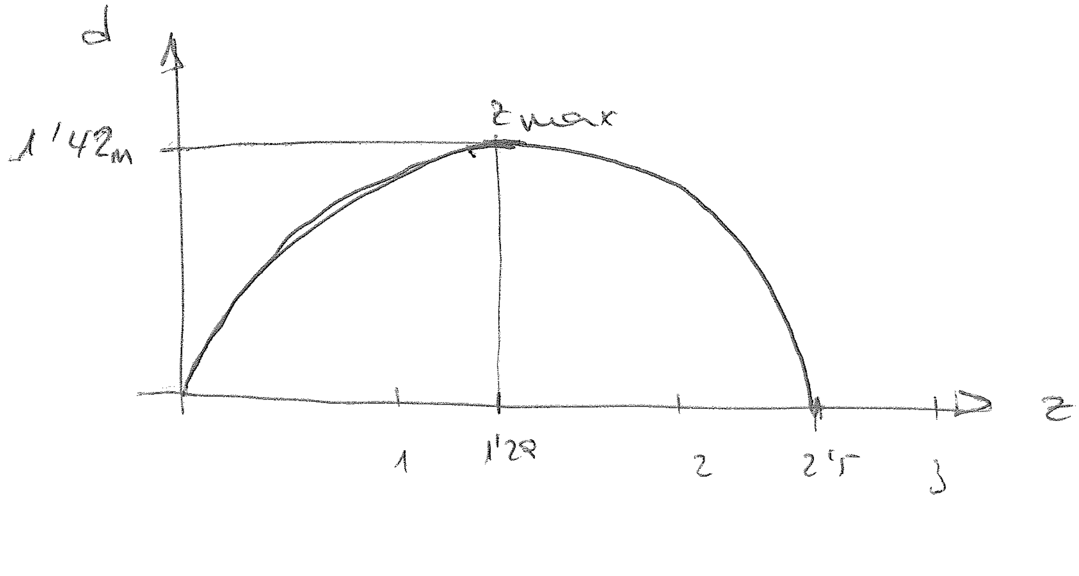
$\longrightarrow$ No hay solución

El valor máximo de distancia que alcanzará la sidra está contenido entre $0 < z < 2'5$

Derivando la función

$$-2'42\,z + 3'125 = 0 \longrightarrow \boxed{z_{max} = 1'29\ m}$$

La distancia que alcanza la sidra tiene un máximo para la z calculada



③

La fuerza total de la sidra sobre la pared de la kupela será.

$$F = P_G \cdot A \qquad A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 7'07\, m^2$$

$$P_G = \gamma h_G = 9800 \cdot 1'5 = 14700 \text{ Pa}$$

$$\boxed{F = 14700 \cdot 7'07 = 103908'18 \text{ N}}$$

(equivale a 10600 kp fuerza aprox.)

Problema 1 (25%)

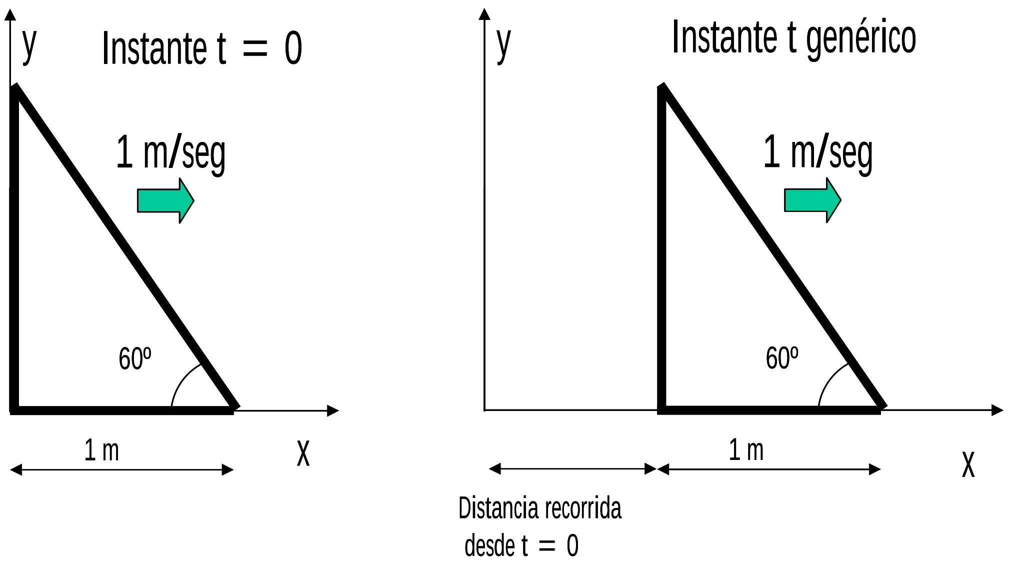
Dado el siguiente campo de velocidades: $\vec{V} = 3\,\vec{i} + 2\,x\,\vec{j}$ determinar:

1. Ley de variación de la densidad con el tiempo, sabiendo que en el instante t = 0 el valor de la densidad es ρ_0 para todo el campo fluido.

2. Ecuación de la trayectoria de la partícula que en el instante t = 0 está en el punto de coordenadas (0,0). Expresarla con el tiempo como parámetro y como una función y = f(x).

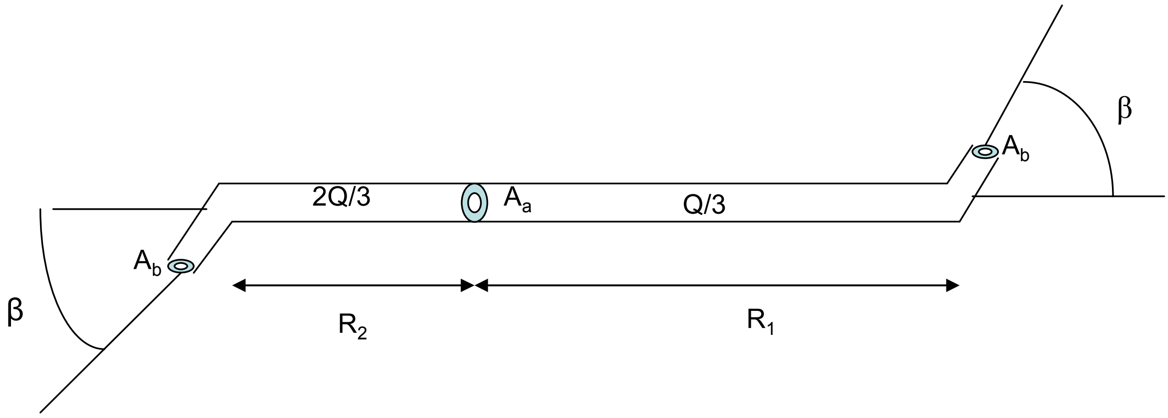
3. Ecuación, en t = 2 seg, de la línea de corriente que pasa por el punto de coordenadas (0,0) y de la línea de corriente que pasa por el punto de coordenadas (1,1). Explicar cuál es para este flujo la relación entre las líneas de corriente y las trayectorias.

4. Comprobar que se verifica el teorema de arrastre de Reynolds para la propiedad masa, para el volumen de control de la figura, formado por un triángulo, que se desplaza hacia la derecha a una velocidad constante de 1 m/s sin variar sus características. En el instante t = 0 seg, el triángulo tiene su vértice inferior izquierdo en el punto (0,0).



Problema 2 (25%)

Calcular la velocidad de rotación en régimen permanente del aspersor asimétrico de la figura, a partir de los datos de la misma. El problema se puede resolver (de acuerdo con las preferencias del alumno) utilizando el volumen de control (inercial o no inercial) que se desee.



Problema 3 (25%)

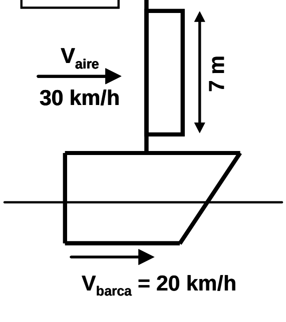
a) Supongamos que la embarcación de la Fig. 1 se desplaza, movida por el viento, a una velocidad (absoluta) constante de 20 km/h. El viento incide sobre la vela con una velocidad (absoluta) constante de 30 km/h, saliendo desviado 45º por los laterales, tal como muestra la Fig. 2 (vela vista desde arriba). Calcular la fuerza de resistencia que ofrece el agua al avance del barco. Notas:

- Densidad del aire (incompresible): 1,2 kg/m^3 / despreciar el rozamiento aire/vela
- Utilizar los ejes marcados en Fig. 2.

b) Ahora la embarcación arría las velas y debe reducir su velocidad de 20 km/h a 1 km/h. Para ello (Fig. 3) introduce en el agua un álabe de 2 m de anchura (perpendicular al papel) a una profundidad de 0,5 m. Si la masa de la embarcación es de 4000 kg y se desea que el tiempo de frenado sea como mínimo de 10 segundos, calcular cuál debería ser como mínimo el ángulo α.

- Despreciar la fuerza de rozamiento considerada en el apartado anterior.
- Despreciar la fricción del agua con el álabe / despreciar la masa de agua que circula por el álabe.
- Considerar **sólo** el sentido horizontal del movimiento (eje x).

Fig. 1



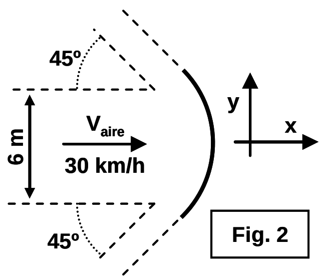


Fig. 2

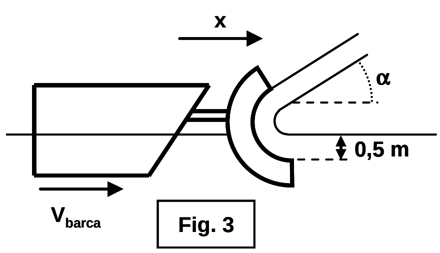


Fig. 3

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Examen de Mecánica de Fluidos
Martes 22 de junio de 2004

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
HIDRÁULICA Y MEDIO AMBIENTE
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIAL

Cuestión (25%)

a) Definir el concepto de fuerza de sustentación y fuerza de arrastre. Explicar los distintos orígenes de las mismas y en que situaciones aparecen. Explicar qué papel juegan los coeficientes de sustentación y arrastre y cómo se determinan.

b) Se pretende diseñar una serie de elementos. Explicar conceptualmente cómo tendrán que ser las condiciones de diseño de los coeficientes de sustentación y arrastre para cada elemento (a la hora de diseñar las formas, si hay que maximizar o minimizar los coeficientes, que se persigue con el diseño, etc.)



- La pala de un aerogenerador que mediante el giro produce energía eléctrica
- Cualquiera de los alerones de un coche de fórmula 1
- Una veleta que debe orientarse en la dirección del viento

c) El anemómetro de la fotografía permite determinar la velocidad del viento a partir del giro de sus cuatro brazos, colocados en un ángulo de 90º. Las cazoletas en los extremos son casquetes esféricos. Determinar para el momento en que el flujo es perpendicular a dos de los cuatro brazos del anemómetro (y paralelo a los otros dos) el par motriz que da lugar a la rotación, que generará el viento sobre el anemómetro.

Datos:

- Coeficiente de arrastre cazoleta cóncava : **Cd1**
- Coeficiente de sustentación de cazoleta cóncava: **Cl1**
- Coeficiente de arrastre cazoleta convexa : **Cd2**
- Coeficiente de sustentación de cazoleta cóncava: **Cl2**
- Longitud desde el eje de giro al centro de la cazoleta: **L**
- Módulo Velocidad del Viento: **V**
- Módulo Velocidad angular del anemómetro: ω

NOTA: Los coeficientes de las cazoletas corresponden a las mismas montadas ya sobre el anemómetro y han sido obtenidos experimentalmente en el túnel de viento.

d) EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\, \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16\, f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho R T$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right) r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

$\bar{V} = 3\vec{i} + 2x\vec{j}$

① $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot\bar{V} = 0$

Como $\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0+0=0$ $\Big\}$ $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \rightarrow \rho = \rho_0 = cte$

②

$u = \frac{dx}{dt}$; $3 = \frac{dx}{dt} \rightarrow \boxed{x = 3t + C}$ ①

$v = \frac{dy}{dt}$; $2x = \frac{dy}{dt} \longrightarrow 2(3t+C) = \frac{dy}{dt}$

Integrando $\boxed{6\frac{t^2}{2} + 2Ct + C' = y}$

$t=0$ $x=0$ $y=0$ en ① $C=0$ $\quad x = 3t$

en ② $C'=0$ $\quad y = 3t^2$

$t = \frac{x}{3} \rightarrow \boxed{y = 3\frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3}}$ *

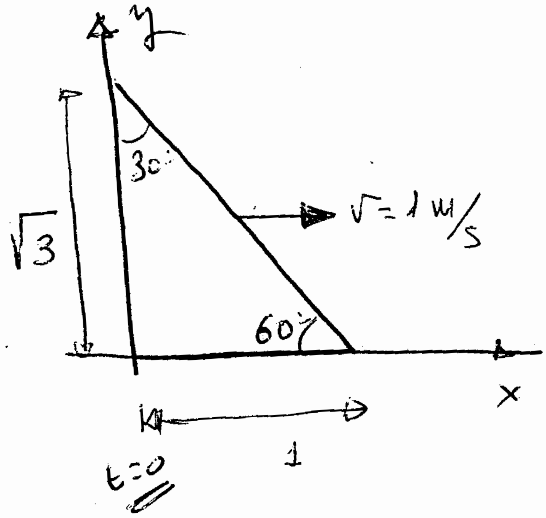
③ $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$; $\frac{dx}{3} = \frac{dy}{2x}$; $2x\,dx = 3\,dy$

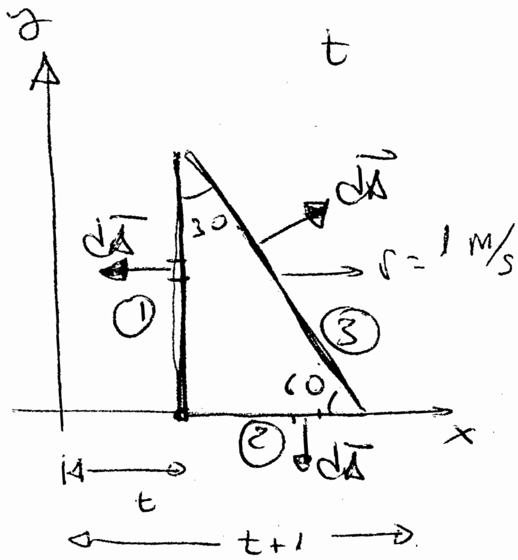
$\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} = 3y + C \rightarrow x^2 = 3y + C$

por 0, 0 $\rightarrow C = 0$ $\boxed{x^2 = 3y}$ **

por 1, 1 $\rightarrow C = 1 - 3\cdot 1 = -2 \rightarrow \boxed{x^2 = 3y - 2}$

Flujo estacionario, lo que implica que las ecs. de las trayectorias son iguales a las de las líneas de corriente para igual punto de paso. De hecho, para el 0, 0, las ecuaciones * y ** son iguales





$\vec{V}_{arr} = \vec{i}$

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho \, d\forall + \int_{sc} \rho \, \bar{V}_r \cdot d\bar{A}$$

$$0 = \frac{dm}{dt} + \int_{sc} \rho \, \bar{V}_r \cdot d\bar{A}$$

1 $d\bar{A} = -dy \, \vec{i}$

$$\boxed{\bar{V}_{rel} = 3\vec{i} + 2x\vec{j} - \vec{i} = 2\vec{i} + 2x\vec{j}}$$

$\bar{V}_{rel} \cdot d\bar{A} = -2\,dy$

$$\int_{S_1} \rho \, \bar{V}_{rel} \cdot d\bar{A} = \rho_0 \int_0^{\sqrt{3}} -2\,dy = -2\rho_0\sqrt{3}$$

2 $d\bar{A} = -dx\,\vec{j}$

$\bar{V}_{rel} = 2\vec{i} + 2x\vec{j}$

$\bar{V}_{rel} \cdot d\bar{A} = -2x\,dx$

$$\int_{S_2} \rho \, \bar{V}_{rel} \cdot d\bar{A} = -2\rho_0 \int_t^{t+1} x\,dx = -\cancel{2}\rho_0 \left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)_t^{t+1} = -\rho_0\left[(t+1)^2 - t^2\right] =$$

$$= -\rho_0(2t+1)$$

3 Ecuación de la recta:

$x = t+1 \qquad y = 0$

$x = t \qquad y = \sqrt{3}$

$y = mx + b$

$0 = (t+1)m + b$

$\sqrt{3} = tm + b$

$$\sqrt{3} = tm - (t+1)m = -m \rightarrow \boxed{m = -\sqrt{3}}$$

$$b = \sqrt{3} - tm = \sqrt{3} - t(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}(1+t)$$

$$\boxed{y = -\sqrt{3}\cdot x + \sqrt{3}(1+t)}$$ comprobamos $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1+t \end{cases}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{3}\cdot t + \sqrt{3}(1+t) = \sqrt{3} \end{cases}$$ correcto.-

$$dy = -\sqrt{3}\cdot dx \qquad dA = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + 3dx^2} = 2dx$$

$\vec{u}$; $\quad F(x,y) = y + \sqrt{3}x + \sqrt{3}(1+t)$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$$

unitario $\quad \vec{u} = \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|} = \dfrac{\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}}{2}$

$$d\vec{A} = dA\cdot\vec{u} = (\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j})\,dx$$

$$\vec{v}_r\cdot d\vec{A} = (2\vec{i} + 2x\vec{j})\cdot(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j})\,dx = (2\sqrt{3} + 2x)\,dx$$

$$\int \rho\,\vec{v}_r\cdot d\vec{A} = \rho_0 \int_{x=t}^{x=t+1} (2\sqrt{3} + 2x)\,dx = \rho_0\left[2\sqrt{3}\,x + 2\frac{x^2}{2}\right]_t^{t+1} =$$

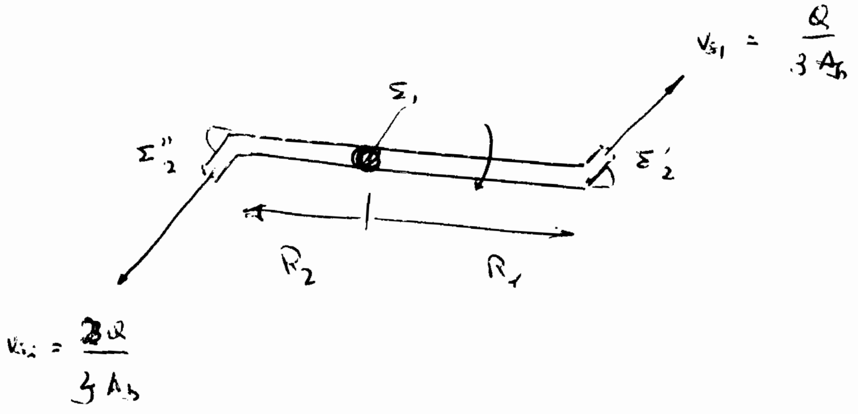
$$= 2\rho_0\sqrt{3}\,(\cancel{t}+1-\cancel{t}) + \rho_0\left[(t+1)^2 - t^2\right] = 2\rho_0\sqrt{3} + \rho_0(2t+1)$$

En este caso $\dfrac{dm}{dt} = 0$ pues m es constante al serlo ρ y volumen

luego en la ecuación: $\quad 0 = 0 + (-2\rho_0\sqrt{3}) + (-\rho_0(2t+1)) + 2\rho_0\sqrt{3} + \rho_0(2t+1)$

Como vemos se verifica.

(1)



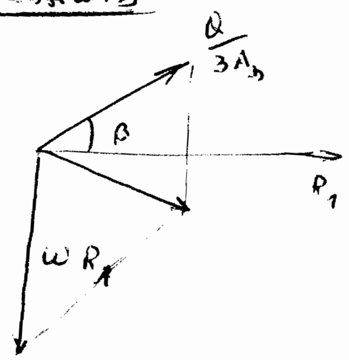
INERCIAL

$$\sum \bar{M} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} [\bar{r} \wedge \bar{v}]\, \rho\, d\forall + \iint_{sc} [\bar{r} \wedge \bar{v}]\, \rho\, \bar{v}\, d\bar{A}$$

$$\sum \bar{M} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} [\bar{r} \wedge \bar{v}]\, \rho\, d\forall = 0 \quad ; \quad \iint_{sc} [\bar{r} \wedge \bar{v}]\, \rho\, \bar{v}\, d\bar{A} = \begin{cases} +\int_{\Sigma_2'} \\ +\int_{\Sigma_2''} \end{cases} - \int_{\Sigma_1} = 0$$

INERCIAL: en velocidades absolutas

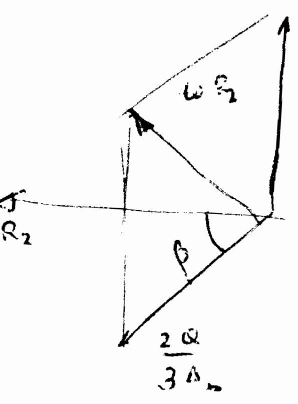
$$\int_{\Sigma_2'} [\bar{r} \wedge \bar{v}]\, \rho\, \bar{v}\, d\bar{A} = \rho \frac{Q}{3} [\bar{r} \wedge \bar{v}]_{\Sigma_2'}$$



$$\int_{\Sigma_2''} [\bar{r} \wedge \bar{v}]\, \rho\, \bar{v}\, d\bar{A} = \rho \frac{2Q}{3} [\bar{r} \wedge \bar{v}]_{\Sigma_2''}$$

$$[\bar{r} \wedge \bar{v}]_{\Sigma_2} =$$

$$= R_1 \left(\frac{Q}{3A_b} \operatorname{sen} \beta - \omega R_1 \right)$$



$$[\bar{r} \wedge \bar{v}]_{\Sigma_2'} =$$

$$= R_2 \left(\frac{2Q}{3A_b} \operatorname{sen} \beta - \omega R_2 \right)$$

$$0 = \cancel{\rho} \cancel{\frac{Q}{3}} R_1 \left(\frac{Q}{3A_b} \operatorname{sen} \beta - \omega R_1 \right) + \cancel{\rho} \frac{2\cancel{Q}}{\cancel{3}} R_2 \left(\frac{2Q}{3A_b} \operatorname{sen} \beta - \omega R_2 \right)$$

(2)

$\frac{R_1}{3}$ $$0 = \frac{R_1 Q}{3 A_b} \operatorname{sen}\beta - \omega R_1^2 + 2 \cdot \frac{2 R_2 Q}{3 A_b} \operatorname{sen}\beta - 2\omega R_2^2$$

$$\boxed{\omega = \frac{R_1 + 4 R_2}{R_1^2 + 2 R_2^2} \; \frac{Q \operatorname{sen}\beta}{3 A_b}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{(R_1 + 4 R_2)\, Q \operatorname{sen}\beta}{3 A_b (R_1^2 + 2 R_2^2)}}$$

SISTEMA NO INERCIAL

$$\Sigma \bar{M} - \iiint_{vc} \left\{ \bar{r} \wedge \left[\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + 2\, \vec{\omega} \wedge \vec{v} \right] \right\} \rho \, d\forall =$$

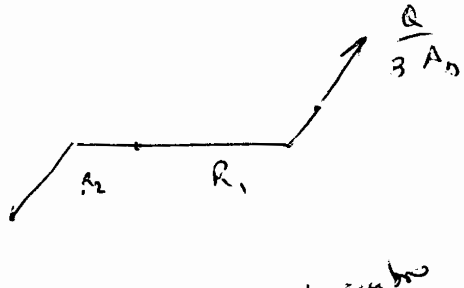
$$= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} [\bar{r} \wedge \bar{v}] \, \rho \, d\forall + \iint_{sc} [\bar{r} \wedge \bar{v}] \, \rho \, (\bar{v} \cdot d\bar{A})$$

$\Sigma \bar{M} \equiv 0$

$\frac{\partial}{\partial t} \iint [\bar{r} \wedge \bar{v}] \rho \, d\forall \equiv 0$ ANULANDO CUANTO PROCEDE

$$- \iiint_{vc} \left\{ \bar{r} \wedge 2(\bar{\omega} \wedge \bar{v}) \right\} \rho \, d\forall = \underline{\iint_{sc} (\bar{r} \wedge \bar{v}) \, \rho \, (\bar{v} \cdot d\bar{A})}$$

con ref. sistema inercial



2° miembro →

$$\rho \frac{Q}{3} \left(R_1 \frac{Q}{3 A_b} \operatorname{sen}\beta \right) \quad (+\bar{k})$$

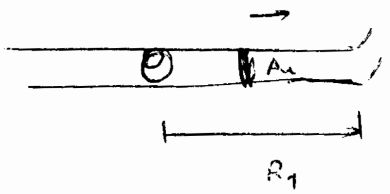
$$+$$

$$\rho \frac{2Q}{3} \left(R_2 \frac{2Q}{3 A_b} \operatorname{sen}\beta \right) \quad (+\bar{k})$$

$$\rho \frac{Q}{3} \left[\frac{R_1 Q}{3 A_b} \operatorname{sen}\beta + \frac{4 R_2 Q \operatorname{sen}\beta}{3 A_b} \right]$$

(3)

$\vec{V} = \frac{Q}{3A_a}\vec{i}$ $\qquad \vec{\omega} = -\omega\vec{k}$



$2[\vec{\omega}\wedge\vec{V}] = -\frac{2Q}{3A_a}\omega\vec{j}$

$\vec{r} = r\vec{i}$

BRAZO DERECHO

$\vec{r}\wedge 2[\vec{\omega}\wedge\vec{V}] = -\frac{2Q}{3A_a}\omega r\vec{k}$

$-\iiint\{\vec{r}\wedge[2\vec{\omega}\wedge\vec{V}]\}\rho\, d\forall$

$+\iiint \frac{2Q}{3\cancel{A_a}}\omega r\rho\, dr\cdot\cancel{A_a} =$

$= +\frac{2Q}{3}\rho\omega\frac{R_1^2}{2}$

BRAZO IZQUIERDO

$\left.\begin{array}{l}\vec{V} = \frac{2Q}{3A_a}(-\vec{i})\\ \vec{\omega} = -\omega\vec{k}\end{array}\right\} 2[\vec{\omega}\wedge\vec{V}] = 2\frac{2Q}{3A_a}\omega\vec{j}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{r}\wedge 2[\vec{\omega}\wedge\vec{V}]\\ \vec{r} = -r\vec{i}\end{array}\right| = -r\, 2\frac{2Q}{3A_a}\omega\vec{k}$

$-\int_0^{-R_2} -r\, 2\frac{2Q}{3A_a}\omega\rho A_a\, dr =$

$= 2\cdot\frac{2Q}{3\cancel{A_a}}\omega\rho\cancel{A_a}\frac{R_2^2}{2} = 2\frac{2Q}{3}\omega\rho\frac{R_2^2}{2}$

BALANCE GLOBAL

$\frac{\cancel{2}Q}{\cancel{3}}\cancel{\rho}\omega\frac{R_1^2}{\cancel{2}} + \cancel{2}\frac{2Q}{\cancel{3}}\omega\cancel{\rho}\frac{R_2^2}{\cancel{2}} = \cancel{\rho}\frac{Q}{\cancel{3}}\left[\frac{R_1 Q}{3A_b}\operatorname{sen}\beta + \frac{4R_2 Q\operatorname{sen}\beta}{3A_b}\right]$

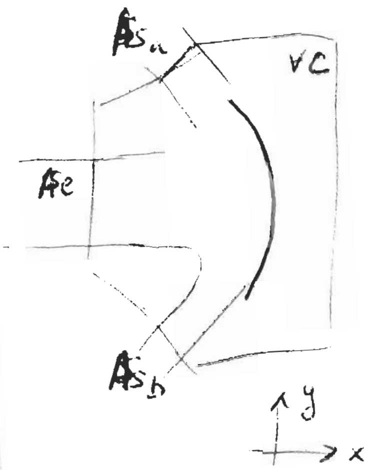
$\omega(R_1^2+2R_2^2) = (R_1+4R_2)\frac{Q\operatorname{sen}\beta}{3A_b} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{R_1+4R_2}{R_1^2+2R_2^2}\,\frac{Q\operatorname{sen}\beta}{3A_b}}$

Problema

$$v_{barca} = 20\ Km/h = 5'56\ m/s$$
$$v_{aire} = 30\ Km/h = 8'33\ m/s$$
$$\longrightarrow\ v_{\substack{relat\\aire}} = 2'77\ m/s$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{vc} \vec{v}\,\rho\, dV} + \int_{sc} \vec{v}\,\rho\,(\vec{v}_{rc}\cdot \vec{dA})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{Roz} = \rho\left(Q_{Sa}\cdot \vec{v}_{rSa} + Q_{Sb}\cdot \vec{v}_{rSb} - Q_e\cdot \vec{v}_{re}\right)$$



$$\vec{v}_{re} = 2'77\ \vec{i}\ m/s.$$
$$Q_e = v_e\cdot A_e = 2'77\cdot 6\cdot 7 = 116'34\ m^3/s.$$

✓ No hay pérdidas $|\vec{v}_{re}| = |\vec{v}_{rSa}| = |\vec{v}_{rSb}|$

Cont. $\cancel{v_{re}} A_e = \cancel{v_{rSa}} A_{Sa} + \cancel{v_{rSb}} A_{Sb}$

✓ $\hookrightarrow A_{Sa} = A_{Sb} = \dfrac{A_e}{2}$.

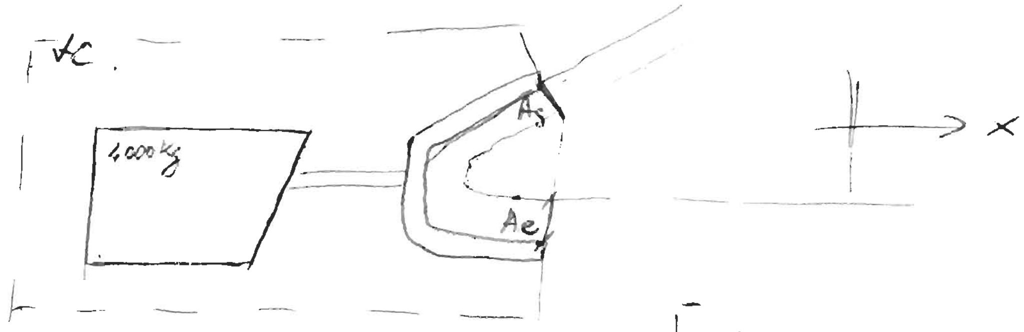
$$\longrightarrow \vec{F}_{Roz} = \rho\left[\frac{Q_e}{2} v_{re}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} + \cancel{\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}}\right) + \frac{Q_e}{2} v_{re}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \cancel{\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}}\right) - v_{re}\,\vec{i}\cdot Q_e\right] =$$

$$\vec{F}_{Roz} = \rho\, Q_e\, v_{re}\left[-\frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} - 1\right]\vec{i} = -\rho\, Q_e\, v_{re}\,(1+\cos\alpha)\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{Roz} = -1'2\cdot 116'34\cdot 2'77\,(1+\cos 45)\,\vec{i}.$$

$$\boxed{\vec{F}_{Roz} = -660\,\vec{i}\ (N)}$$

b) F^{VC}.



$\vec{u} = u\vec{i}$

$v_{Barca\ inic} = 20\ Km/h = 5'56\ m/s$

$v_{Barca\ final} = 1\ Km/h = 0'28\ m/s$

$T_{frenado} = 10$ segundos.

$= \vec{F}_{Rot} \to$ Despreciable

$$\cancel{\sum \vec{F}_{ext}} - \int_{VC} \ddot{\vec{R}} \cdot \rho\, d\forall = \cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \vec{v_r}\, \rho\, d\forall} + \int_{SC} \vec{v_r}\, \rho \left(\vec{v_{rsc}} \cdot \vec{dA}\right)$$

$$-\frac{d\vec{u}}{dt}\int_{VC} \rho\, d\forall = \rho Q \left(\vec{v_{rs}} - \vec{v_{re}}\right)$$

$$\hookrightarrow -\frac{du}{dt} M_0 \vec{i} = \rho Q \left(\vec{v_{rs}} - \vec{v_{re}}\right).$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{v_{re}} = -u\vec{i} \\ \vec{v_{rs}} = u\left(\cos\alpha\,\vec{i} - \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}\right) \end{array}\right] \quad Q = v_{re} \cdot A_e$$

consideramos sólo eje x.

$$-M_0 \frac{du}{dt}\vec{i} = \rho\, v_{re} \cdot A_e \left(u\left(\cos\alpha \cancel{\vec{i}} + \cancel{\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}}\right) - \left(-u\cancel{\vec{i}}\right)\right)$$

$$-M_0 \frac{du}{dt} = \rho\, v_{re}\, A_e \left(\cos\alpha + 1\right) u = \rho\, A_e\, u^2 \left(\cos\alpha + 1\right).$$

$$\int_{v_{Barca\ inic}}^{v_{Barca\ final}} \frac{du}{u^2} = \frac{-\rho A_e}{M_0}\left(\cos\alpha + 1\right)\int_0^{T_{frenado}} dt$$

$$\hookrightarrow \cancel{-}\left[\frac{1}{v_{Bf}} - \frac{1}{v_{Binic}}\right] = \cancel{+}\frac{\rho A_e}{M_0}\left(\cos\alpha + 1\right) \cdot T_f$$

$$\frac{1}{0'28} - \frac{1}{5'56} = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 0'5}{4000} \cdot (\cos\alpha + 1) \cdot T_f .$$

$$3'39 = 0'25 \, (\cos\alpha + 1) \; T_f .$$

$\hookrightarrow$ si $T_f = 10\,s \longrightarrow \cos\alpha + 1 = \dfrac{3'39}{2'5}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\alpha = 69'14°}$$

$$\downarrow$$

Mínimo ángulo para $T_f = 10\,s$ como mínimo

Apartado a) con velocidades absolutas

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{r_e} + \vec{v}_{arr_e} \Longrightarrow 8'33\,\vec{i} = 2'77\,\vec{i} + 5'56\,\vec{i} .$$

$$\vec{v}_{s_a} = \vec{v}_{r_{s_a}} + \vec{v}_{arr_{s_a}} \qquad \vec{v}_{s_b} = \vec{v}_{r_{s_b}} + \vec{v}_{arr_{s_b}}$$

$$\vec{v}_{s_a} = \vec{v}_{r_{s_a}} + 5'56\,\vec{i} \qquad \vec{v}_{s_b} = \vec{v}_{r_{s_b}} + 5'56\,\vec{i} .$$

$$Q_e = Q_{r_e} = v_{r_e} \cdot A_e = 2'77 \cdot 6 \cdot 7 = 116'34 \ m^3/s$$

$$Q_{s_a} = Q_{s_b} = \frac{Q_e}{2} = 58'17 \ m^3/s$$

$$Q_{Sa} = v_{r_{Sa}} \cdot A_{Sa} \rightarrow v_{r_{Sa}} = \frac{Q_{Sa}}{A_{Sa}} = 2'77 \ m/s$$

$$\vec{v}_{r_{Sa}} = v_{r_{Sa}} (-\cos\alpha \, \vec{i} + \operatorname{sen}\alpha \, \vec{j})$$

$$\vec{v}_{r_{Sa}} = 2'77 (-\cos 45 \, \vec{i} + \operatorname{sen} 45 \, \vec{j}) = -1'96 \, \vec{i} + 1'96 \, \vec{j}$$

$$\vec{v}_{r_{Sb}} = -1'96 \, \vec{i} - 1'96 \, \vec{j}$$

$$\vec{F}_{agua} = \rho \left[Q_{Sa} \cdot \vec{v}_{Sa} + Q_{Sb} \cdot \vec{v}_{Sb} - Q_e \cdot \vec{v}_e \right] =$$

$$\vec{F}_{agua} = \rho Q_e \left[\frac{\vec{v}_{Sa} + \vec{v}_{Sb}}{2} - \vec{v}_e \right] =$$

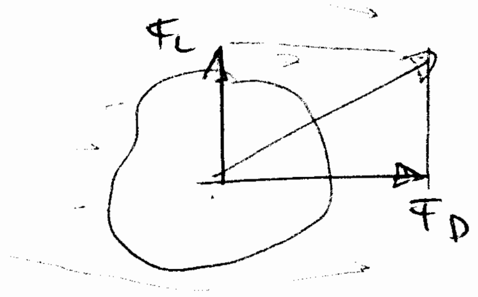
$$\vec{F}_{agua} = 1'2 \cdot 116'34 \left[\frac{(-1'96 \, \vec{i} + \cancel{1'96 \, \vec{j}} + 5'56 \, \vec{i}) + (-1'96 \, \vec{i} - \cancel{1'96 \, \vec{j}} + 5'56 \, \vec{i})}{2} - (2'77 \, \vec{i} + 5'56 \, \vec{i}) \right] =$$

$$\vec{F}_{agua} = 1'2 \cdot 116'34 \left[-1'96 \, \vec{i} + \cancel{5'56 \, \vec{i}} - 2'77 \, \vec{i} - \cancel{5'56 \, \vec{i}} \right]$$

$$\boxed{\vec{F}_{agua} = 1'2 \cdot 116'34 \, (-4'73 \, \vec{i}) = -660 \, \vec{i} \ (N)}$$

Cuestión

Las fuerzas de arrastre y sustentación son las componentes horizontal y vertical de la fuerza a la que se ve sometida un cuerpo con velocidad relativa en el seno de un fluido (ya sea el cuerpo, el fluido o ambos los que se mueven).

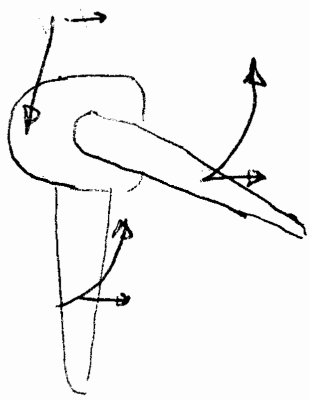


F_L = sustentación

F_D = arrastre

Los coeficientes de sustentación (C_L) y arrastre (C_D) se determinan por lo general experimentalmente y permiten calcular las fuerzas correspondientes para cada cuerpo y unas condiciones de velocidad y un determinado fluido.

b) - Pala de aerogeneradores: Coeficiente de arrastre mínimo (no afecta a la rotación, al menos en teoría, pero puede provocar momento de vuelco). Coeficiente de sustentación máximo (para ayudar al giro)



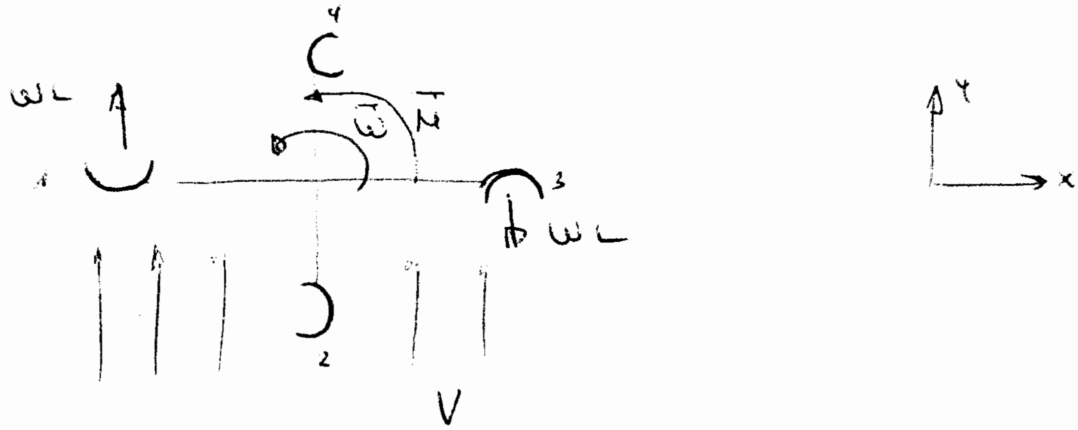
- Alerón fórmula 1: Coeficiente de arrastre mínimo y coeficiente de sustentación negativo máximo (ayuda al agarre y a la estabilidad)

- Veleta: Coeficiente de sustentación mínimo (para que no "despegue") El coef. de arrastre debe ser mínimo en la sección fina y máximo en la ancha (para facilitar el par que oriente la veleta en la dirección de mínima resistencia).

c) El par de giro será igual:

$$\vec{M} = \vec{F}_{conv} \cdot L - \vec{F}_{conv} \cdot L =$$

$$= \left[L \cdot \left(\frac{1}{2} \rho C_{D_1} S (V + \omega L)^2 \right) - L \left(\frac{1}{2} \rho C_{D_2} S (V - \omega L)^2 \right) \right] \vec{u}$$



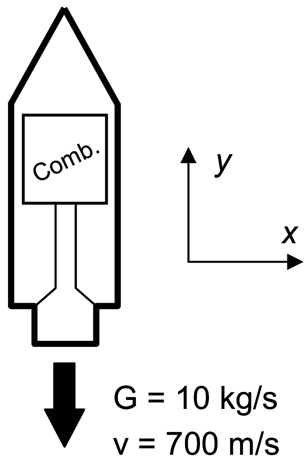
NOTA: En las cazoletas 2 y 4, al ser simétricas la posible fuerza de sustentación se compensa.
La fuerza de arrastre no transmite momento.

Problema 1 (25%)

La figura adjunta muestra un cohete, cuya masa es de 50 kg, está cargado inicialmente con 100 kg de combustible, y despega en vertical. El combustible se consumo a 10 kg/s, saliendo por la tobera convertido en gases, como flujo incompresible, a una velocidad (con respecto del cohete) de 700 m/s.

Notas:

- Despreciar el movimiento del combustible por el interior del cohete.
- Despreciar cualquier fricción, rozamiento o resistencia
- Utilizar el sistema de ejes mostrado en la figura.



Se pide:

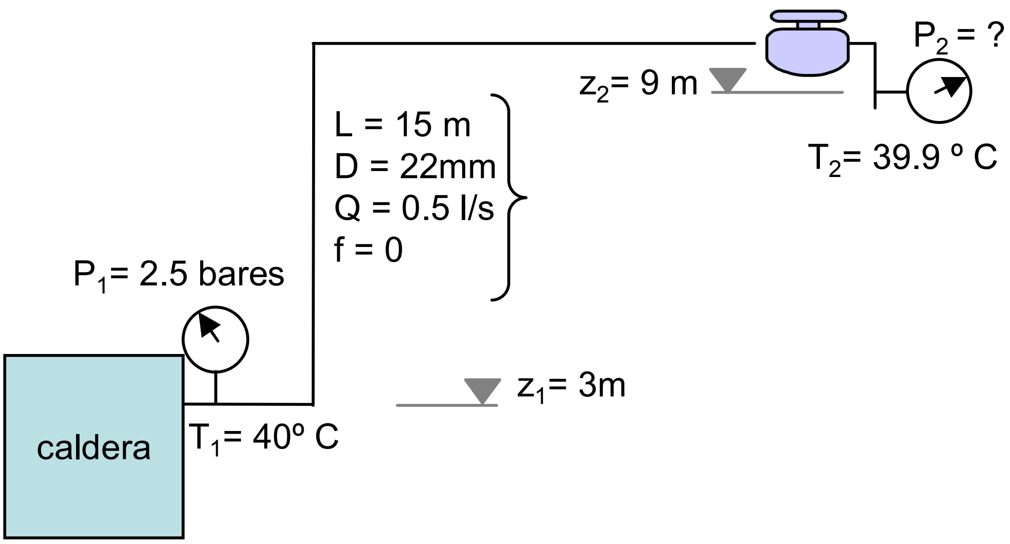
a) Calcular cuál es la aceleración del cohete en el instante inicial del despegue ($t = 0$ s).
b) Calcular cuál será la velocidad del cohete en el instante $t = 4$ s.
c) Explicar en qué afectaría a la resolución del problema el que no se pudiese despreciar el movimiento del combustible por el interior del cohete.

Problema 2 (25%)

Desde la caldera de una vivienda unifamiliar ubicada en la planta baja, se alimenta la ducha instalada en una planta alta con una tubería cuyas características se muestran en la figura. La misma también detalla las características del flujo de agua caliente, tanto a la entrada de la tubería como a su salida, salvo en lo que a la presión en este último punto se refiere y cuyo valor se pregunta, sabiendo que el sistema ya está estabilizado (régimen es estacionario) y que la tubería, por no estar térmicamente aislada, pierde 0.6 Kcal/h.m.ºC. La temperatura ambiente es de 20 º C. Interpretar los resultados (se sugiere utilizar el resultado de comparar la ecuación de Euler con la de la Energía).

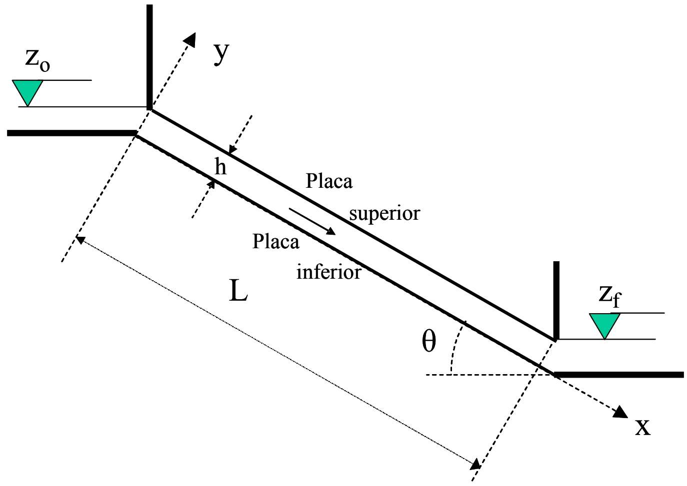
Notas:

- Hay que calcular la pérdida de calor a través de la tubería admitiendo que el salto térmico en cualquier punto de la tubería es constante: $\Delta T \approx$ (39.9 - 20º) C $\approx$ 20 º C.
- El calor específico del agua es 1 cal/gr. º C
- La energía interna por unidad de peso se determina multiplicando el calor específico del agua por la temperatura absoluta.



Problema 3 (25%)

Un fluido incompresible de viscosidad μ y peso específico γ fluye en régimen laminar y estacionario entre dos depósitos a través de dos placas paralelas separadas una distancia h. Cada una de las placas tiene una longitud L y una anchura (dimensión perpendicular al papel) lo suficientemente grande como para considerar un flujo de Couette entre placas planas paralelas. La superficie libre del fluido en el depósito superior (en contacto con la atmósfera) se encuentra a una cota zo y en el depósito inferior (también en contacto con la atmósfera) a una cota zf.



a) Determinar la expresión del campo de velocidades en función de las variables x e y, así como de los valores conocidos μ, γ, L, h, zo y zf.

b) Calcular el caudal circulante entre ambos depósitos, por metro de anchura de placa, en función de los valores conocidos μ, γ, L, h, zo y zf.

c) Ecuación general de las líneas de corriente en t = 3 seg, así como ecuación, en t = 3 esg., de la línea de corriente que pasa por x = 0, y = h/2.

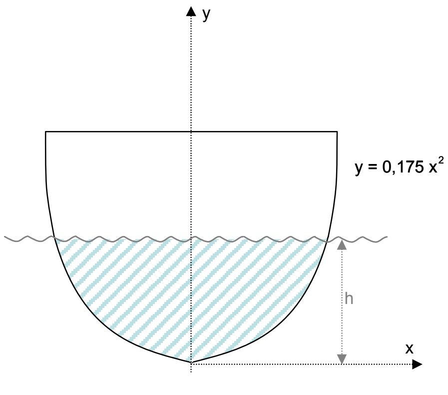
d) Determinar la fuerza que por metro de anchura de plaza está ejerciendo el fluido sobre la placa inferior (indicar módulo, dirección y sentido). Dar el resultado en función de los datos conocidos μ, γ, L, h, zo y zf.

e) Demostrar que se verifica el balance de potencias para el volumen de control delimitado por las dos placas. Dar los resultados en función de los datos conocidos μ, γ, L, h, zo y zf.

Nota: Al hacer uso de las expresiones del formulario, hay que determinar para este caso los valores de ∂p/∂x y de sen θ en función de los datos conocidos μ, γ, L, h, zo y zf.

Problema 4 (25%)

a) Determinar la fuerza necesaria para arrastrar a velocidad constante la barcaza de la figura. Expresar el resultado en función de la masa total de la barcaza **m** (que incluiría la posible carga). La sección recta de la barcaza es simétrica, constante y se muestra en la figura. La ecuación de la parábola que describen los lados de la barcaza es $y=0{,}175\,x^2$



b) ¿Tendría alguna influencia el tipo de agua en el que se encuentra la barcaza para el resultado del apartado a)? –agua dulce, agua de mar, etc.-. Explicar razonadamente y detallar las propiedades de los fluidos que influirían en estas diferencias.

Datos:

- Densidad del agua: ρ_0
- Coeficiente de arrastre respecto a la sección sumergida (constante): C_D
- Longitud de la barcaza: **L**
- Masa total de la barcaza (masa de la barcaza más masa de la carga, variable): **m**
- Velocidad de la barcaza (constante): **V**

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall + \int_{S.C.}\rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall + \int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Problema 1

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} - \int_{\forall c} \left(\ddot{\vec{R}} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}} + \cancel{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})} + \cancel{2 \vec{\omega} \wedge \vec{v_r}} \right) \rho \, d\forall = \cancel{\frac{d}{dt} \int_{\forall c} \rho \, \vec{v_r} \, d\forall} + \int_{SC} \vec{v_r} \, \rho \left(\overrightarrow{v_{r_{SC}}} \cdot \vec{dA} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum \overrightarrow{F_{ext}} = - Peso \, \vec{j} = - m_{vc} \cdot g \, \vec{j} . \\ \ddot{\vec{R}} = \dfrac{d \vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt} \vec{j} \; \Big/ \; \vec{v} = v \, \vec{j} \rightarrow \text{Velocidad del SR relativo.} \end{array} \right.$$

$$- m_{vc} \cdot g \, \vec{j} - \int_{\forall c} \frac{dv}{dt} \vec{j} \cdot \rho \, d\forall = \rho \, \overrightarrow{v_{r_s}} \cdot Q_s = \overrightarrow{v_{r_s}} \cdot G_s = - v_{r_s} \vec{j} \cdot G_s$$

$$\cancel{-} \, m_{vc} \, g \, \cancel{\vec{j}} \; \cancel{-} \, \frac{dv}{dt} \, m_{vc} \, \cancel{\vec{j}} = \cancel{-} \, v_{r_s} \cdot G_s \cdot \cancel{\vec{j}}$$

$$m_{vc} = M_{cohete} + m_{comb_0} - \dot{m} \cdot t = M_c + m_0 - \dot{m} \cdot t .$$

$$\left(M_c + m_0 - \dot{m} t \right) \left(g + \frac{dv}{dt} \right) = v_{r_s} \cdot G_s$$

a) en $t = 0 \longrightarrow (M_c + m_0)\left(g + \dfrac{dv}{dt}\right) = v_{r_s} \cdot G_s$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{v_{r_s} \cdot G_s}{M_c + m_0} - g = \frac{700 \cdot 10}{150} - 9'81 = 36'86 \; m/s^2 . \quad (\oplus \text{ en } y).}$$

b) $g + \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_{r_s} \cdot G_s}{M_c + m_0 - \dot{m} \cdot t}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{r_s} \cdot G_s}{M_c + m_0 - \dot{m} \, t} - g$$

$$\int_0^v dv = v_{r_s}\cdot G_s \int_0^4 \frac{dt}{M_c + m_0 - \dot{m}\, t} - g \int_0^4 dt$$

$$v = v_{r_s}\, G_s \left[\frac{1}{-\dot{m}} \cdot \ln\left(M_c + m_0 - \dot{m}\, t\right) \right]_0^4 - g \left[t \right]_0^4$$

$$v = \frac{700 \cdot 10}{-10} \left[\ln(150 - 10\cdot 4) - \ln(150) \right] - 9'81 \cdot 4 .$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = 177'9 \ m/s . \\ (\oplus \text{ en } y) \end{array}}$$

c) Idea a desarrollar: Si no se desprecia el movimiento del combustible por el interior del cohete, entonces el término $\frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\, \vec{v_r}\, d\forall$ tampoco es despreciable. Habría que calcularlo.

2º EJERCICIO

Ecuación de la energía en régimen permanente y en condiciones uniformes en cada sección.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_e}{dt} = \left\{ \left[\frac{v_2^2}{2} + g z_2 + u_2 + \frac{p_2}{\rho} \right] - \left[\frac{v_1^2}{2} + g z_1 + u_1 + \frac{p_1}{\rho} \right] \right\} \dot{m}$$

Se trata, tan sólo de sustituir, pues se dan todos los datos con la excepción de P_2. Hay que respetar bien las unidades pues es donde puede haber la mayor probabilidad de fallo.

Se tiene:

- No hay fricción $f = 0$
- $\frac{dW_e}{dt} = 0$: no hay trabajo de eje.
- Fluido incompresible $\rho = ct$
- Sección de la tubería, constante $v_2 = v_1$.

La ecuación de la energía queda:

$$\frac{dQ}{dt} = \underset{\rho Q}{\underset{\shortparallel}{\dot{m}}} \left[g(z_2 - z_1) + (u_2 - u_1) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) \right]$$

Hay que despejar P_2 que es lo que se pregunta.

Resulta ser

$$\boxed{p_2 = p_1 + \frac{\rho}{\dot{m}} \frac{dQ}{dt} - \rho g (z_2 - z_1) - \rho c_e (T_2 - T_1)}$$

donde se ha tenido presente que $\underline{\underline{u = c_e T}}$

La principal dificultad estriba en utilizar las unidades adecuadas. (3)

En S.I. se tiene para cada término del segundo miembro:

$\Rightarrow$ $\boxed{P_1 = 2{,}5 \times 10^5 \ Nw/m^2}$

$\Rightarrow$ $\frac{dQ}{dt} < 0$: El sistema pierde calor $\Rightarrow$ $\frac{dQ}{dt} = -0{,}6 \frac{Kcal}{h \cdot m \cdot °C} \cdot 15 \ m \times 20°C$

$$\frac{dQ}{dt} = -180 \ \frac{kcal}{h} \cdot \frac{4180 \ J}{1 \ kcal} \cdot \frac{1 \ h}{3600 \ s} = \cancel{-34{,}833 \ \frac{J}{s} = -34{,}833 \ \frac{Nw \ m}{s}}$$

$$-209 \ J/s = -209 \ J/s$$

luego
$$\frac{\rho}{\dot{m}} \frac{dQ}{dt} = \frac{1000 \ Kg/m^3}{0{,}5 \times 10^{-3} \ m^3/s \times 10^3 \ Kg/m^3} = -2000 \ \frac{Kg/m^3}{Kg/s} \times \cancel{34{,}833}\ 209 \ \frac{Nw \ m}{s}$$

$$\boxed{\frac{\rho}{\dot{m}} \frac{dQ}{dt} = -418{,}000 \ \frac{Nw}{m^2}}$$

$\Rightarrow$ $-\rho g (z_2 - z_1) = -9800 \ \frac{Nw}{m^2} \cdot 6 = \boxed{-58.800 \ \frac{Nw}{m^2} = -\rho g (z_2 - z_1)}$

$\Rightarrow$ $-\rho C_e (T_2 - T_1) = -1000 \ \frac{Kg}{m^3} \cdot 1 \ \frac{kcal}{Kg \ °C} (-0.1)°C =$

$$= +100 \ \frac{Kg}{m^3} \cdot 1 \ \frac{kcal}{Kg} \cdot \frac{4180 \ Nw \cdot m}{1 \ kcal} = 418.000 \ \frac{Nw}{m^2}$$

$$\boxed{-\rho C_e (T_2 - T_1) = +418.000 \ \frac{Nw}{m^2}}$$

Sustituyendo
$$P_2 = (2{,}5 - \cancel{0{,}70}\ 4{,}18 - 0.59 + 4.18) 10^5 =$$

$$= 1.91 \times 10^5 \ \frac{Nw}{m^2} = 1.91 \ bares$$

(3)

Es evidente (calorífico) que, sin fricción, todo el calor perdido es igual a la disminución de la energía interna. Y así:

$$\frac{dQ}{dt} = -209 \ \frac{N m \cdot m}{s} = -209 \ W$$ (pérdida de calor del sistema).

Pérdida de energía interna del flujo

$$\Delta u \cdot \dot{m} = \dot{m} \, c_e \, (T_2 - T_1) =$$

$$= 0{,}5 \times 10^{-3} \cancel{\frac{m^3}{s}} \times 10^3 \cancel{\frac{kg}{m^3}} \ 4180 \ \frac{J}{\cancel{kg}} \times (-0.1) = $$

$$= 0.5 \times \cancel{10^3} \times \cancel{10^{-3}} \ (-418) \ W = -209 \ W$$

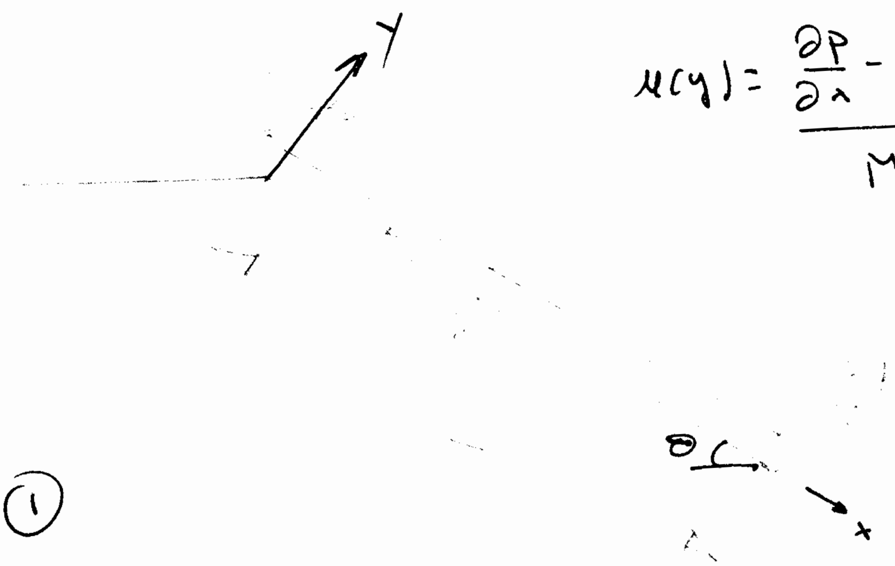
$$\boxed{\text{COMPROBACIÓN DE LO PRECEDENTE}}$$

En efecto la comparación entre la ecuación de Euler y la de la energía proporciona la siguiente relación:

$$h_f = \frac{u_2 - u_1}{g} - \frac{dQ}{dt} \frac{1}{\dot{m} g} \Rightarrow \frac{u_2 - u_1}{\cancel{g}} = \frac{1}{\cancel{g} \dot{m}} \frac{dQ}{dt}$$

y siendo $h_f \equiv 0 \Longrightarrow u_2 - u_1 = \frac{1}{g \dot{m}} \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \dot{m} (u_2 - u_1)$

Obviamente
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{m}(u_2 - u_1) &= \underline{\underline{-209 \ W}} \\ \frac{dQ}{dt} &= -209 \ W \end{aligned}}$$



$$u(y) = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu}\,\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

(1)

$$\frac{dp}{dx} = cte = \frac{P_f - P_0}{L} = \frac{0-0}{L} = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z_0 - z_f}{L}$$

$$u(y) = -\frac{z_0 - z_f}{L\mu}\gamma\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$y=0 \quad u=0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$

$y=h \quad u=0 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{z_f - z_0}{L\mu}\gamma\frac{h^2}{2} + C_1 \cdot h$

$$\rightarrow C_1 = \frac{z_0 - z_f}{L\mu}\frac{\gamma h^2}{2h} = \frac{z_0 - z_f}{2L\mu} h\gamma$$

$$\boxed{u(y) = \frac{z_0 - z_f}{L\mu}\gamma\frac{hy - y^2}{2}}$$

(2) Caudal

$$Q = \int_0^h u(y)\,dy = \frac{z_0 - z_f}{L\mu}\left(\frac{h}{2}\frac{h^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{h^3}{3}\right)\gamma = \frac{z_0 - z_f}{12\mu L}h^3\gamma$$

(3) Línea de corriente

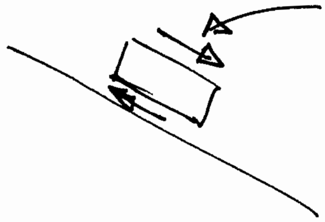
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$$dx \cdot v = dy \cdot u$$

$v = 0$
$u \neq 0$ $\rightarrow dy = 0 \rightarrow y = cte$

en nuestro caso $y = h/2$

(4) La fuerza por unidad de profundidad se calculará a partir de τ.



$$\tau = \mu \frac{du}{dy}\bigg|_{y=0} = \mu \frac{z_0 - z_f}{L\mu} \gamma \frac{h-2y}{2}\bigg|_{y=0} =$$

$$= \cancel{\mu} \frac{z_0 - z_f}{L\cancel{\mu}} \frac{h}{2} \gamma = \frac{(z_0 - z_f)}{L\,2} h\,\gamma$$

La que nos interesa es la de la parte inferior.
Sobre el fluido, la fuerza es

$$\boxed{\frac{(z_0 - z_f)}{2\cancel{L}} h\,\gamma \cdot \cancel{L} > 0}$$

por lo que la placa tiende a frenarlo. Sobre la placa será la misma fuerza pero en sentido contrario

$$\rightarrow \cancel{L} \frac{z_0 - z_f}{2\cancel{L}} h\,\gamma =$$

$$= \frac{z_0 - z_f}{2} h\,\gamma \quad \frac{\text{Fuerza}}{\text{profun}}$$

5) Las presiones inicial y final no intervienen en el balance de potencias pues son iguales. Tampoco las f. tangenciales dado que las velocidades en las placas son 0, por lo que $\tau \cdot v = 0$ aunque $\tau \neq 0$.

La potencia debida al peso debe igualar a la disipada.

$$\underbrace{\gamma (z_0 - z_f) Q}_{} = \int \Phi \, d\forall = \text{Pot. disipada}$$

$$\gamma (z_0 - z_f) \frac{z_0 - z_f}{12 \mu L} h^3 \gamma = \frac{\gamma^2 h^3 (z_0 - z_f)^2}{12 \mu L}$$

$$\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu \left(\frac{z_0 - z_f}{L\mu} \gamma \frac{h - 2y}{2}\right)^2 = \frac{(z_0 - z_f)^2 \gamma^2}{4 \mu L^2} (h - 2y)^2$$

A

$$\text{Pot. dis} = \int \Phi \, d\forall = \int_0^h A (h - 2y)^2 L \, dy = AL \int_0^h (h^2 - 4hy + 4y^2) \, dy =$$

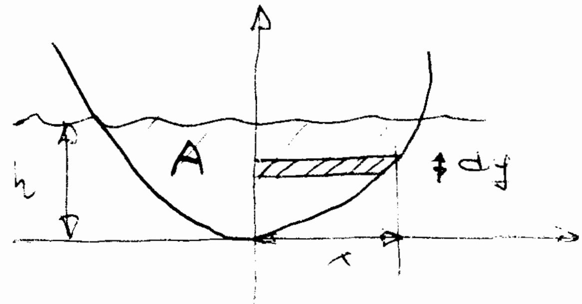
$$= AL \left(h^3 - 4h \frac{h^2}{2} + 4 \frac{h^3}{3}\right) = ALh^3 \left(1 - 2 + \frac{4}{3}\right) = AL \frac{h^3}{3} =$$

$$= \frac{(z_0 - z_f)^2 \gamma^2}{\mu L^2 4} \cdot L \frac{h^3}{3} = \frac{(z_0 - z_f)^2 \gamma^2}{12 \mu L} h^3$$

Como vemos: $\gamma (z_0 - z_f) Q = \int \Phi \, d\forall$ c.q.d.

4 $\quad m \cdot \cancel{g} = \forall \cdot \rho_0 \cdot \cancel{g}$

$$m = L \cdot A \cdot \rho_0 \quad (1)$$



$$\boxed{A} = 2 \int_0^h x \cdot dy = 2 \cdot \int_0^h \sqrt{\frac{y}{0'175}} = \boxed{\frac{4\, h^{3/2}}{3\sqrt{0'175}}} \quad (2)$$

Para obtener el valor de h, de (1) y (2)

$$m = L \cdot \frac{4\, h^{3/2}}{3\sqrt{0'175}} \cdot \rho_0$$

$$\boxed{h = \left(\frac{3\, m \cdot \sqrt{0'175}}{4 \cdot L \cdot \rho_0} \right)^{2/3}}$$

Sustituyendo el valor del área real para obtener la fuerza de arrastre:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_0\, C_D \cdot V^2 \cdot \frac{4\, h^{3/2}}{3\sqrt{0'175}}$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{\rho_0}\, C_D\, V^2 \frac{\cancel{4}\, m \cdot \sqrt{0'175} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{0'175} \cdot \cancel{4} \cdot L \cdot \cancel{\rho_0}}$$

$$\boxed{F_D = \frac{m \cdot C_D \cdot V^2}{2L}}$$

b) Como se observó en la resolución del primer apartado, la densidad del agua no tiene influencia sobre la fuerza de arrastre si se mantiene la masa fija. Esto se debe a que el incremento en F_D atribuible a que el fluido es más denso se compensa ~~a~~ con una menor área sumergida debido al mayor empuje.

Sí habrá diferencias si la viscosidad de las aguas es distinta. Esta diferencia se plasmará en la ecuación a través de un C_D distinto originado por una variación en el nº de Reynolds.

$$Re = \frac{V \cdot D}{\mu}$$

Problema 1 (33%)

Un campo de velocidades viene dado por la expresión:

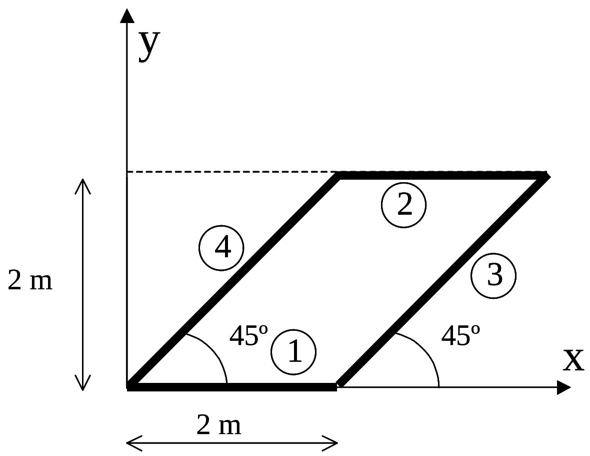
$$\vec{V} = 3\,\vec{i} + 2yt\;\vec{j}$$

1. Determinar la ley de variación de la densidad con el tiempo, sabiendo que en el instante t = 0 seg. la densidad toma el valor ρ_0, constante para todo el campo fluido.

2. Calcular la ecuación general de las líneas de corriente en el instante t_1. Particularizar para la línea de corriente que pasa por el punto de coordenadas (x_2, y_2).

3. Determinar al ecuación de la trayectoria de la partícula que en el instante $t = t_0$, estaba en el punto de coordenadas (x_0, y_0).

4. Comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa, para el volumen de control de la figura, de 1 m de profundidad perpendicular al papel.



Problema 2 (33%)

En una serrería industrial se instala en cada una de las máquinas un conducto vertical de 150 mm de diámetro y 5 metros de longitud para arrastrar verticalmente las partículas desprendidas durante el corte. La corriente de aire se encuentra a la presión manométrica de 1'5 bar e impulsa un gasto másico total de 800 kg/h. Se realizan diferentes ensayos en los que se determina la velocidad con la que ascienden determinadas partículas por el conducto.

Diámetro (mm)	Velocidad (m/s)
0'05	4'19
0'1	4'12
0'5	3'42
1	2'65
2	1'36
3	0'36

Admitiendo que las partículas pueden considerarse esféricas en todo momento, determinar:

a) Tamaño máximo de las partículas que es capaz de arrastrar la corriente.
b) Caudal que es necesario aplicar que el tamaño máximo de partículas que se arrastre sean las de diámetro 5 mm.
c) Caudal que es necesario aplicar que el tamaño máximo de partículas que se arrastre sean las de diámetro 1 mm.

NOTAS:

- La temperatura del aire en todo momento se mantiene constante e igual a 20ºC. En estas condiciones la viscosidad cinemática es $\upsilon = 10^{-5}$ m^2/s.
- La constante característica del aire es $R_g = 287$ N·m/kg/ºK
- En caso de que sea necesario iterar para obtener el valor del coeficiente de arrastre C_D, indicar la forma de plantear la iteración y los pasos intermedios obtenidos en la misma.
- La presión atmosférica es de 1 bar.
- La densidad de las partículas es de 500 Kg/m^3.

Expresión de la fuerza de arrastre de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_R = \frac{1}{2} C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$

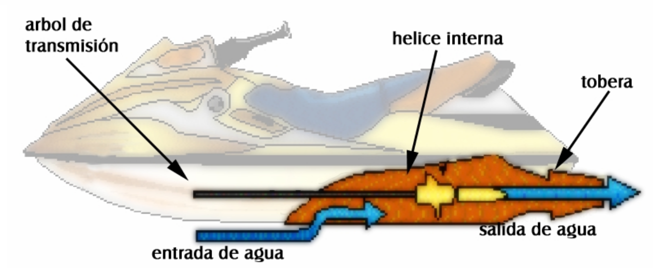
Expresión de la fuerza de sustentación de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_L = \frac{1}{2} C_L \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresiones del coeficiente de arrastre para partículas esféricas:

- Región a) Re < 1: $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$
- Región b) 1 < Re < 1000: $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + 0{,}15\,\mathrm{Re}^{0{,}687}\right)$
- Región c) 1000 < Re < 200000: $C_D = 0{,}44$
- Región d) Re > 200000: $C_D = 0{,}1$

Problema 3 (33%)

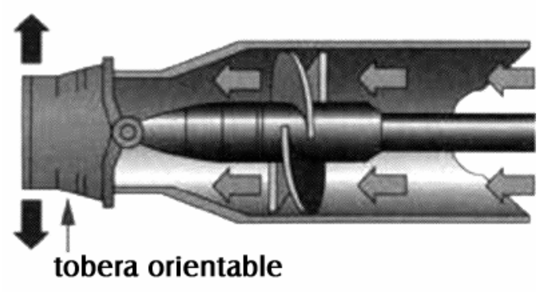
La moto de agua de la figura funciona aspirando un caudal Q = 96 l/s de agua de mar (en dirección opuesta al movimiento) por la parte inferior del casco y expulsándolo por la tobera situada en la parte posterior. Sabiendo que la sección frontal mojada del casco es constante y con un valor de 0.23 m^2, determinar:



a) La velocidad máxima que puede desarrollar la moto

b) La potencia que debe aportar el motor a la bomba, sabiendo que el rendimiento hidráulico de la misma es de $\eta = 0.83$

c) Explicar brevemente qué diferencias habría en el funcionamiento de la moto en agua dulce.



Datos

- Diámetro aspiración: 300mm
- Diámetro bomba: 148mm
- Diámetro de tobera: 82mm
- Coeficiente de arrastre en función del área frontal $C_D = 0.11$
- Constante de pérdidas combinadas aspiración/tobera (referida a la velocidad en la tobera): K = 2
- Densidad del agua de mar (20º): $\rho_m = 1025$ Kg/m^3
- Viscosidad cinemática del agua de mar (20º): $\nu = 1.05 \times 10^{-6}$ m^2/s
- Viscosidad cinemática del agua dulce (20º): $\nu = 1.00 \times 10^{-6}$ m^2/s

Notas:

- $H_{perdidas} = k\dfrac{v^2}{2g}$ (mca)
- Suponer despreciable la diferencia de cotas entre la aspiración y la tobera

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\, \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16\, fG^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta\right)r^2 + \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

MF2 JUNIO 2003

(1) $\bar{V} = 3\vec{i} + 2yt\,\vec{j}$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0 \; ; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\, 2t = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -2t\,dt \rightarrow \ln\rho = -2\frac{t^2}{2} + C \rightarrow \rho = e^{-t^2} K$$

$$t=0 \quad \rho = \rho_0 \longrightarrow \boxed{\rho = \rho_0 e^{-t^2}}$$

LDC

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \; ; \quad \frac{dx}{3} = \frac{dy}{2yt_1} \longrightarrow \frac{x}{3} = \frac{1}{2t_1} \ln y + K'$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_2 \\ y = y_2 \end{array}\right\} \quad K' = \frac{x_2}{3} - \frac{1}{2t_1} \ln y_2$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2t_1} \ln y + \frac{x_2}{3} - \frac{1}{2t_1} \ln y_2 \rightarrow \boxed{\frac{x - x_2}{3} = \frac{1}{2t_1} \ln \frac{y}{y_2}}$$

TRAYECTORIA

$$\frac{dx}{dt} = 3 \rightarrow x = 3t + C_1$$

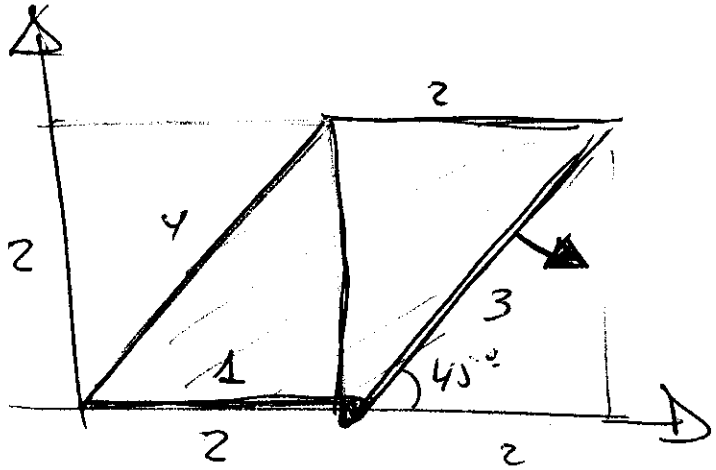
$$\frac{dy}{dt} = 2yt \rightarrow \frac{dy}{y} = 2t\,dt \rightarrow \ln y = 2\frac{t^2}{2} + C_2'$$

$$y = C_2 e^{t^2}$$

$$t = t_0 \quad x = x_1 \rightarrow C_1 = x_0 - 3t_0$$

$$C_2 = \frac{y_0}{e^{t_0^2}} \longrightarrow x = 3t + x_0 - 3t_0 \rightarrow \boxed{x - x_0 = 3(t - t_0)}$$

$$y = \frac{y_0}{e^{t_0^2}} e^{t^2} \rightarrow \boxed{\frac{y}{y_0} = e^{t^2 - t_0^2}}$$



$$0 = \frac{d}{dt}\int \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho\, \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

ρ = cte en todo el $\forall C$ $\quad \int \rho\, d\forall = \rho_0 e^{-t^2}\cdot 4$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C} = \frac{d}{dt}(\rho_0 4 e^{-t^2}) = -2t\rho_0 4 e^{-t^2} = -8t\rho_0 e^{-t^2}$$

---

(1) $d\vec{A} = -\vec{j}\,dx$

$\vec{V}\cdot d\vec{A} = -2yt\,dx$

como $y=0 \rightarrow Q=0$

(2) $d\vec{A} = \vec{j}\,dx$

$\left.\begin{array}{l}\vec{V}\cdot d\vec{A} = 2yt\,dx \\ y=2\end{array}\right\} 4t\,dx$

$$\int \rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A} = \rho_0 e^{-t^2} 4t \int_{x=2}^{x=4} dx = 8t\rho_0 e^{-t^2}$$

---

(3) Ecuación recta: $\quad y = x-2$

$f = y-x+2 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$

$\vec{u} = \frac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ (en realidad es el opuesto) $\quad \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$

$$d\vec{A} = \sqrt{dx^2+dy^2}\,\vec{u} = \sqrt{2}\,dx\,\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

dy

3

$$\int \rho \bar{v} \cdot d\bar{s} = \rho_0 e^{-t^2} \int_{x=2}^{x=4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} dx \, (3 - 2\overset{x-2}{y} t) =$$

$$= \rho_0 e^{-t^2} 6 - 2t \rho_0 e^{-t^2} \int_2^4 (x-2)\,dx =$$

$$= \rho_0 e^{-t^2} 6 - 2t \rho_0 e^{-t^2} \left(\frac{4^2 - 2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) =$$

$$= \rho_0 e^{-t^2} 6 - 4t \rho_0 e^{-t^2} = \boxed{\rho_0 e^{-t^2} (6 - 4t)}$$

(4) $d\vec{s} = \sqrt{2}\,dx \, \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ $\qquad y = x$

$$\int \rho \bar{v} \cdot d\bar{s} = \rho_0 e^{-t^2} \int_{x=0}^{x=2} dx \, (-3 + 2xt) =$$

$$= -3 \cdot 2 \rho_0 e^{-t^2} + \rho_0 e^{-t^2} \cancel{2} t \frac{4}{\cancel{2}} = -6 \rho_0 e^{-t^2} + 4t \rho_0 e^{-t^2}$$

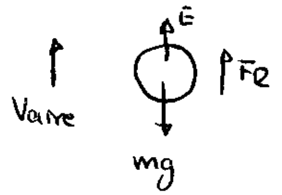
$$\boxed{(-6 + 4t) \rho_0 e^{-t^2}}$$

$$0 \overset{?}{=} -8t \rho_0 e^{-t^2} + 8t \rho_0 e^{-t^2} + \rho_0 e^{-t^2} (6 - 4t) + \rho_0 e^{-t^2} (-6 + 4t)$$

cqd

Problema 2.

a) Balance de fuerzas sobre la partícula de tamaño máximo:



$V_{partícula} \approx 0.$

$V_{corriente} = \frac{Q}{A} = \frac{0'0744 \cdot 4}{\pi \cdot 0'15^2} = 4'21 \text{ m/seg}.$

$G = 800 \text{ kg/h}$

$\rho = \frac{P^*}{RT} = \frac{(1'5 + 1'013) \cdot 10^5}{287 \cdot 293} = 2'987 \text{ kg/m}^3$

$Q = \frac{G}{\rho} = 267'84 \text{ m}^3/\text{h} = 0'0744 \text{ m}^3/\text{s}$

Como la partícula está prácticamente quieta

$V_{aire} = V_{corriente} = 4'21 \text{ m/seg}.$

Las fuerzas que actúan sobre el balance son:

$$\left.\begin{aligned} Peso &= m \cdot g = \rho_p \cdot \frac{\pi}{6} D^3 \cdot g \\ Empuje &= \rho \frac{\pi}{6} D^3 \cdot g \\ F_R &= \frac{1}{2} \rho C_D A \cdot V^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &P = F_R + E \\ &\frac{\pi}{6} D^3 g (\rho_p - \rho) = \frac{1}{2} \rho C_D \frac{\pi D^2}{4} \cdot V^2 \end{aligned}$$

Para saber el valor de C_D estimamos la zona. Para $D_p = 3$ mm $V = 0'36$ m/seg.
luego: $V_{aire} = 4'21 - 0'36 = 3'85$ m/seg. y el nº de Reynolds.

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{3'85 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}} = 1155 \rightarrow \underline{C_D = 0'44}$$

Como la única incógnita es el diámetro, se obtiene:

$$\frac{\pi}{6} D^3 g (\rho_p - \rho) = \frac{1}{2} \rho C_D \frac{\pi D^2}{4} V^2$$

$$D = \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_p - \rho} C_D \frac{V^2}{2g} = \frac{3}{2} \frac{2'987}{500 - 2'987} \cdot 0'44 \cdot \frac{4'21^2}{2 \cdot 9'81}$$

$$\boxed{D = 0'00358 \text{ m} = 3'58 \text{ mm}}$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura	Curso / Curs	Grupo / Grup	Nº Pg.

b) El balance de fuerzas es el mismo que en el apartado anterior. Si ahora el tamaño máximo es $D = 5 \cdot 10^{-3}$ m, la variable a obtener será la velocidad. Admitiendo que $C_D = 0'44$, la velocidad es:

$$V^2 = \frac{4}{3}\frac{\rho_p-\rho}{\rho}\frac{g}{C_D} \rightarrow V = \sqrt{\frac{4(\rho_p-\rho)g\cdot D}{3\rho C_D}} = \overset{4'97}{\cancel{3'73}} \text{ m/seg}$$

$$\Rightarrow V = \underset{4'97}{\cancel{3'73}} \text{ m/seg.}$$

El caudal volumétrico será:

$$Q = \frac{\pi D_t^2}{4}\cdot V = \frac{\pi \cdot 0'15^2}{4}\cdot 3'73 = \overset{0'08788}{\cancel{0'0659}} \ m^3/s$$

y el másico:

$$G = \rho \cdot Q = 2'987 \cdot \overset{0'08788}{\cancel{0'0659}} = \overset{0'2625}{\cancel{0'1968}} \text{ Kg/s}$$

$\cancel{\boxed{G = 708'6 \text{ Kg/h}}}$ $= \cancel{0'1968 \text{ Kg/s}}$ $G = 0'2625$ Kg/s $= 945$ m³/h

Falta comprobar si $C_D = 0'44$. El nº de Reynolds es:

$$Re = \frac{V\cdot D}{\nu} = \cancel{\quad} \frac{3'73 \cdot 5\cdot 10^{-3}}{10^{-5}} = 1865 \rightarrow \text{luego } C_D = 0'44$$

c) El balance de fuerzas será el mismo que en el apartado a), sólo cambia que el valor de C_D no es conocido:

$$V^2 = \frac{4(\rho_p-\rho)\cdot g\cdot D}{3\rho\ C_D} \Rightarrow \cancel{V = \frac{1'10645}{\sqrt{C_D}}} \quad V = \frac{4'9731}{\sqrt{C_D}}$$

Caso a) Si $Re > 1000 \rightarrow C_D = 0'44 \Rightarrow V = 7'497$ m/s

~~…~~ y el nº Reynold es $Re = \frac{V\cdot D}{\nu} = \cancel{\quad} 749'7$

~~Caso b) $1 < Re < 1000$.~~

~~Si $Re = 166'8 \rightarrow C_D = 0'8696 \rightarrow V = 1'4078$ m/seg~~

~~$\rightarrow Re = \frac{V\cdot D}{\nu} = 140'8 \rightarrow C_D = 0'9357 \rightarrow V = 1'308$ m/seg.~~

~~$\rightarrow Re = \frac{V\cdot D}{\nu} = 130'8 \rightarrow C_D = 0'966 \rightarrow V = 1'267$ m/seg.~~

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data

Caso b) $1 < Re < 1000$

$Re = 749'7 \longrightarrow C_D = 0'485 \longrightarrow V = 7'138 \ m/s$

$Re = 713'8 \longrightarrow C_D = 0'494 \longrightarrow V = 7'075 \ m/s$

$Re = 707'5 \longrightarrow C_D = 0'496 \longrightarrow V = 7'064 \ m/s$

$Re = 706'4 \longrightarrow C_D = 0'496 \longrightarrow V = 7'064 \ m/s.$

luego el caudal es:

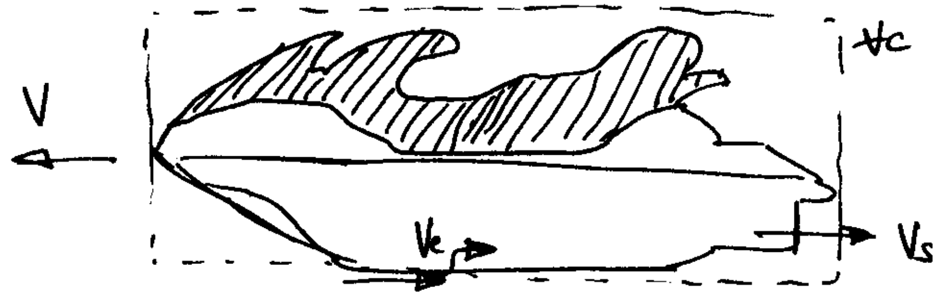
$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V = \frac{\pi \, 0'15^2}{4} \cdot 7'064 = 0'1248 \ m^3/s$$

y el másico:

$$G = \rho \cdot Q = 2'987 \cdot 0'1248 = 0'3728 \ Kg/s = \underline{\underline{1342}} \ Kg/h.$$

MF2 JUNIO 2003

(3)



La velocidad máxima de la moto puede obtenerse como resultado de un balance de fuerzas entre la fuerza de arrastre F_D y el intercambio de cantidad de movimiento con el agua.

$$\frac{1}{2}\rho C_D \cdot A \cdot V^2 = \rho Q \, (V_S - V_e) \qquad (*)$$

$$V = \sqrt{\frac{2 Q (V_s - V_e)}{C_D \cdot A}}$$

$$V_s = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_s^2}{4}} = 18'18 \text{ m/s}$$

$$V_e = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_e^2}{4}} = 1'36 \text{ m/s}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2 \cdot 0'096 \cdot (18'18 - 1'36)}{0'11 \cdot 0'23}} = 11'3 \text{ m/s} = 40'7 \text{ km/h}}$$

b) Planteando Bernoulli entre la aspiración y la tobera:

$$H_B + \frac{V_e^2}{2g} = \frac{V_s^2}{2g} + H_{perd}$$

$$\boxed{H_{perd}} = k \cdot \frac{V_s^2}{2g} = \cancel{2} \cdot \frac{18'18^2}{\cancel{2}g} = \boxed{33'73 \text{ mca}}$$

$$\boxed{H_B} = 33'73 + \frac{18'18^2}{2g} - \frac{1'36^2}{2g} = \boxed{50'49 \text{ mca}}$$

$$\boxed{P} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta} = \frac{9'8 \cdot 1025 \cdot 0'096 \cdot 50'49}{0'83} = \boxed{58660'9 \text{ W}}$$

$$\boxed{P = 58'7 \text{ kW}}$$

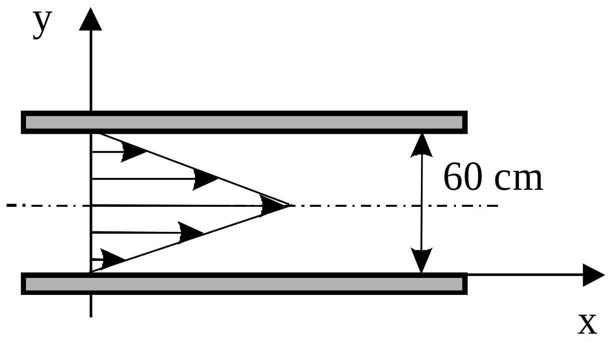
c) En agua dulce varía la densidad (que es menor) con lo que se reduciría la potencia necesaria en el motor (para alcanzar igual velocidad).

De igual manera la diferencia en densidad y en viscosidad cinemática, alterarían la fuerza de arrastre (el valor de C_D) que sería menor en agua dulce.

Por último, no hay que olvidar que la flotabilidad de la moto se verá modificada, puesto que el empuje en agua dulce será menor, afectando al valor de la fuerza de arrastre.

Problema 1 (33%)

Un cierto fluido circula entre dos placas planas paralelas (tal y como se muestra en la figura) con una distribución de velocidades triangular. La velocidad en el eje central y la densidad del fluido vienen dadas por las siguientes expresiones:



$$v_{centro} = 10 + 0{,}02 \cdot t^2 \quad \text{(m/s)}$$

$$\rho = 1{,}2 + 0{,}01 \cdot t \quad (\text{Kg/m}^3)$$

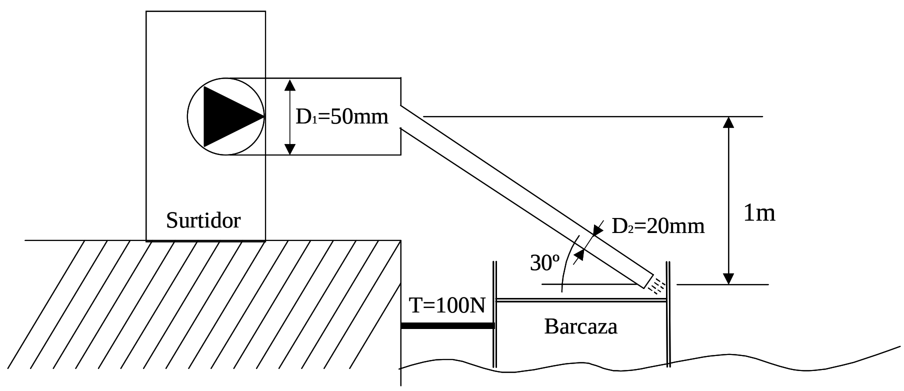
Determinar:

1. La aceleración local del flujo.
2. La aceleración convectiva del flujo.
3. El caudal volumétrico en un instante genérico.
4. El volumen de fluido que atraviesa la sección recta entre t = 1 seg y t = 3 seg.
5. La masa de fluido que atraviesa la sección recta entre t = 1 seg y t = 3 seg.
6. ¿Puede existir en la práctica el campo de velocidades teórico propuesto? Justificar la respuesta utilizando la ecuación de continuidad en forma diferencial.

Problema 2 (33%)

Una barcaza amarrada mediante una maroma que puede aguantar una tensión de 100N, se llena con un chorro de gasolina de densidad 0,65 que proviene de un surtidor tal como indica la figura adjunta e incide sobre la misma con un ángulo de 30º.

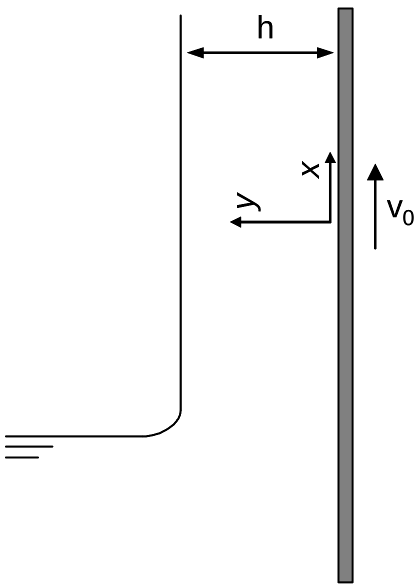
El surtidor dispone de una bomba que se encuentra a 1m por encima de la salida de gasolina. Esta salida se realiza por un orificio que presenta un coeficiente de velocidad de 0,7 y un coeficiente de contracción de 0,85. Las pérdidas en el tubo desde la bomba hasta el orificio de salida pueden considerarse de la forma $k \cdot (v_s^2 / 2g)$ donde v_s es la velocidad teórica a la salida, g la gravedad y k en este caso vale 2,5.



¿Cuáles son la presión y caudal que puede proporcionar la bomba como máximo para que la maroma de amarre de la barcaza no se rompa?

Problema 3 (33%)

Una cinta sin fin (infinitamente ancha) pasa por un contenedor de fluido de viscosidad μ. La cinta se mueve verticalmente hacia arriba con velocidad constante, v_0. Debido a las fuerzas viscosas, la cinta arrastra una película de fluido de espesor h.



Condiciones para resolver el problema:

1. Utilizar los ejes de referencia de la figura.
2. Hay que calcular el término general $(\partial p/\partial x - \gamma \operatorname{sen}\theta)$, es decir, no se puede dejar así indicado.

Suponiendo que el flujo es laminar en la película de fluido que arrastra la cinta, se pide:

a) Calcular las expresiones del campo de velocidades, u(y), y del campo de esfuerzos cortantes, $\tau(y)$.

b) ¿Qué condición debe cumplirse para que la velocidad de la lámina libre vertical del fluido sea nula? ¿Cuál será el caudal neto en tal caso y en qué sentido circulará?

c) De nuevo para la situación en que la velocidad de la lámina libre vertical del fluido es nula, calcular el balance de potencias (tomar un volumen de control de longitud L a lo largo de la cinta y 1 m de profundidad).

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\,\frac{dz}{ds}+v\,\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re}=\frac{VD}{\nu}=\frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f=f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2=\left(p_1^*\right)^2-\frac{16\,fG^2}{\pi^2D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^*=\rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{F}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r\,d\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum\vec{M}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall+\int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}\,d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall+\int_{S.C.}\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y)=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma sen\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma sen\theta\right)r^2+\frac{C_1}{\mu}\ln r+C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau=\mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Problema 1

Distribución de velocidades

$y=0'3\,m \quad v = 10+0'02t^2$

$y=0 \quad v=0$

$y=0'6\,m \quad v=0$

de 0 a 0'3

$$\vec{v} = (10+0'02t^2)\frac{y}{0'3}\vec{i}$$

de 0'3 a 0'6

$$\vec{v} = (10+0'02t^2)\frac{0'6-y}{0'3}\vec{i}$$

1) $\bar{a}_l = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

0 - 0'3 $\quad \vec{a}_l = \dfrac{y}{0'3}\cdot 0'04t\vec{i}$

0'3 - 0'6 $\quad \vec{a}_l = \dfrac{-y}{0'3}\cdot 0'04t\vec{i}$

2) $\bar{a}_c = u\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z}$

Solo hay 1 componente, la 1ª u, por lo que v y w = 0

$\bar{a}_c = u\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ pero como $\vec{v} = f(y)\vec{i}$ y no de x, $\bar{a}_c = 0$

$\partial \bar{v}/\partial x = 0$

3) Calculamos el caudal de y = 0 a y = 0'3 y lo multiplicamos por 2. $d\vec{A} = dy\vec{i}$

$$Q(t) = 2\int \vec{v}\cdot d\vec{A} = 2\int_{y=0}^{y=0'3} (10+0'02t^2)\frac{y}{0'3}\,dy =$$

$$= \frac{2}{0'3}(10+0'02t^2)\frac{0'3^2}{2} = 0'3(10+0'02t^2) \ m^3/s\cdot m\ prof.$$

4) $\dfrac{dV}{dt} = Q(t) = 0'3(10+0'02t^2) \rightarrow dV = 0'3(10+0'02t^2)\,dt$

$$\int_0^V dV = 0'3\int_1^3 (10+0'02t^2)\,dt \rightarrow V = 0'3\left[10(3-1) + \frac{0'02}{3}(3^3-1^3)\right] = 6'052 \ m^3/m\ prof.$$

5)
$$\frac{dm}{dt} = G(t) = Q(t)\cdot \rho(t) = 0'3(10+0'02t^2)(1'2+0'01t) =$$
$$= 0'3(12+0'1t+0'024t^2+0'0002t^3)$$
$$\int_0^m dm = \int_1^3 0'3(12+0'1t+0'024t^2+0'0002t^3)\,dt$$

$$m = 0'3\left(12(3-1)+\frac{0'1}{2}(3^2-1)+\frac{0'024}{3}(3^3-1^3)+0'0002\,\frac{3^4-1}{4}\right) = 7'38\ \frac{Kg}{m\ prof.}$$

6) Ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{v} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0$$

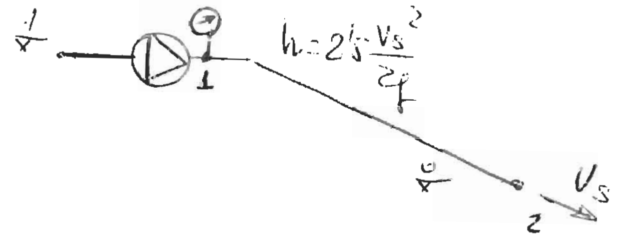
$$\nabla\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ pues solo existe u y no depende de x

como $\frac{D\rho}{Dt} = 0'01 \neq 0$ no se cumple.

Por lo tanto no puede existir.

Problema 2

Aplicamos Bernoulli generalizado para determinar la V_s en función de la altura que suministra la bomba. Sin considerar las pérdidas en la boquilla final, teniendo en cuenta que el surtidor aspira a cota 1 m. por una conducción de 10 mm de diámetro y descarga a cota 0 m a la atmósfera con velocidad V_s.



$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{z_1}^{\,1} + \frac{V_1^2}{2g} = \cancel{\frac{P_2}{\gamma}}^{\,0} + \cancel{z_2}^{\,0} + \frac{V_s^2}{2g} + 2'5\frac{V_s^2}{2g}$$

$V_1 = V_e$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} = 3'5\frac{V_s^2}{2g}$$

$\frac{P_1}{\gamma}$ presión bomba

$$Q = V_e \frac{\pi \cdot 0'005^2}{4} = V_s \frac{\pi \cdot 0'002^2}{4}$$

$$V_e = V_s\left(\frac{0'02}{0'05}\right)^2 = V_s \cdot 0'16$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + 0'16^2\frac{V_s^2}{2g} = 3'5\frac{V_s^2}{2g} \longrightarrow \frac{P_1}{\gamma} = 3'4744\frac{V_s^2}{2g} \longrightarrow V_s = \frac{1}{\sqrt{3'4744}}\sqrt{2g\,P_1/\gamma}$$

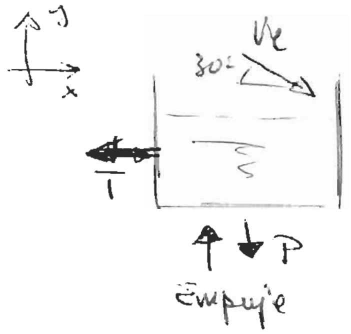
El caudal real será $Q_R = C_D V_s A_c$ con $C_D = C_v \cdot C_c$

$$Q_R = 0'7 \cdot 0'85 \cdot \frac{1}{\sqrt{3'4744}}\sqrt{2g\frac{P_1}{\gamma}} \cdot \pi\frac{0'02^2}{4} = 4'44\;10^{-4}\sqrt{P_1/\gamma}$$

La velocidad real será $V_{s_R} = C_v \cdot V_s = 0'7\frac{1}{\sqrt{3'4744}}\sqrt{2g\frac{P_1}{\gamma}} = 1'66\sqrt{\frac{P_1}{\gamma}}$

Ahora tomamos como VC la barcaza y aplicamos la ec. de conservación de la cantidad de movimiento:

3.2



$V_e = 1'66\sqrt{P_1/\gamma}$, $\vec{V_e} = 1'66\sqrt{\frac{P_1}{\gamma}}(\cos 30\,\vec{i} - \operatorname{sen} 30\,\vec{j})$

$V_s = 0$

$\Sigma F_{ext\,x} = -T$

$\Sigma F_{ext\,y} = E - P$

$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, V\, d\forall = 0$

Pues el agua dentro de la barcaza no está en movimiento ni hay flujo de salida

$\int_{SC} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A}) = -Q_e \vec{V_e} \rho$

Como el VC es inercial no hay término corrector.

$\Sigma \vec{F}_{ext} = \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \rightarrow$

$\rightarrow (E-P)\vec{j} - T\vec{i} = -Q_e \vec{V_e} \rho$ $\qquad Q_e = 4'44\cdot 10^{-4}\sqrt{P_1/\gamma}$

$E - P = -Q_e \rho\left(-1'66\sqrt{\frac{P_1}{\gamma}} \operatorname{sen} 30\right)$

$-T = -Q_e \rho\left(\cos 30 \cdot 1'66\sqrt{\frac{P_1}{\gamma}}\right) \longrightarrow$ siguiendo con esta ecuación :

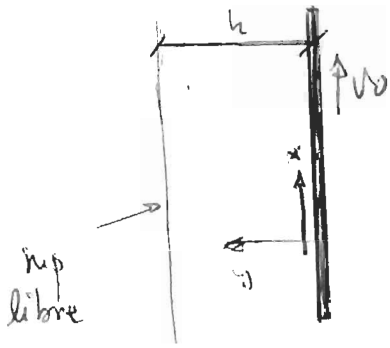
$\rho = 0'65\cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $\qquad -T = -4'44\cdot 10^{-4}\sqrt{\frac{P_1}{\gamma}}\; 0'65\cdot 10^3 \cdot \cos 30 \cdot 1'66\sqrt{\frac{P_1}{\gamma}}$

$T = +0'41489\,\frac{P_1}{\gamma}$ $\qquad \gamma = g\cdot\rho$

$\frac{100\cdot 9'81\cdot 0'65\cdot 10^3}{0'41489} = P_1 \longrightarrow P_1 = 1536913\ Pa = 15'67\ \frac{kp}{cm^2}$

MF2 12 Sept 03

Problema 3



$$u(y) = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ya que en la sup libre $\cancel{\exists}$ presión $(p=0)$

$\theta = -90°$ (mov. vertical con el peso en sentido contrario al movimiento, que es el del eje x positivo)

$$u(y) = +\frac{\gamma}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

a) se supone que el rozamiento con el aire es nulo $\rightarrow \tau(y=h) = 0$

y además, $v(y=0) = V_0$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu\left(+\frac{\gamma}{\mu} y + C_1\right)$$

$$\tau_{y=h} = \mu\left(+\frac{\gamma}{\mu} h + C_1\right) = 0 \rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{\gamma h}{\mu}}$$

$$V_0 = u(y=0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = V_0}$$

$$\boxed{u(y) = +\frac{\gamma}{\mu}\frac{y^2}{2} - \frac{\gamma h}{\mu} y + V_0}$$

Como se comprueba, $u(0) = V_0$

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} \rightarrow \boxed{\tau(y) = +\gamma y - \gamma h = \gamma(y-h)}$$

Se comprueba que $\tau(y=h) = 0$

b) Condición: $v(y=h) = 0$

$$0 = +\frac{\gamma}{\mu}\frac{h^2}{2} - \frac{\gamma h}{\mu} h + V_0 \longrightarrow \boxed{V_0 = \frac{\gamma}{\mu}\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \frac{\gamma}{\mu}\frac{h^2}{2}}$$

Caudal $$Q = \int_{y=0}^{h} u(y)\,dy = \int_0^h \left(\frac{\gamma}{\mu}\frac{y^2}{2} - \frac{\gamma h}{\mu} y + V_0\right) dy$$

$$\boxed{Q = \frac{\gamma}{\mu}\frac{h^3}{6} - \frac{\gamma h}{\mu}\frac{h^2}{2} + v_0 h = \frac{\gamma h^3}{\mu}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right) + v_0 h = v_0 h - \frac{\gamma h^3}{3\mu}}$$

Como $v_0 = \frac{\gamma}{\mu}\frac{h^2}{2}$ $\quad Q = \frac{\gamma}{\mu}\frac{h^2}{2}\cdot h - \frac{\gamma h^3}{3\mu} = \frac{\gamma h^3}{\mu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) > 0$ $\uparrow$ ascendente

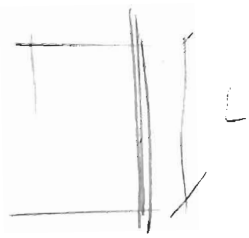
$$= \frac{\gamma h^3}{6\mu}$$

c) El campo de velocidades

$$v(y) = \frac{\gamma}{\mu}\frac{y^2}{2} - \frac{\gamma h}{\mu}y + \frac{\gamma}{\mu}\frac{h^2}{2} = \frac{\gamma}{\mu}\left(\frac{h^2+y^2}{2} - hy\right)$$

$$\tau(y) = \gamma(y-h)$$

$$Q = \frac{\gamma h^3}{6\mu}$$



Balance de potencias

$$\Phi = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \mu\left(\frac{\gamma}{\mu}(y-h)\right)^2 = \frac{\gamma^2}{\mu}(y-h)^2$$

$$\int \Phi \, dV = \int_0^h \frac{\gamma^2}{\mu}(y-h)^2 \, dy \cdot L \cdot 1 = \left[\frac{\gamma^2}{\mu}\frac{(y-h)^3}{3} L\right]_0^h =$$

$$= \frac{-\gamma^2}{3\mu} L(-h)^3 = \frac{\gamma^2 h^3 L}{3\mu} > 0 \text{ lógicamente.}$$

$\tau_{y=h} = 0 \qquad \tau_{y=0} = -\gamma h$;

Potencia favorable al movimiento, la que la cinta transmite al fluido $= \tau \cdot v$

- $|\tau_{y=0}| \cdot 1 \cdot L \cdot v_0 = \gamma h L v_0 = \gamma h L \frac{\gamma h^2}{2\mu} = \frac{\gamma^2 h^3 L}{2\mu}$
- Potencia en sentido contrario debida al peso $= \gamma \cdot \Delta Z \cdot Q = \gamma \cdot L \cdot Q = \frac{\gamma^2 h^3}{6\mu} L$
- Función disipación $\frac{\gamma^2 h^3 L}{3\mu}$

Pot. fav − Pot. desf = Pot disipada; $\frac{\gamma^2 h^3 L}{2\mu} - \frac{\gamma^2 h^3}{6\mu} L = \frac{1}{3}\frac{\gamma^2 h^3 L}{\mu}$

que coincide con la f. disipación.

Cuestión 1 (16.67%)

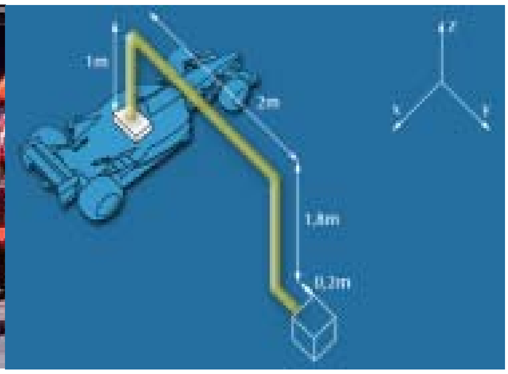
El repostaje en carrera de un fórmula 1 se realiza mediante una manguera corrugada de 3 pulgadas de diámetro conectada al equipo que bombea el combustible hasta el depósito del monoplaza, en el que se descarga a presión atmosférica. Uno de los mecánicos es el encargado de sostener la mencionada manguera, que vacía tiene una masa de 25 Kg y una longitud de 5m. El equipo está diseñado para que el llenado completo del depósito (115 litros) se realice en 10 segundos a caudal constante. Determinar:

a) La presión que necesita aportar el equipo de repostaje a la entrada de la manguera.
b) La fuerza máxima que puede llegar a realizar el mecánico que sostiene la manguera (considerando que mantiene la longitud total de la misma y que ni el equipo de repostaje ni el monoplaza absorben reacción alguna).

Notas:

- La gasolina de competición utilizada tiene una densidad constante relativa ρ_r=0,745
- Para calcular las pérdidas por fricción (en m.c.f.) en la manguera utilizar la ecuación de Darcy-Weisbach $h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$. Considerar el factor de fricción constante y con un valor f=0,03
- Las pérdidas en la boquilla y a la salida del equipo de repostaje (en m.c.f.) pueden modelarse mediante la ecuación: $h_l = 20 \cdot \frac{v^2}{2g}$
- 1 pulgada = 25,4 mm





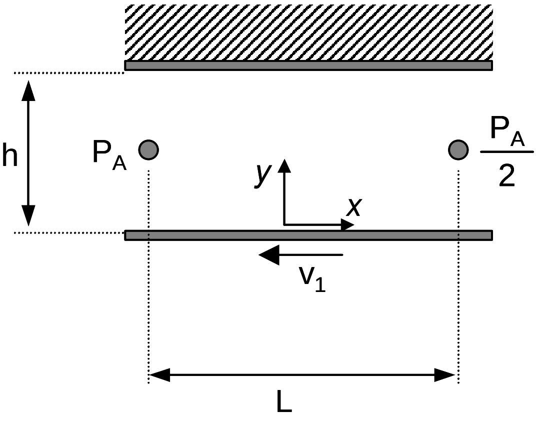
Cuestión 2 (16.67%)

Dado el flujo de Couette de la figura: fluido incompresible con viscosidad μ, placa superior fija, placa inferior moviéndose hacia la izquierda con velocidad v_1, siendo la presión al final del tramo L la mitad que al principio del mismo, y estando todas las dimensiones expresadas por unidad de profundidad, se pide:

a) Expresión para:

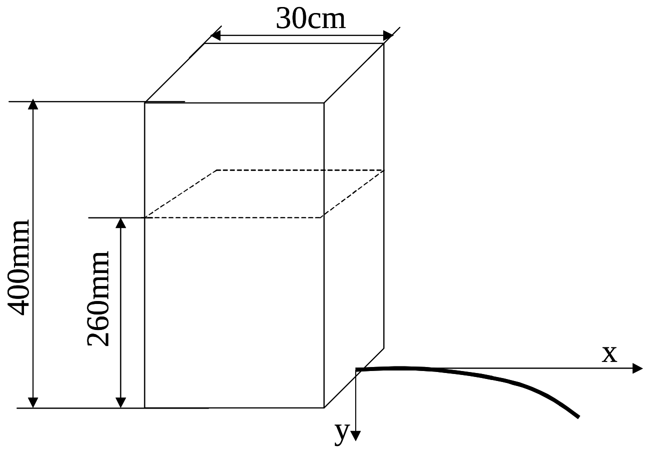
Campo de velocidades, u(y).
Caudal circulante, Q.
Campo de esfuerzos cortantes, τ(y).

b) ¿Valor mínimo de P_A para que el caudal circule hacia la derecha?
En este caso, ¿cuál sería la fuerza que ejerce el fluido sobre la placa superior (módulo, dirección y sentido)?



Cuestión 3 (16.67%)

Un depósito, con forma prisma de base cuadrada, se vacía de agua por un orificio circular de diámetro 4 mm, tal como indica la figura, desde una altura de 400 mm a 260 mm (medidos desde el fondo, donde se encuentra el orificio).



Cuando el depósito está lleno (altura 400 mm) se observa que la parábola que describe el chorro pasa por el punto x = 12 cm y = 1,13 cm respecto a los ejes de la figura, y se llena una probeta con 844 ml en 30 segundos.

a) ¿Cuánto vale el coeficiente de contracción en este instante?

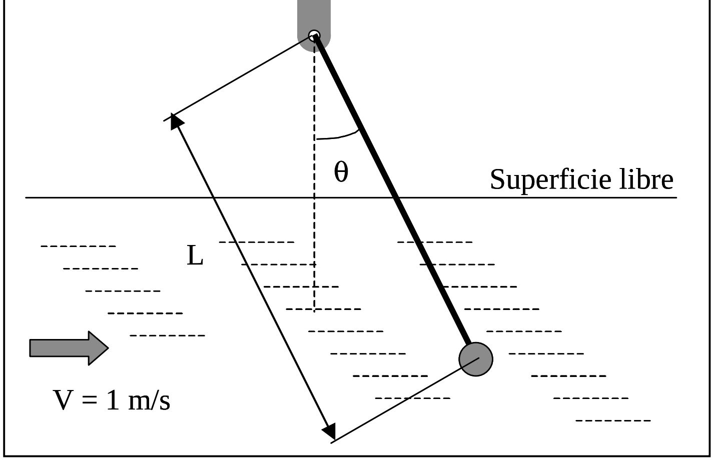
b) ¿Cuál sería la altura que alcanzaría el agua transcurridos 10 segundos desde el inicio del vaciado? (Para resolver este apartado deberá utilizarse un método numérico para calcular la cota utilizando intervalos de tiempo de 5 segundos. Utilizar el coeficiente de descarga obtenido en el apartado anterior).

Cuestión 4 (16.67%)

Mediante el dispositivo de la figura se pretende determinar la viscosidad cinemática de un fluido. Para ello, se coloca una esfera de 3 mm de radio en una corriente del fluido que lleva una velocidad de 1 m/s. La esfera se sujeta a una bisagra mediante una varilla rígida muy delgada.
Se supone que el esfuerzo de arrastre del fluido sobre la varilla es despreciable, pero sí que se considera la acción del fluido sobre la esfera.
El centro de gravedad de la varilla se encuentra a L/2 de la bisagra, y el ángulo que forma la varilla con la vertical es $\theta = 10º$ como consecuencia del arrastre provocado por el fluido sobre la esfera.
El resto de datos del problema son:

- Densidad del fluido $\rho = 850$ Kg/m^3.
- Densidad relativa de la esfera (respecto al agua) s = 1,2
- Masa de la varilla $m_1 = 15$ gr.

Se pide determinar la viscosidad cinemática del fluido en centistokes.



Cuestión 5 (16.67%)

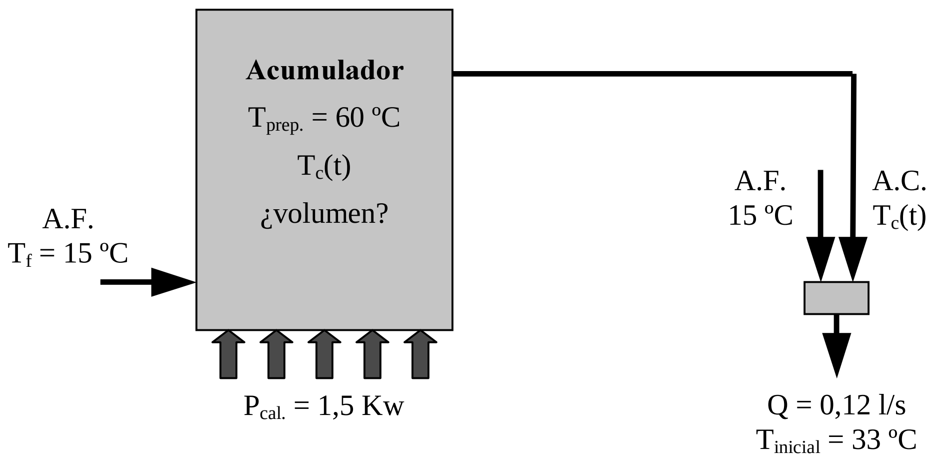
Se dispone de un termoacumulador con una potencia calorífica aportada al agua $P_{cal.} = 1{,}5$ Kw. La temperatura de entrada del agua al termo es constante $T_f = 15$ ºC. Inicialmente la temperatura del agua en el acumulador es $T_{prep.} = 60$ ºC y, cuando tenga lugar algún consumo, ésta irá variando $T_c(t)$. En un momento dado se produce un determinado consumo de agua caliente del termoacumulador mezclada con agua fría siendo el caudal consumido total $Q = 0{,}12$ l/s (tanto el caudal de agua fría como el caudal de agua caliente se mantienen constantes durante todo el tiempo que dura el consumo).

Determinar:

(a) Caudal de agua caliente necesario en el instante inicial para que la temperatura del agua consumida sea 33 ºC.
(b) Temperatura del agua en el termoacumulador cuando la temperatura del agua consumida sea 28 ºC.
(c) Volumen mínimo del acumulador necesario para que al cabo de 10 minutos la temperatura de la mezcla no baje más de 5 ºC (temperatura final del agua consumida = 28 ºC).

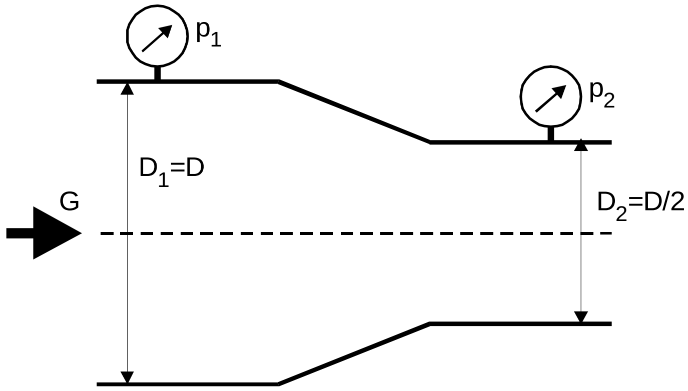
Notas.- El consumo está situado muy próximo al termoacumulador de manera que la temperatura del agua caliente en el consumo puede suponerse igual a la temperatura del agua caliente en el acumulador. Se desprecia la diferencia de cotas entre la entrada y la salida del acumulador. Las secciones de las conducciones de entrada y salida al acumulador son idénticas. No se considera diferencia de presiones entre la entrada y la salida del acumulador. Se admite que, para cada instante de tiempo, la temperatura en el acumulador es la misma en todos sus puntos.

Densidad del agua $\rho = 1000$ Kg/m^3
Calor específico del agua $C_e = 1$ Kcal/KgºK
1 caloría = 4,18 Julios



Cuestión 6 (16.67%)

Se dispone de un Venturi en el cual se han instalado sendos manómetros, indicando respectivamente las presiones p_1 y p_2, tal como muestra la figura. Admitiendo despreciables tanto la diferencia de cotas como las pérdidas determinar:



a) Expresión del caudal másico *G* en el Venturi en función de las presiones p_1 y p_2, de las dimensiones del aparato y de la densidad media ρ del fluido considerado. Considerar para ello que el flujo es incompresible en todo momento.

b) Para el caso en que el flujo sea compresible isotermo, considerando el gas como ideal y admitiendo que la presión en las secciones 1 y 2 pueden considerarse uniformes, determinar la misma relación para el caudal másico *G*. Expresar dicho caudal másico en función únicamente de las presiones en los dos manómetros, de las dimensiones del aparato, de la constante característica del gas R_g y de la temperatura T_0.

NOTA: Para realizar los cálculos tomar como punto de partida la ecuación de Euler en forma diferencial en régimen estacionario y en ausencia de pérdidas

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}=0$$

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re}=\frac{VD}{\nu}=\frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2=\left(p_1^*\right)^2-\frac{16fG^2}{\pi^2D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^*=\rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana

Campo de velocidades:

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica

Campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right)r^2 + C$$

Ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

Función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Expresión de la fuerza de arrastre de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_R = \frac{1}{2}C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$

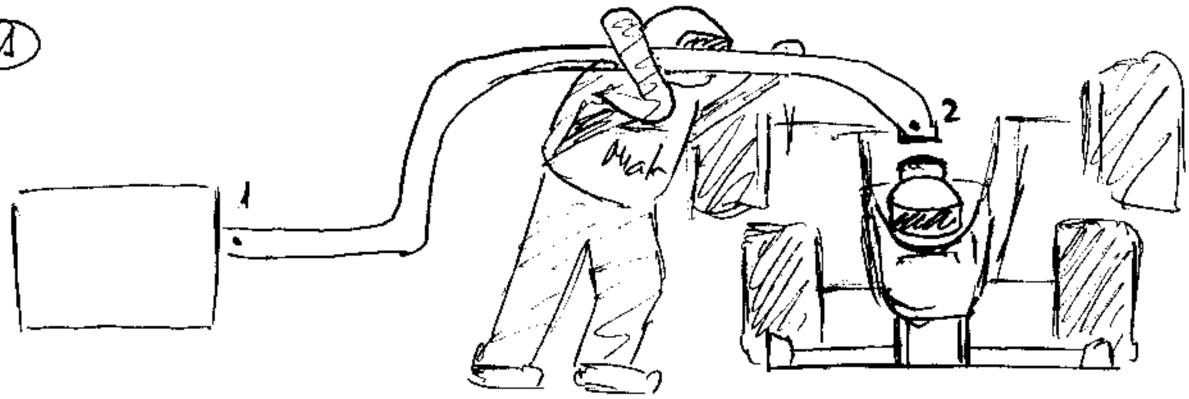
Expresión de la fuerza de sustentación de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_L = \frac{1}{2}C_L \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresiones del coeficiente de arrastre para partículas esféricas:

- Región a) Re < 1: $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$
- Región b) 1 < Re < 1000: $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + 0'15\,\mathrm{Re}^{0'687}\right)$
- Región c) 1000 < Re < 200000: $C_D = 0'44$
- Región d) Re>200000: $C_D = 0'1$

Cuestión 1

①



$$\boxed{D} = 3\ in = \boxed{0'076\ m}$$

$$\boxed{m_{TOTAL}} = m_m + m_{gas} = 25 + \rho_r \cdot 1000 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot L = \boxed{41'89\ kg}$$

a) P_1 ?

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + \cancel{z_1}^{\,0} = \cancel{\frac{P_2}{\gamma}}^{\,0} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + h_f + h_v$$

$$h_f = f\ \frac{L}{D}\ \frac{V^2}{2g} ;$$

$$\boxed{V} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{0'115}{10}}{\frac{\pi \cdot 0'076^2}{4}} = \boxed{2'54\ m/s}$$

$$h_f = 0'03 \cdot \frac{5}{0'076} \cdot \frac{2'54^2}{2 \cdot 9'81} = 0'65\ m.$$

$$h_v = 20\ \frac{V^2}{2g} = 20 \cdot \frac{2'54^2}{2 \cdot 9'81} = 6'58\ m$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = 0'8 + 0'65 + 6'58 = 8\ m \xrightarrow{\times (9810 \cdot 0'745)} \boxed{P_1 = 58467'6\ Pa}$$

b) El mecánico soportará el peso de la manguera y la gasolina, además de los esfuerzos resultantes del movimiento del fluido:

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{R}_{mec} = \rho \cdot Q \, (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{TOTAL} \cdot g \, (-\vec{k}) + P_1 \cdot A \, (-\vec{j})$$

$$|V_s| = |V_e| = V = 2'54 \ m/s$$

$$41'89 \cdot 9'81 \, (-\vec{k}) + 58467'6 \cdot 0'0045 \, (-\vec{j}) + \vec{R} =$$

$$= 745 \cdot 0'0115 \cdot \left(2'54 \, (-\vec{k}) - 2'54 \, (-\vec{j})\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_y = 288'26 \, \vec{j} \ N}$$

$$\boxed{R_x = 389'18 \, \vec{k} \ N}$$

Cuestión 2

a)

$$u(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

$\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = K$.

$$u(0) = -v_1 \longrightarrow C_2 = -v_1$$

$$u(h) = 0 = \frac{K}{2\mu} h^2 + C_1 h - v_1 \longrightarrow C_1 h = v_1 - \frac{K}{2\mu} h^2$$

$$\downarrow$$

$$C_1 = \frac{v_1}{h} - \frac{K}{2\mu} h$$

$$\Longrightarrow u(y) = \frac{K}{2\mu} y^2 + \frac{v_1}{h} y - \frac{K}{2\mu} h y - v_1$$

$$u(y) = \frac{K}{2\mu}(y^2 - hy) + \frac{v_1}{h} y - v_1$$

$$\left(K = \frac{\partial P}{\partial x} - \cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta}^{\,0} = \frac{\Delta P}{L} = \frac{P_A/2 - P_A}{L} = \frac{-P_A}{2L} \right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{u(y) = \frac{-P_A}{4\mu L}(y^2 - hy) + \frac{v_1}{h} y - v_1}$$ Campo de velocidades

$$Q = \int_0^h u(y) \cdot dy = \int_0^h \left[\frac{-P_A}{4\mu L}(y^2 - hy) + \frac{v_1}{h} y - v_1 \right] dy =$$

$$Q = \frac{-P_A}{4\mu L}\left[\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2}\right] + \frac{v_1}{\cancel{h}} \frac{h^{\cancel{2}}}{2} - v_1 h = \frac{-P_A h^3}{4\mu L}\left(\frac{-1}{6}\right) + \frac{v_1 h}{2} - v_1 h$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = \frac{P_A h^3}{24\mu L} - \frac{v_1 h}{2}}$$ Caudal circulante.

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[\frac{-P_A}{4\mu L}(2y-h) + \frac{v_1}{h} \right] =$$

$$\boxed{\tau(y) = \frac{-P_A}{4L}(2y-h) + \frac{\mu v_1}{h}}$$

Campo de esfuerzos cortantes.

b) Para Q hacia la dcha $\longrightarrow$ $Q > 0$.

$$\longrightarrow \frac{P_A h^3}{24\mu L} - \frac{v_1 h}{2} > 0 \longrightarrow \frac{P_A h^3}{24\mu L} > \frac{v_1 h}{2}.$$

$$\boxed{P_A > \frac{12 \mu v_1 L}{h^2}} \longleftarrow$$ Valor mínimo para P_A

$$\tau(h) = \frac{-P_A h}{4L} + \frac{\mu v_1}{h}.$$

$$|F| = |\tau(h)| L = \left| \frac{-P_A h}{4\cancel{L}}\cancel{L} + \frac{\mu v_1}{h} L \right| = \left| \frac{-P_A h}{4} + \frac{\mu v_1 L}{h} \right|.$$

Con la condición para P_A

$$|F| = \left| \frac{-12\mu v_1 L}{h^2} \frac{\cancel{h}}{4} + \frac{\mu v_1 L}{h} \right| = \left| \frac{\mu v_1 L}{h}(-3+1) \right| = \left| -2 \cdot \frac{\mu v_1 L}{h} \right|$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{del fluido sobre la placa}} = 2\frac{\mu v_1 L}{h} \vec{i}}$$

CUESTIÓN 3

a) $C_c = \dfrac{C_D}{C_v}$

$$C_D = \frac{Q_r}{Q_t} = \frac{0'844 \cdot 10^{-3}/30}{\pi \cdot 0'002^2\sqrt{2 \cdot 9'81 \cdot 0'4}} = \frac{2'81 \cdot 10^{-5}}{3'52 \cdot 10^{-5}} = 0'798$$

$C_v = \dfrac{V_r}{\sqrt{2gh}} = \dfrac{V_r}{\sqrt{2 \cdot 9'81 \cdot 0'4}}$; la v_r se conocerá mediante la parábola del vaciado

$$y = ax^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{1}{V_r^2} \cdot x^2 \quad \left| \begin{array}{l} y = 1'13 \cdot 10^{-2}\,m \\ x = 12 \cdot 10^{-2}\,m \end{array} \right\} a = \frac{0'0113}{0'12^2} = 0'7847$$

Así pues:

$$\frac{1}{2}9'81 \cdot \frac{1}{V_r^2} = 0'7847 \Rightarrow V_r = 2'5\,m/s$$

$$C_v = \frac{2'5}{\sqrt{2 \cdot 9'81 \cdot 0'4}} = 0'892$$

Por tanto: $C_c = \dfrac{0'798}{0'892} = \underline{\underline{0'894 = C_c}}$

b) La ecuación del vaciado es:

$$A_d \cdot \frac{dz}{dt} = -C_D A_0 \sqrt{2g}\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{C_D A_0}{A_d}\sqrt{2g}\,dt \Rightarrow \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{C_D A_0}{A_d}\sqrt{2g}\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt$$

Esto es:

$$2\sqrt{z}\Big|_{z_i}^{z_{i+1}} = -\frac{C_D A_0}{A_d}\sqrt{2g}\,t\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = \frac{-C_D A_0\sqrt{2g}}{A_d}\Delta t$$

O bien

$$\sqrt{z_{i+1}} - \sqrt{z_i} = \frac{-C_D A_0\sqrt{2g}}{2A_d}\Delta t \Rightarrow z_{i+1} = \left(\sqrt{z_i} - \frac{C_D A_0\sqrt{2g}}{2A_d}\Delta t\right)^2$$

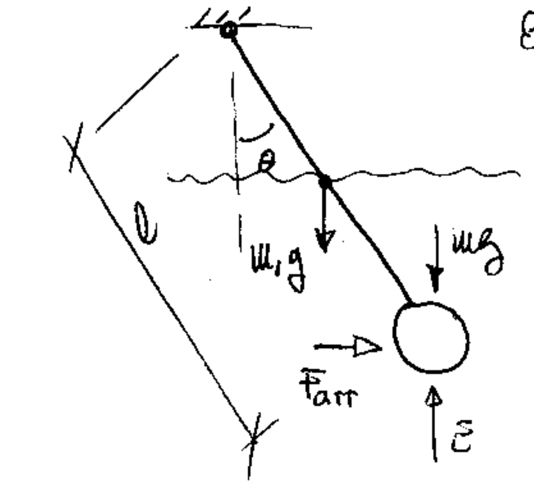
En dos pasos de tiempo de 5 s:

$$z_0 = 0'4\,m$$

$$z_1 = \left(\sqrt{0'4} - \frac{0'798 \cdot \pi \cdot 0'002^2\sqrt{2g} \cdot 5}{2 \cdot 0'3^2}\right)^2 = 0'3984\,m$$

$$z_2 = \left(\sqrt{0'3984} - \frac{0'798 \cdot \pi \cdot 0'002^2\sqrt{2g} \cdot 5}{2 \cdot 0'3^2}\right) = \underline{\underline{0'3968\,m = z_{10s}}}$$

MF2 (Junio 02) $\boxed{\text{CUESTIÓN 4}}$



Equilibrio de momentos:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 A C_D \cancel{l} \cos\theta + E \cancel{l} \sin\theta =$$

$$= mg \cancel{l} \sin\theta + m_1 g \frac{\cancel{l}}{2} \sin\theta$$

$$E = \gamma \cdot \forall \quad \text{con } \forall = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1'131 \cdot 10^{-7}\, m^3$$

$m = 1'2 \cdot 10^3 \cdot \forall = 1'3572 \cdot 10^{-4}$ Kg $\qquad E = 850 \cdot g \cdot \forall = 9'431 \cdot 10^{-4}$

$m_1 = 0'015$ Kg $\qquad r = 0'003$ m

$V = 1\, m/s$

$\rho = 850\, Kg/m^3$

$$C_D = \frac{mg\sin\theta + m_1 g \frac{\sin\theta}{2} - E\sin\theta}{\frac{1}{2}\rho V^2 \text{[redacted]} \pi r^2 \cos\theta} = \frac{(m + m_1/2)g - E}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi r^2} \operatorname{tg}\theta =$$

$$= \frac{(1'3572 \cdot 10^{-4} + 0'015/2) \cdot 9'81 - 9'431 \cdot 10^{-4}}{\frac{1}{2} 850 \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 0'003^2} \operatorname{tg}(10^\circ) = 1'085$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \rightarrow Re = \frac{24}{C_D} = \frac{24}{1'085} = 22'12 \quad \text{fuera de la zona}$$

$$C_D = \boxed{\frac{24}{Re}(1 + 0'15\, Re^{0'687}) = 1'085} \qquad \frac{24}{1'085}(1 + 0'15\, Re^{0'687}) = Re'$$

Re	Re'
20	48'1
48'1	69'6
69'6	83'3
83'3	91'36
91'36	95'9
98'4	99'76
99'76	100'5
100'5	100'9

$$Re \simeq 101 \rightarrow \frac{V \cdot D}{\nu} = 101 \rightarrow \nu = \frac{V \cdot D}{101} = \frac{1 \cdot 0'006}{101} =$$

$$= 5'94 \cdot 10^{-5}\, m^2/seg =$$

$$= 59'4 \text{ cSt}$$

CUESTIÓN 5

(a) $$\left.\begin{aligned} Q_F + Q_c &= Q \\ Q_F \cdot T_F + Q_c \cdot T_c &= Q \cdot T \end{aligned}\right\} \qquad Q_c = \frac{T - T_F}{T_c - T_F} \cdot Q$$

$$Q_c = \frac{33-15}{60-15} \cdot 0{,}12 = \boxed{0{,}048 \ \ell/s}$$

$$Q_F = 0{,}12 - 0{,}048 = \boxed{0{,}072 \ \ell/s}$$

(b) Manteniendo $Q_F = cte$ y $Q_c = cte$

Cuando la temperatura en la mezcla sea 28 °C, la temperatura del agua caliente en el acumulador será:

$$T_c = \frac{Q \cdot T - Q_F \cdot T_F}{Q_c} = \frac{0{,}12 \cdot 28 - 0{,}072 \cdot 15}{0{,}048} = \boxed{47{,}5 \ °C}$$

(c) La ecuación de la energía aplicada al termoacumulador queda:

$$P_{cal.} = \rho \cdot \forall \cdot C_e \cdot \frac{dT_c(t)}{dt} + \rho \cdot Q_c \cdot C_e \cdot \left[T_c(t) - T_F\right]$$

Sustituyendo valores:

$$1500 = 1000 \cdot \forall \cdot 4180 \cdot \frac{dT_c}{dt} + 1000 \cdot 0{,}048 \cdot 10^{-3} \cdot 4180 \cdot (T_c - 15)$$

$$1500 = 4180000 \cdot \forall \cdot \frac{dT_c}{dt} + 200{,}64 \cdot T_c - 3009{,}6$$

$$\int_{60}^{47{,}5} \frac{4180000 \cdot \forall}{4509{,}6 - 200{,}64 \cdot T_c} \, dT_c = \int_0^{600} dt$$

$$-\frac{4180000 \cdot \forall}{200{,}64} \cdot \ln \frac{4509{,}6 - 200{,}64 \cdot 47{,}5}{4509{,}6 - 200{,}64 \cdot 60} = 600$$

$$\forall = 0{,}0711 \ m^3 = \boxed{71{,}1 \ \text{litros}}$$

Resolución con letras:

$$P_{cal.} = \rho \cdot \forall \cdot C_e \cdot \frac{dT_c(t)}{dt} + \rho \cdot Q_c \cdot C_e \cdot \left[T_c(t) - T_F\right]$$

$$\rho \cdot \forall \cdot C_e \cdot \frac{dT_c(t)}{dt} = P_{cal} + \rho \cdot Q_c \cdot C_e \cdot \left[T_F - T_c(t)\right]$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\rho \cdot \forall \cdot C_e}{P_{cal.} + \rho \cdot Q_c \cdot C_e \left[T_F - T_c(t)\right]} \cdot dT_c = \int_0^t dt$$

$$-\frac{\rho \cdot \forall \cdot C_e}{\rho \cdot Q_c \cdot C_e} \cdot \ln \frac{P_{cal} + \rho Q_c C_e (T_F - T_2)}{P_{cal.} + \rho Q_c C_e (T_F - T_1)} = t$$

$$\boxed{\forall = \frac{t \cdot Q_c}{\ln \dfrac{P_{cal.} + \rho Q_c C_e (T_F - T_1)}{P_{cal.} + \rho Q_c C_e (T_F - T_2)}}}$$

Sustituyendo valores:

$$\forall = \frac{600 \cdot 0{,}000048}{\ln \dfrac{1500 + 1000 \cdot 0{,}000048 \cdot 4180 (15 - 60)}{1500 + 1000 \cdot 0{,}000048 \cdot 4180 (15 - 47{,}5)}} = 0{,}0711 \ m^3$$

Cuestión 6

a) La integración de la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente conduce a:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \quad ,$$

admitiendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ al suponer que estamos en régimen turbulento, despreciando las cotas y las pérdidas.

$$\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} = V_2^2 - V_1^2$$

Como la velocidad se relaciona con el gasto másico G mediante la expresión:

$$V = \frac{4G}{\pi D^2 \rho} \quad , \text{ entonces:}$$

$$\frac{2(P_1-P_2)}{\rho} = \frac{16G^2}{\pi^2\rho^2}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) \rightarrow \frac{2(P_1-P_2)}{\rho} = \frac{16G^2}{\pi^2\rho^2}\left(\frac{16}{D^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

$$\frac{2(P_1-P_2)}{\rho} = \frac{16G^2}{\pi^2 D^4 \rho^2}\,15$$

$$\boxed{G = \frac{\pi D^2}{4}\cdot\rho\cdot\sqrt{\frac{2}{15}\frac{(P_1-P_2)}{\rho}}}$$

b) En el caso de flujo compresible isotermo la integración de la ecuación de Euler, despreciando cotas y pérdidas es:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dp}{\rho} + V\,dV = 0 \\ p^* = \rho R T \; ; \; \rho = \dfrac{p^*}{RT} \end{array}\right\} \; RT\,\frac{dp}{p} + V\,dV = 0 \; ; \; R_g T_0 \ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

Relacionando de nuevo la velocidad y el caudal másico:

$$V = \frac{4G}{\pi D^2 \rho}$$

se obtiene:

$$R_g T_0 \ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{16G^2}{\pi^2}\left(\frac{16}{\rho_2^2 D^4} - \frac{1}{\rho_1^4 D^4}\right) \rightarrow R_g T_0 \ln P_1/P_2 = \frac{16G^2}{\pi^2 D^4}\left(\frac{16}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\right)$$

$$R_g T_0 \ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{16G^2}{\pi^2 D^4}(R_g T_0)^2\left(\frac{16}{P_2^{*2}} - \frac{1}{P_1^2}\right)$$

$$\boxed{G = \frac{\pi D^2}{4}\cdot\frac{P_1^*\cdot P_2^*}{R_g T_0\sqrt{16 P_1^{*2} - P_2^{*2}}}\cdot\sqrt{R_g T_0 \ln P_1^*/P_2^*}}$$

Cuestión 1 (20%)

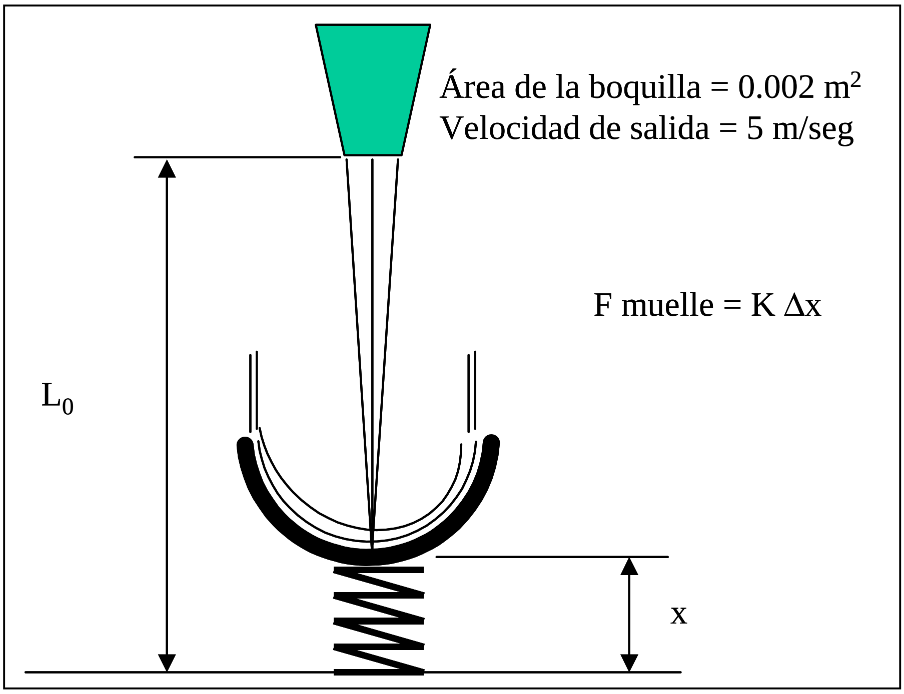
En la figura se muestra una boquilla situada a una distancia L_0 del suelo. La citada boquilla tiene una sección A_0 y la velocidad de salida es v_0.

En la parte inferior se encuentra una semiesfera sobre la que incide el chorro. La citada semiesfera se encuentra sobre un muelle de constante K y cuya longitud en reposo (sin ningún elemento sobre él) es x_0.

Determinar, sabiendo que el líquido es agua de densidad 1000 Kg/m^3 y que la masa de la cazoleta es 0,5 Kg, la longitud x del muelle en la posición de equilibrio.

Aplicación numérica:

$K = 1500$ N/m	$A_0 = 0{,}002$ m^2	$x_0 = 0{,}2$ m
$g = 9{,}81$ m/s^2	$v_0 = 5$ m/s	$L_0 = 2$ m

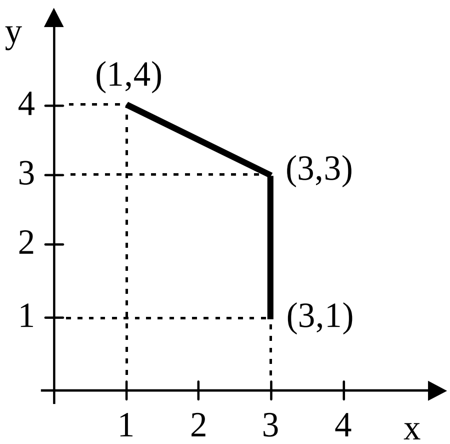


Cuestión 2 (20%)

Dado el siguiente campo de velocidades:

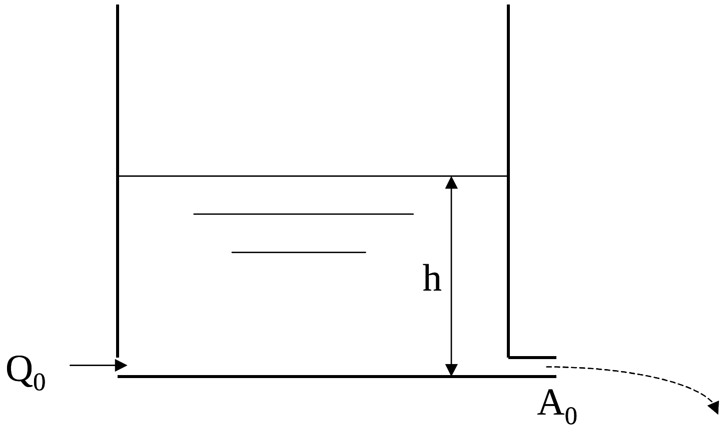
$$\vec{v} = \frac{5x}{t}\vec{i} - \frac{3y}{t}\vec{j} \quad \text{m/s}$$

y sabiendo que la densidad en el instante t = 2 segundos tiene un valor ρ = 13,5 Kg/m^3, calcular el caudal másico que atraviesa la superficie indicada en la figura adjunta en el instante t = 3 segundos. La superficie considerada comprende desde el punto (3,1) hasta el punto (1,4) y tiene una profundidad según el eje z de 1 metro.



Cuestión 3 (20%)

Un depósito como el de la figura, de sección recta 700 cm^2, se llena por un lado con un caudal Q_o a la vez que se vacía por un orificio de 9 mm^2 de sección situado en el fondo del depósito.
Tanto el caudal de entrada como el coeficiente de descarga del orificio de salida dependen de la cota a la que se encuentre el agua, según los valores dados en la siguiente tabla:



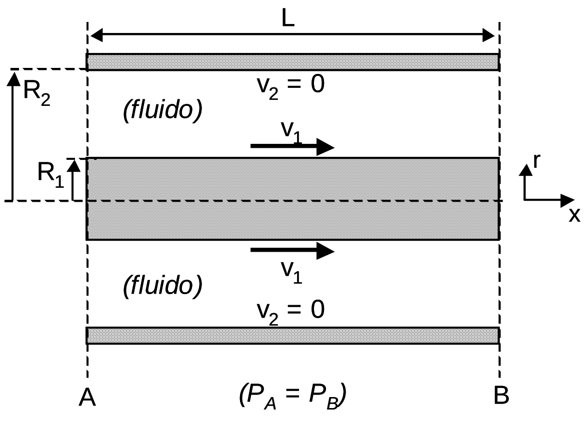
z (cm)	C_d	Q_o (l/s)
20 – 40	0,8	2
40,00001 - 60	0,6	4

¿Cuánto tiempo tardará en llenarse desde la cota 20 cm hasta 60 cm?

NOTA: $\int \frac{dx}{b - a\sqrt{x}} = -\frac{2\sqrt{x}}{a} - \frac{2b}{a^2}\ln\left(b - a\sqrt{x}\right)$

Cuestión 4 (20%)

Sean dos cilindros concéntricos en posición horizontal y un fluido (de viscosidad μ) circulante por el espacio anular entre los mismos.
El cilindro interior (radio R_1) se mueve hacia la derecha con una velocidad v_1, mientras que el cilindro exterior (radio R_2) permanece en reposo.
La presión en dos secciones determinadas, A y B, separadas por una longitud L se mantiene constante (esto es posible porque se cuenta para ello con medios exteriores).



Utilizando los ejes en coordenadas cilíndricas indicados en la figura, se pide:

(a) Calcular el campo de velocidades del fluido (módulo, dirección y sentido).
(b) Calcular la fuerza de rozamiento (módulo, dirección y sentido) que ejerce el cilindro exterior sobre el fluido situado entre las secciones A y B.
(c) Realizar el balance de fuerzas sobre el fluido situado entre las secciones A y B.

Cuestión 5 (20%)

Diseñar una tubería de polietileno para transportar 900 Nm^3/h de gas natural desde una estación de producción hasta un punto de consumo situado a una distancia de 500 metros, sabiendo que la presión a la salida de la estación de producción es de 8 bar (relativos) y las máximas pérdidas admisibles son 60 m.c.agua. Se admite que la temperatura de trabajo es constante en todo momento en la conducción.

(a) Determinar el diámetro necesario.
(b) Con el diámetro comercial seleccionado, determinar las condiciones del gas natural en el punto de consumo (presión y densidad).
(c) Calcular las diferencias derivadas de suponer el flujo como compresible o incompresible en la realización de los cálculos anteriores.

DATOS: Temperatura de trabajo = 35 ºC
Factor de fricción en tubos de polietileno = 0,025
Constante para el gas natural R_{gas} = 510 m^2/s^2·ºK
Condiciones normales = 20 ºC y 1 atm
Presión atmosférica = 1,013 bar (abs)

Tabla de diámetros comerciales:

Diámetro Nominal	40	50	63	90	110	125	140
Diámetro interior (mm)	32,7	40,9	51,5	73,6	90	102,2	114,6

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en una conducción circular:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente:

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos:

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} \right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r} \right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r \right) \right) \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A} \right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r} \right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r} \right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r \right) \right) \right) \rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r \right) d\forall + \int_{SC} \rho \left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r \right) \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A} \right)$$

Ecuación integral de la energía:

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall .C.} \left(u + gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho d\forall + \int_{S.C.} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right) \rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo laminar incompresible con simetría plana	Flujo laminar incompresible con simetría cilíndrica
Campo de velocidades:	Campo de velocidades:
$u(y) = \dfrac{\left(\dfrac{\partial p}{\partial x} - \gamma sen\theta \right)}{\mu} \dfrac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$	$u(r) = \dfrac{1}{4\mu} \left(\dfrac{\partial p}{\partial x} + \gamma sen\theta \right) r^2 + \dfrac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$
Ley de Newton de la viscosidad:	Ley de Newton de la viscosidad:
$\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$	$\tau = \mu \dfrac{du}{dr}$
Función disipación:	Función disipación:
$\Phi = \mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} \right)^2$	$\Phi = \mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial r} \right)^2$

Expresión de la fuerza de arrastre de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_R = \frac{1}{2} C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresión de la fuerza de sustentación de un cuerpo en el seno de un fluido:

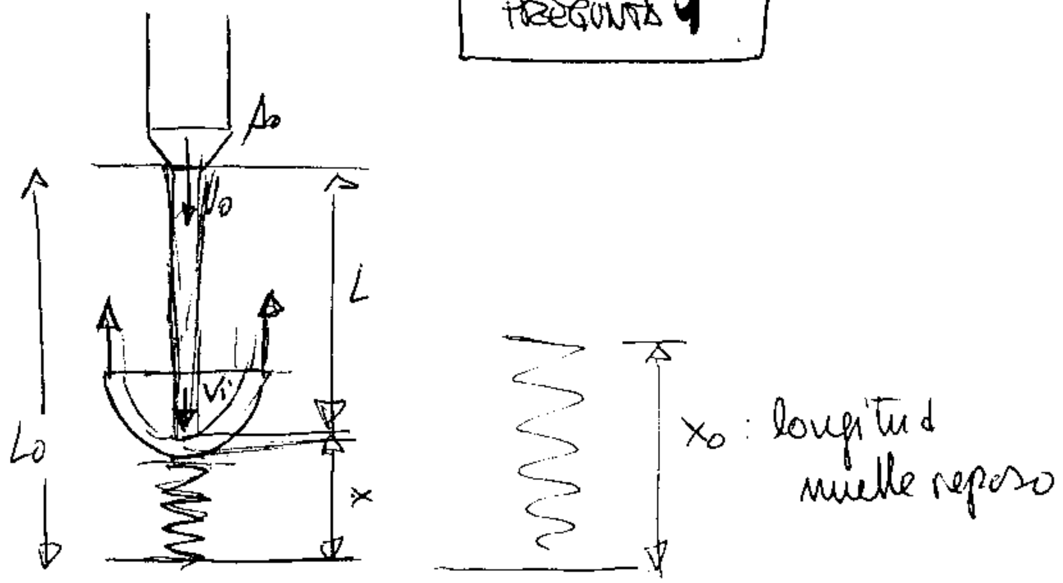
$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresiones del coeficiente de arrastre para partículas esféricas:

- Región a) Re < 1: $C_D = \dfrac{24}{\mathrm{Re}}$
- Región b) 1 < Re < 1000: $C_D = \dfrac{24}{\mathrm{Re}} \left(1 + 0{,}15\, \mathrm{Re}^{0{,}687} \right)$
- Región c) 1000 < Re < 200000: $C_D = 0{,}44$
- Región d) Re > 200000: $C_D = 0{,}1$

PREGUNTA 4

(1)



Bernoulli $\frac{V_0^2}{2g} + L_0 = \frac{V_i^2}{2g} + x \quad (1)$

$$-mg\bar{j} + F_{muelle}\bar{j} = \int_{SC} \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot d\bar{A}) = \rho Q(\bar{V}_s - \bar{V}_e) =$$

$$= \rho Q(V_i \vec{j} - (-V_i \vec{j})) = 2\rho Q V_i \vec{j}$$

$$-mg + F_M = 2\rho Q V_i \quad (2) \qquad Q = V_0 A_0$$

$$F_M = K(x_0 - x) \quad (3)$$

Combinamos 2 y 3 $\boxed{K(x_0 - x) = 2\rho Q V_i + mg}$ (4)

$\boxed{V_0^2 + 2gL_0 = V_i^2 + 2gx}$ (1) incógnitas V_i, x

De (4) $x = x_0 - \frac{1}{K}(2\rho Q v_i + mg)$ (2)

Sustituyendo en (1)

$$v_0^2 + 2gL_0 = v_i^2 + 2g x_0 - \frac{2g}{K}(2\rho Q v_i + mg)$$

$$v_i^2 - \frac{4g\rho Q}{K} v_i + \left(2g x_0 - \frac{mg\,2g}{K} - 2g L_0 - v_0^2\right)$$

$$v_i = \frac{4g\rho Q/K \pm \sqrt{\left(\frac{4g\rho Q}{K}\right)^2 - 4\cdot\left(2g x_0 - \frac{mg\,2g}{K} - 2gL_0 - v_0^2\right)}}{2}$$

Sustituyendo: $K = 1500\ N/m$; $g = 9'81\ m/s^2$; $\rho = 10^3\ Kg/m^3$;

$Q = S_0 \cdot v_0 = 0'002\ m^2 \cdot 5\ m/s = 0'01\ m^3/s$; $x_0 = 0'2\ m$; $L_0 = 2\ m$;

$v_0 = 5\ m/s$; $m = 0'5\ Kg$

$$\underline{\underline{v_i}} = \frac{\frac{4\cdot10^3\cdot9'81\cdot0'01}{1500} \pm \sqrt{\left(\frac{4\cdot10^3\cdot9'81\cdot0'01}{1500}\right)^2 - 4\left(2\cdot9'81\cdot0'2 - \frac{0'5\cdot9'81^2\cdot2}{1500} - 2\cdot9'81\cdot2 - 5^2\right)}}{2} =$$

$$= \frac{0'2616 \pm 15'54}{2} = (+)\ \underline{\underline{7'9008\ m/s}}$$

$$\underline{\underline{x}} = 0'2 - \frac{1}{1500}\left(2\cdot10^3\cdot0'01\cdot7'9008 + 0'5\cdot9'81\right) = \underline{\underline{0'09139\ m}}$$

CUESTIÓN 2

DENSIDAD

En primer lugar, vamos a determinar la expresión de la densidad ρ(t) a partir de la ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0$$

Calculamos la divergencia del campo de velocidades:

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{5}{t} - \frac{3}{t} = \frac{2}{t}$$

Y sustituyendo en la ecuación diferencial de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{2}{t} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2dt}{t}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\int \frac{2dt}{t}$$

$$\ln \rho = -2 \ln t + \ln K$$

$$\rho = \frac{K}{t^2}$$

Como en el instante t = 2 segundos la densidad tiene un valor ρ = 13,5 Kg/m^3:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 2 \text{ s} \\ \rho = 13{,}5 \text{ Kg/m}^3 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad 13{,}5 = \frac{K}{4} \quad \rightarrow \quad K = 54$$

$$\rho(t) = \frac{54}{t^2} \text{ Kg/m}^3$$

CAUDAL VOLUMÉTRICO

Calculamos ahora el caudal volumétrico:

$$Q(t) = \int_{\text{sup}} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{sup 1}} \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{sup 2}} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 1}\\ x=3\end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad dA = dy$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=\dfrac{5x}{t}\,\vec{i}-\dfrac{3y}{t}\,\vec{j}=\dfrac{15}{t}\,\vec{i}-\dfrac{3y}{t}\,\vec{j}\\ d\vec{A}=\vec{i}\,dy\end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad \left(\vec{v}\cdot d\vec{A}\right)_{\sup 1}=\frac{15}{t}\,dy$$

$$Q_1(t)=\int_{\sup 1}\vec{v}\cdot d\vec{A}=\int_1^3\frac{15}{t}\,dy=\left[\frac{15y}{t}\right]_1^3=\frac{30}{t}\quad \text{m}^3/\text{s}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 2}\\ x+2y=9\end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad dx=-2dy \quad\rightarrow\quad dA=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{5}dy$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=\dfrac{5x}{t}\,\vec{i}-\dfrac{3y}{t}\,\vec{j}=\dfrac{45-10y}{t}\,\vec{i}-\dfrac{3y}{t}\,\vec{j}\\ d\vec{A}=\dfrac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{5}}\,dA=\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)dy\end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad \left(\vec{v}\cdot d\vec{A}\right)_{\sup 2}=\frac{45-16y}{t}\,dy$$

$$Q_2(t)=\int_{\sup 2}\vec{v}\cdot d\vec{A}=\int_3^4\frac{45-16y}{t}\,dy=\left[\frac{45y-8y^2}{t}\right]_3^4=-\frac{11}{t}\quad \text{m}^3/\text{s}$$

De manera que el caudal total será:

$$Q(t)=Q_1(t)+Q_2(t)=\frac{30}{t}-\frac{11}{t}=\frac{19}{t}\quad \text{m}^3/\text{s}$$

CAUDAL MÁSICO

Así pues, ya podemos determinar el caudal másico:

$$G(t)=\rho(t)\cdot Q(t)=\frac{54}{t^2}\cdot\frac{19}{t}=\frac{1026}{t^3}\quad \text{Kg/s}$$

Y en el instante t = 3 segundos:

$$G_{(t=3)}=\frac{1026}{27}=38\quad \text{Kg/s}$$

CUESTION 3

Se trata del llenado y vaciado de un depósito, por lo que la ecuación resultante es:

$$Q_0 - C_D S_0 \sqrt{2gz} = S \cdot \frac{dz}{dt}$$

Que en variables separadas resulta:

$$dt = \frac{A\, dz}{Q_0 - C_D S_0 \sqrt{2gz}}$$

En este caso deberá ser resuelta en dos intervalos para las cotas, puesto que C_D y Q_0 son variables.

Así: $t_0 = 0$ $t_1 = t_1$ $z_0 = 0'2\,m$ $z_1 = 0'4\,m$.

$$t_1 - t_0 = \left[-\frac{2S}{C_D S_0 \sqrt{2g}} \sqrt{h} - \frac{2 S Q_0}{C_D^2 S_0^2 2g} \ln\left(Q_0 - C_D S_0 \sqrt{2g} \sqrt{h}\right) \right]_{z_1}^{z_2}$$

lo que resulta en:

$$t_1 = \left(-\frac{2 \cdot 0'07 (\sqrt{0'4} - \sqrt{0'2})}{0'8 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{2g}} - \frac{2 \cdot 0'07 \cdot 0'002}{0'8^2 (9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2 \cdot g} \ln\left(\frac{0'002 - 0'8 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \sqrt{2g} \sqrt{0'4}}{0'002 - 0'8 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \sqrt{2g} \sqrt{0'2}} \right.\right.$$

$$t_1 = 7'05\ s$$

El segundo intervalo de tiempo, análogamente:

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \left(-\frac{2 \cdot 0'07 (\sqrt{0'6} - \sqrt{0'4})}{0'6 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \sqrt{2g}} - \frac{2 \cdot 0'07 \cdot 0'002}{0'6^2 (9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2g} \ln\left(\frac{0'004 - 0'6 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \sqrt{2g} \sqrt{0'6}}{0'004 - 0'6 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \sqrt{2g} \sqrt{0'4}} \right.\right.$$

$$\Delta t_2 = 3'516\ s.$$

$$t_2 = 7'05 + 3'516 = 10'56\ s.$$

CUESTION 4

a) Ec. gral: $u(r) = \frac{\gamma (H_g - H_0)}{L \cancel{\mu}} \frac{r^2}{4} + \frac{A}{\cancel{\mu}} \ln r + B$.

Como $z_A = z_B$, $P_A = P_B \longrightarrow H_A = H_B \rightarrow u(r) = \frac{A}{\cancel{\mu}} \ln r + B$

Cond. Contorno: $\left| \begin{array}{l} u(R_1) = v_1 \longrightarrow v_1 = \frac{A}{\mu} \ln R_1 + B \\ u(R_2) = 0 \longrightarrow 0 = \frac{A}{\mu} \ln R_2 + B \longrightarrow B = \frac{-A}{\mu} \ln R_2 \end{array} \right|$

$v_1 = \frac{A}{\mu} \ln R_1 - \frac{A}{\mu} \ln R_2 = \frac{A}{\mu} \ln \frac{R_1}{R_2} \longrightarrow A = \frac{\mu \cdot v_1}{\ln R_1/R_2}$

$\longrightarrow u(r) = \frac{1}{\cancel{\mu}} \frac{\cancel{\mu} \cdot v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \ln r - \frac{1}{\cancel{\mu}} \frac{\cancel{\mu} \cdot v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \ln R_2$

$\longrightarrow \boxed{u(r) = \frac{v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \ln \frac{r}{R_2} \longrightarrow \vec{u}(r) = u(r) \cdot \vec{\imath}.}$

b) $\tau(r) = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \frac{\cancel{R_2}}{r} \cdot \frac{1}{\cancel{R_2}} = \frac{\mu \cdot v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \frac{1}{r}$.

$\tau(R_2) = \frac{\mu \cdot v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \frac{1}{R_2}$.

$|F_{roz}| = |\tau(R_2)| \cdot 2\pi R_2 \cdot L = \left| \frac{\mu \cdot v_1}{\ln R_1/R_2} \cdot \frac{1}{\cancel{R_2}} \right| \cdot 2\pi \cancel{R_2} L = \frac{2\pi \mu \cdot v_1 \cdot L}{|\ln R_1/R_2|}$

$\vec{F}_{roz} = (-1) |F_{roz}| \vec{\imath}$.

c) Horizontal $\longrightarrow$ gravedad no influye

$\Delta P = 0 \longrightarrow$ No hay fuerzas de presión

Sólo hay fuerzas superficiales: F_1 y $F_2 = F_{ROZ}$.

$$|F_1| = |\tau(R_1)| \cdot 2\pi R_1 \cdot L = \frac{\mu \cdot v_1}{|\ln R_1/R_2|} \frac{1}{\cancel{R_1}} \cdot 2\pi \cancel{R_1} \cdot L = \frac{\mu \cdot v_1 \, 2\pi L}{|\ln R_1/R_2|}.$$

$$\vec{F_1} = |F_1| \, \vec{\iota}.$$

De b) se comprueba $\left\{ \begin{array}{l} |F_1| = |F_{ROZ}| \\ \text{Sentidos opuestos} \end{array} \right\}$.

Cuestión 5.

La expresión del flujo compresible isotermo es:

$$p_2^{*2} = p_1^{*2} - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL \longrightarrow D = \left[\frac{16 f G^2}{\pi^2 (p_1^{*2} - p_2^{*2})} RTL\right]^{0'2}$$

y para flujo incompresible:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{8 f L}{\pi^2 D^5 g} Q^2 \longrightarrow D = \left[\frac{8 f G^2}{\pi^2 (p_1 - p_2)\, p^*} RTL\right]^{0'2}$$

La diferencia de presiones es:

$$p_1 = 8 \text{ bar} = 8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta p = 60 \text{ m.c.a} = 60 \cdot 9810 = 5'886 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 5'886 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 8 \cdot 10^5 - 5'886 \cdot 10^5 = 2'114 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2'114 \text{ bar.}$$

El caudal másico es:

$$G = 900 \text{ N m}^3/h = \rho \cdot Q \quad \begin{cases} \rho_N = \dfrac{p^*}{RT} = \dfrac{1'013 \cdot 10^5}{510 \cdot 293} = 0'678 \text{ Kg/m}^3 \\ Q = 900 \text{ m}^3/h = 0'25 \text{ m}^3/s \end{cases}$$

$$\boxed{G = 0'678 \cdot 0'25 = 0'1695 \text{ Kg/seg.}}$$

Dada la diferencia de presiones entre la entrada y salida del conducto, y consecuentemente de densidades, el flujo debe considerarse como compresible.
El diámetro necesario será:

$$D = \left(\frac{16 f G^2}{\pi^2 (p_1^{*2} - p_2^{*2})} RTL\right)^{0'2} = \left[\frac{16 \cdot 0'025 \cdot 0'1695^2}{\pi^2 \left[((8 + 1'013) \cdot 10^5)^2 - ((2'114 + 1'013) \cdot 10^5)^2\right]} \cdot 510 \cdot 308 \cdot 500\right]^{0'2}$$

$$D_{min} = 0'0418 \text{ m} = 41'8 \text{ mm}$$

Luego debe ~~calcularse~~ instalarse el diámetro: $\boxed{\text{DN } 63 \qquad D_{int} = 51'5 \text{ mm.}}$

La presión en el punto de consumo es:

$$p_2^{*2} = p_1^{*2} - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL = (9'013 \cdot 10^5)^2 - \frac{16 \cdot 0'025 \cdot 0'1695^2}{\pi^2 \cdot 0'0515^5} 510 \cdot 308 \cdot 500$$

$$\rightarrow p_2^* = 7'483 \cdot 10^5 \text{ Pa} \rightarrow \boxed{p_2 = 6'47 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 6'47 \text{ bar.}}$$

y la densidad en ese punto:

$$\rho_2 = \frac{p_2^*}{RT} = \frac{7'483 \cdot 10^5}{308 \cdot 510} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = 4'76 \text{ Kg/m}^3}$$

En el caso de hacer el cálculo del diámetro como flujo incompresible; el diámetro mínimo necesario sería:

$$D = \left(\frac{8 f G^2}{\pi^2 (p_1 - p_2) p^*} RTL \right)^{0'2}$$

Se admite que p^* (aunque varía) es la presión a la entrada del conducto, lo que supone que se considera constante la densidad e igual al valor a la entrada del conducto.

$$D_{min} = \left(\frac{8 \cdot 0'025 \cdot 0'1625^2}{\pi^2 (5'896 \cdot 10^5) \cdot 9'013 \cdot 10^5} 510 \cdot 308 \cdot 500 \right)^{0'2}$$

$$D_{min} = 0'0386\,m = 38'6\,mm \rightarrow \boxed{DN\ 50 \quad D_{int} = 40'9\,mm}$$

Con este diámetro la presión en el punto de consumo es:

$$p_2 = p_1 - \frac{8 f G^2}{\pi^2 D^5 p^*} RTL = 8 \cdot 10^5 - \frac{8 \cdot 0'025 \cdot 0'1625^2}{\pi^2 \cdot 0'0409^5 \cdot 9'013 \cdot 10^5} \cdot 510 \cdot 308 \cdot 500$$

$$\boxed{p_2 = 3'926 \cdot 10^5\,Pa = 3'926\ bar}$$

y la densidad:

$$\rho_2 = \frac{p_2^*}{RT} = \frac{4'939 \cdot 10^5}{510 \cdot 308} \rightarrow \boxed{\rho_2 = 3'14\ Kg/m^3}$$

NOTA: Si el diámetro escogido fuese DN 63 $D_{int} = 51'5\,mm$, los valores de p_2 y ρ_2 calculados como flujo incompresible serían:

$$p_2 = 8 \cdot 10^5 - \frac{8 \cdot 0'025 \cdot 0'1625^2}{\pi^2 \cdot 0'0515^5 \cdot 9'013 \cdot 10^5} \cdot 510 \cdot 308 \cdot 500 \rightarrow \boxed{p_2 = 6'6 \cdot 10^5\,Pa = 6'6\ bar}$$

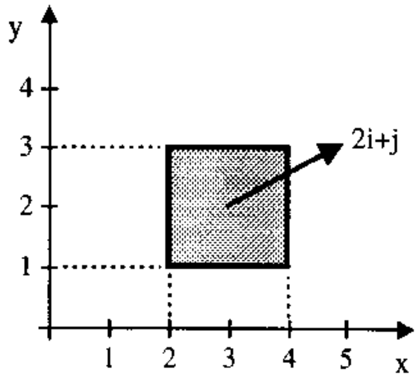
$$\rho_2 = \frac{p_2^*}{RT} = \frac{7'613 \cdot 10^5\,Pa}{510 \cdot 308} \rightarrow \boxed{\rho_2 = 4'85\ Kg/m^3}$$

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

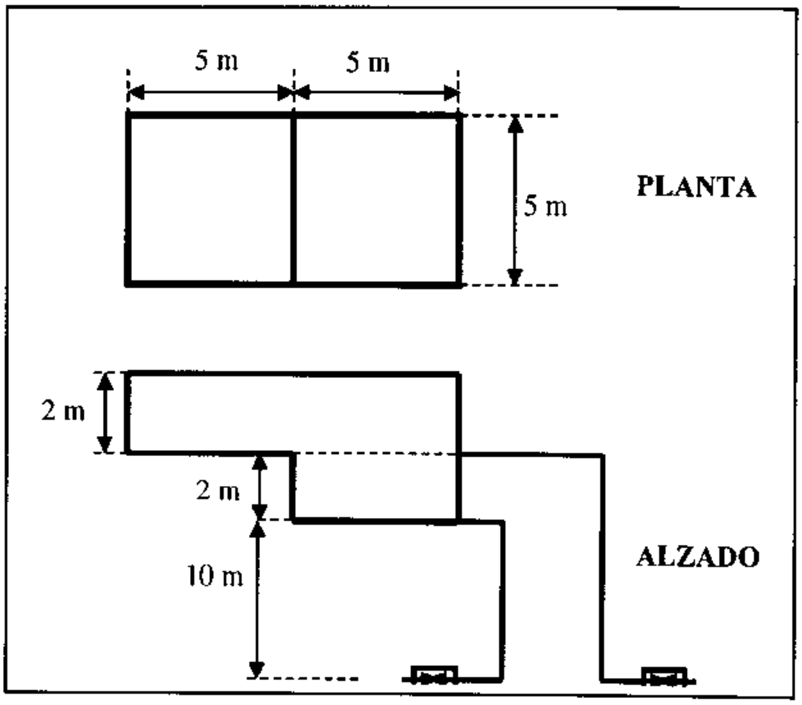
CUESTION 1

Dado el siguiente campo de velocidades $\begin{Bmatrix} u = xt \\ v = yt \end{Bmatrix}$ y siendo la densidad $\rho(t) = \rho_0 e^{-t^2}$, comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa (ecuación de continuidad) para el volumen de control de la figura, el cual se mueve todo él con una velocidad $2\vec{i} + \vec{j}$.



CUESTION 2

El depósito de la figura descarga a través de dos conducciones que parten de diferente nivel y descargan a la misma cota. Partiendo de que el depósito se encuentra totalmente lleno y las válvulas instaladas en la parte final de las tuberías cerradas, se abren éstas de manera simultánea en el instante 0. Determinar la altura de lámina de agua sobre la solera del depósito cuando hayan transcurrido 15 minutos desde el momento de la apertura.



NOTAS:

Las dimensiones del depósito se adjuntan en la figura.

Se desprecian las pérdidas por fricción en las conducciones, pero no así las pérdidas menores en las válvulas. Se considera un coeficiente de descarga 0.6 para ambas.

La sección de las conducciones y las válvulas es de 0.01 m^2.

Tomar la aceleración de la gravedad como $g = 10$ m/s^2.

CUESTION 3

Diseñar una tubería de polietileno para transportar 900 Nm^3/h de gas natural desde una estación de regulación y medida (ERM) hasta un punto de consumo situado a una distancia de 675 metros, sabiendo que la presión a la salida de la ERM es de 4 bar (relativos) y las máximas pérdidas admisibles son 15 m.c.agua.

(a) Determinar el diámetro necesario considerando flujo compresible isotermo.

(b) Con el diámetro comercial seleccionado, determinar la densidad del gas natural en el punto de consumo.

(c) Determinar el diámetro necesario considerando flujo incompresible.

Datos: Temperatura de trabajo = 10 ºC

Factor de fricción en tubos de polietileno = 0.023

Constante para el gas natural R_{gas} = 519 $m^2/s^2\cdot$ºK

Condiciones normales = 20 ºC y 1 atm

Presión atmosférica = 1.013 bar (abs)

Diámetros comerciales:

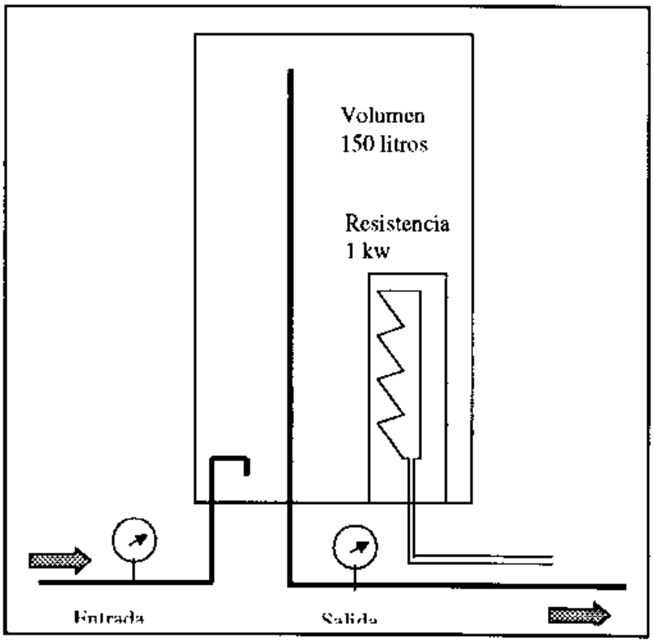
DN	20	32	40	50	63	90	110
D_{int} (mm)	16.4	26.2	32.7	40.9	51.5	73.6	90

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

CUESTION 4

Un termoacumulador de energía eléctrica tiene una resistencia calefactora del agua de potencia 1 kw. El acumulador está lleno de 150 litros de agua a 60ºC. En un momento dado se abre un punto de consumo, de manera que la resistencia calefactora se pone inmediatamente en marcha. La temperatura de entrada del agua al termo es de 15ºC constante, mientras que la temperatura de salida va disminuyendo de manera progresiva al entrar agua fría y no ser capaz la resistencia de mantener la temperatura en 60ºC. Suponiendo que el consumo de agua es constante, de valor 0.2 l/seg, **determinar la temperatura del agua en el termo al cabo de 5 minutos de consumo.**



Se conoce la presión del agua fría a la entrada del termo, de 2.5 Kp/cm^2, y a la salida del mismo, 1.5 Kp/cm^2, medidas ambas con sendos manómetros situados a la misma cota. Las secciones de las conducciones de entrada y salida al termo son iguales.

Se admite que la temperatura de salida del termo es igual a la temperatura del agua en el interior del mismo en cada instante y que dentro del termo no existe estratificación, de manera que se mezcla en cada momento toda el agua fría entrante con la contenida en su interior a una temperatura superior.

Datos: Calor especifico del agua $C_p = 1$ Kcal/kgºK

u = Energía interna por unidad de masa $= C_p \cdot T$

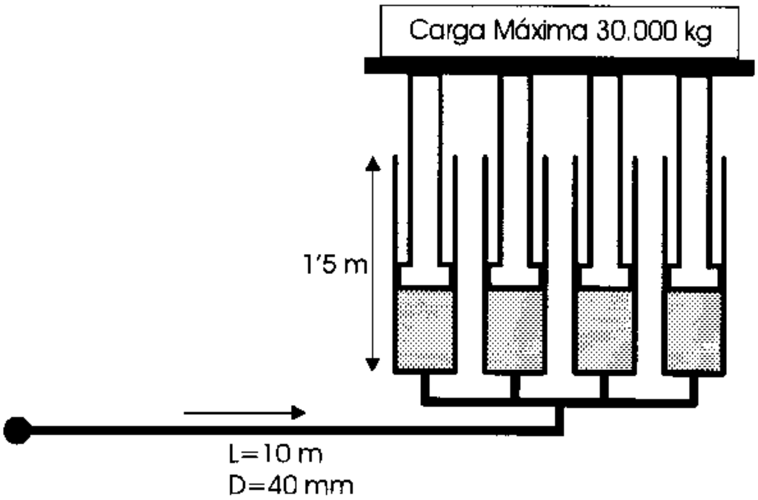
1 caloría = 4.18 Julios

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

CUESTION 5

Un elevador hidráulico de recorrido 1,5 m y carga máxima 30.000 kg se acciona mediante 4 cilindros hidráulicos de diámetro interior 15 cm cada uno de ellos. Los cuatro cilindros se alimentan de un conducto de 40 mm de diámetro interior y longitud 10 m, colocado de forma horizontal. Sabiendo que el tiempo que tarda en elevarse la carga es 1 minuto y que el desplazamiento es a velocidad constante, calcular la presión necesaria a la entrada del conducto.



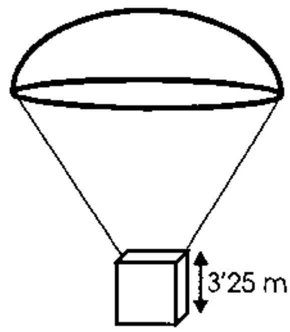
Nota:
- Despreciar los tramos de conducción entre el final del conducto principal y la entrada de cada uno de los cilindros.
- Admitir que el circuito dispone de un regulador de caudal de forma que el caudal permanece constante y manteniendo en todo momento la velocidad de desplazamiento del elevador.

Datos del fluido: Viscosidad cinemática $\nu=10^{-4}$ m^2/s; Densidad $\rho=850$ kg/m^3.

CUESTION 6

Una misión humanitaria lanza desde un avión, a un altura de 1000 metros, contenedores de alimentos de forma cúbica de lado 3'25 m. El peso de cada contenedor lleno es de 475 kg y el paracaídas acoplado al mismo 25 kg. Este paracaídas, que presenta un coeficiente de resistencia C_D=2'5 referido al área circular proyectada del mismo, se abre automáticamente a 200 metros del suelo.

Sabiendo que la velocidad con la que llega al suelo un contenedor al que le falla el paracaídas es 260 km/h, determinar:



a) Diámetro mínimo que debe tener el paracaídas para que la velocidad de impacto del contenedor con el suelo sea como máximo de 25 km/h.

b) Tiempo que tarda en caer el contenedor desde que se lanza del avión.

Notas:
- Se admite que el valor del coeficiente de resistencia tanto del contenedor como del paracaídas permanecen constantes independientemente del número de Reynolds.
- Se desprecian los efectos transitorios del contenedor en su caída hasta alcanzar la velocidad terminal y se admite que la geometría del contenedor con el paracaídas abierto o cerrado es cúbica y no varía en ningún momento.
- Se supone que la evaluación de la resistencia de cada uno de los cuerpos (contenedor y paracaídas) puede realizarse por separado, despreciando la influencia de uno sobre el otro.

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Expresión del número de Reynolds

$$\mathrm{Re}=\frac{VD}{\nu}=\frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular

$$h_f=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente

$$\left(p_2^*\right)^2=\left(p_1^*\right)^2-\frac{16fG^2}{\pi^2D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos

$$p^*=\rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{F}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{M}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall+\int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\,d\forall+\int_{S.C.}\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo Laminar Incompresible con simetría Plana

Campo de Velocidades

$$u(y)=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo Laminar Incompresible con simetría Cilíndrica

Campo de Velocidades

$$u(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)r^2+C$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau=\mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Grupo Mecánica de Fluidos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)

2º INGENIERO INDUSTRIAL

MARTES 26 DE JUNIO DE 2001

Grupo Mecánica de Fluidos

Universidad Politécnica de Valencia

Expresión de la fuerza de arrastre de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_R = \frac{1}{2} C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresión de la fuerza de sustentación de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_L = \frac{1}{2} C_L \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresiones del coeficiente de arrastre de partículas esféricas:

- Región a. Re < 1: $C_D = \frac{24}{\text{Re}}$
- Región b. 1 < Re < 1000: $C_D = \frac{24}{\text{Re}}\left(1 + 0'15\,\text{Re}^{0'687}\right)$
- Región c. 1000 < Re < 200000: $C_D = 0'44$
- Región d. Re>200000: $C_D = 0'1$

CUESTIÓN 1

El Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall.C.} \rho \, d\forall + \int_{S.C.} \rho\left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)$$

se verifica para cualquier instante de tiempo. Vamos a comprobar el TAR para el instante representado en la figura.

El término extendido al volumen de control:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall.C.} \rho \, d\forall = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \forall) = \forall \cdot \frac{d\rho}{dt} = -8t\rho_0 e^{-t^2}$$

El término extendido a la superficie de control lo separamos en cuatro integrales:

$$\int_{S.C.} \rho\left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \int_{\text{sup }1} + \int_{\text{sup }2} + \int_{\text{sup }3} + \int_{\text{sup }4}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 1}\\ y=1\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = xt\,\vec{i} + t\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (xt-2)\vec{i} + (t-1)\vec{j}\\ d\vec{A} = -dx\,\vec{j}\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup }1} = -(t-1)dx$$

$$\int_{\text{sup }1} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_2^4 -(t-1)dx = -(t-1)\cdot 2 = 2-2t$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 2}\\ y=3\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = xt\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (xt-2)\vec{i} + (3t-1)\vec{j}\\ d\vec{A} = dx\,\vec{j}\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup }2} = (3t-1)dx$$

$$\int_{\text{sup }2} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_2^4 (3t-1)dx = (3t-1)\cdot 2 = 6t-2$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 3}\\ x=2\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = 2t\,\vec{i} + yt\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (2t-2)\vec{i} + (yt-1)\vec{j}\\ d\vec{A} = -dy\,\vec{i}\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup }3} = -(2t-2)dy$$

$$\int_{\sup 3} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_1^3 -(2t-2)dy = -(2t-2)\cdot 2 = 4-4t$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 4} \\ x=4\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = 4t\,\vec{i} + yt\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (4t-2)\vec{i} + (yt-1)\vec{j} \\ d\vec{A} = dy\,\vec{i}\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\sup 4} = (4t-2)dy$$

$$\int_{\sup 4} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_1^3 (4t-2)dy = (4t-2)\cdot 2 = 8t-4$$

Así pues, el término extendido a la superficie de control queda finalmente:

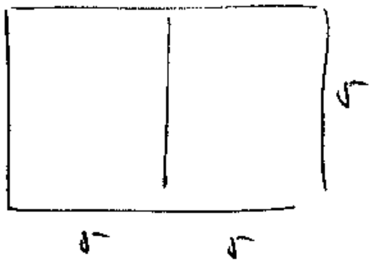
$$\int_{S.C.} \rho\left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \rho \int_{S.C.} \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \rho \cdot \left[\int_{\sup 1} + \int_{\sup 2} + \int_{\sup 3} + \int_{\sup 4}\right] =$$

$$= \rho_0 e^{-t^2} \cdot [2 - 2t + 6t - 2 + 4 - 4t + 8t - 4] = 8t\rho_0 e^{-t^2}$$

con lo que queda verificado el Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$0 = -8t\rho_0 e^{-t^2} + 8t\rho_0 e^{-t^2}$$

MF2 JUN01 Sc. CONT. ① **Pregunta 2**



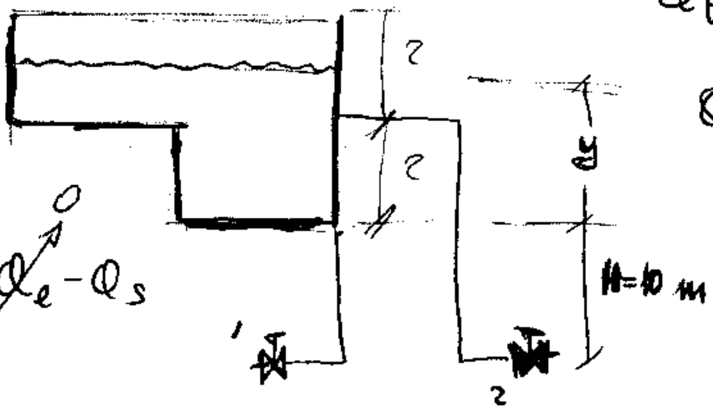
Velocidades teóricas

$V_1 = \sqrt{2g(y+H)}$ $V_2 = \sqrt{2g(y+h}$

solo si $y \geq 2$ m.

$Q_{teórico} = V_t \cdot A_0$

$Q_{real} = Q = C_D V_t A_0$



$\frac{dH}{dt} = \cancel{Q_e} - Q_s$ 0

$A \frac{dy}{dt}$

$Q_1 = C_D \cdot 0'01 \cdot \sqrt{2g(y+H)}$

$Q_2 = C_D \, 0'01 \, \sqrt{2g(y+H)}$

$Q_1 = C_D \, 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$; $Q_2 = C_D \, 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$

1ª FASE $Q_t = Q_1 + Q_2 = 2 C_D \, 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$ Área $= 50$ m²

$-50 \frac{dy}{dt} = 2 \cdot C_D \cdot 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$; $\int_4^2 \frac{dy}{\sqrt{y+10}} = -\frac{2 C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{50} \int_0^{t_1} dt$

$2\left(\sqrt{2+10} - \sqrt{4+10}\right) = -\frac{2 C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{50} t_1$

$\rightarrow t_1 = \frac{100(\sqrt{14} - \sqrt{12})}{2 C_D \sqrt{20} \cdot 0'01} = 517'2$ seg.

2ª FASE

$Q_t = Q_1 = C_D \cdot 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+10}$ Área $= 25$ m²

$-25 \frac{dy}{dt} = C_D \cdot 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+10} \rightarrow \int_2^y \frac{dy}{\sqrt{y+10}} = -\frac{C_D \sqrt{20} \, 0'01}{25} \int_0^{t_2} dt$

$2\left(\sqrt{y+10} - \sqrt{2+10}\right) = -\frac{C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{25} t_2$

$\sqrt{y+10} = -\frac{C_D \sqrt{20} \cdot 0'01 \cdot t_2}{50} + \sqrt{12} \rightarrow y = \left(\sqrt{12} - \frac{C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{50} t_2\right)^2 - 10$

$t_{TOTAL} = t_1 + t_2 = 517'2 + t_2 = 60 \cdot 15 = 900$ seg $\rightarrow t_2 = 382'8$ s

$\underline{\underline{y = 0'6189 \text{ m}}}$

CUESTIÓN 3

La densidad del gas natural en condiciones normales:

$$\left.\begin{array}{l} T = 20\,^{\circ}\mathrm{C} \\ \\ p^* = 1.013\ \mathrm{bar\ (abs)} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \rho_N = \frac{p^*}{RT} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{519 \cdot 293} = 0.666\ \mathrm{Kg/m^3}$$

Y la densidad a la salida de la ERM:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 10\,^{\circ}\mathrm{C} \\ \\ p_1^* = 5.013\ \mathrm{bar\ (abs)} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \rho_1 = \frac{p_1^*}{RT_1} = \frac{5.013 \cdot 10^5}{519 \cdot 283} = 3.413\ \mathrm{Kg/m^3}$$

El gasto másico de gas:

$$G = \rho_N \cdot Q_N = 0.666 \cdot 900 = 599.4\ \mathrm{Kg/h} = 0.1665\ \mathrm{Kg/s}$$

Y las pérdidas permitidas:

$$\Delta p = \gamma \cdot \Delta h = 9810 \cdot 15 = 147150\ \mathrm{Pa} = 1.4715\ \mathrm{bar}$$

a) Dimensionado de la tubería considerando flujo compresible

$$p_1^* = 5.013\ \mathrm{bar\ (abs)} = 501300\ \mathrm{Pa\ (abs)} \quad \rightarrow \quad p_2^* = 3.5415\ \mathrm{bar\ abs} = 354150\ \mathrm{Pa\ (abs)}$$

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Sustituyendo valores:

$$354150^2 = 501300^2 - \frac{16 \cdot 0.023 \cdot 0.1665^2}{\pi^2 \cdot D^5} \cdot 519 \cdot 283 \cdot 675$$

$$D_{teórico} = 0.06055\ \mathrm{m} = 60.55\ \mathrm{mm}$$

Seleccionando tubería de polietileno el diámetro comercial a colocar es:

$$\boxed{\mathrm{DN}\ 90 \quad \rightarrow \quad D_{\mathrm{int.}} = 73.6\ \mathrm{mm}}$$

b) Determinación de la densidad del gas en el punto de consumo

Colocando polietileno de diámetro nominal DN 90, la presión en el punto de consumo será:

$$\left(p_2^*\right)^2 = 501300^2 - \frac{16 \cdot 0.023 \cdot 0.1665^2}{\pi^2 \cdot 0.0736^5} \cdot 519 \cdot 283 \cdot 675$$

$$p_2^* = 451498\ \mathrm{Pa\ (abs)} = 4.515\ \mathrm{bar\ (abs)}$$

Y la densidad:

$$\left.\begin{array}{l} T_2 = 10\,°\mathrm{C} \\ \\ p_2^* = 451498\ \mathrm{Pa\ (abs)} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \frac{p_2^*}{RT_2} = \frac{451498}{519 \cdot 283} = 3.074\ \mathrm{Kg/m^3}$$

c) Dimensionado de la tubería considerando flujo incompresible

$$p_1^* = 5.013\ \mathrm{bar\ (abs)} = 501300\ \mathrm{Pa\ (abs)} \quad \rightarrow \quad p_2^* = 3.5415\ \mathrm{bar\ abs} = 354150\ \mathrm{Pa\ (abs)}$$

$$p_2 = p_1 - \frac{8fG^2L}{\pi^2 D^5 \rho}$$

Sustituyendo valores:

$$147150 = \frac{8 \cdot 0.023 \cdot 0.1665^2 \cdot 675}{\pi^2 \cdot D^5 \cdot 3.413}$$

$$D_{teórico} = 0.05866\ \mathrm{m} = 58.66\ \mathrm{mm}$$

Seleccionando tubería de polietileno el diámetro comercial a colocar es:

$$\boxed{\mathrm{DN\ 90} \quad \rightarrow \quad D_{\mathrm{int.}} = 73.6\ \mathrm{mm}}$$

Otra forma

El caudal volumétrico en las condiciones de trabajo es:

$$Q = \frac{G}{\rho} = \frac{0.1665}{3.413} = 0.04878\ \mathrm{m^3/s} = 175.6\ \mathrm{m^3/h}$$

Y las pérdidas:

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{8fQ^2L}{\pi^2 D^5 g}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{147150}{9.81 \cdot 3.413} = \frac{8 \cdot 0.023 \cdot 0.04878^2 \cdot 675}{\pi^2 \cdot D^5 \cdot 9.81}$$

$$D_{teórico} = 0.05866\ \mathrm{m} = 58.66\ \mathrm{mm}$$

MF2 JUN01 E. energía

Pregunta 4

$$\underset{1000\,W}{\frac{dC}{dt}} + \underset{0}{\cancel{\frac{dW_{eje}}{dt}}} = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\left(gz+u+\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \int_{sc} \rho\left(gz+u+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

$\forall c$ Solo varía $u = C_pT$ con el tiempo

T cte en $\forall c$ (aunque varía con t)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\forall c} = \rho\cdot C_p\frac{d}{dt}\int T\,d\forall = \rho C_p \forall\frac{dT}{dt}$$

$$\int_{sc} = \rho\left(gz_s+u_s+\frac{V_s^2}{2}+\frac{p_s}{\rho}\right)Q_s - \rho\left(gz_e+u_e+\frac{V_e^2}{2}+\frac{p_e}{\rho}\right)Q_e$$

$Q = Q_e = Q_s \quad V_e = V_s \quad z_e = z_s \quad T_s = T$

$C_p = 4180\ \frac{J}{kg\,K}$

$\forall = 0'15\,m^3$

$\rho = 10^3\,kg/m^3$

$Q = 0'2\cdot10^{-3}\,m^3/s$

$$\int_{sc} = \rho Q\left(C_p(T-288'15)+\frac{p_s-p_e}{\rho}\right)$$

$$\frac{p_s-p_e}{\rho} = \frac{(1'5-2'5)\,981\cdot10^2}{10^3} = -98'1\ \frac{Pa}{kg/m^3}$$

$$1000 = \underbrace{10^3\cdot4180\cdot0'15}_{627\cdot10^3}\frac{dT}{dt} + 0'2\cdot4180\,(T-288'15) - 0'2\cdot98'1$$

$$627\cdot10^3\frac{dT}{dt} = 1000+19'62+836\,(288'15-T) =$$
$$= 241913'02-836T$$

$$\int_{333'15}^{T}\frac{dT\ 627\cdot10^3}{241913'02-836T} = \int_0^t dt \rightarrow t = \frac{-627\cdot10^3}{836}\ln\frac{241913'02-836T}{241913'02-836\cdot333'15}$$

$\rightarrow -36600'38$

$$241913'02-836T = -36600'36\,e^{-1'333\cdot10^{-3}t}$$

$$T = 43'78\,e^{-1'333\cdot10^{-3}t}+289'37$$

$t = 300\,s \quad T = 318'72\,K \rightarrow 45'57\,°C$

$t\rightarrow\infty \rightarrow T_{final} = 16'22\,°C$

$t\rightarrow0 \rightarrow T = T_0 = 60\,°C$

Cuestión 5.

Despreciando el desnivel en el elevador hidráulico, la presión al final del conducto deberá ser tal que permita elevar la carga máxima:

$$4 \cdot P_c \cdot A_c = 30.000 \text{ kg} \rightarrow P_c = 42'44 \text{ kg/cm}^2 = 4163493 \text{ Pa} = 41'63 \text{ bar}$$

nº de cilindros

área cilindro $= \frac{\pi D_c^2}{4} = 176'7 \text{ cm}^2 = 1'767 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

presión en el cilindro.

$$\frac{P_c}{\gamma} = \frac{4163493}{850 \cdot 9'81} = 499'3 \text{ m.c.f.}$$

En el caso de no despreciar el desnivel, en el elevador, para la máxima altura de éste, la presión en el cilindro será:

$$\frac{P_c}{\gamma} = 499'3 + 1.5 = 500.8 \text{ m.c.f} \rightarrow P_c = 4175920 \text{ Pa} = 41'76 \text{ bar} = 42'57 \text{ kg/cm}^2$$

El caudal que debe aportarse a cada cilindro es el necesario para mantener constante su velocidad de avance:

$$Q_c = V_c \cdot A_c \longrightarrow Q_c = 0'4418 \text{ l/seg.}$$

$$V_c = \text{veloc. cilindro} = \frac{1'5 \text{ m}}{60 \text{ seg}} = 0'025 \text{ m/seg.}$$

El caudal de toda la conducción es por tanto: $Q = 4 \cdot Q_c = 1'767$ l/seg.

Para calcular la presión se determina en primer lugar el número de Reynolds, para ver si estamos en régimen laminar o en régimen turbulento:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \begin{cases} V = \frac{4 \cdot Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0'001767}{\pi \cdot 0'04^2} = 1'406 \text{ m/s} \\ D = 0'04 \text{ m} \\ \nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \rightarrow Re = 562'45$$

↓

LAMINAR

Como estamos en régimen laminar, el factor de fricción es:

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{562'45} = 0'1138.$$

Aplicando la ecuación de Euler, la presión al principio del conducto es:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{z_1} + \cancel{\alpha_1 \frac{v^2}{2g}} = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} + \cancel{\alpha_2 \frac{v^2}{2g}} + f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g} \longrightarrow h_f = 2'87\,mcf = 23902\,P_a$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = 499.3 + 0'1138\,\frac{10}{0'04}\,\frac{1'406^2}{2g} \longrightarrow \frac{P_1}{\gamma} = 502'17 \text{ m.c.f.}$$

$$P_1 = 4187313\,P_a = 41'87 \text{ bar} = 42'68 \text{ Kg/cm}^2$$

En el caso de considerar las diferencias de cota en el elevador, la presión en 1 será:

$$\frac{P_1}{\gamma} = 503'67 \text{ m.c.f} \longrightarrow P_1 = 4199823\,P_a = 41'998 \text{ bar} = 42'81 \text{ Kg/cm}^2$$

Hay que tener en cuenta que se han despreciado las pérdidas de carga dentro del cilindro. Dichas pérdidas son:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} ; \left| \begin{array}{l} V = \dfrac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_c^2} = 0.025 \text{ m/seg} \\ D = 0'15\text{ m} \\ \nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{seg} \end{array} \right. \longrightarrow Re = 37.5$$

$$f = \frac{64}{Re} = 1'707$$

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g} = 1'707 \cdot \frac{1'5\text{m}}{0'15} \cdot \frac{0'025^2}{2 \cdot g} = \underbrace{0'00054}_{} \text{ m.c.f.}$$

Luego realmente sí era despreciable la pérdida en el cilindro.

Planteamiento alternativo del problema a partir del perfil de velocidades.

Conocemos el valor de p_2 y se trata de determinar la presión p_1.

El campo de velocidades en flujo laminar con simetría cilíndrica es:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right) r^2 + C.$$

En este caso

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{p_2 - p_1}{L} \\ \gamma \operatorname{sen}\theta = 0 \end{array}\right\} \rightarrow u(r) = \frac{p_2 - p_1}{4L\mu} r^2 + C$$

Para resolver la constante de integración se utiliza la condición de adherencia en el contorno:

$$\left.\begin{array}{l} r = R = \dfrac{D}{2} \\ u = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 0 = \frac{p_2 - p_1}{4\mu L}\frac{D^2}{4} + C \rightarrow C = -\frac{p_2 - p_1}{4\mu L}\frac{D^2}{4}$$

Luego:

$$u(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\mu L}\left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$

Para obtener el valor de p_1 es necesario imponer alguna condición conocida del flujo. El valor conocido es el caudal $Q = 1'767$ l/seg que circula, luego:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}\int_0^{D/2}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) 2\pi r\, dr = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} 2\pi \left(\frac{D^2}{8} r^2 - \frac{r^4}{4}\right)_0^{D/2} =$$

$$= \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} 2\pi \left[\frac{D^2}{8}\frac{D^2}{4} - \frac{D^4}{64}\right] = \frac{p_1 - p_2}{\mu L}\cdot\frac{\pi D^4}{128}$$

luego.

$$\left.\begin{array}{l} p_1 - p_2 = 128 \mu L Q \dfrac{1}{\pi D^4} \\ \mu = \nu \cdot \rho = 10^{-4} \cdot 850 = 0'085 \ \dfrac{\text{Kg}}{\text{m s}} \\ L = 10 \text{ m} \qquad Q = 0'001767 \ \text{m}^3/\text{s} \\ D = 0'04 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow p_1 - p_2 = 23904 \ \text{Pa}$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura

Curso / Curs | Grupo / Grup | Nº Pg. 4

Finalmente, la presión en el punto 1 es:

$$P_1 = 4163493 \text{ Pa} + 23904 = 4187397 \text{ Pa} = 41'87 \text{ bar} = 42'68 \text{ Kg/cm}^2$$

en el caso de despreciar la diferencia de alturas en el elevador. En caso de considerar esta diferencia:

$$P_1 = 4175920 + 23904 = 4199824 \text{ Pa} = 41'998 \text{ bar} = 42'81 \text{ Kg/cm}^2$$

Lógicamente, los valores que se obtienen son los mismos.

Nº

Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data

Otra forma alternativa de plantear el problema es a través de la función disipación: Para ello se parte de la expresión del campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$

La función disipación es:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = \mu\left(\frac{(P_1-P_2)^2}{4\mu^2 L^2} r^2\right) = \frac{(P_1-P_2)^2}{4\mu L^2} r^2$$

que integrada para toda la conducción nos da la potencia perdida:

$$P_d = \int \Phi \, d\forall = \int_0^{D/2} \Phi \, 2\pi r L \, dr = \frac{\pi (P_1-P_2)^2}{8\mu L} r^4 \Big]_0^{D/2} = \frac{\pi}{128\mu L}(P_1-P_2)^2 D^4$$

Esta potencia de pérdidas también puede expresarse como:

$$P_d = Q \cdot (P_1 - P_2)$$

por tanto puede plantearse:

$$Q \cdot (P_1 - P_2) = \frac{\pi}{128\mu L}(P_1-P_2)^2 D^4 \longrightarrow (P_1 - P_2) = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$P_1 - P_2 = \frac{128 \cdot 0'085 \cdot 10 \cdot 0'001767}{\pi \; 0'04^4} = 23904 \ Pa$$

luego:

$$P_1 = P_2 + 23904 \ Pa = 4163493 \ Pa + 23904 \ Pa = 4187397 \ Pa = 41'87 \ bar =$$
$$= 42'68 \ kg/cm^2.$$

Como puede verse los resultados que se obtienen mediante esta tercera forma de resolución también son los mismos.

Cuestión 6.

a) En primer lugar se determina el coeficiente de resistencia C_D a partir de la velocidad terminal de caída (260 Km/h).

$$\text{Peso} - \text{Empuje} = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \;;$$

Empuje: puede considerarse despreciable frente al peso.

$$mg = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \rightarrow C_D = \frac{2mg}{\rho V^2 A}$$

$m = 500$ Kg

$\rho = 1.2$ Kg/m^3

$A = 3.25^2 = 10'56$ m^2

$V = 260$ Km/h $= 72'22$ m/seg

$$C_D = \frac{2 \cdot 500 \cdot 9'81}{1'2 \cdot 72'22^2 \cdot 10'56} = \underline{0'1484} \quad \text{(4 pto)}$$

$\underline{0'1362}$ (con empuje)

Considerando conjuntamente el contenedor (c) y el paracaídas (p):

$$\frac{1}{2} C_{D_c} A_c V_t^2 \rho + \frac{1}{2} C_{D_p} \cdot A_p \cdot V_t^2 \rho = mg$$

$$A_p = \frac{mg - \frac{1}{2} C_{D_c} A_c V_t^2 \rho}{\frac{1}{2} C_{D_p} V_t^2 \rho}$$

$V_t = 25$ Km/h $= 6'94$ m/seg.

$C_{D_p} = 2.5$

$\rightarrow A_p = 67'27$ m^2

61.72 m^2 (con empuje)

luego el diámetro del paracaídas es: $$\boxed{D_p = \sqrt{\frac{4A_p}{\pi}} = 9'25 \text{ m}^2} \quad \text{(4 pto)}$$

$\underline{8'87 \text{ m}^2}$ Con empuje

b) Despreciando el transitorio, el tiempo que tarda en caer es:

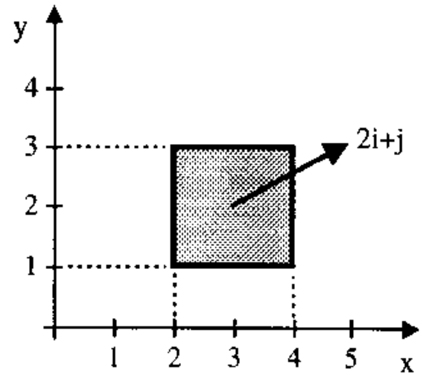
$$T = \frac{800}{72'22} + \frac{200}{6'94} = \underline{39'9 \text{ seg.}}$$

(2 pto)

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

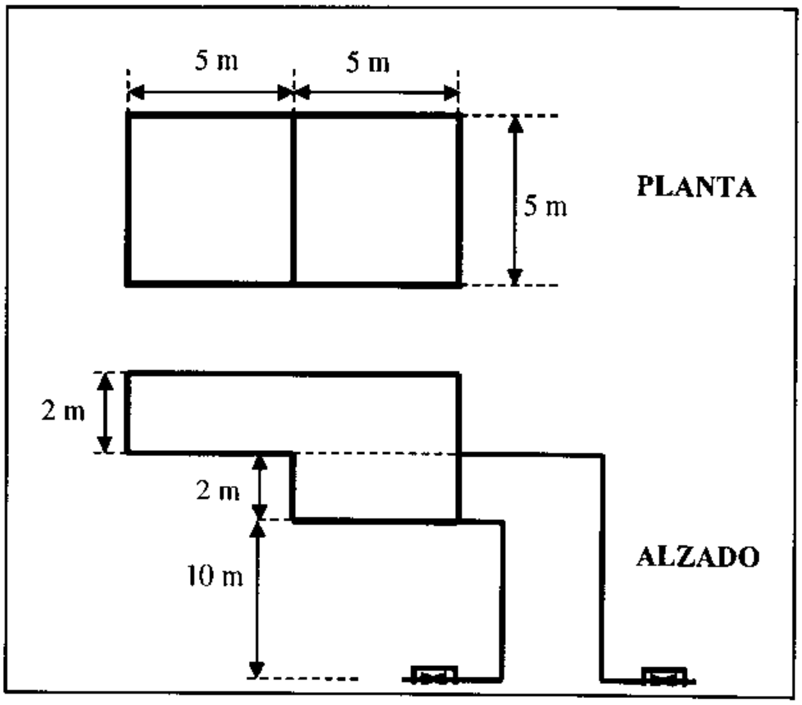
CUESTION 1

Dado el siguiente campo de velocidades $\begin{Bmatrix} u = xt \\ v = yt \end{Bmatrix}$ y siendo la densidad $\rho(t) = \rho_0 e^{-t^2}$, comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa (ecuación de continuidad) para el volumen de control de la figura, el cual se mueve todo él con una velocidad $2\vec{i} + \vec{j}$.



CUESTION 2

El depósito de la figura descarga a través de dos conducciones que parten de diferente nivel y descargan a la misma cota. Partiendo de que el depósito se encuentra totalmente lleno y las válvulas instaladas en la parte final de las tuberías cerradas, se abren éstas de manera simultánea en el instante 0. Determinar la altura de lámina de agua sobre la solera del depósito cuando hayan transcurrido 15 minutos desde el momento de la apertura.



NOTAS:

Las dimensiones del depósito se adjuntan en la figura.

Se desprecian las pérdidas por fricción en las conducciones, pero no así las pérdidas menores en las válvulas. Se considera un coeficiente de descarga 0.6 para ambas.

La sección de las conducciones y las válvulas es de 0.01 m^2.

Tomar la aceleración de la gravedad como g = 10 m/s^2.

CUESTION 3

Diseñar una tubería de polietileno para transportar 900 Nm^3/h de gas natural desde una estación de regulación y medida (ERM) hasta un punto de consumo situado a una distancia de 675 metros, sabiendo que la presión a la salida de la ERM es de 4 bar (relativos) y las máximas pérdidas admisibles son 15 m.c.agua.

(a) Determinar el diámetro necesario considerando flujo compresible isotermo.

(b) Con el diámetro comercial seleccionado, determinar la densidad del gas natural en el punto de consumo.

(c) Determinar el diámetro necesario considerando flujo incompresible.

Datos: Temperatura de trabajo = 10 ºC

Factor de fricción en tubos de polietileno = 0.023

Constante para el gas natural $R_{gas} = 519\ m^2/s^2\cdot{}^oK$

Condiciones normales = 20 ºC y 1 atm

Presión atmosférica = 1.013 bar (abs)

Diámetros comerciales:

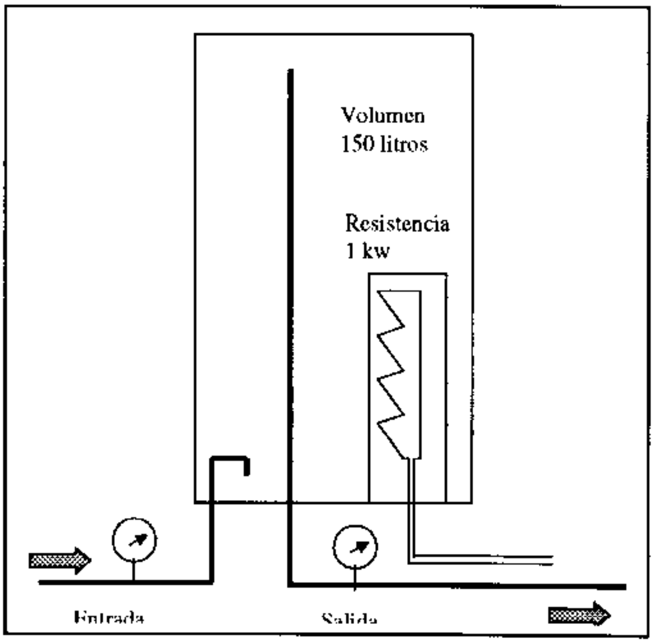
DN	20	32	40	50	63	90	110
D_{int} (mm)	16.4	26.2	32.7	40.9	51.5	73.6	90

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

CUESTION 4

Un termoacumulador de energía eléctrica tiene una resistencia calefactora del agua de potencia 1 kw. El acumulador está lleno de 150 litros de agua a 60ºC. En un momento dado se abre un punto de consumo, de manera que la resistencia calefactora se pone inmediatamente en marcha. La temperatura de entrada del agua al termo es de 15ºC constante, mientras que la temperatura de salida va disminuyendo de manera progresiva al entrar agua fría y no ser capaz la resistencia de mantener la temperatura en 60ºC. Suponiendo que el consumo de agua es constante, de valor 0.2 l/seg, **determinar la temperatura del agua en el termo al cabo de 5 minutos de consumo.**



Se conoce la presión del agua fría a la entrada del termo, de 2.5 Kp/cm^2, y a la salida del mismo, 1.5 Kp/cm^2, medidas ambas con sendos manómetros situados a la misma cota. Las secciones de las conducciones de entrada y salida al termo son iguales.

Se admite que la temperatura de salida del termo es igual a la temperatura del agua en el interior del mismo en cada instante y que dentro del termo no existe estratificación, de manera que se mezcla en cada momento toda el agua fría entrante con la contenida en su interior a una temperatura superior.

Datos: Calor especifico del agua $C_p = 1$ Kcal/kgºK

u = Energía interna por unidad de masa $= C_p \cdot T$

1 caloría = 4.18 Julios

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)

2º INGENIERO INDUSTRIAL

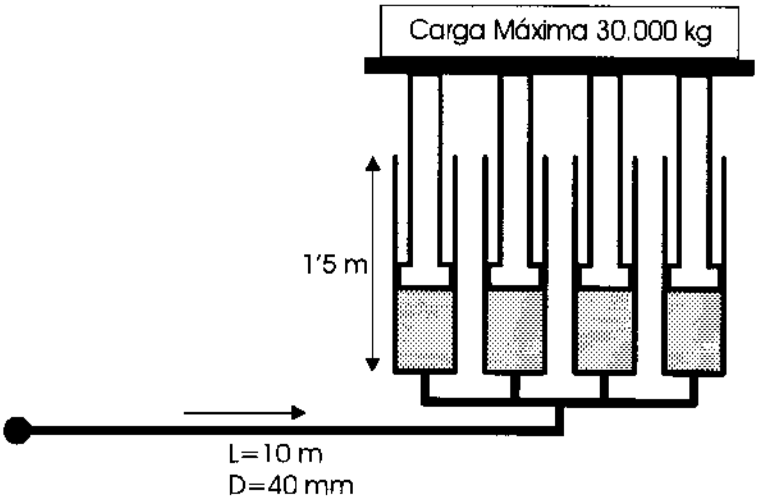
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001

Grupo Mecánica de Fluidos

Universidad Politécnica de Valencia

CUESTION 5

Un elevador hidráulico de recorrido 1,5 m y carga máxima 30.000 kg se acciona mediante 4 cilindros hidráulicos de diámetro interior 15 cm cada uno de ellos. Los cuatro cilindros se alimentan de un conducto de 40 mm de diámetro interior y longitud 10 m, colocado de forma horizontal. Sabiendo que el tiempo que tarda en elevarse la carga es 1 minuto y que el desplazamiento es a velocidad constante, calcular la presión necesaria a la entrada del conducto.

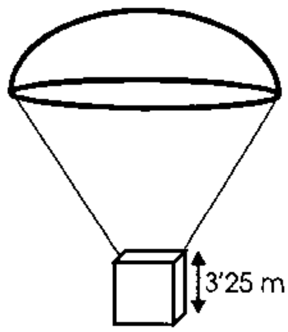


Nota:
- Despreciar los tramos de conducción entre el final del conducto principal y la entrada de cada uno de los cilindros.
- Admitir que el circuito dispone de un regulador de caudal de forma que el caudal permanece constante y manteniendo en todo momento la velocidad de desplazamiento del elevador.

Datos del fluido: Viscosidad cinemática $\nu=10^{-4}$ m^2/s; Densidad $\rho=850$ kg/m^3.

CUESTION 6

Una misión humanitaria lanza desde un avión, a un altura de 1000 metros, contenedores de alimentos de forma cúbica de lado 3'25 m. El peso de cada contenedor lleno es de 475 kg y el paracaídas acoplado al mismo 25 kg. Este paracaídas, que presenta un coeficiente de resistencia C_D=2'5 referido al área circular proyectada del mismo, se abre automáticamente a 200 metros del suelo.



Sabiendo que la velocidad con la que llega al suelo un contenedor al que le falla el paracaídas es 260 km/h, determinar:

a) Diámetro mínimo que debe tener el paracaídas para que la velocidad de impacto del contenedor con el suelo sea como máximo de 25 km/h.

b) Tiempo que tarda en caer el contenedor desde que se lanza del avión.

Notas:
- Se admite que el valor del coeficiente de resistencia tanto del contenedor como del paracaídas permanecen constantes independientemente del número de Reynolds.
- Se desprecian los efectos transitorios del contenedor en su caída hasta alcanzar la velocidad terminal y se admite que la geometría del contenedor con el paracaídas abierto o cerrado es cúbica y no varía en ningún momento.
- Se supone que la evaluación de la resistencia de cada uno de los cuerpos (contenedor y paracaídas) puede realizarse por separado, despreciando la influencia de uno sobre el otro.

Grupo Mecánica de Fluidos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)

2° INGENIERO INDUSTRIAL

MARTES 26 DE JUNIO DE 2001

Grupo Mecánica de Fluidos

Universidad Politécnica de Valencia

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h} \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo Laminar Incompresible con simetría Plana

Campo de Velocidades

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo Laminar Incompresible con simetría Cilíndrica

Campo de Velocidades

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right) r^2 + C$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 26 DE JUNIO DE 2001
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Expresión de la fuerza de arrastre de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_R = \frac{1}{2} C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresión de la fuerza de sustentación de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_L = \frac{1}{2} C_L \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresiones del coeficiente de arrastre de partículas esféricas:

- Región a. $\mathrm{Re} < 1$: $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$
- Región b. $1 < \mathrm{Re} < 1000$: $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + 0'15\,\mathrm{Re}^{0'687}\right)$
- Región c. $1000 < \mathrm{Re} < 200000$: $C_D = 0'44$
- Región d. $\mathrm{Re} > 200000$: $C_D = 0'1$

CUESTIÓN 1

El Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall.C.} \rho \, d\forall + \int_{S.C.} \rho \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)$$

se verifica para cualquier instante de tiempo. Vamos a comprobar el TAR para el instante representado en la figura.

El término extendido al volumen de control:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall.C.} \rho \, d\forall = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \forall) = \forall \cdot \frac{d\rho}{dt} = -8t\rho_0 e^{-t^2}$$

El término extendido a la superficie de control lo separamos en cuatro integrales:

$$\int_{S.C.} \rho \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \int_{\text{sup}\,1} + \int_{\text{sup}\,2} + \int_{\text{sup}\,3} + \int_{\text{sup}\,4}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 1}\\ y=1\end{array}\right\} \rightarrow \quad \vec{v} = xt\,\vec{i} + t\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (xt-2)\vec{i} + (t-1)\vec{j}\\ d\vec{A} = -dx\,\vec{j}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup}\,1} = -(t-1)dx$$

$$\int_{\text{sup}\,1} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_2^4 -(t-1)dx = -(t-1)\cdot 2 = 2-2t$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 2}\\ y=3\end{array}\right\} \rightarrow \quad \vec{v} = xt\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (xt-2)\vec{i} + (3t-1)\vec{j}\\ d\vec{A} = dx\,\vec{j}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup}\,2} = (3t-1)dx$$

$$\int_{\text{sup}\,2} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_2^4 (3t-1)dx = (3t-1)\cdot 2 = 6t-2$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 3}\\ x=2\end{array}\right\} \rightarrow \quad \vec{v} = 2t\,\vec{i} + yt\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (2t-2)\vec{i} + (yt-1)\vec{j}\\ d\vec{A} = -dy\,\vec{i}\end{array}\right\} \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup}\,3} = -(2t-2)dy$$

$$\int_{\sup 3} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_1^3 -(2t-2)dy = -(2t-2)\cdot 2 = 4-4t$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Superficie 4}\\ x=4\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = 4t\,\vec{i} + yt\,\vec{j}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_{r,SC} = \vec{v} - \vec{v}_{SC} = (4t-2)\vec{i} + (yt-1)\,\vec{j}\\ d\vec{A} = dy\,\vec{i}\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)_{\sup 4} = (4t-2)dy$$

$$\int_{\sup 4} \vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A} = \int_1^3 (4t-2)dy = (4t-2)\cdot 2 = 8t-4$$

Así pues, el término extendido a la superficie de control queda finalmente:

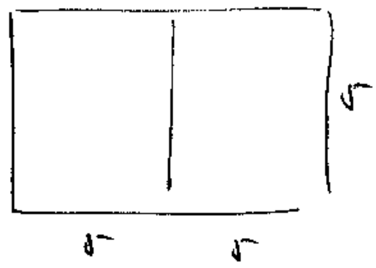
$$\int_{S.C.} \rho\left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \rho \int_{S.C.} \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \rho \cdot \left[\int_{\sup 1} + \int_{\sup 2} + \int_{\sup 3} + \int_{\sup 4}\right] =$$

$$= \rho_0 e^{-t^2} \cdot \left[2-2t+6t-2+4-4t+8t-4\right] = 8t\rho_0 e^{-t^2}$$

con lo que queda verificado el Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$0 = -8t\rho_0 e^{-t^2} + 8t\rho_0 e^{-t^2}$$

MF2 JUN01 EC. CONT. ① Pregunta 2



Velocidades teóricas

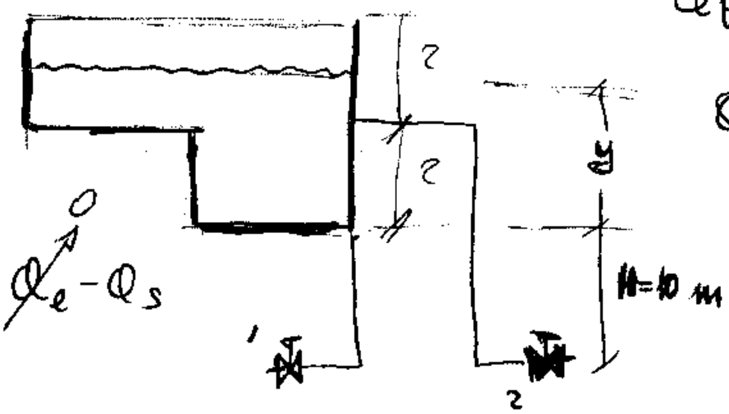
$V_1 = \sqrt{2g(y+H)}$ $V_2 = \sqrt{2g(y+h}$ solo si $y \geq 2m$.

$Q_{teórico} = V_t \cdot A_o$

$Q_{real} = Q = C_D V_t A_o$

$Q_1 = C_D \cdot 0'01 \cdot \sqrt{2g(y+H)}$

$Q_2 = C_D \, 0'01 \sqrt{2g(y+H)}$



$\frac{dH}{dt} = \cancel{Q_e} - Q_s$

$A \frac{dy}{dt}$

$Q_1 = C_D 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$; $Q_2 = C_D 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$

1ª FASE $Q_t = Q_1 + Q_2 = 2 C_D 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$ Area $= 50 \, m^2$

$-50 \frac{dy}{dt} = 2 \cdot C_D \cdot 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+H}$; $\int_4^2 \frac{dy}{\sqrt{y+10}} = -\frac{2 C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{50} \int_0^{t_1} dt$

$2(\sqrt{2+10} - \sqrt{4+10}) = -\frac{2 C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{50} t_1$

$\rightarrow t_1 = \frac{100(\sqrt{14} - \sqrt{12})}{2 C_D \sqrt{20} \cdot 0'01} = 517'2 \text{ seg.}$

2ª FASE $Q_t = Q_1 = C_D \cdot 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+10}$ Area $= 25 m^2$

$-25 \frac{dy}{dt} = C_D \cdot 0'01 \sqrt{20} \sqrt{y+10} \rightarrow \int_2^y \frac{dy}{\sqrt{y+10}} = -\frac{C_D \sqrt{20} \, 0'01}{25} \int_0^{t_2} dt$

$2(\sqrt{y+10} - \sqrt{2+10}) = -\frac{C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{25} t_2$

$\sqrt{y+10} = -\frac{C_D \sqrt{20} \cdot 0'01 \cdot t_2}{50} + \sqrt{12} \rightarrow y = \left(\sqrt{12} - \frac{C_D \sqrt{20} \cdot 0'01}{50} t_2\right)^2 - 10$

$t_{TOTAL} = t_1 + t_2 = 517'2 + t_2 = 60 \cdot 15 = 900 \text{ seg} \rightarrow t_2 = 382'8 \text{ s}$

$y = 0'6189 \text{ m.}$

CUESTIÓN 3

La densidad del gas natural en condiciones normales:

$$\left.\begin{array}{l} T = 20\,°\mathrm{C} \\ \\ p^* = 1.013\ \mathrm{bar\ (abs)} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \rho_N = \frac{p^*}{RT} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{519 \cdot 293} = 0.666\ \mathrm{Kg/m^3}$$

Y la densidad a la salida de la ERM:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 10\,°\mathrm{C} \\ \\ p_1^* = 5.013\ \mathrm{bar\ (abs)} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \rho_1 = \frac{p_1^*}{RT_1} = \frac{5.013 \cdot 10^5}{519 \cdot 283} = 3.413\ \mathrm{Kg/m^3}$$

El gasto másico de gas:

$$G = \rho_N \cdot Q_N = 0.666 \cdot 900 = 599.4\ \mathrm{Kg/h} = 0.1665\ \mathrm{Kg/s}$$

Y las pérdidas permitidas:

$$\Delta p = \gamma \cdot \Delta h = 9810 \cdot 15 = 147150\ \mathrm{Pa} = 1.4715\ \mathrm{bar}$$

a) Dimensionado de la tubería considerando flujo compresible

$$p_1^* = 5.013\ \mathrm{bar\ (abs)} = 501300\ \mathrm{Pa\ (abs)} \quad \rightarrow \quad p_2^* = 3.5415\ \mathrm{bar\ abs} = 354150\ \mathrm{Pa\ (abs)}$$

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL$$

Sustituyendo valores:

$$354150^2 = 501300^2 - \frac{16 \cdot 0.023 \cdot 0.1665^2}{\pi^2 \cdot D^5} \cdot 519 \cdot 283 \cdot 675$$

$$D_{teórico} = 0.06055\ \mathrm{m} = 60.55\ \mathrm{mm}$$

Seleccionando tubería de polietileno el diámetro comercial a colocar es:

$$\boxed{\mathrm{DN}\ 90 \quad \rightarrow \quad D_{\mathrm{int.}} = 73.6\ \mathrm{mm}}$$

b) Determinación de la densidad del gas en el punto de consumo

Colocando polietileno de diámetro nominal DN 90, la presión en el punto de consumo será:

$$\left(p_2^*\right)^2 = 501300^2 - \frac{16 \cdot 0.023 \cdot 0.1665^2}{\pi^2 \cdot 0.0736^5} \cdot 519 \cdot 283 \cdot 675$$

$$p_2^* = 451498\ \mathrm{Pa\ (abs)} = 4.515\ \mathrm{bar\ (abs)}$$

Y la densidad:

$$\left.\begin{array}{l} T_2 = 10\,°\mathrm{C} \\ \\ p_2^* = 451498\ \mathrm{Pa\ (abs)} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \frac{p_2^*}{RT_2} = \frac{451498}{519\cdot 283} = 3.074\ \mathrm{Kg/m^3}$$

c) Dimensionado de la tubería considerando flujo incompresible

$$p_1^* = 5.013\ \mathrm{bar\ (abs)} = 501300\ \mathrm{Pa\ (abs)} \quad \rightarrow \quad p_2^* = 3.5415\ \mathrm{bar\ abs} = 354150\ \mathrm{Pa\ (abs)}$$

$$p_2 = p_1 - \frac{8fG^2L}{\pi^2 D^5 \rho}$$

Sustituyendo valores:

$$147150 = \frac{8\cdot 0.023\cdot 0.1665^2\cdot 675}{\pi^2\cdot D^5\cdot 3.413}$$

$$D_{teórico} = 0.05866\ \mathrm{m} = 58.66\ \mathrm{mm}$$

Seleccionando tubería de polietileno el diámetro comercial a colocar es:

$$\boxed{\mathrm{DN}\ 90 \quad \rightarrow \quad D_{int.} = 73.6\ \mathrm{mm}}$$

Otra forma

El caudal volumétrico en las condiciones de trabajo es:

$$Q = \frac{G}{\rho} = \frac{0.1665}{3.413} = 0.04878\ \mathrm{m^3/s} = 175.6\ \mathrm{m^3/h}$$

Y las pérdidas:

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{8fQ^2L}{\pi^2 D^5 g}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{147150}{9.81\cdot 3.413} = \frac{8\cdot 0.023\cdot 0.04878^2\cdot 675}{\pi^2\cdot D^5\cdot 9.81}$$

$$D_{teórico} = 0.05866\ \mathrm{m} = 58.66\ \mathrm{mm}$$

MF2 JUN01 E. Energía

Pregunta 4

$$\underset{1000\,W}{\frac{dC}{dt}} + \underset{0}{\cancel{\frac{dW_{eje}}{dt}}} = \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \rho\left(gz+u+\frac{V^2}{2}\right)d\forall + \int_{sc} \rho\left(gz+u+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

$\forall C$ Solo varía $u = C_p T$ con el tiempo

T cte en $\forall C$ (aunque varíe con t)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\forall c} = \rho\cdot C_p \frac{d}{dt}\int T\, d\forall = \rho\, C_p\, \forall \frac{dT}{dt}$$

$$\int_{sc} = \rho\left(gz_s+u_s+\frac{V_s^2}{2}+\frac{p_s}{\rho}\right)Q_s - \rho\left(gz_e+u_e+\frac{V_e^2}{2}+\frac{p_e}{\rho}\right)Q_e$$

$Q = Q_e = Q_s \quad V_e = V_s \quad z_e = z_s \quad T_s = T$

$C_p = 4180\ J/kg\,K$

$\forall = 0{,}15\ m^3$

$\rho = 10^3\ kg/m^3$

$Q = 0{,}2\cdot 10^{-3}\ m^3/s$

$$\int_{sc} = \rho Q\left(C_p(T-288{,}15) + \frac{p_s-p_e}{\rho}\right)$$

$$\frac{p_s-p_e}{\rho} = \frac{(1{,}5-2{,}5)\,9{,}81\cdot 10^4}{10^3} = -98{,}1\ \frac{Pa}{kg/m^3}$$

$$1000 = \underbrace{10^3\cdot 4180\cdot 0{,}15}_{627\cdot 10^3}\frac{dT}{dt} + 0{,}2\cdot 4180\,(T-288{,}15) - 0{,}2\cdot 98{,}1$$

$$627\cdot 10^3 \frac{dT}{dt} = 1000 + 19{,}62 + 836\,(288{,}15 - T) =$$
$$= 241913{,}02 - 836\,T$$

$$\int_{333{,}15}^{T} \frac{dT\ \ 627\cdot 10^3}{241913{,}02-836\,T} = \int_0^t dt \rightarrow t = \frac{-627\cdot 10^3}{836}\ln\frac{241913{,}02-836\,T}{241913{,}02-836\cdot 333{,}15}$$

$\rightarrow -36600{,}38$

$$241913{,}02 - 836\,T = -36600{,}36\, e^{-1{,}333\cdot 10^{-3}t}$$

$$T = 43{,}78\, e^{-1{,}333\cdot 10^{-3}t} + 289{,}37$$

$t = 300\,s \quad T = 318{,}72\ K \rightarrow 45{,}57\ °C$

$t \rightarrow \infty \rightarrow T_{final} = 16{,}22\ °C$

$t \rightarrow 0 \rightarrow T = T_0 = 60\ °C$

Cuestión 5.

Despreciando el desnivel en el elevador hidráulico, la presión al final del conducto deberá ser tal que permita elevar la carga máxima:

$$4 \cdot p_c \cdot A_c = 30.000 \text{ kg} \rightarrow p_c = 42'44 \text{ kg/cm}^2 = 4163493 \text{ Pa} = 41'63 \text{ bar}$$

nº de cilindros

área cilindro $= \frac{\pi D_c^2}{4} = 176'7 \text{ cm}^2 = 1'767 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

presión en el cilindro.

$$\frac{p_c}{\gamma} = \frac{4163493}{850 \cdot 9'81} = 499'3 \text{ m.c.f.}$$

En el caso de no despreciar el desnivel en el elevador, para la máxima altura de éste, la presión en el cilindro será:

$$\frac{p_c}{\gamma} = 499'3 + 1.5 = 500.8 \text{ m.c.f} \rightarrow p_c = 4175920 \text{ Pa} = 41'76 \text{ bar} = 42'57 \text{ kg/cm}^2$$

El caudal que debe aportarse a cada cilindro es el necesario para mantener constante su velocidad de avance:

$$Q_c = V_c \cdot A_c \longrightarrow Q_c = 0'4418 \text{ l/seg.}$$

$$V_c = \text{veloc. cilindro} = \frac{1'5 \text{ m}}{60 \text{ seg}} = 0'025 \text{ m/seg.}$$

El caudal de toda la conducción es por tanto: $Q = 4 \cdot Q_c = 1'767$ l/seg.

Para calcular la presión se determina en primer lugar el número de Reynolds, para ver si estamos en régimen laminar o en régimen turbulento:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \begin{cases} V = \frac{4 \cdot Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0'001767}{\pi \cdot 0'04^2} = 1'406 \text{ m/s} \\ D = 0'04 \text{ m} \\ \nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \rightarrow Re = 562'45$$

LAMINAR

Como estamos en régimen laminar, el factor de fricción es:

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{562'45} = 0'1138.$$

Aplicando la ecuación de Euler, la presión al principio del conducto es:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{z_1} + \cancel{\alpha_1 \frac{v^2}{2g}} = \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} + \alpha_2 \cancel{\frac{v^2}{2g}} + f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g} \longrightarrow h_f = 2'87\,mcf = 23902\,P_a$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = 499.3 + 0'1138\,\frac{10}{0'04}\,\frac{1'406^2}{2g} \longrightarrow \frac{P_1}{\gamma} = 502'17\ m.c.f.$$

$$P_1 = 4187313\,P_a = 41'87\,bar = 42'68\,Kg/cm^2$$

En el caso de considerar las diferencias de cota en el elevador, la presión en 1 será:

$$\frac{P_1}{\gamma} = 503'67\ m.c.f \longrightarrow P_1 = 4199823\,P_a = 41'998\,bar = 42'81\,Kg/cm^2$$

Hay que tener en cuenta que se han despreciado las pérdidas de carga dentro del cilindro. Dichas pérdidas son:

$$Re = \frac{V\cdot D}{\nu} = \left\{ \begin{array}{l} V = \dfrac{4\cdot Q}{\pi\cdot D_c^2} = 0.025\ m/seg \\ D = 0'15\,m \\ \nu = 10^{-4}\ m^2/seg \end{array} \right. \longrightarrow Re = 37.5$$

$$f = \frac{64}{Re} = 1'707$$

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g} = 1'707\cdot\frac{1'5m}{0'15}\cdot\frac{0'025^2}{2\cdot g} = 0'00054\ m.c.f.$$

Luego realmente sí era despreciable la pérdida en el cilindro.

Planteamiento alternativo del problema a partir del perfil de velocidades.

Conocemos el valor de p_2 y se trata de determinar la presión p_1.

El campo de velocidades en flujo laminar con simetría cilíndrica es:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right) r^2 + C.$$

En este caso

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{p_2 - p_1}{L} \\ \gamma \operatorname{sen}\theta = 0 \end{array}\right\} \rightarrow u(r) = \frac{p_2 - p_1}{4L\mu} r^2 + C$$

Para resolver la constante de integración se utiliza la condición de adherencia en el contorno:

$$\left.\begin{array}{l} r = R = \dfrac{D}{2} \\ u = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 0 = \frac{p_2 - p_1}{4\mu L}\frac{D^2}{4} + C \rightarrow C = -\frac{p_2 - p_1}{4\mu L}\frac{D^2}{4}$$

Luego:

$$u(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\mu L}\left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$

Para obtener el valor de p_1 es necesario imponer alguna condición conocida del flujo. El valor conocido es el caudal $Q = 1'767$ l/seg que circula, luego:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}\int_0^{D/2}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) 2\pi r\, dr = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} 2\pi \left(\frac{D^2}{8} r^2 - \frac{r^4}{4}\right)_0^{D/2} =$$

$$= \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} 2\pi \left[\frac{D^2}{8}\frac{D^2}{4} - \frac{D^4}{64}\right] = \frac{p_1 - p_2}{\mu L}\cdot\frac{\pi D^4}{128}$$

luego, $p_1 - p_2 = 128 \mu L Q \dfrac{1}{\pi D^4}$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \nu\cdot\rho = 10^{-4}\cdot 850 = 0'085 \ \dfrac{kg}{ms} \\ L = 10 \text{ m} \qquad Q = 0'001767 \text{ m}^3/\text{s} \\ D = 0'04 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow p_1 - p_2 = 23904 \text{ Pa}$$

Finalmente, la presión en el punto 1 es:

$$P_1 = 4163493 \text{ Pa} + 23904 = 4187397 \text{ Pa} = 41'87 \text{ bar} = 42'68 \text{ Kg/cm}^2$$

en el caso de despreciar la diferencia de alturas en el elevador. En caso de considerar esta diferencia:

$$P_1 = 4175920 + 23904 = 4199824 \text{ Pa} = 41'998 \text{ bar} = 42'81 \text{ Kg/cm}^2$$

Lógicamente, los valores que se obtienen son los mismos.

Otra forma alternativa de plantear el problema es a través de la función disipación: Para ello se parte de la expresión del campo de velocidades:

$$u(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$$

La función disipación es:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = \mu\left(\frac{(P_1-P_2)^2}{4\mu^2 L^2} r^2\right) = \frac{(P_1-P_2)^2}{4\mu L^2} r^2$$

que integrada para toda la conducción nos da la potencia perdida:

$$P_d = \int \Phi \, d\forall = \int_0^{D/2} \Phi \, 2\pi r L \, dr = \frac{\pi (P_1-P_2)^2}{8\mu L} r^4 \Big]_0^{D/2} = \frac{\pi}{128\mu L}(P_1-P_2)^2 D^4$$

Esta potencia de pérdidas también puede expresarse como:

$$P_d = Q \cdot (P_1 - P_2)$$

por tanto puede plantearse:

$$Q \cdot (P_1-P_2) = \frac{\pi}{128\mu L}(P_1-P_2)^2 D^4 \longrightarrow (P_1-P_2) = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$P_1 - P_2 = \frac{128 \cdot 0'085 \cdot 10 \cdot 0'001767}{\pi \; 0'04^4} = 23904 \; Pa$$

luego:

$$P_1 = P_2 + 23904 \; Pa = 4163493 \; Pa + 23904 \; Pa = 4187397 \; Pa = 41'87 \; bar =$$
$$= 42'68 \; kg/cm^2.$$

Como puede verse los resultados que se obtienen mediante esta tercera forma de resolución también son los mismos.

Cuestión 6.

a) En primer lugar se determina el coeficiente de resistencia C_D a partir de la velocidad terminal de caída (260 Km/h).

$$\text{Peso} - \text{Empuje} = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \; ;$$

Empuje: puede considerarse despreciable frente al peso.

$$mg = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A \rightarrow C_D = \frac{2mg}{\rho V^2 A}$$

$m = 500$ Kg

$\rho = 1.2$ Kg/m³

$A = 3.25^2 = 10'56$ m²

$V = 260$ Km/h $= 72'22$ m/seg

$$C_D = \frac{2 \cdot 500 \cdot 9'81}{1'2 \cdot 72'22^2 \cdot 10'56} = \underline{0'1484} \qquad (4\text{ pto})$$

$\underline{0'1362}$ (con empuje)

Considerando conjuntamente el contenedor (c) y el paracaídas (p):

$$\frac{1}{2} C_{D_c} A_c V_t^2 \rho + \frac{1}{2} C_{D_p} \cdot A_p \cdot V_t^2 \rho = mg$$

$$A_p = \frac{mg - \frac{1}{2} C_{D_c} A_c V_t^2 \rho}{\frac{1}{2} C_{D_p} V_t^2 \rho}$$

$V_t = 25$Km/h $= 6'94$ m/seg.

$C_{D_p} = 2.5$

$\rightarrow A_p = 67'27$ m²

61.72 m² (con empuje)

luego el diámetro del paracaídas es: $D_p = \sqrt{\dfrac{4A_p}{\pi}} = \underline{9'25 \text{ m}^2}$ (4 pto)

$\underline{8'87 \text{ m}^2}$ Con empuje

b) Despreciando el transitorio, el tiempo que tarda en caer es:

$$T = \frac{800}{72'22} + \frac{200}{6'94} = \underline{39'9 \text{ seg.}} \qquad (2\text{ pto})$$

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (SEPT.)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
LUNES 10 DE SEPTIEMBRE DE 2001

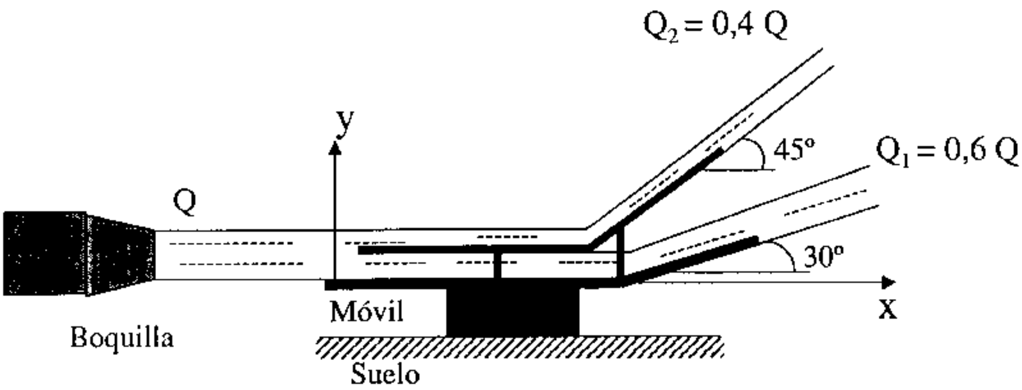
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

CUESTION 1 (25%)

El dispositivo de la figura desvía un chorro lanzado desde una boquilla. El chorro incidente se divide en dos chorros de salida, de manera que por la parte superior sale un 40 % del caudal y por la inferior un 60 %, con ángulos diferentes, según muestra la figura.

La sección del chorro a la entrada es de 7 cm^2 y la velocidad del chorro respecto de la boquilla es de 15 m/seg.

La masa del dispositivo (teniendo en cuenta la masa de agua) es de 1 Kg.



1.- Suponiendo la boquilla quieta y admitiendo un coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y el móvil de 0.1, determinar la fuerza necesaria para impedir que el dispositivo se mueva.

2.- Si la boquilla se mueve hacia la derecha a una velocidad de 1 m/seg (el chorro sigue saliendo de la misma a una velocidad de 15 m/seg respecto de la boquilla), se desprecia el rozamiento entre el móvil y el suelo, pero se tiene en cuenta el rozamiento del móvil con el aire (ver expresión adjunta), determinar la velocidad de régimen permanente del móvil.

Fuerza rozamiento móvil-aire (Nw) = 0.1 * U^2 , siendo U la velocidad absoluta del móvil en m/seg.

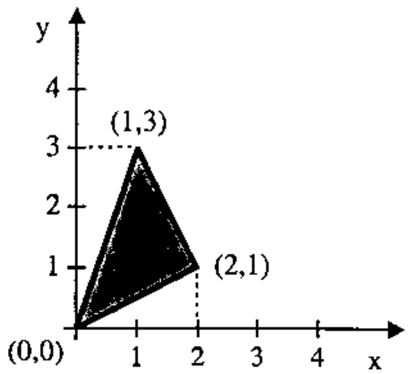
Se desprecian las diferencias de cota así como el rozamiento entre el agua y los álabes deflectores.

CUESTION 2 (25%)

Dado el siguiente campo de velocidades:

$$\vec{v} = \frac{3x-2}{t}\bar{i} + \frac{2y}{t}\bar{j}$$

y sabiendo que la densidad en el instante t = 1 segundo tiene un valor ρ_0 = cte, comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa (ecuación de continuidad) para el volumen de control de la figura.



CUESTION 3 (25%)

Diseñar una tubería de polietileno para transportar 1000 Nm^3/h de gas natural desde una estación de producción hasta un punto de consumo situado a una distancia de 1000 metros, sabiendo que la presión a la salida de la estación de producción es de 5 bar (relativos) y las máximas pérdidas admisibles son 30 m.c.agua.

a) Determinar el diámetro necesario considerando flujo compresible isotermo.

b) Con el diámetro comercial seleccionado, determinar la densidad del gas natural en el punto de consumo.

c) Determinar el diámetro necesario considerando flujo incompresible, considerando una densidad del gas igual en toda la conducción a la existente a la salida de la estación de producción.

DATOS: Temperatura de trabajo = 15 °C

Factor de fricción en tubos de polietileno = 0.025

Constante para el gas natural $R_{gas} = 520\ m^2/s^2 \cdot {}^\circ K$

Condiciones normales = 20 °C y 1 atm

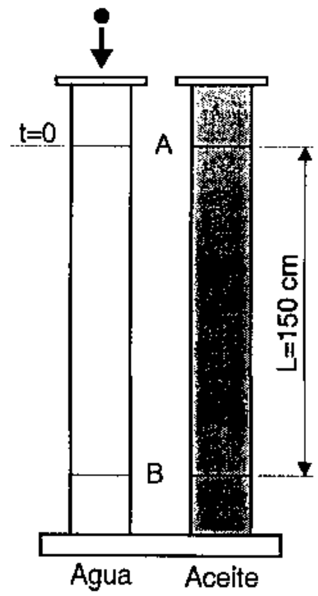
Presión atmosférica = 1.013 bar (abs)

Tabla de diámetros comerciales:

Diámetro Nominal	40	50	63	90	110	125	140
Diámetro Interior (mm)	32.7	40.9	51.5	73.6	90	102'2	114'6

CUESTION 4 (25%)

Se desea determinar la viscosidad de un aceite de densidad ρ=850 kg/m3. Para ello se dispone de un viscosímetro de caída de bola como el mostrado en la figura.



El ensayo consta de dos partes: durante la primera se deja caer una esfera de 5 mm de diámetro por la columna de la izquierda en la que se dispone de agua a la temperatura ambiente (Densidad $\rho=1000\ kg/m^3$; Viscosidad dinámica = $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ kg/m/seg; Viscosidad cinemática = $1{,}1 \cdot 10^{-6}\ m^2/seg$). Se supone que en el instante en que la esfera cae por el punto A la esfera ha adquirido una velocidad constante y tarda un tiempo t_1= 6 seg en llegar hasta el punto B.

En la segunda parte del ensayo, la misma esfera se deja caer por la columna de la derecha obteniéndose un tiempo t_2= 30 seg.

Determinar:

a) La densidad de la partícula esférica utilizada en los ensayos.

b) La viscosidad dinámica del aceite contenido en la columna de la derecha.

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (SEPT.)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
LUNES 10 DE SEPTIEMBRE DE 2001

Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h}\vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho\vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de Euler para flujo compresible isotermo sin variación de velocidad ni de cota y régimen permanente

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5}RTL$$

Ecuación de estado de los gases perfectos

$$p^* = \rho RT$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{sc}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right) + \vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right) + \left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall + \int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{sc}}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo Laminar Incompresible con simetría Plana

Campo de Velocidades

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo Laminar Incompresible con simetría Cilíndrica

Campo de Velocidades

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma\operatorname{sen}\theta\right)r^2 + C$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu\frac{du}{dr}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Expresión de la fuerza de arrastre de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_R = \frac{1}{2} C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$

Expresión de la fuerza de sustentación de un cuerpo en el seno de un fluido: $F_L = \frac{1}{2} C_L \rho S_{caract.} V_\infty^2$

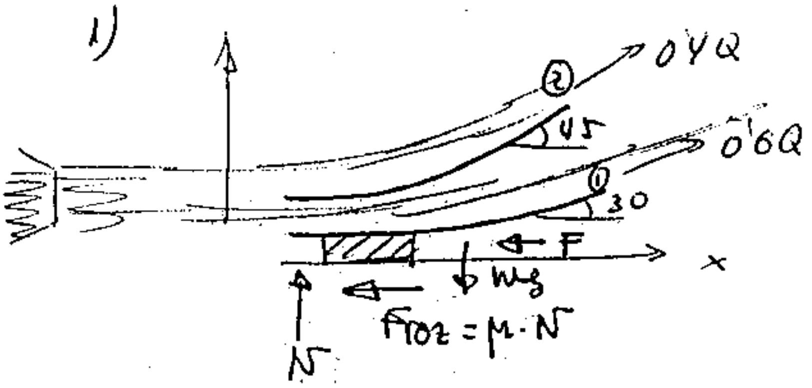
Expresiones del coeficiente de arrastre de partículas esféricas:

- Región a. Re < 1: $C_D = \frac{24}{\text{Re}}$
- Región b. 1 < Re < 1000: $C_D = \frac{24}{\text{Re}}\left(1 + 0'15\,\text{Re}^{0'687}\right)$
- Región c. 1000 < Re < 200000: $C_D = 0'44$
- Región d. Re>200000: $C_D = 0'1$

CUESTION 1

$V_{entrada} = V$
$V_{salida} = V$
Aplicando Bernoulli entre e y s y teniendo en cuenta ~~x~~ pérdidas y que el desnivel geom. es desprec.

1)



$Q = V \cdot A = 15 \cdot 0'0007 = 0'0105 \frac{m^3}{s}$

$$-F\vec{i} - \mu \cdot N\vec{i} - mg\vec{j} + N\vec{j} = \rho\, 0'6Q\, \vec{V}_{sal_1} + \rho\, 0'4Q\, \vec{V}_{sal_2} - \rho Q \vec{V}_{ent}$$

$$\vec{V}_{ent} = V \cdot \vec{i}$$
$$\vec{V}_{sal_1} = V\cos 30\, \vec{i} + V \operatorname{sen} 30\, \vec{j}$$
$$\vec{V}_{sal_2} = V \cos 45\, \vec{i} + V \operatorname{sen} 45\, \vec{j}$$

$$-F - \mu N = \rho \cdot 0'6 \cdot Q\, V\cos 30 + \rho\, 0'4\, Q\, V\cos 45 - \rho Q V$$

$$-mg + N = \rho\, 0'6\, Q\, V \operatorname{sen} 30 + \rho \cdot 0'4 \cdot Q\, V \operatorname{sen} 45$$

De la segunda ecuación

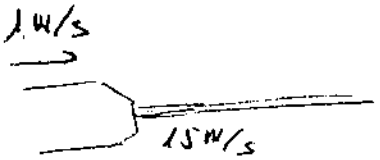
$$N = mg + \rho Q V (0'6 \operatorname{sen} 30 + 0'4 \operatorname{sen} 45) =$$

$$= 1 \cdot 9'81 + 10^3 \cdot 0'0105 \cdot 15 \left(0'6 \tfrac{1}{2} + 0'4 \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 101'61\ N$$

$$F = \rho Q V (1 - 0'6 \cos 30 - 0'4 \cos 45) - 0'1 \cdot 101'61 =$$

$$= 20'95\ Nw.$$

2)

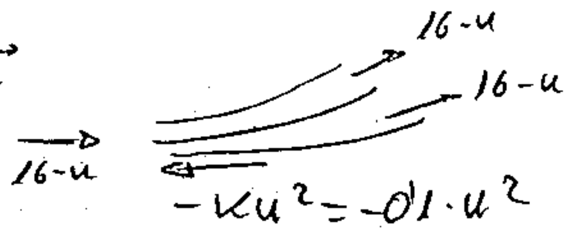


V_{abs} agua $= 16$ m/s $= V_{arr} + V_{rel}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad\; 15$

V entrada del álabe abs $= 16\,\vec{i}$

$\vec{V}_{relativa} = \vec{V}_{abs} - \vec{V}_{arr} = (16-u)\,\vec{i}$

Solo hacemos balance según x.



$$-0'1\,u^2 = \rho\cdot 0'6\cdot Q\,(16-u)\cos 30 + \rho\, 0'4\, Q\,(16-u)\cos 45 - \rho\, Q\,(16-u)$$

$$Q = (16-u)\cdot A_0 = (16-u)\cdot 0'0007$$

$$-0'1\,u^2 = 10^3\cdot 0'6\cdot 0'0007\cdot(16-u)^2\cos 30 +$$

$$+\,10^3\cdot 0'4\cdot 0'0007\,(16-u)^2\cos 45 - 10^3\cdot 0'0007\,(16-u)^2$$

$$-0'1\,u^2 = -\,0'13828\,(16-u)^2$$

Condición $16 > u$ pues en caso contrario el agua no choca contra el álabe.

$$0'1\,u^2 = 0'13828\,(16-u)^2$$

$$\boxed{u = 8'647 \text{ m/s}}$$

CUESTIÓN 2

En primer lugar, vamos a determinar la expresión de la densidad ρ(t) a partir de la ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\vec{v}=0$$

Calculamos la divergencia del campo de velocidades:

$$\nabla\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{3}{t}+\frac{2}{t}=\frac{5}{t}$$

Y sustituyendo en la ecuación diferencial de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{5}{t}=0$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{5dt}{t}$$

$$\int\frac{d\rho}{\rho}=-\int\frac{5dt}{t}$$

$$\ln\rho=-5\ln t+\ln K$$

$$\rho=\frac{K}{t^5}$$

Como en el instante t = 1 segundo la densidad tiene un valor ρ_0 = cte

$$\rho(t)=\frac{\rho_0}{t^5}$$

El Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa:

$$0=\frac{d}{dt}\int_{\forall.C.}\rho\, d\forall+\int_{S.C.}\rho\left(\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}\right)$$

Vamos a comprobar el TAR para el volumen de control de la figura.

El término extendido al volumen de control:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall.C.}\rho\, d\forall=\frac{d}{dt}(\rho\cdot\forall)=\frac{d\rho}{dt}\cdot\forall=-\frac{5\rho_0}{t^6}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}=-\frac{25\rho_0}{2t^6}$$

El término extendido a la superficie de control lo separamos en tres integrales:

$$\int_{S.C.} \rho\left(\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}\right) = \int_{\text{sup 1}} + \int_{\text{sup 2}} + \int_{\text{sup 3}}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Superficie 1}\\ x=2y\end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad dx = 2dy \quad\rightarrow\quad dA=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{5}dy$$

$$\left\{\begin{matrix}\vec{v}_{r,SC}=\dfrac{3x-2}{t}\vec{i}+\dfrac{2y}{t}\vec{j}=\dfrac{6y-2}{t}\vec{i}+\dfrac{2y}{t}\vec{j}\\ d\vec{A}=\dfrac{\vec{i}-2\vec{j}}{\sqrt{5}}dA=\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)dy\end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad \left(\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup 1}}=\frac{2y-2}{t}dy$$

$$\int_{\text{sup 1}}\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}=\int_0^1\frac{2y-2}{t}dy=\left[\frac{y^2-2y}{t}\right]_0^1=-\frac{1}{t}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Superficie 2}\\ y=3x\end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad dy = 3dx \quad\rightarrow\quad dA=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{10}dx$$

$$\left\{\begin{matrix}\vec{v}_{r,SC}=\dfrac{3x-2}{t}\vec{i}+\dfrac{2y}{t}\vec{j}=\dfrac{3x-2}{t}\vec{i}+\dfrac{6x}{t}\vec{j}\\ d\vec{A}=\dfrac{-3\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{10}}dA=\left(-3\vec{i}+\vec{j}\right)dx\end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad \left(\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup 2}}=\frac{-3x+6}{t}dx$$

$$\int_{\text{sup 2}}\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}=\int_0^1\frac{-3x+6}{t}dx=\left[\frac{-3x^2/2+6x}{t}\right]_0^1=\frac{9}{2t}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Superficie 3}\\ 2x+y=5\end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad 2dx = -dy \quad\rightarrow\quad dA=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{5}dx$$

$$\left\{\begin{matrix}\vec{v}_{r,SC}=\dfrac{3x-2}{t}\vec{i}+\dfrac{2y}{t}\vec{j}=\dfrac{3x-2}{t}\vec{i}+\dfrac{10-4x}{t}\vec{j}\\ d\vec{A}=\dfrac{2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}}dA=\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)dx\end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad \left(\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}\right)_{\text{sup 3}}=\frac{2x+6}{t}dx$$

$$\int_{\text{sup 3}}\vec{v}_{r,SC}\cdot d\vec{A}=\int_1^2\frac{2x+6}{t}dx=\left[\frac{x^2+6x}{t}\right]_1^2=\frac{9}{t}$$

Así pues, el término extendido a la superficie de control queda finalmente:

$$\int_{S.C.} \rho \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \rho \int_{S.C.} \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right) = \rho \cdot \left[\int_{\sup 1} + \int_{\sup 2} + \int_{\sup 3} \right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{t^5} \cdot \left[-\frac{1}{t} + \frac{9}{2t} + \frac{9}{t} \right] = \frac{\rho_0}{t^5} \cdot \frac{25}{2t} = \frac{25\rho_0}{2t^6}$$

con lo que queda verificado el Teorema de Arrastre de Reynolds:

$$0 = -\frac{25\rho_0}{2t^6} + \frac{25\rho_0}{2t^6}$$

Examen Septiembre Mecánica de Fluidos 2º B Curso 2000-01. Diseño de una conducción de gas. Flujo compresible.

ENUNCIADO

Diseñar una tubería de polietileno para transportar 1000 Nm^3/h de gas natural desde una estación de producción hasta un punto de consumo situado a una distancia de 1000 metros, sabiendo que la presión a la salida de la estación de producción es de 5 bar (relativos) y las máximas pérdidas admisibles son 30 m.c.agua.

a) Determinar el diámetro necesario considerando flujo compresible isotermo.

b) Con el diámetro comercial seleccionado, determinar la densidad del gas natural en el punto de consumo.

c) Determinar el diámetro necesario considerando flujo incompresible, considerando una densidad del gas igual en toda la conducción a la existente a la salida de la estación de producción.

DATOS: Temperatura de trabajo = 15 ºC

Factor de fricción en tubos de polietileno = 0.025

Constante para el gas natural R_{gas} = 520 $m^2/s^2 \cdot$ºK

Condiciones normales = 20 ºC y 1 atm

Presión atmosférica = 1.013 bar (abs)

Tabla de diámetros comerciales:

Diámetro Nominal	40	50	63	90	110	125	140
Diámetro Interior (mm)	32.7	40.9	51.5	73.6	90	102'2	114'6

SOLUCIÓN.

Apartado a)

La expresión del flujo compresible isotermo en el caso de despreciar tanto las diferencias de nivel como los términos cinéticos es

$$\left(p_2^*\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 - \frac{16fG^2}{\pi^2 D^5} RTL \qquad (1)$$

Para determinar el diámetro necesario tan solo hay que obtener en la expresión anterior el valor de las diferentes variables que aparecen:

- Presión a la salida de la estación de producción p_1. Es un dato del enunciado que expresado en valores absolutos es

$$p_1^* = 5{\cdot}10^5 + 1'013{\cdot}10^5 = 6'013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

- Presión en el punto de consumo p_2. Dado que las máximas pérdidas admisibles son h_f=30 m.c.agua, las presión mínima en dicho punto de consumo es

$$h_f = 30\,m.c.agua \quad \rightarrow \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \gamma_{agua} \cdot h_f = 9810 \cdot 30 = 2'943 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2'943\text{bar}$$

$$p_2^* = p_1^* - \Delta p = 6'013 \cdot 10^5 - 2'943 \cdot 10^5 = 3'07 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 3'07\text{bar}$$

- El caudal másico G se determina a partir del conocimiento del caudal medido en condiciones normalizadas. Así

$$\text{G} = \rho_N \cdot \text{Q}_N = \left\{ \begin{array}{l} \text{Q}_N = 1000 \text{ m}^3/\text{h} = 0'278 \text{ m}^3/\text{s} \\ \rho_N = \dfrac{p^*}{RT} = \dfrac{1'013 \cdot 10^5}{520 \cdot 293'13} = 0'6645 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right\} = 0'6645 \cdot 0'278 = 0'1846 \text{ kg/s}$$

En definitiva, despejando de la expresión (1), el diámetro que se obtiene es

$$D = \left[\frac{16 f G^2}{(p_1^*)^2 - (p_2^*)^2} \frac{RTL}{\pi^2} \right]^{0'2} = \left[\frac{16 \cdot 0'025 \cdot 0'1846^2}{(6'013 \cdot 10^5)^2 - (3'07 \cdot 10^5)^2} \frac{520 \cdot 288'16 \cdot 1000}{\pi^2} \right]^{0'2} = 0'0599 \text{ m}$$

Por tanto el diámetro nominal que es necesario instalar es

$$\boxed{\text{DN} = 90 \quad \rightarrow \quad D_{\text{int}} = 73'6 \text{ mm}}$$

Apartado b)

Para determinar la densidad del gas en el punto de consumo es necesario determinar en primer lugar la presión en dicho punto. Para ello se emplea la expresión (1) donde ahora es conocido el diámetro de la conducción y queda como incógnita la presión p_2.

$$(p_2^*)^2 = (p_1^*)^2 - \frac{16 f G^2}{\pi^2 D^5} RTL = (6'013 \cdot 10^5)^2 - \frac{16 \cdot 0'025 \cdot 0'1846^2}{\pi^2 \cdot 0'0736^5} 520 \cdot 288'16 \cdot 1000 = 2'657 \cdot 10^{11}$$

$$p_2^* = 5'155 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 5'155 \text{ bar}$$

A partir de la presión en el punto de consumo, la determinación de la densidad es inmediata a partir de la ley de los gases perfectos

$$\boxed{\rho_2 = \frac{p_2^*}{RT} = \frac{5'155 \cdot 10^5}{520 \cdot 288'16} = 3'44 \text{ kg/m}^3}$$

Apartado c)

La densidad a la salida de la estación de producción es

$$\rho_1 = \frac{p_1^*}{RT} = \frac{6'013 \cdot 10^5}{520 \cdot 288'16} = 4'013 \text{ kg/m}^3$$

por tanto, el caudal volumétrico que circula por la conducción, considerando que dicho valor de la densidad permanece constante es

$$Q=\frac{G}{\rho_1}=\frac{0'1846}{4'013}=0'046\ \text{m}^3/\text{s}=46\ \text{l/s}$$

La ecuación de Euler para el caso de flujo incompresible en el caso de una conducción en la que se desprecian los desniveles geométricos entre los extremos y los términos cinéticos es

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{8fL}{\pi^2D^5g}Q^2$$

En este caso, despejando el diámetro se obtiene

$$h_f=\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=30\ \text{m.c.agua}=30\frac{\gamma_{agua}}{\gamma_{gas}}=30\frac{1000}{4'013}=7475'7\ \text{m.c.fluido}$$

$$D=\left(\frac{8fL}{\pi^2gh_f}Q^2\right)^{0'2}$$

Sustituyendo valores se obtiene que el diámetro mínimo necesario es

$$D=\left(\frac{8fL}{\pi^2gh_f}Q^2\right)^{0'2}\left(\frac{8\cdot0'025\cdot1000}{\pi^2\cdot9'81\cdot7475'7}0'046^2\right)^{0'2}=0'0567\ \text{m}=56'7\ \text{mm}$$

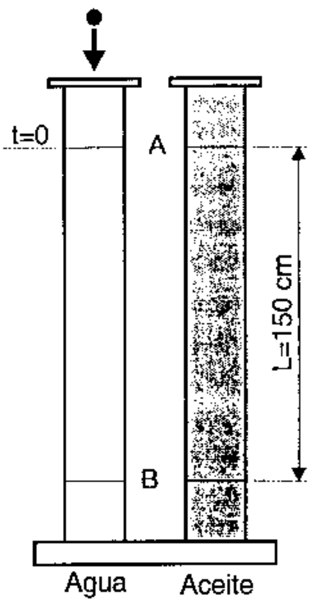
En definitiva, el diámetro nominal que es necesario instalar en el caso de considerar el flujo incompresible es

$$\boxed{\text{DN}=90\quad\rightarrow\quad D_{\text{int}}=73'6\ \text{mm}}$$

Examen Septiembre Mecánica de Fluidos 2º B Curso 2000-01. Viscosímetro de caída de bola.

ENUNCIADO

Se desea determinar la viscosidad de un aceite de densidad ρ=850 kg/m3. Para ello se dispone de un viscosímetro de caída de bola como el mostrado en la figura.



El ensayo consta de dos partes: durante la primera se deja caer una bola de 5 mm de diámetro por la columna de la izquierda en la que se dispone de agua a la temperatura ambiente (Densidad ρ=1000 kg/m^3; Viscosidad dinámica = $1{,}1\cdot10^{-3}$ kg/m/seg; Viscosidad cinemática = $1{,}1\cdot10^{-6}$ m^2/seg). Se supone que en el instante en que la bola cae por el punto A la bola ha adquirido una velocidad constante y tarda un tiempo t_1= 6 seg en llegar hasta el punto B.

En la segunda parte del ensayo, la misma bola se deja caer por la columna de la derecha obteniéndose un tiempo t_2= 30 seg.

Determinar:

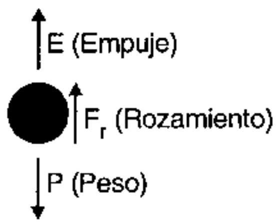
a) La densidad de la partícula esférica utilizada en los ensayos.

b) La viscosidad dinámica del aceite contenido en la columna de la derecha.

SOLUCIÓN.

Apartado a)

En primer lugar se plantea el balance de fuerzas sobre la esfera cuando se encuentra cayendo en la zona comprendida entre los puntos A y B. En dicha zona se admite que la velocidad es constante, por la suma de fuerzas ejercidas sobre la misma es nula. El balance de fuerzas sobre la esfera en su caida libre en el seno del fluido contempla tres fuerzas:



- Peso P del cuerpo, que se obtiene a partir del volumen del mismo y su densidad ρ_c mediante la expresión

$$P = \rho_c g \frac{\pi}{6} D^3$$

  donde D es el diámetro de la esfera. Nótese que precisamente la densidad del cuerpo es la incógnita de esta apartado.

- Empuje E del cuerpo, al verse sometido en el seno de un fluido de densidad ρ:

$$E = \rho g \frac{\pi}{6} D^3$$

donde ρ es la densidad del fluido (agua).

- Fuerza de rozamiento F^r debida al rozamiento viscoso del fluido con la esfera. Dicha fuerza de rozamiento viene dada por

$$F_R = \frac{1}{2} C_D \rho S_{caract.} V_\infty^2$$

donde C_D es el coeficiente de descarga del cuerpo; ρ es la densidad del fluido (en este caso la densidad del agua ρ); S_{caract} es una superficie característica (en este caso la sección frontal de la esfera; y V_∞ es la velocidad con que se mueve el fluido en torno a la esfera, que en este caso coincide con la velocidad de caída de ésta.

El balance de fuerzas sobre la esfera permite escribir:

$$\frac{1}{2} C_D \rho S V^2 = \frac{\pi}{6} D^3 g(\rho_c - \rho)$$

$$\frac{1}{2} C_D \rho \frac{\pi D^2}{4} V^2 = \frac{\pi}{6} \pi D^3 g(\rho_c - \rho) \tag{1}$$

$$\rho_c = \rho + \frac{3\rho C_D V^2}{4Dg}$$

Tan solo queda por verificar la expresión a emplear para el coeficiente de resistencia C_D. Para ello en primer lugar calculamos el número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\upsilon}$$

donde la velocidad de caída de la bola es $V = \frac{L}{t_1} = \frac{1'5}{6} = 0'25 \text{ m/s}$; el diámetro D de la esfera 5 mm; y la viscosidad cinemática del agua $\upsilon = 1'1 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Por tanto el valor del número de Reynolds es:

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\upsilon} = \frac{0'25 \cdot 0'005}{1'1 \cdot 10^{-6}} = 1136$$

Para dicho valor del número de Reynolds (zona c) el coeficiente de resistencia C_D es

$$C_D = 0'44$$

En definitiva, la expresión de la densidad de la esfera resulta ser

$$\rho_c = \rho + \frac{3\rho C_D V^2}{4Dg} = 1000 + \frac{3 \cdot 1000 \cdot 0'44 \cdot 0'25^2}{4 \cdot 0'005 \cdot 9'81}$$

$$\boxed{\rho_c = 1420'49 \text{ kg/m}^3}$$

Apartado b.

En el caso de que la esfera caiga dentro del tubo que contiene aceite, el balance de fuerzas es idéntico al del apartado anterior, con al diferencia de que la densidad del fluido ρ y la viscosidad del fluido ahora corresponden al aceite. La incógnita en este momento es, precisamente, la viscosidad del aceite. Asimismo el valor de velocidad de caída de la esfera dentro del aceite es

$$V = \frac{L}{t_1} = \frac{1'5}{30} = 0'05 \text{ m/s}$$

De la expresión (1) puede despejarse el valor del coeficiente C_D, en función del resto de datos que en este momento son conocidos:

$$C_D = \frac{4Dg(\rho_c - \rho)}{3\rho V^2} \qquad (2)$$

Sustituyendo valores, se obtiene que el coeficiente de arrastre C_D debe valer

$$C_D = 17'56$$

Tan solo queda por determinar la zona o el rango dentro del cual se encuentra el número de Reynolds para determinar la expresión que es necesario emplear. Indudablemente no puede encontrarse en la denominada zona a) don de la expresión del coeficiente de arrastre es:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} = \frac{24\upsilon}{V \cdot D}$$

ya que esta zona es válida tan solo para valores del número de Reynoled (Re) inferiores a 1. Por ello lo más probable es que se encuentre en la zona b), donde la expresión del coeficiente de arrastre C_D es

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}\left(1 + 0'15\,\text{Re}^{0'687}\right) = 17'56$$

De la expresión anterior puede obtenerse por iteración el valor del número de Reynolds. Para ello se adopta un valor inicial de 1'37 (24/17'56) y a partir de ahí se tantean valores hasta obtener la solución. Las diferentes iteraciones realizadas son

Re	$C_D = \frac{24}{\text{Re}}\left(1 + 0'15\,\text{Re}^{0'687}\right)$
1,36	20,92
1,7	17,17
1,5	19,17
1,6	18,11
1,65	17,62
1,66	17,53
1,655	17,58
1,656	17,56

En definitiva, el valor del número de Reynolds es

$$\text{Re} = 1'656$$

Conocido el número de Reynolds, a partir del mismo puede determinarse el valor de la viscosidad dinámica

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\upsilon} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu}$$

$$\mu = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mathrm{Re}}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$\mu = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mathrm{Re}} = \frac{850 \cdot 0'05 \cdot 0'005}{1'656}$$

$$\boxed{\mu = 0'128 \ \mathrm{kg/(m \cdot seg)}}$$

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS

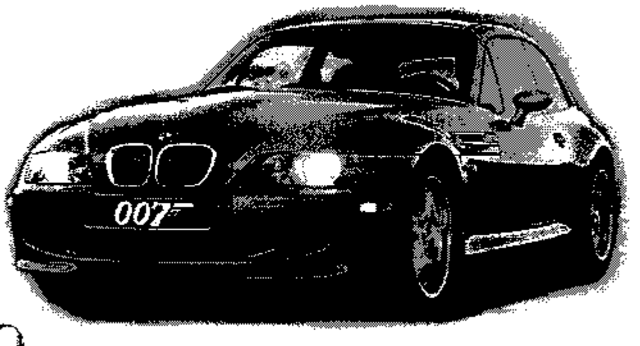
2º INGENIERO INDUSTRIAL

MARTES 13 DE JUNIO DE 2000

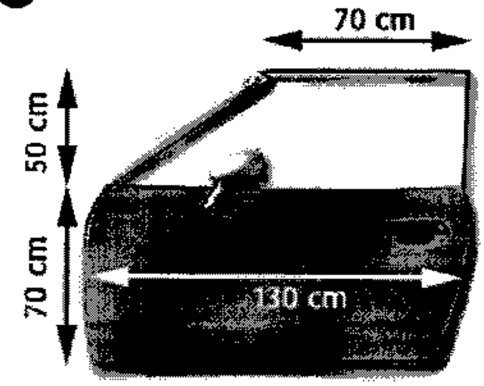
Grupo Mecánica de Fluidos

Universidad Politécnica de Valencia

CUESTIÓN 1 (16.67%)



El propietario del coche de la figura sufre un accidente, y cae a un lago de agua dulce (ρ=1000 Kg/m^3) de 15 m de profundidad . El vehículo, que con las ventanillas subidas representa un compartimento estanco, se hunde a una velocidad constante de 0.5 m/s. Dadas las dimensiones de la puerta indicadas en la figura, determinar:



a) La fuerza que será necesario aplicar en el extremo para abrir la puerta, en función del tiempo (a partir del momento en el que la puerta está totalmente sumergida).

b) Valor de la fuerza cuando el vehículo alcanza el fondo del lago.

Nota: La puerta puede considerarse rectangular, con un ancho fijo de 130 cm, y la ventanilla trapezoidal. La distancia desde el suelo hasta la parte baja de la puerta es de 30 cm.

CUESTIÓN 2 (16.67%)

El perfil de velocidades genérico en una conducción circular viene dado por la expresión $V(r)=V_0\left(1-\dfrac{r}{R}\right)^n$

Determinar para un valor del caudal Q_0 y un radio R de la conducción los valores de:

a) Velocidad máxima V_0 en una determinada sección.

b) Factor de corrección de la energía cinética.

NOTA: Se adjuntan los valores de diferentes integrales indefinidas:

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} \qquad si\ n\neq -1$$

$$\int x\,(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2}-\frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$$

Grupo Mecánica de Fluidos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000

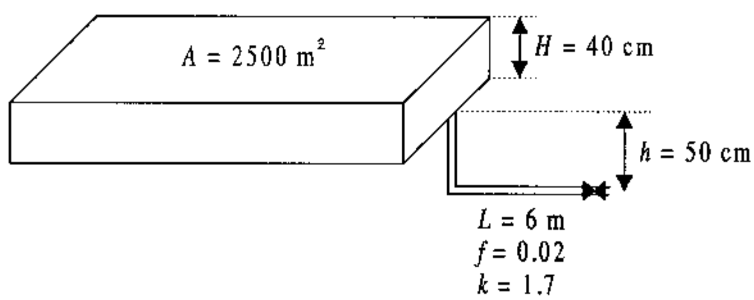
Grupo Mecánica de Fluidos

Universidad Politécnica de Valencia

CUESTIÓN 3 (16.67%)

El vaciado de un estanque de sección $A = 2500$ m^2 y altura $H = 40$ cm se realiza mediante una tubería de longitud L = 6 m y factor de fricción $f = 0.02$ en cuyo extremo hay una válvula de compuerta (el coeficiente de pérdidas menores de toda la instalación es $k = 1.7$). La sección de salida de la tubería de vaciado se encuentra a un desnivel $h = 50$ cm sobre la solera del estanque.

Despreciando el término de inercia, determinar el diámetro mínimo de la tubería para que el estanque se vacíe completamente durante un día.

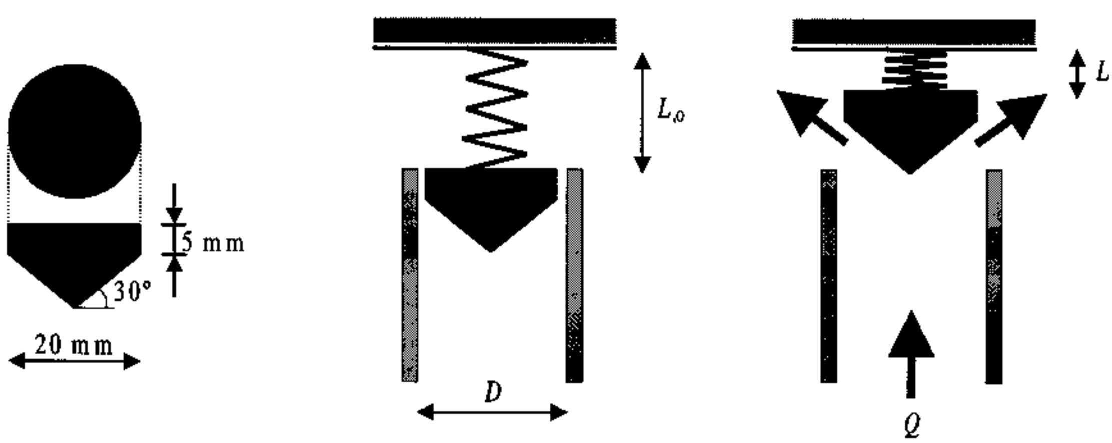


Pérdidas por fricción = $f\dfrac{L}{D}\dfrac{v^2}{2g}$

Pérdidas menores = $k\dfrac{v^2}{2g}$

CUESTIÓN 4 (16.67%)

El dispositivo de la figura consiste en una salida de agua a través de una tubería de diámetro $D = 20$ mm. Dicha salida se encuentra taponada por una pieza de masa $M = 60$ g y de las dimensiones mostradas en la figura, sujeta por un muelle de constante $K = 40$ N/m ($F_{muelle} = K \cdot \Delta L$).



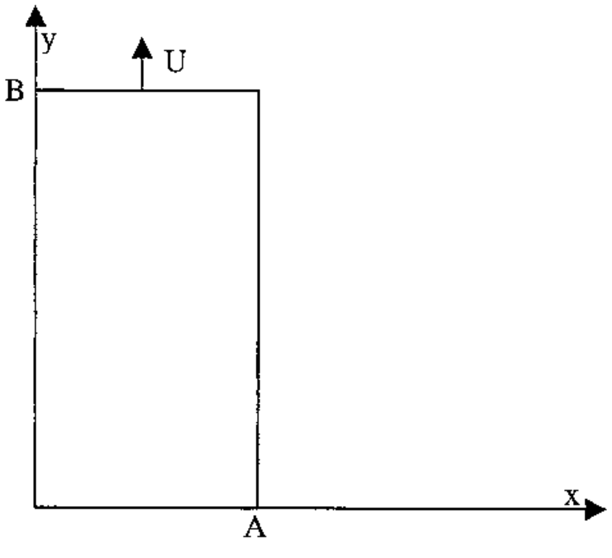
Si el fluido es agua ($\rho = 1000$ Kg/m^3) y la longitud del muelle en reposo es $L_0 = 25$ mm, determinar la posición del tapón (longitud L) cuando el caudal que está saliendo es $Q = 0.9$ l/s.

NOTA.- Despreciar el rozamiento del agua con el tapón. Despreciar la diferencia de cotas entre la parte superior e inferior del tapón. Suponer que la salida de agua es tangente a la zona cónica del tapón, tal y como se representa en el dibujo.

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

<u>CUESTIÓN 5</u> (16.67%)



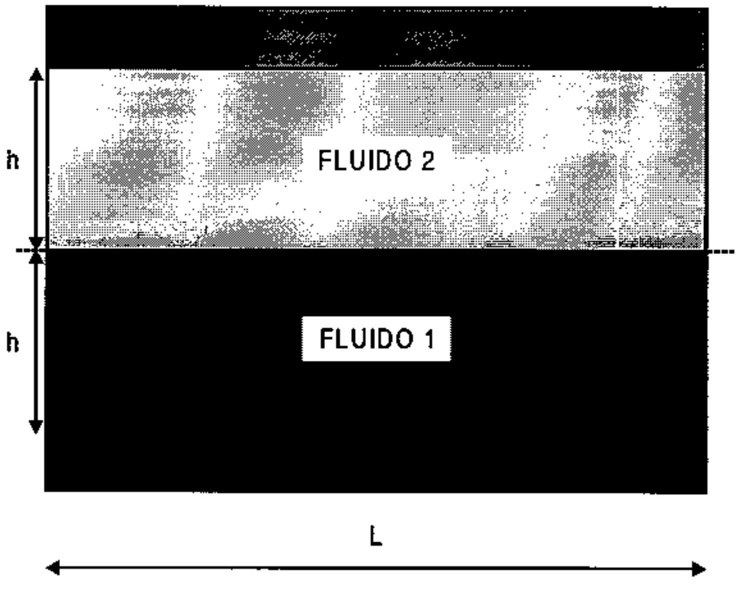
Sea J una propiedad extensiva de un fluido y j, el valor de dicha propiedad por unidad de masa. Sabiendo que la J total del sistema no varía con el tiempo, comprobar que se cumple el Teorema de Arrastre de Reynolds para el volumen de control deformable de la figura, en el que el lado superior se mueve con velocidad U.

Se proporcionan valores de j, la densidad y el campo de velocidades.

$j = 1$	$u = 3xt$
$\rho = 2 \cdot e^{-2t^2}$	$v = yt$

<u>CUESTIÓN 6</u> (16.67%)

Se dispone de dos placas planas de longitud *L*, anchura 2*h* y profundidad *b*, tal como indica la figura adjunta. Entre dichas placas fluyen dos fluidos 1 y 2, de viscosidades μ_1 y μ_2 y densidades ρ_1 y ρ_2, con $\rho_1 > \rho_2$, que permanecen en contacto en todo momento pero sin producirse mezcla alguna y que están sometidos a un gradiente de presiones $\Delta p = p_A - p_B > 0$. Determinar:



a) Campo de velocidades en cada uno de los fluidos. Plantear tan solo las ecuaciones necesarias para obtener las distintas constantes de integración de cada uno de los fluidos. Para la definición del campo de velocidades de cada uno de los fluidos emplear un origen para la coordenada *y* distinto.

b) Plantear el balance de potencias sobre el fluido 1. El planteamiento de dicho balance de potencias se realizará sin calcular las constantes de integración del perfil de velocidades. En el balance de potencias se deben recoger todas las potencias no nulas que participan en el mismo y plantear el cálculo de las mismas.

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{F}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{sc}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{M}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall+\int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{sc}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\,d\forall+\int_{S.C.}\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Expresión general del flujo laminar plano incompresible

$$u(y)=\frac{\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}-\gamma\operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Expresión general del flujo laminar de un fluido incompresible en un conducto circular

$$u(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\operatorname{sen}\theta\right)r^2+C$$

Expresión de la función disipación en un flujo laminar plano incompresible

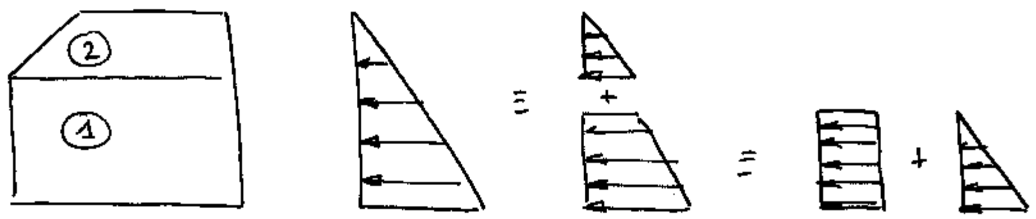
$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Expresión de la función disipación en un flujo laminar incompresible en un conducto circular

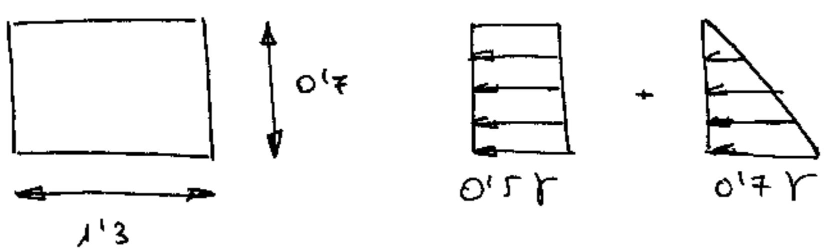
$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

CUESTIÓN 1

Vamos a descomponer la puerta en dos (puerta + ventanilla). Como la fuerza hay que calcularla a partir del momento en el que esté totalmente sumergida, la distribución de presiones será:



1 Para la puerta, y en el instante inicial:



$$F_{1_0} = 0'5\,\gamma\,(0'7 \times 1'3) + \frac{0'7\,\gamma}{2}\,(0'7 \times 1'3) = 7580'3\ N$$

El valor del primer sumando, irá aumentando con la profundidad, y por lo tanto con el tiempo:

$$\boxed{F_1(t)} = (0'5 + 0'5\,t)\,\gamma\,(0'7 \times 1'3) + \frac{0'7\,\gamma}{2}\,(0'7 \times 1'3) =$$

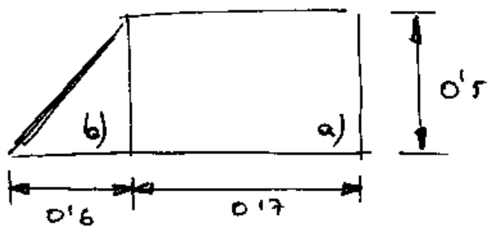
$$= \boxed{4459\,t + 7580'3\ N}$$

En el instante inicial, la parte baja de la puerta, estará a 1'2 m de profundidad. En el instante final, a 14'7 m

$$\boxed{t} = \frac{14'7 - 1'2}{0'5} = \boxed{27\ s}$$

$$F_1(27s) = 4459 \cdot 27 + 7580'3 = \boxed{127973'3\ N}$$

2



También descompondremos la ventanilla en dos partes

a) $\boxed{F(t)} = \left(\frac{0'5\,\gamma}{2} + 0'5\,\gamma t\right)(0'5 \times 0'7) =$

$= \boxed{1715t + 857'5\ N}$

$t = 27 \longrightarrow \boxed{F_a = 47162'5\,N}$

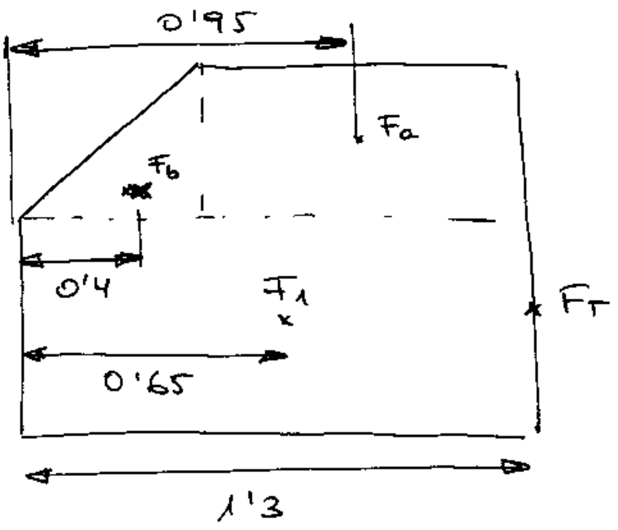
b) $F(t) = \overbrace{\left[\frac{2 \cdot 0'5\,\gamma}{3} + 0'5\,\gamma t\right]}^{P_a} \cdot \overbrace{\frac{0'6 \times 0'5}{2}}^{A_b} =$

$= \boxed{735t + 490\,N}$

$t = 27 \longrightarrow \boxed{F_b = 20335\,N}$

La fuerza necesaria para abrir la puerta será la que haga nulos los momentos:

$\Sigma \vec{M} = 0$



$\Sigma \vec{M} = 0 \Rightarrow F_1 \cdot 0'65 + F_a \cdot 0'95 + F_b \cdot 0'4 + F_T \cdot 1'3$

C) Fuerza en función del tiempo

$1'3\, F_T = 0'65\,(4459t + 7580'3) + 0'95\,(1715t + 857'5) +$

$+ 0'4\,(735t + 490)$

$\boxed{F_T} = 2229'5t + 3790'15 + 1253'3t + 626'63 +$

$+ 226'15t + 150'8 =$

$= \boxed{3708'95t + 4567'58}\ N$

2) Fuerza total al llegar al fondo $\Rightarrow t = 27$

$\boxed{F_T = 104709'23\ N}$

Problema 2.

a) El planteamiento del caudal Q es:

$$Q = \int_0^R V(r)\, 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^R V_0 \left(1-\frac{r}{R}\right)^n r\, dr = \begin{pmatrix} a = -1/R \\ b = 1 \\ n = n \end{pmatrix}$$

$$= 2\pi V_0 \left[\frac{(1-r/R)^{n+2}}{n+2} R^2 - \frac{(1-r/R)^{n+1}}{n+1} R^2 \right]_0^R =$$

$$= 2V_0\, \pi R^2 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] = \underline{\underline{\frac{2V_0\, \pi R^2}{(n+1)\,(n+2)}}}$$

La velocidad máxima es:

$$\boxed{V_0 = \frac{Q}{2\pi R^2} (n+1)(n+2)} = \frac{Q}{2\pi R^2} (n^2+3n+2)$$

4 pto.

b) La expresión del factor de corrección de la energía cinética es:

$$\alpha = \frac{\int v^3 dA}{V_m^3 \cdot A}$$

$$\int v^3 dA = \int_0^R V_0^3 (1-r/R)^{3n} 2\pi r\, dr = 2\pi V_0^3 \int_0^R (1-r/R)^{3n} r\, dr = \begin{pmatrix} a = -1/R \\ b = 1 \\ n = 3n \end{pmatrix}$$

$$= 2V_0^3\, \pi R^2 \left[\frac{(1-r/R)^{3n+2}}{3n+2} - \frac{(1-r/R)^{3n+1}}{3n+1} \right]_0^R = 2V_0^3 \pi R^2 \frac{1}{(3n+1)\,(3n+2)}$$

3 pto.

La velocidad media es:

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{2V_0}{(n+1)(n+2)}$$

(2 pto.)

El valor final del factor de corrección de la energía cinética es:

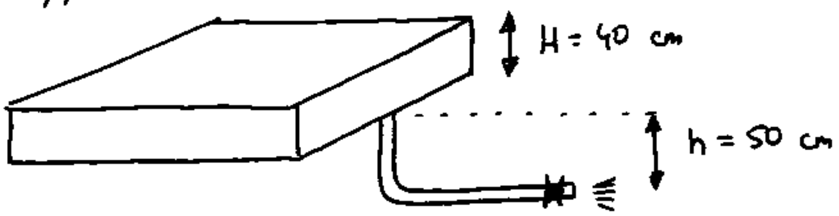
$$\alpha = \frac{\int v^3 dA}{V_m^3 \cdot A} = \boxed{\frac{(n+1)^3 (n+2)^3}{4(3n+1)(3n+2)}}$$

3 pto.

6 pto.

CUESTIÓN 3

$A = 2500\ m^2$



$L = 6\ m$
$D\ ?$
$f = 0{,}02$

$$h_{locales} = k \cdot \frac{V^2}{2g}$$

SALIDA DEPÓSITO $\longrightarrow k = 0{,}5$
CODO 90° $\longrightarrow k = 0{,}9$
VALVULA COMPUERTA $\longrightarrow k = 0{,}3$

$1{,}7$

BERNOULLI

$$z(t) + h = \frac{v(t)^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{v(t)^2}{2g} + k\frac{v(t)^2}{2g}$$

CONTINUIDAD

$$A \cdot \frac{dz(t)}{dt} = -v(t) \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas $\longrightarrow z(t)$ y $v(t)$

$$z(t) + h = \left(1 + f\frac{L}{D} + k\right) \cdot \frac{v(t)^2}{2g}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2g\,(z(t) + h)}{1 + f\frac{L}{D} + k}}$$

sustituyendo $v(t)$ en la ecuación de continuidad:

$$A \cdot \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \cdot \sqrt{z(t)+h}$$

ecuación diferencial de variables separables:

$$\int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{z+h}} = -\frac{\pi D^2}{4A} \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \int_0^T dt$$

$$2 \cdot \sqrt{z+h} \Big|_{z=H}^{z=0} = -\frac{\pi D^2}{4A} \cdot \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \cdot t \Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$\boxed{2\sqrt{h} - 2\sqrt{H+h} = -\frac{\pi D^2}{4A} \cdot \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \cdot T}$$

sustituyendo valores:

$$-0{,}48315 = -3{,}14159 \cdot 10^{-4} \cdot D^2 \cdot \sqrt{\frac{19{,}62}{2{,}7+\frac{0{,}12}{D}}} \cdot 86400$$

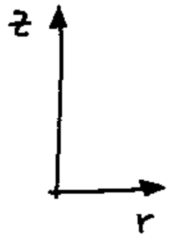
$$D^2 = 0{,}0178 \cdot \sqrt{\frac{2{,}7+\frac{0{,}12}{D}}{19{,}62}}$$

iterando:

$$D = 0{,}1 \text{ m} \longrightarrow 0{,}089 \text{ m} \longrightarrow 0{,}0899 \text{ m}$$

$$\boxed{D = 90 \text{ mm}}$$

CUESTION 4



$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{SC} \vec{V} \cdot \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{S.ent} \vec{V} \cdot \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A}) + \int_{S.sal} \vec{V} \cdot \rho (\vec{V} \cdot d\vec{A})$$

$$|\vec{V}_{ent}| = |\vec{V}_{sal}| = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{ent} = \dfrac{4Q}{\pi D^2} \vec{k} \\ \vec{V}_{sal} = \dfrac{4Q}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen}\alpha \, \vec{k} + \cos\alpha \, \vec{u}_r \right) \end{cases}$$

la fuerza debida a la componente radial se compensa

Sustituyendo en la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$-Mg\vec{k} - k \cdot \Delta L \cdot \vec{k} = \rho Q \left(V_{sal,z} - V_{ent,z} \right) \vec{k}$$

$$-Mg\vec{k} - k \cdot \Delta L \cdot \vec{k} = \underbrace{\frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen}\alpha - 1 \right) \vec{k}}_{\text{reacción a la fuerza del chorro}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{chorro} = -\frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen}\alpha - 1 \right) \vec{k}}$$

$$-Mg - k \cdot \Delta L = \frac{4 \rho Q^2}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen} \alpha - 1 \right)$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{\frac{4 \rho Q^2}{\pi D^2} \left(1 - \operatorname{sen} \alpha \right) - Mg}{K}}$$

Sustituyendo valores:

$\rho = 1000$ Kg/m^3

$Q = 0{,}9$ l/s

$D = 20$ mm

$\alpha = 30°$

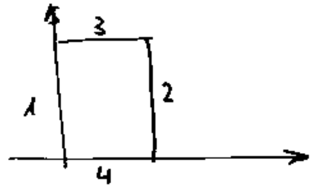
$M = 60$ g

$K = 40$ N/m

$\Delta L = 0{,}0175$ m $= 17{,}5$ mm

Como $L_0 = 25$ mm $\longrightarrow$ $\boxed{L = 7{,}5 \text{ mm}}$

CUESTIÓN 5



$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} j\,\rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho\, j\, \vec{V}_{r_{sc}} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \varnothing \qquad (\text{J constante en el tiempo})$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C} j\,\rho\, d\forall = \frac{d}{dt}\left[\rho(t)\cdot \forall(t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[2e^{-2t^2}\cdot A \cdot B(t)\right] = 2A\,\frac{d}{dt}\left[e^{-2t^2} B(t)\right] =$$

$$= 2A\left[-4t\, e^{-2t^2} B(t) + e^{-2t^2}\cdot V\right] = \boxed{2A\cdot V e^{-2t^2} - 8t\,\forall(t)\, e^{-2t^2}}$$

$$\int_{sc} \rho\, j\, \vec{V}_{r_{sc}} \cdot d\vec{A} = \rho \int \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = \rho\left[\overset{\varnothing}{\cancel{\int_1}} + \cancel{\int_2} + \int_3 + \overset{\varnothing}{\cancel{\int_4}}\right] =$$

$$= \rho\left[(3At)\,B(t) + \left[B(t)\cdot t - V\right] A\right] =$$

$$= 2e^{-2t^2}\left[3\forall(t)\cdot t + \forall(t)\, t - A\cdot V\right] =$$

$$= \boxed{-2A\cdot V e^{-2t^2} + 8t\,\forall(t)\, e^{-2t^2}}$$

Cuestión 6.

a) La expresión general del campo de velocidades en flujo de Couette, para este caso concreto es:

$$u(y) = \frac{\frac{\partial p}{dx} - \gamma \operatorname{sen}\theta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

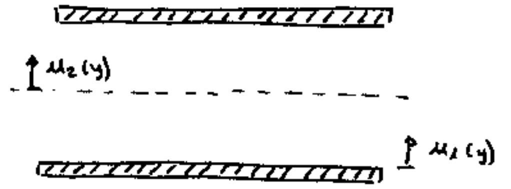
$$\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = \frac{P_B - P_A}{L} = -\frac{\Delta p}{L} \qquad \underline{1\,\text{pto.}}$$

luego:

$$u(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + c_1 y + c_2$$

Las condiciones de contorno para definir los campos de velocidades son:

$$u_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} y^2 + c_1 y + c_2 \quad \underline{0'5\,\text{pto}} \quad u_2(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_2 L} y^2 + c_3 y + c_4$$



- $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ u_1(y=0)=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{c_2 = 0}$ • $\left.\begin{array}{l} y=h \\ u_2(y=h)=0 \end{array}\right\} \boxed{c_4 = \frac{\Delta p}{2\mu_2 L} h^2 - c_3 h}$

0'5 pto.

- $u_1(y=h) = u_2(y=0)$

$$\boxed{-\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} h^2 + c_1 h = c_4} \quad \underline{1\,\text{pto.}}$$

- $\tau_1(y=h) = \tau_2(y=0) \rightarrow \mu_1 \left.\frac{du_1}{dy}\right|_{y=h} = \mu_2 \left.\frac{du_2}{dy}\right|_{y=0}$ $\quad \underline{2\,\text{pto.}}$

$$\boxed{-\frac{\Delta p}{L} h + \mu_1 c_1 = \mu_2 c_3}$$

La resolución de las cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se obtienen las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 que definen los dos campos de velocidades.

b) Las potencias que intervienen en un balance energético del fluido 1 son:

P_1 : potencia ejercida por el fluido 2 sobre el 1.

P_Q : potencia debida al gradiente de presiones.

P_d : potencia disipada por rozamiento viscoso.

- $$\tau = \mu_1 \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = c_1 \mu_1 - \frac{\Delta p}{L} h$$

$$F_1 = \tau \cdot L \cdot b = \left(c_1 \mu_1 - \frac{\Delta p}{L} h\right) L \cdot b$$

$$u_1 (y=h) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} h^2 + c_1 h + c_2$$

$$\boxed{P_1 = \left(c_1 \mu_1 - \frac{\Delta p}{L} h\right) L \cdot b \cdot \left(-\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} h^2 + c_1 h + c_2\right)}$$ 1 pto.

- $$Q = \int_0^h u_1(y)\, b\, dy = b \int_0^h \left(-\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} y^2 + c_1 y + c_2\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{\Delta p}{6\mu_1 L} y^3 + c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y\right)_0^h \cdot b = \boxed{b\left(-\frac{\Delta p}{6\mu_1 L} h^3 + c_1 \frac{h^2}{2} + c_2 h\right)}$$ 1 pto.

$$P_Q = \Delta p \cdot Q = \boxed{\Delta p \cdot b \cdot \left(-\frac{\Delta p}{6\mu_1 L} h^3 + c_1 \frac{h^2}{2} + c_2 h\right)}$$

- $$P_d = \int \Phi \, dV$$

$$\Phi = \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \mu_1 \left(-\frac{\Delta p}{\mu_1 L} + c_1\right)^2 = \mu_1 c_1^2 - 2 c_1 y \frac{\Delta p}{L} + \frac{\Delta p^2}{\mu_1 L^2} y^2$$

$$P_d = \int_0^h \left(\mu_1 c_1^2 - 2 c_1 y \frac{\Delta p}{L} + \frac{\Delta p^2}{\mu_1 L^2} y^2\right) L \cdot b \cdot dy =$$

$$= \boxed{\left(\mu_1 c_1^2 h - c_1 \frac{\Delta p}{L} h^2 + \frac{\Delta p^2}{3\mu_1 L^2} h^3\right) L \cdot b}$$ 1 pto

El planteamiento del balance de potencias es:

$$P_1 + P_Q = P_d$$ 2 pto.

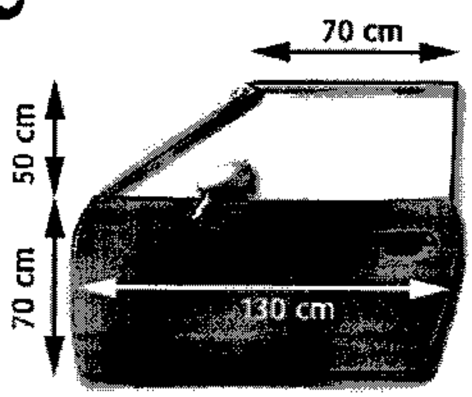
$$P_Q = \Delta p \cdot Q =$$ 1 pto.

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

CUESTIÓN 1 (16.67%)

El propietario del coche de la figura sufre un accidente, y cae a un lago de agua dulce (ρ=1000 Kg/m^3) de 15 m de profundidad . El vehículo, que con las ventanillas subidas representa un compartimento estanco, se hunde a una velocidad constante de 0.5 m/s. Dadas las dimensiones de la puerta indicadas en la figura, determinar:



a) La fuerza que será necesario aplicar en el extremo para abrir la puerta, en función del tiempo (a partir del momento en el que la puerta está totalmente sumergida).

b) Valor de la fuerza cuando el vehículo alcanza el fondo del lago.

Nota: La puerta puede considerarse rectangular, con un ancho fijo de 130 cm, y la ventanilla trapezoidal. La distancia desde el suelo hasta la parte baja de la puerta es de 30 cm.

CUESTIÓN 2 (16.67%)

El perfil de velocidades genérico en una conducción circular viene dado por la expresión $V(r)=V_0\left(1-\dfrac{r}{R}\right)^n$

Determinar para un valor del caudal Q_0 y un radio R de la conducción los valores de:

a) Velocidad máxima V_0 en una determinada sección.

b) Factor de corrección de la energía cinética.

NOTA: Se adjuntan los valores de diferentes integrales indefinidas:

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} \qquad si\; n\neq -1$$

$$\int x\,(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2}-\frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$$

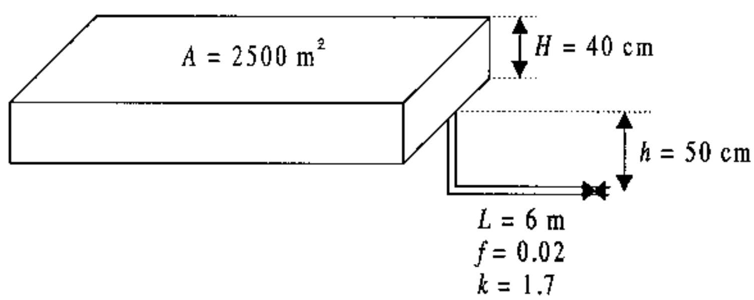
Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

CUESTIÓN 3 (16.67%)

El vaciado de un estanque de sección $A = 2500$ m^2 y altura $H = 40$ cm se realiza mediante una tubería de longitud $L = 6$ m y factor de fricción $f = 0.02$ en cuyo extremo hay una válvula de compuerta (el coeficiente de pérdidas menores de toda la instalación es $k = 1.7$). La sección de salida de la tubería de vaciado se encuentra a un desnivel $h = 50$ cm sobre la solera del estanque.

Despreciando el término de inercia, determinar el diámetro mínimo de la tubería para que el estanque se vacíe completamente durante un día.

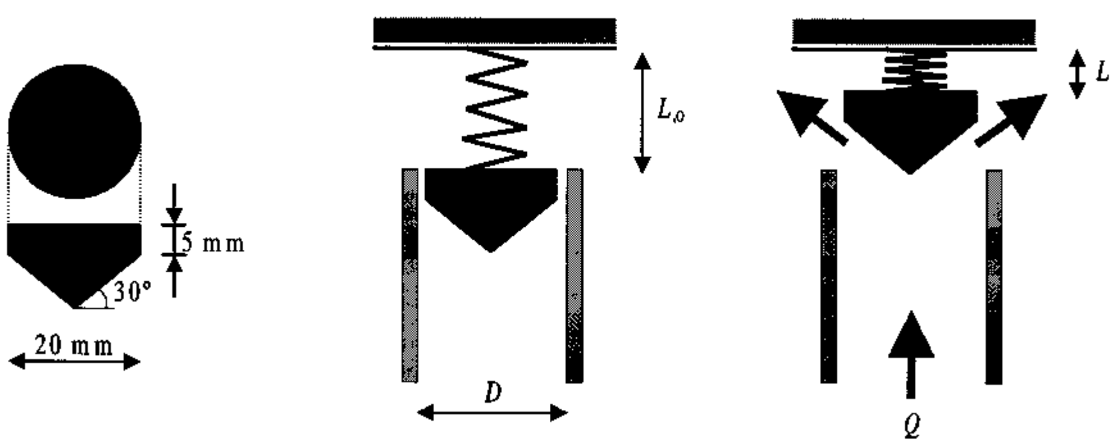


Pérdidas por fricción $= f\dfrac{L}{D}\dfrac{v^2}{2g}$

Pérdidas menores $= k\dfrac{v^2}{2g}$

CUESTIÓN 4 (16.67%)

El dispositivo de la figura consiste en una salida de agua a través de una tubería de diámetro $D = 20$ mm. Dicha salida se encuentra taponada por una pieza de masa $M = 60$ g y de las dimensiones mostradas en la figura, sujeta por un muelle de constante $K = 40$ N/m ($F_{muelle} = K \cdot \Delta L$).



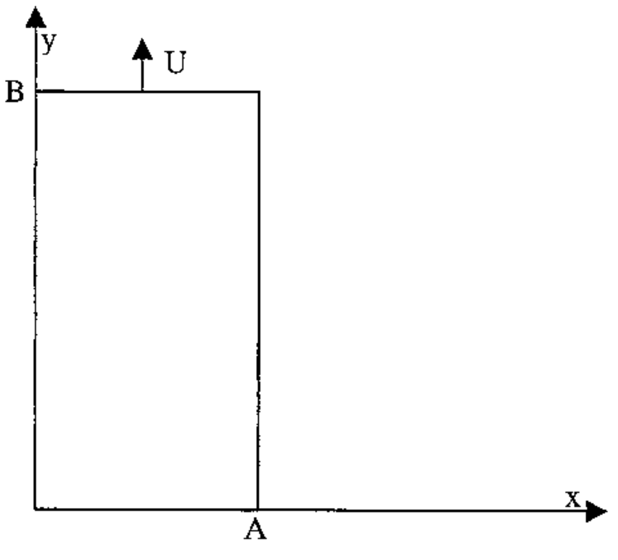
Si el fluido es agua ($\rho = 1000$ Kg/m^3) y la longitud del muelle en reposo es $L_0 = 25$ mm, determinar la posición del tapón (longitud L) cuando el caudal que está saliendo es $Q = 0.9$ l/s.

NOTA.- Despreciar el rozamiento del agua con el tapón. Despreciar la diferencia de cotas entre la parte superior e inferior del tapón. Suponer que la salida de agua es tangente a la zona cónica del tapón, tal y como se representa en el dibujo.

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

CUESTIÓN 5 (16.67%)



Sea J una propiedad extensiva de un fluido y j, el valor de dicha propiedad por unidad de masa. Sabiendo que la J total del sistema no varía con el tiempo, comprobar que se cumple el Teorema de Arrastre de Reynolds para el volumen de control deformable de la figura, en el que el lado superior se mueve con velocidad U.

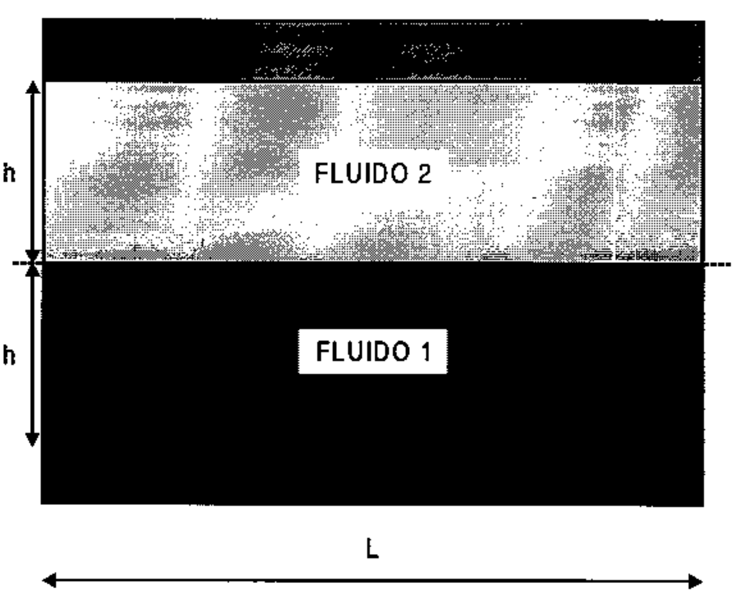
Se proporcionan valores de j, la densidad y el campo de velocidades.

$j = 1$ $\qquad u = 3xt$

$\rho = 2 \cdot e^{-2t^2}$ $\qquad v = yt$

CUESTIÓN 6 (16.67%)

Se dispone de dos placas planas de longitud L, anchura $2h$ y profundidad b, tal como indica la figura adjunta. Entre dichas placas fluyen dos fluidos 1 y 2, de viscosidades μ_1 y μ_2 y densidades ρ_1 y ρ_2, con $\rho_1 > \rho_2$, que permanecen en contacto en todo momento pero sin producirse mezcla alguna y que están sometidos a un gradiente de presiones $\Delta p = p_A - p_B > 0$. Determinar:



a) Campo de velocidades en cada uno de los fluidos. Plantear tan solo las ecuaciones necesarias para obtener las distintas constantes de integración de cada uno de los fluidos. Para la definición del campo de velocidades de cada uno de los fluidos emplear un origen para la coordenada y distinto.

b) Plantear el balance de potencias sobre el fluido 1. El planteamiento de dicho balance de potencias se realizará sin calcular las constantes de integración del perfil de velocidades. En el balance de potencias se deben recoger todas las potencias no nulas que participan en el mismo y plantear el cálculo de las mismas.

Grupo Mecánica de Fluidos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 13 DE JUNIO DE 2000

Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho\vec{h}\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\rho d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{F}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r d\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{sc}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{M}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall+\int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{sc}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall+\int_{S.C.}\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Expresión general del flujo laminar plano incompresible

$$u(y)=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma\operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Expresión general del flujo laminar de un fluido incompresible en un conducto circular

$$u(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\operatorname{sen}\theta\right)r^2+C$$

Expresión de la función disipación en un flujo laminar plano incompresible

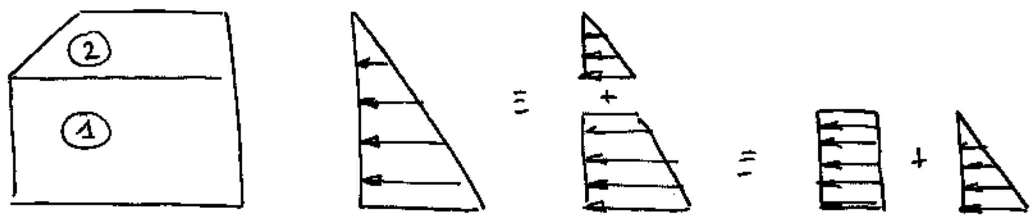
$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Expresión de la función disipación en un flujo laminar incompresible en un conducto circular

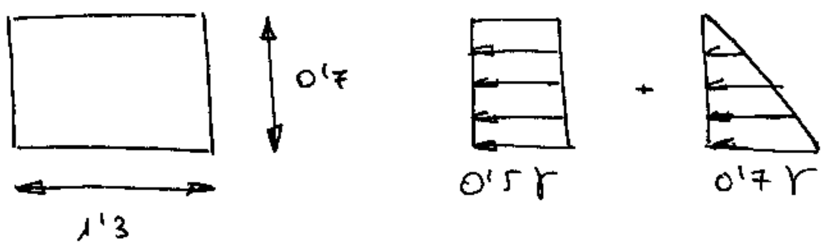
$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

CUESTIÓN 1

Vamos a descomponer la puerta en dos (puerta + ventanilla). Como la fuerza hay que calcularla a partir del momento en el que esté totalmente sumergida, la distribución de presiones será:



(1) Para la puerta, y en el instante inicial:



$$F_{1_0} = 0'5\,\gamma\,(0'7 \times 1'3) + \frac{0'7\,\gamma}{2}(0'7 \times 1'3) = 7580'3\ N$$

El valor del primer sumando, irá aumentando con la profundidad, y por lo tanto con el tiempo:

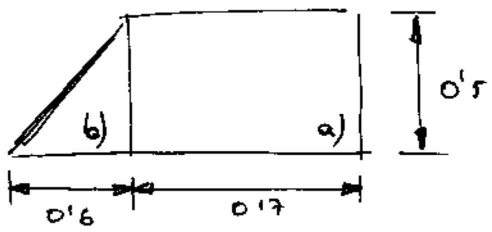
$$\boxed{F_1(t)} = (0'5 + 0'5\,t)\,\gamma\,(0'7 \times 1'3) + \frac{0'7\,\gamma}{2}(0'7 \times 1'3) =$$

$$= \boxed{4459\ t + 7580'3\ N}$$

En el instante inicial, la parte baja de la puerta, estará a 1'2 m de profundidad. En el instante final, a 14'7 m

$$\boxed{t} = \frac{14'7 - 1'2}{0'5} = \boxed{27\ s}$$

$$F_1(27s) = 4459 \cdot 27 + 7580'3 = \boxed{127973'3\ N}$$

② 

También descompondremos la ventanilla en dos partes

a) $$\boxed{F(t)} = \left(\frac{0'5\,\gamma}{2} + 0'5\,\gamma\, t\right)(0'5 \times 0'7) =$$

$$= \boxed{1715\,t + 857'5\ N}$$

$$t = 27 \longrightarrow \boxed{F_a = 47162'5\,N}$$

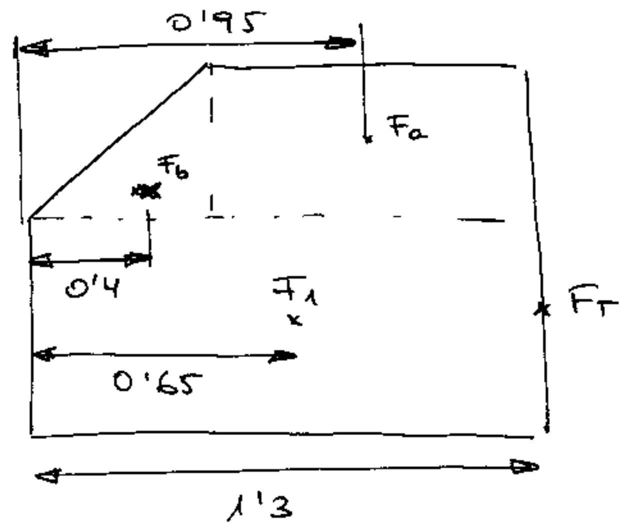
b) $$F(t) = \left[\overbrace{2\cdot\frac{0'5\,\gamma}{3} + 0'5\,\gamma\, t}^{P_G}\right] \cdot \overbrace{\frac{0'6 \times 0'5}{2}}^{A_b} =$$

$$= \boxed{735\,t + 490\ N}$$

$$t = 27 \longrightarrow \boxed{F_b = 20335\ N}$$

La fuerza necesaria para abrir la puerta será la que haga nulos los momentos:

$$\Sigma \vec{M} = 0$$



$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow F_1 \cdot 0'65 + F_a \cdot 0'95 + F_b \cdot 0'4 + F_T \cdot 1'3$$

c) Fuerza en función del tiempo

$$1'3\, F_T = 0'65\,(4459t + 7580'3) + 0'95\,(1715t + 857'5) +$$
$$+ 0'4\,(735t + 490)$$

$$\boxed{F_T} = 2229'5t + 3790'15 + 1253'3t + 626'63 +$$
$$+ 226'15t + 150'8 =$$
$$= \boxed{3708'95\,t + 4567'58}\ N$$

2) Fuerza total al llegar al fondo $\Rightarrow t = 27$

$$\boxed{F_T = 104709'23\ N}$$

Problema 2.

a) El planteamiento del caudal Q es:

$$Q = \int_0^R v(r)\, 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^R V_0 \left(1-\frac{r}{R}\right)^n r\, dr = \begin{pmatrix} a=-1/R \\ b=1 \\ n=n \end{pmatrix}$$

$$= 2\pi V_0 \left[\frac{(1-r/R)^{n+2}}{n+2} R^2 - \frac{(1-r/R)^{n+1}}{n+1} R^2 \right]_0^R =$$

$$= 2V_0 \pi R^2 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{2V_0 \pi R^2}{(n+1)(n+2)}$$

La velocidad máxima es:

$$\boxed{V_0 = \frac{Q}{2\pi R^2}(n+1)(n+2)} = \frac{Q}{2\pi R^2}(n^2+3n+2)$$

4 pto.

b) La expresión del factor de corrección de la energía cinética es:

$$\alpha = \frac{\int v^3 dA}{V_m^3 \cdot A}$$

$$\int v^3 dA = \int_0^R V_0^3 (1-r/R)^{3n} 2\pi r\, dr = 2\pi V_0^3 \int_0^R (1-r/R)^{3n} r\, dr = \begin{pmatrix} a=-1/R \\ b=1 \\ n=3n \end{pmatrix}$$

$$= 2V_0^3 \pi R^2 \left[\frac{(1-r/R)^{3n+2}}{3n+2} - \frac{(1-r/R)^{3n+1}}{3n+1} \right]_0^R = 2V_0^3 \pi R^2 \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

3 pto.

La velocidad media es:

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{2V_0}{(n+1)(n+2)}$$

(2 pto.)

El valor final del factor de corrección de la energía cinética es:

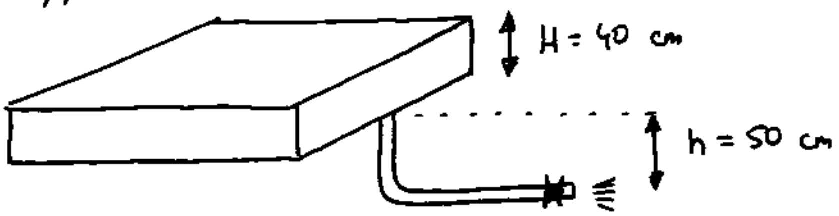
$$\boxed{\alpha = \frac{\int v^3 dA}{V_m^3 \cdot A} = \frac{(n+1)^3(n+2)^3}{4(3n+1)(3n+2)}}$$

3 pto.

6 pto.

CUESTIÓN 3

$A = 2500\ m^2$



$L = 6\ m$

$D\ ?$

$f = 0{,}02$

$$h_{locales} = k \cdot \frac{v^2}{2g}$$

SALIDA DEPÓSITO → $k = 0{,}5$

CODO 90° → $k = 0{,}9$

VALVULA COMPUERTA → $k = 0{,}3$

$1{,}7$

BERNOULLI

$$z(t) + h = \frac{v(t)^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{v(t)^2}{2g} + k\frac{v(t)^2}{2g}$$

CONTINUIDAD

$$A \cdot \frac{dz(t)}{dt} = -v(t) \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas → $z(t)$ y $v(t)$

$$z(t) + h = \left(1 + f\frac{L}{D} + k\right) \cdot \frac{v(t)^2}{2g}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2g\left(z(t) + h\right)}{1 + f\frac{L}{D} + k}}$$

sustituyendo v(t) en la ecuación de continuidad:

$$A \cdot \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \cdot \sqrt{z(t)+h}$$

ecuación diferencial de variables separables:

$$\int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{z+h}} = -\frac{\pi D^2}{4A} \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \int_0^T dt$$

$$2 \cdot \sqrt{z+h} \Big|_{z=H}^{z=0} = -\frac{\pi D^2}{4A} \cdot \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \cdot t \Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$\boxed{2\sqrt{h} - 2\sqrt{H+h} = -\frac{\pi D^2}{4A} \cdot \sqrt{\frac{2g}{1+f\frac{L}{D}+k}} \cdot T}$$

sustituyendo valores:

$$-0{,}48315 = -3{,}14159 \cdot 10^{-4} \cdot D^2 \cdot \sqrt{\frac{19{,}62}{2{,}7+\frac{0{,}12}{D}}} \cdot 86400$$

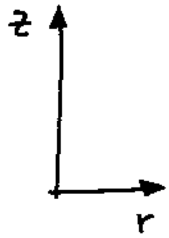
$$D^2 = 0{,}0178 \cdot \sqrt{\frac{2{,}7+\frac{0{,}12}{D}}{19{,}62}}$$

iterando:

$$D = 0{,}1 \text{ m} \longrightarrow 0{,}089 \text{ m} \longrightarrow 0{,}0899 \text{ m}$$

$$\boxed{D = 90 \text{ mm}}$$

CUESTION 4



$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{sc} \vec{v} \cdot \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{s.ent} \vec{v} \cdot \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A}) + \int_{s.sal} \vec{v} \cdot \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$|\vec{V}_{ent}| = |\vec{V}_{sal}| = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{ent} = \dfrac{4Q}{\pi D^2} \vec{k} \\ \vec{V}_{sal} = \dfrac{4Q}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen}\alpha \, \vec{k} + \cos\alpha \, \vec{u}_r \right) \end{cases}$$

la fuerza debida a la componente radial se compensa

Sustituyendo en la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$-Mg\vec{k} - k \cdot \Delta L \cdot \vec{k} = \rho Q \left(V_{sal,z} - V_{ent,z} \right) \vec{k}$$

$$-Mg\vec{k} - k \cdot \Delta L \cdot \vec{k} = \underbrace{\frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen}\alpha - 1 \right) \vec{k}}_{\text{reacción a la fuerza del chorro}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{chorro} = - \frac{4\rho Q^2}{\pi D^2} \left(\operatorname{sen}\alpha - 1 \right) \vec{k}}$$

$$-Mg - k \cdot \Delta L = \frac{4\rho Q^2}{\pi D^2}(\operatorname{sen}\alpha - 1)$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{\frac{4\rho Q^2}{\pi D^2}(1 - \operatorname{sen}\alpha) - Mg}{K}}$$

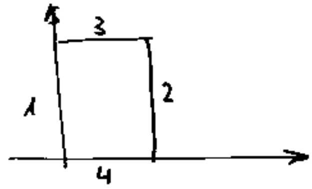
Sustituyendo valores:

$$\left|\begin{array}{l} \rho = 1000 \ Kg/m^3 \\ Q = 0{,}9 \ l/s \\ D = 20 \ mm \\ \alpha = 30^\circ \\ M = 60 \ g \\ K = 40 \ N/m \end{array}\right.$$

$$\Delta L = 0{,}0175 \ m = 17{,}5 \ mm$$

Como $L_0 = 25 \ mm$ $\longrightarrow$ $\boxed{L = 7{,}5 \ mm}$

CUESTIÓN 5



$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\forall C} j\,\rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho\, j\, \vec{V}_{r_{sc}}\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \emptyset \qquad (\text{J constante en el tiempo})$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C} j\,\rho\, d\forall = \frac{d}{dt}\left[\rho(t)\cdot\forall(t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[2e^{-2t^2}\cdot A\cdot B(t)\right] = 2A\,\frac{d}{dt}\left[e^{-2t^2}B(t)\right] =$$

$$= 2A\left[-4t\, e^{-2t^2}B(t) + e^{-2t^2}\cdot V\right] = \boxed{2A\cdot V e^{-2t^2} - 8t\,\forall(t)\,e^{-2t^2}}$$

$$\int_{sc} \rho\, j\, \vec{V}_{r_{sc}}\cdot d\vec{A} = \rho\int \vec{V}_r\cdot d\vec{A} = \rho\left[\cancel{\int_1}^{\emptyset} + \cancel{\int_2} + \int_3 + \cancel{\int_4}^{\emptyset}\right] =$$

$$= \rho\left[(3At)\,B(t) + \left[B(t)\cdot t - V\right]A\right] =$$

$$= 2e^{-2t^2}\left[3\forall(t)\cdot t + \forall(t)\,t - A\cdot V\right] =$$

$$= \boxed{-2A\cdot V e^{-2t^2} + 8t\,\forall(t)\,e^{-2t^2}}$$

Cuestión 6.

a) La expresión general del campo de velocidades en flujo de Couette, para este caso concreto es:

$$u(y) = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

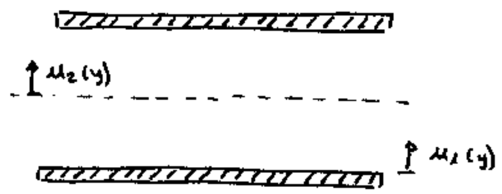
$$\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = \frac{P_B - P_A}{L} = -\frac{\Delta p}{L} \qquad \underline{1\,\text{pto.}}$$

luego:

$$u(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu L} y^2 + c_1 y + c_2$$

Las condiciones de contorno para definir los campos de velocidades son:

$$u_1(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} y^2 + c_1 y + c_2 \quad \underline{0'5\,\text{pto}} \quad u_2(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu_2 L} y^2 + c_3 y + c_4$$



- $\left.\begin{matrix} y=0 \\ u_1(y=0)=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{c_2 = 0}$ • $\left.\begin{matrix} y=h \\ u_2(y=h)=0 \end{matrix}\right\} \boxed{c_4 = \frac{\Delta p}{2\mu_2 L} h^2 - c_3 h}$

0'5 pto.

- $u_1(y=h) = u_2(y=0)$

$$\boxed{-\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} h^2 + c_1 h = c_4} \qquad \underline{1\,\text{pto.}}$$

- $\tau_1(y=h) = \tau_2(y=0) \rightarrow \mu_1 \left.\frac{du_1}{dy}\right|_{y=h} = \mu_2 \left.\frac{du_2}{dy}\right|_{y=0}$ $\underline{2\,\text{pto.}}$

$$\boxed{-\frac{\Delta p}{L} h + \mu_1 c_1 = \mu_2 c_3}$$

La resolución de las cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se obtienen las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 que definen los dos campos de velocidades.

b) Las potencias que intervienen en un balance energético del fluido 1 son:

P_1 : potencia ejercida por el fluido 2 sobre el 1.

P_Q : potencia debida al gradiente de presiones.

P_d : potencia disipada por rozamiento viscoso.

- $\tau = \mu_1 \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = c_1\mu_1 - \frac{\Delta p}{L} h$

$$F_1 = \tau \cdot L \cdot b = \left(c_1\mu_1 - \frac{\Delta p}{L} h\right) L \cdot b$$

$$u_1(y=h) = -\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} h^2 + c_1 h + c_2$$

$$\boxed{P_1 = \left(c_1\mu_1 - \frac{\Delta p}{L} h\right) L \cdot b \cdot \left(-\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} h^2 + c_1 h + c_2\right)}$$ 1 pto.

- $\boxed{Q} = \int_0^h u_1(y)\, b\, dy = b\int_0^h \left(-\frac{\Delta p}{2\mu_1 L} y^2 + c_1 y + c_2\right) dy =$

$$= \left(-\frac{\Delta p}{6\mu_1 L} y^3 + c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y\right)_0^h \cdot b = \boxed{b\left(-\frac{\Delta p}{6\mu_1 L} h^3 + c_1\frac{h^2}{2} + c_2 h\right)}$$ 1 pto.

$$\boxed{P_Q} = \Delta p \cdot Q = \boxed{\Delta p \cdot b \cdot \left(-\frac{\Delta p}{6\mu_1 L} h^3 + c_1\frac{h^2}{2} + c_2 h\right)}$$

- $P_d = \int \Phi \, d\forall$

$$\Phi = \mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \mu_1\left(-\frac{\Delta p}{\mu_1 L} + c_1\right)^2 = \mu_1 c_1^2 - 2c_1 y\frac{\Delta p}{L} + \frac{\Delta p^2}{\mu_1 L^2} y^2$$

$$\boxed{P_d} = \int_0^h \left(\mu_1 c_1^2 - 2c_1 y\frac{\Delta p}{L} + \frac{\Delta p^2}{\mu_1 L^2} y^2\right) L \cdot b \cdot dy =$$

$$= \boxed{\left(\mu_1 c_1^2 h - c_1\frac{\Delta p}{L} h^2 + \frac{\Delta p^2}{3\mu_1 L^2} h^3\right) L \cdot b}$$ 1 pto

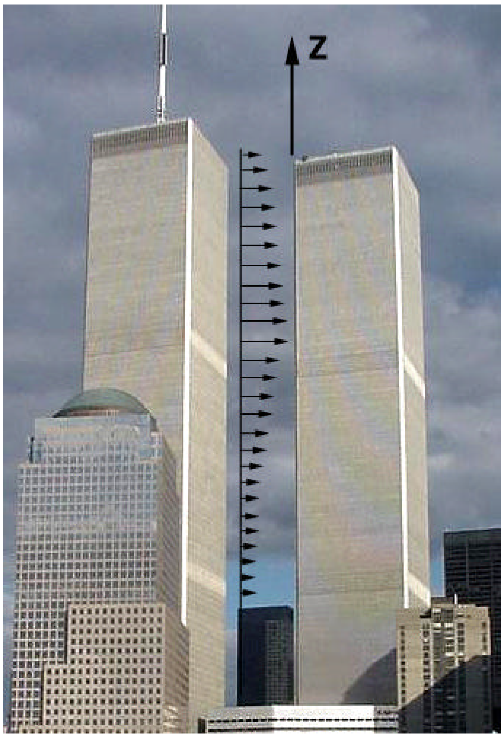
El planteamiento del balance de potencias es:

$$P_1 + P_Q = P_d$$ 2 pto.

$$P_Q = \Delta p \cdot Q =$$ 1 pto.

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
VIERNES 8 DE SEPTIEMBRE DE 2000

Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia



PROBLEMA 1 (33.33%)

Una de las torres gemelas del World Trade Center en Nueva York está sometida, en su lado de barlovento, a una distribución de presiones relativas, variable con la altura, ocasionada por vientos de 24 Km por hora:

$$P = A \cdot z^4 + B \cdot z$$

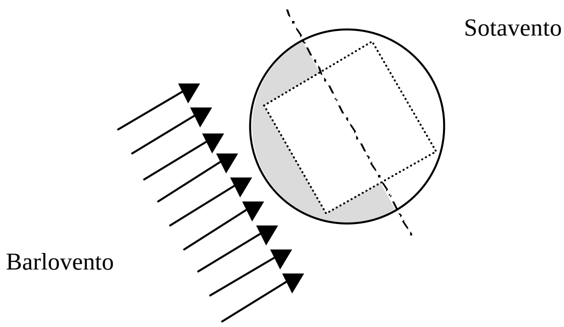
La presión en el lado de sotavento (opuesto al anterior) es la atmosférica y puede considerarse constante. Teniendo en cuenta que el edificio cuenta con una planta cuadrada de 24 m de lado, y que la altura total es de 411 m, calcular

a) El momento total debido al viento respecto a la base. (considerar que el viento no actúa sobre los otros dos lados del edificio)

b) Supóngase que se pretende añadir un restaurante panorámico giratorio en lo más alto de la torre. Si el radio del cilindro construido fuera de 40 m, y la altura de 12 m, calcular la fuerza del viento sobre el mismo

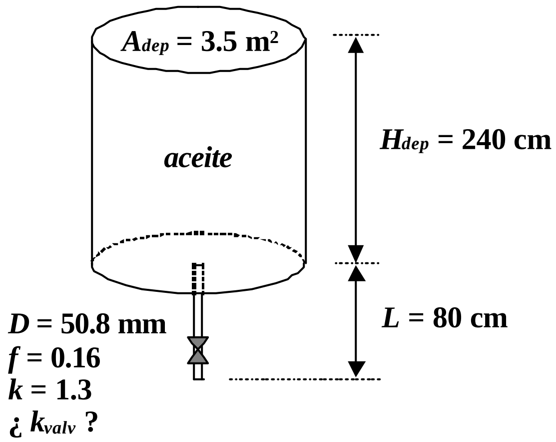
NOTA: LAS FUERZAS HORIZONTALES PUEDEN CALCULARSE DE IGUAL MANERA QUE EN EL APARTADO A, CONSIDERANDO UN "LADO" DE BARLOVENTO Y OTRO DE SOTAVENTO. PARA LAS FUERZAS VERTICALES SE CONSIDERARÁ LA ACCIÓN DEL VIENTO SOBRE LA PARTE INFERIOR DEL CILINDRO, SOMBREADA EN LA FIGURA

A $=1.27 \cdot 10^{-8}$ Kp/m^6
B = 0.89 Kp/m^3
P_{atm} en la base = 1007 mbar



PROBLEMA 2 (33.33%)

Un depósito abierto de sección A_{dep} = 3.5 m^2 y altura H_{dep} = 240 cm contiene aceite de densidad ρ = 840 Kg/m^3 y viscosidad μ = 165 centipoises. Dicho depósito se vacía mediante una tubería de D = 50.8 mm, longitud L = 80 cm y coeficiente de pérdidas menores k = 1.3. Para controlar la descarga se tiene una válvula cuyo coeficiente de pérdidas es k_{valv}.



a) Suponiendo que el aceite se mueve en el interior de la tubería en flujo laminar con factor de fricción constante f = 0.16, y despreciando el término de inercia, determinar la posición de la k_{valv}) para que el depósito se vacíe completamente en 45 minutos.

b) Con la válvula en la posición del apartado anterior, ¿qué nivel constante habría que mantener en el depósito para que la velocidad media en la sección de salida fuera 1.54 m/s?

c) Comprobar si efectivamente se trata de flujo laminar o no.

d) Deducir la expresión del campo de velocidades en una sección recta de la tubería de descarga.

$$\left(k+k_{valv}\right)\frac{v^2}{2g}$$

EXAMEN MECÁNICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
VIERNES 8 DE SEPTIEMBRE DE 2000
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

PROBLEMA 3 (33.33%)

Una barcaza de sección S uniforme en toda la profundidad de la misma se emplea para la extinción de incendios en una determinada población surcada de canales. Dicha barcaza dispone en la parte superior de una manguera rígida cuya inclinación con la horizontal es de 30º y orientada hacia la popa de la embarcación, siendo su sección de salida $A_0/4$. En la figura se recoge la situación de un incendio en la que la barcaza se encuentra amarrada a una distancia L del borde del canal y se encuentra parada. El sistema de bombeo de agua se realiza aspirando el mismo por una abertura situada en la proa del barco de sección A_0.

La profundidad máxima de la barcaza es H y M la masa de la barcaza. Suponiendo despreciable el peso del agua por el interior del sistema de extinción que se encuentra a bordo de la barcaza, determinar:

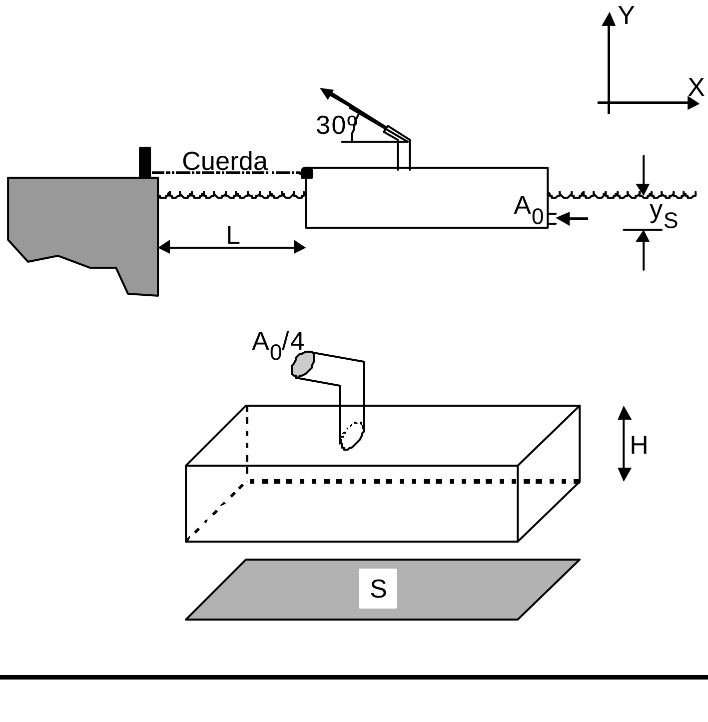
a) Caudal máximo de agua que puede emplearse en la barcaza sin que ésta se hunda.

b) Tensión que aguanta la cuerda de amarre para un determinado caudal Q de extinción. Se admite en todo momento que la cuerda se encuentra en posición horizontal independientemente de lo que se hunda la barcaza.

En un determinado momento de la extinción del incendio en la que el caudal es Q se rompe la cuerda de amarre de la embarcación. Admitiendo que al romperse el amarre el caudal que sigue emitiendo la manguera de extinción es el mismo, y que la resistencia al avance de la embarcación es proporcional a la velocidad con que se desplaza la misma, determinar:

c) Ecuación del movimiento sigue la embarcación desde el momento en que se rompe la cuerda. Evolución de la

d) Tiempo que tarda en alcanzarse la mitad de la velocidad de régimen permanente.



EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h}\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h} \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho\, d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Pérdidas por fricción en conducción circular

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C} \left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}} d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, d\forall + \int_{S.C.} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo Laminar Incompresible con simetría Plana

Campo de Velocidades

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo Laminar Incompresible con simetría Cilíndrica

Campo de Velocidades

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right) r^2 + C$$

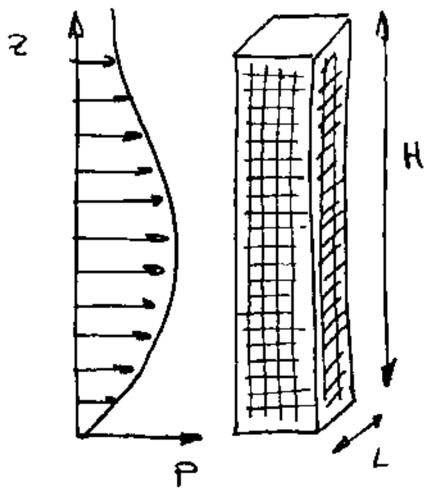
Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

PROBLEMA 1



La fuerza debida al viento puede obtenerse a partir de los valores de la presión en cada punto.

Considerando el valor de P uniforme en todo lo ancho del edificio para un mismo z, tenemos que:

$$F_B = \int P \cdot dA = \int_0^H P \cdot (L \cdot dz)$$

$$F_B = L \cdot \int_0^H \left(Az^4 + Bz\right) dz =$$

$$= L \left(\frac{Az^5}{5} + \frac{Bz^2}{2}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= L \cdot H^2 \left(\frac{A \cdot H^3}{5} + \frac{B}{2}\right)$$

Sustituyendo

$$F_B = 24 \cdot 411^2 \left(\frac{1'27 \cdot 10^{-8} \cdot 411^3}{5} + \frac{0'89}{2}\right) = \boxed{2'519 \cdot 10^6 \text{ kp}}$$

$$\boxed{F_B = 24'61 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

Para determinar el punto de aplicación de la fuerza de barlovento, es necesario sacar momentos de primer orden respecto a la base y obtener el c.d.g. del "volumen de presiones" de la distribución. En concreto:

$$F \cdot z_p = \int_0^H z \cdot p \cdot dA = \int_0^H z \cdot p \, (L \cdot dz)$$

$$z_p = \frac{L\left(\frac{A \cdot H^6}{6} + \frac{B \cdot H^3}{3}\right)}{F}$$

$$= \frac{24}{2'519 \cdot 10^6} \left(\frac{1'27 \cdot 10^{-8} \cdot 411^6}{6} + \frac{0'89 \cdot 411^3}{3} \right) =$$

$$\boxed{= 293'44 \text{ m}}$$

Lo que representa el punto de aplicación de la fuerza debida a las presiones <u>relativas</u> que actúan en la cara de barlovento. El momento respecto a la base será

$$\boxed{M} = 24'61 \cdot 10^6 \cdot 293'44 = \underline{72'21 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{M}}$$

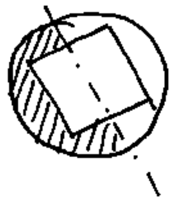
b) La fuerza horizontal se calcula igual que en el primer apartado sobre la proyección del cilindro

$$F_B = \int_{411}^{423} P(L \cdot dz) = 27 \int_{411}^{423} (A \cdot z^4 + B \cdot z)\, dz$$

$$= 27 \left(\frac{A \cdot z^5}{5} + \frac{B \cdot z^2}{2} \right) \Big|_{411}^{423} =$$

$$= 2'45 \cdot 10^5 \text{ kp} = \boxed{2'4 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

La fuerza vertical será función de la acción del viento sobre la parte expuesta del cilindro:



$$\boxed{S =} \ \frac{1}{2}\left[\frac{\pi D^2}{4} - 24^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi \cdot 40^2}{4} - 24^2\right] = \underline{340 \text{ m}^2}$$

$$\boxed{P =} \ A \cdot 411^4 + B \cdot 411 = 728'18 \text{ kp/m}^2 = \underbrace{7143'4 \text{ N/m}^2}_{Pa}$$

$$\boxed{F_v = 7143 \cdot 340 = 2'42 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

PROBLEMA 2

a) **BERNOULLI**

$$z(t) + L = \alpha \frac{v(t)^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{v(t)^2}{2g} + k \frac{v(t)^2}{2g} + K_{valv} \frac{v(t)^2}{2g}$$

CONTINUIDAD

$$A_{dep} \cdot \frac{dz(t)}{dt} = -v(t) \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas $\longrightarrow$ $z(t)$ y $v(t)$

$$z(t) + L = \left(\alpha + f \frac{L}{D} + k + K_{valv} \right) \cdot \frac{v(t)^2}{2g}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{2g\left(z(t)+L\right)}{\alpha + f\frac{L}{D} + k + K_{valv}}}$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$A_{dep} \cdot \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\alpha + f\frac{L}{D} + k + K_{valv}}} \cdot \sqrt{z(t)+L}$$

Ecuación diferencial de variables separables:

$$\int_{H_{dep}}^{0} \frac{dz}{\sqrt{z+L}} = -\frac{\pi D^2}{4 A_{dep}} \sqrt{\frac{2g}{\alpha + f\frac{L}{D} + k + K_{valv}}} \cdot \int_0^T dt$$

$$2\sqrt{z+L}\,\Big|_{z=H_{dep}}^{z=0} = -\frac{\pi D^2}{4 A_{dep}} \sqrt{\frac{2g}{\alpha + f\frac{L}{D} + k + K_{valv}}} \cdot t\,\Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$\boxed{2\sqrt{L} - 2\sqrt{H_{dep}+L} = -\frac{\pi D^2}{4 A_{dep}} \sqrt{\frac{2g}{\alpha + f\frac{L}{D} + k + K_{valv}}} \cdot T}$$

$$1,78885 - 3,57771 = -5,79094 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{19,62}{5,81969 + K_{valv}}} \cdot 2700$$

$$\boxed{K_{valv} = 9,17}$$

(b) Régimen permanente

$$z + L = \left(\alpha + f\frac{L}{D} + k + K_{valv}\right) \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$z + 0,8 = 14,98969 \cdot \frac{1,54^2}{2g}$$

$$\boxed{z = 1,012 \text{ m}}$$

(c) $\rho = 840 \ Kg/m^3$

$\mu = 165 \ cp = 0,165$ poiseuille

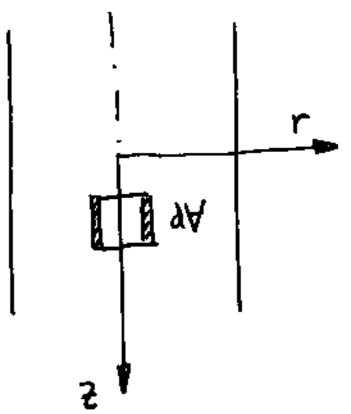
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,165}{840} = 1,96 \cdot 10^{-4} \ m^2/s$$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{1,54 \cdot 0,0508}{1,96 \cdot 10^{-4}} = 399,1$$

$\boxed{\text{FLUJO LAMINAR}}$

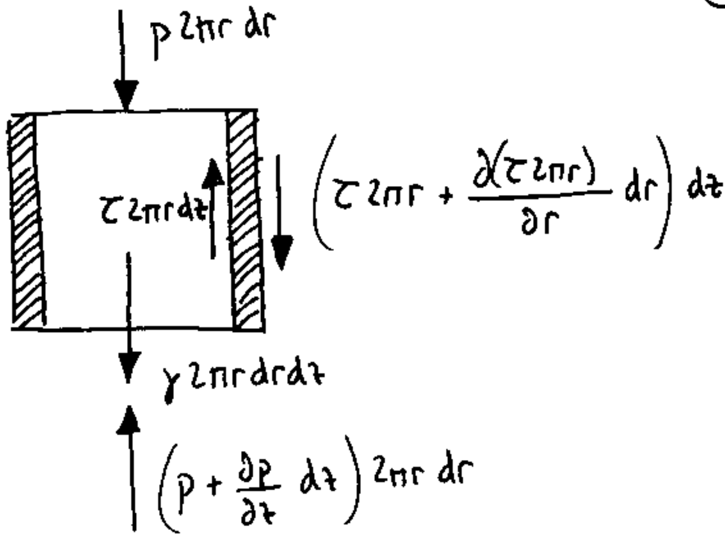
donde lógicamente $f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{399,1} = 0,16$

(d)



$$\boxed{\vec{V} = u(r)\vec{k}}$$

Balance de fuerzas:



$$p \cdot 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) 2\pi r dr + \left(\tau\, 2\pi r + \frac{\partial(\tau\, 2\pi r)}{\partial r} dr\right) dz - \tau\, 2\pi r\, dz + \gamma\, 2\pi r\, dr\, dz = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} + \gamma = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma = cte$$

$$\frac{d(r\tau)}{\partial r} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right) \cdot r$$

$$r \cdot \tau = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right) \cdot \frac{r^2}{2} + A$$

$$\frac{du}{dr} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right) \cdot \frac{r}{2\mu} + \frac{A}{\mu r}$$

$$\boxed{u(r) = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right) \cdot \frac{r^2}{4\mu} + \frac{A}{\mu} \ln r + B}$$

Condiciones de contorno $\longrightarrow$
$$\begin{cases} u(r)\big|_{r=0} = V_{max} \longrightarrow A = 0 \\ u(r)\big|_{r=R} = 0 \longrightarrow B = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right)\frac{R^2}{4\mu} \end{cases}$$

$$\boxed{u(r) = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right) \frac{r^2 - R^2}{4\mu}} \quad \text{con } \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma < 0$$

Problema 3.

a) El planteamiento de la ecuación de la cantidad de movimiento para V.C. inerciales, en componente vertical es:

$$\Sigma F_{ext_y} = \rho Q (V_{s_y} - V_{e_y})$$

$$\Sigma F_{ext_y} = \text{Empuje} - \text{Peso} = \gamma \cdot S \cdot Y_s - Mg$$

$$V_{s_y} = \frac{4Q}{A_0} \operatorname{sen}\alpha$$

$$V_{e_y} = 0$$

Luego: $$\gamma \cdot S \cdot Y_s - Mg = \rho \frac{4Q^2}{A_0} \operatorname{sen} 30$$

El caudal máximo será aquel que hace $Y_s = H$, momento en el que la barcaza se hunde.

$$\gamma \cdot S \cdot H - Mg = \frac{2\rho Q^2}{A_0}$$

$$\boxed{Q_{máx} = \sqrt{\frac{A_0(\gamma S H - Mg)}{2\rho}}}$$

b) El mismo planteamiento del apartado anterior, pero en componente horizontal es:

$$\Sigma F_{ext_x} = \rho Q (V_{s_x} - V_{e_x})$$

$$\Sigma F_{ext_x} = -T \text{ (tensión de la cuerda).}$$

$$V_{s_x} = -\frac{4Q}{A_0} \cos\alpha$$

$$V_{e_x} = -Q/A_0$$

Luego: $$-T = \rho \frac{Q^2}{A_0} \left[-4 \cos 30 + 1\right]$$

$$T = \rho \frac{Q^2}{A_0} (4 \cos 30 - 1)$$

$$\boxed{T = 2'464 \rho \frac{Q^2}{A_0}}$$

c) Planteamos ahora la ecuación de la cantidad de movimiento para V.C no inerciales, con la barcaza desplazándose. Para obtener la ec. del movimiento realizamos el planteamiento en componente horizontal:

$$\Sigma F_x - M\frac{du}{dt} = \rho Q\left(V_{s_x} - V_{e_x}\right)$$

$$\Sigma F_x = -K \cdot u \quad \text{(rozamiento)}$$

El término de la derecha es idéntico al del apartado anterior, por cuanto el caudal es el mismo. Por tanto:

$$-Ku - M\frac{du}{dt} = -2'464\,\rho\frac{Q^2}{A_0} \rightarrow M\frac{du}{dt} = 2'464\,\rho\frac{Q^2}{A_0} - Ku.$$

$$\int_0^{u(t)} \frac{du}{2'464\,\rho\frac{Q^2}{A_0} - Ku} = \int_0^t \frac{1}{M}\,dt \rightarrow \int_0^{u(t)} \frac{du}{A - Ku} = \frac{1}{M}t$$

$$A = 2'464\,\rho\frac{Q^2}{A_0}$$

$$-\frac{1}{K}\ln(A - Ku)\Big]_0^u = \frac{1}{M}t \rightarrow \left(1 - \frac{K}{A}u\right) = e^{-\frac{K}{M}t}$$

$$u(t) = \frac{A}{K}\left(1 - e^{-K/M\,t}\right) \rightarrow \boxed{u(t) = \frac{2'464\,\rho\,Q^2}{K A_0}\left(1 - e^{-\frac{K}{M}t}\right)}$$

d) La velocidad de régimen es:

$$u(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{2'464\,\rho\,Q^2}{K A_0} = u_0$$

El tiempo T_e en alcanzar la mitad de dicha velocidad es:

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{K}{M}T_e} \rightarrow -\ln 2 = -\frac{K}{M}T_e$$

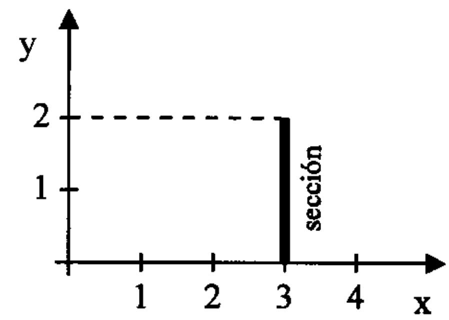
$$\boxed{T_e = \frac{M\ln 2}{K} = 0'693\,\frac{M}{K}}$$

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
VIERNES 3 DE SEPTIEMBRE DE 1999
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

PROBLEMA 1 (25%)

Dado el siguiente movimiento $\begin{Bmatrix} x = 4x_0t^2 + 1 \\ y = y_0t^2 - 3 \end{Bmatrix}$ se pide:

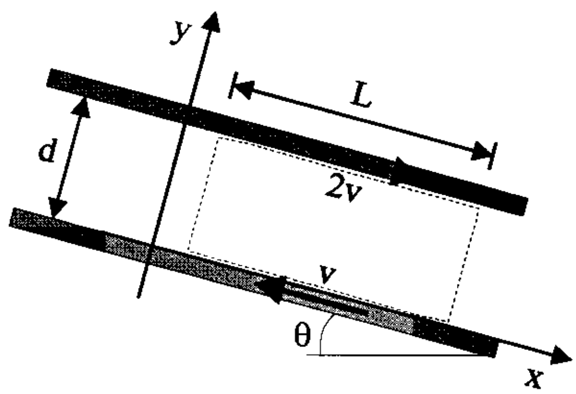


(a) Determinar la línea de corriente que pasa por el punto (1,1) en el instante t = 2 segundos.

(b) Calcular el caudal másico que atraviesa la sección de la figura sabiendo que la densidad en t = 1 segundo es ρ_0 = cte.

PROBLEMA 2 (25%)

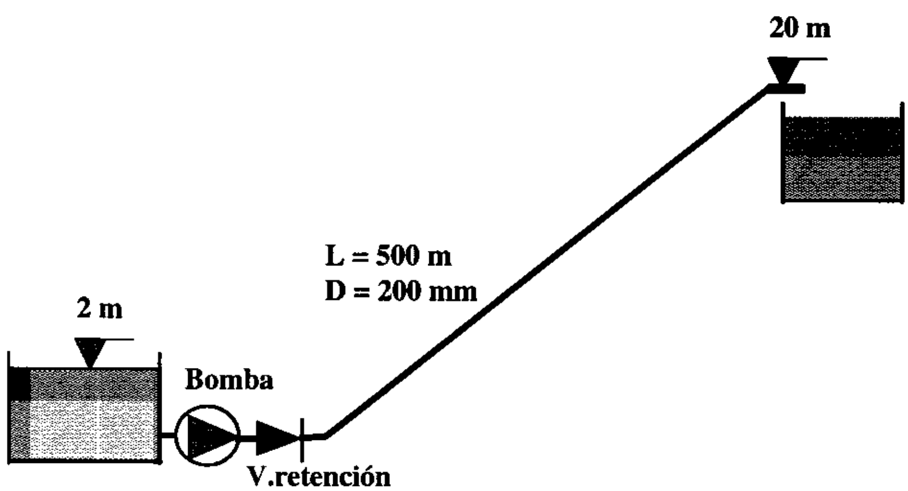
Un fluido de viscosidad μ y peso específico γ fluye entre dos placas paralelas de grandes dimensiones inclinadas un ángulo θ cuya separación es d. Una de las placas se mueve con velocidad v y la otra con velocidad 2v, tal y como se muestra en la figura.



(a) Determinar el gradiente de presiones necesario para que el flujo neto en cualquier sección transversal sea nulo.

(b) Realizar un balance energético sobre el volumen de control definido en la figura (longitud L, altura d y profundidad unidad).

Figura PROBLEMA 4



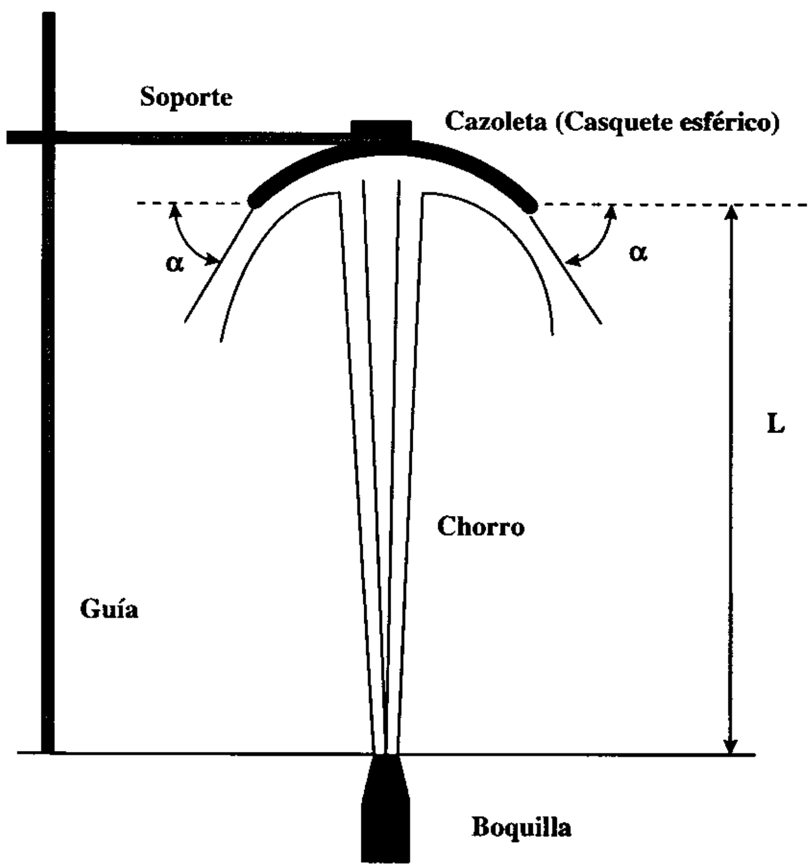
EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
VIERNES 3 DE SEPTIEMBRE DE 1999
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

PROBLEMA 3 (25%)

Una cazoleta formada por un casquete esférico se mantiene suspendida por el efecto de un chorro que impacta sobre su cara cóncava. La cazoleta va guiada de manera que solo es posible su movimiento vertical. La boquilla de salida del chorro, de sección A_o, emite un caudal Q_o. Se desprecia el rozamiento del chorro con el aire y con la cazoleta. Una vez establecido el régimen permanente:

1. **Determinar la sección del chorro** en el punto de impacto con la cazoleta, en función de la distancia L que separa la boquilla de la cazoleta (punto central de la misma) en régimen permanente, el caudal Q_o y la sección A_o.
2. Si el caudal que emite la boquilla es 4,5 l/seg, el peso de la cazoleta (se supone despreciable el peso del soporte) es 4 kg, el diámetro de la boquilla es de 20 mm y el ángulo α que forma la horizontal con la tangente a la cazoleta es 30º, **calcular la distancia L a la que estará suspendida por encima de la boquilla.**
3. **¿Qué ocurriría si el caudal se dividiera por cuatro?**



Grupo Mecánica de Fluidos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS
2º INGENIERO INDUSTRIAL
VIERNES 3 DE SEPTIEMBRE DE 1999

Grupo Mecánica de Fluidos

Universidad Politécnica de Valencia

PROBLEMA 4 (25%)

Una bomba impulsa caudal desde un depósito cuya lámina de agua se encuentra a cota 2 m y se supone constante a otro depósito elevado. La cota de vertido de la tubería que alimenta el depósito elevado es 20 m, no despreciándose al energía cinética del chorro de salida.

La altura manométrica de la bomba (Energía por unidad de peso que la bomba suministra al fluido) depende del caudal trasegado, según la expresión:

$H_b = 40 - 3500\,Q^2$

en la que: H_b : Altura manométrica que la bomba suministra al fluido en m.c.a.

Q : Caudal que trasiega la bomba, en m^3/seg.

La citada bomba tiene un rendimiento del 70% y el motor eléctrico que la arrastra tiene un rendimiento del 90%.

Las pérdidas de carga en la conducción vienen dada por la expresión:

$h_f = 2500\,Q^2$

en la que: h_f : pérdidas de carga (energía por unidad de peso perdida) en m.c.a.

Q : Caudal que trasiega la bomba, en m^3/seg.

La longitud de la tubería es de 500 m y su diámetro 200 mm.

A la salida de la bomba existe una válvula de retención que solo permite el paso de agua en sentido ascendente.

En un momento dado (instante t=0) se arranca la bomba estando la tubería completamente llena de agua, y comienza a impulsarse esta desde el depósito inferior al superior. Determinar:

1. Caudal circulante entre ambos depósitos una vez alcanzado el régimen permanente.
2. Potencia que la bomba cede el fluido, expresada en kw, en régimen permanente.
3. Potencia que consume el motor eléctrico que arrastra al bomba, en kw, en régimen permanente.
4. Expresión del caudal en función del tiempo durante el transitorio Q(t) (desde el instante 0 hasta el instante en que se alcanza el régimen permanente).
5. Instante en que se ha alcanzado un 95% del caudal que circulará en régimen permanente.
6. Determinar el volumen de agua vertido en el depósito superior hasta el instante determinado en el apartado anterior. Como mínimo, plantear la integral definida a resolver. Para solucionarla se da como sugerencia efectuar un cambio de variable.

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\rho\vec{h}\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{h}\,\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\vec{V}=0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\rho\,d\forall+\int_{S.C.}\rho\vec{V}d\vec{A}=0$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{F}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\vec{V}_r\,d\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}_r\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum\vec{M}_{ext}-\int_{\forall C}\left(\vec{r}\wedge\left(\ddot{\vec{R}}+\left(\dot{\vec{w}}\wedge\vec{r}\right)+\vec{w}\wedge\left(\vec{w}\wedge\vec{r}\right)+\left(2\vec{w}\wedge\vec{V}_r\right)\right)\right)\rho\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)d\forall+\int_{SC}\rho\left(\vec{r}\wedge\vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{r_{SC}}d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt}+\frac{dW_{eje}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall .C.}\left(u+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\,d\forall+\int_{S.C.}\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

Expresión general del flujo laminar plano incompresible

$$u(y)=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

Expresión general del flujo laminar de un fluido incompresible en un conducto circular

$$u(r)=\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\,\mathrm{sen}\,\theta\right)r^2+C$$

Expresión de la función disipación en un flujo laminar plano incompresible

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Expresión de la función disipación en un flujo laminar incompresible en un conducto circular

$$\Phi=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

CUESTION 1

$$\left.\begin{aligned} x &= 4x_0 t^2 + 1 \\ y &= y_0 t^2 - 3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = 8x_0 t \\ v &= \frac{dy}{dt} = 2y_0 t \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x-1}{4t^2} \\ y_0 &= \frac{y+3}{t^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} u &= \frac{2x-2}{t} \\ v &= \frac{2y+6}{t} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{2x-2}{t}\,\vec{i} + \frac{2y+6}{t}\,\vec{j}}$$

a) $$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{\frac{2x-2}{t}} = \frac{dy}{\frac{2y+6}{t}}$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dy}{y+3}$$

$$\ln(x-1) = \ln(y+3) + C$$

$(x-1) = (y+3)\cdot k$ todas las líneas de corriente

la que pasa por $(1,1)$ en $t=2$ $\longrightarrow$ $k=0$

$$\boxed{x = 1}$$

b) $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\,\nabla\vec{v} = 0 \qquad \nabla\vec{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{2}{t} = \dfrac{4}{t}$

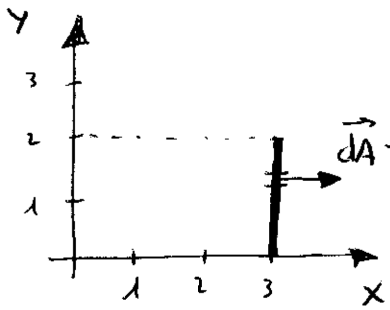
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{4}{t} = 0$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\int \frac{4\,dt}{t}$$

$$\ln\rho = -4\ln t + \ln k$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{k}{t^4}}$$

$$\left.\begin{matrix} t=1 \\ \rho=\rho_0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow k=\rho_0 \Longrightarrow \boxed{\rho(t) = \frac{\rho_0}{t^4}}$$



$$G(t) = \int_{Area} \rho \cdot \vec{V}_{r,sc} \cdot \vec{dA}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{dA} = \frac{2x-2}{t}\,dy$$

$$\left.\vec{v}\cdot\vec{dA}\right|_{x=3} = \frac{4\,dy}{t}$$

$$G(t) = \int_0^2 \frac{\rho_0}{t^4}\cdot\frac{4\,dy}{t} = \left.\frac{4\rho_0}{t^5}\,y\right]_0^2 = \boxed{\frac{8\rho_0}{t^5}}$$

(1)

CUESTION (2)

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} y=0 & u=v \\ y=d & u=2v \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} C_2 = -v \\ C_1 = \frac{3v}{d} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{d}{2\mu} \end{array}$$

$$\boxed{u(y) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) \cdot \frac{y^2 - d \cdot y}{2\mu} + v\left(\frac{3y}{d} - 1\right)}$$

(a) $$q = \int_0^d u(y)\,dy = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) \cdot \frac{1}{2\mu}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{d y^2}{2}\right) + v\left(\frac{3y^2}{2d} - y\right)\right]_0^d =$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right) \cdot \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{d^3}{6}\right) + \frac{v \cdot d}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = \frac{6\mu v}{d^2}} \quad (*)$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v}{d^2} + \gamma \operatorname{sen}\theta}$$

(b) Balance de potencias:

$$-\cancel{Q \cdot \Delta p} - \cancel{\gamma Q \cdot \Delta z} + F_1 \cdot V_1 + F_2 \cdot V_2 = \int \Phi \, dV$$

POTENCIA APORTADA $= F_1 \cdot V_1 + F_2 \cdot V_2$

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\left(y - \frac{d}{2}\right) + \frac{3\mu v}{d}$$

$$\tau(y=0) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\left(-\frac{d}{2}\right) + \frac{3\mu v}{d}$$

$$\tau(y=d) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\cdot\frac{d}{2} + \frac{3\mu v}{d}$$

$$F_1 \cdot V_1 + F_2 \cdot V_2 = \tau(y=d)\cdot L \cdot 1 \cdot 2v + \tau(y=0)\cdot L \cdot 1 \cdot (-v) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\cdot\frac{d}{2} + \frac{3\mu v}{d}\right] 2Lv + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\left(-\frac{d}{2}\right) + \frac{3\mu v}{d}\right]\cdot L \cdot (-v) =$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\cdot\frac{3Lvd}{2} + \frac{3\mu L v^2}{d} \overset{\circledast}{=} \boxed{\frac{12\mu L v^2}{d}}$$

POTENCIA DISIPADA $= \int \Phi \, d\forall$

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \mu\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{2y-d}{2\mu} + \frac{3v}{d}\right]^2$$

$$\int \Phi \, d\forall = \int_0^d \Phi \cdot L \cdot 1 \cdot dy = \mu \cdot L \cdot \int_0^d \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\cdot\frac{2y-d}{2\mu} + \frac{3v}{d}\right]^2 dy =$$

$$= \mu \cdot L \cdot \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)^2 \frac{\frac{4y^3}{3} - \frac{4dy^2}{2} - d^2 y}{4\mu^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)\frac{y^2 - dy}{2\mu}\cdot\frac{3v}{d} + \frac{9v^2 y}{d^2}\right]_0^d =$$

$$= \mu \cdot L \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)^2 \frac{d^3}{12\mu^2} + \frac{9v^2}{d}\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)^2 \cdot \frac{L d^3}{12\mu} + \frac{9\mu L v^2}{d} \overset{\circledast}{=} \boxed{\frac{12\mu L v^2}{d}}$$

Verificándose el balance de potencias

PROBLEMA 3

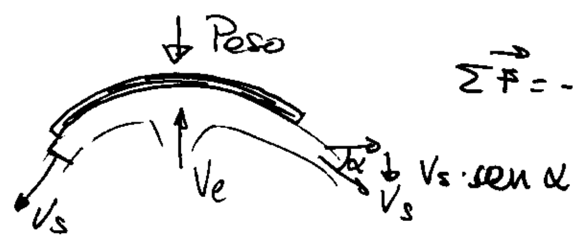
1. Aplicando Bernoulli entre la boquilla ($p=0$) y la sección de entrada a la casoleta (A_e):

$$\frac{V_{boq}^2}{2g} = L + \frac{V_e^2}{2g} \longrightarrow V_e = \sqrt{V_{boq}^2 - 2gL}$$

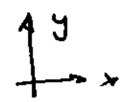
Como $V_{boq} = Q_0/A_0 \longrightarrow V_e = \sqrt{\left(\frac{Q_0}{A_0}\right)^2 - 2gL} = \frac{Q_0}{A_e}$

$$A_e = \frac{Q_0}{\sqrt{\left(\frac{Q_0}{A_0}\right)^2 - 2gL}}$$

2. Ecuación c. mov. para VC.



$\sum \vec{F} = -\text{Peso}\,\vec{j}$



$$-\text{Peso}\cdot\vec{j} = \rho Q_0 (\vec{V_s} - \vec{V_e}) = \rho Q_0 (-V_s \operatorname{sen}\alpha - V_e)\vec{j}$$

las componentes horizontales se anulan entre sí.

Aplicando Bernoulli entre e y s de la casoleta, $V_s = V_e$:

$$-\text{Peso} = \rho Q_0 (-V_e \operatorname{sen}\alpha - V_e) \rightarrow \text{Peso} = \rho Q_0 V_e (1 + \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\frac{\text{Peso}}{\rho Q_0 (1+\operatorname{sen}\alpha)} = V_e = \sqrt{V_{boq}^2 - 2gL} \rightarrow L = \frac{V_{boq}^2}{2g} - \frac{\text{Peso}^2}{2g\rho^2 Q_0^2 (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}$$

$$L = \frac{(Q_0/A_0)^2}{2g} - \frac{\text{Peso}^2}{2g\rho^2 Q_0^2 (1+\operatorname{sen}\alpha)^2}$$

Aplicando valores numéricos $Q_0 = 4'5 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$,

$\rho = 1000\ kg/m^3$, $A_0 = \frac{\pi \cdot 0'02^2}{4}$

Peso $= 4 \cdot 9'81 =$
$= 39'24\ N$.

...

$L = 8'73\ m$ ....

3. si el caudal se reduce a la. ... cuarta parte.

$L = \cancel{26'906}\,m$. lo cual es imposible.

El chorro no tiene suficiente fuerza como para vencer el peso de la cazoleta y elevarla, por lo que $L = 0$.-

PROBLEMA 4

1) $2+40-3500\,Q_0^2 = 2500\,Q_0^2 + \left(\frac{Q_0}{A}\right)^2 \frac{1}{2g} + 20$

$A = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = 0'03142 \ m^2$

$2+40-3500\,Q_0^2 = 2500\,Q_0^2 + 51'64\,Q_0^2 + 20$

$Q_0 = \sqrt{\frac{2+40-20}{3500+2500+51'64}} = 0'06029 \ m^3/s$

2) Pot. fluido $= \gamma \cdot Q \cdot H_b$

$H_b = 40 - 3500 \cdot 0'06029^2 = 27'2779 \ m.$

Pot (w) $= 9'81 \cdot 10^3 \cdot 0'06029 \cdot 27'2779 \Rightarrow 16'13$ Kw

3)

P. fluido $= 16'13$ KW

P.elect. P.bomba $= \frac{\text{P.fluido}}{0'7} = \frac{16'13}{0'7} = 23'043$ kw

$\hookrightarrow \eta_{bomba}$

$\Downarrow$ $\frac{\text{P.bomba}}{\eta_{me}} = \frac{23'043}{0'9} = 25'6$ kw.

4) $2+40-3500\,Q^2 = 20 + \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \frac{1}{2g} + \frac{L}{g}\frac{dv}{dt} + 2500\,Q^2$

$2+40-3500\,Q^2 = 20 + 51'64\,Q^2 + 50'97 \frac{dv}{dt} + 2500\,Q^2$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{0'03142}\frac{dQ}{dt}$

(2)

$$2+40-3500\,Q^2 = 20+5164\,Q^2+1622\,\frac{dQ}{dt}+2500\,Q^2$$

$$22-605164\,Q^2-1622\,\frac{dQ}{dt}=0$$

$$1622\,\frac{dQ}{dt} = 22-605164\,Q^2$$

$$\frac{dQ}{22-605164\,Q^2} = \frac{dt}{1622} \rightarrow \frac{dQ}{\frac{22}{605164}-Q^2} = \frac{dt}{\frac{1622}{605164}}$$

$$\rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{(0'06)^2-Q^2} = \int_0^t 3'731\,dt$$

$$\frac{1}{0'06^2-Q^2} = \frac{A}{0'06-Q}+\frac{B}{0'06+Q}$$

$$A\cdot 0'06+AQ+B\cdot 0'06-BQ = 1$$

$$A-B=0 \rightarrow A=B$$

$$(A+B)\,0'06=1$$

$$2A = 1/0'06 \rightarrow A=\frac{1}{0'12}$$

$$\frac{1}{0'06^2-Q^2} = \frac{1}{0'12}\left[\frac{1}{0'06-Q}+\frac{1}{0'06+Q}\right]$$

$$\int \frac{1}{0'06-Q}\,dQ = -\ln(0'06-Q)$$

$$\int \frac{1}{0'06+Q}\,dQ = \ln(0'06+Q)$$

$$\boxed{3'731\,t} = \frac{1}{0'12}\left[\ln\frac{0'06+Q}{0'06-Q}\right]_0^Q = \boxed{\frac{1}{0'12}\ln\frac{0'06+Q}{0'06-Q}}$$

(3)

$$* \quad 0'44772\, t = \ln \frac{0'06+Q}{0'06-Q}$$

$$e^{0'44772\, t} = \frac{0'06+Q}{0'06-Q}$$

$$0'06 \cdot e^{0'44772t} - Q\, e^{0'44772\, t} = 0'06 + Q$$

$$\boxed{Q = 0'06 \frac{e^{0'44772t} - 1}{e^{0'44772t} + 1}}$$

5) de * se deduce el valor de t para 95% de Q régimen.

$Q_0 = 0'06029\ m^3/s$. $\quad 95\%\, Q_0 = 0'0572755\ m^3/s$

$$0'44772 \cdot t_{95\%} = \ln \frac{0'06+0'0572755}{0'06-0'0572755}$$

$$\boxed{t_{95\%} = 8'403\ seg}$$

6) $Q = \dfrac{d\forall}{dt} \rightarrow d\forall = Q\, dt$; $\displaystyle\int_0^{\forall} d\forall = \int_0^{t_{95\%}} Q(t)\, dt$

$$\forall = \int_0^{8'403} 0'06 \frac{e^{0'44772t} - 1}{e^{0'44772t} + 1}\, dt$$

Cambio de variable $r = e^{0'44772t}$

$\dfrac{dr}{dt} = 0'44772\, e^{0'44772t} = 0'44772\, r$; $\dfrac{dt}{dr} = \dfrac{1}{0'44772 \cdot r}$

$$dt = \frac{dr}{0'44772 r}$$

(4)

$$\int 0'06 \, \frac{e^{0'44772t}-1}{e^{0'44772t}+1}\, dt = \frac{0'06}{0'44772}\int \frac{r-1}{(r+1)r}\, dr$$

$$\frac{r-1}{(r+1)\,r} = \frac{A}{r+1} + \frac{B}{r} \longrightarrow \begin{array}{l} A+B=1 \\ B=-1 \longrightarrow A=2 \end{array}$$

$$\int \frac{2}{r+1}\, dr = 2\ln(r+1) = 2\ln\left(e^{0'44772t}+1\right) =$$

$$= \ln(\quad)^2$$

$$\int -\frac{1}{r}\, dr = -\ln r \quad = -\ln e^{0'44772t}$$

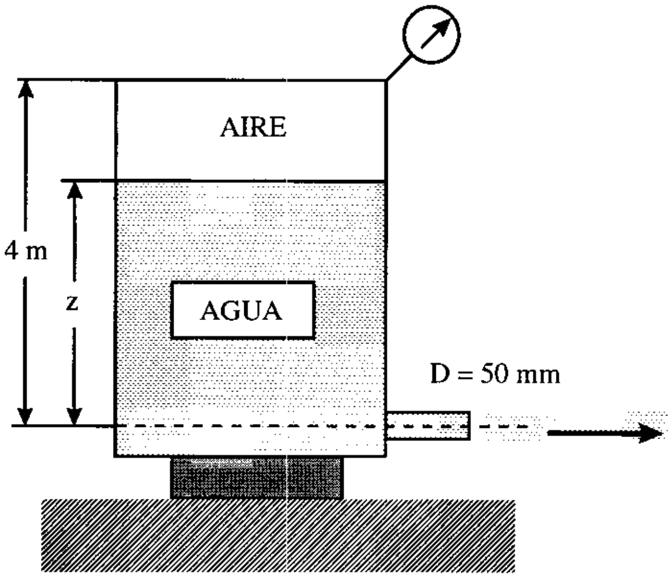
$$\forall = \int_0^{8'403} 0'06\, \frac{e^{0'44772t}-1}{e^{0'44772t}+1}\, dt = \frac{0'06}{0'44772} \ln \frac{\left(e^{0'44772t}+1\right)^2}{e^{0'44772t}}\Bigg]_0^{8'403}$$

$$= 0'134\left[\ln\frac{\left(e^{0'44772\cdot 8'403}+1\right)^2}{e^{0'44772\cdot 8'403}} - \ln\frac{4}{1}\right] = 0'3245\ m^3$$

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 8 DE JUNIO DE 1999
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

PROBLEMA 1

El dispositivo de la figura consta de un depósito presurizado (aire - agua) con una boquilla de salida de 50 mm de diámetro. La presión que indica el manómetro en el instante inicial es de 10 Kp/cm^2 y el valor de z inicial (nivel inicial del agua) es de 3 m.



La altura total del depósito es de 4 m, y la presión atmosférica es de 10,33 mca.

Se supone despreciable la altura cinética en la superficie libre del agua en el depósito, pero no la del chorro de salida.

Determinar:

1. Caudal que sale por el orificio en el instante inicial (momento en el que se abre la boquilla).
2. Debido a la despresurización del gas al salir el agua, el caudal de salida es cada vez menor. Determinar, para el caso en que el caudal de salida sea un 80% del inicial, el valor de z y de la presión que indicará el manómetro. Considerar que la evolución del gas, que se considera perfecto, es isoterma.

Nota: La presión en cada instante en el volumen de gas se toma igual a la que indica el manómetro.

PROBLEMA 2

Una conducción de diámetro nominal 1" (Diámetro interior 27,3 mm) transporta en régimen permanente agua caliente sanitaria (ACS) desde una caldera (Temperatura de salida de la caldera = 45°C) hasta un núcleo de consumo. La conducción tiene un longitud de 30 m y es horizontal..

La citada tubería es de acero galvanizado y carece de aislamiento, perdiendo 1'827 Kcal/hora por cada metro de longitud y °C de salto térmico entre el interior de la misma y la temperatura ambiente ($|dCalor/dt| = 1'827\ L\ \Delta T$).

Para calcular el salto térmico ΔT, realizar la aproximación de considerar como temperatura en el interior de la tubería la media de las temperaturas incial (caldera) y final (puntos de consumo). Considerar que la temperatura ambiente es 15°C.

La diferencia de presiones medida entre la salida de la caldera y la entrada a los puntos de consumo es de 0'0654 Kp/cm^2, para el caudal circulante de 0,4 l/seg.

Determinar la temperatura del agua en los puntos de consumo.

Nota: Calor específico del agua = 1 Kcal/(Kg°K).

La energía interna por unida de peso se evalúa como el producto del calor específico por la temperatura.

Considerar para una sección de la tubería constantes la presión y la temperatura.

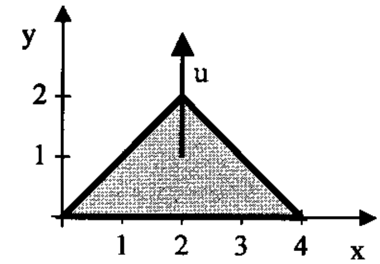
Grupo Mecánica de Fluidos

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 8 DE JUNIO DE 1999
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

PROBLEMA 5

Dado el siguiente campo de velocidades $\begin{cases} u = \dfrac{3x}{t+1} \\ v = -\dfrac{y}{t+1} \end{cases}$ se pide:

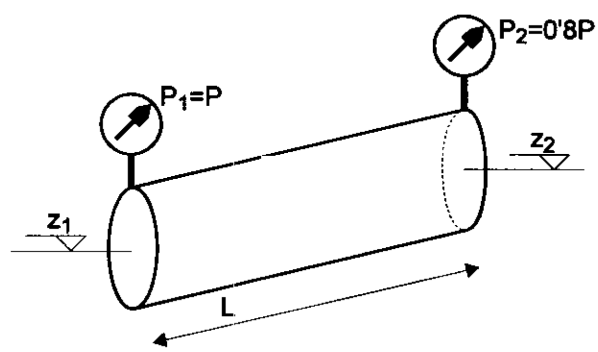


a) Calcular la densidad sabiendo que en t = 0 tiene un valor ρ_0.

b) Para el volumen de control de la figura moviéndose con una velocidad u, comprobar que se verifica el Teorema de Arrastre de Reynolds para la propiedad masa.

PROBLEMA 6

Sea un conducto circular de longitud L, diámetro D, por el que circula en régimen laminar un fluido de viscosidad μ. Si las presiones manométricas registradas en los manómetros de la figura son P_1=P y P_2=0'8P, determinar:



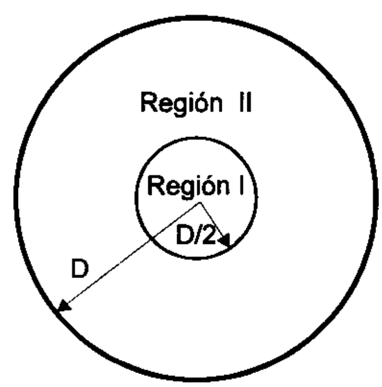
a) Las pérdidas de energía entre las secciones 1 y 2 de la conducción.

b) El porcentaje de las pérdidas de energía calculadas en el apartado a) que corresponde a cada uno de las siguientes conceptos:

I: El rozamiento viscoso en el interior del cilindro de diámetro D/2 (región I de la figura).

II: El rozamiento viscoso en la corona circular de diámetro interior D/2 y diámetro exterior D (región II de la figura).

III: El rozamiento con las paredes del conducto.



Grupo Mecánica de Fluidos
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 8 DE JUNIO DE 1999

Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

EXPRESIONES FUNDAMENTALES

Expresión del Teorema de Arrastre de Reynolds

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho \vec{h} d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{h} \vec{V} d\vec{A}$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Ecuación de Euler en forma diferencial

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad en forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.} \rho d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0$$

Expresión del número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{F}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}_r d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \left(\vec{V}_{rsc}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no inerciales

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C}\left(\vec{r} \wedge \left(\ddot{\vec{R}} + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \vec{r}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{r}\right) + \left(2\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)\right)\right)\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right) d\forall + \int_{SC} \rho\left(\vec{r} \wedge \vec{V}_r\right)\left(\vec{V}_{rsc}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación integral de la energía

$$\frac{dCalor}{dt} + \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall.C.}\left(u + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho d\forall + \int_{S.C.}\left(u + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)\rho \vec{V} d\vec{A}$$

Expresiones del Flujo Laminar

Flujo Laminar Incompresible con simetría Plana

Campo de Velocidades

$$u(y) = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta\right)}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Flujo Laminar Incompresible con simetría Cilíndrica

Campo de Velocidades

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right)r^2 + C$$

Ley de Newton de la Viscosidad

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

Función disipación

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

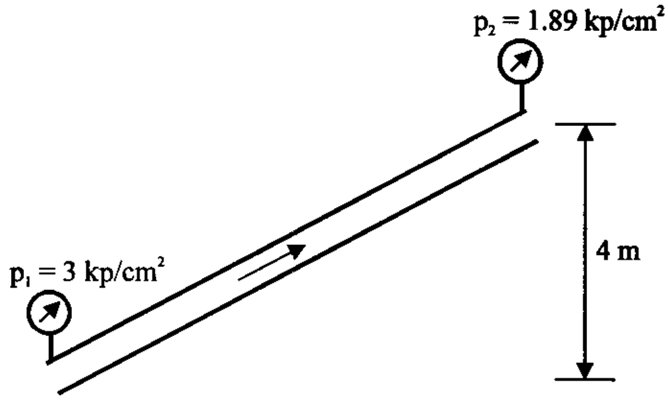
EXAMEN MECANICA DE FLUIDOS (JUNIO)
2º INGENIERO INDUSTRIAL
MARTES 8 DE JUNIO DE 1999
Grupo Mecánica de Fluidos
Universidad Politécnica de Valencia

PROBLEMA 3

Un aceite de densidad 840 kg/m^3 y viscosidad 155 cp circula por una tubería de diámetro 50 mm y longitud 15 m.

a) Determinar los caudales límite donde se produce el paso de régimen laminar a transición y de transición a turbulento.

b) Cuando circula un caudal de 5 l/s los manómetros miden la presión indicada en la figura. ¿Cuál es la potencia perdida por fricción?

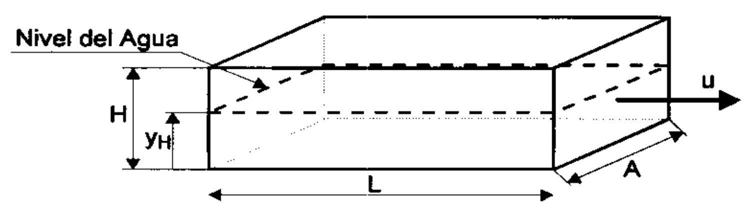


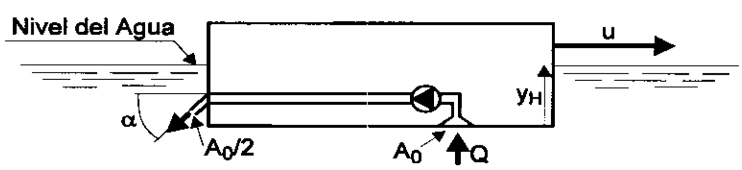
PROBLEMA 4

Un transbordador de longitud L, ancho A y altura H tiene, incluyendo el cargamento, pasaje y la propia masa del transbordador, una densidad relativa media ρ_R. Dicho transbordador se desplaza a base de admitir un determinado caudal Q por la parte inferior del mismo e impulsarlo por su parte posterior, tal como indica la figura. El rozamiento al avance del barco viene dado por la expresión

$$F_R = K \cdot y_h \cdot u^2$$

donde K es una constante, y_h es la altura de transbordador hundida y u es la velocidad que lleva éste. Determinar:





a) La profundidad y_H a la que se hunde el transbordador cuando está en marcha.

b) La velocidad u que lleva el transbordador en régimen permanente.

- $V_{salida} = \sqrt{2g\left(z+\frac{P}{\gamma}\right)}$

inicialmente $P = 100\ Kp/cm^2 \longrightarrow \frac{P}{\gamma} = 10$ mca

$$Q_0 = \frac{\pi \cdot 0'05^2}{4} \cdot V = \frac{\pi \cdot 0'05^2}{4}\sqrt{2g(3+100)} = 0'0883\ m^3/s$$

- Cuando $Q = 0'8\ Q_0 = 0'07064\ m^3/s$ se cumplirá:

$$0'07064 = A_0\sqrt{2g\left(z+\frac{P}{\gamma}\right)} \quad (1)$$

La forma de relacionar z y P es a través de la evolución del gas:

$$P_0^* \forall_0 = P^* \forall \longrightarrow P^* = \frac{P_0^* \forall_0}{\forall}$$

$$\underset{\text{absoluta}}{P^*} = \underset{\text{relativa}}{P} + P_{atm}$$

Expresando las presiones en mca

$$\frac{P}{\gamma} + 10'33 = \frac{(100+10'33)\ \forall_0}{\forall}$$

$$\forall = \forall_{TOTAL} - \cancel{z}\Delta d = 4 \cdot \Delta d - z\ \Delta d$$

$$\forall_0 = 1 \cdot \Delta d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{\gamma} = \frac{(100+10'33)\ \Delta d}{(4-z)\ \Delta d} - 10'33 \\[2ex] \frac{P}{\gamma} = \frac{110'33}{4-z} - 10'33 \end{array} \right.$$

quedando (1)

$$0'07064 = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2g\left(z + \frac{110'33}{4-z} - 10'33\right)}$$

$$6'97 = z + \frac{110'33}{4-z} - 10'33$$

$$(6'97+10'33)(4-z) = z(4-z) + 110'33$$

$$z^2 - 80'3z + 194'87 = 0 \qquad z = \frac{80'3 \pm \sqrt{80'3^2 - 4 \cdot 194'87}}{2}$$

(+) absurdo $z = 77'795$ m.

(−) $z = 2'5049$ m

siendo $\frac{P}{\gamma} = \frac{110'33}{4-2'5049} - 10'33 = 63'46$ mca $= 6'346 \frac{kp}{cm^2}$

PROBLEMA 21 MF 2 (8/JUN/99) 21

RESOLUCIÓN

Consideramos como VC la conducción desde la salida de la caldera hasta los puntos de consumo.

En la ecuación de la energía desaparecen una serie de términos:

- $dW_{eje}/dt = 0$ pues no hay máquinas que den o reciban energía del fluido.
- La derivada respecto al tiempo de la integral extendida al volumen de control desaparece pues se trata de régimen permanente.

Los términos de altura cinética y energía potencial de la integral extendida a la superficie de control se anulan entre la entrada y la salida, dado que no varían (diámetro constante y tubería horizontal).

La energía interna se expresa como: $u = C_p\, T$

El calor pérdido por la tubería viene dado en Kcal/h. Para trabajar en el SI es necesario pasarlo a w, de manera que:

$$1'827 \text{ Kcal/h} = 1'827 \text{ Kcal/h } (4180 \text{ Jul/Kcal})\,(3600 \text{ seg/h})^{-1} = 2'12135 \text{ w}$$

Por lo tanto quedará:

$$\frac{dCalor}{dt} = \int_{S.C.} \left(u + \frac{p}{\rho}\right) \rho \vec{V} d\vec{A}$$

Teniendo en cuenta que p y T son constantes en cada sección de la tubería, podemos sacar fuera de las integrales extendidas a la SC la suma ($u + p/\rho$). Asimismo, sustituyendo la expresión de las pérdidas caloríficas teniendo en cuenta el signo y llamando 1 a la sección de entrada al VC (Caldera) y 2 a la sección de salida (puntos de consumo) se tiene:

$$-2'12135\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_{ambiente}\right)L = \rho Q\left[\left(C_p T_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) - \left(C_p T_1 + \frac{p_1}{\rho}\right)\right]$$

en la que se han tenido en cuenta las unidades en las que estaban

donde se ha considerado que la temperatura en la tubería es la media entre T_1 y T_2. Reordenando la ecuación, queda:

$$2'12135\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_{ambiente}\right)L = \rho Q\left[\left(C_p T_1 - C_p T_2\right) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}\right)\right]$$

La diferencia de presiones viene dada en Kp/cm^2 en el enunciado, por lo que es necesario pasarla a Pa. El factor multiplicador es $9'81 \cdot 10^4$, por lo que la citada diferencia será:

$p_1 - p_2 = 0'0654 \cdot 9'81 \cdot 10^4 = 6415'74$ Pa.

El calor específico del agua viene dado en Kcal/Kg, por lo que es necesario pasarlo a Jul/Kg.

C_p = 1Kcal/kg = 1000 Cal/Kg = 4180 Jul/kg

El caudal es de 0'4 l/seg = 0,0004 m^3/seg
La densidad ρ es de 1000 Kg/m^3.
La longitud L = 30 m.
La ecuación anterior quedará:

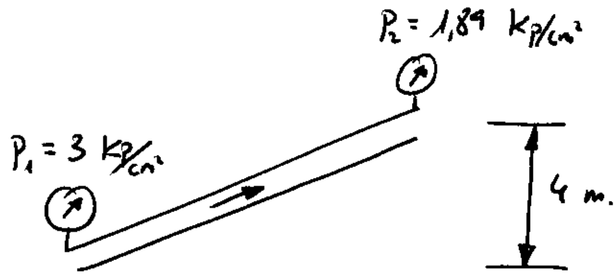
$$2'12135(\frac{45+T_2}{2}-15)30 = 1000 \bullet 0'0004\left[4180(45-T_2)+\left(\frac{6415'74}{1000}\right)\right]$$

Despejando el valor de T_2 se obtiene:

$$\boxed{T_2 = 43'88\ °C}$$

CUESTION 3

Un aceite de densidad 840 kg/m³ y viscosidad 155 cp circula por una tubería de diámetro 50 mm y longitud 15 m.



(a) Determinar los caudales límite donde se produce el paso de régimen laminar a transición y de transición a turbulento.

(b) Cuando circula un caudal de 5 l/s los manómetros miden la presión indicada en la figura. ¿Cuál es la potencia perdida por fricción?

(a) $$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

$\rho = 840$ kg/m³

$\mu = 155$ cp $= 1{,}55$ poise $= 0{,}155$ poiseville

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}155}{840} = 1{,}845 \cdot 10^{-4} \ m^2/s$$

$$Re = \frac{v \cdot 0{,}05}{1{,}845 \cdot 10^{-4}}$$

$Re < 2000 \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} v < 7{,}38 \ m/s \\ Q < 14{,}49 \ l/s \end{array}}$

$Re > 4000 \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} v > 14{,}76 \ m/s \\ Q > 28{,}98 \ l/s \end{array}}$

(b) $$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + h_f$$

$$\frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4}{9{,}81 \cdot 840} + 0 = \frac{1{,}89 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4}{9{,}81 \cdot 840} + 4 + h_f$$

$$35{,}71 = 22{,}5 + 4 + h_f \Longrightarrow \boxed{h_f = 9{,}21 \text{ m.c.Fluido}}$$

$$\text{Potencia} = \gamma \cdot Q \cdot h_f = 9{,}81 \cdot 840 \cdot 0{,}005 \cdot 9{,}21 = \boxed{379{,}5 \text{ vatios}}$$

OTRA POSIBILIDAD:

$$Q = 5 \text{ l/s} \longrightarrow V = 2{,}55 \text{ m/s} \longrightarrow Re = \frac{2{,}55 \cdot 0{,}05}{1{,}845 \cdot 10^{-4}} = 691 < 2000$$

RÉGIMEN LAMINAR

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{691} = 0{,}0926$$

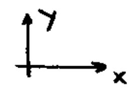
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0{,}0926 \cdot \frac{15}{0{,}05} \cdot \frac{2{,}55^2}{2g} = 9{,}21 \text{ m.c.Fluido}$$

$$\text{Potencia} = \gamma \cdot Q \cdot h_f = \boxed{379{,}5 \text{ vatios}}$$

Problema 4.

a) Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento en componente vertical, cuando las bombas están en marcha:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \rho Q (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$



- $\Sigma \vec{F}_{ext} = -\text{Peso}\,\vec{j} + \text{Empuje}\,\vec{j}$

$$= -\rho \rho_r g \cdot A \cdot L \cdot H\,\vec{j} + \rho g AL\, y_h \vec{j} =$$

$$= \rho g AL\left[-\rho_r H + y_h\right]\vec{j}$$

- $\rho Q(\vec{V}_s - \vec{V}_e)$

$$\vec{V}_e = \frac{Q}{A_0}\vec{j}$$

$$\vec{V}_s = \frac{2Q}{A_0}(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}) \Rightarrow V_s\big|_y = -\frac{2Q}{A_0}\sin\alpha\,\vec{j}$$

luego $\rho Q(\vec{V}_s - \vec{V}_e) = -\dfrac{\rho Q^2}{A_0}\left[1 + 2\sin\alpha\right]\vec{j}$

Por tanto:

$$\rho g AL\left[-\rho_r H + y_h\right]\vec{j} = -\frac{\rho Q^2}{A_0}\left[1 + 2\sin\alpha\right]\vec{j}$$

$$\boxed{y_H = \rho_r H + \frac{Q^2}{g A A_0 L}(1 + 2\sin\alpha)}$$

b) Aplicando la misma ecuación en componente horizontal:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = -K y_h u^2\,\vec{i}$$

y $\rho Q(\vec{V}_s - \vec{V}_e) = -\dfrac{2Q}{A_0}\cos\alpha\,\vec{i}$

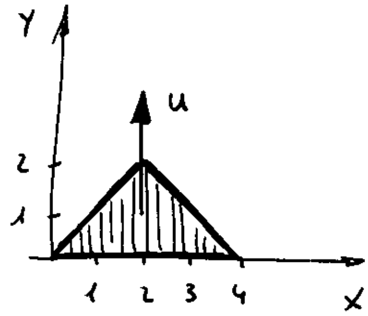
luego

$$-K y_h u^2\,\vec{i} = -\frac{2Q}{A_0}\cos\alpha\,\vec{i}.$$

$$u^2 = \frac{2Q}{A_0 K y_h}\cos\alpha \rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{2Q\cos\alpha}{A_0 K y_h}}}$$

CUESTION 5

$$\begin{cases} u = \dfrac{3x}{t+1} \\ v = -\dfrac{y}{t+1} \end{cases}$$



(1) Calcular la densidad sabiendo que en $t=0$ $\rho=\rho_0$

(2) Comprobar el T.A.R

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\nabla\vec{v} = 0 \qquad \nabla\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{t+1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{2}{t+1} = 0$$

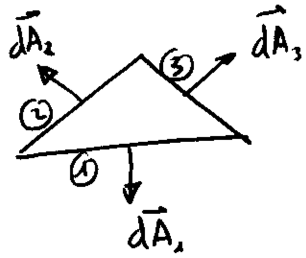
$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2\,dt}{t+1}$$

$$\ln\rho = -2\ln(t+1) + \ln K \longrightarrow \rho = \frac{K}{(t+1)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} t=0 \\ \rho=\rho_0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \boxed{\rho = \frac{\rho_0}{(t+1)^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall c}\rho\,d\forall = \frac{d}{dt}(\rho\cdot\forall) = \forall\cdot\frac{d\rho}{dt} = \frac{4\cdot 2}{2}\cdot\left[\frac{-2\rho_0}{(t+1)^3}\right] = -\frac{8\rho_0}{(t+1)^3}$$

$$\int_{sc}\rho\,\vec{V}_{rsc}\,\vec{dA} = \rho\cdot\left[\int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)}\right]$$



superficie control ① $\longrightarrow$ $y = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_{r,sc}\Big|_{①} &= \frac{3x}{t+1}\,\vec{i} - u\vec{j} \\ \vec{dA} &= -dx\cdot\vec{j} \end{aligned}\right\} \left(\vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA}\right)_{①} = u\cdot dx$$

$$\int_{①} \vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA} = \int_0^4 u\,dx = \left[u\cdot x\right]_0^4 = 4u$$

superficie control ② $\longrightarrow$ $y = x$

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_{r,sc}\Big|_{②} &= \frac{3x}{t+1}\,\vec{i} - \frac{x}{t+1}\,\vec{j} - u\vec{j} \\ \vec{dA} &= dA\cdot(-\vec{i}+\vec{j}) = dx\cdot(-\vec{i}+\vec{j}) \end{aligned}\right\} \left(\vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA}\right)_{②} = \left(-\frac{4x}{t+1} + u\right)dx$$

$$\int_{②} \vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA} = \int_0^2 \left(-\frac{4x}{t+1} + u\right)dx = \left[-\frac{2x^2}{t+1} + ux\right]_0^2 = -\frac{8}{t+1} + 2u$$

superficie control ③ $\longrightarrow$ $y = 4 - x$

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_{r,sc}\Big|_{③} &= \frac{3x}{t+1}\,\vec{i} - \frac{4-x}{t+1}\,\vec{j} - u\vec{j} \\ \vec{dA} &= dA\cdot(\vec{i}+\vec{j}) = dx\cdot(\vec{i}+\vec{j}) \end{aligned}\right\} \left(\vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA}\right)_{③} = \left(\frac{4x-4}{t+1} - u\right)dx$$

$$\int_{③} \vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA} = \int_2^4 \left(\frac{4x-4}{t+1} - u\right)dx = \left[\frac{2x^2-4x}{t+1} - ux\right]_2^4 = \frac{16}{t+1} - 2u$$

$$\Longrightarrow \int_{sc} \vec{V}_{r,sc}\cdot\vec{dA} = \int_{①} + \int_{②} + \int_{③} = 4u - \frac{8}{t+1} + 2u + \frac{16}{t+1} - 2u = \frac{8}{t+1}$$

Comprobamos que se cumple el T.A.R.

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{vc} \rho \, d\forall + \int_{sc} \rho \, \vec{v}_{r,sc} \cdot \vec{dA}$$

$$0 = -\frac{8\rho_0}{(t+1)^3} + \frac{\rho_0}{(t+1)^2} \cdot \frac{8}{t+1}$$

Problema 6. MF2

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta\right) r^2 + C$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{0'8P - P}{L} = -0'2\frac{P}{L}$$

$$\gamma \operatorname{sen}\theta = \gamma \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$K_0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \operatorname{sen}\theta = \frac{0'2P - \gamma(z_2 - z_1)}{L}$$

$$u(r) = \frac{-K_0}{4\mu} r^2 + C$$

$$r = D/2 \; ; \; u(r) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{K_0}{4\mu}\frac{D^2}{4} + C \rightarrow C = \frac{K_0}{4\mu}\frac{D^2}{4}$$

$$\boxed{u(r) = \frac{K_0}{4\mu}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)}$$

a) Para calcular las pérdidas de carga en base a la función disipación:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = \mu \frac{K_0^2}{16\mu^2} 4r^2 = \frac{K_0^2}{4\mu} r^2$$

$$P_{TOT} = \int \Phi \, dV = \int_0^{D/2} \frac{K_0^2}{4\mu} r^2 \, 2\pi r L \, dr = \frac{K_0^2}{4\mu} 2\pi L \int_0^{D/2} r^3 dr =$$

$$= \frac{K_0^2}{4\mu} 2\pi L \frac{D^4}{64} = \frac{K_0^2}{128\mu} \pi L D^4 = \frac{K_0^2}{8\mu} \pi L D^4$$

b) La potencia disipada en la región I es:

$$P_I = \int \Phi \, dV = \int_0^{D/4} \frac{K_0^2}{4\mu} r^2 \, 2\pi r L \, dr = \frac{K_0^2}{4\mu} 2\pi L \frac{D^4}{1024} = \frac{K_0^2}{2048\mu} \pi L D^4$$

como la potencia disipada en la región III es nula:

$$P_{III} = 0$$

"

$$\frac{K_0^2}{128\mu} \pi L D^4$$

entonces la potencia disipada en la región II es:

$$P_{II} = P_{TOT} - P_I$$

Hablando en porcentajes de pérdidas:

$$\frac{P_I}{P_{TOT}} = \frac{128}{2048} = 0'0625 = 6'25\,\%$$

$$\frac{P_{II}}{P_{TOT}} = 1 - \frac{128}{2048} = 0.9375 = 93'75\,\%$$

$$\frac{P_{III}}{P_{TOT}} = 0.$$

Aplicar solo Ec. Bernoulli: 1 pto.
\+ 1 pto. si incluye bien pérdidas + caudal.

3 ptos: calculo pérdidas.

b) solo cabe Φ:
P_I : 2 pto.
P_{II} : 1 pto.
P_{III} : 2 pto.

a) obtener bien $u(r)$ 2 pto (1 por $\frac{dp}{dx} + \gamma \operatorname{sen}\theta$) $\Rightarrow$ 2 pto.

$\Phi\Big|_0^{D/2}$ $\Rightarrow$ 2 pto   Mal $d\forall$ $\Rightarrow$ (−2 pto)

$\Phi\Big|_0^{D/4}$ $\Rightarrow$ 1 pto

P_{III} $\Rightarrow$ 2 pto.

Perdidas a) 3 pto

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura | Curso | Grupo | Nº pág.

Si se expresa en términos de velocidad media:

$$Q = \int_0^{D/2} u(r)\, 2\pi r\, dr = \frac{K_o}{4\mu} \cdot 2\pi \int_0^{D/2} \left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) r\, dr =$$

$$= \frac{K_o}{4\mu} \cdot 2\pi \left[\frac{D^2}{4}\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{D/2} = \frac{K_o}{4\mu}\, 2\pi \left[\frac{D^2}{4} \cdot \frac{D^2}{8} - \frac{D^4}{64}\right] =$$

$$= \frac{K_o}{4\mu} \cdot 2\pi\, \frac{D^4}{64} = \frac{K_o}{4\mu}\, \frac{\pi D^2}{4}\, \frac{D^2}{8}$$

La velocidad media es:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2/4} \Rightarrow \underline{\bar{V} = \frac{K_o}{32\mu} D^2}$$

Así, la potencia total, expresada en términos de veloc. media es.

$$P_{TOT} = \frac{K_o^2}{128\mu}\, 2\pi L D^4$$

$$K_o = \frac{32\mu \bar{V}}{D^2}\ ;\ K_o^2 = \frac{32^2\mu^2 \bar{V}^2}{D^4}$$

$$\boxed{P_{TOT}} = \frac{32^2\mu^2\bar{V}^2}{D^4} \cdot \frac{2\pi L D^4}{128\mu} =$$

$$= \underline{64\mu L \pi \bar{V}^2}$$

Por el camino de la ecuación de Bernoulli:

$$h_p = \frac{0.8P}{\gamma} - \frac{P}{\gamma} + (z_2 - z_1) = -\frac{0'2P}{\gamma} + \gamma(z_2 - z_1) = -\frac{K_o}{\gamma L}$$

Nº | Apellidos y nombre | Firma | Fecha

MECANICA DE FLUIDOS (2º) E.T.S.I.I.
Examen de Junio - Martes 3 de junio de 1997

Unidad Docente Mecánica de Fluidos. Dep. Ing. Hidráulica y M. Amb. U.P.V.

CUESTION 1 (22.5%)

Un cilindro de 30 cm de radio y 60 cm de altura está completamente lleno de aceite (ρ = 880 kg/m^3) e, inicialmente, a la presión atmosférica. Se comprime mediante un émbolo hasta la presión manométrica de 500 bares. El aceite tiene un módulo elástico isotermo igual a K = 16000 bares. Se pregunta:

a) ¿Cuánto se desplaza el pistón durante el proceso de compresión?
b) ¿Cuál es la densidad final del aceite comprimido?
c) ¿Cuánto vale el trabajo total realizado en el proceso de compresión?

CUESTION 2 (22.5%)

El cilindro de la primera cuestión se encuentra completamente lleno pero ahora en posición vertical, siendo el fluido agua. En estas condiciones, se cierra por la parte superior de manera que la presión inicial en esta superficie libre es la atmosférica y no existe aire. En estas condiciones, se pide:

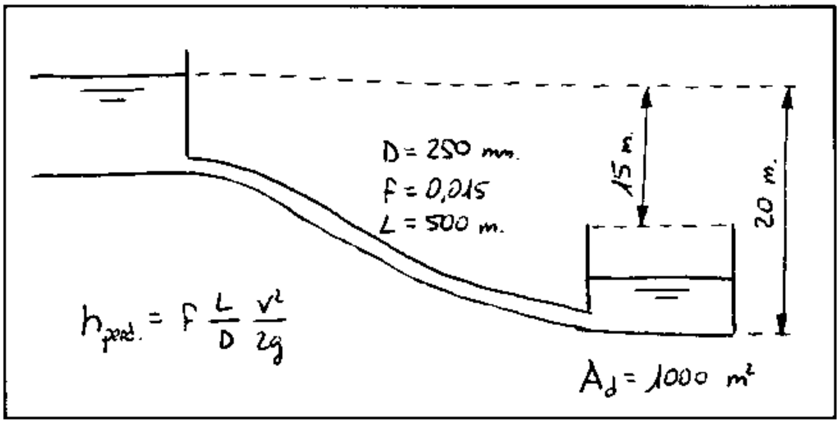
a) Las fuerzas que soportan las caras de cierre inferior y superior cuando el cilindro gira a una velocidad de 60 r.p.s.
b) Determinar la fuerza vertical global, interpretando el resultado.
c) Efectuar los mismos cálculos que en el apartado a) cuando además de girar el cilindro a 60 r.p.s. se le somete a una aceleración vertical de valor $+\frac{g}{2}\vec{u}_z$

CUESTION 3 (22.5%)

Desde el embalse superior, cuya capacidad es infinita (nivel constante), se pretende llenar el depósito inferior. Suponiendo que tras abrir instantáneamente la válvula se establece un régimen estacionario (despreciar en todo momento el término de inercia en la tubería $\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}$), se pide:

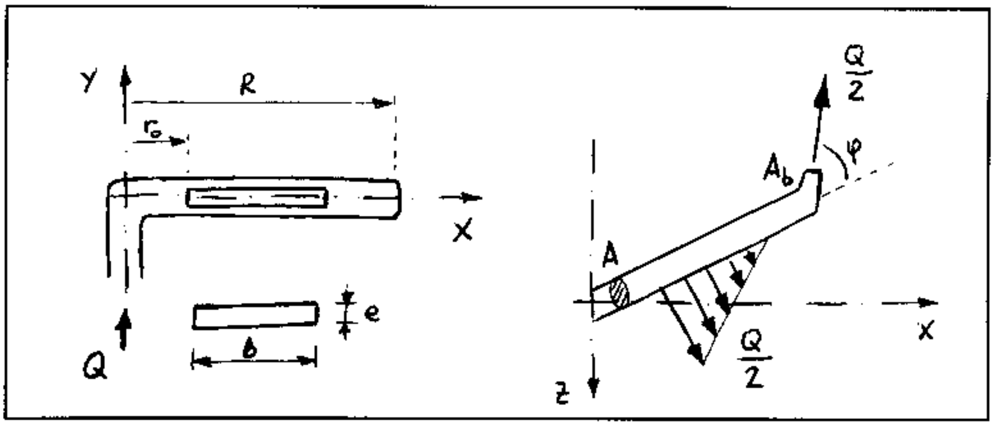
a) ¿Cuál es el tiempo de llenado del depósito inferior sabiendo que inicialmente se encuentra vacío?

Nota: Para el cálculo de la velocidad en la tubería aplicar Bernoulli entre las dos superficies libres de los depósitos. Sólo existen pérdidas en la tubería.



CUESTION 4 (22.5%)

En el aspersor de la figura la mitad del caudal entrante sale por la ranura y la otra mitad por la boquilla del extremo. Para los datos de la figura, se pide determinar la velocidad de régimen sabiendo que no existe rozamiento.



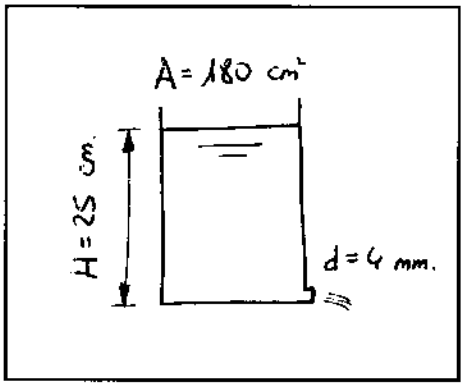
CUESTION 5 (10%)

Se dispone de un depósito cilíndrico de sección 180 cm^2 que tiene en su parte inferior un orificio lateral de 4 mm de diámetro a través del cual puede vaciarse completamente.

a) Si la altura inicial del agua en el depósito es de 25 cm, determinar el tiempo teórico que tardará en vaciarse dicho depósito.

b) Si la contracción de la vena líquida es del 94%, determinar la velocidad real de salida en el instante t = 0 sabiendo que el tiempo real de vaciado es de 430 segundos.

Nota: Considerar que el coeficiente de velocidad y el coeficiente de contracción no varían con el nivel en el depósito.



Ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\forall C.} \rho \, d\forall + \int_{S.C.} \rho \left(\vec{v}_{r,SC} \cdot d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no incerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{\forall C.} \left[\vec{r} \times \left[\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r\right]\right] \rho \, d\forall =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\forall C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r)\, \rho \, d\forall + \int_{S.C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r)\left(\rho\, \vec{v}_{r,SC}\, d\vec{A}\right)$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} = \frac{d}{dt}\int_{\forall C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r)\, \rho \, d\forall + \int_{S.C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r)\left(\rho\, \vec{v}_{r,SC}\, d\vec{A}\right)$$

CUESTIÓN 1:

a) La expresión del módulo de compresibilidad es

$$K = -\frac{dp}{\frac{d\forall}{\forall}} \quad \rightarrow \quad \frac{d\forall}{\forall} = -\frac{1}{K}\,dp$$

De la integración de esta expresión entre las condiciones iniciales antes de comenzar la compresión y las condiciones finales al terminar ésta puede determinarse el volumen final de aceite en el cilindro

$$\int_{\forall_o}^{\forall_f} \frac{d\forall}{\forall} = -\frac{1}{K}\int_{p_o}^{p_f} dp$$

$$\ln\frac{\forall_f}{\forall_o} = -\frac{1}{K}\left(p_f - p_o\right)$$

$$\forall_f = \forall_o\, e^{-\Delta p/K}$$

Y el desplazamiento del pistón

$$\Delta x = \frac{\forall_o - \forall_f}{A} = \frac{\forall_o}{A}\left(1 - e^{-\Delta p/K}\right) = x_o\left(1 - e^{-\Delta p/K}\right)$$

Sustituyendo valores, el desplazamiento total del pistón será

$$\Delta x = 0.6\left(1 - e^{-\frac{500}{16000}}\right) = 0.0185 \text{ m} = 18.5 \text{ mm}$$

b) También podemos expresar el módulo de compresibilidad como

$$K = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} \quad \rightarrow \quad \rho_f = \rho_o\, e^{\Delta p/K}$$

Sustituyendo valores, la densidad final del aceite comprimido será

$$\rho_f = 880\, e^{\frac{500}{16000}} = 907.9 \text{ Kg/m}^3$$

c) El trabajo de compresión realizado lo calculamos

$$W = \int \Delta p\, d\forall$$

donde

$$\Delta p = -K \ln\frac{\forall}{\forall_o}$$

y sustituyendo

$$\mathbf{W} = -\int_{\forall_o}^{\forall_f} \mathbf{K} \ln \frac{\forall}{\forall_o} \, d\forall = -\mathbf{K} \left[\forall \left(\ln \frac{\forall}{\forall_o} - 1 \right) \right]_{\forall_o}^{\forall_f} = -\mathbf{K} \left[\forall_f \left(\ln \frac{\forall_f}{\forall_o} - 1 \right) + \forall_o \right]$$

y como el volumen final es

$$\forall_f = \forall_o \, e^{-\Delta p/K} = 0.9692 \; \forall_o$$

el trabajo de compresión será

$$\mathbf{W} = -\mathbf{K} \; \forall_o \, [\, 0.9692 \, (\ln 0.9692 - 1) + 1 \,]$$

$$\mathbf{W} = -16000 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0.3^2}{4} \cdot 0.6 \, [\, 0.9692 \, (\ln 0.9692 - 1) + 1 \,]$$

$$\mathbf{W} = -32522 \text{ Julios}$$

Y sustituyendo valores

$$F_{inf} = 904143 + 9810 \cdot 0.6 \cdot \pi \cdot 0.3^2 = 905807 \text{ Nw}$$

b) La fuerza vertical global es

$$F_{inf} - F_{sup} = \gamma H \pi R^2 = \gamma \forall = \text{Peso} = 1664 \text{ Nw}$$

c) Cuando se le somete a una aceleración vertical de valor $+\frac{g}{2}\vec{u}_z$ se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\,\omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\dfrac{3}{2}\gamma \end{cases}$$

Y el campo de presiones será de la forma

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2 - \frac{3}{2}\gamma z + C$$

Para calcular la constante de integración

$$\left.\begin{array}{l} r = 0 \\ z = H \end{array}\right\} \rightarrow \quad P = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}\gamma H$$

Por lo que sustituyendo el valor de la constante, la expresión P(r,z) queda

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2 + \frac{3}{2}\gamma (H - z)$$

Y las fuerzas

$$F_{sup} = \frac{\rho\,\omega^2 \pi R^4}{4} = 904143 \text{ Nw}$$

$$F_{inf} = \frac{\rho\,\omega^2 \pi R^4}{4} + \frac{3}{2}\gamma H \pi R^2 = 906639 \text{ Nw}$$

$$F_{inf} - F_{sup} = \frac{3}{2}\gamma H \pi R^2 = \frac{3}{2}\gamma \forall = 2496 \text{ Nw}$$

CUESTIÓN 2:

a) A partir de la ecuación general de la hidrostática tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\, \omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \end{cases}$$

Y el campo de presiones será de la forma

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2 - \gamma z + C$$

Para calcular la constante de integración

$$\left.\begin{matrix} r = 0 \\ z = H \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad P = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \gamma H$$

Por lo que sustituyendo el valor de la constante, la expresión P(r,z) queda

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2 + \gamma (H - z)$$

La fuerza sobre la cara superior es

$$z = H \quad \rightarrow \quad P(r,z{=}H) = \frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2$$

$$F_{sup} = \int_0^R \frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\rho\, \omega^2 \pi R^4}{4}$$

Y sustituyendo valores

$$F_{sup} = \frac{1000 \cdot (120\pi)^2 \cdot \pi \cdot 0.3^4}{4} = 904143 \text{ Nw}$$

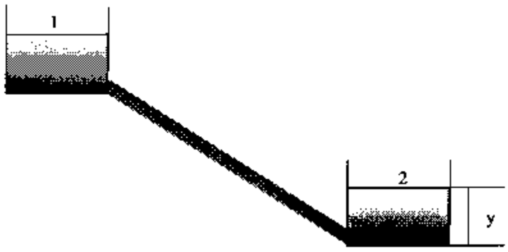
La fuerza sobre la cara inferior es

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad P(r,z{=}0) = \frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2 + \gamma H$$

$$F_{inf} = \int_0^R \left(\frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2 + \gamma H\right) 2\pi r\, dr = \frac{\rho\, \omega^2 \pi R^4}{4} + \gamma H \pi R^2$$

CUESTIÓN 3. 2.25 PUNTOS

Se trata de conocer el tiempo de llenado del depósito inferior, para lo cual vamos a aplicar la ecuación de Bernouilli entre las superficies libres de los dos depósitos, considerando que el depósito inferior va aumentando de cota conforme se llena:



Así, pues, la ecuación de Bernouilli entre las dos superficies libres resulta:

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+h_f$$

Despreciando la velocidad propia del punto 2 por considerar que la relación de sección entre la tubería y el depósito receptor es muy pequeña, resulta :

$$20=y+0+0+f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$$

Considerando el término de pérdidas tal y como se ha indicado y siendo v la velocidad de circulación por la tubería e y la altura alcanzada por el nivel de agua en el depósito inferior que va de 0 a 5 m. Podemos conocer de aquí el valor de la velocidad:

$$v=\sqrt{\frac{2g(20-y)}{f\,{}^{L}\!/_{D}}}=\sqrt{\frac{19.62(20-y)}{0.015\,{}^{500}\!/_{0.25}}}=0.809\sqrt{(20-y)}\ m/s$$

Asimismo, podemos aplicar la ecuación de continuidad al llenado del depósito inferior:

$vA_t=A_d\dfrac{dy}{dt}$ siendo A_t y A_d la sección de tubería y depósito respectivamente.

Por lo tanto:

$$vA_t=0.809\sqrt{(2-y)}\frac{\pi 0.25^2}{4}=0.0397\sqrt{(20-y)}\ \ m^3/s$$

Así, pues:

$$0.0397\sqrt{(20-y)}=A_d\frac{dy}{dt}=1000\frac{dy}{dt}\qquad\Rightarrow\qquad dt=\frac{1000}{0.0397}\ \frac{dy}{\sqrt{(20-y)}}$$

Ecuación diferencial en variables separadas que podemos resolver:

$\displaystyle\int_0^{T_{ll}}dt=T_{ll}=25189\int_0^5\frac{dy}{\sqrt{(20-y)}}$ con T_{ll} el tiempo de llenado del depósito inferior

Resolviendo la ecuación:

$$T_{ll}=25189\left[-2(\sqrt{(20-y}\right]_0^5=25189\left[-2\ (\sqrt{(20-5)}-\sqrt{(20-0)}\right]$$

Esto es:

$$\boxed{\mathbf{T_{ll}=30184\ s=8.38\ horas}}$$

CUESTIÓN 4:

Vamos a utilizar ejes móviles que se mueven solidariamente con el aspersor. La ecuación del momento cinético para sistemas no inerciales quedará en este caso

$$-\int_{\forall C.} \vec{r} \times \left(2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r\right) \rho \; d\forall = \int_{S.C.} \left(\vec{r} \times \vec{v}_r\right) \rho \left(\vec{v}_r \cdot d\vec{A}\right)$$

Precisamos conocer las velocidades relativas:

Flujo a través de la S.C.

(a) en la ranura (distribución lineal de velocidades)

$$v_{r,\text{ranura}} = v_{max}\left(1 - \frac{r - r_o}{b}\right)$$

$$v_{max} = 2\,v_{media} = 2\,\frac{Q/2}{e\,b} = \frac{Q}{e\,b}$$

con lo que nos queda finalmente

$$v_{r,\text{ranura}} = \frac{Q}{e\,b}\left(1 - \frac{r - r_o}{b}\right)$$

(b) en la boquilla

$$v_{r,\text{boquilla}} = \frac{Q}{2\,A_b}$$

Flujo en el interior del V.C.

(a) $0 < r < r_o$

$$v_{r,①} = \frac{Q}{A}$$

(b) $r_o < r < r_o+b$

(el caudal circulante por este tramo del volumen de control es el caudal total entrante menos el caudal que va saliendo por la ranura)

$$Q_{②} = Q - \int_{r_o}^{r} v_{r,\text{ranura}}\,dA = Q - \int_{r_o}^{r} \frac{Q}{e\,b}\left(1 - \frac{r - r_o}{b}\right) e\,dr$$

$$Q_{②} = Q - \frac{Q}{b}\left[r - \frac{1}{b}\left(\frac{r^2}{2} - r\,r_o\right)\right]_{r_o}^{r}$$

$$Q_{②} = Q\left[1 - \frac{r-r_o}{b}\left(1 - \frac{r-r_o}{2b}\right)\right]$$

y la velocidad

$$v_{r,②} = \frac{Q}{A}\left[1 - \frac{r-r_o}{b}\left(1 - \frac{r-r_o}{2b}\right)\right]$$

(c) $r_o+b < r < R$

$$v_{r,③} = \frac{Q}{2A}$$

Vamos a calcular ahora los dos términos de la ecuación del momento cinético. Veamos primero la **integral extendida al volumen de control**

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= r\,\vec{i} \\ \vec{\omega} &= -\omega\,\vec{j} \\ \vec{v}_r &= v_r\,\vec{i} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \vec{r}\times(2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r) = -2\,\omega\,r\,v_r\,\vec{j}$$

El volumen de control lo dividimos en tres tramos bien diferenciados:

(a) $0 < r < r_o$

$$-\int_{①} \vec{r}\times(2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r)\,\rho\,d\forall = \int_0^{r_o} 2\,\omega\,r\,\frac{Q}{A}\,\rho\,A\,dr = \rho\,\omega\,Q\,r_o^2$$

(b) $r_o < r < r_o+b$

$$-\int_{②} \vec{r}\times(2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r)\,\rho\,d\forall = \int_{r_o}^{r_o+b} 2\,\omega\,r\,\frac{Q}{A}\left[1 - \frac{r-r_o}{b}\left(1 - \frac{r-r_o}{2b}\right)\right]\rho\,A\,dr =$$

haciendo el cambio $r - r_o = x$

$$= 2\,\rho\,\omega\,Q\int_0^b\left[1 - \frac{x}{b}\left(1 - \frac{x}{2b}\right)\right](x + r_o)\,dx = 2\,\rho\,\omega\,Q\left(\frac{7\,b^2}{24} + \frac{2\,r_o\,b}{3}\right)$$

(c) $r_o+b < r < R$

$$-\int_{③} \vec{r}\times(2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_r)\,\rho\,d\forall = \int_{r_o+b}^{R} 2\,\omega\,r\,\frac{Q}{2A}\,\rho\,A\,dr = \frac{\rho\,\omega\,Q}{2}\left[R^2 - (r_o + b)^2\right]$$

Y sumando las tres integrales obtenidas

$$- \int_{①} - \int_{②} - \int_{③} = \rho \; \omega \; Q \left(\frac{r_o^2}{2} + \frac{b^2}{12} + \frac{r_o b}{3} + \frac{R^2}{2} \right) \tag{1}$$

Veamos ahora la **integral extendida a la superficie de control**

$$\int_{S.C.} \left(\vec{r} \times \vec{v}_r \right) \rho \left(\vec{v}_r \cdot d\vec{A} \right) = \int_{ranura} + \int_{boquilla}$$

(a) en la ranura

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= r \, \vec{i} \\ \vec{v}_r &= \frac{Q}{e\,b} \left(1 - \frac{r - r_o}{b} \right) \vec{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left(\vec{r} \times \vec{v}_r \right)_{ranura} = - \frac{Q}{e\,b} \left(1 - \frac{r - r_o}{b} \right) r \, \vec{j}$$

$$\int_{ranura} = \int_{r_o}^{r_o + b} - \frac{Q^2}{e^2 b^2} \left(1 - \frac{r - r_o}{b} \right)^2 r \, \rho \, e \, dr = - \frac{\rho \, Q^2}{e \, b^2} \int_{r_o}^{r_o + b} \left(1 - \frac{r - r_o}{b} \right)^2 r \, dr =$$

haciendo el cambio $r - r_o = x$

$$= - \frac{\rho \, Q^2}{e \, b^2} \int_0^b \left(1 - \frac{x}{b} \right)^2 \left(x + r_o \right) dx = - \frac{\rho \, Q^2}{e \, b} \left(\frac{b}{12} + \frac{r_o}{3} \right)$$

(b) en la boquilla

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= R \, \vec{i} \\ \vec{v}_r &= \frac{Q}{2 A_b} \left(\cos \varphi \, \vec{i} - \operatorname{sen} \varphi \, \vec{k} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left(\vec{r} \times \vec{v}_r \right)_{boquilla} = \frac{R \operatorname{sen} \varphi \, Q}{2 A_b} \vec{j}$$

$$\int_{boquilla} = \int \frac{R \operatorname{sen} \varphi \, Q}{2 A_b} \, \rho \, \frac{Q}{2 A_b} \, dA_{boq} = \frac{\rho \, R \operatorname{sen} \varphi \, Q^2}{4 A_b}$$

Y sumando las dos integrales obtenidas

$$\int_{ranura} + \int_{boquilla} = \rho \, Q^2 \left(\frac{R \operatorname{sen} \varphi}{4 A_b} - \frac{\frac{b}{12} + \frac{r_o}{3}}{e\,b} \right) \tag{2}$$

Sustituyendo las expresiones (1) y (2) en la ecuación del momento cinético

$$\rho\ \omega\ Q \left(\frac{r_o^2}{2} + \frac{b^2}{12} + \frac{r_o b}{3} + \frac{R^2}{2} \right) = \rho\, Q^2 \left(\frac{R \operatorname{sen} \varphi}{4\, A_b} - \frac{\dfrac{b}{12} + \dfrac{r_o}{3}}{e\, b} \right)$$

$$\boxed{\omega = \frac{Q \left(\dfrac{R \operatorname{sen} \varphi}{4\, A_b} - \dfrac{b + 4\, r_o}{12\, e\, b} \right)}{\dfrac{1}{2} \left(r_o^2 + R^2 \right) + \dfrac{b}{3} \left(r_o + \dfrac{b}{4} \right)}}$$

CUESTIÓN 5. 1 PUNTO

Apartado a)

La velocidad teórica de vaciado del depósito es:

$$v_t = \sqrt{2gh}$$

De donde el caudal de salida teórico por el orificio será:

$$Q_{salida} = A_{orificio}\sqrt{2gh}$$

La ecuación de continuidad aplicada al vaciado del depósito es de la forma:

$$-A\frac{dh}{dt} = A_{orificio}\sqrt{2gh}$$ siendo A la sección del depósito.

Así pues:

$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A_{orificio}}{A}\sqrt{2g}\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad \left[\,2\sqrt{h}\,\right]_H^0 = \frac{-A_{orificio}}{A}\sqrt{2g} \bullet [\,t\,]_0^t$$

$$-2\sqrt{H} = \frac{-A_{orificio}}{A}\sqrt{2g}\ t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2}{\sqrt{2g}}\frac{A}{A_{orificio}}\sqrt{H}$$

Sustituyendo en los valores dados:

$$\boxed{t = \frac{2}{\sqrt{2g}}\frac{180 \bullet 10^{-4}}{1.257 \bullet 10^{-5}}\sqrt{0.25} \ = \ \mathbf{323.3s}}$$

Apartado b)

Si el coeficiente de descarga es constante con la altura: C_D= cte

$$t_{real} = \frac{2A}{C_D\sqrt{2g}A_{orificio}}\sqrt{H}$$

Puesto que $C_D = t_{teorico}/t_{real} = 323.4/430 = 0.752$

Y a su vez, es el producto de los dos coeficientes de pérdidas conocidos: de velocidad y de constricción de vena:

$$C_D = C_v C_c \qquad \Rightarrow \qquad C_v = \frac{C_D}{C_c} = \frac{0.752}{0.94}0.8$$

En el tiempo inicial, que es el que nos preguntan:

$$v_t = \sqrt{2gH} = 2.215 m/s$$

Por tanto:

$$\boxed{v_{real} = C_v\ \sqrt{2gH} = \mathbf{1.772m/s}}$$

CUESTION 5

(a) $V_t = \sqrt{2gh} \longrightarrow Q_{salida} = A_{orificio} \cdot \sqrt{2gh}$

ecuación de continuidad:

$$-A \cdot \frac{dh}{dt} = A_{orificio} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A_{orificio}}{A} \cdot \sqrt{2g} \int_0^t dt$$

$$2\sqrt{h}\Big]_H^0 = -\frac{A_{orificio}}{A} \sqrt{2g} \cdot t$$

$$-2\sqrt{H} = -\frac{A_{orificio}}{A} \sqrt{2g}\, t$$

$$\boxed{t = \frac{2}{\sqrt{2g}} \frac{A}{A_{orificio}} \cdot \sqrt{H}}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{180 \cdot 10^{-4}}{1{,}257 \cdot 10^{-5}} \sqrt{0{,}25} = \underline{\underline{323{,}4 \text{ segundos}}}$$

(b) si $C_D = cte \longrightarrow t_{real} = \frac{2A}{C_D \cdot \sqrt{2g} \cdot A_{orificio}} \cdot \sqrt{H}$

$$C_D = \frac{t_{teórico}}{t_{real}} = \frac{323{,}4}{430} = 0{,}752$$

$$C_D = C_v \cdot C_c \longrightarrow C_v = \frac{C_D}{C_c} = \frac{0{,}752}{0{,}94} = 0{,}8$$

en $t=0 \longrightarrow V_{teórica} = \sqrt{2gH} = 2{,}215$ m/s

$$V_{real} = C_v \cdot \sqrt{2gH} = \underline{\underline{1{,}772 \text{ m/s}}}$$

MECANICA DE FLUIDOS (2º) E.T.S.I.I.

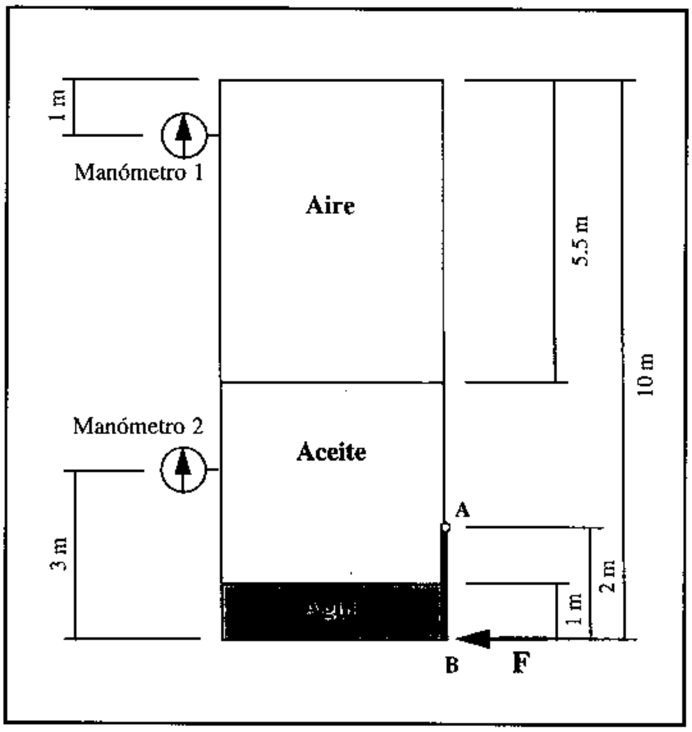
Examen de Junio - Viernes 28 de junio de 1996

Unidad Docente Mecánica de Fluidos. Dep. Ing. Hidráulica y M. Amb. U.P.V.

PROBLEMA 1 (25%)

Un depósito de sección cuadrada **A = 16 m²** y altura **H = 10 m** contiene en su interior una lámina de agua de **1 m** de espesor, una lámina de aceite de **3.5 m** de espesor y el resto se encuentra lleno de aire (tal y como se muestra en la figura). El depósito cuenta con dos manómetros con las siguientes lecturas (presiones absolutas):

$$\mathbf{P_1 = 2\ Kp/cm^2}$$
$$\mathbf{P_2 = 2.13\ Kp/cm^2}$$



Determinar:

a) El peso específico del aceite.

b) La fuerza ejercidida sobre la base del depósito debida a la acción de los fluidos que se encuentran en su interior.

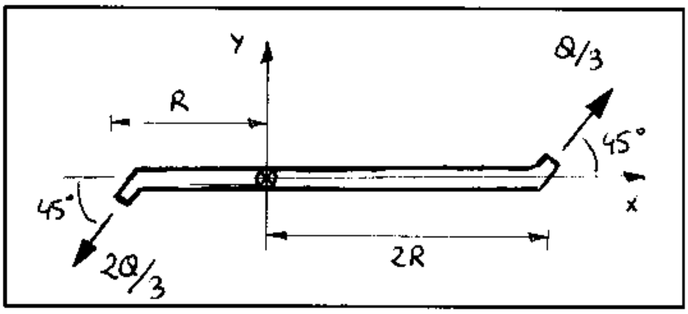
c) Fuerza resultante que actúa sobre una compuerta AB de sección cuadrada $\mathbf{A_{comp} = 4\ m^2}$ situada en una pared lateral del depósito tal y como se muestra en la figura.

d) Si la compuerta está articulada en el punto A, determinar la fuerza **F** que es necesario aplicar en B (tal y como se indica en la figura) para que dicha compuerta no gire.

NOTA.- El valor de la presión atmosférica es $\mathbf{P_{atm} = 1.033\ Kp/cm^2}$

PROBLEMA 2 (25%)

Calcular la velocidad de giro de un aspersor asimétrico (suponiendo que no existe rozamiento), cuyo caudal total **Q** se distribuye a razón de un caudal **Q/3** por el brazo de longitud **2R** y un caudal **2Q/3** por el brazo de longitud **R**, tal y como se muestra en la figura. La sección de los brazos del aspersor es **A** y la sección de salida de cada boquilla es $\mathbf{A_{boq}}$.



CUESTION 1 (20%)

Calcular la presión en el fondo de una sima marina, a **10000 metros** de profundidad sabiendo que el módulo elástico del agua de mar es constante e igual a **21000 Kp/cm^2** y la densidad en la superficie libre es ρ_o = **1005 Kg/m^3**, debiendo ésta considerarse variable debido a la gran profundidad.

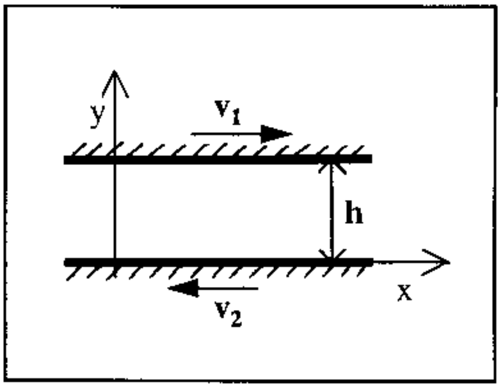
CUESTION 2 (20%)

Dada la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\,\vec{A} = -\nabla p_d + \mu\,\Delta\vec{v}$$

a) Explicar brevemente el significado de cada uno de los términos.

b) Un fluido de viscosidad **μ** fluye entre dos placas paralelas de grandes dimensiones cuya separación es **h**. Una de las placas se mueve con velocidad $\mathbf{v_1}$ y la otra con velocidad $\mathbf{v_2}$, tal y como se muestra en la figura. Determinar el valor del gradiente de presiones dinámicas necesario para producir un flujo neto cero en cualquier sección transversal.



CUESTION 3 (10%)

Describir brevemente la experiencia de Osborne-Reynolds. Si en el experimento se utiliza un aceite de viscosidad **μ = 145 cp** y densidad relativa ρ = **0.875**, y el diámetro del tubo es **D = 8 mm**, determinar los caudales límites donde se produce el paso de régimen laminar a transición y de transición a régimen turbulento. ¿Cuáles serían los caudales límites para el caso del agua con una viscosidad **μ = 1.15 cp**? Comentar los resultados obtenidos.

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control no incerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} - \int_{V.C.} \left[\vec{r} \times \left[\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r \right] \right] \rho\, d\forall =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{V.C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r)\, \rho\, d\forall + \int_{S.C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r) (\rho\, \vec{v}_r\, d\vec{A})$$

Ecuación del momento cinético para volúmenes de control inerciales:

$$\sum \vec{M}_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{V.C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r)\, \rho\, d\forall + \int_{S.C.} (\vec{r} \times \vec{v}_r) (\rho\, \vec{v}_r\, d\vec{A})$$

PROBLEMA 1

(a) $P_{aire} = P_1 = 2 \ \frac{kp}{cm^2} \ \frac{10^4 \ cm^2}{m^2} \cdot 9{,}81 \ \frac{N}{kp} = 196200 \ Pa$

$P_2 = 2{,}13 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 = 208953 \ Pa$

$P_2 = P_{aire} + \gamma_{aceite} \cdot 1{,}5$

$208953 = 196200 + \gamma_{aceite} \cdot 1{,}5$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \gamma_{aceite} = 8502 \ N/m^3 \\ \rho_{aceite} = 866{,}67 \ Kg/m^3 \end{array}}$

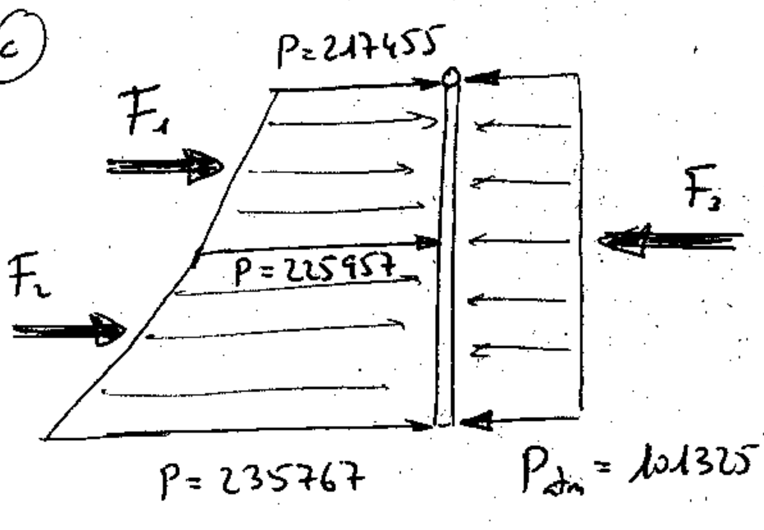
(b) $P_{fondo} = P_{aire} + \gamma_{aceite} \cdot 3{,}5 + \gamma_{agua} \cdot 1$

$P_{fondo} = 196200 + 8502 \cdot 3{,}5 + 9810 \cdot 1$

$P_{fondo} = 235767 \ Pa$

$F = P_{fondo} \cdot A = 235767 \cdot 16 = 3{,}772 \cdot 10^6 \ N$

(c)



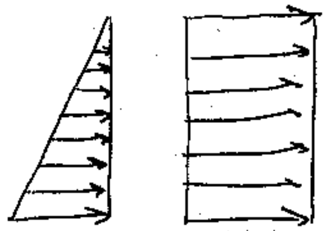
$$F_1 = P_{G1} \cdot A = \frac{217455 + 225957}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 443412 \text{ N}$$

$$F_2 = P_{G2} \cdot A = \frac{225957 + 235767}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 461724 \text{ N}$$

$$F_3 = P_{G3} \cdot A = 101325 \cdot 2 \cdot 2 = 405300 \text{ N}$$

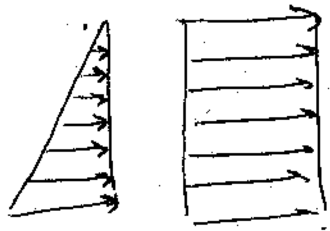
Resultante: $R = F_1 + F_2 - F_3 = \underline{\underline{499836 \text{ N} \rightarrow}}$

(d)



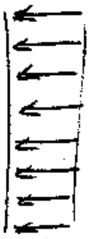
$$\left\{ \begin{array}{l} F_1' = 8502 \text{ N} \\ d_{F_1'} = \frac{2}{3} \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1'' = 434910 \text{ N} \\ d_{F_1''} = \frac{1}{2} \text{ m} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} F_2' = 9810 \text{ N} \\ d_{F_2'} = \frac{5}{3} \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2'' = 451914 \text{ N} \\ d_{F_2''} = \frac{3}{2} \text{ m} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} F_3 = 405300 \text{ N} \\ d_{F_3} = 1 \text{ m.} \end{array} \right.$$

$$F_1' \cdot d_{F_1'} + F_1'' d_{F_1''} + F_2' \cdot d_{F_2'} + F_2'' \cdot d_{F_2''} = F_3 \cdot d_{F_3} + F \cdot d_F$$

$$\boxed{F = 256022 \text{ N}}$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura | Curso | Grupo | Nº pág. 1

PROBLEMA 2

Ec. momento cinético para V.C. no inerciales:

$$-\int_{VC} \vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{V_r})\, \rho\, dV = \int_{SC} (\vec{r} \times \vec{V_r})\, \rho (\vec{V_r}\, d\vec{A})$$

BRAZO DERECHA

$\vec{r} = r\vec{i}$

$\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$

$\vec{V_r} = \frac{Q}{3A}\vec{i}$

$$2\vec{\omega} \times \vec{V_r} = -2\omega \frac{Q}{3A}\vec{j}$$

$$\vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{V_r}) = -2\omega \frac{Q}{3A} r\vec{k}$$

$$\int_{VC} = -\int_0^{2R} 2\omega \frac{Q}{3A} r\vec{k}\, \rho A\, dr = -\frac{4}{3}\omega Q R^2 \rho \vec{k}$$

BRAZO IZQUIERDA

$\vec{r} = -r\vec{i}$

$\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$

$\vec{V_r} = -\frac{2Q}{3A}\vec{i}$

$$2\vec{\omega} \times \vec{V_r} = 2\omega \frac{2Q}{3A}\vec{j}$$

$$\vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{V_r}) = -2\omega \frac{2Q}{3A} r\vec{k}$$

$$\int_{VC} = -\int_0^{R} 2\omega \frac{2Q}{3A} r\vec{k}\, \rho A\, dr = -\frac{2}{3}\omega Q R^2 \rho \vec{k}$$

TOTAL $\longrightarrow$ $-\int_{VC} \vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{V_r})\, \rho\, dV = \underline{2\omega Q R^2 \rho \vec{k}}$

Nº | Apellidos y nombre | Firma | Fecha

BRAZO DERECHA

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= 2R\vec{i}\\ \vec{V_r} &= \frac{Q}{3A_{boq}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\end{aligned}\right\}\quad \vec{r}\times\vec{V_r} = \frac{\sqrt{2}\,Q\,R}{3A_{boq}}\vec{k}$$

BRAZO IZQUIERDA

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= -R\vec{i}\\ \vec{V_r} &= -\frac{2Q}{3A_{boq}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\end{aligned}\right\}\quad \vec{r}\times\vec{V_r} = \frac{\sqrt{2}\,Q\,R}{3A_{boq}}\vec{k}$$

TOTAL $\Longrightarrow$ $$\int_{SC}(\vec{r}\times\vec{V_r})\,\rho(\vec{V_r}\,d\vec{A}) = \frac{\sqrt{2}QR}{3A_{boq}}\vec{k}\rho\frac{Q}{3}+\frac{\sqrt{2}QR}{3A_{boq}}\rho\frac{2Q}{3}\vec{k}$$

$$\int_{SC} = \frac{\sqrt{2}\,RQ^2\rho}{3A_{boq}}\vec{k}$$

y finalmente:

$$2\omega QR^2\rho = \frac{\sqrt{2}\,RQ^2\rho}{3A_{boq}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{2}\,Q}{6RA_{boq}}}$$

PROBLEMA 2

UTILIZANDO REFERENCIA FIJA

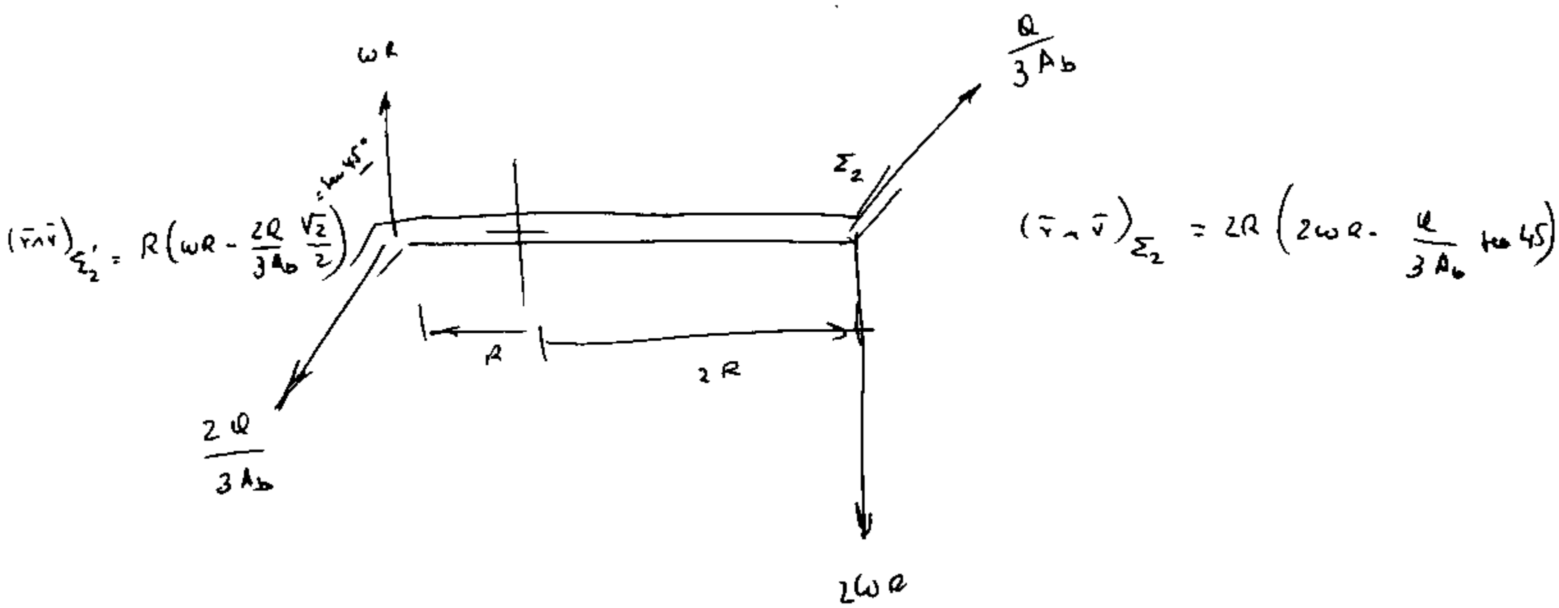
$$\iint_{SC} [\vec{r} \wedge \vec{v}]_{abs} \, \rho \, (\vec{v} \cdot \vec{dA}) = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_2} + \int_{\Sigma_2'} = 0$$

$$0 = \overbrace{2\cancel{R}\left(2\omega R - \frac{Q}{3A_b}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cancel{\rho}\cancel{\frac{Q}{3A_b}}}^{\Sigma_2} + \overbrace{\cancel{R}\left(\omega R - \frac{2Q}{3A_b}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cancel{\rho}\,\frac{2\cancel{Q}}{\cancel{3A_b}}}^{\Sigma_2'}$$

$$0 = 4\omega R - \frac{Q}{3A_b}\sqrt{2} + 2\omega R - \frac{2Q}{3A_b}\sqrt{2}$$

$$6\omega R = \frac{Q\sqrt{2}}{3A_b}\left(\cancel{1Q} + 2\cancel{Q}\right) \Rightarrow \omega R = \frac{Q\sqrt{2}}{6A_b}$$

$$\boxed{\omega = \frac{Q\sqrt{2}}{6RA_b}}$$



CUESTION 1

$$dp = \gamma dz = \rho g dz$$

$$\int_{P_{atm}}^{P(z=10000)} dp = g \int_0^{10000} \rho(z)\, dz$$

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} dp = K \dfrac{d\rho}{\rho} \\ dp = \rho g dz \end{array}\right\} \quad K \frac{d\rho}{\rho} = \rho g dz$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho(z)} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{g}{K} \int_0^z dz$$

$$-\frac{1}{\rho}\Big]_{\rho_0}^{\rho(z)} = \frac{g}{K} z$$

$$\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho(z)} = \frac{g}{K} z$$

$$\boxed{\rho(z) = \frac{1}{\dfrac{1}{\rho_0} - \dfrac{g}{K} z}}$$

$$\int_{P_{atm}}^{P(z)} dp = g \int_0^z \frac{dz}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{g}{k} z}$$

$$P(z) - P_{atm} = -k \int_0^z \frac{-g/k}{1/\rho_0 - \frac{g}{k} z}\, dz$$

$$P(z) - P_{atm} = -k \ln\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{g}{k} z\right)\Big]_0^z$$

$$\boxed{P(z) = P_{atm} + k \ln \frac{1/\rho_0}{1/\rho_0 - g/k\, z}}$$

sustituyendo valores $\longrightarrow$ $\boxed{P(z) = 101,13 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$

NOTA.- De haber considerado $\rho = cte$

$$P(z=10000) = P_{atm} + \gamma z$$

$$P(z=10000) = 101325 + 9,81 \cdot 1005 \cdot 10000 = \underline{98,69 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

CUESTION 2

Flujo de Couette $\longrightarrow$ $u(y) = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{dP_d}{dx}y^2 + Ay + B$

$y=0 \longrightarrow u=-V_2$

$y=h \longrightarrow u=V_1$

$B=-V_2$

$A=\dfrac{V_1+V_2}{h}-\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{dP_d}{dx}h$

$$\boxed{u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dP_d}{dx}y^2 + \left(\frac{V_1+V_2}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dP_d}{dx}h\right)y - V_2}$$

$$q = \int_0^h u(y)\,dy = \frac{1}{2\mu}\frac{dP_d}{dx}\frac{h^3}{3} + \left(\frac{V_1+V_2}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dP_d}{dx}h\right)\frac{h^2}{2} - V_2 h$$

$$0 = \frac{1}{2\mu}\frac{dP_d}{dx}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\right) + \frac{V_1+V_2}{2}h - V_2 h$$

$$\boxed{\frac{dP_d}{dx} = \frac{(V_1-V_2)\,6\mu}{h^2}}$$

CUESTION 3

Aceite → $\mu = 145$ cp $= 1{,}45$ poises $= 0{,}145$ poiseville

$\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{0{,}145}{875} = 1{,}66 \cdot 10^{-4}$ m²/s

$$\boxed{Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu}}$$

$Re = 2000 \rightarrow$ $Q = 2{,}1$ l/s ; $V = 41{,}5$ m/s

$Re = 4000 \rightarrow$ $Q = 4{,}2$ l/s ; $V = 83$ m/s

Agua → $\mu = 1{,}15$ cp $= 1{,}15 \cdot 10^{-3}$ poiseville

$\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{1{,}15 \cdot 10^{-3}}{1000} = 1{,}15 \cdot 10^{-6}$ m²/s

$Re = 2000 \rightarrow$ $Q = 0{,}014$ l/s ; $V = 0{,}29$ m/s

$Re = 4000 \rightarrow$ $Q = 0{,}029$ l/s ; $V = 0{,}58$ m/s