

MECÁNICA DE FLUIDOS

James A. Fay

CECSA

MECÁNICA DE FLUIDOS

MECÁNICA DE FLUIDOS

PRIMERA EDICIÓN EN INGLÉS
(PRIMERA EDICIÓN EN ESPAÑOL)

James A. Fay



PRIMERA EDICIÓN
MÉXICO, 1996

76475

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.
MÉXICO

Diseño de portada:
Selene Corona Vallejo

Título original:
INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS
ISBN 0-262-06165-1

Todos los derechos reservados
Copyright © 1994, Massachusetts Institute of Technology

Traducción:
Yolanda Francis G.
Facultad de Ciencias, UNAM

Revisión Técnica:
Eduardo Ramírez Grycuk
Profesor del Departamento de Materiales
UAM, Azcapotzalco

Mecánica de fluidos
Derechos reservados respecto a la primera edición en español:
© 1996, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. de C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial.
Registro núm. 43

ISBN 968-26-1306-X

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial
del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean
electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por
escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 1996

Contenido

Tablas *xi*

Prefacio *xiii*

Al alumno *xvii*

1 **Introducción** *1*

1.1 El mundo de la mecánica de fluidos *1*

1.2 Física de fluidos *10*

1.3 Dimensiones y unidades de medición *24*

1.4 Álgebra y cálculo vectoriales *29*

1.5 Problemas *36*

Bibliografía *38*

2 **Estática de fluidos** *39*

2.1 Fuerzas en un cuerpo fluido *39*

2.2 Esfuerzo en un fluido *40*

2.3 Presión en un fluido estático *41*

2.4 Fuerzas de presión sobre superficies sólidas *52*

2.5 Fuerzas de presión sobre cuerpos sumergidos en fluidos *60*

2.6 Fluidos estratificados *68*

2.7 Tensión superficial y capilaridad *75*

2.8	Transmisión de la fuerza hidráulica	77
2.9	Problemas	79
	Bibliografía	88
3	Conservación de la masa	89
3.1	Cinemática del flujo de fluidos	89
3.2	Volúmenes y superficies de control	97
3.3	Conservación de la masa	100
3.4	Conservación de especies químicas	107
3.5	Flujo de dos fases	110
3.6	Medición del volumen y del gasto volumétrico	111
3.7	Problemas	111
	Bibliografía	125
4	Flujo no viscoso	127
4.1	Criterio del flujo no viscoso	127
4.2	–Aceleración de una partícula de fluido	128
4.3	Ecuación de Euler	130
4.4	Ecuación de Bernoulli	133
4.5	La ecuación de Euler en coordenadas de línea de corriente	150
4.6	Flujo no viscoso en marcos de referencia no inerciales	152
4.7	Flujos especiales	160
4.8	Problemas	163
	Bibliografía	184
5	Conservación de la cantidad de movimiento	185
5.1	Introducción	185
5.2	Teorema del transporte de Reynolds	186
5.3	Cantidad de movimiento	189

- 5.4 Aplicaciones del teorema de la cantidad de movimiento 197
- 5.5 Momento angular 219
- 5.6 Aplicaciones del teorema del momento angular 225
- 5.7 Problemas 232
- Bibliografía 263

- 6 Flujo viscoso laminar 265**
 - 6.1 Introducción 265
 - 6.2 Esfuerzo viscoso 266
 - 6.3 Fuerza viscosa 269
 - 6.4 La ecuación de movimiento de Navier-Stokes 271
 - 6.5 Aplicaciones de la ecuación de Navier-Stokes 275
 - 6.6 Capas límite laminares 311
 - 6.7 Problemas 324
 - Bibliografía 352

- 7 Flujo viscoso turbulento 353**
 - 7.1 Introducción 353
 - 7.2 Características del flujo turbulento 353
 - 7.3 Rozamiento superficial y resistencia al avance de un flujo turbulento 361
 - 7.4 Modelos simples para determinar el flujo medio de un flujo turbulento 368
 - 7.5 Problemas 374
 - Bibliografía 376

- 8 Conservación de la energía 377**
 - 8.1 Introducción 377
 - 8.2 Flujo viscoso incompresible 378
 - 8.3 La primera ley de la termodinámica 386
 - 8.4 La segunda ley de la termodinámica 394

8.5	Deducción de la forma diferencial de la primera ley	397
8.6	Problemas	399
	Bibliografía	400
9	Flujo en sistemas de fluidos	401
9.1	Introducción	401
9.2	Pérdida de la carga hidráulica en tuberías y ductos	402
9.3	Cambios de la carga hidráulica en sistemas con bombas y turbinas	415
9.4	Redes complejas	420
9.5	Problemas	428
	Bibliografía	439
10	Análisis dimensional y modelado	441
10.1	Introducción	441
10.2	Análisis dimensional	442
10.3	Modelado	456
10.4	Resistencia al avance	473
10.5	Fuerza ascensional o sustentación	478
10.6	Problemas	482
	Bibliografía	493
11	Flujo irrotacional	495
11.1	Introducción	495
11.2	Vorticidad	496
11.3	La función de corriente para un flujo incompresible	502
11.4	Flujos irrotacionales planos	506
11.5	Flujos irrotacionales de simetría axial	532
11.6	Flujo sobre perfiles aerodinámicos y alas	540
11.7	Soluciones numéricas	544

11.8	Flujo potencial	547
11.9	Problemas	548
	Bibliografía	551
12	Flujo compresible	553
12.1	Introducción	553
12.2	La velocidad del sonido	555
12.3	Flujo estacionario isentrópico	560
12.4	Ondas de choque	570
12.5	Flujo viscoso adiabático por una tubería	577
12.6	Flujo plano supersónico	580
12.7	Flujo no estacionario unidimensional	590
12.8	Problemas	596
	Bibliografía	598

Índice	599
---------------	------------

Tablas

- 1.1 Propiedades de los fluidos a 20°C (60°F) y presión atmosférica 17
- 1.2 Propiedades de los gases perfectos 22
- 1.3 Dimensiones y unidades del SI 26
- 1.4 Prefijos de las unidades del SI 27
- 1.5 Unidades alternativas relacionadas con el SI 27
- 1.6 Conversión entre las unidades inglesas de ingeniería (UII) y las unidades del SI 28
- 1.7 Constantes físicas 30
- 2.1 Propiedades de la atmósfera normal en Estados Unidos 73
- 6.1 Factor de fricción y diámetro hidráulico para tubos no circulares 293
- 7.1 Rugosidad ϵ de los diferentes materiales que se emplean en tubos 363
- 9.1 Propiedades del flujo que interviene en la circulación sistémica 427
- 10.1 Dimensiones de las cantidades de la mecánica de fluidos 443
- 10.2 Parámetros adimensionales del flujo de un fluido 457

Prefacio

Este texto es resultado del desarrollo de la materia de mecánica de fluidos que se imparte en la licenciatura y se exige a todos los alumnos de ingeniería mecánica en el MIT (Massachusetts Institute of Technology). La materia dura un semestre. No se requiere ninguna materia adicional que incorpore la mecánica de fluidos en su estudio; no obstante, muchos alumnos eligen estudiar una materia subsiguiente sobre transferencia de calor. La materia satisface un requisito científico en el sentido de que hace hincapié en la aplicación de las leyes de la física y la comprensión de los fenómenos relacionados con los fluidos. Dadas las limitaciones de tiempo de un semestre no es posible cubrir el estudio de los flujos compresibles. Sin embargo, todos los principios físicos importantes, como la conservación de la energía aplicada a flujos tanto compresibles como incompresibles, se tratan a fondo aunque de manera sucinta.

El objetivo principal de este texto consiste en resaltar los importantes principios de la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía según se aplican a los fluidos. Gran parte de las aplicaciones de estos principios se refiere a flujos incompresibles. No obstante, no se excluyen los flujos compresibles en la derivación y análisis de las expresiones relativas a estos principios y se tratan por separado en el capítulo 12. Ambos flujos, no viscoso y viscoso, se estudian ampliamente, según ese orden. En el capítulo 11 se considera el flujo irrotacional en dos dimensiones como ejemplo del análisis de flujos en varias dimensiones.

Los alumnos de mecánica de fluidos del MIT cursaron cálculo vectorial y, en general, termodinámica, antes de empezar el estudio de mecánica de fluidos. Este texto utiliza de manera extensa cálculo y álgebra vectorial en la obtención de las expresiones diferenciales e integrales para la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía, así como una notación abreviada que permite su aplicación a problemas, pero los problemas y ejemplos individuales rara vez requieren el uso explícito de las expresiones vectoriales en sí mismas, pues basta con las variables escalares. El tiempo y esfuerzo invertidos en dominar el cálculo vectorial resulta ventajoso para el alumno pues le permite beneficiarse de la economía y simplicidad que esa herramienta matemática proporciona al expresar el contenido y significado de los principios de la mecánica de fluidos. De este modo, el texto reduce al mínimo el tiempo que se toma en las deducciones que, en la práctica de la ingeniería, rara vez están presentes, en tanto que solidifica los conceptos que son el fundamento del diseño y el análisis.

Se desarrollan, de manera simultánea, las expresiones de las leyes de la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía en sus dos formas, integral y diferencial, por lo general en ese orden. Queda más clara la relación que existe entre las dos formas al deducirlas mediante el uso de los teoremas de integrales del cálculo vectorial. Estas leyes se expresan mediante palabras y ecuaciones y se pone énfasis en la diferencia entre las expresiones escalares y las vectoriales. En los temas sobre termodinámica es común el uso de volúmenes de control y la formulación integral de las leyes de conservación que se aplican a ellos, por lo que es de esperar que la mayoría de los alumnos ya haya estado en contacto con dicho uso antes de comenzar el estudio de la mecánica de fluidos.

Se pone especial atención en los flujos no estacionarios viscoso y no viscoso, un importante aspecto de la mecánica de fluidos que, en general, se omite o se trata de manera inapropiada en los textos introductorios, a pesar de que hay muchos ejemplos de su importancia en los sistemas de la ingeniería. Se incluyen suficientes ejemplos y problemas de flujos no estacionarios con la intención de que el alumno comprenda la importancia que tiene no ignorar de manera automática la componente no estacionaria de las leyes de conservación.

En muchos textos introductorios de mecánica de fluidos, no se explica con suficiente claridad la conservación de la energía. Es cierto que no es fácil reducir a términos simples las sutilezas de los efectos de la disipación viscosa en los flujos incompresibles, pero es preciso dilucidar, en beneficio del alumno, la importancia de las leyes de la termodinámica para el flujo de fluidos. En el capítulo 8, se explicitan estas difíciles conexiones mediante el estudio de los flujos viscosos incompresibles y la deducción de las expresiones del cambio en la carga hidráulica en dichos flujos. Después de este análisis, se desarrolla el tema correspondiente a los flujos compresibles y no adiabáticos. Puede resultar preferible diferir la segunda mitad de este capítulo y dejarla como parte inicial del estudio de los flujos compresibles, lo cual es más apropiado.

En este texto, el orden de presentación del material se ha elegido de manera que las complejidades (como la fuerza viscosa) se posterguen para incluirlas en secciones ulteriores, en tanto que se introducen interesantes problemas de flujo lo antes posible. Con esto, no se pierde generalidad puesto que, llegado el momento, todo lo esencial se trata en forma apropiada, en tanto que se logra claridad en la mente del alumno al ir de lo simple a lo complejo.

El orden en la presentación del material no es improfanable. Es posible tratar el flujo irrotacional (capítulo 11) inmediatamente después del flujo no viscoso (capítulo 4), aunque es necesario que intervenga el análisis sobre el flujo viscoso para lograr una plena apreciación de las limitaciones que los efectos viscosos tienen en cuanto a las aplicaciones prácticas del flujo irrotacional. De igual forma, el material sobre análisis dimensional y modelado (capítulo 11) puede omitirse sin ninguna dificultad y seguir el del flujo viscoso (capítulos 6 y 7). (El alumno puede beneficiarse si aplaza este estudio hasta alcanzar una mayor experiencia con las aplicaciones.)

En virtud de que, por falta de tiempo, no es posible cubrir el estudio del flujo compresible en el curso del MIT, se ha incluido el capítulo 12 para quienes necesiten familiarizarse un poco con el tema del flujo compresible. Dicho capítulo incluye los

aspectos comunes de una sección introductoria al flujo compresible junto con un tratamiento inicial del flujo no estacionario unidimensional, una parte de ese tema que por lo general se pasa por alto a pesar de que tiene muchas aplicaciones prácticas. La ventaja principal al tratar el flujo compresible en un plano introductorio radica en que se pone al alumno en contacto con la enorme diferencia que media entre los flujos incompresible y compresible, a la vez que se proporciona cierta habilidad en el manejo de las aplicaciones más sencillas del flujo compresible.

Todos los problemas y ejemplos ilustran las interesantes o significativas consecuencias de los principios fundamentales. Aunque algunas veces simplificados, se recurre a ejemplos de dispositivos reales de ingeniería o sobre los aspectos de la mecánica de fluidos que participan en su utilización. En muchos de los problemas se pide al alumno que evalúe en forma numérica las expresiones analíticas que se utilizan o deducen en cada problema, con el fin de desarrollar un sentido físico acerca de la magnitud de las cantidades y una habilidad para detectar errores cuando los resultados de los cálculos no parezcan físicamente razonables. Ya que el resultado final de gran parte de los diseños y análisis en ingeniería es la obtención de resultados numéricos, es importante que los alumnos valoren la integridad y confiabilidad de sus cálculos numéricos.

Los problemas tienen un grado medio de dificultad ya que, en general, exigen cierto análisis y no la aplicación de una fórmula. Se evitan largas manipulaciones algebraicas y numéricas. Se hace hincapié en la selección de los principios físicos apropiados y en su aplicación a una situación de interés para la ingeniería.

Se ha puesto gran cuidado para que el texto sea correcto y completo sin abrumar al alumno con habilidades de poco uso. Se incluyen notas al pie de página a fin de proporcionar mayor información sin que se interrumpa el curso de un argumento.

Sin el estímulo que la enseñanza impartida a un gran número de alumnos de licenciatura y de posgrado del MIT proporciona, este libro no se hubiera escrito. El autor está en deuda aún más con sus colegas del Laboratorio de Mecánica de Fluidos del MIT, Ain Sonin, Ronald Probst, Ascher Shapiro, C. Forbes Dewey, Roger Kamm, Anthony Patera, Harry Kytomma, Ahmed Ghoniem, James Keck y John Heywood, quienes participaron en este libro de diversas formas, directa e indirectamente. Claro está que el material es únicamente responsabilidad del autor.

Sin el constante estímulo y paciencia de mi esposa, Gay, la autoría de este libro no habría sido la recompensante tarea que representó para mí.

Al alumno

La mecánica de fluidos es un tema sobre el cual el alumno sabe muchas cosas —cuando menos de manera intuitiva— a través de sus experiencias cotidianas. Al respirar el aire, beber agua, bañarse, hablar y oír interviene el uso de algún aspecto relacionado con el flujo de un fluido. Lo que él aún no sabe es cómo expresar esta información en términos cuantitativos o cómo diseñar sistemas que aprovechen estos fenómenos para otros propósitos. El objetivo de este texto consiste en ayudar al alumno a comprender mejor la mecánica de fluidos y en proporcionarle las herramientas necesarias para que emplee en una forma cuantitativamente útil esta nueva información.

El origen de la mecánica de fluidos se ubica en la historia del uso que los seres humanos han dado al viento, ríos, estanques y océanos para obtener ventajas prácticas como son la transportación, irrigación, abastecimiento de agua potable, etc. Fue Arquímedes, ese sorprendente matemático del mundo antiguo, el primero en señalar por qué flotaba un barco y cuándo podría hundirse. Desde entonces, muchas otras cosas se han aprendido sobre la mecánica de fluidos y, hoy en día, los seres humanos se topan a lo largo de sus vidas con muchos inventos en los que se aplica este conocimiento. El estudio de la mecánica de fluidos permite apreciar tanto la complejidad del mundo natural circundante, del cual los seres humanos forman parte, como el ingenioso uso que se ha dado a este conocimiento, el cual ha coadyuvado a hacer posible el mundo material de hoy.

Se comenzará por el estudio de las propiedades de los fluidos en reposo, que se conoce como hidrostática. Ésta determina el diseño de barcos, diques y presas. La hidrostática explica por qué en los estanques se forma hielo en su superficie durante el invierno y por qué la densidad atmosférica disminuye con la altitud. Luego, se pasará al estudio del flujo no viscoso —cómo se comportan los fluidos con viscosidad despreciable. Por sorprendente que parezca, esto explica gran parte de los fenómenos de la mecánica de fluidos, desde el flujo que pasa por el ala de un avión hasta el flujo cardiaco y arterial en seres humanos. Pero hay muchos otros flujos, aquellos en los que la viscosidad ejerce una gran influencia, los cuales se estudian en los capítulos dedicados al flujo viscoso laminar y turbulento. El alumno se percatará de que el tratamiento de los flujos viscosos es más difícil que el de los flujos no viscosos —la descripción matemática de esos flujos es más compleja y éstos comprenden una mayor variedad de efectos físicos. Desde la perspectiva de la ingeniería, los efectos viscosos pueden ser muy importantes pues su existencia es responsable de la pérdida de eficiencia de un dispositivo o sistema. Ésta

es una cuestión fundamental para lograr un diseño y análisis prácticos y precisos. El texto pasa luego a considerar algunos aspectos del flujo de un fluido no viscoso en varias dimensiones que brindarán al alumno la oportunidad de ver cómo se analiza en detalle un campo de flujo y lo introducirán a los conceptos que se emplean en la dinámica de fluidos por computadora. Por último, se le presentarán los misterios del flujo compresible, un extenso mundo de fenómenos poco comunes muy vinculado con las aplicaciones en ingeniería.

Este texto se vale del álgebra y cálculo vectoriales, como forma de notación abreviada, para describir el flujo tridimensional de un fluido. Se utilizan los teoremas del cálculo vectorial en la deducción de las expresiones diferenciales e integrales de la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Estas deducciones ayudarán al alumno a comprender el significado físico de los términos que se emplean en las leyes de conservación y se incluyen para su información (y ¡deleite!). La enseñanza más importante consiste en pensar vectorialmente, v.g. úsense vectores con la misma comodidad con la que se utilizan las cantidades escalares. De hecho, en la mayoría de los problemas y ejemplos sólo se emplean las componentes escalares de las ecuaciones vectoriales, por lo que la falta de experiencia en álgebra y cálculo vectoriales no debe representar un obstáculo cuando se trabaje con los problemas. Una sección del capítulo 1 revisa aquellos aspectos del álgebra y cálculo de vectores que se emplean en el texto.

Los problemas y ejemplos no son simples ejercicios en los que sólo se deba incluir números en las fórmulas. Todos ellos ejemplifican una aplicación importante o que sea de interés de un principio de la mecánica de fluidos que, con mucha frecuencia, se trata de un ejemplo sobre un diseño práctico de ingeniería. Los problemas y ejemplos se resuelven con facilidad al encontrar una respuesta analítica en términos de las variables y parámetros del problema, evaluando luego esta respuesta en forma numérica. Este procedimiento imita el proceso mediante el cual se perfecciona un diseño de ingeniería. En la ingeniería, casi toda tarea da como resultado la producción de información cuantitativa, y el alumno debe tomar con seriedad la obligación de producir resultados cuantitativos exactos en su trabajo. Por otra parte, las evaluaciones numéricas conducen, en general, al descubrimiento de equivocaciones y errores —¡por lo menos, eso me sucede a mí!

Cuando por primera vez me dediqué al diseño y desarrollo en el campo de la ingeniería, luego de obtener mi maestría en ciencias en el MIT, me vi en la necesidad de aprender por mí cuenta todo lo relativo al flujo compresible no estacionario. A la sazón no era una asignatura que figurara en los cursos de posgrado. Mis estudios de licenciatura en arquitectura naval fueron más que extensos en hidrostática, pero muy inapropiados en cuanto a la dinámica de flujos de fluidos se refiere. Me llevó muchos años de investigación y docencia para sentir que tenía un sólido dominio de los fundamentos de la mecánica de fluidos. No debe suceder esto con el lector. Hoy en día, los estudiantes de ingeniería no tienen excusa para no estar completamente informados acerca de los hechos de la vida —en la mecánica de fluidos. Este texto contiene todo lo que el alumno necesitaba saber —pero que temían preguntar— acerca de los principios de la mecánica de fluidos. Una vez que el alumno domine el texto, jamás representarán para él un problema los aspectos más avanzados.

1.1 El mundo de la mecánica de fluidos

Todas las personas son expertas en mecánica de fluidos. Los seres humanos mantienen sus vidas al respirar aire y beber agua. Al nadar, los individuos saben cómo impulsarse en la superficie libre de un medio líquido. Es posible apreciar los cambios que ocurren en la atmósfera, los cuales van acompañados de patrones meteorológicos, al sentir y observar las diferentes velocidades del viento y reconocer la inminencia de las precipitaciones pluviales. Se observan las corrientes y los ríos que fluyen cuesta abajo en dirección al mar, así como las olas que el viento origina en los océanos. Los seres humanos están muy acostumbrados al comportamiento de la atmósfera, los lagos, los ríos y el mar que no se detienen a pensar que estos fenómenos constituyan ejemplos de la mecánica de fluidos.

Sin la mecánica de fluidos, el cuerpo humano no funcionaría. El corazón bombea sangre en todo el organismo, con lo que proporciona oxígeno y nutrientes a todas las células vivas, al mismo tiempo que recoge los productos de desecho y mantiene una temperatura constante en el interior del cuerpo. Los pulmones posibilitan la inhalación de aire, que contiene oxígeno y éste se fija en la corriente sanguínea, así como la exhalación del bióxido de carbono que se extrae de la corriente sanguínea. De ésta se extraen los productos líquidos de desecho que van a dar a los riñones, para luego excretarse el líquido, que se conoce como orina. Se tiene escasa conciencia de todos estos procesos, aunque se sabe con certeza que son vitales, ya que en caso de fallar provocarían una muerte repentina.

El medio principal de comunicación entre los seres humanos es el lenguaje verbal. En ellos, el aire que bombean los pulmones pasa a través de la laringe, con lo que se originan vibraciones en las cuerdas vocales que modulan la rapidez del flujo y producen tonos de voz. El control de este sistema, que produce palabras, tanto al hablar como al cantar, es, de hecho, complejo.

Por supuesto, donde parece resultar más evidente el uso de los principios de la mecánica de fluidos es en la ingeniería. Casas y escuelas reciben agua potable que primero se bombea desde la tierra o se recoge de lagos, ríos o presas ubicados a cierta distancia para enviarla más tarde, por tuberías, hasta sus puertas. Los combustibles

Líquidos y gaseosos se envían para usarlos en hornos que proporcionan fluidos calientes, los cuales conducen calor en espacios habitados y lugares de trabajo. En un refrigerador doméstico circula un fluido que elimina el calor de su interior y lo descarga en la cocina; el aire acondicionado desplaza el calor interior hacia afuera en épocas de calor. En la mayoría de los casos, los desechos líquidos domésticos se transportan y se procesan en una forma que supuestamente resulta inofensiva.

La sociedad, por ejemplo, consume cantidades considerables de energía eléctrica, gran parte de la cual se produce en máquinas que utilizan la mecánica de fluidos para transformar en energía eléctrica la energía química de los combustibles, la energía gravitatoria del agua almacenada o, incluso, la energía cinética del viento. En virtud de que casi toda esta energía se produce en enormes plantas que se encuentran a gran distancia de los lugares donde se desarrollan las actividades diarias, no se está muy consciente de la cantidad de energía que se procesa, a menos de que en el horizonte se observen las chimeneas de las fábricas y su humo.

Es posible que el más notable de todos los sistemas de la ingeniería que dependen de la aplicación de la mecánica de fluidos sea el que se utiliza en los aviones y barcos. Estos medios de transporte se diseñaron para “sostenerse” en el medio fluido en el que se mueven, con el mínimo consumo de energía posible para la rapidez que alcanzan y sin experimentar daños o destrucción aun en condiciones meteorológicas adversas. Sus estructuras poseen una forma que les permite generar una fuerza encargada de sostener los vehículos en forma estable contra la fuerza gravitatoria y las alteraciones del medio a través del cual viajan.

El automóvil constituye el primer ejemplo de un complejo sistema mecánico, eléctrico y de mecánica de fluidos, que integra las diferentes funciones de sus componentes en un producto de consumo bastante sofisticado. El aire y el combustible líquido que fluyen por los cilindros se miden en forma precisa a fin de controlar la potencia del motor, garantizar la eficiencia de la combustión y reducir al mínimo la formación de contaminantes del aire en el tubo del escape. Los sistemas hidráulicos transmiten la potencia que hace funcionar los frenos y, en algunos casos, el sistema de dirección. Los ventiladores hacen circular aire fresco en los interiores, después de enfriar el flujo de aire mediante un acondicionador de aire o después de calentarlo con el fluido caliente que proviene del motor del sistema de enfriamiento. Una bomba de aceite lubricante hace circular aceite tanto con la finalidad de lubricar como para enfriar las partes calientes del motor. Una bomba de combustible extrae éste del tanque de combustible y lo envía a presión hacia el carburador o hacia el sistema de inyección de combustible. Un ventilador proporciona aire de enfriamiento al radiador y de esa forma enfría el fluido que se emplea en el enfriamiento del motor. Incluso el fluido que limpia el parabrisas se bombea cada vez que se necesita. La presión del aire de los neumáticos (o llantas) mantiene una superficie flexible y amortiguante. Los amortiguadores llenos de fluido disipan la energía que los caminos difíciles transmiten. El altavoz de la radio hace vibrar el aire en el interior del vehículo. Las señales audibles de seguridad indican que es preciso abrochar los cinturones o retirar la llave de encendido del automóvil.

No es lo mismo observar o experimentar el flujo de dichos fluidos que poder describirlos en términos cuantitativos, predecir de qué forma cambiarán en condiciones distintas y, en

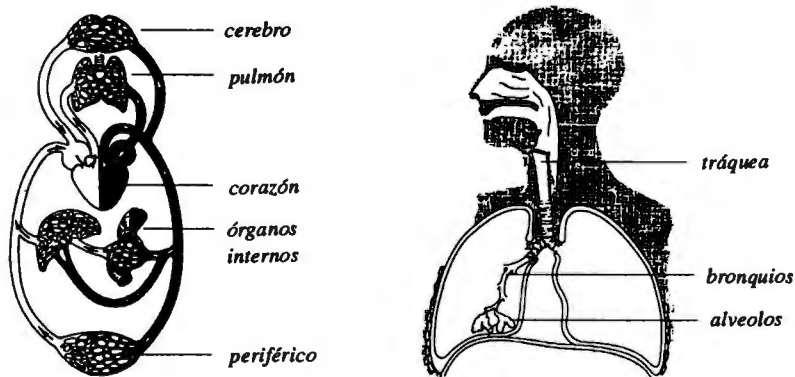


Figura 1.1 Los sistemas cardiovascular, izquierda, y pulmonar, derecha, del cuerpo humano. (Reimpreso con permiso, J. F. Green, 1987, *Fundamental Cardiovascular and Pulmonary Physiology*, 2a. ed. [Filadelfia: Lea and Febiger].)

especial, diseñar nuevos sistemas valiéndose de los principios de la mecánica de fluidos para lograr resultados ahora inalcanzables. El estudio de los principios de la mecánica de fluidos es el primer paso por dar si se pretende ir más allá del simple conocimiento o interés para llegar al desarrollo de habilidades predictivas y analíticas.

1.1.1 La mecánica de fluidos de la fisiología humana

Considérese la importancia de la mecánica de fluidos en el cuerpo humano. Los dos sistemas principales del cuerpo humano en los que interviene la mecánica de fluidos son los sistemas *cardiovascular* y *pulmonar*, como se ilustra en la figura 1.1. El primero es un sistema *cerrado* en el cual el fluido (sangre) circula repetidas veces dentro de ciclos cerrados. Por otra parte, el sistema pulmonar es un sistema *abierto* en el cual el fluido (aire) entra y sale de los pulmones en forma cíclica. Resulta factible proporcionar ayuda mecánica a cualquiera de los dos sistemas durante atención médica en casos agudos.

El corazón, que es una bomba de dos fases en serie, genera el flujo cardiovascular. El ventrículo izquierdo bombea sangre oxigenada y ésta se distribuye en todas partes del cuerpo por un sistema ramificado de arterias y vasos capilares. Más tarde, regresa al corazón a través de las venas, con un contenido menor de oxígeno y uno mayor de bióxido de carbono. Luego, el ventrículo derecho bombea la sangre que regresó a través de los pulmones, donde se absorbe el oxígeno y se elimina el bióxido de carbono, y luego regresa al lado izquierdo del corazón para su recirculación. El corazón izquierdo debe realizar un trabajo de bombeo mayor que el corazón derecho, pues la sangre viaja distancias mucho mayores al circular por todo el cuerpo que al pasar a través de los pulmones.

En condiciones normales, el corazón late 75 veces por minuto y entrega unos 5 litros por minuto, si bien su flujo puede ser cinco veces mayor bajo condiciones extremas. La presión máxima de la sangre en el corazón se aproxima a un sexto de una atmósfera y el corazón desarrolla cerca de dos watts de potencia mecánica. Puesto que el volumen

de sangre en el sistema cardiovascular es de unos 6 litros, el tiempo promedio que le toma a la sangre circular por el sistema es de un minuto, más o menos. A través de un complejo sistema de control, se distribuye la sangre oxigenada en diferentes cantidades a partes distintas del cuerpo, con preferencia al cerebro y al corazón. Durante una operación a corazón abierto, una máquina de corazón y pulmones sustituye a estos órganos en forma temporal. A pesar de la aparente simplicidad del corazón visto como una bomba, las máquinas permanentes de corazón artificial aún no han tenido éxito.

La mayor parte del intercambio de oxígeno, nutrimentos y productos de deshecho que realizan las células del cuerpo y la sangre, se lleva a cabo en los vasos capilares, tubos con un diámetro de 5-10 micrometros. La sangre fluye de modo muy lento por los vasos capilares, a pesar de que existen millones de estos tubos conectados en paralelo a fin de llegar a todas las células del cuerpo.

Los seres humanos respiran con una frecuencia normal de 12 respiraciones por minuto e inhalan un volumen de alrededor de 0.5 litros por respiración, o 360 litros por hora. La absorción normal de oxígeno en los pulmones es alrededor de 15 litros por hora de oxígeno (cerca de 0.3 kg por día), sólo un 20% del oxígeno disponible en el aire que se encuentra en los pulmones. Esta tasa de absorción disminuye al bajar la presión parcial de oxígeno en el aire pulmonar, lo cual sucede a grandes altitudes, y cuando el monóxido de carbono presente en el aire pulmonar reduce la capacidad de la sangre para transportar oxígeno.

Al igual que el sistema cardiovascular, el volumen pulmonar se ramifica mediante muchos conductos pequeños, llamados alveolos. El área de la superficie pulmonar total expuesta al aire es alrededor de 100 metros cuadrados. Los pulmones son particularmente susceptibles al daño que provocan aun cantidades pequeñas de contaminantes tóxicos del aire que se depositan con facilidad en las superficies del pulmón.

La potencia mecánica que se requiere para garantizar que se lleve a cabo la respiración proviene de los músculos que rodean a los pulmones. Estos músculos son capaces de proporcionar una presión mayor de la que se necesita normalmente, al toser o inflar un globo, por ejemplo. Durante la inhalación, la presión pulmonar cae por debajo de la presión atmosférica. Los conductos pulmonares deben ser suficientemente elásticos para abrirse durante la inhalación, como sucede con una esponja que ha sido exprimida y luego absorbe agua. El enfisema es una enfermedad degenerativa que destruye esta elasticidad y, por lo tanto, la capacidad de inhalación.

Estos sistemas del cuerpo humano basados en la mecánica de fluidos son muy complejos si se comparan con gran parte de los sistemas de la ingeniería, además, son muy flexibles. El corazón humano late varios miles de millones de veces a lo largo de toda una vida y los pulmones realizan su ciclo un sexto de esas veces. En los últimos años, una mejor comprensión de los aspectos de la mecánica de fluidos de los flujos estudiados ha servido de ayuda en la investigación médica.

1.1.2 La atmósfera y la hidrosfera

También es importante el flujo de fluidos externo al cuerpo humano. El aire y el agua son los dos fluidos sobre los que más se sabe. Éstos son vitales para el sostenimiento de la vida y proporcionan un ambiente favorable para todos los seres vivos. Los individuos

poseen la experiencia directa de toda una vida, mediante la observación, sobre el comportamiento de dichos fluidos y la manera en que se utilizan. Es posible ver, sentir y escuchar en el medio ambiente ejemplos de gran parte de los tipos de flujos de fluidos que se estudian en este libro.

La atmósfera es una capa gaseosa que permanece en la superficie de la Tierra gracias a la atracción gravitatoria. La mayor parte de la masa de la atmósfera está confinada en los primeros 15 kilómetros sobre el nivel del mar, sin embargo, la pequeña masa que se encuentra por encima de este nivel se encarga de filtrar la mortal radiación de alta energía que proviene del Sol que, de otra manera, destruiría la vida. La interacción de la atmósfera con la luz solar ayuda a mantener la temperatura de la superficie de la Tierra por encima de la temperatura de cualquier planeta sin aire, como sucede también con la Luna. (Existe la amenaza de que este aumento en la temperatura, que se conoce como efecto invernadero, prosiga en un futuro a consecuencia de emisiones antropogénicas de gases que absorben.)

El movimiento de la atmósfera que los individuos observan a su alrededor es resultado del proceso diurno de calentamiento que produce el Sol y enfriamiento provocado por la radiación que se sale al espacio exterior. Durante el año, estos patrones de calentamiento y enfriamiento cambian a diferentes latitudes y dan origen a las variaciones climáticas del año. Un aspecto particular de este proceso es la evaporación del agua que ocurre en la superficie de la Tierra, mediante la cual se forman nubes a grandes alturas antes de precipitarse de nuevo sobre la superficie terrestre. Esta destilación del agua oceánica, que los vientos llevan a tierra firme, proporciona el agua dulce que mantiene la vida en este planeta.

Las condiciones meteorológicas locales proporcionan una variedad de movimientos del viento. En ocasiones la velocidad del viento es muy pequeña, en especial durante la noche cuando el enfriamiento por radiación estabiliza la atmósfera, si bien los vientos de las tempestades ocasionadas por la precipitación del vapor de agua, como las tormentas o los huracanes, pueden alcanzar velocidades muy grandes. El aire frío es más denso que el caliente, de manera que una masa de aire frío tiende a fluir por debajo de una masa de aire caliente, formando un frente frío. Los fenómenos meteorológicos a gran escala derivan y pasan por los lugares llevando cambios que no se ven afectados de manera importante por las condiciones locales. Como puede observarse en la difusión diaria por televisión de los informes meteorológicos, las principales características de un fenómeno meteorológico cubren varios miles de kilómetros, distancia equivalente a cientos de veces la altura de la atmósfera. No obstante, los cambios de presión, temperatura y humedad son superiores en dirección vertical que en dirección horizontal, a pesar de que la dimensión horizontal de un fenómeno atmosférico es mucho mayor. La fuerza de atracción de la gravedad es tan fuerte a grandes distancias que obliga a la atmósfera a fluir principalmente en dirección horizontal.

En virtud de que las personas son tan pequeñas respecto al largo y ancho de la atmósfera, sólo pueden apreciar en una pequeña porción de la atmósfera que las rodea, cómo sopla el viento. Es evidente que la velocidad y dirección del viento varían un poco, incluso a intervalos de tiempo menores que un minuto. Estos cambios son mucho más rápidos que los cambios que acompañan a un fenómeno meteorológico, cambios que pueden tardar en

llegar un día. Se conocen como flujos turbulentos a los flujos de fluidos que presentan variaciones con el tiempo y que poseen escalas de longitud pequeñas comparadas con la longitud de todo el flujo. El viento atmosférico es un flujo turbulento.¹

El movimiento atmosférico es responsable de diluir los contaminantes del aire, como aquellos que emiten las plantas generadoras de energía y los automóviles. Si las corrientes de estos contaminantes presentan humo, es posible observar cómo disminuye la intensidad de éste cuando la turbulencia del aire mezcla esta corriente con aire limpio, lo cual diluye la fuerza de la concentración del contaminante en la columna de humo (o, si se prefiere, ensucia la atmósfera cada vez más). La mayoría de estos contaminantes se mezclan en la atmósfera a no más de unos cuantos kilómetros de altura y más tarde son transportados en dirección del viento, para luego volver a depositarse en la superficie de la Tierra. No obstante, algunos contaminantes no regresan pronto a la Tierra y, en cambio, se mezclan en forma gradual en toda la atmósfera, incluyendo la estratosfera. Algunos de estos gases causan la destrucción del ozono estratosférico y provocan un aumento en la temperatura superficial promedio. Las propiedades que posee la atmósfera para mezclarse son de gran importancia en la determinación del grado de contaminación atmosférica en zonas urbanas.

El agua de los océanos, lagos y ríos, así como la de los acuíferos subterráneos, forman la hidrosfera. El volumen de agua dulce en los continentes es pequeño si se compara con el volumen oceánico, aunque ese volumen representa la porción más importante de la hidrosfera que sirve al sostenimiento de la vida terrestre. La administración y uso del agua dulce en la agricultura y para otros propósitos forman una rama importante de la ingeniería. Sin embargo, el océano tiene igual importancia. Éste es la fuente de la precipitación pluvial de la Tierra y su capa superficial es un ambiente propicio para el crecimiento de plantas y animales microscópicos que son la base de la cadena alimenticia del mar. El océano tiende a hacer el clima más uniforme en dirección de las latitudes al llevar las aguas tropicales calientes hacia los polos y de ahí el agua fría hacia el ecuador.

Todos los seres humanos están familiarizados con el movimiento cuesta abajo de corrientes y ríos que fluyen hacia el mar. Es posible almacenar la energía que posee este flujo mediante la construcción de presas en las que se hace pasar el flujo del río por turbinas a fin de generar energía eléctrica. Algunas veces esta energía se disipa en forma abrupta cuando el río desvía su curso hacia un precipicio donde se forma una cascada; aquí el movimiento turbulento que se forma en la base de la cascada transforma la energía directa del río en calor. Cuando el río desemboca en el mar, su agua dulce, más ligera que el agua de mar, flota en la superficie del océano. No obstante, más allá de su desembocadura, el río se mezcla poco a poco con el mar.

La mayor parte del agua dulce de los continentes está fuera del alcance de la vista, debajo de la tierra. El agua se encuentra en la porosidad de los depósitos minerales y se alimenta por precipitación, filtrándose a través del suelo gracias a la influencia de la gravedad. La velocidad del fluido en los acuíferos subterráneos es mucho menor que la de los ríos puesto que la fuerza de fricción del medio poroso por el que fluye detiene

¹ El término turbulento se explica con detalle en el capítulo 7.

su movimiento. En muchos casos, el agua subterránea es la fuente de agua potable, no obstante su localización y bombeo para su consumo por los seres humanos se ven limitados por las características del acuífero subterráneo.

En las orillas del océano es posible observar cómo chocan las olas sobre la playa. Las olas llevan hasta la orilla la energía que se genera cuando el viento sopla sobre la superficie del mar. Por supuesto, la superficie del mar no se mueve (en promedio) en la dirección del movimiento de las olas, a pesar de que oscila con el paso de cada ola. Las olas del mar se conocen también como ondas gravitatorias, puesto que la atracción de la gravedad que tiene lugar en la interfaz formada por el mar y el aire es responsable de la propagación de estas olas, las cuales no penetran mucho debajo de la superficie del océano.

El otro movimiento del océano que es posible apreciar en la orilla del mar es el que experimenta la superficie del mar debido al ascenso y descenso de la marea. Este ciclo, que ocurre dos veces al día, se debe a la diferencia que la atracción gravitatoria de la Luna (y en menor medida la del Sol) ejerce sobre los lados opuestos de la Tierra. La diferencia en la fuerza gravitatoria provoca un abultamiento en la superficie del océano en dirección a la Luna, la cual pasa por un mismo lugar dos veces en un día lunar de 25 horas. El movimiento de marea, que consiste en una oscilación vertical y horizontal, puede amplificarse en gran medida a lo largo de la costa continental, algunas veces por un factor de diez por encima de las amplitudes oceánicas generales.

Los océanos pueden tener corrientes localizadas, como la corriente del golfo, que son enormes ríos que fluyen a través de un océano casi estacionario. Los terremotos son capaces de generar olas de marea que viajan muchos miles de kilómetros antes de chocar con tierra, devastando, algunas veces, las costas bajas. Incluso, los huracanes pueden generar olas de marea que provocan inundación en las costas. Estas olas de marea no son provocadas por la gravedad de la Luna, como sucede con el movimiento ordinario de marea, sino por otras alteraciones.

El movimiento ascendente y descendente de la marea puede aprovecharse para producir potencia mecánica; sin embargo, en la actualidad, pocas veces resulta económico el uso de esta energía en comparación con la que suministran los ríos. También, se ha demostrado que los mecanismos ideados para extraer energía de las olas del mar resultan incosteables. Aun así, es posible que las fuerzas que las olas del mar ejercen sobre los barcos y los rompeolas sean muy significativas y la protección contra estas fuerzas puede resultar muy costosa. Por lo tanto, es importante poseer un conocimiento de la dinámica de los océanos para muchos de los propósitos que persigue la humanidad.

1.1.3 La mecánica de fluidos en la ingeniería

Existe un vasto conjunto de sistemas, objeto de estudio de la ingeniería, que utilizan la mecánica de fluidos como componente esencial. Muchos de éstos se encuentran en la casa o en la escuela (calefacción y aire acondicionado, suministro de agua y eliminación de líquidos residuales, sistemas de enfriamiento para computadoras, refrigeradores, ventiladores, aspiradoras y secadoras de cabello) o bien, en el ambiente exterior (automóviles, ferrocarriles, aviones, barcos, depósitos de agua y acueductos, plantas públicas para el tratamiento de residuos, incineradores y plantas generadoras de electricidad). Por otra parte,

muchos de ellos son componentes de los sistemas industriales (sistemas de energía hidráulica para la construcción y fabricación de equipo, instalaciones para la desintegración catalítica en refinerías de petróleo) que la mayoría de los individuos pasan por alto, a pesar de ser los ingredientes vitales de una sociedad industrial. Los ingenieros mecánico, civil, químico, aeronáutico y naval deben poseer un conocimiento suficiente de la mecánica de fluidos al diseñar cualquiera de estos sistemas.

Tal vez nada mejor que el motor de un automóvil, como el de la figura 1.2, resume las interrelaciones de los diferentes procesos de la mecánica de fluidos. El flujo de fluido más importante que ocurre en este motor es el flujo de aire que pasa por el sistema de admisión, en donde se mezcla con vapor de combustible y es succionado hacia el cilindro del motor durante el tiempo de admisión. Después de que la mezcla de aire y combustible se comprime, enciende y expande durante el tiempo de compresión (donde se genera la energía), dicha mezcla fluye hacia el interior del conducto del escape, pasando primero por un convertidor catalítico que disminuye los contaminantes del aire y, después, por un silenciador que amortigua el sonido del escape provocado por el flujo de alta velocidad del cilindro del motor. La cantidad de aire que se extrae a través del motor en cada revolución del cigüeñal se regula mediante la válvula de admisión del sistema de admisión, la cual disminuye la presión del aire (y por lo tanto, la densidad del aire) cuando se necesita menor potencia. (Una válvula de admisión muy abierta permite que un flujo máximo de aire y combustible entre al cilindro y, por tanto, se consigue el máximo trabajo que puede generarse por cada revolución del motor.)

En modelos más antiguos de vehículos, el carburador es el dispositivo que se encuentra acoplado al sistema de admisión de aire y también mide y mezcla el combustible líquido con el aire que entra, ajustando el flujo de combustible para suministrar la proporción correcta de combustible y aire que garantice la ignición subsiguiente de la mezcla en el cilindro mediante una chispa. En vehículos más recientes, con sistema de inyección de combustible, el combustible se rocía en el aire en cada orificio (o lumbrera) de admisión, en lugar de mezclarse en la corriente común en el carburador. El gas combustible que se escapa por los pistones se recoge en el espacio del cárter y se envía de nuevo por un tubo al sistema de admisión para impedir su emisión a la atmósfera como contaminante del aire.

No obstante, existen otros sistemas de flujo de fluidos en el motor de un automóvil. Una bomba de aceite lubricante extrae aceite del cárter y lo envía a los baleros, válvulas y otras partes en movimiento. La bomba de combustible transfiere el combustible líquido almacenado en el tanque de gasolina al carburador o a la bomba de inyección de combustible. Una bomba que circula el refrigerante envía fluido de enfriamiento al motor y al radiador en donde se enfría por el flujo de aire y regresa al motor. Un ventilador se encarga de mantener el flujo de aire de enfriamiento a través del radiador, en caso de que el movimiento de avance del vehículo no sea suficiente para este fin. Después de calentarse el fluido de enfriamiento que sale del motor, puede desviarse al sistema de calefacción de aire del vehículo. Si el vehículo cuenta con aire acondicionado, mediante un compresor accionado por el motor se hace circular el gas refrigerante a través del segmento condensador del radiador, donde se enfría, y después a través del evaporador, donde se absorbe el calor del aire interior del vehículo.

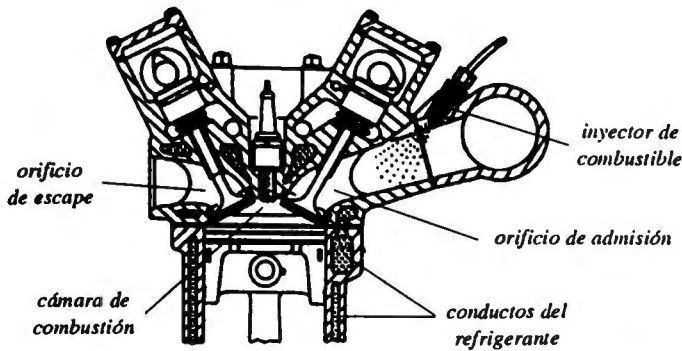


Figura 1.2 Corte en sección transversal de un motor de automóvil en el que se aprecian algunos de los conductos por donde circula el flujo de fluidos. (Reimpreso con permiso, K. Newton, W. Steeds y T. K. Garret, 1989, *The Motor Vehicle*, décima primera edición [Londres: Butterworth-Heinemann Ltd.])

En el motor de ignición por compresión (diesel), el combustible entra directamente en el cilindro después de que la carga de aire se ha comprimido. No hay válvula de admisión en el sistema de admisión ni reducción de la presión en el aire de admisión a baja potencia. En otros aspectos, los flujos de fluidos son semejantes a los del motor de ignición por chispa (de gasolina).

El flujo de un fluido en un motor de turbina de gas es completamente diferente. El aire de admisión se comprime por las paletas compresoras que se mueven con rapidez seguidas por paletas estacionarias que convierten parte de la energía cinética en un aumento de la presión del aire. El combustible se quema en la cámara de combustión, al término de la compresión, y los productos calientes de la combustión pasan a través de las paletas de rápido movimiento de la turbina con lo que se genera energía mecánica. En promedio, el flujo es estacionario y no intermitente como en el motor alternativo de un automóvil. En el motor de reacción de un avión, el aumento en la velocidad de flujo del gas de escape caliente, más allá de la velocidad de flujo del aire de admisión, produce un empuje que impulsa el avión.

El flujo de vapor de alta velocidad que circula a través de una turbina de vapor en una planta de energía eléctrica es muy semejante al que pasa por una turbina de gas. Pero la planta de vapor es un sistema cerrado, en donde el vapor se condensa en agua, corriente abajo desde la turbina, y se bombea a alta presión antes de pasar por la caldera, en donde se convierte en vapor caliente de alta presión que alimenta la turbina.

Los flujos antes descritos se llaman *flujos internos* porque están contenidos dentro de estructuras mecánicas. Éstos son, predominantemente, flujos que comprenden la transferencia de calor o fluidos o, bien, la generación o utilización de energía mecánica. No obstante, hay otros flujos en donde el fluido es externo a las estructuras mecánicas, como el flujo de aire alrededor de un avión o de agua alrededor de un barco, en donde la estructura interacciona con el ambiente fluido que lo rodea. Éstos se conocen como *flujos externos*.

Tal vez, el más familiar de los flujos externos sea el que rodea a un avión. El diseño de la forma que debe poseer la estructura del ala para producir la fuerza ascensional suficiente

que equilibre la atracción gravitatoria, al mismo tiempo que reduzca la resistencia aerodinámica al avance a un valor suficientemente pequeño que pueda ser equiparado por el empuje de una hélice o motor de reacción, requiere una profunda comprensión del flujo de fluidos en tres dimensiones. El diseño de la hélice de un avión o de una turbina eólica exige las mismas consideraciones cuidadosas en torno al flujo de fluidos a fin de lograr la eficiencia que se necesita. En el caso de los barcos oceánicos, su forma determina tanto la estabilidad que impida que el navío se vuelque, como la potencia necesaria para moverlo; en especial, la potencia que se disipa cuando el barco forma las olas que se llevan la energía suministrada por el sistema de propulsión. Hoy en día, se admite que el flujo de aire que pasa por un automóvil es una de las importantes variables que determinan su rendimiento energético. Las formas de los vehículos de hoy reflejan esta importancia.

Es evidente que el diseño de muchos de los sistemas creados por la ingeniería exige una comprensión de las propiedades de los flujos de fluidos que emplean. Existen muchas y muy diversas aplicaciones que se basan en los principios que rigen el flujo de fluidos. Si se quiere participar en el diseño de esos sistemas, es necesario contar con una sólida comprensión de los principios de la mecánica de fluidos y una capacidad que permita aplicar estos principios a problemas concretos.

1.2 Física de fluidos

La mecánica de fluidos es una ciencia macroscópica, v.g., se ocupa de las características que pueden observarse y medirse en un laboratorio. Aunque no es posible determinar los movimientos de moléculas individuales con mediciones realizadas en el laboratorio, se reconoce que es el conjunto de las propiedades de las moléculas individuales lo que determina el comportamiento de un elemento macroscópico de fluido. Los instrumentos de medición promedian el comportamiento de un número muy grande de moléculas en la proximidad de un punto en un fluido, con lo que se determinan las propiedades macroscópicas del fluido en ese punto.

Por ejemplo, supongamos que fuera posible medir las velocidades de todas las moléculas existentes dentro de un cubo de aire de 1 micrometro (μm) de lado, o con un volumen igual a 10^{-8} m^3 . Puesto que hay cerca de 2×10^{25} moléculas de aire en un metro cúbico, este pequeño volumen contendría más de 10^7 moléculas, un número muy grande. Estas moléculas se moverían en todas direcciones y su velocidad promedio sería alrededor de 300 metros por segundo (m/s). Sin embargo, si el aire es estacionario, el valor promedio de la suma vectorial de las velocidades moleculares \mathbf{V} , es cero. Por otra parte, si el aire se mueve despacio, esta velocidad vectorial promedio \mathbf{V} será igual a la velocidad del movimiento volumétrico que se observa. Siempre y cuando exista un número suficientemente grande de moléculas en el elemento de volumen de interés, durante el tiempo de medición, el cálculo del promedio define las propiedades macroscópicas del fluido que pueden atribuirse a un punto localizado en el centro del elemento. Estas propiedades se definen, así, como funciones continuas de espacio y tiempo en todo el fluido. Son estas propiedades promedio las que se observan en el laboratorio

cuando se mide la velocidad del fluido, o bien, su presión o densidad, con los instrumentos apropiados.

Por lo común, los fluidos ordinarios se dividen en dos categorías, *gas* o *líquido*. Un litro de gas, que podría ser aire, tiene una masa mucho menor que un litro de líquido, como el agua. Las moléculas de un gas se mueven con rapidez en todas direcciones y en ocasiones chocan entre sí, pero, en general, se encuentran libres de fuerzas intermoleculares. Por otro lado, en un líquido las moléculas siempre interactúan entre sí, se mueven de un lado a otro, aunque sin ir muy lejos antes de que una molécula vecina las repela. Cuando un gas se comprime para dar lugar a un volumen más pequeño, las colisiones moleculares se producen con mayor frecuencia, en cuyo caso una molécula pasa una fracción más pequeña de tiempo en vuelo libre. Cuando se comprime un gas lo suficiente de modo que sus moléculas se encuentren tan próximas entre sí como las de un líquido, resulta imposible distinguir el gas de un líquido. En tanto que la distinción entre un líquido y su vapor gaseoso es termodinámicamente importante, ambos estados presentan el comportamiento de un fluido a escala macroscópica.

La propiedad predominante de los fluidos es su propensión a fluir de manera espontánea dentro de los recipientes que los contienen. Es necesario almacenar los fluidos en recipientes a fin de impedir que se desplacen hacia otros lugares, en contraste con los sólidos, que no necesitan confinarse. El volumen de un líquido se conserva al pasar de un recipiente a otro, en tanto que un gas se expande siempre para llenar el recipiente que ocupa a causa de que sus moléculas se mueven con libertad. Los fluidos no son capaces de conservar una forma que no dependa del medio que los rodea. Esta propiedad de los fluidos es consecuencia directa de la incapacidad de las fuerzas intermoleculares para mantener una orientación angular constante de las moléculas respecto de las demás. Las moléculas de los fluidos que en un momento dado se encuentran muy próximas entre sí son capaces de alejarse con relativa facilidad.

Muchos fluidos son mezclas de varias especies químicas, como el aire, que se compone de nitrógeno, oxígeno y muchas especies traza. Los líquidos pueden ser soluciones de especies de solutos disueltos en un disolvente, como el agua de mar. Las mezclas de esta índole conservan las características propias de los fluidos, si bien cuentan con un rasgo adicional en el sentido de que las proporciones de los constituyentes pueden medirse por separado y variar de un punto a otro en el fluido.

1.2.1 Propiedades físicas de un fluido

Las propiedades macroscópicas de un fluido reflejan su estructura molecular. Algunas de estas propiedades son muy significativas en cuanto a que afectan la forma en que el fluido reacciona ante las fuerzas aplicadas o movimientos que la superficie del fluido experimenta y son de interés fundamental para comprender la mecánica de fluidos. Otras propiedades, como las eléctricas o las magnéticas, pueden afectar a un flujo sólo en circunstancias poco comunes, aunque es posible que sean de grandes consecuencias para otros fenómenos físicos, como es el caso de la propagación de ondas electromagnéticas en un fluido. Ahora, la atención se concentrará en aquellas propiedades que se vinculan de modo más estrecho con el movimiento de un fluido.

Densidad

La densidad de un fluido es la razón de la masa del fluido, en un elemento fluido, a su volumen. Puesto que es posible concebir el elemento fluido como un volumen diminuto, lo más pequeño que pueda medirse, es posible considerar la densidad como una función continua de la posición dentro del campo del fluido. Por costumbre se asigna el símbolo ρ para representar la propiedad conocida como densidad, la cual se mide, por lo general, en unidades de kilogramos por metro cúbico (kg/m^3).

La densidad de un fluido afecta su flujo de dos formas distintas. En primera instancia, la densidad determina la inercia de un volumen unitario de fluido y, por lo tanto, su aceleración cuando dicho volumen se somete a una fuerza dada. Los fluidos de baja densidad, como los gases, se aceleran con mayor facilidad que los fluidos de alta densidad, como los líquidos, cuando se someten a la misma fuerza por unidad de volumen. Así, para acelerar un fluido de baja densidad, como el aire, se requiere menor fuerza por unidad de volumen para acelerarlo que un fluido de alta densidad, como el agua. Es por esta razón que es más difícil abrirse paso a través del agua que caminar a través del aire. De manera semejante, la fuerza gravitatoria por unidad de volumen se determina a partir de la densidad del fluido. Se realiza más trabajo para levantar un volumen determinado de agua que uno equivalente de gas.

La densidad de un líquido es una función de su temperatura y presión. A presión constante, al aumentar la temperatura de un líquido su densidad disminuye en virtud de que una masa constante de fluido se expande con el aumento en la temperatura. A temperatura constante, al aumentar la presión sobre un líquido, éste se comprime y su densidad aumenta. En un gas, tienen lugar las mismas variaciones de densidad cuando se somete a cambios de presión o temperatura, pero estos cambios son relativamente mayores en el caso de un gas que en el de un líquido.

Los pequeños cambios de densidad $\delta\rho$ que acompañan a pequeños cambios de presión δp o de temperatura δT pueden expresarse en términos de las derivadas parciales de ρ con respecto a la presión y la temperatura:²

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \delta p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \delta T$$

Al dividir ambos lados de esta expresión entre ρ , el cambio fraccionario de densidad $\delta\rho/\rho$, se encuentra que es:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial p}\right)_T \delta p + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial T}\right)_p \delta T \quad (1.1)$$

El recíproco del coeficiente del primer término se conoce como *módulo volumétrico* E , en tanto que el negativo del coeficiente del segundo término se denomina *coeficiente de dilatación térmica* β .

² El subíndice que aparece fuera del paréntesis de la derivada parcial denota la variable que se mantiene constante en el proceso de derivación.

$$E \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \ln \rho} \right)_T \quad (1.2)$$

$$\beta \equiv - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.3)$$

Los valores de E correspondientes al agua y aire a temperatura ambiente y presión atmosférica son $2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ y $1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, respectivamente. Para un pequeño aumento dado en la presión, el cambio fraccionario en la densidad del aire $\delta\rho/\rho$ es así 2.1×10^4 veces mayor en el caso del aire que en el del agua. Esta diferencia se debe a que existe un espacio mucho menor entre las moléculas de un líquido que entre las de un gas a presión atmosférica, lo cual ocasiona que resulte más difícil comprimir un líquido para dar lugar a un volumen menor por ser mayores las fuerzas de repulsión entre las moléculas de los líquidos.

La razón de los coeficientes de dilatación térmica del agua y del aire, que son $1.53 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ y $3.5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, respectivamente, es menor que la de los módulos volumétricos, pero el aire se dilata con más facilidad que el agua. El calentamiento de fluidos en el campo gravitatorio de la Tierra produce un movimiento ascendente en el fluido calentado, en el caso del agua y del aire, no obstante, el efecto es mayor en el aire que en el agua pues el valor del coeficiente de dilatación térmica del aire es mayor.

La dilatación térmica del agua es anómala dentro del intervalo de temperatura de 0°C y 4°C , temperatura a la cual el agua se contrae al calentarse. La densidad del agua alcanza su máximo a 4°C , y si se calienta por encima o se enfría por debajo de esa temperatura, el agua se dilata. Cuando la superficie de un lago o estanque se enfría durante los últimos meses del año, el agua fría de la superficie desciende al fondo siempre y cuando su temperatura exceda los 4°C , si bien cuando se enfría por debajo de ese valor, el agua flota en la superficie pues es menos densa que el agua más caliente que está abajo. De ahí que en invierno se forme hielo en la superficie de un estanque, en tanto que el fluido del fondo permanece más caliente a 4°C .

Algunas veces, resulta conveniente expresar la densidad ρ de un fluido como la razón de esa densidad a la densidad ρ_{ref} del agua a 4°C . Esta razón se conoce como *densidad relativa SG*, por sus siglas en inglés:

$$SG \equiv \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (1.4)$$

$$\rho = (SG)\rho_{ref}$$

Es posible medir en forma directa la densidad relativa de un líquido con un *hidrómetro*. El valor de la densidad relativa puede revelar información práctica sobre el estado de un fluido. Por ejemplo, la densidad relativa de la solución de ácido sulfúrico que contiene un acumulador de plomo y ácido de automóvil indica el grado de carga eléctrica —una densidad relativa mayor indica una solución más concentrada y, por lo tanto, una mayor carga en el acumulador. La densidad específica de la leche se usa para medir su

contenido de grasa (cuanto mayor sea la grasa tanto menor será la densidad relativa) y la de la miel de maple para medir su contenido de azúcar.

Ejemplo 1.1

Se espera que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra aumente en el próximo siglo a causa de la intensificación del efecto invernadero. Cuando el océano se caliente, se dilatará y aumentará el nivel del mar. Si la profundidad promedio del océano es 3800 m y su coeficiente de dilatación térmica promedio es $1.6 \times 10^{-4} K^{-1}$, calcule el aumento del nivel del mar cuando la temperatura del océano se incremente 1 K.

Solución

Una columna de agua de mar se dilatará en dirección vertical al calentarse, puesto que la dilatación lateral se ve restringida por los continentes. El aumento del nivel del mar δh será el producto del coeficiente de dilatación térmica por el aumento en la temperatura por la profundidad del océano:

$$\begin{aligned}\delta h &= (1.6 \times 10^{-4} K^{-1}) \times (1 K) \times (3800 m) \\ &= 0.608 m\end{aligned}$$

Viscosidad

A pesar de que es bastante evidente que los líquidos se mueven bajo la fuerza gravitatoria para ajustarse a la forma de los recipientes que los contienen, el movimiento de algunos líquidos es más lento que el de otros. Cuando se vierte miel de un frasco a un plato, ésta se mueve con menor rapidez que el agua bajo las mismas condiciones experimentales. La respuesta de los aceites lubricantes viscosos cuando se vacían de un recipiente a otro es intermedia a la del agua y la miel. La propiedad de un fluido que mide su resistencia al cambio de forma se conoce como *viscosidad* (se denota mediante el símbolo μ). De ahí que la miel tenga una mayor viscosidad que el agua.

Se requiere un método más cuantitativo en la determinación de la viscosidad relativa de los fluidos que el sencillo experimento de verter líquidos ya descrito. Una forma consiste en colocar una capa delgada del fluido entre dos placas planas y paralelas, separadas una distancia constante h (véase la figura 1.3). Si se mueve una de las placas con rapidez V relativa a la otra (donde la dirección del movimiento es paralela a las superficies de las placas) y se mide la fuerza necesaria para realizar este movimiento, expresándola como la fuerza por unidad de área de la superficie de la placa τ , se encuentra que τ es proporcional a V e inversamente proporcional a h para cualquier fluido dado, pero que la constante de proporcionalidad es diferente para cada fluido sometido a prueba. La constante de proporcionalidad, en este experimento, se llama *coeficiente absoluto de viscosidad*, o simplemente *viscosidad*, para abreviar:

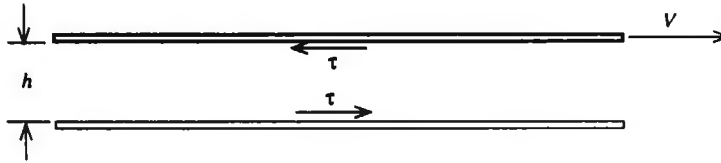


Figura 1.3 Un fluido que llena el espacio h entre las dos placas paralelas está sujeto a un movimiento cortante simple. La placa superior se desplaza con una rapidez V , en tanto que la inferior permanece estacionaria. Ambas placas experimentan una fuerza externa por unidad de área τ paralela a las placas pero en direcciones opuestas.

$$\tau = \mu \left(\frac{V}{h} \right)$$

En este experimento, la fuerza ejercida sobre una placa, la cual hace que ésta se mueva, es equilibrada por una fuerza igual pero opuesta en la otra placa. Ambas fuerzas se transmiten al fluido, las cuales someten la capa de fluido a una fuerza superficial por unidad de área τ que se denomina esfuerzo cortante, y es la misma en magnitud, aunque con dirección opuesta, para ambas superficies del fluido en contacto con las placas. Mas cualquier capa delgada de fluido de espesor δn entre las dos placas debe experimentar también el mismo esfuerzo τ y una diferencia de velocidad δV correspondiente con una magnitud que haga que:

$$\tau = \mu \left(\frac{\delta V}{\delta n} \right)$$

En el límite de capas infinitesimalmente delgadas, $\delta V/\delta n = \partial V/\partial n$, y se tiene:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right) \quad (1.5)$$

Puesto que τ es igual en todos los puntos del fluido en este experimento, se sigue que la diferencia de velocidad V varía linealmente con la distancia n normal a las superficies de las placas. El flujo que se ilustra en la figura 1.3 se llama *esfuerzo cortante simple*.

Los fluidos que exhiben el comportamiento simple de la ecuación 1.5 se conocen como *fluidos newtonianos*, pues fue Newton quien propuso por primera vez esta relación lineal entre el esfuerzo cortante y la derivada de la velocidad.³ La mayoría de los fluidos son newtonianos, si bien para algunos la relación entre el esfuerzo cortante y la derivada de la velocidad es más compleja. En estos fluidos, que se denominan *no newtonianos*, el distinto comportamiento se presenta, por lo común, a consecuencia de que las moléculas del fluido son muy grandes, como polímeros y proteínas; o contienen partículas no fluidas, como la sangre. Es más difícil describir el esfuerzo cortante en dichos fluidos.

³ Isaac Newton (1642-1727) en su *Principia* consideró también la propagación de las ondas de sonido y la teoría cinética de los gases. Por supuesto, sus leyes del movimiento son el fundamento de la mecánica de fluidos.

El esfuerzo viscoso τ en un fluido que se encuentra sometido a un flujo cortante, como el de la figura 1.3, es consecuencia del movimiento promedio relativo de las moléculas del fluido. En un fluido estacionario, las moléculas individuales intercambian energía con las moléculas vecinas de manera constante, proceso durante el cual algunas veces ganan energía, en tanto que otras veces la pierden, pero, en promedio, con el transcurso del tiempo no hay pérdida ni ganancia de energía. No obstante, en un flujo cortante, las moléculas tienden a ganar energía al chocar con otras moléculas que se mueven, en promedio, hacia ellas con una velocidad promedio proporcional a la velocidad de deformación unitaria del fluido $\partial V/\partial n$. Esta energía debe suministrarla una fuerza, el esfuerzo cortante τ , que actúe sobre un elemento de fluido deformante realizando un trabajo a razón de $\tau(\partial V/\partial n) = \mu(\partial V/\partial n)^2$ por unidad de volumen de fluido. Al incrementarse la energía de las moléculas del fluido a causa del trabajo de la deformación viscosa, la temperatura del fluido crece puesto que el incremento de la energía molecular se distribuye de manera aleatoria entre las moléculas, como sucede cuando se calienta el fluido. Este proceso se llama *disipación viscosa*.

Un lubricante es un fluido que se coloca entre dos superficies sólidas en movimiento con el propósito de impedir que las superficies entren en contacto directo y, por lo tanto, reducir a un valor pequeño el esfuerzo cortante que experimentan, $\mu V/h$, en lugar del valor mucho mayor asociado con un contacto deslizante entre las superficies sólidas. Cuanto mayor sea la viscosidad del lubricante, tanto mayor será el esfuerzo cortante, pero mayor será su capacidad para impedir que ambas superficies entren en contacto.

La viscosidad de un fluido varía en forma evidente con la temperatura aunque muy poco con la presión. La viscosidad de los líquidos tiende a disminuir con el aumento de la temperatura. (En tiempo frío, una mayor viscosidad del aceite del motor aumenta la energía que se requiere para encender el motor de un automóvil.) Sin embargo, la viscosidad de los gases aumenta con la temperatura.

Más adelante, se usará una cantidad que se conoce como *viscosidad cinemática*, que se denota mediante el símbolo ν . Ésta se define como la razón de la viscosidad μ a la densidad ρ :

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho} \quad (1.6)$$

La viscosidad cinemática afecta la rapidez mediante la cual una fuerza cortante aplicada sobre la superficie de un fluido penetra en su interior. Por esta razón, algunas veces se le da el nombre de *difusividad viscosa*.

En la tabla 1.1 se lista las propiedades de algunos líquidos y gases comunes de importancia para la mecánica de fluidos: densidad ρ , viscosidad μ y viscosidad cinemática $\nu \equiv \mu/\rho$. También, en la lista aparece la rapidez o razón de cambio de la viscosidad μ al aumentar la temperatura, expresada como la derivada $d \ln \mu/dT$. Con este valor, es posible calcular la viscosidad a una temperatura $T(^{\circ}\text{C})$ a partir de una viscosidad a 20°C , μ_{20} , mediante:

$$\mu = \mu_{20} \exp\left(\frac{d \ln \mu}{dT} \times [T(^{\circ}\text{C}) - 20^{\circ}\text{C}]\right) \quad (1.7)$$

Cuando un fluido se mueve a lo largo de una superficie sólida, las moléculas del fluido que están en esa superficie no se mueven con el fluido. Se dice que un fluido se adhiere

Tabla 1.1 Propiedades de los fluidos a 20°C (68°F) y presión atmosférica

	ρ kg/m ³	μ Pa s	ν m ² /s	$d \ln \mu/dT$ K ⁻¹
Líquidos				
Agua	9.98E(2)	1.00E(-3)	1.00E(-6)	-2.84E(-2)
Octano normal	7.02E(2)	5.42E(-4)	7.72E(-7)	-1.26E(-2)
Alcohol etílico	7.89E(2)	1.20E(-3)	1.52E(-6)	-1.95E(-2)
Alcohol metílico (metanol)	7.92E(2)	5.84E(-4)	7.37E(-7)	-1.57E(-2)
Benceno	8.79E(2)	6.52E(-4)	7.42E(-7)	-6.03E(-2)
Etilenglicol	1.110E(3)	1.99E(-2)	1.79E(-5)	-9.23E(-2)
Glicerina	1.260E(4)	1.49	1.18E(-3)	-3.71E(-2)
Mercurio	1.355E(4)	1.55E(-3)	1.14E(-7)	
Gases perfectos				
Aire	1.204	1.82E(-5)	1.51E(-5)	2.56E(-3)
Hidrógeno	8.382E(-2)	1.83E(-6)	1.05E(-4)	3.95E(-3)
Helio	1.664E(-1)	1.95E(-5)	1.17E(-4)	2.15E(-3)
Vapor de agua	7.498E(-1)	9.57E(-6)	1.28E(-5)	3.67E(-3)
Monóxido de carbono	1.165	1.76E(-5)	1.51E(-5)	2.62E(-3)
Nitrógeno	1.165	1.76E(-5)	1.51E(-5)	2.50E(-3)
Oxígeno	1.330	2.03E(-5)	1.53E(-5)	2.56E(-3)
Argón	1.660	2.25E(-5)	1.36E(-5)	2.68E(-3)
Bióxido de carbono	1.830	1.47E(-5)	8.03E(-6)	3.07E(-3)

a la superficie y que la rapidez del fluido en la interfaz formada por el fluido y el sólido es la misma que la del sólido. Este movimiento contrasta con lo que sucede con un sólido que se desliza sobre otro sólido, donde las moléculas de los sólidos en la interfaz se mueven con la misma rapidez que los sólidos mismos, rebotando como un carro sobre un camino accidentado.

Tensión superficial

Las propiedades de los fluidos, como la densidad y la viscosidad, son aplicables a un elemento de fluido, en el interior de un fluido, que se encuentra rodeado por elementos de fluido contiguos. A estas propiedades se les denomina, en ocasiones, *propiedades volumétricas*. Pero, cuando un elemento de fluido se encuentra en la frontera de un fluido, en donde entra en contacto con un fluido distinto o con un sólido, sus propiedades pueden diferir de las de un elemento en el interior del fluido.

Considérese, por ejemplo, una gota de agua rodeada por aire. En su interior, cada molécula de agua está sujeta a las fuerzas de atracción y repulsión de las moléculas contiguas que, en promedio, se distribuyen de igual modo en todas direcciones alrededor

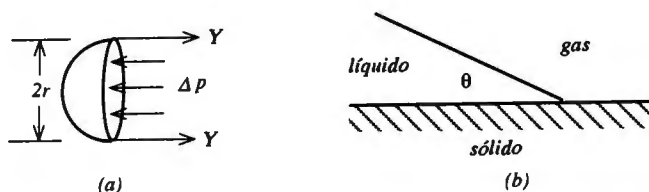


Figura 1.4 Ilustración de (a) los efectos que la tensión superficial ejerce en la presión Δp de una gota y (b) el ángulo de contacto θ en la interfaz formada por gas, líquido y sólido.

de la molécula dada. Sin embargo, en el caso de una molécula superficial sólo la mitad del espacio que la rodea está ocupado por otras moléculas de agua, por lo que se produce una nueva disposición de las fuerzas intermoleculares que permita mantener a la molécula superficial en su lugar. Las moléculas superficiales experimentan una fuerza de atracción ocasionada por las moléculas superficiales cercanas, de modo que la superficie se encuentra en estado de tensión. (En el caso de un líquido bajo presión positiva —los líquidos, por lo general, no pueden mantener una presión negativa— las moléculas interiores experimentan, en promedio, una fuerza de repulsión.) Esta fuerza de tensión por unidad de longitud sobre la superficie, denominada *tensión superficial* Υ , es una propiedad del fluido y del fluido o sólido adyacente. También se conoce, de modo más apropiado, como *tensión interfacial*, ya que se presenta en la interfaz de dos fluidos en contacto. La unidad de tensión superficial es fuerza por unidad de longitud; v.g., newton por metro (N/m).

La tensión superficial de la gota de un fluido crea una presión mayor dentro de la gota que la existente en el fluido circundante, en forma muy semejante a lo que sucede con un globo, el cual comprime el aire en su interior. Este exceso de presión Δp dentro de la gota, que actúa sobre el área de sección transversal πr^2 (en donde r es el radio de la gota) se compensa con la tensión superficial Υ que actúa en la circunferencia $2\pi r$, como se ejemplifica en la figura 1.4 (a):

$$\begin{aligned}\Delta p(\pi r^2) &= \Upsilon(2\pi r) \\ \Delta p &= \frac{2\Upsilon}{r}\end{aligned}\quad (1.8)$$

Al medir el incremento de presión Δp de una gota de radio r , es posible calcular el valor de la tensión interfacial Υ del líquido en el fluido que lo rodea.

Adviértase que cuando una interfaz es plana, en cuyo caso el radio de curvatura r es infinito, la diferencia de presión Δp es cero, v.g., la presión es igual en ambos lados de la interfaz plana, a pesar de la tensión interfacial.

La tensión interfacial de un líquido es susceptible al cambio cuando existen impurezas reunidas en su superficie, con lo cual se alteran las propiedades de ésta. Los agentes tensoactivos son sustancias químicas introducidas en forma deliberada para cambiar la tensión interfacial, en general para reducirla. Los detergentes son tensoactivos que cambian las propiedades superficiales del aceite, la grasa y partículas sucias en contacto con el agua, que facilitan su eliminación al lavarlos.

El trabajo que se necesita al inflar un globo se encuentra almacenado en parte en el material estirado del globo. En forma semejante, puesto que también se requiere realizar trabajo para formar una gota en el extremo de un tubo capilar al bombear líquido en el tubo, es posible afirmar que este trabajo se encuentra almacenado en la superficie de la gota como energía superficial. Si se calcula esta energía superficial mediante la presión Δp a partir del equilibrio de fuerzas que se proporcionó con anterioridad, se encuentra que la energía superficial por unidad de área (J/m^2) es igual a la tensión superficial (N/m), como debe ser, ya que el proceso de formación de la gota es reversible desde el punto de vista termodinámico.

Tanto el exceso de presión de la gota Δp como la energía superficial por unidad de volumen de la gota ($4\pi r^2\Upsilon/[4\pi r^3/3] = 3\Upsilon/r$) aumentan en el caso de gotas muy pequeñas. Esto inhibe bastante la formación de gotas de lluvia a partir de moléculas individuales de agua en la atmósfera. En cambio, las gotas de lluvia normalmente se forman a partir de núcleos sólidos de un tamaño inicial suficiente para que no haya grandes diferencias de presión.

La tensión superficial puede ser importante en flujos de fluidos que comprendan pequeñas gotas o burbujas, en donde el exceso de presión sea comparable con los cambios de presión en el campo de flujo. La tensión superficial es importante en la formación de gotas líquidas en atomizadores y equipo de pulverización de combustible.

La tensión superficial de gran parte de los líquidos en aire es inferior a $0.1 N/m$. A partir de la ecuación 1.8, una gota con radio de $1 mm$ tiene, así, un exceso de presión Δp menor que $200 N/m^2$, o 2×10^{-3} veces la presión atmosférica.

Cuando una interfaz entre dos fluidos entra en contacto con la superficie de un sólido, la interfaz forma un ángulo con respecto a la superficie del sólido denominado *ángulo de contacto*, como se ilustra en la figura 1.4(b). Este ángulo de contacto depende de la naturaleza de los dos fluidos y del sólido. Los valores del ángulo y la tensión interfacial determinarán, así, los efectos de capilaridad, como el aumento vertical en la altura de un fluido en un tubo capilar.

Cavitación y ebullición

Si la presión de un líquido se reduce una cantidad suficientemente grande, éste comenzará a hervir, v.g., una porción del líquido pasará de la fase líquida a la gaseosa. La presión a la cual ocurre este cambio, que se conoce como *presión de saturación*, la cual se representa con el símbolo p_v , depende mucho de la temperatura del fluido y aumenta rápido al incrementarse la temperatura.⁴ En flujos de líquido adiabáticos, como los que pasan por bombas, hidroturbinas y alrededor de las hélices de los barcos, dicho cambio de fase se conoce como *cavitación* y resulta de la reducción en la presión del líquido al fluir por superficies curvas. En los flujos que circulan por intercambiadores de calor, como las calderas, la evaporación ocurre cuando la presión de saturación aumenta por encima de la presión del fluido, puesto que éste se está calentando. En ambos casos, el

⁴ Para el agua, p_v aumenta de $6.108E(2) Pa$, a $0^\circ C$, hasta $1.0131E(5) Pa$, a $100^\circ C$.

cambio de fase se origina, por lo común, en las superficies sólidas en donde se encuentran los núcleos de vaporización.

Los flujos de cavitación pueden dañar las superficies sólidas conforme las burbujas de vapor se colapsan al elevarse la presión del fluido por encima de su presión de saturación. Las burbujas que se colapsan pueden inducir esfuerzos perjudiciales, aunque localizados, en la superficie del sólido con el que entran en contacto. Además, la cavitación es capaz de cambiar en forma considerable el flujo a través de los rotores de las bombas y alrededor de las hélices de los barcos, con lo cual se afecta su rendimiento general. En la medida de lo posible, deben evitarse las condiciones de cavitación de flujos. En contraste con lo anterior, la ebullición de los líquidos es, por lo general, un proceso conveniente, y el flujo de fluidos se encuentra diseñado para propiciar que suceda.

1.2.2 Propiedades termodinámicas

La termodinámica es una ciencia que explica cómo se comporta la materia al calentarla o enfriarla y al comprimirla o dilatarla. Permite predecir cuánto trabajo se puede producir con la materia mediante el intercambio de calor de ésta con sus alrededores. La mayoría de los sistemas que producen energía mecánica de una fuente de calor emplean un fluido, agua o aire por ejemplo, como medio a partir del cual se convierte calor en trabajo. Las propiedades termodinámicas de estos fluidos determinan la manera en que se comportan en el proceso de generación de energía. Para describir de manera apropiada el movimiento detallado de estos fluidos es necesario conocer sus propiedades termodinámicas.

Las leyes de la termodinámica definen varias propiedades: energía interna \hat{u} , temperatura absoluta T y entropía \hat{s} . Estas propiedades se relacionan entre sí incrementalmente mediante la segunda ley de la termodinámica bajo la forma:

$$T d\hat{s} = d\hat{u} + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (1.9)$$

A partir de estas propiedades, es posible definir otras más de utilidad, entre las cuales están la entalpía $\hat{h} \equiv \hat{u} + p/\rho$, el calor específico a presión constante $\hat{c}_p \equiv (\partial\hat{h}/\partial T)_p$ y el calor específico a volumen constante $\hat{c}_v \equiv (\partial\hat{u}/\partial T)_p$. En el capítulo 8, se mostrará cómo participan algunas de estas propiedades en el flujo de un fluido.

De manera alternativa, es posible escribir la segunda ley de la termodinámica (ecuación 1.9) en términos de los cambios de entalpía y presión como sigue:

$$T d\hat{s} = d\hat{h} - \frac{1}{\rho} dp \quad (1.10)$$

El gas perfecto

Con mucha frecuencia, se tienen flujos de fluidos de gases a presión atmosférica, o cercana a ella. En estos casos, los cambios de presión p , densidad ρ y temperatura absoluta T de una partícula de gas pueden relacionarse exactamente entre sí mediante la ley de los gases perfectos:

$$p = \rho RT \quad (1.11)$$

en donde R es la constante del gas dado. Pero esta información por sí sola es insuficiente para explicar cómo las propiedades de un gas cambian conforme éste se mueve. Además, es preciso apelar a las leyes de la termodinámica, que incluyen la ecuación 1.9. Los flujos compresibles son inherentemente complicados pues las leyes de la termodinámica, así como las de la mecánica de fluidos, operan de manera simultánea.

La constante del gas perfecto R está relacionada con la *constante universal de los gases* \mathcal{R} y el peso molecular⁵ \mathcal{M} mediante:

$$R \equiv \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \quad (1.12)$$

En un gas perfecto, la energía interna \hat{e} , la entalpía \hat{h} y los calores específicos \hat{c}_p y \hat{c}_v , son sólo funciones de la temperatura absoluta T y no dependen de la presión ni la densidad. Los calores específicos se relacionan con la constante del gas R mediante:

$$\hat{c}_p - \hat{c}_v = R \quad (1.13)$$

Una propiedad importante de un fluido, la velocidad a de una onda de sonido, se relaciona con las propiedades termodinámicas mediante la fórmula:

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.14)$$

En el caso de un gas perfecto, la velocidad del sonido se convierte en:

$$a^2 = \left(\frac{\hat{c}_p}{\hat{c}_v} \right) RT \quad (1.15)$$

La tabla 1.2 lista algunas de las propiedades del gas perfecto para los gases comunes. La viscosidad de un gas perfecto es sólo función de la temperatura.⁵

Transferencia de calor y flujos compresibles

Existen dos tipos de flujo en los cuales las propiedades termodinámicas de los fluidos son importantes. El primero es un flujo en el cual se calienta o enfría un fluido, puede mencionarse un proceso común, que es cuando el fluido se emplea como medio de transferencia de calor. El segundo tipo, denominado *flujo compresible*, es aquel en el cual el movimiento interno aleatorio de las moléculas de un fluido se transforma en el movimiento dirigido de una partícula de fluido. El flujo a través de una turbina de gas y la propagación de una onda de sonido son ejemplos de flujos compresibles. En este libro, no se tratarán flujos con transferencia de calor; no obstante, el capítulo 12

⁵ El peso molecular es la razón de la masa de una molécula al doceavo de la masa de un átomo de carbono-12.

Tabla 1.2 Propiedades de los gases perfectos

Gas	Símbolo	\mathcal{M}	R J/kg K	\hat{c}_p/R^a	μ^a Pa s
Hidrógeno	H_2	2.016	4124	3.46	8.83E(-6)
Helio	He	4.003	2077	2.50	1.95E(-5)
Metano	CH_4	16.04	518.3	4.23	1.11E(-5)
Vapor de agua	H_2O	18.02	461.5	4.04	9.57E(-6)
Monóxido de carbono	CO	28.01	296.8	3.50	1.76E(-5)
Nitrógeno	N_2	28.02	296.8	3.50	1.76E(-5)
Aire		28.97	287.0	3.50	1.82E(-5)
Oxígeno	O_2	32.00	259.8	3.53	2.03E(-5)
Argón	Ar	39.94	208.2	2.50	2.25E(-5)
Dióxido de carbono	CO_2	44.01	188.9	4.44	1.47E(-5)

^a Valor a 20°C

considera algunos flujos compresibles sencillos de gases perfectos para los cuales los calores específicos se suponen constantes.

Flujo incompresible

Existen muchos ejemplos de flujos en los cuales las propiedades termodinámicas del fluido no afectan de manera apreciable el movimiento del fluido, v.g., el movimiento aleatorio de las moléculas del fluido no se transforma en un movimiento del fluido en alguna dirección que resulte evidente. Estos flujos se denominan *flujos incompresibles* ¡porque no son compresibles! Todo fluido es compresible en el sentido de que un aumento de presión, no importa cuán pequeño sea, va acompañado de un incremento en la densidad. En un flujo incompresible, una partícula de fluido se comprime o se expande de hecho al aumentar o disminuir la presión que actúa sobre ella; sin embargo, la índole de este flujo no permite que estos cambios se asocien con el fluido, alterando su carácter. En otras palabras, el flujo se comporta como si el fluido no experimentara ningún cambio en densidad, a pesar de que su densidad sufra un cambio pequeño. Aunque no basta que el cambio de densidad en un flujo sea pequeño a fin de que éste sea incompresible: el cambio de densidad en una onda de sonido audible es mínimo a pesar de que se trata de un flujo compresible. En la sección 3.33, se verá de qué forma se define un flujo incompresible matemáticamente. Por el momento, gran parte de los flujos se tratarán como incompresibles y se diferirá el estudio del flujo compresible para ser considerado en los capítulos 8 y 12.

1.2.3 Propiedades químicas

Algunas veces se requiere rastrear ciertas especies químicas presentes en el flujo de un fluido. Por ejemplo, es posible que se desee determinar de qué forma el viento transporta los contaminantes del aire o de qué manera las sustancias químicas tóxicas se mueven por un acuífero subterráneo que suministra agua potable. En el motor de un automóvil, el combustible se evapora y mezcla con el aire en las proporciones precisas necesarias que permitan garantizar que la mezcla se quemará rápido al encender la chispa. Cualquiera que sea el motivo, se necesita una medida sencilla de la cantidad de cada especie química presente en el elemento fluido. Tal medida es la *concentración de masa*, que se expresa como la masa del constituyente i por unidad de volumen de fluido y se designa con el símbolo ρ_i :

$$\rho_i \equiv \text{Masa del constituyente } i \text{ por unidad de volumen} \quad (1.16)$$

A ρ_i se le puede llamar densidad parcial, en el sentido de que ésta sería la densidad de la especie i si ésta última ocupara todo el volumen del elemento fluido. Por supuesto, la suma de las concentraciones de masa de todos los constituyentes debe sumarse a la densidad ρ del elemento de fluido:

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad (1.17)$$

En el caso de una mezcla de gases perfectos, es posible determinar las concentraciones a partir de las presiones parciales p_i de los constituyentes, ya que cada especie obedece la ecuación 1.11, de la ley de los gases perfectos:

$$\rho_i = \frac{p_i}{R_i T} \quad (1.18)$$

Adviértase que las presiones parciales se suman a la presión de la mezcla:

$$p = \sum_i p_i \quad (1.19)$$

Ejemplo 1.2

Se afirma que la concentración máxima de oxígeno en la sangre oxigenada es del 20%, v.g., la cantidad de oxígeno en un litro de sangre es igual a 1/5 de litro de oxígeno a presión atmosférica y a la temperatura del cuerpo. Calcule la densidad parcial ρ_{O_2} de oxígeno en la sangre a esta concentración.

Solución

Primero se calcula la densidad de oxígeno a una atmósfera y $98.6^\circ F$ a partir de la ecuación 1.11, de la ley de los gases perfectos, empleando $p = 1.0133E(5) \text{ N/m}^2$, $M = 32$ y $R = 8.3143E(3) \text{ J/kg K}$:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{pM}{\mathcal{R}T}$$

Al insertar los valores numéricos,

$$\rho = \left(\frac{1.0133E(5)Pa \times 32}{8.3143E(3) J/kg K \times (273.15 + \frac{2}{5} \times (98.6 - 32))K} \right)$$

$$= 1.2574 kg/m^3$$

La densidad parcial del oxígeno en la sangre es el 20% de esta cantidad:

$$\rho_{O_2} = 0.2 \times 1.2574 kg/m^3 = 0.2515 kg/m^3$$

1.3 Dimensiones y unidades de medición

Gracias a la ciencia los seres humanos aprenden a relacionar cuantitativamente las cosas que observan en el mundo circundante o en el laboratorio. A través de los sentidos se perciben con facilidad cosas como la distancia, la temperatura, la altura de un sonido, el movimiento del Sol en el cielo, el transcurso del tiempo, el peso de un objeto y la velocidad del viento. Si bien, para cuantificar cada una de estas variables observables, se requiere el uso de un instrumento y la definición de una unidad de medición, de modo que el número de unidades que intervienen en la medición de la variable observable sea precisamente su magnitud. La ciencia de la medición permite transformar las percepciones cualitativas de los individuos en percepciones cuantitativas.

A cada variable observable se le denomina *dimensión* y a la unidad de medición se le conoce como *unidad* de esa dimensión. El agua contenida en un vaso colocado sobre la mesa posee dimensiones de volumen, masa, temperatura, densidad, presión, área superficial y velocidad. Algunas de estas dimensiones se relacionan entre sí, v.g., la densidad es la razón de la masa al volumen. Otras dimensiones, como la masa y la temperatura, no se relacionan entre sí pues varían de modo independiente. En el primer caso, la unidad de densidad debe ser igual a la razón de las unidades de masa y volumen, en tanto que en el segundo, no existe relación entre las unidades de masa y temperatura.

Además, las leyes físicas ponen restricciones adicionales sobre la independencia de las medidas. Las leyes físicas relacionan mediante ecuaciones las variables observables de un tipo con las de otro. Por ejemplo, la ley del movimiento de Newton relaciona la fuerza con la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento. Cada término de la ecuación que expresa una ley física debe poseer la misma dimensión. De esta manera, la fuerza debe tener la misma dimensión que la rapidez de cambio de la cantidad de

movimiento. Además, la magnitud de los términos que integran la ecuación de una ley física debe satisfacer la igualdad expresada: requisito que es fácil satisfacer si la misma unidad de medida se elige para cada término. De lo contrario, sería preciso llenar con constantes de proporcionalidad arbitrarias todas las leyes de Newton, las ecuaciones de Maxwell, las leyes de la termodinámica, etcétera.

El sistema SI

Si se examinan todas las leyes físicas que se conocen, se encuentra que sólo cinco dimensiones independientes son necesarias para expresar todas las variables observables que utilizan estas leyes, como la longitud, el tiempo, la masa, la fuerza, la temperatura, la velocidad y el campo eléctrico. Cuando se habla de dimensiones independientes se quiere decir que ninguna de ellas puede medirse en términos de alguna combinación con las otras. Por acuerdo internacional entre grupos científicos, estas dimensiones independientes, conocidas como *dimensiones fundamentales*, son las de masa, longitud, tiempo, temperatura y corriente eléctrica, y los valores de las unidades se definen y denotan (*símbolo*) como kilogramo (*kg*), metro (*m*), segundo (*s*), kelvin (*K*) y ampere (*A*), respectivamente. Estas unidades se llaman *unidades fundamentales*. Las unidades de todas las demás dimensiones, que se llaman *dimensiones derivadas*, se expresan en términos de estas cinco unidades de las dimensiones fundamentales. Estas últimas se llaman *unidades derivadas*. Este sistema de unidades de medición se conoce como *Sistema Internacional de Unidades*, o SI, para abreviar.

Algunas veces es conveniente utilizar otro nombre para la unidad de una dimensión derivada. El nombre para la unidad de fuerza, cuyas dimensiones son $kg\ m/s^2$, es el newton (*N*). Por lo que un *N* es igual a un $kg\ m/s^2$ y el producto $Ns^2/kg\ m$ es la unidad. Otros nombres comunes son el joule (*J*) para la unidad de energía ($kg\ m^2/s^2 = N\ m$), el watt (*W*) para la unidad de potencia ($kg\ m^2/s^3 = J/s$) y el pascal (*Pa*) para la unidad de presión ($kg/m\ s^2 = N/m^2$). En la tabla 1.3 se incluye una lista de las dimensiones fundamentales y derivadas comúnmente usadas en la mecánica de fluidos, con sus nombres, símbolos y equivalencia en unidades del SI.

También, se acostumbra definir las unidades del SI de magnitudes mayores o más pequeñas que las incluidas en la tabla 1.3 por uno o más factores de 10. Estas unidades se identifican mediante prefijos, como el de *kilo*, en *kilojoule*, o *mili*, en *milímetro*, y mediante una abreviatura del prefijo, v.g., *kJ* o *mm*. Los factores, sus prefijos y abreviaturas se listan en la tabla 1.4, junto con los algunos modificadores equivalentes de uso común.

Puesto que el sistema SI se adoptó recientemente, existen otras unidades de medición que se relacionan con las unidades del SI y que los científicos siguen utilizando. Éstas se listan en la tabla 1.5, junto con sus equivalentes del sistema SI, e incluyen unidades de viscosidad (*poise*) y viscosidad cinemática (*stoke*).

Tabla 1.3 Dimensiones y unidades del SI

Cantidad	Unidad del SI	Símbolo	Equivalencia
Masa	kilogramo	<i>kg</i>	<i>kg</i>
Longitud	metro	<i>m</i>	<i>m</i>
Tiempo	segundo	<i>s</i>	<i>s</i>
Temperatura	kelvin	<i>K</i>	<i>K</i>
Fuerza	newton	<i>N</i>	<i>kg m/s²</i>
Presión	pascal	<i>Pa</i>	<i>kg/m s² = N/m²</i>
Densidad			<i>kg/m³</i>
Viscosidad			<i>kg/m s = Pa s</i>
Viscosidad cinemática			<i>m²/s</i>
Tensión superficial			<i>kg/s² = N/m</i>
Energía, calor, trabajo	joule	<i>J</i>	<i>kg m²/s² = N m</i>
Potencia	watt	<i>W</i>	<i>kg m²/s³ = J/s</i>
Calor específico, entropía, constante de los gases			<i>m²/s²K = J/kg K</i>

Sistema de unidades inglesas de ingeniería (UII)

Aún más significativo es el uso que los ingenieros de Estados Unidos hacen de lo que se denomina sistema de unidades inglesas de ingeniería (UII). En este sistema, la unidad de fuerza, *libra-fuerza (lbf)*, y la unidad de masa, *libra-masa (lbm)*, así como las unidades de longitud, el *pie (ft)* y tiempo, el *segundo (s)*, se consideran como unidades fundamentales. La *libra-fuerza* se define como igual a la fuerza de gravedad que actúa sobre una *libra-masa* en condiciones normales de aceleración gravitatoria (32.174 ft/s^2). En consecuencia, la ley del movimiento de Newton contiene una constante de proporcionalidad:

$$Fuerza = \frac{(masa)(aceleración)}{g_c}$$

en donde la constante de proporcionalidad g_c es:

$$g_c \equiv 32.174 \text{ lbm ft/lbf s}^2$$

Por lo tanto, una fuerza de una libra aplicada a una masa de una libra generará una aceleración de 32.174 ft/s^2 . Puesto que el sistema UII utiliza el *ampere* como unidad de corriente, la ley de Biot-Savart para la fuerza que actúa sobre un conductor por el que fluye corriente, también debe modificarse mediante una constante de proporcionalidad.

En tanto que la definición para una fuerza unitaria en el UII es apropiada en el cálculo de los esfuerzos que tienen lugar en una estructura estáticamente cargada, esa definición

Tabla 1.4 Prefijos de las unidades del SI

Factor	Prefijo	Símbolo	Modificador
10^{15}	<i>peta</i>	<i>P</i>	cuatrillón
10^{12}	<i>tera</i>	<i>T</i>	trillón
10^9	<i>giga</i>	<i>G</i>	mil millones
10^6	<i>mega</i>	<i>M</i>	millón
10^3	<i>kilo</i>	<i>k</i>	mil
10^2	<i>hecto</i>	<i>h</i>	cien
10^{-1}	<i>deci</i>	<i>d</i>	
10^{-2}	<i>centi</i>	<i>c</i>	por ciento
10^{-3}	<i>mili</i>	<i>m</i>	
10^{-6}	<i>micro</i>	μ	
10^{-9}	<i>nano</i>	<i>n</i>	
10^{-12}	<i>pico</i>	<i>p</i>	

Tabla 1.5 Unidades alternativas relacionadas con el SI

Dimensión	Unidad	Símbolo	Valor de la unidad SI
Longitud	<i>centímetro</i>	<i>cm</i>	$1.0E(-2)$ m
Área	<i>hectárea</i>	<i>h</i>	$1.0E(4)$ m^2
Volumen	<i>litro</i>	<i>l</i>	$1.0E(-3)$ m^3
Masa	<i>gramo</i>	<i>g</i>	$1.0E(-3)$ kg
	<i>tonelada (métrica)</i>	<i>t</i>	$1.0E(3)$ kg
Fuerza	<i>dina</i>		$1.0E(-5)$ N
Presión	<i>bar</i>	<i>b</i>	$1.0E(5)$ Pa
Viscosidad	<i>poise</i>		$1.0E(-1)$ Pa s
Viscosidad cinemática	<i>stoke</i>		$1.0E(-4)$ m^2/s
Energía	<i>termoquímica</i>		
	<i>caloría</i>	<i>cal</i>	4.184 J
Frecuencia	<i>Hertz</i>	<i>Hz</i>	1/s
Temperatura	<i>grados Celsius</i>	<i>C</i>	K
Permeabilidad	<i>darcy</i>		$1.0E(-4)$ m^2

Tabla 1.6 Conversión entre las unidades inglesas de ingeniería (UII) y las unidades del SI

Dimensión	Unidades UII	Símbolo	Valor de las unidades del SI
Longitud	<i>pie</i>	<i>ft</i>	$3.048E(-1) m$
	<i>pulgada</i>	<i>in</i>	$2.540E(-2) m$
	<i>milla terrestre</i>		$1.609E(3) m$
	<i>milla náutica</i>		$1.852E(3) m$
Área	<i>pie cuadrado</i>	ft^2	$9.290E(-2) m^2$
	<i>acre</i>		$4.408E(3) m^2$
	<i>pie cúbico</i>	ft^3	$2.832E(-2) m^3$
Volumen	<i>pulgada cúbica</i>	in^3	$1.6387E(-5) m^3$
	<i>galón (EE.UU.)</i>	<i>gal</i>	$3.785E(-3) m^3$
	<i>fuerza libra</i>	<i>lbf</i>	$4.448 N$
Fuerza	<i>masa libra</i>	<i>lbm</i>	$4.536E(-1) kg$
Masa	<i>tonelada (corta)</i>		$9.072E(2) kg$
	<i>tonelada (larga)</i>		$1.0161E(3) kg$
	<i>libras (fuerza)/in cuadrada</i>	<i>psi</i>	$6.895E(3) Pa$
Presión	<i>millas/hora</i>	<i>mph</i>	$4.470E(-1) m/s$
Velocidad	<i>libras (masa)/pie segundo</i>	<i>lbm/ft s</i>	$1.448 Pa s$
Viscosidad	<i>ft cuadrado/segundo</i>	ft^2/s	$9.294E(-2) m^2/s$
Viscosidad cinemática	<i>pie-libra (fuerza)</i>	<i>ft lbf</i>	$1.356 J$
	<i>Btu (unidad calorífica británica)</i>	<i>Btu</i>	$1.0551E(3) J$
Energía	<i>caballos de potencia</i>	<i>Hp</i>	$7.457E(2) W$
Potencia	<i>grado Rankine</i>	<i>R</i>	$5/9 K$
Temperatura			

Nota: Para convertir una medida del UII a las unidades del SI, multiplíquese su valor numérico por el término de la última columna. Para convertir de SI a UII, divídase.

resulta inapropiada en los sistemas dinámicos. Además, la unidad de energía del sistema UII, la *unidad calorífica británica* (o *BTU*), no es un múltiplo entero de un *ft lbf*. Estas opciones de antaño producen grandes complicaciones, por lo que actualmente gran parte de las sociedades de la comunidad ingenieril exigen que los datos se expresen en unidades del SI con su correspondiente unidad UII entre paréntesis. Es común que los ingenieros utilicen las unidades del SI en sus cálculos, para lo cual, si así lo desean, hacen la conversión al principio de las unidades UII y, al final, a las unidades UII. Se recomienda que el estudiante de ingeniería siga esta práctica en la resolución de los problemas de este texto.

Para ayudar en la conversión de unidades UII a unidades del SI y a la inversa, en la tabla 1.6 se listan muchas de las unidades UII de uso común y sus equivalentes en unidades del SI.

Ejemplo 1.3

La unidad de volumen de agua que se usa en la distribución de agua para irrigación es el *acre-pie*. Se trata de un volumen de agua con un pie de profundidad que cubre un área de un acre en su base. ¿Cuántos metros cúbicos de agua hay en un acre-pie?

Solución

Al utilizar los valores de conversión de unidades de la tabla 1.6,

$$\begin{aligned} 1 \text{ acre-pie} &= 1 \text{ acre} \times \frac{4.048E(3) \text{ m}^2}{1 \text{ acre}} \times \frac{0.3048 \text{ m}}{1 \text{ ft}} \\ &= 1234 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Sin importar las unidades de medición utilizadas, existen varias constantes físicas que fijan puntos en las escalas de medición. Aquellas que son de utilidad para la mecánica de fluidos comprenden el punto de fusión del hielo,⁶ la presión atmosférica normal (o estándar), la aceleración normal de la gravedad y la constante universal de los gases. Los valores de estas constantes se listan en la tabla 1.7, en términos de las unidades del SI.

1.4 Álgebra y cálculo vectoriales

En este libro es frecuente el empleo de vectores al explicar el movimiento de los fluidos en el espacio físico. La posición, velocidad y aceleración de una partícula de fluido, así como las fuerzas que actúan sobre él, son cantidades vectoriales. La conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía de una partícula de fluido se expresan con mayor facilidad mediante el empleo de formas vectoriales. Al mismo tiempo, es posible que resulte necesario desarrollar las soluciones numéricas o analíticas a los problemas de flujo de fluidos en su forma escalar. De ahí que se tenga que pasar de una forma de expresión a la otra. En esta sección, se revisan aquellos aspectos del álgebra y cálculo vectoriales que sean necesarios en el análisis y uso que resulten de los principios de la mecánica de fluidos.

En la descripción del movimiento de un fluido en el espacio físico, se necesita elegir un sistema de coordenadas conveniente. La mayoría de las veces, se usan coordenadas *cartesianas* x, y, z , pero, en ocasiones, resulta preferible emplear coordenadas *cilíndricas* r, θ, z cuando así lo exijan las restricciones del flujo, como sería el caso del flujo en una máquina rotatoria. La ventaja del álgebra y cálculo vectorial-

⁶ La temperatura del punto de fusión del hielo a una atmósfera de presión, $273.15K = 491.67R$, marca el punto cero de la escala Celsius y el punto $32^\circ F$ de la escala Fahrenheit. El punto de referencia del SI en la escala absoluta de temperaturas es el punto triple del agua, $273.16K$.

Tabla 1.7 Constantes físicas

Cantidad	Valor en unidades del SI
Punto de fusión del hielo (0°C)	273.15 K
Presión atmosférica normal	1.0133E(5) Pa
Aceleración normal de la gravedad	9.8066 m/s ²
Constante universal de los gases	8.3143E(3) J/kg K

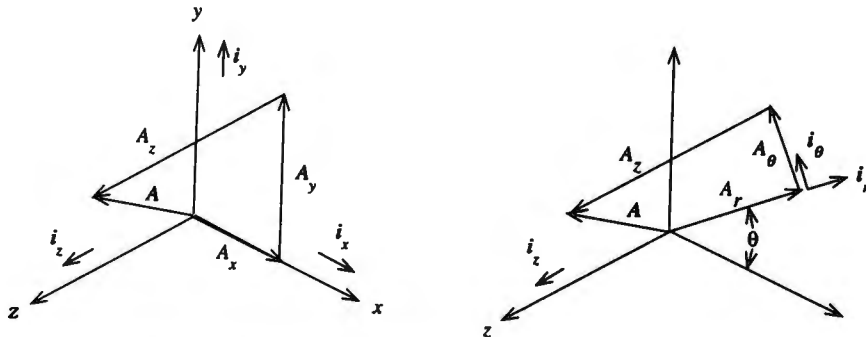


Figura 1.5 Sistemas de coordenadas cartesianas y cilíndricas, que ilustran los vectores unitarios y un vector \mathbf{A} .

les es que sus definiciones y teoremas son independientes del sistema de coordenadas que se elija. Sin embargo, su expresión en forma escalar es diferente en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas. En lo que sigue, primero se emplean las coordenadas cartesianas al ilustrar las operaciones vectoriales y, al final, se dan las formas correspondientes en coordenadas cilíndricas.

1.4.1 Álgebra vectorial

Un vector se indica mediante el uso de **negritas** y las cantidades escalares se escriben en redondas, por lo que el vector \mathbf{A} se define en términos de sus tres componentes A_x, A_y, A_z en las direcciones x, y, z :

$$\mathbf{A} \equiv A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z \quad (1.20)$$

en donde $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ son los vectores unitarios en las direcciones x, y, z , como se ejemplifica en la figura 1.5.

Algunos ejemplos de cantidades vectoriales que se usarán en el libro son la velocidad \mathbf{V} , la fuerza \mathbf{F} , la aceleración de la gravedad \mathbf{g} , el momento de torsión o par de fuerzas \mathbf{T} , velocidad angular Ω y vorticidad ω de una partícula de fluido.

El *producto escalar* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.21)$$

La magnitud A de un vector \mathbf{A} se encuentra a partir del producto escalar de \mathbf{A} consigo mismo:

$$\begin{aligned} A^2 &\equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \\ A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

El producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es el producto de la componente de \mathbf{A} en la dirección de \mathbf{B} por la magnitud de \mathbf{B} y a la inversa. Si ϕ es el ángulo entre los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi \quad (1.23)$$

Por ejemplo, el producto $\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_x$ es la magnitud de la componente de \mathbf{V} en la dirección de \mathbf{i}_x o V_x . Si \mathbf{V} es la velocidad de una partícula sobre la cual actúa la fuerza \mathbf{F} , entonces $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$ es la rapidez con la que se realiza trabajo, o se consume potencia, para mover la partícula. De igual modo, si \mathbf{T} es el movimiento de torsión aplicado a una estructura y $\boldsymbol{\Omega}$ es su velocidad angular, entonces $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T}$ es la potencia consumida para hacerla girar.

El *vector de posición* \mathbf{R} es la distancia medida desde el origen a un punto en el espacio:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\equiv x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

El *producto vectorial* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define como:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{i}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{i}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{i}_z (A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.25)$$

La magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es $AB \sin \phi$ y su dirección es perpendicular tanto a \mathbf{A} como a \mathbf{B} , v.g., es normal al plano que contiene a los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Nótese que el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ es idéntico a cero:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \equiv 0 \quad (1.26)$$

En mecánica de fluidos, un uso común que se da al producto vectorial es el correspondiente al momento $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$ de una fuerza \mathbf{F} que actúa en un punto localizado en \mathbf{R} .

1.4.2 Cálculo vectorial

El operador vectorial diferencial *delta*, que se representa con el símbolo ∇ , se define como:

$$\nabla \equiv \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.27)$$

Si ∇ opera en una función escalar de x, y y z , por ejemplo, $a\{x, y, z\}$, entonces el vector resultante se llama el *gradiente* de a y se indica por ∇a :

$$\nabla a \equiv \mathbf{i}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial a}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial a}{\partial z} \quad (1.28)$$

El gradiente de $a\{x, y, z\}$, ∇a tiene una interpretación geométrica simple. La ecuación $a\{x, y, z\} = k$, en donde k es una constante, describe una superficie en el espacio x, y, z en cada punto del cual el valor de la función $a\{x, y, z\}$ es el mismo, a saber, k . El gradiente de a es perpendicular a su superficie en cualquiera de sus puntos y tiene la dirección del incremento del valor de la constante k . La magnitud de ∇a es la razón espacial a la cual k aumenta en la dirección normal.

En mecánica de fluidos, el gradiente de presión ∇p , es un ejemplo de un gradiente de una función escalar, la presión p , y aparece en especial en la ecuación del movimiento de un fluido.

El producto escalar de ∇ y un vector \mathbf{A} , denotado por $\nabla \cdot \mathbf{A}$, se conoce como la *divergencia* de \mathbf{A} :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.29)$$

La inversión de este producto escalar, $\mathbf{A} \cdot \nabla$, es un operador escalar diferencial:

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.30)$$

Es común encerrar este operador entre paréntesis, $(\mathbf{A} \cdot \nabla)$, para evitar confusiones cuando opera sobre una cantidad escalar o una vectorial. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \nabla)a &= A_x \frac{\partial a}{\partial x} + A_y \frac{\partial a}{\partial y} + A_z \frac{\partial a}{\partial z} \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.31)$$

El producto escalar de ∇ consigo mismo, $\nabla \cdot \nabla$, se llama operador *laplaciano*, y se indica con el símbolo ∇^2 :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.32)$$

∇^2 puede operar sobre una cantidad escalar a o sobre un vector \mathbf{A} , dando un escalar o un vector, respectivamente:

$$\nabla^2 a \equiv \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \quad (1.33)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} \quad (1.34)$$

El producto vectorial de ∇ y un vector \mathbf{A} , $\nabla \times \mathbf{A}$, se llama *rotacional* de \mathbf{A} :

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (1.35)$$

Existen dos productos en los que interviene el rotacional y la divergencia de un vector que son idénticos a cero:

$$\nabla \times (\nabla a) \equiv 0 \quad (1.36)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad (1.37)$$

en donde a es un escalar y \mathbf{A} un vector. Además, en varios momentos se tendrá que usar expresiones en operaciones vectoriales que comprendan productos, como los siguientes:

$$\nabla \cdot (a\mathbf{A}) = a(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)a \quad (1.38)$$

$$\nabla \times (a\mathbf{A}) = a(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla a) \times \mathbf{A} \quad (1.39)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \nabla \left(\frac{A^2}{2} \right) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.40)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (1.41)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.42)$$

1.4.3 Integrales de vectores

En mecánica de fluidos, con frecuencia resulta conveniente expresar las leyes de conservación en forma integral. Existen tres tipos de integrales que se usan para este propósito: integrales de línea, de área y de volumen. Cuando estas integrales son completas, v.g., la línea es una curva cerrada que delimita el borde del área que encierra, o, bien el área encierra por completo un volumen, por lo que existen relaciones entre las integrales de línea, superficie y volumen de ciertas cantidades vectoriales.

La primera de estas integrales es una ecuación vectorial que comprende una función escalar a y se conoce como *teorema de Gauss*:

$$\iiint_V \nabla a \, dV = \iint_S a \mathbf{n} \, dS \quad (1.43)$$

El elemento de volumen se indica por dV (v.g., $dx \, dy \, dz$) y el elemento de superficie por dS . Los signos múltiples de integración indican las integrales de volumen y superficie,

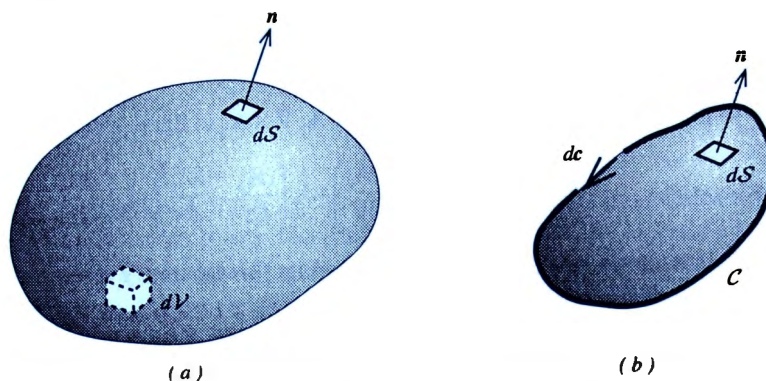


Figura 1.6 Elementos de volumen, superficie y línea de las integrales respectivas.

para las cuales los límites de integración deben cumplir con la condición de que la superficie S encierre completamente el volumen \mathcal{V} . El vector \mathbf{n} es el vector normal unitario a la superficie S , que se define como positivo cuando apunta hacia afuera del volumen encerrado \mathcal{V} . La figura 1.6 (a) ilustra las integrales de volumen y superficie que participan en la ecuación 1.43.

La segunda relación, conocida como el *teorema de divergencia*, es una ecuación escalar:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.44)$$

El *teorema de Stokes* es la ecuación escalar que relaciona las integrales de línea y superficie:

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{c} \quad (1.45)$$

Aquí $d\mathbf{c}$ es el elemento vectorial de línea de la *curva cerrada* C y \mathbf{n} es la normal unitaria a la superficie S encerrada por la curva C , como se muestra en la figura 1.6 (b). La dirección de \mathbf{n} positiva está dada por la regla de la mano derecha: si el dedo índice de la mano derecha indica la dirección del elemento de línea $d\mathbf{c}$, entonces el pulgar indica la dirección de \mathbf{n} .

Más adelante habrá ocasión de utilizar integrales de líneas que no formen una curva cerrada, como en la figura 1.6 (b), sino que sólo unen dos puntos, 1 y 2 por ejemplo, a lo largo de la curva C . Cuando el vector en el integrando es el gradiente de una cantidad escalar, v.g., ∇a , es posible calcular la integral de línea:

$$\int_1^2 (\nabla a) \cdot d\mathbf{c} = \int_1^2 \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 da \\
 &= a_2 - a_1
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

En mecánica de fluidos, algunas de las integrales en las ecuaciones 1.43-1.45 representan cantidades físicas de interés. Por ejemplo, la fuerza neta que actúa sobre el volumen de fluido ocasionada por la presión p es $\iiint (-p)\mathbf{n} dS$ y el flujo neto de un fluido que atraviesa una superficie imaginaria en el flujo es $\iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$, en donde \mathbf{V} es la velocidad del fluido. En mecánica de partículas, el trabajo que se requiere para mover una partícula por un camino cerrado C en el espacio es $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{c}$, en donde \mathbf{F} es la fuerza aplicada a la partícula.

1.4.4 Coordenadas cilíndricas

Para algunos flujos de fluidos puede resultar más conveniente el uso de las coordenadas cilíndricas r, θ, z , que se ilustran en la figura 1.5, que el de coordenadas cartesianas. Pero, ya que los vectores unitarios \mathbf{i}_r y \mathbf{i}_θ varían en dirección (aunque no en magnitud) con un cambio en θ , es necesario incluir esta variación al derivar las componentes r y θ de un vector con respecto a θ . Las derivadas de \mathbf{i}_r y \mathbf{i}_θ son:

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \mathbf{i}_\theta; \quad \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{i}_r \tag{1.47}$$

por lo que las derivadas con respecto a θ de las componentes θ y r de \mathbf{A} se convierten en:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \mathbf{i}_\theta) &= \mathbf{i}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - A_\theta \mathbf{i}_r \\
 \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r \mathbf{i}_r) &= \mathbf{i}_r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_r \mathbf{i}_\theta
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

A fin de que sirva de referencia más tarde, aquí se listan las formas que se emplean en el álgebra y cálculo vectoriales utilizadas con anterioridad, expresadas en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{i}_r + A_\theta \mathbf{i}_\theta + A_z \mathbf{i}_z \tag{1.49}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_z B_z \tag{1.50}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}_r (A_\theta B_z - A_z B_\theta) + \mathbf{i}_\theta (A_z B_r - A_r B_z) + \mathbf{i}_z (A_r B_\theta - A_\theta B_r) \tag{1.51}$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.52}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.53}$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_r \frac{\partial}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \quad (1.55)$$

$$\nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \quad (1.56)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{i}_r \left[\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] + \mathbf{i}_\theta \left[\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] + \mathbf{i}_z \nabla^2 A_z \quad (1.57)$$

1.5 Problemas

Problema 1.1

El agua de mar tiene una densidad de $1.02478E(3) \text{ kg/m}^3$ a 20°C y a una atmósfera de presión. A la misma presión y temperatura, su coeficiente de dilatación térmica β es $2.57E(-4) \text{ K}^{-1}$ y su módulo volumétrico E es $2.147E(9) \text{ Pa}$. Calcule la densidad del agua de mar a 10°C y a una presión de 100 veces la presión atmosférica.

Problema 1.2

Una gota de volumen $V = 4\pi r^3/3$ y área superficial $S = 4\pi r^2$ tiene una presión interna de $\Delta p = 2\gamma/r$ mayor que la atmósfera que la rodea. Demuestre que el trabajo $(\Delta p)\delta V$ que se requiere para aumentar el volumen en un pequeño incremento δV es igual al aumento en la energía superficial $\gamma\delta A$ asociada con el incremento del área superficial δA .

Problema 1.3

En el experimento ilustrado en la figura 1.3, calcule el esfuerzo cortante τ cuando $V = 1 \text{ m/s}$ y $h = 1 \text{ mm}$, para aire y agua, a 20°C .

Problema 1.4

Demuestre que el coeficiente de dilatación térmica β y el módulo volumétrico E de un gas perfecto son $1/T$ y p , respectivamente.

Problema 1.5

El aire normal (seco) es un gas perfecto, mezcla de cuatro gases: nitrógeno, oxígeno, argón y bióxido de carbono. Sus presiones parciales son 0.7809 , 0.2095 , $9.3E(-3)$ y $3E(-4)$ veces la presión total y sus pesos moleculares son 28 , 32 , 40 y 44 , respectivamente. (a) Calcule las densidades parciales de las cuatro especies para aire a una atmósfera de presión y 0°C . (b) ¿Cuál es la densidad del aire en estas condiciones? (c) ¿Cuál es el peso molecular (promedio) del aire?

Problema 1.6

Calcule la velocidad del sonido en el aire a 20°C .

Problema 1.7

El neumático de un automóvil tiene la forma de un toro con diámetro mayor $D = 60\text{ cm}$ y diámetro menor $d = 15\text{ cm}$. El volumen V , del neumático es $\pi D(\pi d^2/4) = \pi^2 D d^2/4$. El neumático contiene aire a una presión absoluta de $p_i = 50\text{ psia}$ y temperatura de 20°C . Calcule la masa $M_i(\text{kg})$ del aire en el neumático.

Problema 1.8

El motor de un automóvil consume 4 libras de combustible por hora, en tanto que genera 10 caballos de potencia. El combustible tiene un valor de calentamiento de 18 500 *Btu* por libra de combustible. (a) Expresar la rapidez de consumo de combustible, la potencia del motor y el valor de calentamiento del combustible, en unidades del SI. (b) Calcule el rendimiento térmico del motor, que es la razón de la potencia del motor a la rapidez de consumo del valor térmico del combustible.

Problema 1.9

Convierta los datos de la tabla 1.7 a unidades UII. (Expresar la constante universal de los gases en dos formas alternativas, usando *ft lbf* y *Btu* como las unidades alternativas de energía.)

Problema 1.10

El campo de velocidad de un flujo es:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = Ax\mathbf{i}_x + By\mathbf{i}_y + Cz\mathbf{i}_z$$

en donde A , B y C son constantes. Obtenga expresiones para $\nabla \cdot \mathbf{V}$ y $\nabla \times \mathbf{V}$.

Problema 1.11

El gradiente de presión de un fluido $p(x, y)$ está dado por:

$$\nabla p = -A(x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y)$$

en donde A es una constante. Deduzca una expresión para $p(x, y) - p(0, 0)$.

Problema 1.12

El campo de presión de un flujo irrotacional sobre un cilindro circular de radio a , expresado en coordenadas cilíndricas, es:

$$p(r, \theta, z) = p_{\infty} - \frac{\rho U}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} \right) \left[\left(\frac{a^2}{r^2} \right) - 2 \cos(2\theta) \right]$$

en donde p_{∞} y U son la presión y la velocidad del flujo lejos del cilindro. Expresar ∇p en función de r , θ y z .

Bibliografía

Green, Jerry Franklin, *Fundamental Cardiovascular and Pulmonary Physiology*, 2a. ed., Filadelfia: Lea and Febiger, 1987.

Neumann, Gerhard y Willard J. Pierson, Jr., *Principles of Physical Oceanography*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1966.

Sabersky, Rolf H., Allan J. Acosta y Edward G. Hauptman, *Fluid Flow, A First Course in Fluid Mechanics*, 3a. ed., Nueva York: Macmillan Publishing Co, 1989.

U.S. Department of Commerce, *Tables of Thermal Properties of Gases*, Circular 564 de la National Bureau of Standards, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1955.

U.S. Department of Commerce, *The International System of Units (SI)*. Publicación especial 330 de la National Bureau of Standards. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1981.

Un fluido estático es aquel que no se mueve, su velocidad y aceleración, medidas en un marco de referencia inercial, son cero en cualquier punto. El agua almacenada en un recipiente, la gasolina de un tanque de automóvil y el propano líquido almacenado bajo presión en un tanque de gas son ejemplos de fluidos estáticos. Las fuerzas que actúan en estos fluidos se encuentran equilibradas, por lo que no se origina movimiento. En este capítulo, se explora cómo se mantiene este equilibrio de fuerzas y cuáles son las consecuencias observables de dicho equilibrio para las estructuras que contienen al fluido o a las que éste rodea.

Al expresar el equilibrio de fuerzas en una partícula estática, es posible descubrir de qué forma la presión en un fluido estático varía con la posición, de lo cual la atmósfera de la Tierra es un interesante ejemplo. Esta información posibilita medir la presión con manómetros y barómetros. Se puede calcular la fuerza que un fluido estático ejerce sobre la superficie sólida con la cual está en contacto, así como los cuerpos que flotan sobre el agua o que se encuentran sumergidos en ella y es posible determinar la estabilidad del agua. Siempre y cuando un fluido sea estacionario, es posible encontrar con cierta facilidad una gran cantidad de información sobre cómo interacciona con el medio que lo rodea.

2.1 Fuerzas en un cuerpo fluido

Un cuerpo fluido está sujeto a dos tipos muy diferentes de fuerzas. La superficie del cuerpo fluido experimenta una fuerza por unidad de área que se conoce como *esfuerzo*. Ésta es la fuerza que actúa entre las moléculas que se encuentran en la superficie y entre las del medio que rodea al cuerpo fluido pero que siguen estando cerca de la superficie. La fuerza intermolecular que da origen al esfuerzo superficial es de corto alcance, v.g., se puede apreciar sólo cuando las moléculas se encuentran a una distancia menor que $1E(-10) m$. Por otra parte, existen fuerzas de largo alcance que pueden aplicarse a todo el volumen del cuerpo fluido. A éstas se les llama *fuerzas sobre la totalidad del cuerpo o volumétricas* puesto que actúan en todo el cuerpo, no sólo en la superficie.

En un fluido, el esfuerzo superficial depende tanto de la *posición* de las moléculas que se encuentran cerca de la superficie como del *movimiento* promedio relativo de estas moléculas. Es conveniente subdividir el esfuerzo superficial en estas dos categorías, la primera de las cuales se denominará *presión* p y la segunda es lo que llamaremos *esfuerzo viscoso* τ . Cuando un fluido no presenta movimiento relativo, el único esfuerzo es del primer tipo, la presión. Se encontrará que esta componente del esfuerzo siempre es normal a la superficie del cuerpo fluido. Sin embargo, cuando el fluido se mueve, estará presente la componente viscosa del esfuerzo cuya dirección y magnitud depende de la velocidad de deformación del elemento de fluido en movimiento. Para casi todos los fluidos, este esfuerzo viscoso es proporcional a la viscosidad μ del fluido. (Se tratará el esfuerzo viscoso con mayor detalle en el capítulo 6.)

La fuerza sobre la totalidad del cuerpo más común que afecta el movimiento de los fluidos es la fuerza de gravitación que la Tierra ejerce sobre un cuerpo fluido. A pesar de que la fuerza gravitatoria que existe entre las moléculas de un cuerpo fluido es en extremo débil, aquélla debida al efecto acumulativo de masas muy grandes a distancias considerables produce una fuerza apreciable.¹ La magnitud y dirección de la fuerza gravitatoria se expresa en forma conveniente mediante el producto de la masa del cuerpo fluido por la aceleración local g de la gravedad. Las otras posibles fuerzas sobre la totalidad del cuerpo que actúan en los fluidos son la fuerza electrostática, entre los cuerpos fluidos cargados eléctricamente y los fluidos o sólidos cargados circundantes, y la fuerza electromagnética inducida por un cuerpo fluido que conduce corriente eléctrica en presencia de un campo magnético. El tratamiento de los fluidos sujetos a estas fuerzas se denomina electrohidrodinámica y magnetohidrodinámica. No se considerarán esos flujos en este libro.

2.2 Esfuerzo en un fluido

Cuando se comprime un fluido, al obligar a las moléculas a acercarse entre sí, se aplica una fuerza hacia adentro sobre las fronteras del fluido. Esta fuerza se transmite por todo el fluido puesto que las moléculas, al aproximarse entre sí, se repelen unas a otras cada vez con mayor fuerza, en promedio. Esta fuerza intermolecular promedio se conoce como esfuerzo interno.

Para mayor precisión, considérese un volumen finito \mathcal{V} de fluido completamente encerrado por una superficie \mathcal{S} , como se ilustra en la figura 2.1, el cual está rodeado en todas partes por el mismo tipo de fluido. En un punto de esta superficie, las moléculas del fluido en la superficie o cerca de ella experimentan una fuerza por unidad de área superficial, que se conoce como esfuerzo σ , ocasionada por las moléculas que se encuentran fuera de la superficie. En general, el vector de esfuerzo σ tiene una componente normal a la superficie (que se conoce como esfuerzo normal) y una paralela

¹ Las mareas en el océano se originan por la diferencia entre la fuerza gravitatoria de la Luna y la del Sol que actúa sobre el fluido oceánico en lados opuestos de la Tierra.

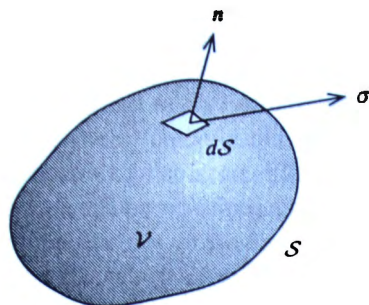


Figura 2.1 El fluido dentro de un volumen V se encuentra encerrado por una superficie S . En un punto sobre la superficie, donde la normal unitaria que apunta hacia afuera es n , el esfuerzo es σ .

a la superficie (que se denomina esfuerzo cortante), las cuales son respectivamente paralelas y perpendiculares al vector unitario normal n que apunta hacia afuera. Por la ley de la acción y reacción de Newton, el esfuerzo que actúa sobre el fluido dentro de S es igual y opuesto al esfuerzo en este punto que actúa sobre el fluido fuera de S .²

El esfuerzo en un punto dentro de un fluido es más complejo de lo que se aprecia en la figura 2.1 lo cual se debe a que el vector σ de esfuerzo depende de la dirección de la normal n a la superficie. A fin de describir el esfuerzo en un punto P de un fluido (o sólido, para tal caso), es preciso especificar las tres componentes del vector esfuerzo para cada una de las tres orientaciones mutuamente perpendiculares de una superficie y que pasan por el punto. Estas nueve cantidades forman lo que se conoce como *tensor de esfuerzo*. En un fluido, algunas de las componentes del tensor de esfuerzo dependen de la velocidad con la cual se deforma un elemento de fluido y estas componentes son proporcionales a la viscosidad del fluido. En el capítulo 6, donde se estudian los flujos viscosos, se tendrán que tomar en consideración las componentes en cuestión. Por ahora, éstas se ignoran puesto que se está considerando un caso sin flujo y, por consiguiente, no ocurre deformación de un elemento de fluido. Sólo es necesario tomar en cuenta las componentes restantes del tensor de esfuerzo que no dependen del movimiento de deformación.

2.3 Presión en un fluido estático

2.3.1 Ley de Pascal

En un fluido estático, donde no hay movimiento, el vector esfuerzo σ no puede diferir para orientaciones distintas de la normal de superficie pues no existe una dirección

² Si parte de la superficie S , o toda, se encontrara rodeada por un sólido o un fluido de otra clase, habría una tensión interfacial, como se explicó en la página 17, en la sección relativa a la tensión superficial. En ese caso, habría una diferencia entre el esfuerzo normal que actúa en el interior del fluido y el que actúa en el exterior del fluido o sólido. Por el momento, se ignorará este efecto.

preferente en el fluido, cuya estructura es isotrópica.³ En un punto P de un fluido estático, σ debe tener, por lo tanto, la misma dirección que \mathbf{n} y la misma magnitud para todas las direcciones de \mathbf{n} . Este asombroso resultado se llama *Ley de Pascal*.⁴

Para demostrar que la magnitud de σ es independiente de la dirección de la normal de superficie \mathbf{n} , considérese el equilibrio de fuerzas de un elemento de fluido como se ejemplifica en la figura 2.2. Los esfuerzos que actúan perpendicularmente a las dos caras de área $\delta y \delta z$ y $\delta y (\delta z / \sin \phi)$ se designan mediante σ_x y σ , respectivamente. Ya que el elemento de fluido carece de movimiento, la suma de las fuerzas en la dirección x debe ser igual a cero:⁵

$$-\sigma_x \delta y \delta z + (\sigma \sin \phi) \left(\delta y \frac{\delta z}{\sin \phi} \right) = 0$$

$$(-\sigma_x + \sigma) \delta y \delta z = 0$$

$$\sigma = \sigma_x$$

Conforme el elemento de fluido tiende a cero, los esfuerzos normales σ y σ_x se colocan en el punto P . No obstante, la magnitud de σ debe ser igual para cualquier dirección ya que se ha elegido z o y para la dirección x en la figura 2.2. Puesto que se sabe que los fluidos sólo pueden soportar un esfuerzo de compresión, o presión, se identifica la magnitud de σ con la presión p y su dirección es opuesta a \mathbf{n} :

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p) \mathbf{n} \quad (2.1)$$

2.3.2 La fuerza de presión

Mediante la Ley de Pascal, ecuación 2.1, es posible determinar la fuerza ejercida sobre un volumen \mathcal{V} de fluido con el esfuerzo que actúa sobre su superficie \mathcal{S} , según se ilustra en la figura 2.1, si se integra la fuerza de presión por unidad de área, $-p\mathbf{n}$, sobre toda la superficie para encontrar el vector fuerza de presión:

³ Si el esfuerzo cortante σ tuviera una componente tangencial a la superficie \mathcal{S} , esa componente tendría una dirección. Pero si el fluido es estacionario, no existe una propiedad local del fluido, como la velocidad, que pueda proporcionar una dirección. Por lo tanto, este esfuerzo cortante debe ser cero.

⁴ Blaise Pascal (1632-1662) describió este principio en *Traits de l'équilibre des liquers*, publicado póstumamente. Pascal fue el primero en sugerir experimentos que demostraran la variación de la presión atmosférica con la altura. La unidad de presión en el SI, el *pascal*, se llama así en su honor.

⁵ No se incluye la fuerza de la gravedad en este equilibrio de fuerzas pues es proporcional a $(\delta x \delta y \delta z)$, que es una cantidad más pequeña que las áreas $\delta y \delta z$, etc., las cuales entran en las fuerzas a causa de los esfuerzos. Al tender a cero el tamaño de un elemento, las fuerzas sobre el volumen se hacen despreciables comparadas con las fuerzas superficiales.

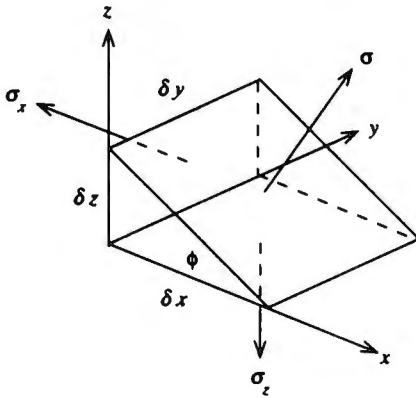


Figura 2.2 Fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido estático.

$$\text{fuerza de presión} = \iint_S (-pn) dS \quad (2.2)$$

Pero también es posible expresar esta fuerza de presión como una integral de volumen aplicando el teorema de Gauss, ecuación 1.43, para convertir la integral de superficie a una integral de volumen:

$$\text{fuerza de presión} = \iiint_V (-\nabla p) dV \quad (2.3)$$

Puesto que la fuerza de presión total ejercida sobre un volumen \mathcal{V} es igual a la cantidad $-\nabla p$ integrada sobre el volumen, el integrando $-\nabla p$ debe ser la **fuerza de presión por unidad de volumen** en cualquier punto del fluido:

$$\text{fuerza de presión por unidad de volumen} = -\nabla p \quad (2.4)$$

Cualquier elemento pequeño de volumen $\delta x \delta y \delta z$ estará sujeto a una fuerza de presión causada por la diferencia de presión en las caras del elemento de volumen. Por ejemplo, la diferencia de presión en la dirección x es $(\partial p / \partial x) \delta x$ y la diferencia de fuerza correspondiente es $-(\partial p / \partial x) \delta x (\delta y \delta z) \mathbf{i}_x$, de modo que la fuerza de presión total es $-\nabla p (\delta x \delta y \delta z)$. Esta fuerza actúa en la dirección en que disminuye la presión, v.g., en sentido opuesto a la dirección del gradiente de presión, ∇p .

Ejemplo 2.1

Cerca de la superficie de la Tierra, la presión atmosférica p disminuye al aumentar la altitud z por encima del nivel del mar en forma aproximada según la fórmula:

$$p = p_0 \exp(-\alpha z)$$

donde p_0 es la presión al nivel del mar igual a $1.0133E(5) \text{ Pa}$ y $\alpha = 1.2E(-4) \text{ m}^{-1}$. Calcule la fuerza de presión por unidad de volumen a $z = 0$ y $z = 5 \text{ km}$.

Solución

$$\begin{aligned} -\nabla p &= -\frac{dp}{dz} \mathbf{i}_z \\ &= \alpha p_0 \exp(-\alpha z) \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

A $z = 0$,

$$\begin{aligned} -\nabla p &= (1.2E(-4) \text{ m}^{-1} \times 1.033E(5) \text{ Pa}) \mathbf{i}_z \\ &= (12.40 \text{ N/m}^3) \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

A $z = 5 \text{ km}$,

$$\begin{aligned} -\nabla p &= (1.2E(-4) \text{ m}^{-1} \times 1.033E(5) \text{ Pa} \times \exp[-1.2E(-4) \times 5E(3)]) \mathbf{i}_z \\ &= (6.805 \text{ N/m}^3) \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

2.3.3 Presión en un fluido en un campo gravitatorio

Al sumergirse una persona en la profundidad de una alberca o un estanque, siente cómo aumenta la presión en los oídos al descender. De manera inversa, al aumentar la altura, como en un elevador en subida, se experimenta una disminución de la presión. La presión en un fluido estático parece aumentar en la dirección de la fuerza de atracción de la gravedad. ¿Por qué cambia la presión del fluido de este modo?

Un elemento de fluido en un estanque o en una alberca permanece sin movimiento puesto que existe un equilibrio de fuerzas que actúan en dirección vertical: la fuerza de atracción de la gravedad que actúa hacia abajo se equilibra mediante la fuerza de la presión que actúa hacia arriba. La fuerza gravitatoria es una fuerza sobre la totalidad del cuerpo cuya magnitud es el producto de la masa de un elemento de fluido por la aceleración de la gravedad. Para un volumen unitario de fluido, la masa es ρ por lo que la fuerza gravitatoria por unidad de volumen es:

$$\text{fuerza gravitatoria por unidad de volumen} = \rho g \quad (2.5)$$

Para que un fluido permanezca sin movimiento cuando sobre él actúa un campo gravitatorio, la suma de la fuerza de presión por unidad de volumen y la fuerza gravitatoria por unidad de volumen debe ser cero:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2.6)$$

Esta ecuación de equilibrio hidrostático expresa el equilibrio de fuerzas en cada punto de un fluido estacionario. Ésta revela que la presión p debe aumentar en la dirección de \mathbf{g} (puesto que $\nabla p = \rho \mathbf{g}$) y que la magnitud del gradiente de presión es ρg . Cuanto más denso sea el fluido, tanto mayor será el aumento de presión con la profundidad. Además, cualquier plano horizontal en el fluido es una superficie de presión constante, ya que ∇p no tiene componente en la dirección horizontal.

Es posible integrar de manera explícita la ecuación diferencial del equilibrio hidrostático, ecuación 2.6, a lo largo cualquier línea que esté por completo dentro del fluido y que conecte dos puntos, 1 y 2, siempre que la densidad ρ sea constante dentro del fluido. Si se denota el elemento de línea por $d\mathbf{c}$, la integral de línea de la ecuación 2.6 se transforma en:

$$-\int_1^2 \nabla p \cdot d\mathbf{c} + \int_1^2 \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{c} = 0$$

El primero de estos términos se integra con facilidad al aplicar la ecuación 1.46:

$$\int_1^2 \nabla p \cdot d\mathbf{c} = p_2 - p_1$$

También es posible integrar el segundo término si se advierte que la aceleración de la gravedad puede expresarse como el gradiente del producto escalar de \mathbf{g} y el vector de posición \mathbf{R} :⁶

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) &= \nabla(g_x x + g_y y + g_z z) \\ &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} (g_x x) + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} (g_y y) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} (g_z z) \\ &= \mathbf{i}_x g_x + \mathbf{i}_y g_y + \mathbf{i}_z g_z \\ &= \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si se advierte que ρ es constante, es posible evaluar ahora la segunda integral utilizando la ecuación 1.46 para encontrar que:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{c} &= \rho \int_1^2 \nabla(\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{c} \\ &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

⁶ Aquí se supone que la aceleración de la gravedad no cambia con la posición \mathbf{R} . Esto resulta aceptable siempre y cuando la dimensión vertical del fluido sea pequeña comparada con el radio de la Tierra.

Por último, al combinar estas dos integrales, la condición de equilibrio hidrostático se convierte en:

$$-(p_2 - p_1) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 = 0$$

$$p_1 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 = p_2 - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \quad (2.9)$$

Se acostumbra elegir las coordenadas cartesianas para las cuales el eje z apunta hacia arriba, en sentido opuesto a la dirección de la aceleración gravitatoria \mathbf{g} . Con esta convención,

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{i}_z$$

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = -gz \quad (2.10)$$

y la condición general del equilibrio hidrostático, ecuación 2.9, toma la forma:

$$p_1 + \rho gz_1 = p_2 + \rho gz_2 \quad (2.11)$$

Existe una forma sencilla de comprender la relación de la ecuación 2.11. Supóngase que se aísla una columna de fluido de forma cilíndrica vertical con un área A de base y altura $z_2 - z_1$. La presión p_1 en la parte del fondo de esta columna excede la presión (p_2) que hay en la parte superior en una cantidad $p_1 - p_2$, por lo que existe una fuerza hacia arriba, cuyo valor es $(p_1 - p_2)A$, debida a la presión que actúa sobre la parte superior e inferior de la columna. Como los lados de la columna son verticales, no hay componente vertical de la fuerza de presión que actúa sobre los lados. Esta fuerza en dirección hacia arriba debe quedar contrarrestada por la fuerza de atracción de la gravedad que apunta hacia abajo y que incide en el fluido dentro de la columna, la cual es igual al producto de g por la masa $\rho(z_2 - z_1)A$. Por lo tanto, el equilibrio de fuerzas exige que $(p_1 - p_2)A = \rho g(z_2 - z_1)A$, lo cual es equivalente a la ecuación 2.11. La distribución de la presión de la ecuación 2.11 permite este equilibrio de fuerzas en dirección vertical para todas las columnas de líquido.

La ecuación integral del equilibrio hidrostático, ecuación 2.11, es más general de lo que parece. Esta relación es válida no sólo entre cualquier par de puntos dentro de un fluido de densidad constante en todas partes sino, también, entre todos los puntos del fluido. En otras palabras, la suma $p + \rho gz$ tiene el mismo valor en todos los puntos del fluido que puedan conectarse entre sí mediante una línea que siempre se encuentre en el fluido. Es posible representar esta conclusión por medio de la ecuación:

$$p + \rho gz = \text{constante} \quad (2.12)$$

donde la constante puede evaluarse si se conoce p y z en un punto del fluido, por ejemplo 1. Es posible determinar la presión $p\{z\}$ como función de la altura z a partir de:

$$p\{z\} = p_1 + \rho gz_1 - \rho gz \quad (2.13)$$

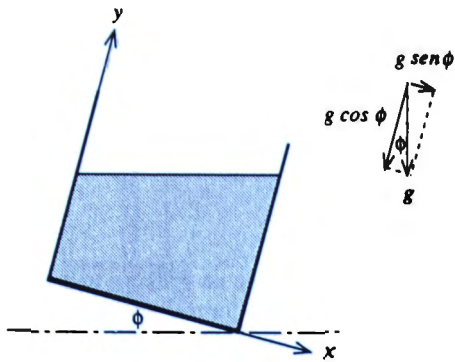


Figura E 2.2

Ejemplo 2.2

Se piensa instalar un tanque de agua de forma rectangular a un ángulo ϕ respecto de la horizontal, como se ejemplifica en la figura E.2.2. Con el propósito de calcular los esfuerzos en el tanque, el diseñador necesita conocer la presión del fluido como función de las distancias x y y medidas desde la esquina del tanque (véase la figura E 2.2). Deduzca una expresión para $p\{x, y\}$ equivalente a la ecuación 2.13.

Solución

La aceleración gravitatoria \mathbf{g} tiene componentes en las direcciones x y y :

$$\mathbf{g} = g \sin \phi \mathbf{i}_x - g \cos \phi \mathbf{i}_y$$

y el invariante $p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ se transforma en:

$$\begin{aligned} p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} &= p - \rho(g \sin \phi \mathbf{i}_x - g \cos \phi \mathbf{i}_y) \cdot (x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z) \\ &= p - \rho g(x \sin \phi - y \cos \phi) \end{aligned}$$

El equivalente de la ecuación 2.13 es:

$$p\{x, y\} = p_1 - \rho g(x_1 \sin \phi - y_1 \cos \phi) + \rho g(x \sin \phi - y \cos \phi)$$

Para esta distribución de presión, las líneas horizontales, $y = x \tan \phi + \text{constante}$, son líneas de presión constante.

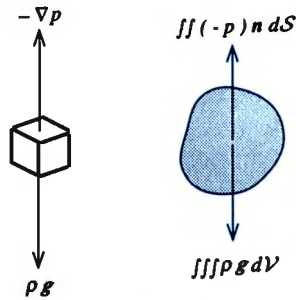


Figura 2.3 El equilibrio de fuerzas hidrostáticas en un volumen unitario (*izquierda*) de fluido y un volumen finito (*derecha*) de fluido son las formas alternativas diferencial e integral, respectivamente, de la ecuación del equilibrio estático en un fluido.

Existe otra integral de la ecuación del equilibrio hidrostático, ecuación 2.6. Si se multiplica por un elemento de volumen dV y se integra sobre un volumen \mathcal{V} finito, se encuentra que:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} (-\nabla p) dV + \iiint_{\mathcal{V}} \rho g dV &= 0 \\ \iint_{\mathcal{S}} (-p)\mathbf{n} dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho g dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

utilizando, como antes, el teorema de Gauss (ecuación 1.43) para convertir una integral de volumen a una integral de superficie. La ecuación 2.14 establece que la fuerza de presión que actúa sobre la superficie de un volumen de fluido más la fuerza gravitatoria que actúa sobre el fluido en el interior del volumen suman cero.

El equilibrio de fuerzas sobre una unidad de volumen de fluido, ecuación 2.6, y aquella que actúa sobre un volumen finito de fluido, ecuación 2.14, se ilustra en la figura 2.3. Estas ecuaciones son las formas diferencial e integral del equilibrio de fuerzas hidrostáticas.

2.3.4 Medición de la presión

Determinación de la presión atmosférica

El instrumento ordinario que se utiliza para medir la presión atmosférica es el barómetro de mercurio.⁷ Como lo indica la figura 2.4, consta de un tubo de vidrio cuya longitud aproximada es de un metro y está cerrado por uno de sus extremos. El tubo, después de

⁷ El barómetro de mercurio fue inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647). Los químicos con frecuencia utilizan como unidad de presión el *torr*, que es igual a 1 mm de cambio en la altura de la columna de mercurio de un barómetro o manómetro.

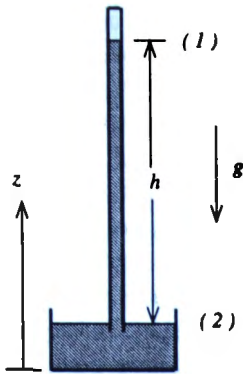


Figura 2.4 Diagrama de un barómetro de mercurio. Las alturas del fluido se miden en la dirección positiva de z , la aceleración gravitatoria es hacia abajo y los puntos 1 y 2 identifican las superficies libres de la columna de mercurio y el depósito, respectivamente.

llenarse con mercurio, se invierte y el extremo abierto se coloca por debajo de la superficie libre de un depósito de mercurio. El mercurio de la columna cae por debajo del extremo superior del tubo de vidrio y deja un espacio que se encuentra muy cercano al vacío perfecto.⁸ La presión de la atmósfera al nivel de la superficie libre del depósito de mercurio se calcula a partir de la medición de la distancia vertical h que hay entre la superficie de mercurio de la columna (1) y la del depósito (2), como se indica en la figura 2.4, y se aplica la ecuación del equilibrio hidrostático, ecuación 2.11:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

$$p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2)$$

$$= \rho g h$$

donde se ha establecido $p_1 = 0$, la presión del vacío. La densidad del mercurio a 0°C es $1.360\text{E}(4) \text{ kg/m}^3$, y el producto ρg es $1.3337\text{E}(5) \text{ Pa/m}$ para un valor de $g = 9.8066 \text{ m/s}^2$. Si la presión atmosférica es igual a su valor normal, $1.0133\text{E}(5) \text{ Pa}$, entonces $h = 0.760 \text{ m} = 760 \text{ mm} = 29.9 \text{ in}$. Quienes se dedican a dar el pronóstico del estado del tiempo local citan, con frecuencia, la presión atmosférica en centímetros de mercurio, aunque la unidad meteorológica de presión oficial es el *bar*, el cual es igual a $1.0\text{E}(5) \text{ Pa}$, y la presión atmosférica local se proporciona en *milibar*.

Se considerará que la presión atmosférica es constante, a pesar de que varía con la altura de la misma forma que lo hace la presión en una columna de mercurio del barómetro. En aire, el gradiente de presión, $\partial p / \partial z = -\rho g$, es mucho menor en magnitud que en mercurio a causa de que la densidad del aire es menor que la del mercurio por

⁸ Este espacio se llena con vapor de mercurio, cuya presión a temperatura ambiente es en extremo baja comparada con la presión atmosférica.

un factor aproximado de 10^4 . Para diferencias en altitud del orden de un metro, la presión cambia alrededor de 10^{-4} atmósferas, una cantidad tan pequeña que puede despreciarse en la mayoría de los fines que persigue la ingeniería. En general, se permite suponer que, a escala laboratorio, la presión de la atmósfera es constante.

El barómetro de mercurio mide la presión absoluta de la atmósfera. El *barómetro aneroides* es un instrumento mecánico que mide los cambios en la presión atmosférica. Consta de un recipiente cilíndrico que se evacua a una presión muy baja pero uno de sus extremos es flexible. Al elevarse o disminuir la presión atmosférica, el extremo flexible se mueve hacia adentro o hacia afuera de manera proporcionada y mueve un disco o *dial* que indica la magnitud del cambio de presión a lo largo de una escala lineal que se calibra contra un barómetro de mercurio. Este mismo principio de diferencias de presión que provocan una deformación proporcionada en estructuras elásticas se emplea en la mayoría de los dispositivos de medición de la presión.

El manómetro

Puede extenderse el principio del barómetro a la medición de la presión en recipientes cerrados mediante el uso del *manómetro*, como se ilustra en la figura 2.5. Un tubo de vidrio en forma de U se llena parcialmente con un líquido, como agua o mercurio. Uno de los extremos del tubo está abierto a la atmósfera, en tanto que el otro se conecta al recipiente cuya presión desea medirse. Cuando se aplica la ecuación 2.11 al fluido (de densidad ρ_m) del manómetro entre las dos superficies 1 y 2 del fluido se tiene:

$$p_2 + \rho_m g z_2 = p_1 + \rho_m g z_1$$

$$p_2 = p_1 + \rho_m g (z_1 - z_2)$$

$$= p_{at} + \rho_m g (z_1 - z_2)$$

donde se sabe que la presión p_1 es igual a la presión atmosférica p_{at} . La presión p_2 no es necesariamente la misma que la presión p_3 del fluido en el centro del recipiente si el fluido es un líquido. Para conocer esta diferencia, entre los puntos 3 y 2 se aplica la ecuación 2.11 al fluido (de densidad ρ_c) del recipiente:

$$p_3 + \rho_c g z_3 = p_2 + \rho_c g z_2$$

$$p_3 = p_2 - \rho_c g (z_3 - z_2)$$

$$= p_{at} + \rho_m g (z_1 - z_2) - \rho_c g (z_3 - z_2)$$

Si el fluido del recipiente es un gas, su densidad ρ_c es mucho menor que la del líquido del manómetro, ρ_m , y p_3 y p_2 son sustancialmente iguales. Por otra parte, si el fluido del recipiente es un líquido, la diferencia de presión $p_2 - p_3 = \rho_c (z_3 - z_2)$ puede contribuir de manera importante a la determinación de la presión del recipiente y no debe despreciarse.

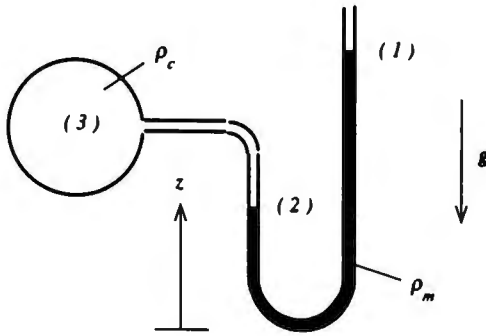


Figura 2.5 Manómetro de tubo en forma de U que se utiliza para medir la presión de un fluido en un recipiente.

Un manómetro se utiliza, por lo común, en la medición de la presión sanguínea del cuerpo humano. En este proceso, el brazo superior (o brazo) se rodea con un brazalete flexible que contiene una cámara inflable. Se utiliza una bomba manual para inflar el brazalete, el cual ejerce una presión positiva sobre el brazo. Mediante un manómetro lleno de mercurio, se mide la presión del brazalete por arriba de la presión atmosférica. Cuando la presión del brazalete es más elevada que la presión sanguínea de la arteria del brazo, la arteria se cierra y no circula sangre hacia el antebrazo. Es posible detectar el flujo de sangre que circula por la arteria escuchando con un estetoscopio aplicado al antebrazo. Se registra la presión del brazalete desde donde la sangre comienza por primera vez a fluir hacia el antebrazo; esto se conoce como presión sistólica, así como también la presión más baja, a la que fluye la sangre hacia el antebrazo, queda obstaculizado por primera vez al inflarse el brazalete; a esto se le conoce como presión diastólica. Estas presiones se dan en milímetros de mercurio ($mm\ Hg$). Los valores normales en adultos que gozan de salud son 140/90. Éstas son las presiones sanguíneas por arriba de la presión atmosférica.

Presiones manométrica y del vacío

El uso del manómetro que se aprecia en la figura 2.5 permite calcular la diferencia de presión que hay entre el fluido de un recipiente y la presión atmosférica. A menos de que se mida la presión atmosférica con un barómetro, no sería posible calcular la presión absoluta del fluido del recipiente. (Esto último puede ser importante si el fluido del recipiente es un gas y se desea calcular su densidad a partir de su presión y temperatura absolutas.) Al igual que el manómetro, la mayoría de los dispositivos para medir la presión miden la diferencia entre la presión absoluta del fluido sometido a presión y la presión atmosférica. Cuando esta diferencia es positiva, la lectura de la presión se conoce como *presión manométrica*:

$$\text{presión manométrica} \equiv \text{presión absoluta} - \text{presión atmosférica} \quad (2.15)$$

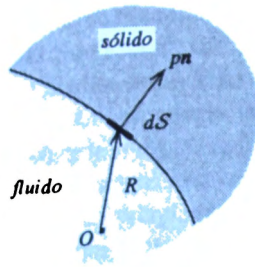


Figura 2.6 La fuerza de presión por unidad de área que actúa sobre un elemento dS de la superficie S de un sólido es pn , donde n es la normal unitaria que apunta hacia afuera del fluido. R es el vector de posición del elemento de superficie dS medido desde el origen O del sistema de coordenadas.

Por otra parte, cuando esta diferencia es negativa, su magnitud se conoce como *presión del vacío*:

$$\text{presión del vacío} \equiv \text{presión atmosférica} - \text{presión absoluta} \quad (2.16)$$

La presión del vacío siempre es positiva, por definición, pero no puede exceder la presión atmosférica en magnitud.

La convención para expresar las presiones manométrica y del vacío se deriva de la construcción de los dispositivos que miden la presión. El manómetro mecánico más común es el *manómetro Bourdon*, que consta de un tubo largo de metal, algo aplanado, cerrado en uno de sus extremos y enrollado en forma de espiral. Cuando el interior del tubo se conecta al fluido sometido a presión, el tubo se endereza un poco en una cantidad proporcional a la diferencia entre la presión interna y la atmosférica. El pequeño desplazamiento del tubo se amplifica mecánicamente con la finalidad de hacer girar un disco o *dial* donde se lee la presión. Los *manómetros electromecánicos* generan una señal de voltaje que es proporcional a la deflexión de una estructura elástica que responde a la diferencia de presión entre el fluido y la atmósfera. (Éste es el tipo de manómetro que se emplea con el propósito de registrar la presión del aceite lubricante de un automóvil.) La posición cero en todos estos manómetros corresponde a una presión (atmosférica) igual tanto interna como externamente.

2.4 Fuerzas de presión sobre superficies sólidas

Existen varios ejemplos de estructuras que se encuentran sometidas por las fuerzas de presión que actúan sobre ellas. Los tanques de almacenamiento de gas a presión, los diques, los cascos de los barcos, las alas de aviones y los rascacielos ejemplifican la necesidad de llevar a cabo diseños de estructuras que soporten las fuerzas procedentes de los fluidos con los que entran en contacto. Una parte importante de la mecánica de

fluidos es la determinación de las fuerzas de presión que esas estructuras tienen que soportar a fin de funcionar de manera apropiada. En esta sección, se consideran las fuerzas de presión que ejercen los fluidos estáticos en partes de estructuras sólidas.

En muchos casos, basta conocer la fuerza total \mathbf{F} y el momento \mathbf{T} que actúan sobre un segmento de una estructura y que han sido causados por la presión del fluido en contacto con la superficie. Es posible calcular \mathbf{F} y \mathbf{T} por integración de la fuerza diferencial $d\mathbf{F}$ y su momento $d\mathbf{T}$ que actúan sobre un elemento dS de la superficie del sólido. Considérese la figura 2.6. Los incrementos en la fuerza $d\mathbf{F}$ y en el momento $d\mathbf{T}$ ocasionados por la presión p que actúa sobre el elemento de superficie dS localizado a una distancia \mathbf{R} del origen O del sistema de coordenadas son:

$$d\mathbf{F} = pn \, dS$$

$$d\mathbf{T} = \mathbf{R} \times pn \, dS$$

Adviértase que la normal unitaria \mathbf{n} apunta hacia afuera del fluido (y hacia adentro del sólido). Al integrar sobre la superficie S ,

$$\mathbf{F} = \iint pn \, dS \quad (2.17)$$

$$\mathbf{T} = \iint (\mathbf{R} \times pn) \, dS \quad (2.18)$$

En general, estas integrales de superficie no encierran el volumen por completo sino que se aplican sólo a una parte de la estructura sobre la que actúa el fluido.

Es posible reemplazar las fuerzas de presión que actúan sobre una superficie por una sola fuerza \mathbf{F} que actúa en un punto \mathbf{R}_{cp} , conocido como *centro de presión*, y se localiza de tal modo que proporcione el mismo momento \mathbf{T} que las fuerzas de presión:

$$\mathbf{R}_{cp} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{T} \quad (2.19)$$

Adviértase que el momento de las fuerzas de presión alrededor del centro de presión es cero:

$$\begin{aligned} \iint (\mathbf{R} - \mathbf{R}_{cp}) \times pn \, dS &= \iint (\mathbf{R} \times pn) \, dS - \mathbf{R}_{cp} \times \iint pn \, dS \\ &= \mathbf{T} - \mathbf{R}_{cp} \times \mathbf{F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego de encontrar \mathbf{F} y \mathbf{T} a partir de las ecuaciones 2.17-2.18, es posible resolver para \mathbf{R}_{cp} la ecuación 2.19.

Al calcular las fuerzas de presión en estructuras que se encuentran total o parcialmente rodeadas por la atmósfera, es suficiente sustituir la presión absoluta p por la presión

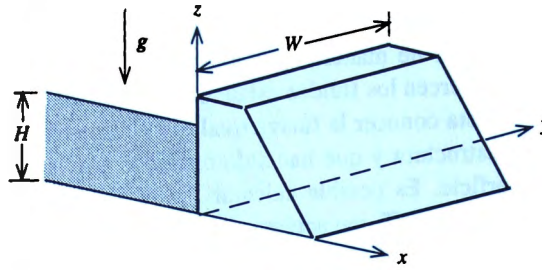


Figura 2.7 Dibujo en perspectiva de un dique que mide W de ancho, el cual sirve de contención a un depósito de agua con profundidad H . Se centran los ejes coordenados en la esquina izquierda de la base del dique.

manométrica $p - p_{at}$ puesto que la fuerza total de presión sobre la estructura es independiente de la magnitud de la presión atmosférica:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \iint p \mathbf{n} \, dS \\
 &= \iint (p - p_{at}) \mathbf{n} \, dS + \iint p_{at} \mathbf{n} \, dS \\
 &= \iint (p - p_{at}) \mathbf{n} \, dS - \iiint \nabla p_{at} \, dV \\
 &= \iint (p - p_{at}) \mathbf{n} \, dS + 0
 \end{aligned}$$

donde se encuentra que la integral de superficie de la presión atmosférica que actúa sobre todo el volumen de la estructura es cero, a partir del teorema de Gauss, ecuación 1.43, puesto que $\nabla p_{at} = 0$. *Por lo tanto, una presión uniforme aplicada a la superficie de una estructura no produce fuerza neta o momento sobre la estructura.*

Como ejemplo de fuerzas de presión y momentos, considérese el dique de la figura 2.7, el cual sirve de contención a un depósito de agua con profundidad H y anchura W . Para calcular la fuerza de presión que el agua ejerce sobre el dique, primero se determina la presión manométrica en la superficie del dique a una altura z por encima de su base aplicando la condición de equilibrio hidrostático, ecuación 2.13:

$$\begin{aligned}
 p(z) &= p_1 + \rho g z_1 - \rho g z \\
 &= \rho g H - \rho g z
 \end{aligned}$$

donde se ha fijado el punto 1 en la superficie del depósito y se sabe que la presión manométrica de la atmósfera es cero. A continuación, se determina \mathbf{F} al sustituir esta expresión por p en la ecuación 2.17:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \iint \rho \mathbf{n} \, dS \\
 &= \int_0^W \int_0^H \rho g(H-z) \mathbf{i}_x \, dy \, dz \\
 &= W \rho g \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^H \mathbf{i}_x \\
 &= \rho g \left(\frac{WH^2}{2} \right) \mathbf{i}_x
 \end{aligned}$$

Adviértase que la presión promedio que experimenta el dique es $\rho gH/2$ y que la magnitud de la fuerza F es el producto de la presión promedio multiplicada por el área WH .

El momento \mathbf{T} se determina al sustituir la expresión para la presión en la ecuación 2.18:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \iint (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{n}) \, dS \\
 &= \int_0^H \int_0^W (x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z) \times \rho g(H-z) \mathbf{i}_x \, dy \, dz \\
 &= \rho g \int_0^H \int_0^W (z\mathbf{i}_y - y\mathbf{i}_z)(H-z) \, dy \, dz \\
 &= \rho g \int_0^H \left(Wz\mathbf{i}_y - \frac{W^2}{2} \mathbf{i}_z \right) (H-z) \, dz \\
 &= \rho g W \left| \frac{Hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right|_0^H \mathbf{i}_y - \rho g \frac{W^2}{2} \left| Hz - \frac{z^2}{2} \right|_0^H \mathbf{i}_z \\
 &= \rho g \left(\frac{WH^3}{6} \right) \mathbf{i}_y - \rho g \left(\frac{W^2H^2}{4} \right) \mathbf{i}_z
 \end{aligned}$$

El momento \mathbf{T} de la fuerza de presión del agua tiene dos componentes. La componente T_y en la dirección y tiene la magnitud de la fuerza F por la distancia $H/3$:

$$T_y = \rho g \left(\frac{WH^3}{6} \right) = \rho g \left(\frac{WH^2}{2} \right) \left(\frac{H}{3} \right) = F \left(\frac{H}{3} \right)$$

en tanto que la componente z , T_z tiene la magnitud de la fuerza F multiplicada por la distancia $W/2$:

$$T_z = -\rho g \left(\frac{W^2H^2}{4} \right) = -\rho g \left(\frac{WH^2}{2} \right) \left(\frac{W}{2} \right) = -F \left(\frac{W}{2} \right)$$

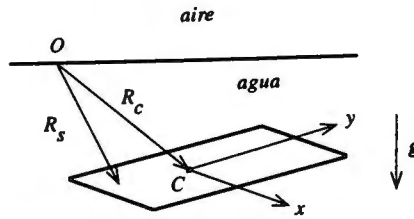


Figura 2.8 Sistema de coordenadas para determinar las fuerzas y momentos en una superficie plana en contacto con un fluido.

La distancia al centro de presión necesaria para producir el momento T es, así:

$$\mathbf{R}_{cp} = \left(\frac{H}{3}\right)\mathbf{i}_z + \left(\frac{W}{2}\right)\mathbf{i}_y$$

lo cual satisface la ecuación 2.19. El centro de presión se localiza a mitad del camino a lo largo de la anchura del dique y a una tercera parte de la profundidad del agua por encima de la base del dique. A fin de contrarrestar tanto la fuerza F como el momento T , los cuales tienden a desplazar y derribar el dique, el espesor y la masa del mismo necesita ser suficientemente grande para no desplazarse y rotar al deformar el suelo sobre el que se apoya.

2.4.1 Fuerza de presión sobre una superficie plana

Es posible una simplificación de las ecuaciones 2.17 y 2.18 para la fuerza F y el momento T sobre una superficie sólida cuando ésta es plana. Se ilustra esta situación en la figura 2.8, en la que se aprecia una superficie plana de forma arbitraria localizada por debajo de una superficie líquida cuya presión es p_a . Si se elige un sistema de coordenadas cartesianas que se fija sobre la placa, con origen en el centroide C de la placa y con los ejes x y y sobre el plano de la placa, el vector de posición \mathbf{R}_s de un punto sobre la superficie de la placa es:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_C + x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y \quad (2.20)$$

donde \mathbf{R}_C es el vector de posición del centroide C medido desde el origen O sobre la superficie del líquido (véase la Fig. 2.8). La posición del centroide \mathbf{R}_C es la posición del área promediada del área superficial S :

$$\mathbf{R}_C \equiv \frac{1}{S} \iint_S \mathbf{R}_s dS \quad (2.21)$$

De la ecuación 2.9, advirtiendo que $p = p_a$ y $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = 0$ sobre la superficie del líquido, la presión p_s sobre la superficie plana es:

$$\begin{aligned}
 p_s - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_s &= p_a \\
 p_s &= p_a + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_s = p_a + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_C + \rho(g_x x + g_y y) \\
 &= p_C + \rho(g_x x + g_y y)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $p_C \equiv p_a + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_C$ es la presión en el centroide C , y g_x y g_y son las componentes de \mathbf{g} en las direcciones x y y .

Si C es el centroide de la superficie plana, entonces los momentos alrededor de los ejes x y y de una presión unitaria uniformemente distribuida sobre la superficie debe ser cero:

$$\iint x \, dS = 0; \quad \iint y \, dS = 0 \tag{2.23}$$

Si se aplica esta relación, es posible determinar la fuerza \mathbf{F} a partir de la ecuación 2.17, que es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \mathbf{n} \iint p_s \, dS \\
 &= \mathbf{n} \iint p_C \, dS + \rho \mathbf{n} \iint (g_x x + g_y y) \, dS \\
 &= (p_C A) \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde A es el área de la placa. Por lo tanto, la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la superficie plana, para cualquier orientación, es igual al producto de la presión en el centroide C multiplicado por el área A de la placa y, por supuesto, actúa en una dirección normal a la placa.

Para una figura regular, como un cuadrado, rectángulo, círculo, elipse o triángulo, la localización del centroide se encuentra fácilmente por simetría. Para figuras irregulares, dicha ubicación se logra mediante una simple integración de modo que se satisfaga la ecuación 2.23.

El *centro de presión* cp es el punto sobre el plano de la superficie alrededor del cual el momento de la fuerza de presión es cero:

$$\iint p(x - x_{cp}) \, dS = 0; \quad \iint p(y - y_{cp}) \, dS = 0 \tag{2.25}$$

donde $x_{cp} \mathbf{i}_x + y_{cp} \mathbf{i}_y$ es la distancia desde el centroide C al centro de presión cp . A fin de satisfacer esta condición, se sustituye la ecuación 2.22 en 2.25 y se simplifica mediante la ecuación 2.23:

$$\begin{aligned}
 \iint [p_C(x - x_{cp}) + \rho(g_x x + g_y y)(x - x_{cp})] \, dS &= 0 \\
 -p_C x_{cp} A + \rho g_x \iint x^2 \, dS + \rho g_y \iint xy \, dS &= 0 \\
 -p_C x_{cp} A + \rho(g_x I_{xx} + g_y I_{xy}) &= 0
 \end{aligned}$$

donde $I_{xx} \equiv \iint x^2 dS$ y $I_{xy} \equiv \iint xy dS$ son los momentos de inercia de la superficie plana alrededor del centroide C . Resolviendo para x_{cp} y de forma semejante para y_{cp} , se encuentra que:

$$\begin{aligned} x_{cp} &= \frac{\rho(g_x I_{xx} + g_y I_{xy})}{\rho_C A} \\ y_{cp} &= \frac{\rho(g_y I_{yy} + g_x I_{xy})}{\rho_C A} \end{aligned} \quad (2.26)$$

El momento \mathbf{T} de la fuerza de presión alrededor del origen O es simplemente el momento de la fuerza F (ecuación 2.24) que actúa a través del centro de presión cp como en 2.19:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_C + x_{cp}\mathbf{i}_x + y_{cp}\mathbf{i}_y) \times (p_C A) \mathbf{n} \quad (2.27)$$

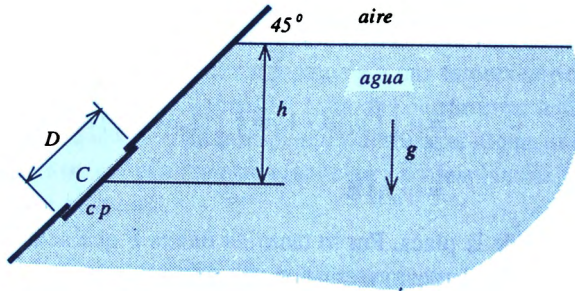


Figura E 2.3

Ejemplo 2.3

Una placa plana circular de diámetro $D = 1 \text{ m}$ tapa una abertura del casco de un barco a una distancia $h = 3 \text{ m}$ por debajo de la superficie del agua. El plano de la placa forma 45° con la vertical, como se aprecia en la figura E 2.3. Si la densidad del agua es $\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$, calcule la fuerza total que el agua ejerce sobre la placa y la distancia entre el centro de presión cp y el centroide de la placa circular. (Para un círculo, $I_{yy} = \pi D^4/64$.)

Solución

La presión manométrica p_C en el centroide de la placa es:

$$p_C = \rho gh = (1E(3) \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m}) = 2.942E(4) \text{ Pa}$$

por lo que la fuerza F resulta ser:

$$F = p_C A = (2.942E(4) \text{ Pa}) \frac{\pi(1 \text{ m}^2)}{4} = 2.311E(4) \text{ N}$$

Si la dirección de y se toma hacia arriba a lo largo de la placa y la de x en sentido horizontal, $g_x = 0$ y $g_y = -g/\sqrt{2}$. A partir de la ecuación 2.26,

$$y_{cp} = \frac{\rho(-g/\sqrt{2})I_{yy}}{\rho_c A} = -\frac{\rho g D^2}{16\sqrt{2}\rho_c}$$

$$= -\frac{(1E3) \text{ kg/m}^3 (9.807 \text{ m/s}^2) (1 \text{ m}^2)}{16\sqrt{2} (2.942E4) \text{ Pa}} = -1.473E(-2) \text{ m}$$

2.4.2 Fuerza de presión sobre una superficie curva

En el caso de las superficies curvas, no existe una simplificación de las expresiones para la fuerza F y el momento T que corresponda a las de las superficies planas. Para superficies curvas que son porciones de formas regulares, como esferas, cilindros o conos, puede ser posible definir un sistema de coordenadas que facilite la determinación del elemento dS de área de la superficie y el vector normal n a fin de poder evaluar las integrales de las ecuaciones 2.17 y 2.18. De manera alternativa, es posible formar una superficie S cerrada e imaginaria, de la cual forme parte la superficie curva, pero cuyas partes restantes sean superficies simples planas o cilíndricas para las cuales es fácil calcular las fuerzas y momentos que ejerce el fluido circundante. Al aplicar un equilibrio de la fuerza y el momento sobre esta superficie imaginaria S que encierra un volumen de fluido, será posible determinar la fuerza y el momento desconocidos que actúan sobre una superficie curva dada.

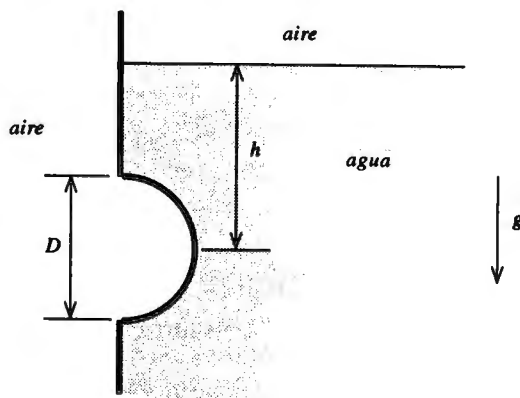


Figura E 2.4

Ejemplo 2.4

En la parte plana de un tanque que contiene agua hay una superficie semiesférica de diámetro D a una distancia h por debajo de la superficie del agua, como se ejemplifica en la figura E 2.4. Deduzca expresiones para la fuerza horizontal F_h y la fuerza F_v hacia arriba que el agua circundante ejerce sobre la superficie semiesférica.

Solución

Sustitúyase la superficie semiesférica por un volumen cerrado semiesférico completamente rodeado por agua y lleno de este líquido. Ese volumen estaría en equilibrio con las fuerzas de presión sobre sus superficies. En la dirección horizontal, la fuerza de presión (F_h) sobre la porción semiesférica de la superficie estaría equilibrada por la fuerza de presión que incide en la superficie plana circular en posición vertical de área $\pi D^2/4$ y presión $p_C = p_a + \rho gh$ del centroide, de modo que:

$$F_h = (p_a + \rho gh) \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)$$

En la dirección vertical, la fuerza de presión (F_v) que apunta hacia arriba sobre la superficie semiesférica (no hay componente hacia arriba en la porción plana) debe contrarrestar la fuerza de atracción de la gravedad sobre el fluido dentro del volumen. Este volumen es $(1/2)(4\pi/3)(D/2)^3 = \pi D^3/12$, de forma que:

$$F_v = \frac{\pi \rho g D^3}{12}$$

2.5 Fuerzas de presión sobre cuerpos sumergidos en fluidos**2.5.1 Principio de Arquímedes**

Si un cuerpo completamente encerrado por una superficie sólida se sumerge en un fluido, la fuerza total de presión que actúa sobre el cuerpo, denominado *fuerza de empuje*, o *empuje ascendente*, y que se denota por F_b , se calcula con sencillez a partir de la ecuación 2.17 puesto que la integral de la fuerza de presión sobre una superficie del cuerpo puede convertirse a una integral de volumen sobre el volumen \mathcal{V} del fluido desplazado por la estructura:

$$\mathbf{F}_b = \iiint_S p \mathbf{n} \, dS$$

$$\begin{aligned}
 &= - \iiint_V \nabla p \, dV \\
 &= - \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV \\
 &= -\rho \mathbf{g} \mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Se ha empleado aquí la ecuación 1.43 a fin de formar la integral de volumen (con la advertencia de que \mathbf{n} de la ecuación 2.17 es la normal, que apunta hacia adentro, del volumen \mathcal{V} desplazado) y la ecuación 2.6 para sustituir el gradiente de presión por la fuerza gravitatoria por unidad de volumen. La ecuación 2.28 establece que *la fuerza de presión (fuerza de empuje) sobre un cuerpo sumergido es igual en magnitud pero con dirección opuesta a la fuerza de gravedad que actúa sobre el fluido desplazado. Éste es el principio de Arquímedes.*⁹

La posición \mathbf{R}_b del *centro de la fuerza de empuje (o centro de carena)* de un objeto sumergido o que flota se define como la posición del centro de masa del fluido desplazado:

$$\mathbf{R}_b \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \iiint_V \mathbf{R} \, dV \tag{2.29}$$

Puede considerarse que la fuerza de empuje \mathbf{F}_b actúa a través del centro de dicha fuerza puesto que el momento \mathbf{T}_b de la fuerza de gravedad sobre el fluido desplazado es $\mathbf{R}_b \times \mathbf{F}_b$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_b &= - \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) \, dV = \iiint_V \mathbf{R} \, dV \times (-\rho \mathbf{g}) \\
 &= \mathbf{R}_b \mathcal{V} \times (\mathbf{F}_b / \mathcal{V}) = \mathbf{R}_b \times \mathbf{F}_b
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde se utilizaron las ecuaciones 2.28 y 2.29. El momento de la fuerza de presión alrededor del centro de carena es cero.

Cuando un cuerpo flota en la interfaz entre dos fluidos, como un barco que flota en el agua, cada fluido contribuirá a la fuerza de empuje en una cantidad $\rho g \mathcal{V}$ igual a la de la fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen desplazado de los fluidos respectivos. Sin embargo, en el caso de un cuerpo que flota en agua, la densidad del aire es mucho menor que la del agua, por lo que es posible despreciar la fuerza de empuje del aire en comparación con la del agua y considerar sólo la fuerza gravitatoria del volumen desplazado al calcular la fuerza de empuje \mathbf{F}_b .

⁹ Arquímedes (287(?)–212 antes de nuestra era) fue el matemático más importante de su milenio. Contribuyó al estudio de la estática y la dinámica, así como de la hidrostática de los cuerpos flotantes o sumergidos.

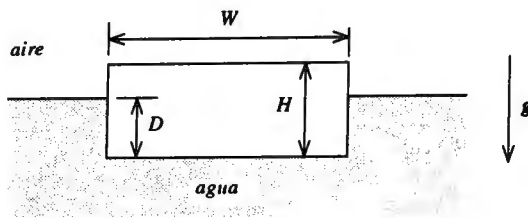


Figura E 2.5

Ejemplo 2.5

Una barra de jabón flota sobre la superficie del agua, su superficie inferior se encuentra a una distancia D por debajo de la superficie del agua, como se ilustra en la figura E 2.5. La barra tiene una anchura W , un espesor H y su longitud L es normal al plano de la figura E 2.5. ¿Cuál es la densidad relativa SG del jabón?

Solución

La densidad del jabón es $(SG)\rho$ y la fuerza de gravedad que actúa sobre el jabón es $(SG)\rho gWHL$. De acuerdo con el principio de Arquímedes, ecuación 2.28, ésta es igual en magnitud a la fuerza de gravedad que actúa sobre la masa del fluido desplazado, ρDWL :

$$(SG)\rho gWHL = \rho gDWL$$

$$SG = \frac{D}{H}$$

2.5.2 Equilibrio de cuerpos sumergidos

Equilibrio estático

Un cuerpo de masa M sumergido en un fluido no se moverá si la suma de las fuerzas (y sus momentos) que actúan sobre el cuerpo es cero. Las fuerzas que intervienen son la fuerza de empuje F_b , la fuerza gravitatoria Mg y cualquier fuerza externa F_{ex} que pudiera estar presente, como la tensión en una cuerda de amarre o de un ancla. Mediante la ecuación 2.28, es posible expresar el equilibrio de fuerzas como:

$$Mg - \rho Vg + F_{ex} = 0 \quad (2.31)$$

En ausencia de una fuerza externa, un cuerpo permanecerá estacionario sólo si la masa M es igual a ρV , la masa del fluido desplazado. (Un submarino conserva su equilibrio

ajustando el volumen de agua en sus tanques de lastre^a.) Un cuerpo que flota en una interfaz de aire y líquido se sumerge a una distancia por debajo de la superficie del agua que proporcione sólo el volumen desplazado que se necesita para equilibrar la masa del cuerpo. (Cuando se coloca carga en un barco, éste flota a mayor profundidad en el agua en la cantidad necesaria que permita contrarrestar la fuerza gravitatoria que actúa sobre la carga.)

También, es necesario que los momentos de estas fuerzas sumen cero:

$$\mathbf{R}_g \times M\mathbf{g} - \mathbf{R}_b \times \rho V \mathbf{g} + \mathbf{R}_{ex} \times \mathbf{F}_{ex} = 0 \quad (2.32)$$

donde \mathbf{R}_{ex} es el punto de aplicación de la fuerza externa \mathbf{F}_{ex} y \mathbf{R}_g es la posición del centro de gravedad del cuerpo. Si no hay fuerza externa, el equilibrio de los momentos, junto con el equilibrio de la fuerza, exige que:

$$(\mathbf{R}_g - \mathbf{R}_b) \times \mathbf{g} = 0 \quad (2.33)$$

Por lo tanto, el centro de gravedad y el centro de carena (de la fuerza de empuje) se encuentran sobre la misma línea vertical, lo cual hace que $\mathbf{R}_g - \mathbf{R}_b$ sea paralela a \mathbf{g} y su producto vectorial sea cero.

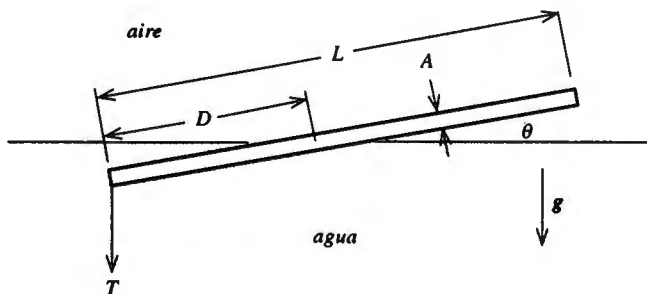


Figura E 2.6

Ejemplo 2.6

Un palo delgado que flota en un estanque está anclado por una cuerda atada a uno de sus extremos, como se aprecia en la figura E 2.6, de modo que el extremo amarrado se encuentra sumergido y el otro queda sólo en contacto con el aire. El palo forma un ángulo θ con la horizontal. Éste tiene una longitud L con un área de sección transversal A y una densidad ρ_p que es menor a la densidad del agua ρ_w .* Obtenga las expresiones para la longitud D de la parte sumergida del palo y la tensión T en la cuerda del ancla, en términos de los parámetros ρ_p , ρ_w , A y L .

* Los submarinos bombean agua del mar en los tanques de combustible vacíos para asegurar su estabilidad. (Nota del traductor.)

Solución

Considerando los momentos de la fuerza de gravedad $\rho_p gAL$ y de la fuerza de empuje $\rho_w gAD$ alrededor del punto de amarre de la cuerda del ancla, la condición de equilibrio rotacional, ecuación 2.32, es:

$$\left(\frac{L}{2} \cos \theta\right) \rho_p gAL - \left(\frac{D}{2} \cos \theta\right) \rho_w gAD = 0$$

$$D^2 \rho_w = L^2 \rho_p$$

$$D = \left(\frac{\rho_p}{\rho_w}\right)^{\frac{1}{2}} L$$

Al aplicar el principio de Arquímedes, ecuación 2.28, el equilibrio de las fuerzas verticales se obtiene:

$$T + \rho_p gAL = \rho_w gAD$$

$$T = \rho_w gA \left(\frac{\rho_p}{\rho_w}\right)^{\frac{1}{2}} L - \rho_p gAL$$

$$= \rho_p gAL \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_p}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

Adviértase que D y T son independientes del ángulo θ .

Equilibrio estable

Para que un cuerpo cerrado sumergido en un fluido permanezca estacionario es necesario que se equilibren las fuerzas y los momentos. No obstante, este equilibrio puede ser precario, como el de un alfiler apoyado en su punta. El equilibrio estable exige que, cuando se perturbe ligeramente de su posición de equilibrio, el cuerpo tenderá a regresar a esa posición.

Ahora se examinará cómo puede aplicarse este principio en el caso de un cuerpo completamente rodeado por un fluido. En la figura 2.9, la fuerza de empuje \mathbf{F}_b actúa a través del centro de carena B en tanto que la fuerza de gravedad $\rho gV = -\mathbf{F}_b$ actúa a través del centro de masa G . Siempre y cuando B y G estén alineados verticalmente, el cuerpo permanece en equilibrio estático. Sin embargo, supóngase que el cuerpo se rota en el sentido que giran las manecillas del reloj, formando un pequeño ángulo ϵ , como se indica en la figura 2.9. Si G está debajo de B , habrá un par de fuerzas de restitución de magnitud $\rho gV[BG]\epsilon$, donde $[BG]$ es la distancia entre B y G . Por otra parte, si G está por encima de B , el par de fuerzas tenderá a incrementar el ángulo de rotación. En ese caso, con el tiempo el cuerpo se volteará de cabeza, por lo que el centro de gravedad quedará debajo

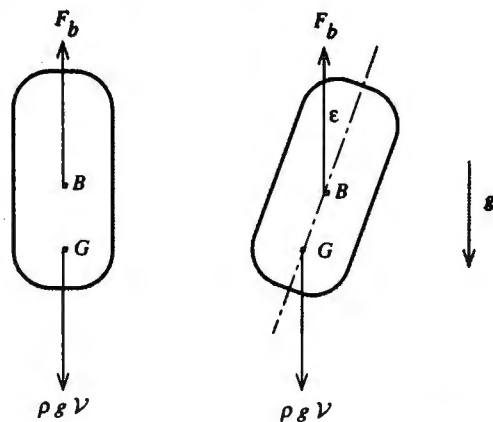


Figura 2.9 Diagrama que permite apreciar la estabilidad del equilibrio de un cuerpo sumergido en un fluido.

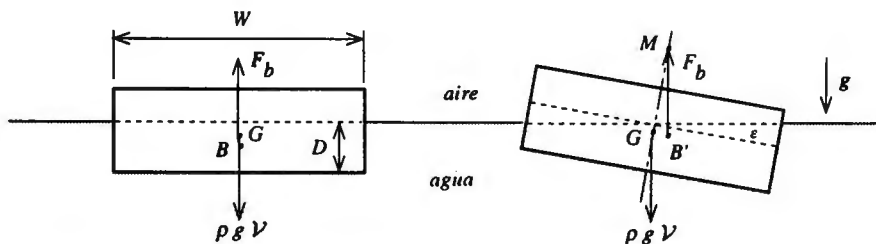


Figura 2.10 El equilibrio estable de un cuerpo que flota resulta del movimiento del centro de carena cuando el cuerpo se inclina un ángulo pequeño.

del centro de carena. Se puede concluir que la estabilidad de un cuerpo sumergido requiere que el centro de gravedad se localice debajo del centro de carena.

¿Se aplica el mismo principio a un cuerpo que flota en la superficie de un líquido? Considérese el caso de una barra de jabón que flota libremente en agua, como se ilustra en la figura 2.10. El centro de gravedad se localiza a la mitad de la distancia que hay entre las superficies superior e inferior de la barra. No obstante, el centro de carena se localiza a la mitad de la distancia que hay entre la superficie inferior de la barra y la horizontal formada por la superficie del agua, por lo que dicho centro se localiza por debajo del centro de gravedad. Además, se sabe que, al perturbarla, la barra es estable gracias a que regresará a su posición.

Considérese cómo difiere esto del caso de un cuerpo sumergido. En la figura 2.10 también se ejemplifica el comportamiento de una barra de jabón que flota en el agua al hacerla girar un pequeño ángulo ϵ en el sentido de las manecillas del reloj. En tanto que el volumen de agua desplazado no ha cambiado, el centro de carena se ha desplazado hacia la derecha puesto que ahora el lado derecho de la barra se encuentra más

sumergido que su lado izquierdo. Si el centro de carena, B' , está a la derecha del centro de gravedad, la barra regresará a su posición inicial.

El punto M localizado sobre la línea central de la barra por encima de B' cuando la barra se ha inclinado un pequeño ángulo ϵ , se conoce como *metacentro*. Si el metacentro M se encuentra sobre el centro de gravedad G , como en la figura 2.10, entonces la barra será estable y regresará al perturbarla a su posición inicial.

Para localizar el metacentro M para la barra de jabón, primero se encontrará la expresión para el momento del volumen desplazado alrededor del centro de carena B' . El volumen desplazado consta de dos componentes, el volumen desplazado inicial DHL (L es la longitud de la barra de jabón) más una parte cuneiforme de volumen $(1/2)(W/2)(\epsilon W/2)L = \epsilon W^2 L/8$ que se suprimió del lado izquierdo y se sumó al lado derecho, en tanto que el centro de gravedad del volumen en cuestión se desplazó una distancia igual a $2W/3$. La suma de los momentos de estas dos componentes alrededor del punto B' debe ser cero:

$$-DHL \times [BB'] + \epsilon \left(\frac{W^2 L}{8} \right) \left(\frac{2W}{3} \right) = 0$$

$$[BB'] = \epsilon \left(\frac{W^2}{12D} \right) \quad (2.34)$$

Empero, la distancia $[BB']$ es igual a $\epsilon [BM]$, por lo que:

$$[BM] = \frac{W^2}{12D} \quad (2.35)$$

Se puede concluir que se mejora la estabilidad de un cuerpo flotante si la anchura W es grande y la distancia sumergida D es pequeña y si se mantiene el centro de masa lo más bajo posible (aumentando así $[GM]$). Esto explica por qué un bote de remos es más estable que una canoa y por qué al pararse una persona en una canoa ésta se desestabiliza. También explica por qué una barra de jabón no flotará de manera estable sobre uno de sus cantos, v.g., con su dimensión más pequeña en la dirección horizontal.

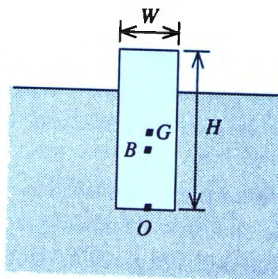


Figura E 2.7

Ejemplo 2.7

Un bloque rectangular de madera flota sobre la superficie del agua, como se ilustra en la figura E 2.7. El bloque tiene una anchura W , una altura H y una densidad relativa SG . Determine la mínima razón de la anchura a la altura, W/H , que garantice la estabilidad, v.g., para la cual $GM = 0$.

Solución

Sea O el punto localizado al centro de la parte inferior del bloque, G el centro de gravedad y B el centro de carena, según el esquema de la figura E 2.7. La distancia $[OG]$ es la mitad de H puesto que la densidad del bloque es uniforme y $[OB]$ es la mitad de la distancia $SG \times H$ de hundimiento del bloque. Por lo tanto, la distancia $[BG]$ es:

$$[BG] = (1 - (SG)) \frac{H}{2}$$

La distancia $[BM]$ desde B al metacentro M puede evaluarse a partir de la ecuación 2.35 si se sabe que la distancia $D = SG \times H$:

$$[BM] = \frac{W^2}{12(SG)H}$$

Al hacer que $[BM] = [BG]$ se da la condición para la estabilidad marginal, $[GM] = 0$:

$$\frac{W^2}{12(SG)H} = (1 - (SG)) \frac{H}{2}$$

$$\left(\frac{W}{H}\right) = \sqrt{6(SG)(1 - SG)}$$

Para que un cubo ($W = H$) flote en posición vertical, SG debe ser menor o mayor que la raíz menor o mayor de $6(SG)(1 - SG) = 1$:

$$SG \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

$$\leq 0.2113$$

$$SG \geq \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

$$\geq 0.7887$$

Los cubos de hielo y los de espuma de estireno flotarán en posición vertical, ¡pero no los cubos de jabón!

2.6 Fluidos estratificados

Algunas veces la densidad de un fluido estático no es uniforme en un campo gravitatorio. En la atmósfera, la densidad del aire disminuye de manera pronunciada con la altitud. En el océano profundo, la densidad del fluido es mayor en el fondo que en la superficie. Cuando los fluidos son inmiscibles, como el agua y el aire o la gasolina y el agua, el fluido más denso queda en el fondo de un recipiente que encierre a los dos fluidos. En todos estos casos de *fluidos estratificados*, la relación integral de la ecuación 2.13, que expresa la presión como función de la altura z en el campo gravitatorio, deja de ser válida pues la densidad del fluido no tiene un valor constante independiente de z .

¿Cuál sería la presión en un fluido estratificado? Claro está que la presión disminuirá conforme aumenta z . Sin embargo, la densidad del fluido también tenderá a disminuir al decrecer la presión, por lo que la rapidez o razón de disminución de la presión, que es proporcional a la densidad (ecuación 2.6), será más pequeña en magnitud conforme aumenta z . Esta relación entre la densidad y la presión es importante en la atmósfera y en el océano a lo largo de distancias verticales de varios kilómetros, pero es insignificante para la mayor parte de las aplicaciones en ingeniería. En este último caso, las diferencias en densidad provienen primordialmente de procesos de calentamiento o enfriamiento, de las diferencias en la composición química o de las diferencias de fase que ocurren en las capas del fluido.

2.6.1 Estabilidad en los fluidos estratificados

Antes de determinar la distribución de presiones en un fluido estático estratificado, primero se determinarán las condiciones necesarias que garanticen que el fluido de densidad variable permanezca sin movimiento en un campo gravitatorio. Al aplicar el rotacional a la ecuación (2.6) de equilibrio de la fuerza hidrostática se encuentra que:

$$-\nabla \times (\nabla p) + \nabla \times (\rho \mathbf{g}) = 0$$

$$0 + \rho(\nabla \times \mathbf{g}) + (\nabla \rho) \times \mathbf{g} = 0$$

$$(\nabla \rho) \times \mathbf{g} = 0 \tag{2.36}$$

donde se utilizaron las ecuaciones 1.36 y 1.39 del cálculo de vectores para evaluar el rotacional de los campos vectoriales, advirtiendo que $\nabla \times \mathbf{g}$ es cero puesto que \mathbf{g} es una constante. La ecuación 2.36 requiere que $\nabla \rho$ sea cero o bien, un vector con la misma dirección que \mathbf{g} . Debido a que la dirección de \mathbf{g} es vertical, ρ debe ser una función con sólo una altura vertical a fin de garantizar que $\nabla \rho$ tenga sólo una componente en la dirección de \mathbf{g} . Esta es la condición de *estabilidad estática*.

Por supuesto, esto concuerda con la experiencia diaria. En un vaso, la superficie de agua es horizontal y la densidad del fluido cambia de manera abrupta pues pasa

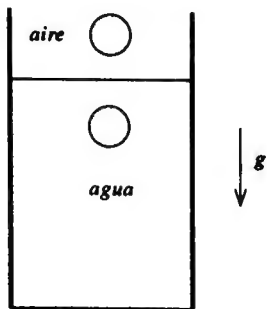


Figura 2.11 La estabilidad dinámica de un fluido denso, debajo de otro fluido menos denso, depende de la tendencia de las alteraciones que sufra el fluido a regresar a su estado no perturbado.

de la densidad del agua a la del aire a la altura de la superficie del agua, sin importar la ubicación horizontal dentro del vaso. Al vaciar un fluido más ligero en un recipiente con un fluido más denso, el primero flotará hacia arriba, formando una interfaz horizontal entre los dos fluidos.

También resulta evidente a partir de la experiencia cotidiana que el fluido más denso siempre quedará debajo del más ligero. Si se invierte un recipiente lleno a la mitad con agua y aire, el agua siempre fluye hacia el fondo. No obstante, de tenerse una capa de agua por encima de una capa de aire, no viola la condición de estabilidad estática siempre y cuando la interfaz permanezca en posición horizontal. Jamás se observan esos fluidos invertidos de cabeza pues la interfaz de un fluido denso sobre uno menos denso es dinámicamente inestable, al igual que un alfiler que se balancea sobre su punta.

Con el propósito de ilustrar el principio de estabilidad dinámica, considérese el recipiente lleno a la mitad con agua y aire que se aprecia en la figura 2.11. Supóngase que se intercambia una pequeña gota de agua por un volumen igual de aire, de lo que resulta, como se ilustra, una burbuja de aire debajo de la interfaz y una gota de agua suspendida arriba de ella. Esto exigirá cierto trabajo, no sólo para elevar la gota a través del aire y empujar la burbuja hacia el interior del líquido, sino también para formar la interfaz de aire y agua en la superficie de la burbuja y la gota donde existe una tensión superficial. Si se liberan la gota y la burbuja, la primera caerá, en tanto que la otra se elevará hacia la interfaz formada por el aire y el agua, aniquilándose entre sí. Puesto que el sistema regresa de manera espontánea a su configuración inicial después de alterarlo de este modo, se dice que es *dinámicamente estable*.

Ahora, colóquese el libro de texto de cabeza y estúdiense la figura 2.11 cuando la capa de agua queda por encima del aire. Al liberar la burbuja y la gota, la burbuja se elevará más dentro del agua y la gota descenderá hacia el aire. Esta configuración invertida es, en definitiva, inestable pues se aleja más de su estado inicial. A esto se le da el nombre de *inestabilidad dinámica*. Adviértase también que el trabajo realizado para desplazar la gota y la burbuja es negativo, en tanto que se requiere trabajo positivo para formar las interfaces contra la fuerza de tensión superficial. En el caso de muestras muy pequeñas de agua, como una gota suspendida del extremo de un

gotero, es posible tener una interfaz dinámicamente estable con agua por encima del aire, como se observa en la parte inferior de dicha gota, a consecuencia de la influencia estabilizadora de la tensión superficial que requiere un trabajo positivo al deformarse la interfaz.

2.6.2 La presión en fluidos estratificados

Cuando la densidad del fluido es una función conocida de la altura z en el campo gravitatorio, por ejemplo $\rho\{z\}$, es posible encontrar la presión $p\{z\}$ como función de la altura al integrar la ecuación del equilibrio hidrostático de fuerzas, ecuación 2.6. Si se considera la componente vertical z de esta ecuación, es posible encontrar la ecuación diferencial total para la presión:

$$\begin{aligned} -(\nabla p) \cdot \mathbf{i}_z + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_z \rho\{z\} &= 0 \\ -\left(\frac{dp}{dz}\right) - g \rho\{z\} &= 0 \\ dp + g \rho\{z\} dz &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Si se integra entre el punto z_0 , donde se conoce la presión p_0 , y el punto z dentro del fluido, se encuentra que:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p\{z\}} dp + g \int_{z_0}^z \rho\{z\} dz &= 0 \\ p\{z\} &= p_0 - g \int_{z_0}^z \rho\{z\} dz \end{aligned} \quad (2.38)$$

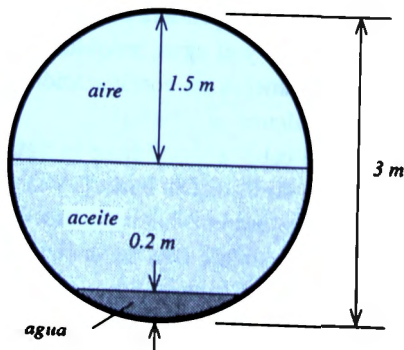


Figura E 2.8

Ejemplo 2.8

Un tanque cilíndrico horizontal donde se almacena aceite combustible y cuyo diámetro interno mide 3 m está lleno a la mitad con líquido. El líquido consta de una capa de aceite combustible ($SG = 0.87$) que está encima de otra capa de agua de 0.2 m de espesor, como se aprecia en la figura E 2.8. La mitad superior del tanque tiene un tubo de respiración hacia la atmósfera. Calcule la presión manométrica en el fondo del tanque.

Solución

Al medir la altura z desde la interfaz entre el aceite y el aire, el fondo del tanque está a $z = -1.5$ m, y la interfaz entre el agua y el aceite se encuentra a una distancia $z = -1.3$ m. Es posible determinar la presión p_b en el fondo del tanque mediante la ecuación 2.38:

$$p_b = p_0 - g \int_0^{-1.3m} \rho_o dz - g \int_{-1.3m}^{-1.5m} \rho_w dz$$

$$\begin{aligned} p_b - p_0 &= \rho_w g (SG)(1.3 \text{ m}) + \rho_w g (0.2 \text{ m}) \\ &= 1.0E(3) \text{ kg/m}^3 \times 9.807 \text{ m/s}^2 (0.87 \times 1.3 \text{ m} + 0.2 \text{ m}) \\ &= 1.3053E(4) \text{ Pa} \end{aligned}$$

2.6.3 La atmósfera de la Tierra

La atmósfera de la Tierra es una capa comparativamente delgada de gas que permanece en la superficie de la Tierra gracias a la atracción de la gravedad. Su densidad y presión son mayores en la superficie de la Tierra y ambas disminuyen aproximadamente en forma exponencial con la altitud. La mayor parte de la masa de la atmósfera se encuentra concentrada dentro de los primeros 10 kilómetros de altitud. La masa atmosférica no es tan grande que no pueda resultar afectada a escala global por la actividad humana. En décadas recientes, la mezcla de gases en la atmósfera ha dado lugar a una disminución de la cantidad de ozono y a un aumento de la temperatura superficial a consecuencia de la interacción de la atmósfera con la luz solar.

Con el propósito de calcular la presión y densidad de la atmósfera, es posible considerar el aire como un gas perfecto que obedece la ley de los gases perfectos, ecuación 1.11, donde la constante R de los gases no varía con la altura.¹⁰ Si se sustituye la ley de los gases perfectos en la ecuación diferencial del equilibrio de fuerzas, ecuación 2.37, y luego se integra, se encuentra una expresión para la presión $p\{z\}$:

¹⁰ A altitudes en extremo elevadas, la luz solar disocia e ioniza las moléculas de aire, ocasionando un aumento en la constante del gas.

$$\begin{aligned}
 dp + g \left[\frac{\rho}{RT\{z\}} \right] dz &= 0 \\
 \left(\frac{dp}{p} \right) + \left(\frac{g}{R} \right) \frac{dz}{T\{z\}} &= 0 \\
 \int_{p_0}^{p\{z\}} \left(\frac{dp}{p} \right) + \left(\frac{g}{R} \right) \int_0^z \frac{dz}{T\{z\}} &= 0 \\
 \ln \left[\frac{p\{z\}}{p_0} \right] + \left(\frac{g}{R} \right) \int_0^z \frac{dz}{T\{z\}} &= 0 \\
 p\{z\} = p_0 \exp \left[- \left(\frac{g}{R} \right) \int_0^z \frac{dz}{T\{z\}} \right] & \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

donde p_0 es la presión atmosférica en la superficie de la Tierra, $z = 0$. La densidad $\rho\{z\}$ puede encontrarse sin dificultad al dividir la ecuación 2.39 entre $RT\{z\}$. Adviértase que es preciso conocer la temperatura absoluta $T\{z\}$ de la atmósfera como función de la altura a fin de evaluar la integral de la ecuación 2.39.

La atmósfera isotérmica

Es posible lograr una buena aproximación de la distribución de la presión atmosférica de la Tierra a partir de la ecuación 2.39 si se supone que la temperatura de la atmósfera, digamos T_0 , es la misma en cualquier lugar. En ese caso se puede evaluar la integral para obtener:

$$p\{z\} = p_0 \exp \left[- \left(\frac{g}{RT_0} \right) z \right] \quad (2.40)$$

La presión disminuye en forma exponencial con la altitud por un factor de e por cada aumento de RT_0/g en altitud. La longitud RT_0/g , conocida como *altura de escala* de la atmósfera, tiene un valor de 8.433 km cuando $T_0 = 288.15 \text{ K}$ (15 C).¹¹

La atmósfera normal en Estados Unidos

La temperatura de la atmósfera varía un poco con la altitud dependiendo del punto sobre la Tierra de que se trate y de la época del año. En promedio, sobre la parte continental de Estados Unidos y durante muchos años, el perfil de temperaturas $T\{z\}$ puede representarse mediante una función lineal por segmentos:

¹¹ Para el aire, $R = 287.0 \text{ J/kg K}$ (véase la tabla 1.2) y $R/g = 29.26 \text{ m/K}$.

Tabla 2.1 Propiedades de la atmósfera normal en Estados Unidos

i	z_i (km)	T_i (K)	$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{i,i+1}$ (K/km)	p_i (Pa)	ρ_i (kg/m ³)
0	0	288.15		1.0133E(5)	1.225
			-6.5		
1	11	216.65		2.263E(4)	3.639E(-1)
			0.0		
2	20	216.65		5.472E(3)	8.800E(-2)
			1.0		
3	32	228.65		8.673E(2)	1.322E(-2)

$$T_{i,i+1}(z) = T_i + \left(\frac{dT}{dz}\right)_{i,i+1} (z - z_i), \quad z_i \leq z \leq z_{i+1} \quad (2.41)$$

donde T_i es la temperatura en el límite inferior de cada intervalo i y $(dT/dz)_{i,i+1}$ es el gradiente de temperatura constante dentro del intervalo. Cuando se sustituye esta expresión en la ecuación 2.40 y se evalúa la integral, se encuentra que la distribución de la presión en cada segmento lineal es:

$$p_{i,i+1}(z) = p_i \left[\frac{T_i + (dT/dz)_{i,i+1} (z - z_i)}{T_i} \right]^{-(g/R)(dT/dz)_{i,i+1}}, \quad z_i \leq z \leq z_{i+1} \quad (2.42)$$

Los valores de z_i , T_i , $(dT/dz)_{i,i+1}$, p_i y ρ_i se exhiben en la tabla 2.1 para altitudes que incluyen la troposfera y la estratosfera. Los valores de T , p y ρ a altitudes intermedias pueden encontrarse aplicando las ecuaciones 2.40-2.42 y la ley de los gases perfectos.

Ejemplo 2.9

Calcule la temperatura, presión y densidad de la atmósfera normal (o estándar) de Estados Unidos a una altitud de 5 km.

Solución

De la tabla 2.1, el gradiente de temperatura de 0 a 5 km es -6.5 K/km, por lo que la temperatura T es:

$$\begin{aligned} T &= 288.15 \text{ K} + (-6.5 \text{ K/km}) \times 5 \text{ km} \\ &= 255.7 \text{ K} \end{aligned}$$

La presión p puede calcularse mediante la ecuación 2.42:

$$p = 1.0133E(5) \text{ Pa} \left(\frac{255.7 \text{ K}}{288.15 \text{ K}} \right)^{-1/(-6.5E(-3) \text{ K/m} \times 29.26 \text{ m/K})}$$

$$= 5.4065E(4) \text{ Pa}$$

Por último, ahora la densidad ρ puede calcularse a partir de la ley de los gases perfectos, ecuación 1.11:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$= \frac{5.4065E(4) \text{ Pa}}{287 \text{ J/kg K} \times 255.7 \text{ K}}$$

$$= 0.7367 \text{ kg/m}^3$$

Estabilidad atmosférica

Para que un fluido estratificado sea dinámicamente estable, éste debe resistir pequeños desplazamientos en la dirección vertical. En el caso de un líquido estratificado con una densidad que decrece en la dirección vertical, una partícula del fluido desplazada en sentido vertical estaría rodeada por un fluido menos denso y, por consiguiente, regresaría de manera espontánea a su posición inicial. Por lo tanto, las capas sucesivas cada vez menos densas de líquido apiladas en dirección vertical serán dinámicamente estables. Es posible expresar este requisito si se advierte que el gradiente de densidad debe ser negativo en el caso de estabilidad dinámica:

$$\left(\frac{d\rho\{z\}}{dz} \right) < 0 \quad (2.43)$$

No obstante, en el caso de un gas estratificado, debe tomarse en cuenta el hecho de que una partícula de gas desplazada en sentido vertical experimentará una reducción de densidad debido a que se mueve hacia una región de presión más baja y su volumen se expande. Por lo tanto, la densidad del fluido circundante no sólo debe decrecer con la altura, sino que debe disminuir con mayor rapidez de lo que lo hace la partícula desplazada. Es posible expresar esta condición de estabilidad dinámica como sigue:

$$\left(\frac{d\rho\{z\}}{dz} \right) < \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_{\hat{s}} \frac{dp\{z\}}{dz}$$

$$< \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_{\hat{s}} (-\rho g) \quad (2.44)$$

donde el cambio de densidad con la presión de la partícula de gas desplazada ocurre para una entropía \hat{s} constante en virtud de que se trata de un cambio adiabático reversible.

En el caso de la atmósfera, es posible utilizar las propiedades de los gases perfectos de las ecuaciones 1.11-1.15 a fin de expresar esta condición mediante la forma:

$$\left(\frac{dT\{z\}}{dz}\right) > -\frac{g}{\hat{c}_p} \quad (2.45)$$

El valor de la razón g/\hat{c}_p es 9.762 K/km para el aire, y el del gradiente de temperatura $dT\{z\}/dz$ correspondiente es -9.762 K/km y se denomina *rapidez de caída adiabática* (o *gradiente adiabático*). Adviértase que la atmósfera normal de Estados Unidos (tabla 2.1) es una atmósfera estable puesto que los gradientes de temperatura siempre exceden la velocidad de caída adiabática. En términos generales, la atmósfera de la Tierra es estable a excepción de la troposfera baja cuando la Tierra la calienta, por lo común durante las horas del día en que hay luz.

2.7 Tensión superficial y capilaridad

Las pequeñas gotas o burbujas de un fluido inmerso en otro fluido son de forma esférica en virtud de la tensión interfacial, o tensión superficial, que existe entre los dos fluidos. Siempre que los fluidos posean densidades distintas -que en general es el caso- las gotas o burbujas se moverán hacia abajo o hacia arriba puesto que la fuerza de empuje no se encuentra equilibrada por la fuerza gravitatoria. Sin embargo, es posible que las gotas o burbujas permanezcan estacionarias en un campo gravitatorio cuando entran en contacto con una superficie sólida, siempre y cuando la fuerza de tensión superficial supere la fuerza de empuje. Como esta última es proporcional al radio de la gota, en tanto que la primera es proporcional al cubo del radio de la gota, una gota o burbuja suficientemente pequeña es capaz de vencer la gravedad y permanecer adherida a la superficie sólida. Una burbuja unida a uno de los lados de un vaso de una bebida carbonatada y una gota adherida al vidrio de una ventana constituyen ejemplos comunes de este fenómeno.

Ejemplo 2.10

Calcule el máximo diámetro aproximado d de una burbuja de aire en agua que sea capaz de permanecer unida a la pared de un recipiente de agua.

Solución

La fuerza de empuje en una burbuja esférica de aire, con d por diámetro, es $\rho_w g \pi d^3/6$, donde $\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del agua. La fuerza máxima que la tensión superficial puede ejercer para mantener a la burbuja fija en un lugar es $\pi d \Upsilon$, donde $\Upsilon = 7.3E(-2) \text{ N/m}$ es la tensión interfacial entre el aire y el agua. Al igualar estas dos fórmulas de manera aproximada,

$$\rho_w g \frac{\pi d^3}{6} \approx \pi d \Upsilon$$

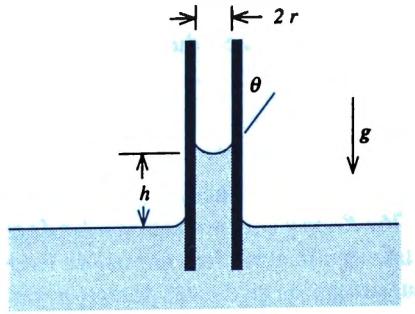


Figura 2.12 El líquido se eleva en un tubo capilar a una posición de equilibrio que está determinada por el equilibrio de la fuerza de tensión superficial y la de la gravedad, las cuales actúan sobre la columna del fluido que presenta la elevación en su superficie.

$$d^2 \approx \left(\frac{6\gamma}{\rho_w g} \right)$$

$$\approx \frac{6 \times 7.3E(-2) \text{ N/m}}{1.0E(3) \text{ kg/m}^3 \times 9.8066 \text{ m/s}^2}$$

$$d \approx 6.7 \text{ mm}$$

Como se sobrestimó la fuerza de tensión superficial, se desprenderán las burbujas de sólo un par de milímetros de diámetro.

Como lo ejemplifica la figura 1.4(b), cuando una interfaz entre dos fluidos entra en contacto con una superficie sólida, la interfaz forma un ángulo θ con la superficie sólida, al que se conoce como *ángulo de contacto*, lo cual es una propiedad de los dos fluidos y el sólido. (Por convención, el ángulo subtendido por la superficie sólida y la interfaz del fluido de mayor densidad.) Este ángulo refleja el equilibrio de las tensiones interfaciales entre el sólido y los fluidos en el punto donde la interfaz del fluido entra en contacto con la superficie sólida. En el caso de una interfaz de líquido y gas con un ángulo de contacto inferior a $\pi/2$, el líquido tiende a subir por la superficie, desplazando el gas, y se dice que el líquido moja la superficie. Por otra parte, cuando el ángulo de contacto es mayor que $\pi/2$, el líquido se aleja del gas y se dice que no moja. Un interfaz agua-aire que está en contacto con un cristal limpio moja, mientras que cuando está en contacto con la parafina no.

Otro ejemplo del efecto de la tensión superficial que actúa en un fluido estático es la elevación de un líquido en un tubo de diámetro pequeño, o tubo capilar, que se extiende verticalmente por encima de la superficie de un líquido expuesto al aire, como se aprecia en la figura 2.12. La altura promedio h de elevación del líquido en el tubo por encima de la interfaz entre el aire y el líquido se puede calcular al equilibrar la

componente vertical de la fuerza de tensión superficial, $2\pi r\Upsilon \cos \theta$, con la fuerza gravitatoria $\rho g(\pi r^2 h)$ que actúa en la columna elevada de líquido:¹²

$$\begin{aligned}\rho g(\pi r^2 h) &= 2\pi r\Upsilon \cos \theta \\ h &= \left(\frac{2\Upsilon \cos \theta}{\rho g r} \right)\end{aligned}\quad (2.46)$$

Adviértase que la altura de elevación aumentará conforme se reduce el radio r del tubo. Para líquidos que no mojan, como el mercurio, el ángulo de contacto θ es mayor que $\pi/2$, y la altura h es negativa ($\cos \theta < 1$), v.g., el fluido desciende en la tubo capilar en lugar de desplazarse hacia arriba.

La acción capilar puede ser importante cuando los líquidos se filtran en los materiales porosos. Por ejemplo, el flujo ascendente de líquido por la acción capilar es esencial para mantener la llama de una vela. El calor radiante que emite la llama de la vela funde la cera que se encuentra en la base de la mecha. Mediante la acción capilar, la cera fundida sube por la mecha y se evapora al ascender gracias a la transferencia de calor que parte de la llama que rodea a la mecha. Luego, el vapor se difunde en la llama y se quema al mezclarse con el aire circundante, con lo que devuelve algo de calor a fin de mantener el proceso mediante el cual se funde y se evapora la cera.

2.8 Transmisión de la fuerza hidráulica

Es posible utilizar fluidos sometidos a presión con el fin de ejercer fuerzas sobre pistones que mueven los componentes mecánicos de sistemas. Como se puede transmitir la presión del fluido por tubos largos o tuberías, resulta factible inducir la fuerza a distancia desde la fuente del fluido sometido a presión. Por ejemplo, el sistema de frenos hidráulicos de un automóvil acciona los frenos de los cuatro neumáticos cuando el cilindro maestro de frenos somete a presión el fluido de los frenos. Puesto que se aplica la misma presión a todos los cilindros de los frenos, a cada neumático se aplica una fuerza igual que activa los frenos, lo cual proporciona al vehículo un frenado uniforme. En sistemas de este tipo, la presión p es mucho mayor que el producto de ρg multiplicado por la diferencia de altura entre los puntos dentro del sistema de forma que la presión es sustancialmente constante en todo el sistema. El fluido transmite una presión igual a todo el sistema, de la misma manera que un alambre de electricidad transmite un mismo voltaje.

Una de las propiedades que poseen los sistemas hidráulicos de transmisión de fuerzas es que son capaces de amplificar la magnitud de la fuerza que se les aplica, al igual que una palanca mecánica. Se ilustra el principio en la figura 2.12, donde se esquematiza

¹² Adviértase que la presión del fluido en la superficie inferior de la columna es la presión atmosférica, puesto que presenta la misma elevación que la interfaz aire-agua. Por lo tanto, la fuerza de presión atmosférica que actúa sobre la superficie superior de la columna se encuentra equilibrada por la fuerza de presión ejercida sobre la superficie inferior de la columna.

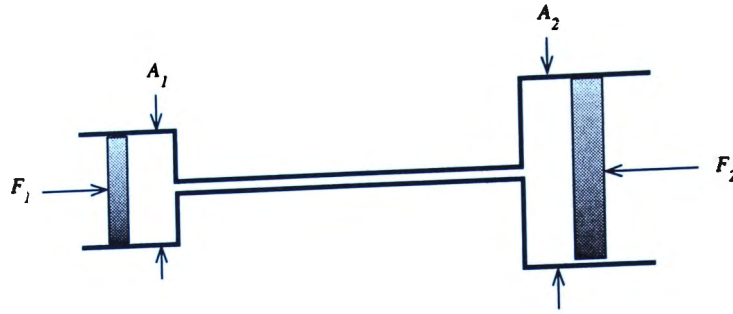


Figura 2.13 Esquema de un sistema, en el que participa un fluido, mediante el cual se aumenta la fuerza F_1 aplicada al pistón 1 a un valor mayor, F_2 , en el pistón 2 que es más grande.

una combinación de dos pistones conectados mediante un tubo que contiene aceite. El pistón más pequeño, de área A_1 , se somete a una fuerza F_1 que ejerce una presión $p_1 = F_1/A_1$ en el fluido que contiene. Si no hay flujo, debe existir una fuerza limitadora F_2 aplicada al pistón 2 de magnitud tal que la presión $p_2 = p_1$. Así,

$$\frac{F_1}{A_1} = p_1 = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) F_1 \quad (2.47)$$

Al hacer $A_2 > A_1$, la fuerza F_1 aplicada ejerce una fuerza mayor F_2 sobre el mecanismo que se pretende mover. Éste es el principio de funcionamiento del gato hidráulico.

La palanca hidráulica de la figura 2.13 no produce más trabajo del que consume si los pistones se mueven. Para un desplazamiento pequeño δx_1 del primer pistón, un volumen $A_1 \delta x_1$ de fluido pasará al segundo pistón, lo que provocará que dicho pistón se desplace una cantidad δx_2 tal que:

$$A_2 \delta x_2 = A_1 \delta x_1$$

Si se combina esta ecuación con la 2.47,

$$F_1 \delta x_1 = F_2 \delta x_2 \quad (2.48)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el pistón 1 es igual al trabajo realizado por el pistón 2, a pesar de que las fuerzas sean de diferente magnitud.

Las relaciones de las ecuaciones 2.47 y 2.48 no dependen de la longitud o volumen de la línea de transmisión que conecta a los dos pistones. Se escoge el diámetro de la línea para mantener una presión uniforme en el sistema si los pistones experimentan algún movimiento. Los sistemas hidráulicos son capaces de transmitir cantidades considerables de energía, pero esa transmisión requiere que el flujo del fluido sea tal que ya no se obtenga la distribución de presión estática y, en tal caso, la dinámica de fluidos puede adquirir importancia.

2.9 Problemas

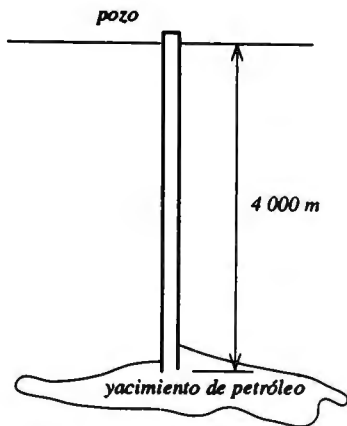


Figura P 2.1

Problema 2.1

Un pozo petrolero que está tapado y perforado a una profundidad h de 4000 m termina en un yacimiento de petróleo que ha llenado completamente el pozo hasta la superficie, donde la presión manométrica p_1 de la carga hidrostática del pozo se mide y se encuentra que es $3E(6)$ Pa. (a) Si el petróleo tiene una densidad $\rho_o = 950 \text{ kg/m}^3$, ¿cuál es la presión manométrica p_2 en el fondo del petróleo? (b) El lodo de perforación es un fluido con una densidad ρ_m que puede ajustarse a cualquier valor mayor que la densidad del agua. A fin de continuar la perforación más allá de los 4000 m, el personal de perforación bombeará el lodo de perforación en el pozo a fin de desplazar el petróleo. Calcule la densidad del lodo necesario si la presión manométrica de la carga hidráulica debe reducirse a cero cuando el pozo esté totalmente lleno de lodo.

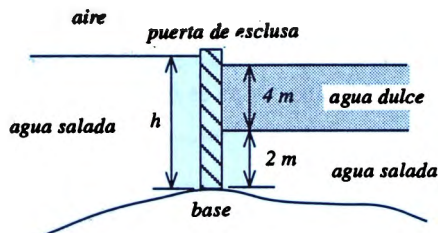


Figura P 2.2

Problema 2.2

Una compuerta separa el agua de la cuenca del Río Charles del agua de mar en el puerto de Boston. Como se ejemplifica en la figura P 2.2, el agua de la cuenca consta de una capa superior de agua dulce con densidad $\rho_f = 1.0E(3) \text{ kg/m}^3$ y a una profundidad de 4 m y una capa inferior de agua salada de densidad $\rho_s = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$. La interfaz de agua salada y dulce está a 2 m por encima de la base de la compuerta. En la parte del puerto, la profundidad h del agua salada, medida por encima del nivel de la base de la compuerta, aumenta y baja con la marea. (a) A cierto nivel h del agua del lado del puerto, la fuerza horizontal total del agua de la cuenca actúa contra la otra parte de la compuerta. Calcule el valor de h para este equilibrio. (b) En esta condición, si hay una fuga en el sello de la compuerta en su base, ¿entrará o se escapará el agua de la cuenca?

Problema 2.3

La densidad ρ del agua de mar aumenta con la presión manométrica p según la relación:

$$\rho = \rho_0(1 + Kp)$$

La densidad ρ_0 al nivel del mar ($p = 0$) es $1.03E(3) \text{ kg/m}^3$, y la constante K de compresibilidad es $5E(-10) \text{ Pa}^{-1}$. (a) Si el agua de mar fuera incompresible ($K = 0$) de suerte que su densidad fuera ρ_0 en cualquier punto, calcule el valor numérico de la presión a una profundidad de 5000 m. (b) Puesto que la densidad del agua de mar aumenta con la presión, la presión en 5000 m será ligeramente mayor que la que se calculó en (a). Obtenga la ecuación diferencial para la presión en el agua de mar, integre y evalúe la integral a fin de encontrar la presión a una profundidad de 5000 m.

Problema 2.4

Si se supone que la Tierra es una esfera de radio $R_E = 6.35E(6) \text{ m}$, calcule la masa M_{at} de la atmósfera terrestre. (Sugerencia: La masa por unidad de área de superficie es $\int_0^\infty \rho dz$.)

Problema 2.5

Se construye un barómetro de agua según la figura 2.4, se utiliza agua en lugar de mercurio. A 20°C , la presión de vapor p_v de agua en la parte superior de la columna del agua es $2.337E(3) \text{ Pa}$ y la densidad del agua es $\rho_w = 9.982E(2) \text{ kg/m}^3$. Calcule la altura h de la columna de agua si la presión atmosférica es $p_a = 1.0133E(5) \text{ Pa}$.

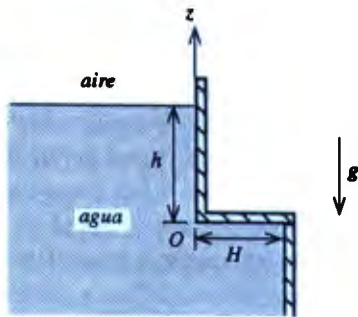


Figura P 2.6

Problema 2.6

Un depósito de agua está cerrado en uno de sus extremos mediante una barrera. En la parte superior de la barrera se encuentra un canal en forma de L que sirve de contención al agua cuando su nivel rebasa la parte superior de la barrera en una cantidad h , según se aprecia en la figura P 2.6. El canal está articulado en el punto O , de forma que es capaz de girar en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, pero no en el sentido en que giran las manecillas del reloj. Si el nivel del agua h es lo suficientemente alto, la fuerza de presión sobre la cara vertical del canal en forma de L conservará un momento en el sentido en que giran las manecillas del reloj que sobrepasará al momento en sentido opuesto producto de la fuerza de presión sobre el tramo horizontal del canal, y éste permanecerá vertical e impedirá que se escape el agua debajo de él. Calcule el valor mínimo de la razón h/H que garantice que el canal no girará.

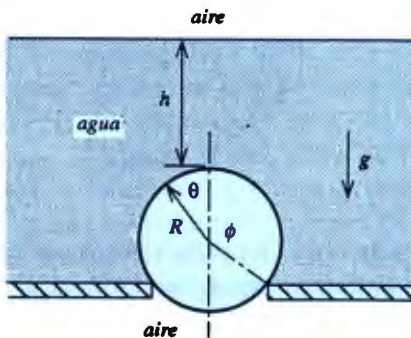


Figura P 2.7

Problema 2.7

La válvula que se encuentra en el fondo del tanque de un inodoro consta de una esfera de radio R y masa despreciable la cual cierra una abertura circular que se encuentra en el fondo del tanque, como se aprecia en la figura P 2.7. La línea de contacto entre la esfera y la abertura forma un ángulo ϕ con la vertical (véase la Fig. P 2.7). La interfaz aire-agua en la parte superior del tanque se encuentra a una distancia h por encima de la esfera.

La presión del agua en la parte superior de la superficie de la esfera mantendrá a ésta en su lugar a menos que la abertura sea demasiado pequeña, v.g., si ϕ es muy cercana a π . (Si $\phi = \pi$, habría una fuerza hacia arriba igual a ρg multiplicada por el volumen de la esfera.)

(a) Deduzca una expresión para la presión manométrica $p\{\theta\}$ en la superficie de la esfera como función del ángulo θ , medido respecto de la vertical, en términos de los parámetros R , h y la densidad del agua ρ . (b) Obtenga una expresión para la fuerza neta F hacia abajo, debida a la presión del agua sobre la esfera, como función del ángulo ϕ . (c) Calcule el valor mínimo de h/R tal que haga que $F \geq 0$ cuando $\phi = 3\pi/4$.

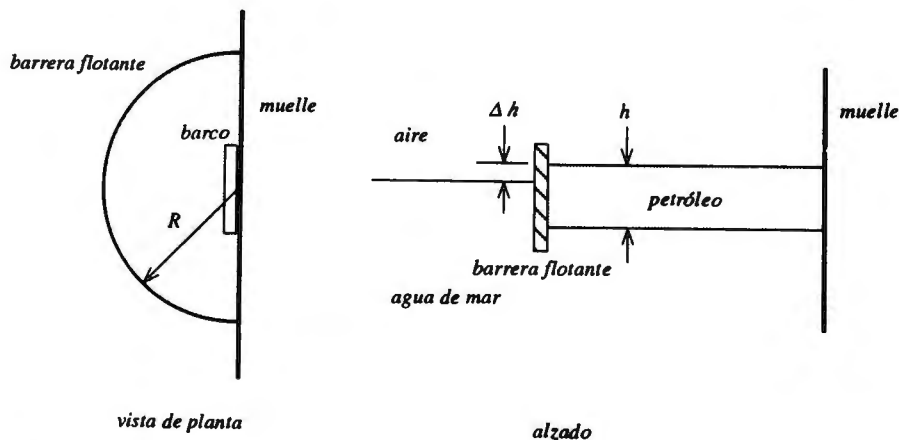


Figura P 2.8

Problema 2.8

En los puertos donde se cargan y descargan los buques petroleros, es probable que se produzcan derrames de petróleo de diversas magnitudes. La densidad ρ_o del petróleo es menor que la del agua de mar, ρ_w y los dos fluidos son inmiscibles de modo que, de ocurrir un derrame de petróleo, el aceite flotará por encima del agua y se difundirá hacia los lados. Para contener cualquier derrame posible y reducir al mínimo la contaminación, se utiliza una barrera flotante semicircular de radio R que se extiende alrededor del muelle donde se efectúa la carga, como se ilustra en la figura P 2.8. La barrera flotante es una barda vertical que flota en el agua, su fondo se sumerge en el agua y su parte superior se eleva por encima de la superficie del agua. Esta barrera impide que se difunda

el petróleo más allá de ella cuando la capa de petróleo no se extiende por encima de la parte superior o por debajo de la parte inferior de la barda flotante.

Suponga que un volumen V de petróleo se derrama dentro de la barrera flotante. Después de un tiempo suficiente para alcanzar el equilibrio hidrostático, una capa de petróleo de espesor h uniforme llenará el interior de la barrera. A causa de la menor densidad del petróleo, éste flotará y su superficie sobrepasará ligeramente la del agua del mar una cantidad Δh , como se observa en la figura P 2.8. Puesto que la capa de petróleo dentro de la barrera es más alta que la superficie del océano que está afuera, habrá una fuerza neta F dirigida hacia afuera por unidad de longitud de la barrera flotante. En términos de las cantidades V , ρ_o , ρ_w y g , derive las expresiones para (a) h , (b) Δh y (c) F . (d) Calcule los valores numéricos de h , Δh y F para el caso de $V = 1.0E(4) \text{ m}^3$, $R = 100 \text{ m}$, $\rho_w = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$ y $\rho_o = 9.5E(2) \text{ kg/m}^3$.

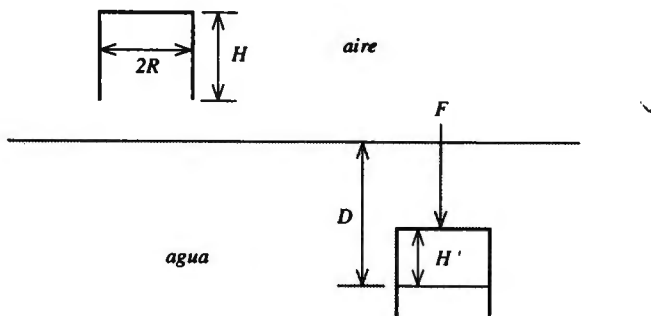


Figura P 2.9

Problema 2.9

Un recipiente cilíndrico de radio R y altura H , abierto por el fondo, se empuja hacia abajo a través de la superficie de un estanque de agua. Al penetrar la superficie, el recipiente atrapa un volumen de aire, $V = \pi R^2 H$, a presión atmosférica p_{at} y densidad ρ_{ai} . Al empujar el recipiente cilíndrico por debajo de la superficie del agua, la altura H' de la columna de aire atrapado disminuye, como se ejemplifica en la figura P 2.9, puesto que ha aumentado la presión del aire. En este proceso, el producto de la presión del aire multiplicado por su volumen, pV , permanece constante.

(a) Si la profundidad de la interfaz aire-agua es D , obtenga las expresiones para la altura H' y la fuerza de presión F que los fluidos ejercen sobre el recipiente en términos de V , H , p_{at} , ρ_{ai} , D y la densidad del agua ρ_w . (Desprecie el volumen del material del cilindro.) (b) Calcule los valores de H' y F si $V = 1.0 \text{ m}^3$, $H = 1.0 \text{ m}$, $p_{at} = 1.0E(5) \text{ Pa}$, $\rho_{ai} = 1.23 \text{ kg/m}^3$, $\rho_w = 1.0E(3) \text{ kg/m}^3$ y $D = 10 \text{ m}$.

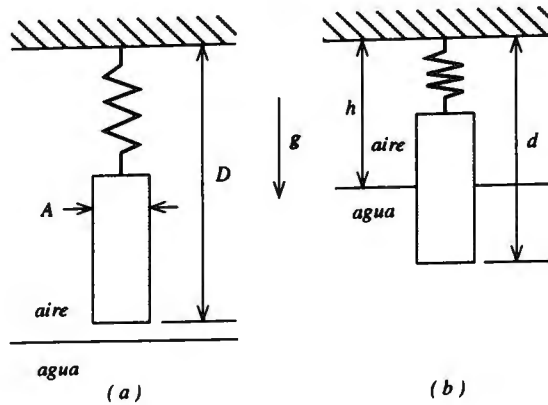


Figura P 2.10

Problema 2.10

En un experimento de laboratorio, un bloque de madera con área A de sección transversal se suspende por encima de un recipiente de agua mediante un resorte lineal con una constante de resorte k , como se ejemplifica en la figura P 2.10(a). La parte inferior del bloque se encuentra a una distancia D por debajo del nivel del punto donde se sostiene el resorte. Cuando el nivel del agua del recipiente se eleva a una distancia h por debajo del punto de sostén, como se aprecia en la figura P 2.10(b), el bloque flota y se eleva a una distancia d por debajo de dicho punto. Expresé la distancia d en términos de los parámetros A , D , k , h y la densidad del agua ρ .

Problema 2.11

Antes del lanzamiento, un globo de gran altura se llena con una masa $M_{He} = 100 \text{ kg}$ de helio cuya presión y temperatura son iguales a las de la atmósfera, $1.033E(5) \text{ Pa}$ y 288.15 K , respectivamente. (a) Calcule la masa máxima del material del globo más su carga de instrumentos científicos que es posible levantar con esta cantidad de helio. (b) El globo asciende a una altura de 11 km , donde la presión atmosférica y la temperatura son $2.263E(4) \text{ Pa}$ y 216.65 K . Si la presión del helio y la temperatura coinciden con las de la atmósfera, calcule la fuerza neta que el material y su carga ejercen sobre el globo a esta altura. (Las constantes de los gases para el helio y el aire son $R_{He} = 2077 \text{ J/kg K}$ y $R_a = 287.0 \text{ J/kg K}$, respectivamente.)

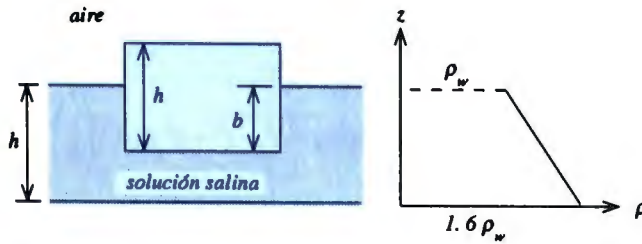


Figura P 2.12

Problema 2.12

En el laboratorio se prepara un tanque que contiene una solución salina de densidad estratificada, cuya profundidad es $h = 0.1 \text{ m}$. La densidad del líquido aumenta linealmente con la profundidad, como lo indica la figura P 2.12, a partir del valor del agua pura (ρ_w) en su superficie y aumenta a un valor de $1.6 \rho_w$ en el fondo del tanque. Un bloque de madera de caras rectangulares con altura $h = 0.1 \text{ m}$ y densidad $\rho_b = 0.5 \rho_w$ se coloca en el tanque. Calcule la profundidad b debajo de la superficie del líquido a la cual la superficie del fondo del bloque se hunde cuando flota en equilibrio.

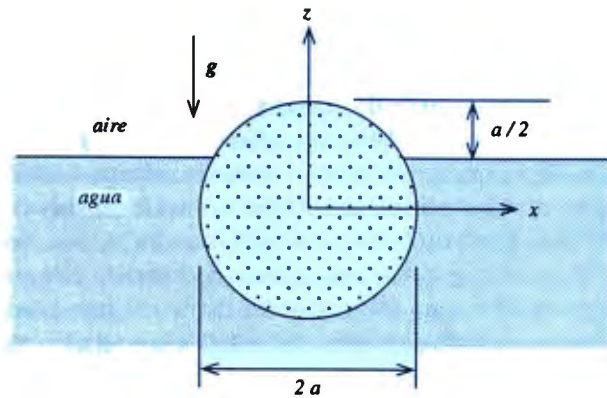


Figura P 2.13

Problema 2.13

De acuerdo con el esquema de la figura P 2.13, un trozo de madera con área de sección transversal circular flota sobre la superficie de un estanque y sobresale una altura

vertical $a/2$ expuesta al aire, donde a es el radio de la madera. (a) Utilice la relación integral:

$$2 \int \sqrt{a^2 - z^2} dz = z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{z}{a} \right)$$

para calcular la densidad relativa del trozo de madera. (b) Demuestre que la madera es neutralmente estable, v.g., $[GM] = 0$.

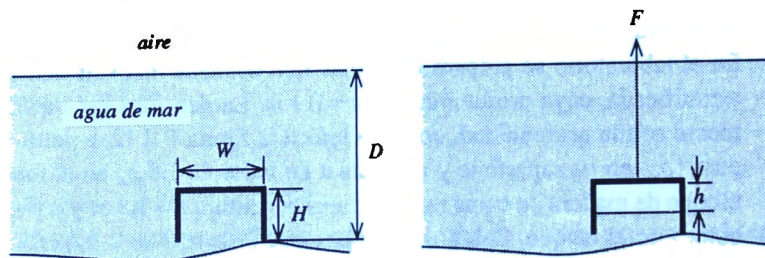


Figura P 2.14

Problema 2.14

Una barcaza se volteó y hundió en el fondo del mar, como lo esquematiza la figura P 2.14. Ésta se encuentra en el fondo del agua a una profundidad $D = 30 \text{ m}$. La barcaza mide $L = 30 \text{ m}$ de longitud, $H = 10 \text{ m}$ de profundidad y $W = 10 \text{ m}$ de anchura y posee una masa M de 300 toneladas métricas (1 tonelada métrica = $1.0E(3) \text{ kg}$). Se pretende utilizar una grúa marina a fin de sacar la barcaza del fondo del mar. Empero, la grúa tiene una capacidad de sólo 100 toneladas métricas. Por lo tanto, se piensa desplazar agua de mar del interior de la barcaza volteada bombeando aire en ella hasta que la fuerza F que se requiere para levantarla del fondo del mar sea igual a la que se necesita para elevar una masa de 100 toneladas métricas en el aire, como se ejemplifica en la figura P 2.14.

(a) Calcule el volumen V_b de agua de mar que debe desplazarse para alcanzar la fuerza F de elevación que se necesita. (Al calcular V_b , desprecie el volumen de agua desplazada por la estructura de acero de la barcaza.) La densidad del agua de mar es $\rho_w = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$. (b) Calcule la presión manométrica p_b del aire sobre la barcaza volteada.

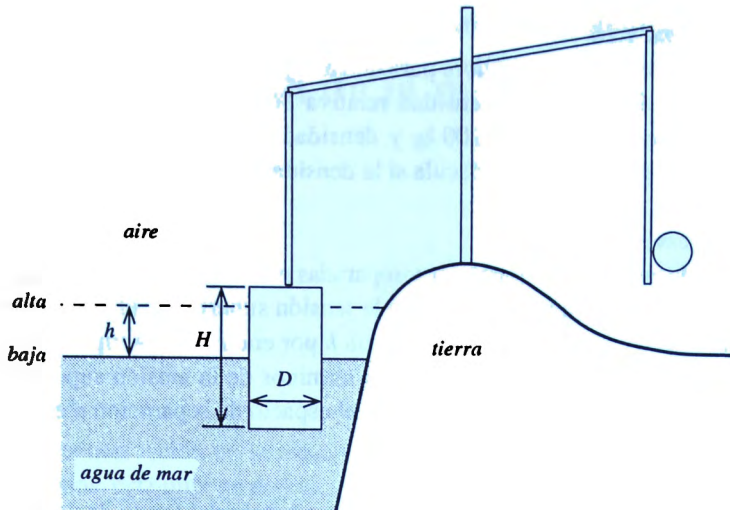


Figura P 2.15

Problema 2.15

Un inventor propone generar energía a partir del movimiento ascendente y descendente de la marea en la superficie del océano uniendo un flotador a un generador eléctrico. El dispositivo se esquematiza en la figura P 2.15, en el cual se observa un tanque cilíndrico de diámetro $D = 20 \text{ m}$ y altura $H = 15 \text{ m}$ unido a una palanca que hace girar el rotor de un generador eléctrico conforme el tanque se eleva y desciende con el movimiento del océano. (La densidad del agua de mar es $\rho = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$.)

El dispositivo funcionará del modo siguiente. Con marea baja, el flotador y la palanca estarán enganchados en su posición de equilibrio, donde la fuerza de empuje del agua está equilibrada por la fuerza de la gravitación que experimenta el flotador (despreciando la fuerza gravitatoria en la palanca), en tanto que el flotador se encuentra sumido a la mitad como revela el esquema. Más tarde, con marea alta, luego de que el mar ha crecido una distancia $h = 5 \text{ m}$, se desenganchará el dispositivo. La fuerza de empuje adicional que actúa sobre el flotador empujará a éste hacia arriba, con lo que se acciona el generador eléctrico y se genera energía eléctrica. Una vez que el flotador se ha elevado una distancia h , la fuerza de empuje adicional habrá regresado a cero, en cuyo caso no se generará más energía eléctrica. En este momento, el aparato quedará inmovilizado hasta que la marea haya regresado a su nivel de marea baja, con lo que se concluirá la segunda mitad del ciclo de generación de energía.

(a) Calcule la fuerza F_0 que el flotador ejerce sobre la palanca en marea alta, precisamente antes de que se libere la palanca. (b) Deduzca una expresión para la fuerza F que el flotador ejerce cuando se ha elevado poco a poco una distancia z desde su posición inicial. Calcule la energía E producida por el generador eléctrico durante el proceso mediante el cual el flotador se eleva una distancia h . (d) Obtenga una expresión para la energía total E producida en un ciclo de marea.

Problema 2.16

Una báscula lineal se calibra para que arroje una lectura de 100 kg al colocar sobre ella un peso de metal con densidad relativa $SG_m = 4$ y volumen $V_m = 2.5E(-2) m^3$. Una persona con masa $M_p = 100 kg$ y densidad relativa $SG_p = 1$ se para sobre la báscula. Calcule la lectura de la báscula si la densidad del aire es $\rho_a = 1.2 kg/m^3$.

Problema 2.17

Dos placas de vidrio paralelas y separadas por una distancia d se colocan verticalmente en un plato con agua. A causa de la tensión superficial, el agua se eleva en el espacio que forman las placas a una distancia h por encima de la superficie del agua del plato. Expresé la altura h de elevación en términos de la tensión superficial Υ , el ángulo de contacto θ , la densidad del agua ρ y el espacio de separación d entre las placas.

Problema 2.18

Se construye un túnel para vehículos por debajo del fondo de un río con secciones con forma de cascarones circulares cilíndricos de acero y diámetro exterior $D = 10 m$. Después de colocar tapas temporales en los extremos, se bajarán las secciones al fondo del río, se conectarán con sellos herméticos al agua y las tapas de los extremos se quitarán a fin de formar un túnel continuo. Para mantener el túnel hueco en el fondo del río, se agregará una capa de concreto de espesor h sobre la parte externa de las secciones de acero del túnel en la cantidad suficiente que permita que la fuerza de gravedad del concreto solo contrarreste exactamente la fuerza de empuje que experimenta el túnel. Si la densidad del concreto es $\rho_c = 2.3E(3) kg/m^3$ y la del agua $\rho_w = 1E(3) kg/m^3$, calcule el espesor h del concreto que se necesita para este túnel.

Bibliografía

Olson, Reuben M. y Steven J. Wright, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*, Nueva York: Harper and Row, 1990.

La conservación de la masa es fundamental para todas las ciencias. En mecánica de fluidos, ésta impone restricciones al movimiento de un fluido. Si se aprieta un globo o un tubo de pasta dental en una de sus partes, otra se abulta. Es necesario expresar esta restricción física, intuitivamente obvia, en términos cuantitativos, matemáticos, si se pretende describir y predecir, en general, el flujo de un fluido. De la aplicación del principio de la conservación de la masa a un problema de flujo de fluidos es posible obtener cierta información, aunque no necesariamente toda, sobre las cosas que se pretende saber sobre el comportamiento de un fluido.

En el presente capítulo, se deducen las expresiones para la conservación de la masa conforme ésta se aplica a los flujos de fluidos. Sin embargo, antes de hacer esto, es preciso comprender las convenciones que se utilizan en la descripción del movimiento de un fluido, que se conoce como cinemática de fluidos.

3.1 Cinemática del flujo de fluidos

La cinemática estudia cómo se mueven las cosas. Por ejemplo, en el motor de un automóvil existe una relación entre el movimiento rotacional del cigüeñal y los movimientos del pistón, la biela, las válvulas, el engranaje de la distribución del encendido, etc. Éstos se relacionan mediante las restricciones que los acoplamientos entre los componentes imponen. En un fluido, no existe una relación equivalente entre los movimientos de las partículas distantes en virtud de que las partículas de los fluidos no se encuentran rígidamente unidas entre sí como sucede con las partes del motor de un automóvil. No obstante, no toda clase de movimiento de un fluido resulta posible, y existen restricciones en el movimiento de un fluido que pueden expresarse en términos de una descripción cinemática del flujo de un fluido.

3.1.1 Descripciones lagrangianas y eulerianas

Al describir el movimiento de un cuerpo rígido, como el de un barco o un avión, se utilizan las tres coordenadas espaciales del centro de masa y las tres coordenadas

angulares de la rotación alrededor del centro de masa para describir la posición y la orientación angular del cuerpo en cada instante. Si se conocen estas seis coordenadas como función del tiempo, es posible encontrar sus derivadas respecto al tiempo para determinar las componentes de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular alrededor de éste. Una derivación más determinará las aceleraciones lineal y angular del cuerpo.¹ Esta forma para la descripción del movimiento de un cuerpo dado de masa finita se conoce como descripción *lagrangiana*.

¿Es posible aplicar a un fluido el mismo método de descripción? Puesto que un fluido no es rígido, aunque se deforma con facilidad, es necesario tomar en consideración el movimiento del fluido relativo al centro de masa, movimiento que no se trata, claro está, de una simple rotación como sucede con un cuerpo rígido. Una posible forma de superar esta dificultad consiste en subdividir el fluido en un número muy grande, N , de partículas materiales individuales y luego aplicar la descripción lagrangiana para cada una de estas N partículas. Huelga decir, que esto impone grandes dificultades, a excepción de unos cuantos flujos simples.

La solución a este dilema consiste en abandonar el requisito de seguir el destino de cada una de las partículas del fluido y concentrarse en la velocidad \mathbf{V} de la partícula del fluido, que ocupa un punto en el espacio \mathbf{R} al tiempo t . Una descripción *euleriana* del campo del flujo comprende la especificación de la velocidad \mathbf{V} como función de la posición \mathbf{R} y el tiempo t :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} \{ \mathbf{R}, t \}$$

Al derivar apropiadamente con respecto al tiempo, es posible encontrar la aceleración de la partícula del fluido en cualquier posición \mathbf{R} y para cualquier tiempo t y, de ser necesario, el desplazamiento de la partícula desde su posición correspondiente a un tiempo anterior por integración.

En la descripción euleriana del movimiento de un fluido, otras variables físicas de interés, como la presión p y la densidad ρ , se consideran también como funciones de la posición \mathbf{R} y el tiempo t . Desde el punto de vista matemático, \mathbf{V} , p , ρ , etc., se consideran como variables dependientes del flujo, las cuales son funciones de las variables independientes \mathbf{R} y t .² A esta descripción general se le llama descripción de campo y las variables dependientes se conocen como variables de campo. Por lo tanto, se emplean términos como los de campo de velocidad y campo de presión para reflejar que la velocidad y la presión dependen de las variables independientes \mathbf{R} y t .

En este texto, se utilizan dos sistemas de coordenadas en la descripción del vector de posición \mathbf{R} , las coordenadas cartesianas y las cilíndricas:

$$\mathbf{R} \equiv x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z = r\mathbf{i}_r + z\mathbf{i}_z$$

¹ Las ecuaciones de movimiento del cuerpo se obtienen al igualar, mediante una ecuación, la aceleración lineal y angular por la masa y el momento de inercia de la masa con la suma de las fuerzas y sus momentos alrededor del centro de masa, respectivamente.

² \mathbf{R} tiene tres dimensiones espaciales, por lo que hay cuatro variables escalares independientes, v.g., x , y , z y t . El número de las variables dependientes incluye todas las propiedades físicas de interés.

En el sistema de coordenadas cilíndricas, la dirección de los vectores unitarios \mathbf{i}_r e \mathbf{i}_θ son funciones de la coordenada angular θ , en tanto que \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y e \mathbf{i}_z poseen direcciones fijas. Por lo tanto, de modo implícito, \mathbf{R} es función de θ , así como explícitamente lo es de r y z . Además, al efectuar la derivación de los vectores expresados en coordenadas cilíndricas, los vectores unitarios \mathbf{i}_r e \mathbf{i}_θ tienen derivadas distintas de cero:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_r) = \mathbf{i}_\theta; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_\theta) = -\mathbf{i}_r$$

En general, se utilizarán coordenadas cartesianas para describir los flujos de fluidos, a excepción de aquellos casos donde la simetría axial del flujo hace más conveniente el uso de coordenadas cilíndricas.

En la sección 1.4.2 se repasaron las derivadas espaciales de campos vectoriales y escalares, expresadas en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

Ejemplo 3.1

Un fluido se mueve sólo en la dirección x de modo que su velocidad $\mathbf{V} = u\mathbf{i}_x$. La descripción lagrangiana del flujo proporciona la posición x de la partícula del fluido, que al tiempo t_0 se encontraba en x_0 , como sigue:³

$$x = \frac{x_0}{t_0} t$$

siempre y cuando $t \geq t_0 \geq 0$. Obtenga la descripción euleriana de este flujo, $u(x, t)$.

Solución

La velocidad u de la partícula del fluido que se encuentra localizada en x_0 al tiempo t_0 se encuentra al derivar x con respecto a t :

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{x_0}{t_0} \end{aligned}$$

Pero para cualquier x, t ,

$$\frac{x_0}{t_0} = \frac{x}{t}$$

³ Éste es el análogo unidimensional no relativista del modelo del *big bang* del universo en expansión. A modo de ejercicio, demuéstrese que la rapidez relativa de una partícula de fluido a una distancia d de la partícula, sobre la cual se localiza un observador, depende de d y t , pero no de la posición x del observador.

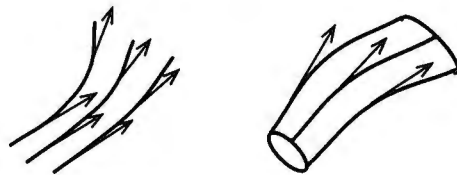


Figura 3.1 Líneas de corriente, *izquierda*, y un tubo de corriente, *derecha*, en un campo de flujo.

Por lo tanto,

$$u(x, t) = \frac{x}{t}$$

3.1.2 Líneas y trayectorias de corriente

En el lenguaje coloquial, la palabra línea de corriente connota un flujo suave, como si estuviera en un cuerpo de corriente lineal. En la mecánica de fluidos, las líneas de corriente tienen un significado preciso. Una *línea de corriente* es una línea en un campo de flujo tangente en todo lugar al vector velocidad \mathbf{V} en cada punto a lo largo de la línea de corriente para cualquier instante de tiempo t (véase la figura 3.1). Es posible pensar que el campo de fluido está lleno de líneas de corriente, de la misma forma que una olla llena de espaguetis cocidos. Al igual que los espaguetis, las líneas de corriente nunca se intersecan entre sí puesto que, en cualquier punto, sólo puede haber una dirección de la velocidad. Más tarde, se enseñará cómo calcular las líneas de corriente en el caso de algunos flujos multidimensionales. Para el flujo simple del ejemplo 3.1, las líneas de corriente son líneas rectas paralelas al eje x .

Un *tubo de corriente* es una superficie que forma parte del flujo formada por líneas de corriente y cerrada que da lugar a un tubo con área de sección transversal variable, como se ejemplifica en la figura 3.1. El uso del tubo de corriente es, en primera instancia, conceptual y ayuda a visualizar mentalmente cómo puede subdividirse un campo de flujo en tubos de corriente que llenen por completo un campo de flujo. Puesto que el fluido no atraviesa la superficie del tubo de corriente, es posible concebir los tubos de corriente como si se tratara de tubos flexibles, móviles, con un flujo en su interior.

Tanto las líneas de corriente como los tubos de corriente son fotografías instantáneas de líneas y superficies en un campo de flujo. Al transcurrir el tiempo, estas líneas y superficies pasarán a lugares espaciales distintos a menos que el flujo sea estacionario, *v.g.*, que no dependa del tiempo. En un flujo estacionario, cualquier fotografía instantánea del flujo es idéntica a las demás y las líneas de corriente y las superficies de corriente permanecen fijas en el espacio.

Una línea que resulta de utilidad en la definición de la descripción lagrangiana de un campo de flujo es la *trayectoria de corriente*, que es el camino o trayectoria que recorre en tiempos posteriores una partícula dada, identificada en un tiempo y ubicación iniciales. Es posible observar la trayectoria de corriente en un experimento si se marca

el fluido con polvos de pigmento o humo y se toma una fotografía con exposición por un tiempo determinado del fluido que se marcó. (Una analogía común es la trayectoria de la luz que emiten los faros de un automóvil, misma que puede observarse en una fotografía tomada durante la noche con una exposición por un tiempo determinado.) La trayectoria de corriente es aquella que recorre una sola partícula de fluido.

Si el flujo es estacionario, entonces una línea de corriente y una trayectoria que pasan a través del mismo punto en el espacio son idénticas ya que el campo de velocidad depende de la posición y no del tiempo. Experimentalmente, esto resulta conveniente si se pretende observar las líneas de corriente de un flujo estacionario, puesto que el conjunto de las trayectorias de corriente que una corriente estacionaria de pigmento o humo forma (v.g., una serie poco espaciada de polvos) sigue la misma trayectoria que la línea de corriente en todo el espacio. Aun en los flujos no estacionarios, el uso de marcadores con pigmentos o humo puede resultar de utilidad si se desea visualizar el comportamiento del flujo, a pesar del hecho de que el fluido marcado no es una línea de corriente ni una trayectoria de la corriente.

3.1.3 La derivada material

Las formas normales de la ley del movimiento de Newton y de las leyes de la termodinámica se aplican a una masa fija de materia cuyas propiedades cambian con el transcurso del tiempo. El modo natural de expresar estas leyes es mediante la descripción lagrangiana del movimiento puesto que ésta describe en forma directa la historia de una partícula dada. Puesto que aquí se utiliza la descripción euleriana de un fluido en movimiento, se necesita establecer la expresión euleriana de la rapidez o razón de cambio de cualquier propiedad para la partícula de un fluido que se mueve en un campo de flujo. La rapidez o razón de cambio con respecto al tiempo de una propiedad de la partícula de fluido, medida por un observador que se mueve con ella, se conoce como *derivada material* de esa propiedad.

Como ejemplo, considérese la rapidez de cambio de la densidad ρ de una partícula de fluido que se encuentra ubicada en la posición \mathbf{R} al tiempo t . Durante el intervalo de tiempo dt , la partícula de fluido se mueve una distancia $d\mathbf{R} = \mathbf{V} dt$. El incremento total $d\rho$ de la densidad es igual a la suma de la parte debida al incremento de tiempo dt y de la debida al incremento espacial $d\mathbf{R}$. Si se usan coordenadas cartesianas para expresar la cantidad $d\rho$,

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \frac{\partial\rho}{\partial x} dx + \frac{\partial\rho}{\partial y} dy + \frac{\partial\rho}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial\rho}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial\rho}{\partial z} \mathbf{i}_z \right) \cdot (\mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz) \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \nabla\rho \cdot d\mathbf{R} = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + d\mathbf{R} \cdot \nabla\rho \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \mathbf{V} dt \cdot \nabla\rho \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\rho \right) dt \end{aligned}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \rho \quad (3.1)$$

Con el propósito de hacer hincapié en que la derivada material respecto al tiempo incluye las derivadas parciales tanto espacial como temporal, y que no se trata sólo de la derivada parcial con respecto al tiempo, se denotará dicha derivada material mediante D/Dt :

$$\frac{D}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \quad (3.2)$$

Adviértase que D/Dt es un operador escalar por lo que la derivada material de una variable escalar, como la densidad ρ , por ejemplo, es una cantidad escalar:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho \quad (3.3)$$

Es posible expresar la ecuación 3.3 en términos de las coordenadas cartesianas como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left[(u\mathbf{i}_x + v\mathbf{i}_y + w\mathbf{i}_z) \cdot \left(\mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \rho \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

y en términos de las coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left[(V_r\mathbf{i}_r + V_\theta\mathbf{i}_\theta + V_z\mathbf{i}_z) \cdot \left(\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \rho \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + V_r \frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial\rho}{\partial\theta} + V_z \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Las expresiones para la derivada material de una propiedad vectorial, como la velocidad \mathbf{V} , se tratará en la sección 4.2.

Ejemplo 3.2

Un campo de velocidad y un campo de densidad en el espacio cartesiano está dado por:

$$\mathbf{V} = \frac{L}{t} \mathbf{i}_x$$

$$\rho = Kt e^{-s/L}$$

donde L y K son constantes con dimensiones de longitud y densidad divididas entre el tiempo, respectivamente. Encuentre la derivada material de la densidad ρ .

Solución

Al sustituir en la ecuación 3.3,

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} (Kte^{-x/L}) + \frac{L}{t} \frac{\partial}{\partial x} (Kte^{-x/L}) \\ &= Ke^{-x/L} + \frac{L}{t} \left(\frac{-Kt}{L} e^{-x/L} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

En este ejemplo, la densidad de una partícula de fluido determinada no cambia con el tiempo, aun cuando la densidad del fluido en un punto dado aumente linealmente con el tiempo.

3.1.4 Clasificaciones cinemáticas de un flujo

Se ha visto que las variables de interés (v.g., V , p , ρ , etc.) de un flujo dependen, en general, de cuatro variables escalares independientes, las tres componentes de \mathbf{R} y t . Sin embargo, en muchos casos, las variables de un flujo dependen sólo de algunas de estas cuatro variables y no de las restantes. Esos flujos son mucho más sencillos de tratar desde el punto de vista tanto analítico como del numérico puesto que se necesita menos información para describir todo lo que se requiere saber sobre el flujo. Se usan nombres especiales para los flujos que presentan esta simplificadora dependencia en el espacio y el tiempo.

Los flujos *estacionarios* son aquéllos para los cuales no hay variación con respecto al tiempo de las variables del flujo. Al sentarse en un automóvil que viaja con velocidad constante a lo largo de una carretera no transitada, el flujo del aire en relación con el conductor y el vehículo es un flujo estacionario. La derivada parcial con respecto al tiempo de cualquier variable del flujo es cero, y estas variables sólo dependen de la distancia \mathbf{R} medida a partir de un punto fijo en el vehículo. Por otra parte, si se acelerara el vehículo o si estuviera a punto de cruzarse con otro vehículo de la carretera, entonces el flujo que el ocupante del vehículo observaría sería *no estacionario*.

Algunas veces, es posible describir un flujo no estacionario como si se tratara de uno estacionario si se elige un sistema de referencia apropiado. El flujo que un peatón observa en un punto de una carretera por el que pasa un camión que se desplaza con rapidez constante es un flujo no estacionario, si bien el mismo flujo observado por un pasajero que viaja en el camión es flujo estacionario.

Un flujo *cuasiestacionario* es aquél para el cual el cambio con respecto al tiempo es tan pequeño que puede despreciarse al describir el flujo en un tiempo particular. Por ejemplo, si un vehículo acelera de 0 a 60 *mph* en varios minutos, el flujo alrededor del vehículo cuando alcanza los 30 *mph* es indistinguible del flujo que existe cuando el vehículo se mueve de manera uniforme a esa rapidez. Sin embargo, antes de poder desechar el carácter no estacionario de un flujo, es preciso demostrar que sus efectos son suficientemente pequeños como para despreciarse.

Ejemplo 3.3

Un automóvil con longitud $L = 4 \text{ m}$ acelera de manera uniforme de 0 a 100 m/s durante un periodo de T segundos. Se sugiere que la diferencia entre la resistencia al avance del vehículo que se presenta durante el periodo de aceleración y la de un vehículo con rapidez constante que se desplaza con la rapidez instantánea correspondiente al periodo de aceleración es despreciable. ¿Cuánto debe durar el intervalo de tiempo T a fin de que esta sugerencia resulte aceptable?

Solución

El flujo que rodea al automóvil puede considerarse estacionario si el término de la derivada respecto del tiempo de la ecuación 3.3 es mucho menor que la derivada espacial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ll (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho$$

Es posible estimar la magnitud de estos términos al utilizar las escalas de tiempo y longitud T y L :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \simeq \frac{\rho}{T}$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho \simeq \frac{V\rho}{L}$$

Al insertar esos valores aproximados en la desigualdad requerida:

$$\frac{\rho}{T} \ll \frac{V\rho}{L}$$

$$T \gg \frac{L}{V}$$

La rapidez promedio durante el periodo de aceleración es de 50 m/s , por lo que un periodo T mucho mayor que $4/50 \simeq 0.1$ segundos, de 10 segundos por ejemplo, sería aceptable. Además, resulta evidente que el término no estacionario no es despreciable al arrancar, cuando $V = 0$. Sin embargo, la resistencia al avance es tan pequeña cuando la rapidez es baja que no necesita estimarse de modo preciso a bajas velocidades en el análisis de la dinámica de vehículos acelerados.

El número de las variables espaciales de las cuales dependen todas las variables de un flujo se conoce como *dimensionalidad* del flujo. En un flujo *unidimensional*, por ejemplo, las variables pueden depender sólo de x , de modo que las derivadas parciales con respecto a y y z serían cero. El flujo *bidimensional* que no depende de la variable acimutal θ en coordenadas cilíndricas, sino sólo de las coordenadas radial y axial r y z , se conoce como flujo *de simetría axial*.

Un flujo *cuasiunidimensional* es aquel que depende de dos variables espaciales, aunque la dependencia en una de ellas es tan pequeña que puede despreciarse al describir los cambios que experimenta el flujo en la dirección de la otra dimensión. Como ejemplo de un flujo cuasiunidimensional se tiene el de un fluido en una tubería circular cuyo diámetro varía sólo de manera gradual con la distancia a lo largo del tubo, de modo que las derivadas con respecto a la distancia axial z son mucho menores que las derivadas con respecto a la distancia radial r .

La *direccionalidad* del flujo se refiere al número de componentes, diferentes de cero, del vector velocidad V . Por ejemplo, un fluido que fluye de modo estacionario por una tubería larga y con una velocidad paralela al eje del tubo en todo lugar se conoce como flujo *unidireccional*. Un flujo *bidireccional* posee componentes de la velocidad en dos direcciones y se conoce como *flujo plano* puesto que el vector velocidad se encuentra sobre el plano formado por las dos direcciones.

3.2 Volúmenes y superficies de control

Al deducir el principio de Arquímedes, se apeló al concepto de superficie cerrada dentro de un fluido que encerraba el volumen desplazado por un cuerpo sumergido o flotante. En hidrostática, esos volúmenes carecen de movimiento y las superficies que los encierran son insensibles al movimiento del fluido. Podría decirse que el volumen y la superficie que lo encierra están “congelados” en el fluido. Se encuentra la fuerza total que actúa sobre el fluido en el volumen al considerar el fluido como un cuerpo rígido que llena el volumen.

Se encontrará que el concepto mediante el cual se define a un volumen de fluido en un campo de flujo, rodeado por una superficie imaginaria que lo encierra, resulta útil en extremo en la mecánica de fluidos. A ese volumen se le llama *volumen de control* y a la superficie que lo encierra *superficie de control*. En este libro sólo se emplearán los volúmenes de control y sus superficies, las cuales son fijas en el marco de referencia del campo de flujo.⁴ Los volúmenes de control fijos en el espacio son los que se eligen, de modo natural, en la descripción euleriana de un flujo.

Los volúmenes y superficies de control pueden ser de mucha utilidad al momento de aplicar las leyes de la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía a los fluidos. En muchas aplicaciones, existe información incompleta sobre todo el campo de flujo, pero una información suficiente sobre el flujo del fluido en una superficie de control permite encontrar las fuerzas y momentos totales que actúan sobre las estructuras y las cantidades de calor y trabajo correspondientes, así como otra información útil. Las expresiones de las leyes físicas que gobiernan el flujo de un fluido, en la forma integral, se valen de volúmenes y superficies de control.

⁴ En tanto que es posible utilizar volúmenes de control que se deforman y/o se mueven con respecto al marco de referencia del campo de flujo, su aplicabilidad se encuentra limitada y las expresiones de las leyes de conservación son diferentes de las que se dan en este libro (véase F. M. White, *Fluid Mechanics*, 2a. ed. [Nueva York: McGraw-Hill Book Co.] 1986).

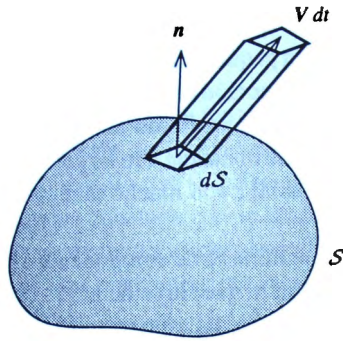


Figura 3.2 El volumen de fluido que atraviesa hacia afuera por un elemento dS de una superficie de control durante el intervalo de tiempo dt es $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dt dS$, donde \mathbf{n} es la normal unitaria a la superficie S que apunta hacia afuera del volumen de control.

3.2.1 Flujo a través de una superficie de control

Una superficie de control es una superficie imaginaria, fija en el marco de referencia del flujo, la cual se elige por resultar conveniente en el análisis de un campo de flujo. Ésta puede coincidir, en parte o por completo, con una frontera sólida real del flujo pero, en general, el fluido fluirá a través de esta superficie imaginaria de control. ¿Cuán rápido fluye el fluido a través de la superficie de control?

Ahora se calculará la cantidad de fluido que atraviesa por un elemento pequeño de área dS de una superficie de control en un intervalo de tiempo dt . En la figura 3.2 se aprecia la normal unitaria \mathbf{n} que apunta hacia afuera del elemento de superficie dS correspondiente a la superficie de control S que rodea al volumen de control \mathcal{V} . Este fluido se localiza en el elemento de superficie dS al principio del intervalo de tiempo dt y se mueve una distancia $\mathbf{V}dt$ durante este intervalo de tiempo. Este fluido en movimiento barre un volumen cuya forma es la de un cilindro con área dS en su base y altura inclinada $\mathbf{V}dt$, volumen lleno con un fluido que ha pasado a través del elemento de superficie dS en el intervalo de tiempo dt . El volumen del cilindro es el producto del área dS de la base por la componente de la altura inclinada en la dirección de \mathbf{n} , $\mathbf{V}dt \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dt$, lo que da un volumen $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dt dS$. El *gasto volumétrico*, v.g., el volumen de fluido por unidad de tiempo que fluye a través de la superficie de control, se denota por Q :

$$dQ \equiv \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$Q \equiv \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.6)$$

El gasto volumétrico por unidad de área de la superficie de control es $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$.

Ejemplo 3.4

Un fluido estacionario fluye en una tubería circular de radio a con una velocidad \mathbf{V} paralela en todo lugar al eje de la tubería (eje z), y alcanza su valor máximo U en el centro, en tanto que es cero en la pared de la tubería:

$$\mathbf{V} = U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \mathbf{i}_z$$

donde r es la distancia radial desde el eje de la tubería. Obtenga una expresión para el gasto volumétrico Q en la tubería.

Solución

Si se utiliza la ecuación 3.6 y se elige el elemento de superficie dS de modo que sea $2\pi r dr$, Q se transforma en:

$$\begin{aligned} Q &= \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_0^a U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) (2\pi r) dr \\ &= 2\pi U \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{2} U (\pi a^2) \end{aligned}$$

$U/2$ es la velocidad promedio en volumen, v.g., la velocidad que, al multiplicarla por el área πa^2 del flujo, es igual al gasto volumétrico Q .

El gasto volumétrico es una medida común que se utiliza en el manejo de fluidos. Las bombas para líquidos se especifican, por lo general, en galones por minuto (GPM) y los ventiladores en pies cúbicos por minuto (pcm). En tanto que el gasto volumétrico puede ser de utilidad en las aplicaciones prácticas, no basta para expresar las leyes que gobiernan el flujo de fluidos. En su lugar, se concentra la atención en la masa de una muestra de fluido o en otras propiedades físicas proporcionales a la masa, como la cantidad de movimiento o energía, cuando se pretende describir las cantidades que intervienen en la expresión de dichas leyes.

La primera restricción de un flujo que se abordará es la conservación de la masa. Para expresar esta ley de conservación, es necesario determinar la rapidez con la que una masa de fluido atraviesa una superficie de control. Como se encontró con anterioridad, y según se ejemplificó en la figura 3.2, el volumen de un fluido que atraviesa un elemento de superficie dS en un tiempo dt es $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS dt$. Puesto que la masa por unidad

de volumen es ρ , la masa del fluido en este volumen es $\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS dt$. El *gasto másico* a través de la superficie de control se denota por m :

$$\begin{aligned} d\dot{m} &\equiv \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ \dot{m} &\equiv \iint \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

Adviértase que $\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ es el gasto másico por unidad de área de la superficie de control. También, hay que notar que si la densidad ρ del fluido es la misma en todos los puntos de la superficie de control, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \iint \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \rho \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \rho Q \quad (\rho = \text{constante}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 Conservación de la masa

3.3.1 Forma integral de la conservación de la masa

La conservación de la masa en el flujo de un fluido exige que la acumulación de masa dentro del volumen de control quede justificada por el flujo neto de masa que atraviesa la superficie de control pues no es posible crear o destruir la masa dentro del volumen de control. Este caso es análogo al balance de una cuenta bancaria: el aumento en el valor del capital es igual a los depósitos más los pagos de intereses menos los retiros sumados a los cargos por el servicio. El flujo que entra en el volumen de control es equivalente a un “abono”, en tanto que el flujo que sale de ese volumen es un “cargo” hecho en la cuenta de masa.

Considérese el flujo que pasa por un volumen de control durante un intervalo pequeño de tiempo dt . El flujo neto de masa que sale del volumen de control durante este intervalo de tiempo sería el gasto másico por el incremento de tiempo, $\dot{m} dt = (\iint \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS) dt$. El incremento de masa dentro del volumen de control, $d(\iiint \rho dV)$, debe ser igual al negativo del flujo de masa que sale de dicho volumen:

$$d\left(\iiint_V \rho dV\right) = -\left(\iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS\right) dt$$

Al dividir entre el incremento de tiempo dt , se obtiene una expresión para la rapidez de aumento respecto al tiempo de la masa en el interior del volumen de control:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.9)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la masa aplicada a un volumen fijo de control, es decir, que *la rapidez de acumulación de masa dentro del volumen de control más la rapidez neta de flujo de masa que sale a través de la superficie de control es cero*.

Esta ecuación de conservación de la masa es una ecuación escalar y no basta por sí misma en la determinación del campo de velocidad \mathbf{V} . También se requiere información adicional, en la forma de una ecuación de movimiento.⁵ Sin embargo, la conservación de la masa impone algunas restricciones sobre cómo debe comportarse el campo de velocidad. Por ejemplo, si el volumen de control \mathcal{V} siempre está lleno de fluido con una densidad ρ fija, entonces el primer término de la ecuación 3.9 es cero, así como el segundo término, de modo que la velocidad \mathbf{V} no puede tener sólo una componente hacia afuera (o hacia adentro) en cualquier punto de la superficie de control \mathcal{S} . Algunas veces la ecuación de la conservación de la masa para un fluido se conoce como *ecuación de continuidad* en reconocimiento de la restricción que dicha ecuación impone al campo de velocidad.

En muchas aplicaciones de ingeniería, puede resultar más sencillo aplicar la ecuación 3.9 al considerar las porciones del flujo de entrada y del flujo de salida correspondientes al flujo de masa que atraviesa la superficie de control como aspectos separados, \dot{m}_{ent} y \dot{m}_{sal} , respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \dot{m}_{sal} - \dot{m}_{ent} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} &= \dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde los gastos máscicos del flujo de entrada y del flujo de salida \dot{m}_{ent} y \dot{m}_{sal} son las *magnitudes* de $\iint \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ sumadas sobre todas las corrientes del flujo de entrada y del flujo de salida, respectivamente.

En el caso de un proceso de flujo que empieza en un tiempo inicial t_i y concluye en un tiempo final t_f , se puede integrar la ecuación 3.10 respecto del tiempo desde t_i hasta t_f para obtener:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho\{t_f\} d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \rho\{t_i\} d\mathcal{V} = \int_{t_i}^{t_f} [\dot{m}_{ent}\{t\} - \dot{m}_{sal}\{t\}] dt \quad (3.11)$$

Por lo que la diferencia entre las masas final e inicial, dentro del volumen de control, es igual a la diferencia entre las masas totales del flujo de entrada y el de salida durante el intervalo de tiempo dado.

⁵ En el caso de flujos compresibles, debe utilizarse también una ecuación de la conservación de la energía.

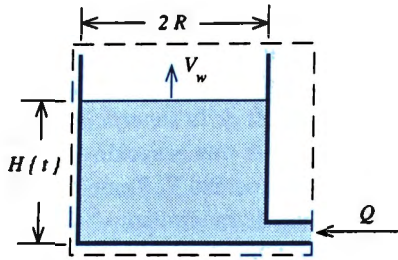


Figura E 3.5

Ejemplo 3.5

Un tanque cilíndrico de radio $R = 1 \text{ m}$ se llena con agua con una bomba. El eje del tanque es vertical, como se presenta en la figura E 3.5, y se observa que el nivel del agua en el tanque está aumentando a razón de $V_w = 1 \text{ mm/s}$. Calcule el gasto volumétrico Q del agua por la bomba.

Solución

Elija un volumen de control que encierre el tanque, como se ejemplifica en la figura E 3.5 mediante la línea punteada. Si se denota la altura del tanque mediante $H(t)$, la masa de agua en el tanque es $\rho_w(\pi R^2 H(t))$, y la conservación de la masa, ecuación 3.10, requiere que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = \dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal}$$

$$\frac{d}{dt} [\rho_w(\pi R^2 H(t))] = \rho_w Q$$

$$\pi R^2 \frac{dH(t)}{dt} = Q$$

$$\begin{aligned} Q &= \pi R^2 V_w \\ &= \pi \times 1.0 \text{ m}^2 \times 1.0 \text{ E}(-3) \text{ m/s} \\ &= 3.142 \text{ E}(-3) \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Adviértase que se aplicó la conservación de la masa sólo al agua en el tanque y no se incluyó el aire almacenado en la parte superior del tanque ni su flujo al salir por la superficie de control.

En los problemas de ingeniería, es muy frecuente la elección de una superficie de control que pase a través de un ducto o tubería normal a su eje. Si la densidad y velocidad son las mismas en todos los puntos dentro del ducto, la magnitud del gasto másico \dot{m} es el producto de la densidad ρ por la velocidad V por el área A de sección transversal del ducto o tubería:

$$|\dot{m}| = \rho VA \quad (3.12)$$

Por otra parte, donde la velocidad \mathbf{V} no es normal a la superficie de control, debe utilizarse la componente normal de la velocidad, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, para calcular el gasto másico.

Ejemplo 3.6

Un camión de bomberos abastece una manguera contra incendio con un gasto volumétrico de agua Q de 1000 galones por minuto. La boquilla de salida de la manguera contra incendio tiene un diámetro D de 2 in. Determine la velocidad V del agua que sale de la boquilla.

Solución

Puesto que el flujo es estacionario, el flujo de masa que sale de la boquilla es igual al flujo de masa que entra a la boquilla:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{sal} &= \dot{m}_{ent} \\ \rho V \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) &= \rho Q \\ V &= \frac{4Q}{\pi D^2} \\ &= \frac{4(1.0E(3) \text{ gal/min})(3.785E(-3) \text{ m}^3/\text{gal})(\text{min}/60 \text{ s})}{\pi(2 \text{ in})(2.54E(-2) \text{ m/in})} \\ &= 31.12 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Se utilizó la tabla 1.6 para convertir los galones a metros cúbicos.

3.3.2 Forma diferencial de la conservación de la masa

La ecuación de la conservación de la masa se obtuvo al aplicar el principio de conservación de la masa a un fluido encerrado en un volumen de control de dimensión finita. Si se reduce el volumen de control al tamaño de un elemento diferencial de

volumen $dV = dx dy dz$, la ley de la conservación de la masa se convierte en una ecuación diferencial. Para deducir la forma de esta ecuación, la ecuación 3.9 se reescribe como sigue:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

al poner la derivada respecto al tiempo dentro de la integral de volumen.⁶ Ahora, se aplica el teorema de la divergencia, ecuación 1.44, a la integral de superficie, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dV &= 0 \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que esto se cumple para todos los volúmenes de control, el integrando debe ser idéntico a cero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.13)$$

La ecuación diferencial de la conservación de la masa (la que también se conoce como ecuación de continuidad), ecuación 3.13, expresa la misma restricción física que la forma integral, ecuación 3.9. El primer término es la rapidez de acumulación de la masa por unidad de volumen de un elemento infinitesimal de fluido y la segunda es su gasto másico neto por unidad de volumen. En coordenadas cartesianas, la ecuación 3.13 posee la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (3.14)$$

en tanto que en coordenadas cilíndricas su forma es (véase la ecuación 1.53):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad (3.15)$$

Ejemplo 3.7

El flujo del fluido del ejemplo 3.1 tiene un campo de velocidad $\mathbf{V} = (x/t) \mathbf{i}_x$. Si se supone que la densidad sólo depende del tiempo, encuentre $\rho \{t\}$.

⁶ Puesto que el volumen de control está fijo en el espacio, los límites de integración no son funciones del tiempo, por lo que la derivación respecto al tiempo puede incluirse en el integrando.

Solución

Puesto que la velocidad sólo tiene una componente, en la dirección x , la ecuación 3.13 de la conservación de la masa se convierte en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{x}{t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{t} + \frac{x}{t} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Si ρ no depende de x , el tercer término es cero y:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{t} = 0$$

$$\rho dt + t d\rho = 0$$

$$\rho t = \text{constante}$$

La densidad decrece en proporción inversa al tiempo en virtud de que las partículas del fluido se estiran en la dirección x proporcionalmente al tiempo.

3.3.3 Flujo incompresible

La ecuación 3.13 de la conservación de la masa puede reescribirse de otra forma si se desarrolla el término de la divergencia aplicando la ecuación 1.38:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.16)$$

donde se ha utilizado la ecuación 3.3 para identificar la derivada material de ρ .

Un *flujo incompresible* es aquél para el cual la rapidez o razón de cambio de la densidad de una partícula de fluido, $D\rho/Dt$, es despreciable comparada con los términos de las componentes de $\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$. En coordenadas cartesianas, esta condición se puede escribir así:

$$\left| \frac{D\rho}{Dt} \right| \ll \rho \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \right)$$

Cuando se satisface esta condición, el término de la derivada material de la ecuación 3.16 puede desecharse y la ecuación de la conservación de la masa se transforma en:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{incompresible}) \quad (3.17)$$

Esta condición para un flujo incompresible puede expresarse de diferente manera. Puesto que la ecuación 3.16 es siempre válida, al sustituir la ecuación 3.17 en ella se llega a la conclusión de que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{incompresible}) \quad (3.18)$$

Esta forma expresa la incompresibilidad del flujo al establecer que la densidad de una partícula de fluido no cambia al desplazarse por el campo de flujo.

Es importante hacer hincapié sobre el hecho de que un flujo incompresible no requiere que la densidad tenga el mismo valor constante en todo el campo de flujo, sino sólo que la densidad no cambie a lo largo de la trayectoria que sigue una partícula de fluido. Diferentes partículas de fluido pueden poseer densidades distintas, además, cada una es capaz de tener una densidad constante dentro de un flujo incompresible. Si la densidad es la misma en todo punto a un tiempo dado, dicha densidad seguirá siendo igual para tiempos subsiguientes si el flujo es incompresible. A ese flujo se le llama flujo de *densidad constante*. Sin embargo, no todos los flujos incompresibles son flujos de densidad constante.⁷

A menos de que se afirme lo contrario, se supondrá que todos los flujos son incompresibles. No obstante, existen tres condiciones para las cuales esta suposición sería incorrecta: (a) cuando el cambio en la densidad del fluido es importante (al comprimir un gas en el cilindro de un motor, por ejemplo), (b) cuando la velocidad del flujo no es pequeña comparada con la velocidad del sonido y (c), en el caso de un flujo no estacionario, cuando el tiempo que le toma a la velocidad cambiar en forma apreciable no sea grande comparado con el tiempo necesario para que una onda de sonido cruce el campo de flujo. Un flujo casi sónico o supersónico es un flujo *compresible*, como lo es la propagación de las ondas de sonido. Se tratarán los flujos compresibles en los capítulos 8 y 12.

Ejemplo 3.8

Las componentes de la velocidad de un flujo plano son $u = x/T$, $v = -y/T$ y $w = 0$, donde T es una constante con dimensión de tiempo. ¿Es incompresible este flujo?

⁷ Algunos autores llaman al flujo de densidad constante *flujo homogéneo*, lo cual significa que la densidad es la misma en todo lugar y momento.

Solución

Al evaluar $\nabla \cdot \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{T} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{T} \right) + 0 \\ &= \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \\ &= 0\end{aligned}$$

El flujo es incompresible.

3.4 Conservación de especies químicas

Algunas veces es necesario rastrear componentes químicos individuales en una mezcla de fluidos. En el caso de un motor de automóvil, se mezclan gotas de combustible líquido con el aire en el carburador en proporciones definidas necesarias para garantizar la ignición y la formación del arco entre el colector y las escobillas en el cilindro de un motor. Se mide el gasto másico de los contaminantes del escape de un automóvil para determinar si el vehículo cumple con las normas de control de la contaminación. Es necesario expresar la conservación de la masa de cada especie química que participa en el flujo del fluido.

La concentración másica de una especie química i , que se denota mediante ρ_i , es la masa por unidad de volumen de ese componente en una mezcla. La expresión para la conservación de la masa de cualquier constituyente i , en ausencia de reacciones químicas que puedan crearlo o eliminarlo, debe ser idéntica a la del fluido como un todo, ecuación 3.9, a excepción de que ρ_i sustituye a ρ :⁸

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_i dV + \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.19)$$

Adviértase que, si se suman las ecuaciones de la conservación de la masa para todas las especies de una mezcla, se obtendría la ecuación 3.9, puesto que la suma de las densidades parciales ρ_i es igual a ρ :

⁸ Aquí se supone que cada especie se mueve con la misma velocidad \mathbf{V} . En flujos donde la razón de densidades ρ_i/ρ varía en el espacio, hay difusión de especies y la ecuación 3.19 debe modificarse para tomar esto en consideración.

$$\sum_i \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_i dV + \sum_i \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \sum_i \rho_i dV + \iint_S \sum_i \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

El gasto másico de las especies i a través de la superficie de control se designará mediante \dot{m}_i :

$$\dot{m}_i \equiv \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.20)$$

y el equivalente de la ecuación 3.10 tiene la forma:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_i dV = (\dot{m}_i)_{ent} - (\dot{m}_i)_{sal} \quad (3.21)$$

La forma diferencial de la conservación de la masa es la misma que la de la ecuación 3.13 a excepción de que ρ se sustituye por ρ_i :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}) = 0 \quad (3.22)$$

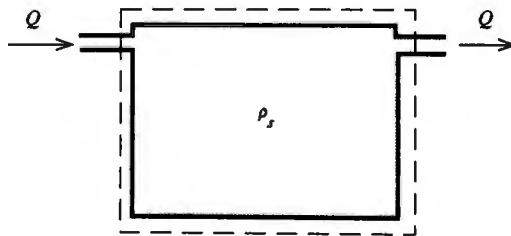


Figura E 3.9

Ejemplo 3.9

Un tanque de volumen $V = 10 \text{ m}^3$ está lleno de una solución salina con una densidad inicial de sal $\rho_{s0} = 3.0 \text{ kg/m}^3$. Al tiempo $t = 0$, se bombea agua dulce en el tanque con un gasto volumétrico $Q = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$, que desplaza la solución salina, por una línea de derrame, con un gasto volumétrico igual. El fluido dentro del tanque se agita bien de modo que cada aumento de agua dulce diluya la solución salina de manera uniforme en todo el tanque.

(a) Obtenga y resuelva una ecuación diferencial para la densidad de sal $\rho_s \{t\}$ dependiente del tiempo en el tanque. (b) Calcule el volumen de agua dulce que debe bombearse en el tanque para reducir la concentración de sal en un factor de dos, a partir de su valor inicial ρ_{s0} .

Solución

(a) Al aplicar la ecuación 3.21 al volumen del tanque, y al notar que la densidad de la sal del flujo de salida es la misma a la del interior del tanque, $\rho_s \{t\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_i dV &= (\dot{m}_i)_{ent} - (\dot{m}_i)_{sal} \\ \left(\frac{d\rho_s}{dt} \right) V &= 0 - \rho_s Q \\ \frac{d\rho_s}{\rho_s} &= - \frac{Q}{V} dt \\ \rho_s &= \rho_{s0} \exp\left(-\frac{Qt}{V}\right) \\ &= (3.0 \text{ kg/m}^3) \exp\left(-\frac{t}{1.0E(3) \text{ s}}\right) \end{aligned}$$

(b) Al tiempo para el cual $\rho_s = \rho_{s0}/2$,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{Qt}{V}\right) &= 2 \\ Qt &= V \ln 2 \\ &= 10 \text{ m}^3 \times 0.6931 \\ &= 6.931 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

3.4.1 Reacciones químicas

Cuando una especie química experimenta una reacción química, como es el caso del combustible que reacciona con aire para formar productos de combustión, la ecuación de la conservación de la masa para cada una de las especies de la reacción debe incluir la posibilidad de producción (o pérdida) de estas especies originadas por la reacción química. A fin de considerar los efectos de las reacciones químicas, se incluye un

término en la parte derecha de la ecuación 3.19 que permita la producción de la especie i debida a las reacciones químicas:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_i dV + \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right)_{quím} dV \quad (3.23)$$

donde $(\partial \rho_i / \partial t)_{quím}$ es el gasto másico neto de producción de la especie i por unidad de volumen dentro del volumen de control a causa de todas las reacciones que producen o consumen la especie i .

La forma correspondiente de la ecuación diferencial de la conservación de la masa es:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}) = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right)_{quím} \quad (3.24)$$

Adviértase de nuevo que al sumar la ecuación 3.23 o 3.24 para todas las especies se obtiene la ecuación 3.19 o 3.22, respectivamente, puesto que la suma sobre todas las reacciones químicas no dará como resultado ningún cambio en la masa total de las especies que participaron.

3.5 Flujo de dos fases

Algunos flujos comprenden la mezcla de dos fases físicas. Las partículas sólidas en un gas o líquido (polvareda o sedimentos en un río), gotas de líquido en un gas (neblina) y burbujas de gas en un líquido (agua en ebullición) son ejemplos de flujos en los cuales los componentes fluidos no se mezclan bien a nivel molecular, como sucede en las soluciones y mezclas químicas. Esos flujos se denominan flujos de *dos fases*.

El concepto de densidad parcial para cada fase de una mezcla de dos fases resulta de utilidad en el análisis de esos flujos. La densidad parcial ρ_i de una fase es simplemente la razón de la masa de la fase en una muestra de fluido al volumen de esa muestra. El volumen de la muestra debe ser lo bastante grande como para permitirle contener un número considerable de partículas (burbujas o gotas), pero lo bastante pequeño como para incluir sólo una pequeña fracción del campo de flujo. En este sentido, la densidad de fase es análoga a la densidad parcial de una especie química en una mezcla. Algunas veces, la cantidad de la fase puede determinarse como la fracción del volumen del fluido ocupado por la fase. Adviértase que la densidad parcial de fase difiere mucho de la densidad real del material en la partícula o burbuja puesto que aquélla está promediada sobre un volumen más grande.

Cuando la componente menor de una mezcla heterogénea (v.g., una partícula de polvo o burbuja) posee una dimensión muy pequeña, ésta tiende a ser arrastrada a la velocidad del fluido circundante. En esos casos, es posible tratar la fase de la misma forma que se hace con una especie química y cada componente del fluido de dos fases obedece la ley de la conservación de la masa cuya forma es la que posee la ecuación 3.22. Por otra parte, cuando el tamaño de la componente no es suficientemente pequeño, como en una

tormenta o en agua hirviente, cada fase puede tener una velocidad diferente y la ley de conservación de la masa adquiriría la forma:

$$\frac{\partial \rho_i}{\rho t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) = 0 \quad (3.25)$$

donde \mathbf{V} es la velocidad de la fase i . La diferencia entre las velocidades de cada fase se determina con los detalles de la dinámica del flujo que rodea a cada partícula o burbuja —situación que se complica mucho y su manejo no es fácil con los métodos que se emplean en este libro.

3.6 Medición del volumen y del gasto volumétrico

Las cantidades de gran parte de los fluidos que se utilizan en la vida diaria se determinan mediante la medición de su volumen. Cuando se prepara un pastel, se mide una taza de leche y una cucharadita de vainilla. En general, una taza de café posee un volumen estándar. El volumen de agua que se emplea para descargar el agua de un inodoro se fija mediante el funcionamiento de la válvula del flotador que se localiza en el tanque. El tamaño del recipiente que contiene un fluido constituye el método más sencillo para la medición del volumen del fluido.

Sin embargo, muchos fluidos se entregan por tuberías o mangueras —la gasolina al tanque del automóvil, agua y gas natural a los hogares. Los flujómetros miden el volumen de estos fluidos que se venden comercialmente. Un flujómetro característico consta de un rotor que gira en proporción al volumen de fluido que circula a través del medidor. El movimiento del rotor hace funcionar un contador calibrado respecto al volumen del fluido medido en unidades convenientes. (En las bombas de gasolina, el medidor también acciona el contador de precio.)

Algunas veces, es necesario conocer o ajustar el caudal del gasto volumétrico. En el carburador de un automóvil, el gasto volumétrico de combustible líquido y aire debe mantenerse en las mismas proporciones en todo el intervalo de velocidades y potencia mediante controles mecánicos y electrónicos. (En los motores Diesel, el volumen de combustible que se inyecta por ciclo es la variable que se controla.) Algunas mediciones de los gastos volumétricos se logran con medidores que utilizan los principios dinámicos que se estudiarán en capítulos posteriores de este texto.

3.7 Problemas

Problema 3.1

El campo de velocidad de un flujo de fluido está dado por:

$$\mathbf{V} = f\{t\} \mathbf{i}_x$$

donde $f\{t\}$ es sólo función del tiempo. Demuestre que el flujo es incompresible si la densidad ρ es función de h con argumento $x-ft$:

$$\rho = h\{x - ft\}$$

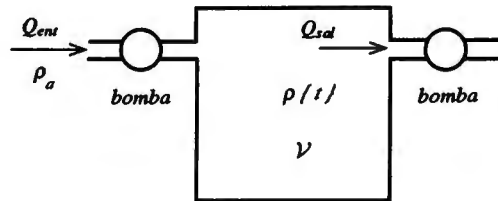


Figura P 3.2

Problema 3.2

Un tanque de volumen $V = 100 \text{ m}^3$ se une con dos bombas, una en la entrada y otra en la salida del tanque, como se ejemplifica en la figura P 3.2. Cada bomba es una bomba de desplazamiento positivo, v.g., este tipo de bomba funciona con un gasto volumétrico fijo del flujo que entra en ella. La bomba en la entrada succiona aire de la atmósfera y lo envía al tanque, en tanto que la bomba de salida o descarga extrae aire del tanque y lo envía a la tubería.

En un principio, ninguna de las bombas trabaja y el recipiente está lleno de aire con densidad atmosférica $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$. Al tiempo $t=0$ se encienden ambas bombas, extrayendo instantáneamente un gasto volumétrico $Q_{ent} = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ en la bomba de entrada o succión y $Q_{sal} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ en la bomba de salida o descarga. Puesto que la masa de los gastos de entrada y de salida son diferentes en un inicio, la densidad $\rho\{t\}$ del aire en el tanque cambia con el tiempo. No obstante, después de un tiempo prolongado, la densidad del aire dentro del tanque alcanza un valor constante.

(a) Calcule el valor de la densidad ρ , del aire en el tanque cuando se alcanza el estado estacionario. (b) Deduzca y resuelva una ecuación diferencial para $\rho\{t\}$ para cualquier tiempo $t \geq 0$.

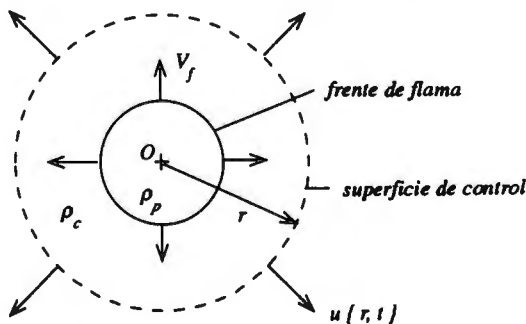


Figura P 3.3

Problema 3.3

En la figura P 3.3, una mezcla estacionaria de combustible y aire se inflama en el punto O al tiempo $t = 0$ debido a la acción de una chispa, la cual da origen a un frente esférico de flama que se desplaza hacia afuera del punto O con rapidez constante V_f . La mezcla de combustible que precede al frente de la flama, la cual tiene una densidad constante ρ_c , se convierte en el delgado frente de flama de productos calientes de la combustión que posee una densidad ρ_p mucho menor. Puesto que se incrementa el volumen de un elemento de fluido encerrado por el frente de la flama, la mezcla combustible es empujada radialmente hacia afuera por el frente de la flama en expansión, a pesar de que los productos de la combustión permanecen estacionarios. Por lo tanto, el gas que está fuera del frente de la flama se mueve radialmente hacia afuera, en tanto que el que está adentro es estacionario.

(a) Elija un volumen esférico de control con radio fijo $r > V_f t$, que envuelva el frente de la flama y aplique la ecuación de la conservación de la masa y encuentre una expresión para la velocidad de salida $u(r, t)$ radial de la mezcla combustible en r para cualquier tiempo t antes de que el frente de la flama llegue al punto r , v.g., $t < r/V_f$. (b) Deduzca una expresión para la velocidad u exactamente antes del frente de la flama como una función de ρ_c , ρ_p y V_f .

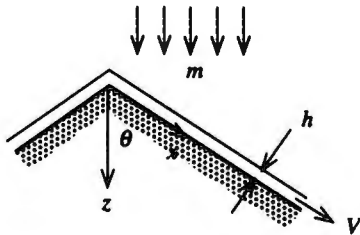


Figura P 3.4

Problema 3.4

Sobre el techo de una casa, el cual tiene una inclinación que forma un ángulo $\theta = 60^\circ$ respecto de la vertical, cae la lluvia según se ilustra en la figura P 3.4. El gasto másico de lluvia por unidad de área horizontal es $m = 1E(-3) \text{ kg/m}^2\text{s}$. En el techo se forma una película delgada de agua, la cual fluye paralela a la superficie del techo en dirección del eje x , como lo indica la figura 3.4. La rapidez del flujo V en el agua es uniforme a lo largo del espesor h de la película y sólo depende de la distancia vertical z medida desde la punta del techo y varía según:

$$V = kz$$

donde k es una constante cuyo valor es $1E(-3) \text{ s}^{-1}$.

(a) Demuestre que en un flujo estacionario el espesor h de la película no depende de la distancia x y determine su valor. (b) Si la lluvia comienza a caer al tiempo $t = 0$ a una razón constante de m cuando el techo está seco, deduzca y resuelva una ecuación

diferencial para el espesor $h\{t\}$ dependiente del tiempo, si se supone que, en cualquier instante de tiempo, h es independiente de x y que $V = kz$. Demuestre que la solución obtenida da el mismo valor para h que en el punto (a), cuando $t \rightarrow \infty$.

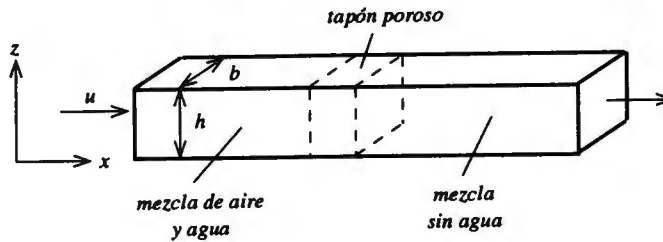


Figura P 3.5

Problema 3.5

Hacia el interior de un ducto rectangular con anchura $b = 0.3 \text{ m}$ y altura $h = 0.2 \text{ m}$, como se aprecia en la figura P 3.5, circula un flujo no estacionario de aire con una suspensión de gotas muy finas de agua. La velocidad u del flujo que entra no es uniforme y varía con la dirección vertical z y el tiempo $t \geq 0$ de acuerdo con:

$$u\{z\} = at \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

donde $a = 0.1 \text{ m/s}^2$ es una constante. La fracción del volumen de la mezcla de aire y gotas de agua entrante que se encuentra ocupado por las gotas de agua es $\epsilon = 0.01$, y la densidad ρ_w de las gotas del agua es $1E(3) \text{ kg/m}^3$.

(a) Determine el gasto volumétrico $Q\{t\}$ de la mezcla que fluye hacia el interior del ducto. (b) Calcule el gasto másico del agua que entra al ducto. (c) Un tapón poroso que se coloca en el interior del ducto absorbe todas las gotas de agua y las retiene en él como se observa en la figura P 3.5. ¿Para qué tiempo t la masa $M\{t\}$ de agua retenida en el tapón llegará a 10 kg ?



Figura P 3.6

Problema 3.6

Una corriente de líquido fluye desde una tubería hacia la atmósfera. La corriente de fluido tiene un diámetro d y una velocidad uniforme. A cierta distancia cuesta abajo, la corriente se rompe para dar lugar a gotas esféricas con diámetro $2d$ las cuales están separadas por una distancia h , como se esquematiza en la figura P 3.6. Determine el radio h/d .

Problema 3.7

Se infla con helio un globo meteorológico con un gasto volumétrico constante $Q_{ent} = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. La presión dentro del globo permanece a la presión atmosférica hasta que el volumen \mathcal{V} del globo alcanza un valor de $\mathcal{V}_0 = 1 \text{ m}^3$, después de lo cual la presión manométrica p interna del globo aumenta con el volumen del globo al estirarse su material, según la relación:

$$p = k(\mathcal{V} - \mathcal{V}_0)$$

donde la constante $k = 1.0E(5) \text{ Pa/m}^3$. Sin embargo, hay una pequeña fuga en el globo con un gasto volumétrico Q_{sal} que es independiente de la presión manométrica en el globo de acuerdo con la relación:

$$Q_{sal} = c\sqrt{p}$$

donde la constante $c = 1.0E(-3) \text{ m}^3/\text{Pa}^{1/2} \text{ s}$.

(a) Si se supone que el helio es un fluido incompresible en este proceso, calcule el volumen \mathcal{V}_∞ del globo en condiciones estacionarias y la correspondiente presión manométrica p_∞ . (b) Deduzca la ecuación diferencial para el volumen $\mathcal{V}(t)$ cuya solución dará su dependencia respecto al tiempo cuando $\mathcal{V} \geq \mathcal{V}_0$.

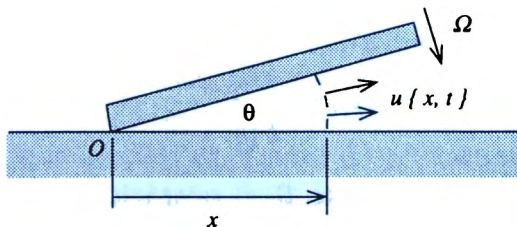


Figura P 3.8

Problema 3.8

Como se aprecia en la figura P 3.8, una placa plana se articula en el punto O de una superficie horizontal. Se hace girar con lentitud la placa articulada en dirección a la horizontal con una velocidad angular $\Omega = 0.1 \text{ s}^{-1}$ en el sentido que giran las manecillas

del reloj, comprimiendo el aire entre las dos placas. Calcule la velocidad radial $u\{x\}$ para $x = 0.1\text{ m}$ cuando $\theta = 0.1$. (Suponga que el flujo es incompresible y que la dimensión de la placa en la dirección normal al plano de la figura P 3.8 es tan grande que el fluido circula sólo en el plano de la figura.)

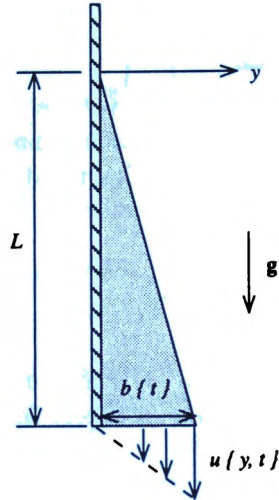


Figura P 3.9

Problema 3.9

Una placa plana se sumerge en miel a una profundidad $L = 0.1\text{ m}$ y luego se extrae y se mantiene sin movimiento mientras escurre la miel. El flujo de escurrimiento es un flujo plano ubicado sobre el plano de la figura P 3.9. La anchura $b\{t\}$ de la capa de miel en el fondo del plano disminuye con el tiempo t , pero la capa de miel conserva su forma triangular, como lo ejemplifica la figura P 3.9. La velocidad de la miel en la parte inferior de la placa, $u\{y\}$, varía linealmente con la distancia desde la placa:

$$u\{y\} = \frac{Uy}{b\{t\}}$$

donde $U = 1.0E(-3)\text{ m/s}$ es una constante. Si el valor inicial de b al tiempo $t = 0$ es $b_0 = 1.0E(-2)\text{ m}$, obtenga una expresión para $b\{t\}$.

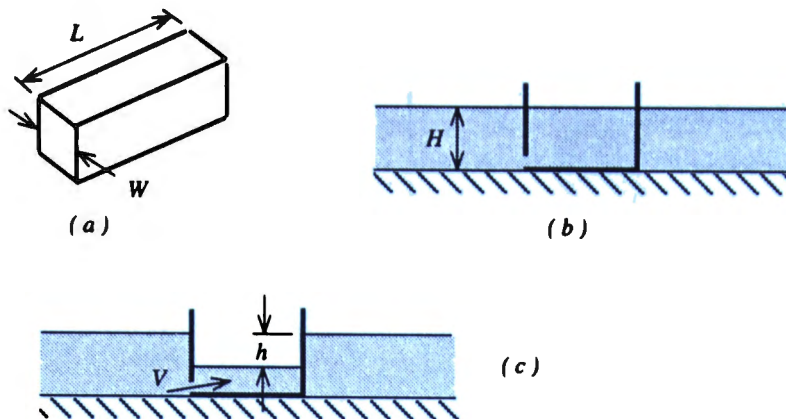


Figura P 3.10

Problema 3.10

Una barcaza vacía de forma rectangular con anchura $W = 10 \text{ m}$ y longitud $L = 30 \text{ m}$ presentó una fuga, se llenó de agua y quedó sentada en el fondo del mar con agua a una profundidad $H = 4 \text{ m}$, como ilustra la figura P 3.10 (a)-(b). El propietario de la barcaza desea sacarla de nuevo a flote bombeándola hacia afuera mediante una bomba que desarrolla un gasto volumétrico $Q = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$. Cuando se hace funcionar la bomba, el agua fluye hacia el interior de la barcaza a través de la fuga que se localiza en el fondo de la barcaza y con un área $A = 0.1 \text{ m}^2$ y rapidez V dada por:

$$V = \sqrt{2gh}$$

en donde h es la diferencia de nivel entre la interfaz de aire y agua dentro de la barcaza y la del mar fuera de ella (véase la Fig. P 3.10 [c]).

(a) Encuentre una ecuación diferencial que describa la rapidez con la cual la diferencia h del nivel de agua aumenta con el tiempo t después de encender la bomba. (b) Después de hacer funcionar la bomba durante un tiempo, el nivel del agua dentro de la barcaza ya no disminuye más, en tanto que la barcaza permanece firme sobre el fondo. ¿Cuál era el valor h en esta condición? (c) El propietario sabe que la masa M de la barcaza vacía es $1.0E(6) \text{ kg}$. Éste instala una bomba con una capacidad mucho mayor que la utilizada en el punto (b) y, mientras el nivel de agua seguía disminuyendo, la barcaza comenzó a flotar de nuevo. Si se supone que la densidad ρ_{sw} del agua de mar es 1030 kg/m^3 , ¿para qué valor de h comenzó la barcaza a flotar de nuevo? (d) Calcule el valor mínimo de la capacidad Q de la bomba para la cual es posible sacar a flote la barcaza.

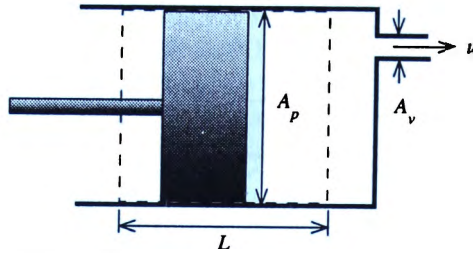


Figura P 3.11

Problema 3.11

Durante el proceso de escape de un motor de combustión externa, el gas es empujado hacia afuera del cilindro a través de la válvula de escape mediante el movimiento del pistón, el cual se mueve de izquierda a derecha una distancia $L = 0.1 \text{ m}$, como se ilustra en la figura P 3.11. Si los anillos del pistón están desgastados, un poco de gas se escapa por el espacio que hay entre el pistón y las paredes del cilindro. Para encontrar cuánto gas se escapa, se midió la velocidad u del gas en la válvula de escape y se encontró que es:

$$u = u_0 \text{ sen } \omega t$$

donde $u_0 = 70 \text{ m/s}$ y $\omega = 300 \text{ s}^{-1}$ son constantes y t es el tiempo. El producto ωt varía entre 0 y π cuando el pistón se mueve una distancia L . Las áreas del pistón y la válvula son $A_p = 1.0E(-2) \text{ m}^2$ y $A_v = 2.0E(-3) \text{ m}^2$, respectivamente. Si se supone que el gas es incompresible, determine el volumen V_f de gas que se fuga del pistón durante el proceso de escape.

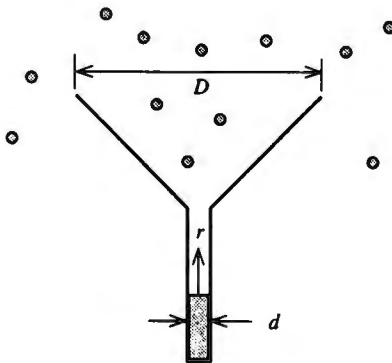


Figura P 3.12

Problema 3.12

Un pluviómetro se compone de un embudo de diámetro $D = 10 \text{ cm}$ que recoge lluvia y deposita el agua líquida de densidad $\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ en un cilindro con diámetro $d = 1 \text{ cm}$. Se observa que la superficie de la columna del líquido recogido se eleva a razón de $r = 1 \text{ cm/min}$. (a) Si las gotas de lluvia caen en el embudo con una velocidad de $s = 10 \text{ m/s}$, calcule la masa de agua líquida que hay en un metro cúbico de la atmósfera, ρ_r . (b) Si las gotas de lluvia tienen un radio $R = 1 \text{ mm}$, determine el número de gotas que hay en un metro cúbico de la atmósfera, n .

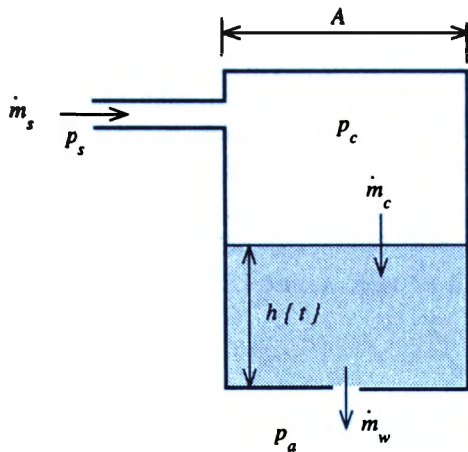


Figura P 3.13

Problema 3.13

Un condensador en un sistema de vapor se compone de un tanque cilíndrico con área A de sección transversal, cuya parte inferior se llena con agua a una profundidad $h(t)$ que varía con el tiempo. La parte superior está llena de vapor el cual se suministra con un gasto másico \dot{m}_s que es proporcional a la diferencia de presión que existe entre la presión p_s de suministro de vapor y la presión p_c del condensador:

$$\dot{m}_s = c_s(p_s - p_c)$$

donde c_s es una constante. El vapor se condensa en agua con un gasto másico constante \dot{m}_c . Un pequeño orificio en el fondo del tanque permite que escape el agua hacia el exterior con un gasto másico \dot{m}_w , el cual es proporcional a la diferencia entre la presión del condensador y la presión atmosférica p_a :

$$\dot{m}_w = c_w(p_c - p_a)$$

donde c_w es una constante. La densidad del vapor y la del agua, ρ_s y ρ_w , son constantes en este proceso.

(a) Escriba dos ecuaciones de la conservación de la masa, una para el vapor y otra para el agua, en la forma:

$$\frac{dh}{dt} = f\{\dot{m}, p, \text{etc.}\}$$

(b) Encuentre una ecuación para dh/dt que *no* contenga la presión del condensador p_c que se desconoce. (c) ¿Cuál debe ser la diferencia de presión a través del condensador, $p_s - p_a$, que garantice que h no cambie con el tiempo?

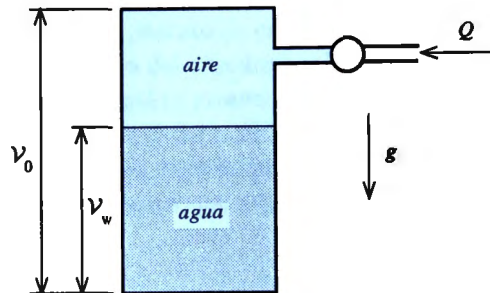


Figura P 3.14

Problema 3.14

Un tanque con volumen \mathcal{V}_0 se llena inicialmente de aire con densidad atmosférica ρ_{at} . Al tiempo $t = 0$, un bomba envía al tanque una mezcla de aire y agua. El gasto volumétrico a la entrada de la bomba es Q , la mitad del cual es agua con una densidad ρ_w y la otra mitad es aire con densidad ρ_a . Una vez dentro del tanque, el agua cae al fondo, ocupando un volumen $\mathcal{V}_w\{t\}$ que aumenta con el tiempo (véase la figura P 3.14). El aire se eleva para ocupar la parte superior del tanque, formando un volumen con densidad uniforme $\rho_a\{t\}$.

(a) En términos de las cantidades conocidas \mathcal{V}_0 , ρ_{at} , Q y ρ_w , obtenga expresiones para $\mathcal{V}_w\{t\}$ y $\rho_a\{t\}$ como funciones del tiempo t . (b) La presión p del aire en el tanque se relaciona con su densidad ρ_a y la presión atmosférica p_{at} mediante:

$$p = p_{at} \left(\frac{\rho_a}{\rho_{at}} \right)$$

Calcule la razón p/p_{at} para el tiempo en que el tanque esté lleno de agua.

Problema 3.15

Un muestreador HIVOL es un instrumento que sirve para medir la concentración de masa de las partículas sólidas presentes en el aire atmosférico. Éste consta de un

ventilador que succiona aire a un gasto volumétrico constante $Q = 10 \text{ m}^3/\text{min}$ a través de un filtro que atrapa las partículas sólidas en el vapor del aire. Se pesa el filtro antes y después de realizar el muestreo que dura un cierto intervalo de tiempo y el aumento en la masa del filtro es igual a la masa de las partículas presentes en el aire ambiente que pasa por el filtro durante ese tiempo.

Un muestreo HIVOL se lleva a cabo durante un intervalo de tiempo $\Delta t = 24 \text{ h}$, y al medir la masa M_p de las partículas recogidas se sabe que es de 1.34 g . Determine la densidad ρ_p de las partículas presentes en el ambiente en unidades de microgramos por metro cúbico ($\mu\text{g}/\text{m}^3$).

Problema 3.16

En la atmósfera de la Tierra se está acumulando bióxido de carbono ya que el gasto másico que entra de CO_2 supera, hoy en día, el gasto másico que sale durante un ciclo anual. La concentración de CO_2 , que ahora es alrededor de 250 partes por millón (v.g., por cada millón de moléculas de aire hay 250 moléculas de CO_2), está aumentando a razón de cerca de 1.5 ppm por año. Si la masa atmosférica es igual a $5.2E(18) \text{ kg}$, calcule la rapidez o razón de aumento de la masa de CO_2 en la atmósfera, medida en toneladas métricas por año. (El peso molecular del CO_2 es 44, en tanto que el del aire es 28.95.)

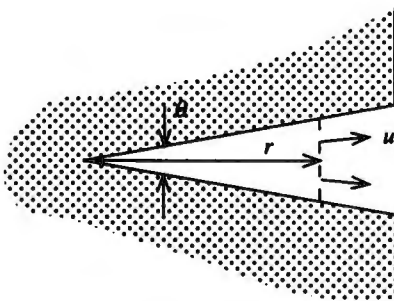


Figura P 3.17

Problema 3.17

Como se ejemplifica en la figura P 3.17, la forma de un estuario con marea, visto desde arriba, es cuneiforme. Puesto que está abierto al mar a la derecha, la profundidad h del agua en el estuario es la misma que la del mar y varía con el movimiento de marea según la ecuación:

$$h = a + b \text{ sen } \omega t$$

donde $\omega = 1.396E(-4) \text{ s}^{-1}$ es la frecuencia de la marea, t es el tiempo y $a = 10 \text{ m}$ y $b = 2 \text{ m}$ son constantes de la marea diaria local. Determine el valor de la velocidad de marea $u \{r, t\}$ en una posición $r = 10 \text{ km}$ a partir de la fuente del estuario cuando $\omega t = 0$.

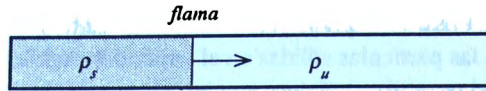


Figura P 3.18

Problema 3.18

Un tubo cerrado por ambos extremos se llena inicialmente con una mezcla combustible de densidad uniforme ρ_0 y presión p_0 . La mezcla se enciende en el extremo izquierdo y se propaga una flama plana a través de la mezcla de izquierda a derecha, como se aprecia en la figura P 3.18. En este proceso, la presión p es uniforme en el espacio, pero aumenta conforme la flama se mueve por el tubo. Más allá de la flama, en donde la mezcla aún no se quema, la densidad ρ_u es uniforme pero aumenta con la presión según la relación:

$$\rho_u = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^n$$

donde la constante $n = 0.8$. Atrás de la flama, en los gases quemados, la densidad ρ_b es también uniforme, pero varía con la presión:

$$\rho_b = \alpha \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^m$$

donde la constante $\alpha = 0.25$.

(a) Calcule la razón de presiones p/p_0 donde la flama ha consumido por completo el gas sin quemar. (b) Cuando la flama ha llegado al punto medio del tubo, calcule el porcentaje de la masa de la mezcla original que se quemó.

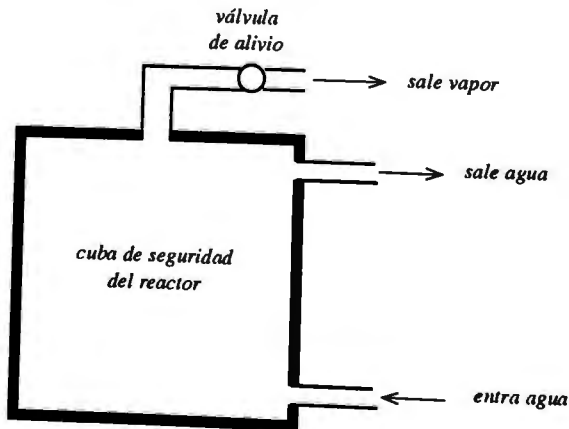


Figura P 3.19

Problema 3.19

La cuba de seguridad de un reactor nuclear con volumen $\mathcal{V} = 500 \text{ m}^3$ se llena por completo con agua bajo alta presión. Durante la operación normal, un gasto volumétrico de $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua se bombea en el fondo de la cuba de seguridad del reactor y un flujo volumétrico igual de agua sale por la parte superior. La densidad promedio del agua en la cuba de seguridad es $\rho_v = 70 \text{ kg/m}^3$.

A causa de una falla en la alimentación de la bomba de agua, el flujo de entrada y salida de agua se detiene en forma abrupta. El agua que permanece en el reactor comienza a hervir debido al calentamiento ocasionado por el núcleo del reactor y se escapa el vapor hacia el edificio de contención a través de la válvula de alivio de presión. El vapor que se encuentra en el reactor y el que fluye por la válvula de alivio es de densidad constante $\rho_v = 50 \text{ kg/m}^3$. El vapor que se escapa fluye con una velocidad media constante $\bar{V} = 50 \text{ m/s}$ a través de una tubería circular de diámetro $D = 0.5 \text{ m}$.

(a) Calcule el gasto másico \dot{m}_v del vapor que pasa por la válvula de alivio. (b) Determine el intervalo de tiempo τ durante el cual se escapa el vapor hasta que toda el agua de la cuba de seguridad del reactor se convierta en vapor. (c) Se cuenta con un sistema de emergencia para el enfriamiento del núcleo. Este sistema inyectará agua fría, de densidad $\rho_c = 1E(3) \text{ kg/m}^3$, en el reactor a un gasto másico que sea escasamente suficiente para compensar el gasto másico de generación de vapor descrito en (a). Determine el gasto volumétrico Q_c de agua suministrado por este sistema.

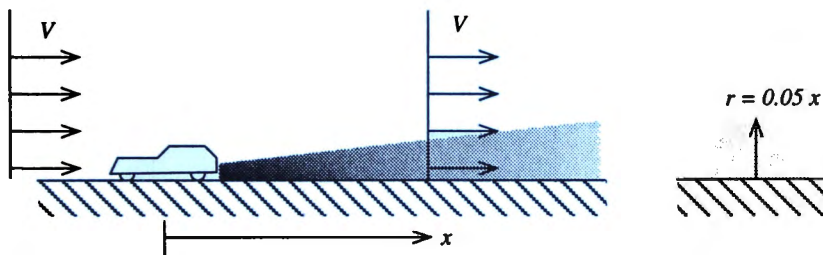


Figura P 3.20

Problema 3.20

Un automóvil se desplaza por una carretera con una rapidez $V = 80 \text{ km/h}$, al mismo tiempo que emite monóxido de carbono (CO) por el tubo de escape a razón e de 10 g por kilómetro recorrido ($e = 10 \text{ g/km}$). Desde un marco de referencia unido al automóvil, detrás de éste se extiende una estela según se ilustra en el diagrama. Dentro de la región formada por la estela, la velocidad del fluido es igual a la velocidad V del automóvil y el CO emitido se mezcla de manera uniforme con la estela de sección transversal semicircular, cuyo radio r es igual a $0.05x$, donde x es la distancia detrás del vehículo. Determine (a) el gasto másico de emisión de CO , \dot{m}_{CO} (g/h), y (b) la densidad de CO ρ_{CO} (g/m^3) que se encuentra en la estela formada por el vehículo a una distancia $x = 100 \text{ m}$ detrás de él. (c) Al vehículo lo precede una larga hilera de automóviles separados

por una distancia de 100 m, los cuales se desplazan con la misma rapidez y emiten CO a la misma razón. En cualquier punto, cada uno de estos vehículos ejerce un efecto de contribución aditiva al valor total de ρ_{CO} , el cual depende de la distancia de separación. Determine la densidad de CO a una distancia $x = 100$ m detrás del vehículo, como se ilustra en el diagrama, a causa del efecto acumulativo de todos los automóviles precedentes. (Nota: La suma $\sum_{i=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6 = 1.645$.)

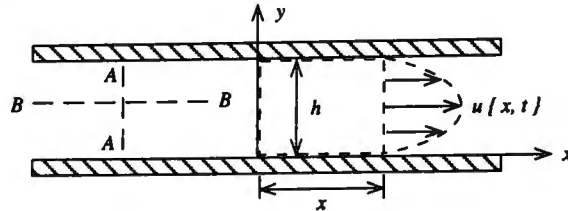


Figura P 3.21

Problema 3.21

Se pretende extraer un fluido viscoso e incompresible del espacio que hay entre dos placas paralelas al desplazar la placa superior hacia abajo con una rapidez V , en tanto que la placa inferior permanece estacionaria. Puesto que la dimensión de la placa es muy grande en la dirección z normal al plano de la figura P 3.21, la velocidad del fluido se encuentra por completo sobre el plano x, y , y no hay dependencia respecto de la dirección z . La componente u de la velocidad tiene una distribución parabólica, como se indica en la figura P 3.21:

$$u = f(x) \left[\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right]$$

donde $f(x)$ es una función sólo de x . (Advierta que u es cero en las superficies tanto inferior ($y = 0$) como superior ($y = h$).) El eje y es un plano de simetría del flujo, donde el flujo localizado a la izquierda de ese plano es una imagen especular del que está a la derecha y , por lo tanto, $u(0, y) = 0$.

(a) Mediante un volumen de control, representado por la línea punteada de la figura P 3.21, determine la función $f(x)$ en términos de las variables x, V y h . (b) Con la forma diferencial de la ley de la conservación de la masa, exprese la componente de la velocidad $v(x, y)$ en función de x, y, V y h . (c) Represente esquemáticamente la variación de v como función de y para $h \geq y \geq 0$. (d) En un instante particular de tiempo, en el flujo se insertan líneas coloreadas que forman una cruz, $A - A$ y $B - B$, como lo indican las líneas punteadas de la figura P 3.21. Haga un esquema de la forma alterada que asumirá la cruz después de transcurrir un pequeño intervalo de tiempo.

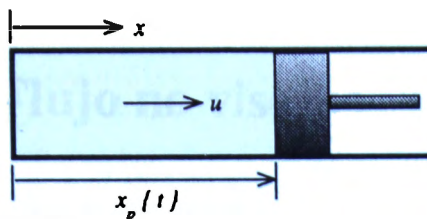


Figura P 3.22

Problema 3.22

Un pistón se mueve lentamente dentro de un cilindro cerrado por uno de sus extremos, como lo ilustra la figura P 3.22. Su posición $x_p \{t\}$ es una función preestablecida del tiempo t . Puesto que el movimiento es lento, la densidad del gas $\rho \{t\}$ es uniforme dentro del cilindro, pero varía con el tiempo t . Sin embargo, la velocidad del gas $u \{x, t\}$ depende tanto de x como de t . Demuestre que una solución a la forma diferencial de la ley de la conservación de la masa para este movimiento es:

$$\rho \{t\} = \frac{k}{x_p \{t\}}$$

$$u \{x, t\} = \frac{x}{x_p} \frac{dx_p}{dt}$$

donde k es una constante.

Bibliografía

Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Olson, Reuben M. y Steven J. Wright, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*, Nueva York: Harper and Row, 1990.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*. 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1986.

En este capítulo se considera un tipo de flujo que se denomina *flujo no viscoso*, el cual ocurre en circunstancias especiales, aunque no poco comunes. En dichos flujos, el efecto de la viscosidad del fluido es tan pequeño que es posible despreciarlo y el flujo resultante es mucho más fácil de tratar analíticamente que en el caso que los efectos de la viscosidad no pueden ignorarse. Lo que es más importante, es que es posible determinar con facilidad las propiedades significativas del flujo, como son los campos de presión y velocidad o, incluso, estimar esas propiedades mediante el uso de relaciones algebraicas simples. Resulta fácil desarrollar una intuición física acerca de cómo se comporta un flujo no viscoso.

Primero se obtiene la ecuación diferencial vectorial del movimiento de un flujo no viscoso, conocida como *ecuación de Euler*. Después, se encuentra la integral escalar de esta ecuación, que se denomina *ecuación de Bernoulli*, la cual proporciona una relación algebraica entre la presión, la velocidad y la posición en el campo gravitatorio de la Tierra. En tanto que la ecuación de Bernoulli no dice todo acerca del campo de flujo, ésta es capaz de proporcionar suficiente información que permita encontrar lo que se necesita saber al resolver un problema práctico concreto.

Más adelante, en el capítulo 6, se considerará un problema que presenta mayor dificultad, el cual consiste en saber cómo se describe un flujo cuando los efectos viscosos no pueden despreciarse. Por el momento, al estudiar sólo los flujos no viscosos, se puede conseguir cierta familiaridad con los principios de la dinámica de fluidos que serán de utilidad cuando se estudie el caso más general de los flujos viscosos.

4.1 Criterio del flujo no viscoso

Si la viscosidad de un fluido fuera cero, no podría soportar un esfuerzo cortante y su flujo sería estrictamente no viscoso. Sin embargo, ningún fluido posee viscosidad cero.¹

¹ El helio-4 líquido a temperaturas por debajo de los 4.2 K fluye sin fricción por pequeños tubos y canales. Este flujo es un movimiento cuántico macroscópico del fluido y no es por completo describable mediante la ecuación de Euler. En estas condiciones, el helio-4 recibe el nombre de *superfluido*.

Para que un flujo se considere no viscoso, los efectos que el movimiento del flujo experimenta a causa de los esfuerzos cortantes deben ser muy pequeños en comparación con otras influencias para poderse ignorar por ser despreciables. Una condición *necesaria*, pero no *suficiente*, para que los efectos de la viscosidad puedan despreciarse es que el parámetro adimensional que caracteriza al flujo, conocido como *número de Reynolds*, que se representa mediante Re , sea muy grande. Para el flujo estacionario de un fluido con densidad ρ y viscosidad μ que fluye sobre (o a través de) un objeto de dimensión L con una velocidad V , el número de Reynolds es:

$$Re \equiv \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad (4.1)$$

donde se usó la ecuación 1.6 para sustituir ρ/μ por $1/\nu$. Así, la condición necesaria para un flujo no viscoso es la siguiente:

$$Re \gg 1$$

Si el número de Reynolds de un flujo no es grande, entonces el flujo es viscoso y no puede tratarse como flujo no viscoso. Sin embargo, es posible que un flujo con un número grande de Reynolds pueda verse muy afectado por los efectos de la viscosidad en ciertas circunstancias, como sucede cuando el flujo entra en contacto con fronteras sólidas. No siempre es posible predecir cuando los flujos en cuestión deben considerarse viscosos y será necesario guiarse por la observación experimental y la experiencia. Por el momento, en este capítulo se indicará cuándo no es posible tratar un flujo como no viscoso.

4.2 Aceleración de una partícula de fluido

Si se desea expresar la ley del movimiento de Newton en el caso de una partícula de fluido en la forma *masa* \times *aceleración* = *fuerza*, primero se necesita una expresión para la aceleración de una partícula de fluido. Debido a que la aceleración de una partícula de fluido es la rapidez o razón de cambio respecto al tiempo de su velocidad \mathbf{V} ,

$$\text{aceleración} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (4.2)$$

donde se ha usado la derivada material respecto al tiempo D/Dt de la ecuación 3.2, ya que se necesita conocer la rapidez de cambio respecto al tiempo para la partícula de fluido. En coordenadas cartesianas, es posible escribir la aceleración $D\mathbf{V}/Dt$ expresada con sus componentes:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i}_y \\
& + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{i}_z
\end{aligned} \tag{4.3}$$

en tanto que en coordenadas cilíndricas la aceleración se convierte en:

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{Dt} &= \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \mathbf{i}_r \\
& + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) \mathbf{i}_\theta \\
& + \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \mathbf{i}_z
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Cada una de las tres componentes del vector aceleración requiere una derivada temporal y tres derivadas espaciales para cada una de las componentes de la velocidad que intervienen en su expresión, o un total de doce derivadas, en la determinación de la aceleración de la partícula de fluido. Cuando la aceleración se expresa en coordenadas cilíndricas (ecuación 4.4), existen dos términos adicionales no derivables: la aceleración centrífuga, $-V_\theta^2/r$, en dirección radial, y la aceleración de Coriolis, $V_r V_\theta/r$, en dirección tangencial. Ya que resulta inconveniente escribir la forma completa de la aceleración en términos de estas derivadas cada vez que se necesite usarla en una ecuación, se empleará la notación abreviada DV/Dt o $\partial V/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ para indicar la aceleración de una partícula de fluido.

Ejemplo 4.1

El campo de velocidad de un flujo incompresible estacionario no viscoso, expresado en coordenadas cilíndricas, es:

$$V_r = \frac{k_1}{r}; \quad V_\theta = \frac{k_2}{r}; \quad V_z = 0$$

donde k_1 y k_2 son constantes con dimensiones de *velocidad* \times *longitud*. Obtenga expresiones para las componentes de la aceleración en las direcciones radial, tangencial y axial.

Solución

Al sustituir las componentes de la velocidad en la ecuación 4.4,

$$\frac{DV}{Dt} \cdot \mathbf{i}_r = 0 + \frac{k_1}{r} \left(-\frac{k_1}{r^2} \right) + 0 + 0 - \frac{1}{r} \left(\frac{k_2}{r} \right)^2 = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{r^3}$$

$$\frac{DV}{Dt} \cdot \mathbf{i}_\theta = 0 + \frac{k_1}{r} \left(-\frac{k_2}{r^2} \right) + 0 + 0 + \frac{k_1 k_2}{r^3} = 0$$

$$\frac{DV}{Dt} \cdot \mathbf{i}_z = 0$$

4.3 Ecuación de Euler

Ahora ya es posible escribir la ley del movimiento de Newton para una partícula de fluido. Selecciónese un elemento de volumen $\delta \mathcal{V}$ de fluido que tenga una masa $\rho \delta \mathcal{V}$. Puesto que $-\nabla p$ es la fuerza de presión por unidad de volumen de fluido, este elemento de volumen está sujeto a una fuerza de presión $(-\nabla p) \delta \mathcal{V}$. También, sobre éste actúa la fuerza gravitatoria $(\rho \delta \mathcal{V}) \mathbf{g}$. Al igualar el producto de la masa $\rho \delta \mathcal{V}$ por la aceleración de una partícula de fluido a la suma de la fuerza de presión $(-\nabla p) \delta \mathcal{V}$ y la fuerza gravitatoria $(\rho \delta \mathcal{V}) \mathbf{g}$ que actúa sobre la partícula de fluido, la ecuación del movimiento se escribe como sigue:

$$(\rho \delta \mathcal{V}) \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = (-\nabla p) \delta \mathcal{V} + (\rho \delta \mathcal{V}) \mathbf{g}$$

Al dividir entre $(\rho \delta \mathcal{V})$, se obtiene la *ecuación de Euler*:²

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (4.5)$$

El lado izquierdo de la ecuación de Euler es la aceleración de una partícula de fluido, en tanto que el lado derecho es la suma de las fuerzas por unidad de masa del fluido. Adviértase que la densidad del fluido aparece sólo en el denominador del término de la fuerza de presión. Para una cantidad determinada de aceleración, una partícula de fluido líquido de alta densidad requiere un gradiente de presión ∇p mucho mayor que el que requeriría una partícula de fluido gaseoso de baja densidad. Por otra parte, una gota de agua y una de mercurio caerían libremente en el vacío ($\nabla p = 0$) con la misma aceleración \mathbf{g} a pesar de tener densidades diferentes. En ausencia de movimiento ($\mathbf{V} = 0$), la ecuación de Euler se reduce a la ecuación para el equilibrio estático, ecuación 2.6.

En el caso de trabajar con problemas y ejemplos que usan coordenadas cartesianas, aquí se proporcionan las componentes x , y y z de la ecuación de Euler, las cuales se obtienen al evaluar el producto escalar de la ecuación 4.5 multiplicada por \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y e \mathbf{i}_z , respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_x$$

² Leonhard Euler (1707-1783) fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Muchas de sus contribuciones fueron en los campos de la mecánica, la dinámica y la hidrodinámica. Él fue quien demostró que la ecuación de Bernoulli es una integral de la ecuación de Euler.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_z \quad (4.6)$$

Ejemplo 4.2

Un flujo incompresible estacionario no viscoso tiene un campo de velocidad:

$$u = fx; \quad v = -fy; \quad w = 0$$

donde f es una constante que tiene las dimensiones de s^{-1} . Deduzca una expresión para el campo de presión $p\{x, y, z\}$ si la presión $p\{0, 0, 0\} = p_0$ y $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}_z$.

Solución

Al sustituir los valores de las componentes de la velocidad en la ecuación 4.6 de Euler, se encuentra:

$$fx \frac{\partial(fx)}{\partial x} - fy \frac{\partial(fx)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \text{o} \quad f^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$fx \frac{\partial(-fy)}{\partial x} - fy \frac{\partial(-fy)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \text{o} \quad f^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones,

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{(fx)^2}{2} + h\{y, z\}$$

y al sustituir en la segunda e integrar:

$$f^2 y = -\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$h = -\frac{(fy)^2}{2} + k\{z\}$$

La expresión para p ahora se transforma en:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{f^2}{2} (x^2 + y^2) + k\{z\}$$

Al sustituir esta expresión para p en la tercera ecuación de Euler y al integrar:

$$0 = -\frac{\partial k}{\partial z} - g$$

$$k\{z\} = -gz + c$$

Si se sustituye $g k\{z\}$ en la expresión para p se tiene que:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{f^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + c$$

Por último, se elige $c = p_0/\rho$ de forma que satisfaga la condición $p\{0, 0, 0\} = p_0$:

$$p = p_0 - \rho gz - \rho \frac{f^2}{2}(x^2 + y^2)$$

4.3.1 Flujo de densidad constante

Si la densidad del fluido es constante en todo el campo de flujo y no varía con el tiempo—un caso de flujo incompresible— es posible simplificar la forma de la ecuación de Euler si se define una nueva variable independiente p^* :

$$p^* \equiv p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \quad (4.7)$$

de manera que la ecuación 4.5 de Euler adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla(p^* + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) + \mathbf{g} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla p^* \quad (\text{si } \nabla \rho = 0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde se ha utilizado la ecuación 2.7 para eliminar el término de la gravedad. La variable p^* es una medida de la cantidad en que difiere la presión p de la distribución de la presión hidrostática, y ∇p^* es la fuerza neta por unidad de volumen que se encuentra disponible para acelerar el flujo.

Al introducir la variable p^* , de la ecuación de Euler se ha eliminado la gravedad en forma explícita. Una vez resuelta la ecuación de Euler y luego de obtener $p^*\{\mathbf{R}, t\}$, es posible determinar $p\{\mathbf{R}, t\}$ a partir de la ecuación 4.7.

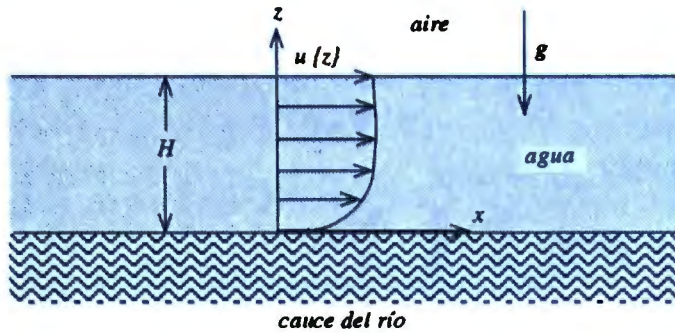


Figura E 4.3

Ejemplo 4.3

Un río de profundidad H fluye de manera estacionaria con una velocidad horizontal $\mathbf{V} = u(z) \mathbf{i}_x$, la cual varía con la altura z por encima del cauce del río, como lo indica la figura E4.3. Encuentre una expresión para la distribución de presión $p(z)$ en el río.

Solución

Si se nota que $D\mathbf{V}/Dt = 0$, puesto que u no depende de x , p^* debe ser una constante para satisfacer la ecuación 4.8 de Euler. Si esta constante se evalúa en la interfaz aire-agua,

$$p(z) + \rho g z = p_a + \rho g H$$

$$p(z) = p_a + \rho g(H - z)$$

Esta es la misma distribución de presión que existiría si el agua del río no se moviera.

A fin de asegurar que el río continúe fluyendo aguas abajo en presencia de fricción en el fondo (flujo viscoso), en la figura E 4.3, la superficie del fondo tendría que hacerse girar un poco en el sentido de las manecillas del reloj. Esto cambiaría muy poco la distribución de presión que se calculó con anterioridad.

4.4 Ecuación de Bernoulli

Para resolver el problema del flujo de un fluido no viscoso, empleando coordenadas cartesianas, se debe integrar la ecuación de Euler a fin de encontrar las cuatro variables escalares dependientes u , v , w y p como funciones de las variables independientes

x, y, z y t (si se supone que ρ es una constante). Ya que se necesitan cuatro ecuaciones escalares para encontrar las cuatro variables dependientes, a las tres componentes escalares de la ecuación 4.6 de Euler, debe añadirse la ecuación de la conservación de la masa de un fluido incompresible, ecuación 3.17:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

La resolución de ese complejo conjunto de ecuaciones es, de hecho, un enorme problema. Todavía no se encuentra una integral general de estas ecuaciones. Incluso, una solución numérica de un movimiento arbitrario tridimensional de carácter no estacionario requiere el uso de una supercomputadora. Sin embargo, si sólo se concentrara la atención en los flujos de geometría simple y con condiciones iniciales y de frontera, sería posible encontrar algunas soluciones analíticas que resulten útiles desde el punto de vista práctico. Se dan ejemplos de esto en el capítulo 11.

Gracias a su genialidad, Bernoulli³ fue quien dedujo lo que más tarde resultó ser una sola integral escalar de la ecuación de Euler, la cual se aplica a cualquier flujo no viscoso siempre y cuando la densidad del fluido no varíe en forma arbitraria, sino sólo de manera preestablecida. Esta integral, conocida como *ecuación de Bernoulli*, por lo general, se aplica en forma directa a muchos problemas que atañen a la ingeniería, proporcionando información útil, aunque incompleta, acerca del flujo de fluidos. (Para una descripción completa del flujo de fluidos se necesitarían cuatro integrales escalares de la ecuación de Euler y la ecuación de la conservación de la masa.)

Si se pretende deducir la ecuación de Bernoulli, se comienza por usar la identidad vectorial de la ecuación 1.40 a fin de sustituir el término $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ en la ecuación 4.5 y se reacomodan los términos para obtener la forma siguiente de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

Después, esta forma de la ecuación de Euler se integra a lo largo de una línea C en el espacio, cuyo elemento de longitud es dc , formando el producto escalar de la ecuación de Euler y dc e integrando entre los puntos 1 y 2 a lo largo de la línea C :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot dc + \int_1^2 \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \cdot dc + \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot dc - \int_1^2 \mathbf{g} \cdot dc \\ = \int_1^2 \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot dc \end{aligned} \quad (4.10)$$

³ Daniel Bernoulli (1700-1782) fue matemático, hidrodinamista y médico. Su *Hidrodinámica* (1738) explica su ecuación pero no la deduce específicamente de los primeros principios. Fue Euler quien después llevó a cabo la deducción.

Dos de los términos de esta ecuación pueden integrarse en forma directa, si se emplean las ecuaciones 1.46 y 2.7:

$$\int_1^2 \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{c} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

$$\int_1^2 \mathbf{g} \cdot d\mathbf{c} = \int_1^2 \nabla(\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{c}$$

$$= \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1$$

Para integrar los otros términos, se elige la línea C como línea de corriente, v.g., $d\mathbf{c}$ es paralelo a \mathbf{V} en cada punto a lo largo de la línea. Para resaltar esta elección, el elemento de línea de corriente se denota por $d\mathbf{s}$. Con esta elección, la integral del lado derecho de la ecuación 4.10 es cero, porque el integrando es perpendicular a \mathbf{V} y, por lo tanto, el producto escalar del integrando con $d\mathbf{s}$ es idéntico a cero:

$$\int_1^2 \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{si } d\mathbf{s} \times \mathbf{V} = 0) \quad (4.11)$$

donde la condición de que $d\mathbf{s}$ es paralelo a \mathbf{V} puede expresarse como $d\mathbf{s} \times \mathbf{V} = 0$. Es posible calcular con facilidad la integral del gradiente de presión si la densidad no cambia a lo largo de la línea de corriente:⁴

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\rho} \int_1^2 \nabla p \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) \quad (\text{si } \mathbf{V} \cdot (\nabla \rho) = 0) \quad (4.12)$$

donde la constancia de la densidad a lo largo de la línea de corriente se garantiza con la condición de que el gradiente de densidad $\nabla \rho$ sea perpendicular a \mathbf{V} o bien, $\mathbf{V} \cdot (\nabla \rho) = 0$. Insertando estos valores en las integrales de la ecuación 4.10,

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \right) = 0$$

$$(\text{si } \mathbf{V} \cdot (\nabla \rho) = 0; d\mathbf{s} \times \mathbf{V} = 0) \quad (4.13)$$

Ésta es la forma de la *ecuación de Bernoulli* correspondiente al caso de densidad constante a lo largo de la línea de corriente.

⁴ No es suficiente que el flujo sea incompresible ($D\rho/Dt = 0$) para que la densidad sea constante a lo largo de la línea de corriente, a menos de que el flujo también sea estacionario. Sin embargo, es suficiente, pero no necesario, que la densidad sea constante en todo punto en el campo de flujo a fin de satisfacer su constancia a lo largo de una línea de corriente.

En el caso de un flujo no estacionario, es preciso conocer el integrando del primer término de la ecuación de Bernoulli, ecuación 4.13, en todos los puntos a lo largo de la línea de corriente instantánea para poder calcular la integral. Si el flujo es tal que las líneas de corriente no cambian con el transcurso del tiempo, pero la velocidad \mathbf{V} sí, entonces $\partial\mathbf{V}/\partial t$ tiene la dirección de \mathbf{V} y de ds y resulta fácil calcular la integral.

En un flujo estacionario, el primer término de la ecuación 4.13 está ausente y la suma $\mathbf{V}^2/2 + p/\rho - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de la misma línea de corriente, pero no necesariamente el mismo valor que el de los puntos a lo largo de una línea de corriente distinta.

En este texto, en la sección de hidrostática se utilizó la convención para el sistema de coordenadas cartesianas que considera la dirección del eje z como vertical y opuesta a la dirección de \mathbf{g} . Según esta convención, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = -gz$ y la ecuación de Bernoulli toma la siguiente forma:

$$\int_1^2 \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \left(\frac{\mathbf{V}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) - \left(\frac{\mathbf{V}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) = 0$$

$$(si \mathbf{V} \cdot (\nabla\rho) = 0; d\mathbf{s} \times \mathbf{V} = 0; \mathbf{g} = -g\mathbf{i}_z) \quad (4.14)$$

Resulta conveniente usar esta forma de la ecuación de Bernoulli para trabajar gran parte de los problemas.

4.4.1 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es muy útil pues permite comprender el comportamiento de muchos flujos que la ingeniería estudia. En esta sección se dan ejemplos de flujos estacionarios y no estacionarios de fluidos incompresibles, los cuales muestran la aplicación de la ecuación de Bernoulli al flujo de fluidos.

Corrientes de fluidos

Uno de los flujos de fluidos no viscosos más simples es el que tiene lugar en la corriente de un fluido (como el agua) que fluye a través de un fluido estacionario con el cual no se mezcla (como el aire). Considérese el caso del agua que fluye al salir de un grifo, como se aprecia en la figura 4.1. La velocidad del agua cuando sale del grifo es V_1 y tiene la forma de una corriente circular con diámetro D_1 . Al caer, el agua se acelera y su diámetro se reduce. Por último, la corriente se hace tan delgada que las fuerzas de tensión superficial provocan que la corriente se rompa y se formen gotas, pero antes de que esto suceda, es posible describir el flujo si se aplica la ecuación 4.14 de Bernoulli a la línea de corriente central de la corriente de agua:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$

En la línea de corriente central, la presión del agua será la misma que la presión atmosférica a esa misma altura z , puesto que la aceleración radial de la corriente de agua

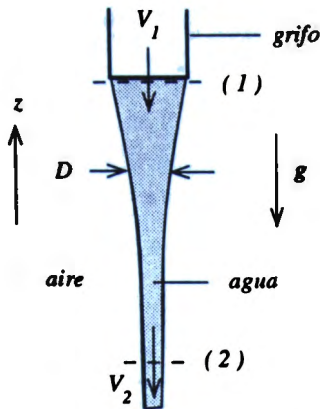


Figura 4.1 La velocidad del agua que sale de un grifo aumenta al caer a través del aire estacionario, como lo describe la ecuación de Bernoulli.

es despreciable. (Aquí también se supone que la tensión superficial es despreciable, de manera que la presión en el interior de la columna de agua es igual a la presión del exterior.) La presión del agua en 1 y 2 se relaciona, así, mediante la distribución de la presión hidrostática en la atmósfera:

$$p_2 + \rho_a g z_2 = p_1 + \rho_a g z_1$$

donde ρ_a es la densidad del fluido ambiente (aire) la cual se supone constante. Al sustituir esta expresión en la anterior y si se despeja V_2^2 se encuentra:

$$V_2^2 = V_1^2 + 2 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) g (z_1 - z_2)$$

La ecuación de Bernoulli demuestra cómo la velocidad del agua aumenta conforme su distancia $z_1 - z_2$ del grifo aumenta. Puesto que la densidad ρ_a del aire es sólo cerca de 10^{-3} veces la densidad del agua, $\rho_a/\rho \ll 1$, y es posible escribir la ecuación de Bernoulli para este caso como sigue:

$$V_2^2 = V_1^2 + 2g(z_1 - z_2)$$

Esto es equivalente a la suposición de que la presión del aire ambiente es una constante y, por lo tanto, $p_1 = p_2$. Sin embargo, esta aproximación no sería justificable si la densidad del fluido ambiente fuera del mismo orden de magnitud que la de la corriente del fluido en movimiento, como sería el caso de una corriente de aceite que se inyecta en agua o aire caliente elevándose hacia una atmósfera más fría.⁵ En estos casos, la aceleración vertical de la corriente es menor que g , es decir, $(1 - \rho_a/\rho)g$.

⁵ En el último caso, $1 - \rho_a/\rho$ es negativo y $z_2 > z_1$, v.g., la corriente del fluido fluye hacia arriba.

Es posible encontrar el diámetro de la corriente que fluye al aplicar la conservación de la masa al flujo estacionario localizado entre 1 y 2:

$$\begin{aligned}\rho V_2 \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right) &= \rho V_1 \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \right) \\ D_2 &= D_1 \sqrt{\frac{V_1}{V_2}} \\ &= D_1 \left(\frac{V_1^2}{V_1^2 + 2g(z_1 - z_2)} \right)^{1/4}\end{aligned}$$

Hay que notar que el diámetro disminuye poco a poco al aumentar $z_1 - z_2$.

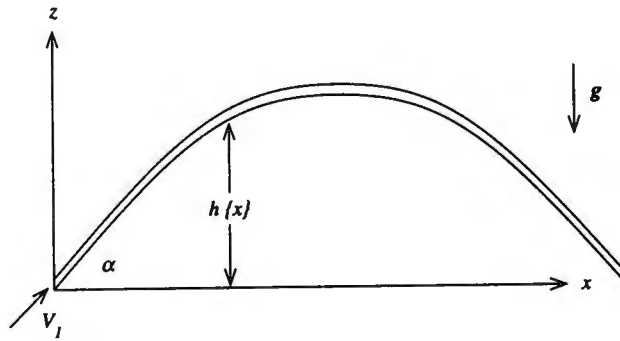


Figura E 4.4

Ejemplo 4.4

De una manguera contra incendios sale una corriente de agua con una velocidad V_1 y forma un ángulo α por encima de la horizontal, como se ilustra en la figura E 4.4. En un principio, la corriente se eleva, pero después de cierto tiempo cae al suelo.

- (a) Encuentre una expresión para la altura $h(x)$ de la corriente por encima de la boquilla de la manguera en función de la distancia horizontal x medida a partir de la boquilla. (b) Calcule el valor máximo de h si $V_1 = 50 \text{ m/s}$ y $\alpha = 45^\circ$.

Solución

(a) En términos de las componentes vertical y horizontal de \mathbf{V} , w y u , la ecuación 4.14 de Bernoulli es la siguiente:

$$\frac{u_1^2 + w_1^2}{2} + gz_1 = \frac{u^2 + w^2}{2} + gz$$

si se supone una presión atmosférica constante. La componente horizontal de la ecuación 4.6 de Euler es $Du/Dt = 0$; por lo tanto, u no cambia a lo largo de la corriente del fluido y $u = u_1$. Si la ecuación de Bernoulli se resuelve para w :

$$w = \sqrt{w_1^2 - 2gh}$$

donde $h = z - z_1$. La pendiente de la corriente del fluido, dh/dx , debe igualar a la razón w/u :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{w}{u} = \frac{\sqrt{w_1^2 - 2gh}}{u_1}$$

Al integrar esta ecuación diferencial para h de $x = 0$ a x :

$$\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{w_1^2 - 2gh}} = \frac{1}{u_1} \int_0^x dx$$

$$- \left| \frac{\sqrt{w_1^2 - 2gh}}{g} \right|_0^h = \frac{x}{u_1}$$

$$w_1 - \sqrt{w_1^2 - 2gh} = \frac{gx}{u_1}$$

$$h(x) = \frac{w_1 x}{u_1} - \frac{gx^2}{2u_1^2}$$

donde $u_1 = V \cos \alpha$ y $w_1 = V \sin \alpha$. Hay que advertir que la corriente del fluido llega al suelo en $x = 2u_1 w_1 / g$.

(b) El valor máximo de h se alcanza cuando $dh/dx = 0$. Si se parte de la ecuación diferencial para h , esto sucede cuando $h = w_1^2 / 2g$. Al calcular h :

$$h = \frac{(50 \text{ m/s} \times \sin 45^\circ)^2}{2 \times 9.807 \text{ m/s}^2} = 63.73 \text{ m}$$

Flujo a través de un orificio

Los fluidos pueden fluir hacia adentro o hacia afuera de tanques o cámaras, a través de una abertura que limite la rapidez del flujo. Un flujo no viscoso se mueve, a través de dichos orificios, con una velocidad que depende de la diferencia de presión que existe entre el fluido localizado en el interior del recipiente y el fluido en su exterior. En la figura 4.2, se ilustran algunas líneas de corriente del flujo incompresible estacionario no viscoso de un fluido que sale por el orificio de área A de una cámara (a la izquierda) sometida a una presión p_1 , hacia una cámara (a la derecha), la cual está sometida a una

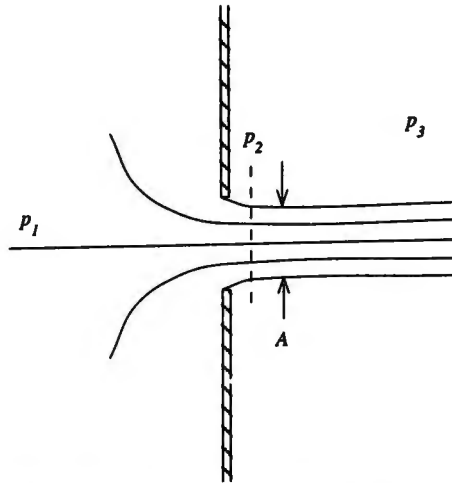


Figura 4.2 El flujo de un fluido no viscoso e incompresible, que pasa por un orificio localizado en una cámara de mayor presión que está a la izquierda y se dirige hacia una cámara de menor presión localizada a la derecha, sigue las líneas de corriente del diagrama. La presión p_2 en el orificio es igual a la presión p_3 de la cámara receptora.

presión menor p_3 . La presión p_2 a la salida del orificio es menor que la presión de la cámara localizada a la izquierda, de manera que el fluido experimenta una aceleración conforme fluye hacia el orificio. Por otra parte, conforme el fluido entra en la cámara localizada a la derecha, su movimiento sigue de izquierda a derecha con velocidad constante, ya que no hay cambios posteriores de presión entre el orificio de salida (presión p_2) y el fluido estacionario de la cámara de la derecha (presión p_3).⁶ Al escribir la ecuación 4.14 de Bernoulli para un flujo estacionario a lo largo de la línea de corriente central del flujo entre un punto alejado del orificio, donde $V_1 = 0$, y un punto en la salida del orificio, se obtiene:

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

$$\frac{V_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\rho}} \quad (4.15)$$

⁶ En un flujo supersónico incompresible, la presión p_2 puede ser mayor que p_3 .

donde se aprovechó el hecho de que $p_2 = p_3$. El gasto volumétrico Q y el gasto másico \dot{m} del fluido a través del orificio se convierten en:⁷

$$Q = A \sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\rho}}$$

$$\dot{m} = A \sqrt{2\rho(p_1 - p_3)} \quad (4.16)$$

El flujo con velocidad constante hacia la cámara receptora no continúa indefinidamente en dirección de la línea de corriente. Las fuerzas viscosas entre el fluido en movimiento y el fluido estacionario de la cámara provocan que el chorro de fluido se haga no estacionario, se fragmente en remolinos (vórtices) y disipe su energía cinética. Huelga decir que en este proceso no ocurre un flujo no viscoso, por lo que la ecuación de Bernoulli es inaplicable a este caso. Sin embargo, el flujo corriente arriba del orificio puede representarse con exactitud como un flujo no viscoso.⁸

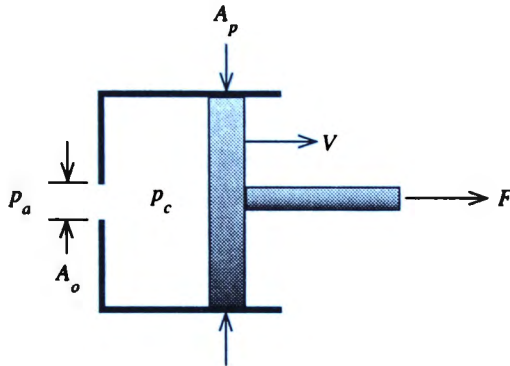


Figura E 4.5

Ejemplo 4.5

Un pistón se coloca en un cilindro circular de área A_p . El pistón se desliza hacia afuera con una velocidad constante V a causa de una fuerza F , como se ejemplifica en

⁷ Puesto que el esfuerzo cortante viscoso que las paredes del orificio ejercen sobre el fluido, los gastos volumétrico y másico reales son ligeramente menores que los de la ecuación 4.16 correspondientes a un flujo no viscoso.

⁸ Es posible encontrar una solución a las ecuaciones de Euler que dé un flujo con líneas de corriente simétricas respecto del plano del orificio. En la práctica, no se observa este tipo de flujos, pero sí, en cambio, el flujo de fluido que sigue las líneas de corriente representadas en la figura 4.2. Esta asimetría se debe a los efectos viscosos del flujo cerca de la superficie del orificio, los cuales no se toman en consideración en la ecuación de Euler.

la figura E 4.5. Al jalar el pistón, el aire atmosférico de densidad ρ fluye por un orificio de área A_o hacia el interior del cilindro, donde el aire tiene una presión p_c menor que la presión atmosférica p_a .

(a) Si se supone que el flujo es incompresible, deduzca las expresiones para la diferencia de presión $p_a - p_c$, la fuerza F y la potencia P necesarias para mover el pistón con una velocidad V . (b) Si se considera que la figura E 4.5 es un modelo apropiado del flujo de aire que ocurre en un pulmón humano, determine la potencia que se requiere para inhalar 0.5 l de aire en 2 s a través del "orificio" de la traquea, el cual tiene un área $A_o = 1.0 \text{ cm}^2$, cuando la densidad del aire es $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$.

Solución

(a) Según la conservación de la masa, el gasto volumétrico de flujo hacia el cilindro dado por la ecuación 4.16 debe ser igual a la rapidez con la cual el volumen del cilindro aumenta, $A_p V$:

$$A_o \sqrt{\frac{2(p_a - p_c)}{\rho}} = A_p V$$

$$p_a - p_c = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A_p V}{A_o} \right)^2$$

La fuerza F aplicada sobre el pistón es igual a la diferencia de presión $p_a - p_c$ a través de las caras del pistón multiplicada por el área del pistón A_p :

$$F = (p_a - p_c) A = \frac{\rho}{2} \left(\frac{A_p V}{A_o} \right)^2 A_p$$

y la potencia P es el producto de la fuerza F por la velocidad V del pistón:

$$P = FV = \frac{\rho}{2} \left(\frac{(A_p V)^3}{A_o^2} \right)$$

(b) Para el pulmón humano, el gasto volumétrico $A_p V = 0.5 \text{ l}/2 \text{ s} = 2.5E(-4) \text{ m}^3/\text{s}$. Así, la potencia P que se consume al inhalar (o exhalar) es:

$$P = \frac{1.225 \text{ kg/m}^3 \times (2.5 E(-4) \text{ m}^3/\text{s})^3}{2 \times (1.0E(-4) \text{ m}^2)^2} = 9.57E(-4) \text{ W}$$

Flujo de tanques presurizados

Con frecuencia, los fluidos se almacenan en recipientes sometidos a una presión mayor que la atmosférica: agua para uso doméstico en tanques de almacenamiento caseros, propano en sistemas de combustible para el hogar o el campo, aire comprimido para talleres, vapor en calderas de plantas generadoras de energía, etc. El flujo que sale de estos recipientes de almacenamiento se regula, por lo general, con válvulas que suministran el fluido a una presión menor que la presión de almacenamiento. Algunas veces,

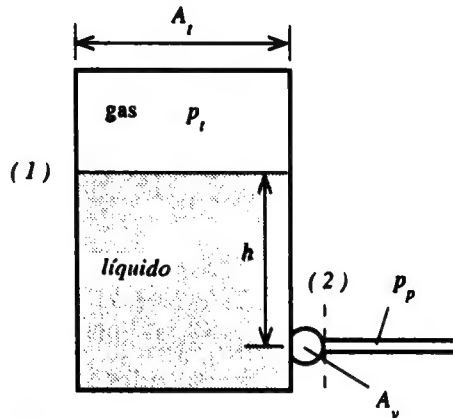


Figura 4.3 Un tanque que mantiene un líquido bajo presión con gas suministra un flujo, a través de una válvula, a un tubo que lleva líquido a una menor presión.

el fluido se escapa hacia la atmósfera por un pequeño orificio o grieta. Es posible encontrar la rapidez de descarga del fluido en estas condiciones si se aplica la ecuación de Bernoulli a un flujo particular.

Considérese un líquido almacenado en un tanque y sometido a una presión p_1 que se mantiene mediante una capa de gas en la parte superior del tanque, como se ejemplifica en la figura 4.3. Una válvula en el fondo del tanque regula el flujo de líquido que sale hacia una tubería que transporta el líquido y cuya presión es p_p . La velocidad de flujo a través de la válvula, V_v , puede determinarse si se aplica la ecuación 4.14 de Bernoulli a una línea de corriente que conecte la interfaz líquido-gas en el tanque con el orificio de la válvula:

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

Por lo general, el área A_1 de la superficie libre en el tanque es mucho mayor que el área A_v del orificio de la válvula. Por conservación de la masa, la velocidad V_1 de la interfaz gas-líquido es mucho menor que la velocidad del líquido que fluye por la válvula:

$$A_1 V_1 = A_v V_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_v}{A_1} \ll 1$$

Al despreciar V_1 comparada con V_2 , la ecuación de Bernoulli se transforma en:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_v^2}{2} + \frac{p_p}{\rho} + gz_2$$

$$V_v = \sqrt{2gh + \frac{2(p_1 - p_p)}{\rho}}$$

donde se sustituyó p_1 por p , y $z_1 - z_2$ por la altura h de la interfaz gas-líquido por encima del punto donde se localiza la válvula. Hay que notar que la velocidad de flujo a través de la válvula se determina por la diferencia entre la presión hidrostática $p + \rho gh$ al nivel de la válvula y la presión p_p en la tubería corriente abajo.

Ejemplo 4.6

Un tanque para almacenar petróleo cuyo diámetro es $D_t = 30 \text{ m}$ se llena con petróleo hasta una profundidad $H = 5 \text{ m}$. El espacio que existe arriba del petróleo cuenta con un respiradero hacia la atmósfera. Por accidente, se rompe un tubo con diámetro interior $D_p = 5 \text{ cm}$ que sale de la base del tanque y provoca que el petróleo se derrame en el suelo. Determine en cuánto tiempo el tanque quedará totalmente vacío.

Solución

Si se aplica la ecuación de Bernoulli, al mismo tiempo que se toma en consideración que la presión del petróleo que sale por el tubo y la presión sobre la superficie del petróleo en el tanque son, ambas, iguales a la presión atmosférica, y si se supone que la velocidad dh/dt en la superficie del petróleo es despreciable, la velocidad V_p del flujo que sale por el tubo es:

$$V_p = \sqrt{2gh\{t\}}$$

donde $h\{t\}$ es la altura de la superficie del petróleo medida desde el fondo del tanque. Según la conservación de la masa, la rapidez de cambio de la altura dh/dt se relaciona con V_p mediante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi D_t^2}{4} h \right) &= - \frac{\pi D_p^2}{4} V_p \\ \frac{dh}{dt} &= - \left(\frac{D_p}{D_t} \right)^2 V_p = - \left(\frac{D_p}{D_t} \right)^2 \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Al integrar esta ecuación diferencial para h , desde $h = H$ hasta $h = 0$, se encuentra:

$$\begin{aligned} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} &= - \int_0^t \sqrt{2g} \left(\frac{D_p}{D_t} \right)^2 dt \\ \left. 2\sqrt{h} \right|_H^0 &= - \sqrt{2g} \left(\frac{D_p}{D_t} \right)^2 t \\ t &= \left(\frac{D_t}{D_p} \right)^2 \sqrt{\frac{2H}{g}} \end{aligned}$$

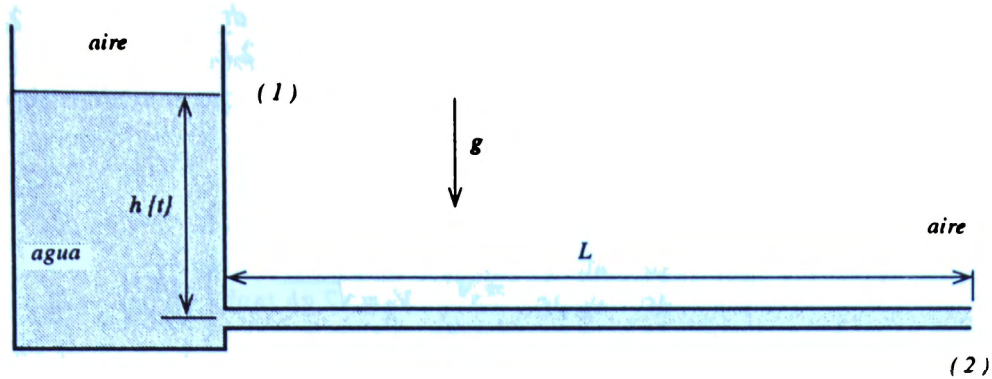


Figura 4.4 A partir del reposo, el agua que llena un tanque y un largo tubo son acelerados cuando de pronto se abre el extremo del tubo.

$$= \left(\frac{30}{0.05} \right)^2 \sqrt{\frac{2 \times 5 \text{ m}}{9.807 \text{ m/s}^2}} = 3.635E(5) \text{ s} = 101.0 \text{ hr}$$

Flujo no estacionario

Los ejemplos considerados hasta ahora han sido flujos estacionarios. Cuando los flujos comienzan desde el reposo o sufren alteraciones al transcurrir el tiempo, el término no estacionario de la ecuación 4.13 de Bernoulli puede cobrar importancia.

Por ejemplo, considérese el caso en el que un flujo se pone en movimiento dentro de un tubo largo con longitud L . Al tiempo $t = 0$, el tubo, que se abastece de agua desde el tanque y la descarga en la atmósfera mediante una válvula localizada en uno de sus extremos, se abre por completo en forma repentina, como se ilustra en la figura 4.4. Si se escribe la ecuación de Bernoulli entre la interfaz aire-agua del tanque y la salida del tubo,

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1$$

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds = g h - \frac{V_2^2}{2}$$

puesto que $p_1 = p_2 = p_{atm}$. La única contribución importante a la integral proviene del fluido en el tubo cuya velocidad $V_2\{t\}$ varía con respecto al tiempo. Al evaluar esta integral sobre la longitud L del tubo,

$$L \frac{dV_2}{dt} = g h - \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{dV_2}{2gh - V_2^2} = \frac{dt}{2L}$$

Al integrar desde $V_2 = 0$ para $t = 0$,

$$\tanh^{-1} \left\{ \frac{V_2}{\sqrt{2gh}} \right\} = \frac{\sqrt{gh} t}{\sqrt{2L}}$$

$$V_2 = \sqrt{2gh} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{gh} t}{\sqrt{2L}} \right\}$$

En un principio, para tiempos t muy pequeños comparados con L/\sqrt{gh} de modo que $\tanh x = x$, la velocidad es $V_2 = gh/L$ de acuerdo con la ecuación diferencial cuando $V_2 = 0$. Durante este periodo, la aceleración del fluido es gh/L . Para tiempos muy grandes $t \gg L/\sqrt{gh}$, V_2 se aproxima a su valor estacionario de $\sqrt{2gh}$. La magnitud del tiempo que se requiere para alcanzar un flujo estacionario es el tiempo $L/\sqrt{2gh}$ que una partícula de fluido requiere para recorrer la longitud de la tubería con la velocidad de un fluido estacionario.

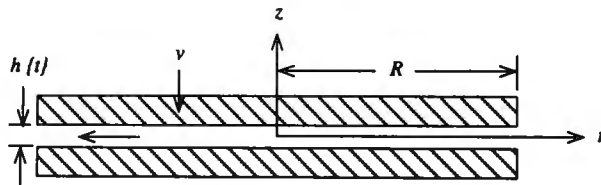


Figura E 4.7

Ejemplo 4.7

Un par de discos de radio R encierran una capa delgada de líquido entre sus caras paralelas, el espesor $h(t)$ de esta capa disminuye respecto al tiempo con una velocidad constante v , v.g., $dh/dt = -v$ (véase la figura E 4.7). El líquido es expulsado en forma radial hacia afuera, con una velocidad V_r que varía con el radio r y con el tiempo t , pero no con la distancia axial z . La presión del líquido en el radio de salida R es la presión atmosférica p_a . Si se supone que se trata de un flujo incompresible, deduzca las expresiones para (a) la velocidad radial V_r , (b) la presión p y (c) la fuerza F que debe aplicarse a cada disco a fin de mantener el movimiento dado.

Solución

(a) Si se aplica la ecuación 3.10 de la conservación de la masa a un volumen de control que encierre la capa de líquido en un radio r ,⁹

$$\frac{d}{dt} (\pi r^2 h) = -2\pi r h V_r,$$

$$V_r = -\frac{r}{2h} \frac{dh}{dt} = \frac{vr}{2h}$$

(b) Al aplicar la ecuación 4.14 de Bernoulli a una línea de corriente horizontal ($z = 0$) entre el eje ($r = 0$) y un punto en el radio r :

$$\int_0^r \frac{\partial V_r}{\partial t} ds + \frac{V_r^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho} = 0$$

donde p_0 es la presión en el eje. Si se advierte que:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{vr}{2h} \right) = \frac{vr}{2} \left(-\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dt} \right) = \frac{v^2 r}{2h^2}$$

entonces:

$$\int_0^r \frac{\partial V_r}{\partial t} dr = \frac{v^2 r^2}{4h^2}$$

Al sustituir esto en la ecuación de Bernoulli, se encuentra:

$$p = p_0 - \rho \frac{V_r^2}{2} - \int_0^r \frac{\partial V_r}{\partial t} dr = p_0 - \frac{3}{8} \left(\frac{vr}{h} \right)^2 \rho$$

Si se escoge p_0 de manera que $p = p_a$ con $r = R$, entonces:

$$p = p_a + \frac{3v^2}{8h^2} (R^2 - r^2) \rho$$

(c) La fuerza F es la integral de $p - p_a$ sobre el área del disco:

$$F = \int_0^R \frac{3v^2}{8h^2} (R^2 - r^2) \rho (2\pi r) dr = \frac{3\pi}{16} \left(\frac{vR^2}{h} \right)^2 \rho$$

Cómo se mide un flujo

En ocasiones, resulta conveniente poder medir la rapidez con la cual fluye un fluido por un tubo o conducto. Cuando se fuerza el paso de un fluido por un estrangulamiento en el interior de un tubo o conducto al mismo tiempo que se mide el cambio de presión que

⁹ Este valor de V_r satisface la ecuación 3.15 de la conservación de la masa en coordenadas cilíndricas cuando $V_z = -vz/h$.

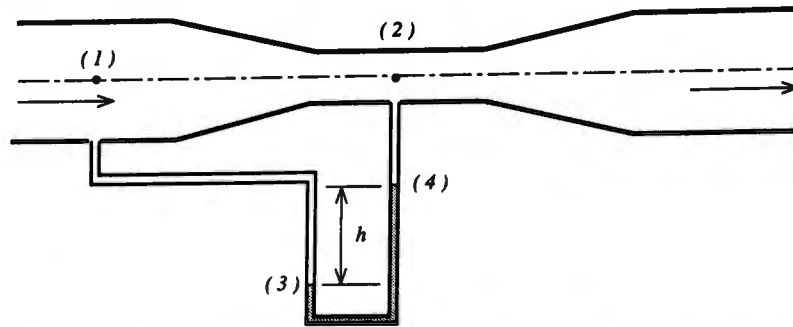


Figura 4.5 Un medidor venturi estrecha el flujo de un fluido con la finalidad de crear una diferencia de presión que se relacione con los gastos volumétrico y másico. El manómetro de la figura se utiliza para medir la diferencia de presión.

se asocia con ese estrangulamiento del flujo, es posible calcular los gastos volumétrico y másico del flujo.

En la figura 4.5 se muestra un *medidor venturi*. Éste comprende una sección de tubo que reduce en forma gradual el área del flujo corriente arriba desde A_1 hasta A_2 en el punto de área mínima. Si se miden las presiones en estos lugares, la ecuación 4.14 de Bernoulli aplicada a la línea de corriente central del flujo puede resolverse para la velocidad del flujo corriente arriba en términos del cambio de presión $p_1 - p_2$ y la razón de velocidades V_2/V_1 :

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left((V_2/V_1)^2 - 1 \right)}}$$

puesto que $z_1 = z_2$. La conservación de la masa exige que $\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$, lo que da como resultado que:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left((A_1/A_2)^2 - 1 \right)}}; \quad Q = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left((A_1/A_2)^2 - 1 \right)}};$$

$$\dot{m} = A_1 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{\left((A_1/A_2)^2 - 1 \right)}} \quad (4.17)$$

Es posible medir la diferencia de presión con un manómetro conectado a un medidor venturi, como se ilustra en la figura 4.5, y en cuyo interior se ha introducido un líquido con densidad ρ_m mayor que la densidad del fluido de trabajo. Puesto que el fluido en

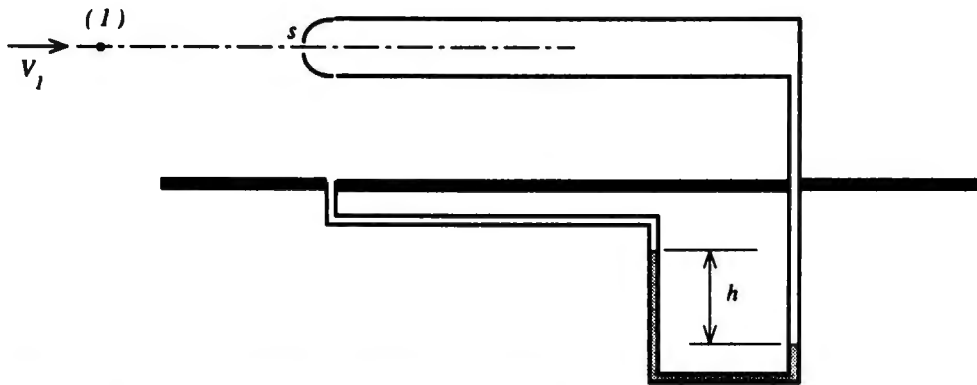


Figura 4.6 Un tubo de Pitot mide la velocidad del flujo directamente contra el viento mediante la diferencia de presión dentro y fuera del tubo.

movimiento no experimenta aceleración en los puntos 1 y 2, la distribución de la presión es hidrostática entre 1-3 y 2-4:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_3 + \rho g z_3$$

$$p_2 + \rho g z_2 = p_4 + \rho g z_4$$

Al restarse,

$$p_1 - p_2 = p_3 - p_4 + \rho g(z_3 - z_4)$$

pues $z_1 = z_2$. En el caso del fluido del manómetro,

$$p_3 + \rho_m g z_3 = p_4 + \rho_m g z_4$$

$$p_3 - p_4 = \rho_m g(z_4 - z_3)$$

Por lo que la diferencia de presión $p_1 - p_2$ se transforma en:

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho)gh$$

En la figura 4.6 se ilustra un instrumento que puede medir la velocidad en un punto del fluido. Este instrumento se conoce como *tubo de Pitot*. Éste consta de un tubo hueco alineado con el flujo que se aproxima y está cerrado por uno de sus extremos con un tapón redondo que tiene un pequeño orificio en la línea central del tubo. El fluido dentro del tubo de Pitot es estacionario, en tanto que el que se aproxima fluye alrededor de éste. Una partícula de fluido que se mueve a lo largo de la línea de corriente, que coincide con el eje del tubo de Pitot, alcanza el reposo al acercarse a la punta del tubo de Pitot (la cual se designa con la letra *s*), debido a que debe dividirse y pasar por ambos lados del tubo. Al entrar momentáneamente en reposo, la presión del fluido se eleva a un valor

p_s , el cual se conoce como *presión de estancamiento* y se relaciona con la velocidad V_1 del flujo corriente arriba mediante la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{V_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho} + g z_s$$

$$p_s = p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_s - p_1)}{\rho}}$$

pues $V_s = 0$ y $z_1 = z_s$. La presión del flujo estacionario en el interior del tubo de Pitot es igual a la presión de estancamiento del flujo externo con el que está en contacto a través del pequeño orificio localizado en el *punto de estancamiento* del tubo. La diferencia de presión $p_s - p_1$ puede medirse con un manómetro dispuesto como lo indica la figura 4.6. Siguiendo el análisis anterior para el medidor venturi, la diferencia de presión es $(\rho_m - \rho)gh$ y la velocidad del flujo que se aproxima es:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho}}$$

Para medir el gasto volumétrico Q en un tubo o conducto, se puede mover el tubo de Pitot para colocarlo en cualquier punto dentro de la sección transversal del flujo, y pueden integrarse las mediciones de la velocidad:

$$Q = \iint V(x, y) dx dy$$

Con frecuencia, este tipo de medición es necesario cuando la velocidad del fluido varía en forma perceptible dentro de un tubo o conducto.

4.5 La ecuación de Euler en coordenadas de línea de corriente

Algunas veces es conveniente elegir un sistema de coordenadas ortogonales, cuyas direcciones locales se definen por una línea de corriente del flujo. Conocidas como coordenadas de línea de corriente, las tres direcciones mutuamente perpendiculares sobre un punto del flujo se determinan por las direcciones de la tangente, la normal y binormal a la línea de corriente que pasa por el punto. Esto se muestra en la figura 4.7 para un punto P en una línea de corriente, donde los vectores unitarios situados en estas tres direcciones se designan mediante los símbolos i_t , i_n e i_b , respectivamente. La normal unitaria i_n apunta en la dirección del centro de curvatura O de la línea de corriente en el punto P , donde la distancia OP es el radio de curvatura R . A fin de desarrollar la ecuación de Euler para este sistema de coordenadas, se colocará dentro de éste un sistema de coordenadas cilíndricas con centro

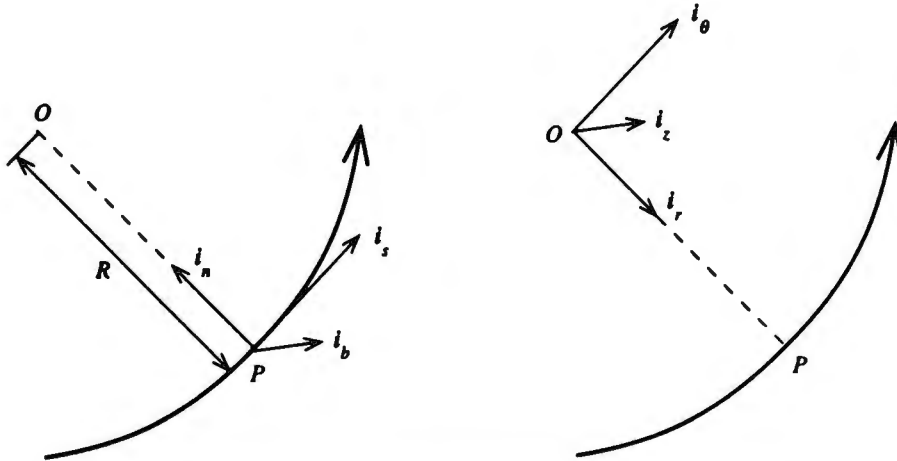


Figura 4.7 Vectores unitarios para las coordenadas de línea de corriente en un punto P sobre una línea de corriente cuyo centro de curvatura es O .

en O y con el eje z en dirección de la binormal \mathbf{i}_b . El punto P se encuentra en un radio $r = R$. Los vectores unitarios para las coordenadas de la línea de corriente y las coordenadas cilíndricas se relacionan según $\mathbf{i}_r = -\mathbf{i}_n$, $\mathbf{i}_\theta = -\mathbf{i}_s$, $\mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_b$, la magnitud de las componentes del vector de velocidad según $V_r = V_n$, $V_\theta = V$, $V_z = V_b$ y las derivadas espaciales de acuerdo con $\partial/\partial r = -\partial/\partial n$, $\partial/r\partial\theta = \partial/\partial s$, $\partial/\partial z = \partial/\partial b$. Si estos valores se sustituyen en la ecuación 4.4 y se observa que $V_n = 0$ y $V_b = 0$ en cualquier punto de la línea de corriente, la aceleración de una partícula de fluido en coordenadas de línea de corriente es:¹⁰

$$\frac{DV}{Dt} = \left(-\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V^2}{R} \right) \mathbf{i}_n + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right) \mathbf{i}_s + \left(\frac{\partial V_b}{\partial t} \right) \mathbf{i}_b \quad (4.18)$$

En el caso del *flujo estacionario* en coordenadas de línea de corriente, la ecuación de Euler tiene una forma particularmente simple:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V^2}{R} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial n} \\ V \frac{\partial V}{\partial s} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial s} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_b = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial b} \quad (\text{flujo estacionario}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

¹⁰ Aunque V_n y V_b son cero en la línea de corriente instantánea que pasa por el punto P , sus derivadas respecto al tiempo no son cero, en general, a menos que el flujo sea estacionario. Si se desarrolla cualquier componente de la velocidad en una serie de Taylor respecto al tiempo, se puede ver que las derivadas temporales primera y superior no son necesariamente cero cuando el primer término es cero.

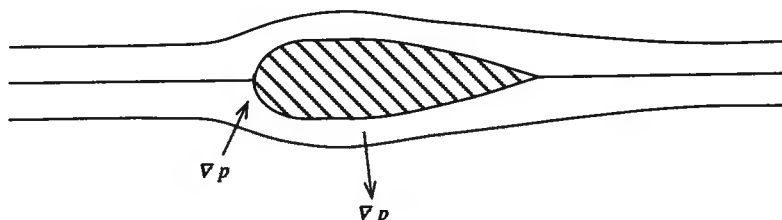


Figura 4.8 Este diagrama de las líneas de corriente en las proximidades de un cuerpo ilustra cómo la dirección del gradiente de presión depende de la curvatura de la línea de corriente.

Existen varios aspectos de estas ecuaciones que merecen señalarse. La primera de las ecuaciones de 4.19, que expresa el movimiento en dirección normal, muestra que la fuerza neta en dirección \mathbf{i}_n causa la aceleración centrífuga V^2/R . La segunda ecuación, para el movimiento a lo largo de la línea de corriente, puede integrarse con el fin de obtener la ecuación de Bernoulli para el flujo estacionario. La tercera ecuación de movimiento en dirección de la binormal, da como resultado una distribución hidrostática de la presión en esta dirección, ya que la aceleración en esta dirección es cero.

La ecuación del movimiento en dirección normal permite determinar de qué forma varía la presión en un flujo estacionario si se conoce la forma de las líneas de corriente. Si la gravedad no tiene una componente en dirección de la normal ($\mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_n = 0$), la presión disminuye en dirección del centro de curvatura de la línea de corriente. Por ejemplo, considérese un flujo estacionario que pasa por un cuerpo aerodinámico, según se ilustra en la figura 4.8. Frente al cuerpo, las líneas de flujo se curvan hacia afuera del mismo y, por lo tanto, la presión en este sitio debe ser mayor que la presión uniforme en las partes alejadas del cuerpo. Por otra parte, en la parte lateral del cuerpo, las líneas de corriente siguen la forma convexa del cuerpo y la presión ahí debe ser menor que la presión de los lugares alejados del cuerpo. En tanto que dicha descripción de la distribución de la presión en este flujo es cualitativamente correcta, no puede lograrse con facilidad un cálculo cuantitativo de la presión en el flujo a partir de la forma de la línea de corriente de la ecuación de Euler, ecuación 4.19, a excepción del caso de flujos muy simples.

4.6 Flujo no viscoso en marcos de referencia no inerciales

Al analizar flujos de fluidos es conveniente a veces usar un sistema de coordenadas ligado a un marco de referencia que no sea inercial, v.g., un sistema en el cual la aceleración que mide un observador en el marco de referencia no inercial sea diferente de aquel que mide un observador en el marco de referencia inercial. Ejemplos característicos de dichos marcos de referencia no inerciales serían un marco de referencia fijo en un cohete de arranque que acelera hacia arriba partiendo de su plataforma de

lanzamiento, o un marco de referencia rotatorio, fijo al rotor de una turbomáquina. En dichos ejemplos, las expresiones para las ecuaciones de Euler y de Bernoulli necesitan modificarse para tomar en cuenta el movimiento del marco de referencia inercial.

Por lo general, el marco de referencia del laboratorio se considera como un marco de referencia inercial cuando se describe el flujo de fluidos en experimentos de laboratorio. Sin embargo, debido a que la Tierra gira sobre su eje, el marco de referencia del laboratorio no es estrictamente inercial, aunque puede considerarse como si lo fuera para el caso de los flujos con escalas pequeñas de longitud y tiempo, características comunes en los sistemas de ingeniería. Para flujos con grandes escalas que cambian lentamente con el tiempo, como el de la atmósfera o el del océano, es necesario tomar en cuenta la velocidad de rotación de la Tierra cuando se use un marco de referencia fijo en la Tierra. Si la velocidad angular de un sistema rotacional es suficientemente alta, es posible que al usar marcos de referencia no inerciales se requiera hacer correcciones, las cuales son importantes aun para flujos a escala de laboratorio.

En esta sección se desarrollan las modificaciones de las ecuaciones para el flujo no viscoso que se requieren al usar marcos de referencia no inerciales para dos casos simples. El primer caso es un marco de referencia traslacional (pero no rotacional) acelerado. El segundo caso es el de un marco de referencia que gira con una velocidad angular estacionaria alrededor de un eje cuya dirección es fija, pero que no presenta un movimiento de traslación con respecto al marco de referencia inercial. Estos dos ejemplos son suficientes para cubrir la mayor parte de las aplicaciones de importancia para la ingeniería.

4.6.1 Marco de referencia traslacional y acelerado

Considérese un marco de referencia no inercial que presenta un movimiento de traslación con respecto al marco de referencia inercial. (Por traslación se entiende que los ejes del sistema de coordenadas no cambian de dirección en el espacio inercial.) Se indican la posición y velocidad de una partícula de fluido en el marco de referencia no inercial por medio de $\tilde{\mathbf{R}}$ y $\tilde{\mathbf{V}}$, respectivamente, para distinguirlas de la posición \mathbf{R} y velocidad \mathbf{V} en el marco de referencia inercial. (Puesto que se trata de velocidades no relativistas, el tiempo t será el mismo en ambos marcos de referencia.) Si la velocidad del marco de referencia no inercial (medida en el marco de referencia inercial) se denota por $\mathbf{V}_{ni}\{t\}$, las velocidades de las partículas de fluido en los dos marcos de referencia se relacionan mediante:

$$\mathbf{V}\{\mathbf{R}, t\} = \mathbf{V}_{ni}\{t\} + \tilde{\mathbf{V}}\{\tilde{\mathbf{R}}, t\} \quad (4.20)$$

v.g., la velocidad de una partícula de fluido en el marco de referencia inercial es la suma de la velocidad del marco de referencia no inercial y la velocidad de la partícula de fluido medida respecto del marco de referencia no inercial. Con el fin de relacionar las aceleraciones de una partícula de fluido como se midieron en los dos marcos de referencia, se deriva la ecuación 4.20 siguiendo la partícula de fluido:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{D\mathbf{V}_{ni}\{t\}}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \right) \tilde{\mathbf{V}}\{\tilde{\mathbf{R}}, t\}$$

$$= \mathbf{a}_{ni}\{t\} + \frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{D}t} \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{a}_{ni}\{t\}$ es la aceleración del marco de referencia traslacional no inercial, medida en el marco de referencia inercial y donde la derivada material $\tilde{D}/\tilde{D}t$ en un marco de referencia no inercial cartesiano (por ejemplo) es:

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (4.22)$$

Ecuación de Euler

La ecuación 4.5 de Euler, ahora puede escribirse en términos del marco de referencia en movimiento al sustituir la ecuación 4.21 en la 4.5:

$$\mathbf{a}_{ni}\{t\} + \frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{D}t} = -\frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} p + \mathbf{g}$$

$$\frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{D}t} = -\frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} p + \mathbf{g} - \mathbf{a}_{ni}\{t\} \quad (4.23)$$

El efecto neto del marco de referencia acelerado consiste en hacer aparecer que la aceleración de la gravedad \mathbf{g} se altera una cantidad $-\mathbf{a}_{ni}\{t\}$ que, en general, es función del tiempo. Este aumento es el que se percibe cuando, en un elevador, las personas sienten que su “peso” aumenta o disminuye conforme el ascensor acelera hacia arriba o hacia abajo después de detenerse. Si a un vaso con agua se le permite caer libremente, la aceleración del vaso $\mathbf{a}_{ni}\{t\}$ es igual a \mathbf{g} , y debido a que no hay movimiento del agua en relación con el vaso ($\tilde{\mathbf{V}} = 0$), la ecuación de Euler se satisface si la presión dentro del agua es uniforme ($\tilde{\nabla} p = 0$).

Ecuación de Bernoulli

A fin de obtener la ecuación de Bernoulli para el marco de referencia no inercial, se integra la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente del flujo en el marco de referencia no inercial.¹¹ En el caso particular de densidad constante a lo largo de la línea de corriente, el equivalente de la ecuación 4.13 se convierte en:

$$\int_1^2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} \cdot d\tilde{\mathbf{s}} + \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{ni}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_2 \right) - \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{ni}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_1 \right) = 0$$

$$(\text{si } \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \rho = 0) \quad (4.24)$$

¹¹ Una línea de corriente que pasa por un punto P en el marco de referencia inercial *no es* la misma que la línea de corriente en el plano de referencia no inercial que pasa por el mismo punto $\mathbf{V} \neq \tilde{\mathbf{V}}$.

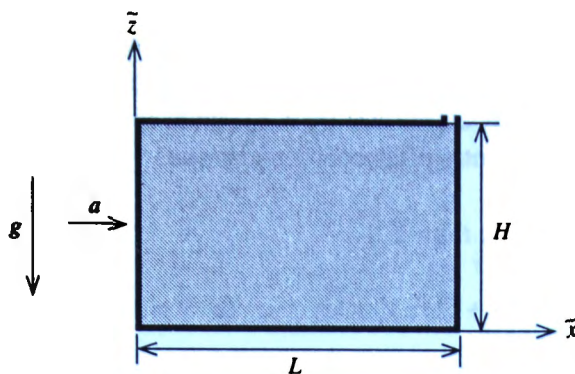


Figura E 4.8

Ejemplo 4.8

Un automóvil que recibe un golpe por detrás en forma accidental, experimenta una aceleración hacia adelante cuya magnitud es $2g$. Su tanque de combustible, lleno de gasolina de densidad $\rho = 8.6E(2) \text{ kg/m}^3$, está abierto a la atmósfera en su esquina superior delantera, como se ilustra en la figura E4.8. La longitud del tanque es $L = 1.0 \text{ m}$ y su altura $H = 0.6 \text{ m}$. Calcule en dónde se localiza la máxima presión del tanque y cuál es su valor.

Solución

Debido a que no existe un movimiento relativo del fluido en el tanque ($\tilde{V} = 0$), la ecuación 4.24 de Bernoulli para un marco de referencia acelerado se transforma en:

$$\frac{p}{\rho} + (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in}) \cdot \tilde{\mathbf{R}} = \frac{p_a}{\rho} - (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_1$$

$$p = p_a - \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in}) \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_1 - \tilde{\mathbf{R}})$$

donde $\tilde{\mathbf{R}}_1 = L\mathbf{i}_x + H\mathbf{i}_z$ es el lugar donde está la abertura del tanque a la atmósfera. La presión será máxima cuando $\tilde{\mathbf{R}} = 0$, v.g., en la esquina inferior izquierda del tanque ($\tilde{x} = 0, \tilde{z} = 0$). Al advertir que $\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in} = -g\mathbf{i}_z - 2g\mathbf{i}_x$ la presión máxima es:

$$p = p_a - \rho(-g\mathbf{i}_z - 2g\mathbf{i}_x) \cdot (L\mathbf{i}_x + H\mathbf{i}_z)$$

$$= p_a + \rho(gH + 2gL)$$

$$= p_a + (8.6E(2) \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)(0.6 + 2 \times 1.0) \text{ m}$$

$$= p_a + 2.207E(4) \text{ Pa}$$

4.6.2 Marco de referencia rotacional con movimiento constante

Debido a las aplicaciones en las cuales se utiliza este marco de referencia, se eligió un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) fijo en el marco de referencia inercial, y otro sistema de coordenadas cilíndricas $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{z})$ fijo al marco de referencia rotacional no inercial. Las relaciones entre estas coordenadas son:

$$r = \tilde{r}, \theta = \tilde{\theta} + \Omega t; z = \tilde{z}$$

$$V_r = \tilde{V}_r; V_\theta = \tilde{V}_\theta + \Omega \tilde{r}; V_z = \tilde{V}_z \quad (\text{o } \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} + \Omega \times \tilde{\mathbf{r}}) \quad (4.25)$$

en las cuales Ω es la magnitud del vector de la velocidad angular $\Omega (= \Omega \mathbf{i}_z)$ de rotación del marco de referencia no inercial cerca del eje z .

No es fácil obtener una expresión para la aceleración $D\mathbf{V}/Dt$ de una partícula de fluido en términos de las cantidades de flujo en el marco de referencia no inercial. Si se usan las relaciones de la ecuación 4.25 en la ecuación 4.4, es posible encontrar la siguiente expresión para la aceleración:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{D}t} - \Omega^2 \tilde{r} \mathbf{i}_r + 2 \Omega \times \tilde{\mathbf{V}} \quad (4.26)$$

El segundo término de la derecha en la ecuación 4.26 es la ya familiar aceleración centrífuga de un cuerpo que se mueve con una velocidad tangencial $\Omega \tilde{r}$ con un radio \tilde{r} alrededor del eje \tilde{z} . El tercer término es la *aceleración de Coriolis*, cuya dirección es perpendicular tanto a la velocidad $\tilde{\mathbf{V}}$ como a la velocidad angular Ω .

Ecuación de Euler

Al sustituir la ecuación 4.26 en la ecuación 4.5, se obtiene una expresión para la ecuación de Euler en términos de las coordenadas no inerciales y el movimiento:

$$\frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{D}t} = -\frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} p + \mathbf{g} + \Omega^2 \tilde{r} \mathbf{i}_r - 2 \Omega \times \tilde{\mathbf{V}} \quad (4.27)$$

Los últimos dos términos de la derecha, los cuales tienen dimensiones de aceleración, se suman a la fuerza de presión y a la fuerza gravitatoria por unidad de masa $\tilde{\nabla} p/\rho$ y \mathbf{g} , al producir la aceleración relativa $\tilde{D}\tilde{\mathbf{V}}/\tilde{D}t$ como se midió en el marco de referencia no inercial. Cuando éstas se multiplican por ρ , a veces se les llama fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis por volumen unitario, pero, por supuesto, éstas no son fuerzas reales.

Ecuación de Bernoulli

Es posible integrar la ecuación 4.27 de Euler a lo largo de una línea de corriente del flujo en el marco de referencia no inercial, si se toma en cuenta que el término

$2 \boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{V}}$ no contribuye a la integral ya que es perpendicular a $d\tilde{\mathbf{s}}$ y que el término de la aceleración centrífuga $\boldsymbol{\Omega}^2 r \tilde{\mathbf{r}} \cdot d\tilde{\mathbf{s}} = \Omega^2 \tilde{r} d\tilde{r}$. Para el caso de densidad constante a lo largo de una línea de corriente, la ecuación de Bernoulli tiene la forma:

$$\int_1^2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} \cdot d\tilde{\mathbf{s}} + \left(\frac{\tilde{V}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_2 - \frac{(\Omega \tilde{r}_2)^2}{2} \right) - \left(\frac{\tilde{V}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_1 - \frac{(\Omega \tilde{r}_1)^2}{2} \right) = 0$$

(si $\tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \rho = 0$) (4.28)

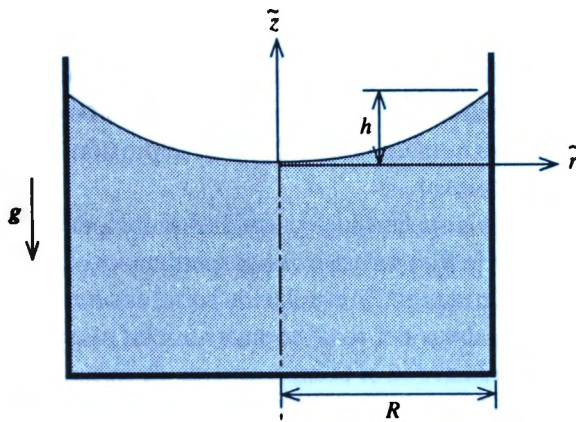


Figura E 4.9

Ejemplo 4.9

Un frasco de radio $R = 5 \text{ cm}$, parcialmente lleno de agua, se coloca sobre una mesa giratoria. Después de que ésta ha estado dando vueltas con una velocidad constante de 33 revoluciones por minuto durante mucho tiempo, el agua permanece sin movimiento ($\tilde{\mathbf{V}} = 0$), en el marco de referencia giratorio, en tanto que su superficie tiene la forma de un paraboloides de revolución, como se ilustra en la figura E4.9. El nivel de agua en la orilla exterior es mayor una cantidad h que el de la línea central. Calcule la altura h .

Solución

Si se usa la ecuación 4.28 de Bernoulli y el punto 2 es $\tilde{r} = 0$, $\tilde{z} = 0$, en tanto que el punto 1 es $\tilde{r} = R$, $\tilde{z} = h$, al mismo tiempo que se advierte que $\tilde{\mathbf{V}} = 0$ y tanto p_1 como p_2 son iguales a la presión atmosférica, se encuentra:

$$g\tilde{z}_2 - \left(g\tilde{z}_1 - \frac{(\Omega R)^2}{2} \right) = 0$$

$$h = \frac{(\Omega R)^2}{2g}$$

$$= \frac{((33 \times 2\pi + 60 \text{ s}) \times 5.0E(-2) \text{ m})^2}{2 \times 9.807 \text{ m/s}^2}$$

$$= 1.522E(-3) \text{ m}$$

4.6.3 Flujo no viscoso en máquinas giratorias

Para aumentar la presión de un fluido se utilizan, por lo común, máquinas giratorias o alternantes. En éstas, si la velocidad de rotación es suficientemente alta, la aceleración centrífuga puede originar un aumento importante en la presión. Este principio se usa en la *bomba centrífuga* o *compresor*.

Una bomba, un compresor o una turbina consta de dos componentes mecánicos, el *rotor* (el cual gira alrededor de un eje fijo) y el *estator* (que permanece estacionario). En el sistema de coordenadas de laboratorio, que es fijo en relación con el estator, el flujo es no estacionario debido a que los álabes o paletas del rotor se mueven con respecto a este sistema y las presiones y velocidades cambian con el tiempo, aunque de forma periódica. No existe una solución simple de la ecuación de Euler o de la de Bernoulli para este flujo no estacionario. En cambio, si se toma en cuenta que el flujo relativo al rotor es estacionario, se usa el marco giratorio de referencia no inercial, fijo en el rotor a fin de determinar los cambios que experimenta el flujo desde que entra hasta que sale.

Considérese el ejemplo simple de una bomba centrífuga, como se ejemplifica en la figura 4.9. La velocidad de entrada V_1 es sólo axial, de manera que las velocidades de entrada en los marcos de referencia inercial y no inercial se relacionan mediante:

$$V_{r1} = 0; V_{\theta1} = 0; V_{z1} = -V_1$$

$$\tilde{V}_{r1} = 0; \tilde{V}_{\theta1} = -\Omega \tilde{r}_1; \tilde{V}_{z1} = -V_1$$

en tanto que en la salida del rotor el flujo relativo en el marco de referencia no inercial es puramente radial con una velocidad \tilde{V}_2 , obteniéndose:

$$\tilde{V}_{r2} = \tilde{V}_2; \tilde{V}_{\theta2} = 0; \tilde{V}_{z2} = 0$$

$$V_{r2} = \tilde{V}_2; V_{\theta2} = \Omega \tilde{r}_2; V_{z2} = 0$$

De estas relaciones se sigue que los cuadrados de las velocidades se relacionan mediante:

$$\tilde{V}_1^2 = V_1^2 + (\Omega r_1)^2; V_2^2 = \tilde{V}_2^2 + (\Omega r_2)^2 \quad (4.29)$$

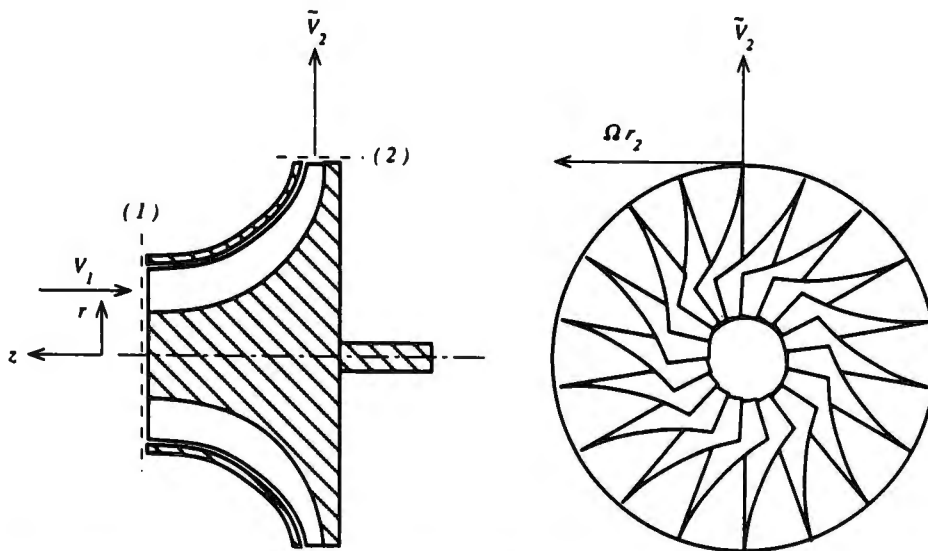


Figura 4.9 Sección transversal de una bomba centrífuga y vista axial del rotor.

Si esta relación se sustituye en la ecuación 4.28 de Bernoulli, y se advierte que hay un flujo estacionario a través del rotor, a la vez que se desprecia la gravedad, se encuentra:

$$p_2 = p_1 + \rho(\Omega r_2)^2 + \rho \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{\tilde{V}_2^2}{2} \right) \quad (4.30)$$

Por lo normal, las áreas de flujo de entrada y de salida son iguales. Si esto es cierto, por conservación de la masa se sigue que $V_1 = \tilde{V}_2$ y, por lo tanto, el último término de la ecuación 4.30 es cero. Para obtener grandes aumentos de presión es necesario tener una velocidad rotacional periférica Ωr_2 alta en el rotor. Los esfuerzos sobre el material del rotor limitan esta velocidad.

Dentro del marco de referencia inercial, el término no estacionario de la ecuación 4.13 de Bernoulli es importante si se compara con los demás términos y no puede ignorarse. Para ver por qué sucede esto, sustitúyanse las ecuaciones 4.29 y 4.30 en la ecuación 4.13 y desprecíese la gravedad para obtener:

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} \cdot ds = -(\Omega r_2)^2$$

Si se hace referencia a la ecuación 4.30, es posible ver que el término no estacionario es comparable, en magnitud, con la elevación de la presión dividida entre la densidad.

Algunas bombas y compresores no utilizan la aceleración centrífuga para cambiar la presión del fluido. Las *máquinas de flujo axial* (v.g., compresores, turbinas, ventiladores y propulsores) tienen un flujo radial despreciable ($V_r = \tilde{V}_r = 0$; $r_1 = r_2$) y logran el cambio de su presión alterando la componente tangencial de la velocidad \tilde{V}_θ relativa al

rotor. En dichas máquinas las condiciones de entrada y salida para el rotor pueden darse como:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{r1} &= 0; & \tilde{V}_{\theta1} &= \Omega r_1; & \tilde{V}_{z1} &= -V_1 \\ \tilde{V}_{r2} &= 0; & \tilde{V}_{\theta2} &= \xi \Omega r_1; & \tilde{V}_{z2} &= -V_1\end{aligned}$$

donde ξ es un parámetro que define el cambio en la velocidad tangencial ($\xi = 1$ significa que no hay cambio) y donde, por conservación de la masa, la velocidad axial no cambia a través del rotor. Las relaciones correspondientes para el cuadrado de las velocidades son:

$$\tilde{V}_1^2 = V_1^2 + (\Omega r_1)^2; \quad \tilde{V}_2^2 = V_1^2 + \xi^2 (\Omega r_1)^2$$

Si se sustituye esto en la ecuación 4.28 de Bernoulli, se desprecia la gravedad y se toma en cuenta que el flujo es estacionario, se encuentra:

$$p_2 = p_1 + \rho (1 - \xi^2) \frac{(\Omega r_2)^2}{2} \quad (4.31)$$

En compresores, ventiladores y propulsores, ξ es ligeramente menor que la unidad debido a la fuerza ascensional limitada que pueden generar las paletas (perfiles aerodinámicos) giratorias. De esta manera, el aumento de la presión disponible en el rotor es menor que en el caso de una máquina centrífuga que tenga la misma velocidad periférica Ωr . Para motores de reacción y compresores de turbina de gas, donde, desde el punto de vista de la termodinámica se desean grandes aumentos en la presión, se necesitan varias etapas de compresión en máquinas de flujo axial. Por otra parte, las turbinas pueden tener grandes caídas de presión (ξ grande y negativa) ya que sus palas o paletas pueden someterse a cargas grandes.

El flujo no viscoso que se describe en esta sección desprecia los efectos de la viscosidad. Los efectos de la viscosidad degradan el funcionamiento de maquinaria giratoria, lo que da como resultado un menor aumento de la presión en compresores que lo que se dio en las ecuaciones 4.30 y 4.31. Estos efectos se estudiarán más adelante en el capítulo 8.

4.7 Flujos especiales

Es posible deducir integrales de la ecuación de Euler muy semejantes a la ecuación de Bernoulli para flujos que cumplen con ciertas restricciones. En algunos problemas puede resultar más ventajoso usar dichas integrales en lugar de la ecuación de Bernoulli.

4.7.1 Flujo barotrópico

En un *flujo barotrópico* la densidad ρ es una función de la presión p solamente, v.g., $\rho = \rho(p)$. Para los fluidos que se manejan comúnmente, un flujo será barotrópico cuando

la entropía \hat{s} del fluido sea una constante a lo largo de la línea de corriente. En el capítulo 8 se demostrará que la entropía de un fluido puede permanecer constante en un flujo no viscoso. Para un fluido barotrópico, la tercera integral de la ecuación 4.10 puede calcularse si se advierte que la segunda ley de la termodinámica, ecuación 1.10, requiere que:

$$\nabla \hat{h} = \frac{1}{\rho} \nabla p + T \nabla \hat{s} \quad (4.32)$$

De esta manera, la tercera integral de la ecuación 4.10 que se midió a lo largo de la línea de corriente se convierte en:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot ds &= \int_1^2 \nabla \hat{h} \cdot ds - \int_1^2 T \nabla \hat{s} \cdot ds \\ &= \hat{h}_2 - \hat{h}_1 \end{aligned}$$

al usar la ecuación 1.46 y advirtiendo que $\nabla \hat{s} \cdot ds = 0$, ya que \hat{s} no varía a lo largo de la línea de corriente. Así, la versión de la ecuación 4.13 para un flujo barotrópico que corresponda a la ecuación de Bernoulli es:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot ds + \left(\frac{V_2^2}{2} + \hat{h}_2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + \hat{h}_1 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \right) &= 0 \\ (\text{si } \mathbf{V} \cdot (\nabla \hat{s}) &= 0) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Esta ecuación es útil principalmente para flujo estacionario compresible no viscoso, ya que resulta difícil calcular el primer término cuando el flujo es no estacionario.

4.7.2 Flujo irrotacional

Un flujo irrotacional es aquel en el que $\nabla \times \mathbf{V}$ es cero en todas partes del campo de flujo. En el capítulo 11 se demostrará que un flujo incompresible puede ser irrotacional. Por el momento, se considerará un flujo con densidad constante ($\nabla \rho = 0$) que sea irrotacional ($\nabla \times \mathbf{V} = 0$).

Al referirse a la ecuación 4.10, el lado derecho es cero para un flujo irrotacional. Para un flujo con densidad constante, la integral que contiene el gradiente de presión puede integrarse a lo largo de cualquier curva, y no sólo a lo largo de una línea de corriente. Así, la ecuación 4.10 toma la forma:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{c} + \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \right) &= 0 \\ (\text{si } \nabla \rho = 0; \nabla \times \mathbf{V} = 0) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Adviértase que este equivalente de la ecuación de Bernoulli se aplica a lo largo de cualquier línea que se encuentre dentro del flujo. En el flujo estacionario esto quiere

decir que la suma $V^2/2 + p/\rho - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$, tiene el mismo valor en todas partes dentro del campo de flujo. De esta manera, conocer el campo de velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ permite calcular el campo de presión $p(\mathbf{R})$, pero no a la inversa.

4.7.3 Flujo sobre una superficie de Bernoulli

Una *superficie de Bernoulli* es una superficie en el flujo que en cualquier punto es tangente al plano que contiene los vectores \mathbf{V} y $\nabla \times \mathbf{V}$ en el punto de tangencia. Una línea de corriente estaría en una superficie de Bernoulli, de igual manera que una "línea de corriente" del campo vectorial $\nabla \times \mathbf{V}$.¹² El producto vectorial $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$ tiene la dirección de la normal con respecto a la superficie de Bernoulli. Si se elige que la curva C de la ecuación 4.10 esté situada en una superficie de Bernoulli, el producto escalar en la integral del lado derecho de la ecuación 4.10 será cero. Al denotar el elemento lineal de dicha curva por medio de $d\mathbf{b}$, la ecuación 4.10 tiene la forma:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{b} + \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \right) = 0$$

(si $\nabla \rho \cdot d\mathbf{b} = 0$; $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{b} = 0$) (4.35)

Para un flujo estacionario, la suma $V^2/2 + p/\rho - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie de Bernoulli. La ecuación 4.35 es válida entre puntos que están situados en la superficie de Bernoulli, pero no necesariamente en la misma línea de corriente, aunque el flujo no sea irrotacional.

4.7.4 Flujo de Beltrami

Un *flujo de Beltrami* es aquel en el que \mathbf{V} y $\nabla \times \mathbf{V}$ son paralelas en todos los puntos, de manera que $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ en todos los puntos, y el lado derecho de la ecuación 4.10 es cero para cualquier curva C . Si la densidad ρ es constante, la ecuación 4.10 tiene la forma:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{c} + \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \right) = 0$$

(si $\nabla \rho = 0$; $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$) (4.36)

Aun cuando el flujo no es irrotacional, la suma $V^2/2 + p/\rho - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ es constante a lo largo de un flujo de Beltrami estacionario. Los flujos de Beltrami son poco comunes y existen sólo en circunstancias especiales.

¹² Al vector $\nabla \times \mathbf{V}$ se le llama *vorticidad* y su "línea de corriente" *línea de vórtice*. En el capítulo 11 se estudia la vorticidad con mayor detalle.

4.8 Problemas

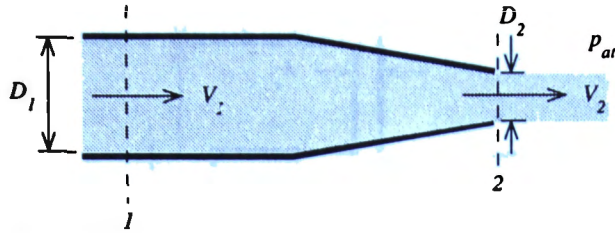


Figura P 4.1

Problema 4.1

Una corriente estacionaria de agua ($\rho = 1.0E(3) \text{ kg/m}^3$) sale por la boquilla de una manguera contra incendios a una velocidad $V_2 = 40 \text{ m/s}$ y presión atmosférica $p_{at} = 1.0E(5) \text{ Pa}$, como se ilustra en la figura P 4.1. El diámetro de la boquilla es $D_2 = 5 \text{ cm}$, y el diámetro de la manguera es $D_1 = 10 \text{ cm}$. (a) Calcule la velocidad V_1 del agua en la manguera contra incendios. (b) Calcule la presión p_1 en la manguera contra incendios.

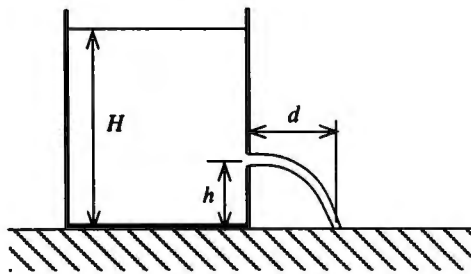


Figura P 4.2

Problema 4.2

Un tanque de almacenamiento, abierto a la atmósfera por su parte superior, contiene agua a una profundidad H desconocida a partir de la base, como se ilustra en la figura P 4.2. Un ingeniero abre una válvula localizada a una distancia h por encima del nivel de la base y observa que la corriente de agua que sale horizontalmente por la válvula se curva hacia abajo para alcanzar el nivel de la base a una distancia d de la base del tanque. Obtenga una expresión para la profundidad H del agua en términos de las distancias medidas h y d .

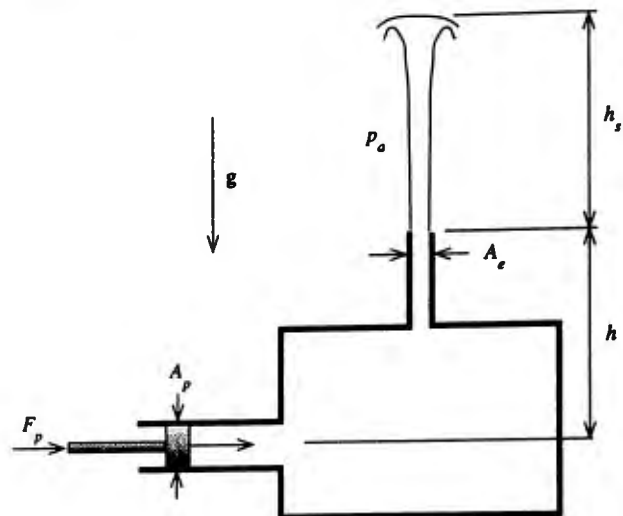


Figura P 4.3

Problema 4.3

En la figura P 4.3, un recipiente lleno de agua tiene un orificio hacia arriba de área A_e a través del cual una corriente estacionaria de agua, impulsada por el movimiento hacia adentro de un pistón dentro de un tubo de área A_p conectado al recipiente, se eleva a una altura h_s por encima del orificio. Deduzca expresiones para (a) la velocidad constante V_p a la cual se mueve el pistón y (b) la fuerza F_p que debe aplicarse al pistón, si se considera un movimiento sin fricción. (c) Tomando en cuenta que FV_p es la potencia requerida para mover el pistón, calcule la potencia necesaria para una fuente que se eleva 10 m y que sale a través de un orificio de diámetro $D_e = 1$ in.

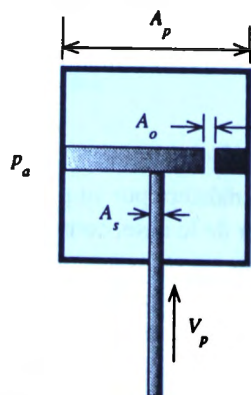


Figura P 4.4

Problema 4.4

Un amortiguador de automóvil consiste en un cilindro lleno de aceite de densidad $\rho = 9E(2) \text{ kg/m}^3$ donde embona un pistón que tiene un orificio, como se ilustra en la figura P4.4. (Las áreas transversales del cilindro, del eje y del orificio son $A_p = 15 \text{ cm}^2$, $A_s = 2 \text{ cm}^2$ y $A_o = 1.0 \text{ cm}^2$.) Calcule la fuerza F requerida para empujar el pistón dentro del cilindro a una velocidad $V_p = 1.0 \text{ m/s}$.

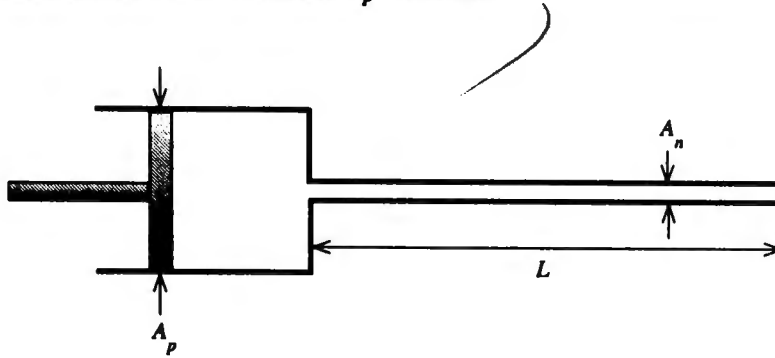


Figura P 4.5

Problema 4.5

En un experimento médico se desea inyectar rápidamente una pequeña cantidad de fluido radiactivo en la vena de un animal. El gasto volumétrico Q de la jeringa que se ilustra en la figura P 4.5, será:

$$Q = Q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\tau} \quad 0 \leq t \leq \tau$$

$$= 0 \quad t \geq \tau$$

Si se supone que el flujo es incompresible y que la presión venosa es la atmosférica, encuentre una expresión para la presión $p\{t\}$ en la cámara de la jeringa si el área de la aguja A_n es mucho menor que el área del pistón A_p , y calcule esta expresión para $A_n = 1.0 \text{ mm}^2$, $A_p = 1.0 \text{ cm}^2$, $L = 10 \text{ cm}$, $Q_0 = 10 \text{ cm}^3/\text{s}$, $\tau = 0.1 \text{ s}$, $\rho = 2E(3) \text{ kg/m}^3$.

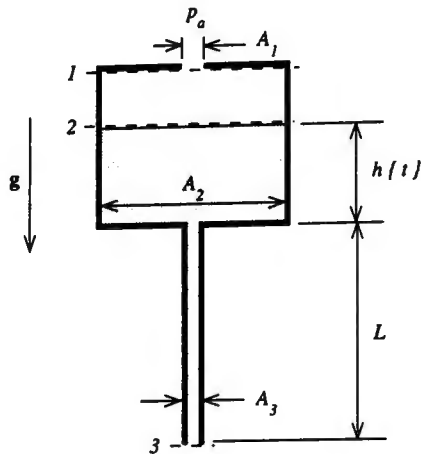


Figura P 4.6

Problema 4.6

Un tanque de área de sección transversal A_2 se encuentra parcialmente lleno de agua a una profundidad $h(t)$ la cual disminuye con el tiempo conforme el agua se vacía a través de un tubo de área de sección transversal A_3 y longitud L unido al fondo del tanque, como se ilustra en la figura P 4.6. El tanque está cerrado en su parte superior, excepto por un pequeño orificio de área A_1 que recibe aire de la atmósfera para reemplazar el agua que se vacía. Las áreas A_1 y A_3 son pequeñas en comparación con A_2 . (a) Si se supone que se trata de un flujo cuasiestacionario, v.g., en el cual los efectos de la aceleración dependiente del tiempo son despreciables, deduzca expresiones para la velocidad V_3 del agua que sale del tubo y la presión p_2 del aire en el tanque. (Puede suponer que la densidad ρ_a del aire, así como la densidad ρ_w del agua, son constantes.) (b) Encuentre una expresión de desigualdad que garantice que es válida la suposición de flujo cuasiestacionario.

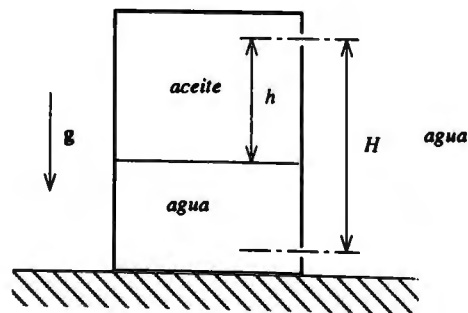


Figura P 4.7

Problema 4.7

Un barril de aceite tóxico se arrojó ilegalmente a un estanque. Como se ilustra en la figura P 4.7, el barril descansa en el fondo del estanque, rodeado de agua. Dos orificios a los lados del barril de igual área, separados por una altura H permiten que el agua entre al barril a través del orificio inferior y que el aceite salga por el orificio superior. Este flujo lo provoca la diferencia entre la densidad del aceite, ρ_o , y la densidad del agua $\rho_w > \rho_o$. Obtenga una expresión para la velocidad V del aceite que sale por el orificio superior cuando la interfaz aceite/agua esté a una distancia h por debajo del orificio superior.

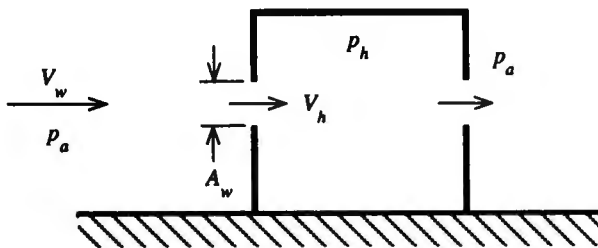


Figura P 4.8

Problema 4.8

Viento con velocidad $V_w = 10 \text{ m/s}$ sopla contra una casa, como se ilustra en la figura P 4.8. En el lado a favor del viento de la casa hay una ventana de área $A_w = 1.0 \text{ m}^2$ abierta al viento. Otra ventana del mismo tamaño en el lado contra el viento de la casa también está abierta. La presión fuera de la casa en el lado a favor del viento es la misma que la presión del lado contra el viento, p_a . (a) Si se supone que se trata de un flujo incompresible ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$), calcule la velocidad V_h del viento que sopla a través de la ventana a favor del viento y la presión p_h en el interior de la casa. (b) Si el volumen \mathcal{V} de la casa es 500 m^3 , ¿qué tiempo τ se requiere para que el volumen del flujo a través de la ventana iguale el volumen de la casa?

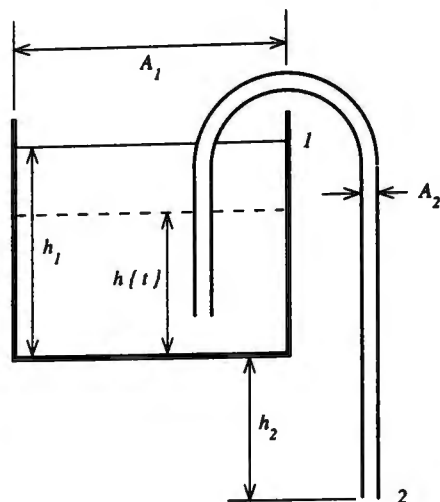


Figura P 4.9

Problema 4.9

Un recipiente grande lleno de agua a una profundidad $h_1 = 20 \text{ cm}$ se vaciará por medio de un sifón de longitud total $L = 1.0 \text{ m}$, cuyo extremo inferior está a una distancia $h_2 = 40 \text{ cm}$ por debajo del fondo del recipiente, como se ilustra en la figura P 4.9. El área $A_1 = 1.0 \text{ m}^2$ de sección transversal del recipiente es mucho mayor que el área $A_2 = 1.0 \text{ cm}^2$ del sifón. En el tiempo $t = 0$ en el que el sifón comienza a funcionar, se llena con agua y se destapa el extremo inferior para permitir que el agua empiece a fluir. Conforme pasa el tiempo, la altura del agua $h(t)$ en el recipiente disminuye. (a) Al comienzo del flujo, calcule la aceleración de una partícula de fluido en el sifón. (b) Después de que ha pasado suficiente tiempo para alcanzar un flujo cuasiestacionario en el sifón, determine la velocidad V_2 del fluido que sale del tubo cuando el nivel es $h(t) = 10 \text{ cm}$. (c) Deduzca y resuelva una ecuación diferencial para $h(t)$.

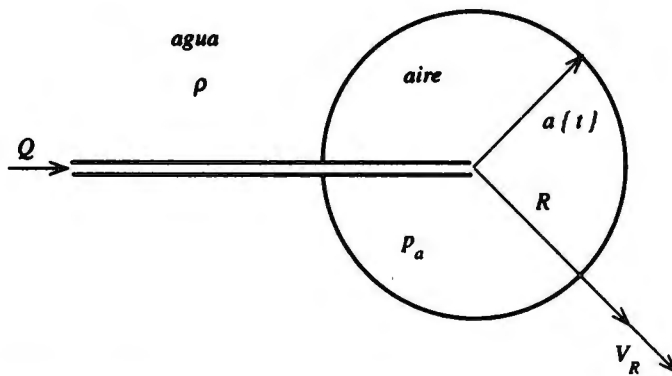


Figura P 4.10

Problema 4.10

Un tubo de diámetro pequeño se inserta en un recipiente que contiene agua. Al empezar en un tiempo $t = 0$, un gasto volumétrico $Q = 10 \text{ cm}^3/\text{s}$ constante de aire se hace pasar por el tubo, formando una burbuja de radio $a(t)$ que aumenta con el tiempo, como se ilustra en la figura P 4.10. El agua se mueve radialmente hacia afuera debido a la burbuja que se expande, y lejos de la burbuja ($R \gg a$), la presión del agua p_∞ es uniforme (puede despreciarse la gravedad). (a) Utilice la conservación de la masa, para obtener una expresión para la velocidad radial V_R del agua a una distancia R del centro de la burbuja; suponga que la densidad del aire es constante. (b) Si se considera que la presión del aire p_a en la burbuja es uniforme, deduzca una expresión para la diferencia de presión $p_a - p_\infty$ para cualquier tiempo t y calcule su valor numérico cuando $t = 1.0 \text{ s}$.

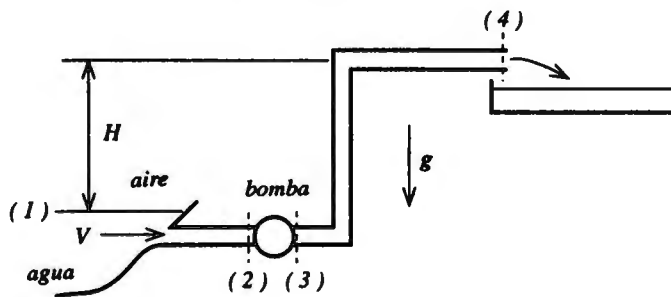


Figura P 4.11

Problema 4.11

Se usa una bomba centrífuga para extraer agua de un lago y bombearla a un depósito de almacenamiento, como se ilustra en la figura P 4.11. La elevación de la salida del tubo (4) tiene una distancia $H = 10 \text{ m}$ por arriba de la superficie del lago. La elevación de la presión $p_3 - p_2$ a través de la bomba se relaciona con la velocidad V en el tubo mediante:

$$p_3 - p_2 = c_1 - c_2 V^2$$

donde $c_1 = 2E(5) \text{ Pa}$ y $c_2 = 5E(2) \text{ kg/m}^3$.

(a) Al suponer que se trata de un flujo estacionario no viscoso, calcule la velocidad de flujo V en el tubo. (b) Si la longitud total L del tubo es 30 m , determine la aceleración dV/dt del fluido cuando la bomba se enciende por primera vez, considerando que el flujo es, en un inicio, estacionario ($V = 0$).

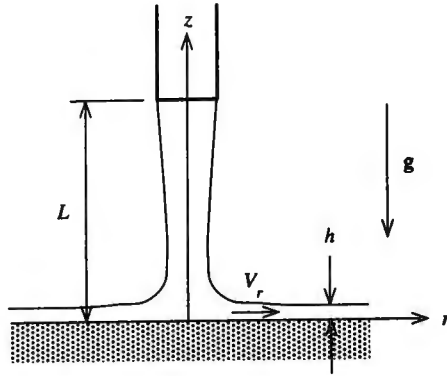


Figura P 4.12

Problema 4.12

El agua fluye con una velocidad uniforme al salir verticalmente hacia abajo, por un tubo redondo, hacia una placa horizontal plana que se encuentra a una distancia $L = 10 \text{ cm}$ más abajo, como se ilustra en la figura P 4.12. El gasto volumétrico es $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$, y el área del tubo es $A = 1.0 \text{ cm}^2$. El agua se extiende uniformemente sobre la placa, de manera que a una distancia r del flujo axial la velocidad radial $V_r \{r\}$ sea uniforme, v.g., independiente de z . El flujo es de simetría axial, de manera que el espesor de la capa de agua $h \{r\}$ depende sólo de r . Obtenga expresiones para $V_r \{r\}$ y $h \{r\}$, si se supone que $h \ll L$, y calcule sus valores cuando $r = 10 \text{ cm}$.

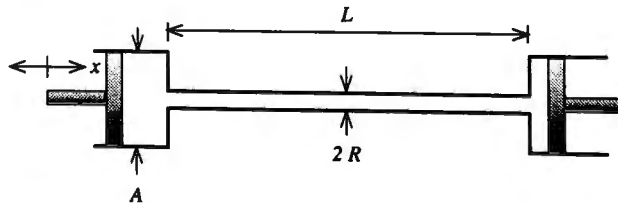


Figura P 4.13

Problema 4.13

Un sistema hidráulico para transmitir potencia está formado por una bomba oscilante conectada a un motor que oscila en forma idéntica mediante un tubo largo circular de longitud L y radio R (véase figura P 4.13). La bomba y el motor tienen pistones de áreas A iguales y sufren desplazamientos armónicos simples $x = a \sin \omega t$, donde a es la amplitud y ω es la frecuencia angular de movimiento. El fluido del sistema es incompresible, y tiene una densidad ρ .

Para contestar las siguientes preguntas suponga que la presión en ambos cilindros es idéntica a la presión en el tubo en el punto de unión. (a) Si existe alguna diferencia entre la presión p_p del cilindro de la bomba y la presión p_m del motor en cualquier instante, habría una diferencia correspondiente en la entrada instantánea de potencia \mathcal{P}_p de la bomba y la salida de potencia \mathcal{P}_m del motor. Encuentre una expresión para la diferencia de potencia $\mathcal{P}_p - \mathcal{P}_m$ en términos de $p_p - p_m$ y de los parámetros A , ω y a . (b) Suponiendo que se trata de un flujo no estacionario no viscoso en el tubo, obtenga una expresión para la diferencia de presión $p_p - p_m$ en términos de los parámetros ρ , L , A , a , ω y R . (c) Demuestre que la integral de la diferencia de potencia, $\mathcal{P}_p - \mathcal{P}_m$, durante un ciclo es cero.

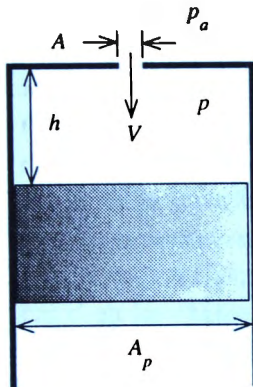


Figura P 4.14

Problema 4.14

Se extrae la bujía de encendido de un cilindro de motor de automóvil y las válvulas de admisión y escape están fijas en su posición cerrada. Conforme el motor funciona, el aire alternativamente se consume y se elimina a través de la abertura de la bujía cuya área mínima de flujo es $A = 1 \text{ cm}^2$, como se ilustra en la figura P 4.14. El volumen de aire en el cilindro del motor tiene la forma de un cilindro circular con un área en la base (área del pistón) de $A_p = 100 \text{ cm}^2$ y una altura h que cambia con respecto al tiempo t de acuerdo con:

$$h = h_0 + \frac{S}{2} (1 - \cos \omega t)$$

donde $S = 10 \text{ cm}$ es la carrera del pistón, h_0 es la distancia libre y $\omega = 30 \text{ s}^{-1}$ es la velocidad angular del cigüeñal. (a) Si se considera que la densidad ρ del aire es constante, obtenga una expresión para la velocidad $V\{t\}$ del aire que fluye por la abertura de la bujía hacia el interior del cilindro. ¿Cuál es el máximo valor numérico? (b) ¿Cuál es la presión $p\{t\}$ en el cilindro durante la entrada? ¿Cuál durante la salida? ¿Cuál es el máximo valor numérico de $p - p_a$? (c) Conforme la velocidad del motor aumenta, la potencia que se gasta al bombear el aire hacia adentro y hacia afuera del cilindro aumenta como ω^n . ¿Cuál es el valor numérico de n ?

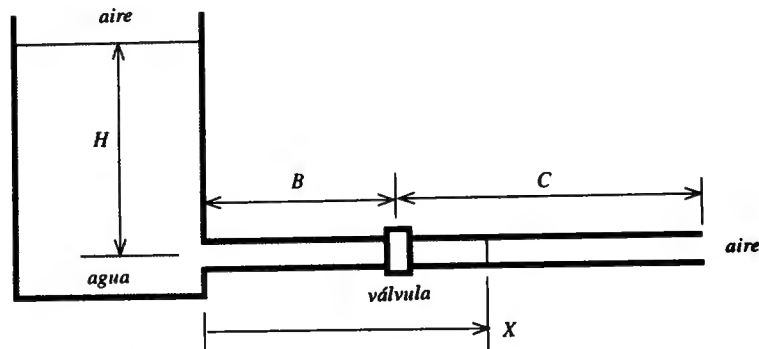


Figura P 4.15

Problema 4.15

Un tanque de agua abierto por su parte superior hacia la atmósfera, suministra agua a un tubo largo horizontal unido a la base del tanque a una distancia $H = 10 \text{ m}$ por debajo de la interfaz aire-agua (véase figura P 4.15). El área de la sección transversal del tubo es mucho menor que la del tanque. Una válvula de paro está situada a lo largo del tubo a una distancia $B = 20 \text{ m}$ del tanque. A una distancia $C = 100 \text{ m}$ pasando la válvula, el tubo se abre a la atmósfera. En un tiempo inicial ($t < 0$), la válvula se cierra y el agua estacionaria llena el tubo a la izquierda de la válvula, en tanto que el aire del ambiente llena la sección del tubo de la derecha. Al tiempo $t = 0$ la válvula se abre de repente y el agua comienza a fluir a lo largo del tubo, hacia el extremo abierto con una velocidad $V\{t\}$ que cambia con respecto al tiempo. Suponiendo que la presión del aire en el tubo, más adelante de la columna de agua que avanza, es la presión atmosférica, (a) ¿cuál es el valor numérico de la aceleración DV/Dt del agua en el tubo en el instante en que la válvula se abre? (b) Se observa que el borde delantero de la columna de agua que se mueve a la derecha de la válvula se aproxima a una velocidad estacionaria antes de alcanzar el extremo del tubo. ¿Cuál es el valor numérico de esa velocidad estacionaria? (c) Deduzca la ecuación diferencial o ecuaciones que, de integrarse, darían la

posición X de la altura de la columna de agua en función del tiempo t después de que la válvula se abrió. (d) La suposición de que la presión del aire adelante de la columna de agua es la presión atmosférica introduciría un error en la solución de (c) si la longitud C del tubo fuera muy grande. Determine un límite superior de C que garantice que la solución de (c) no tenga un error significativo.

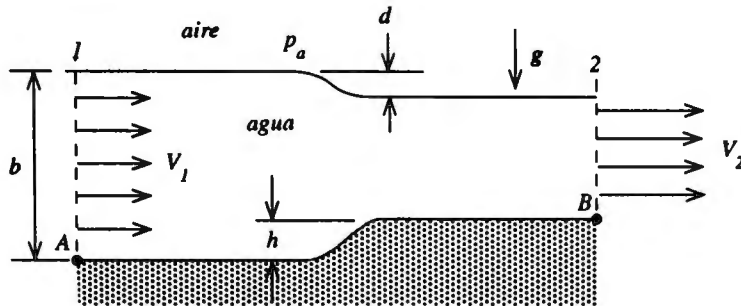


Figura P 4.16

Problema 4.16

En un canal de agua en el laboratorio, un flujo de agua estacionario no viscoso de dos dimensiones se mueve de izquierda a derecha, como se ilustra en la figura P 4.16. En las secciones 1 y 2 corriente arriba y corriente abajo, las velocidades del flujo son horizontales e uniformes desde arriba hasta abajo de la corriente de agua. Se observa que, conforme el fluido fluye por el escalón corriente abajo, el cual tiene una altura de $h = 3 \text{ cm}$, la superficie superior del agua baja una distancia $d = 1 \text{ cm}$ por abajo del nivel que tiene corriente arriba (vea la figura). La profundidad del agua corriente arriba es $b = 10 \text{ cm}$. (a) Calcule las presiones manométricas p_A y p_B en la superficie del fondo del canal en los lugares de corriente arriba y corriente abajo A y B . (b) ¿Cuál es el valor numérico de la razón V_2/V_1 de la velocidad corriente abajo a la velocidad corriente arriba? (c) ¿Cuál es el valor numérico de la velocidad V_1 corriente arriba?

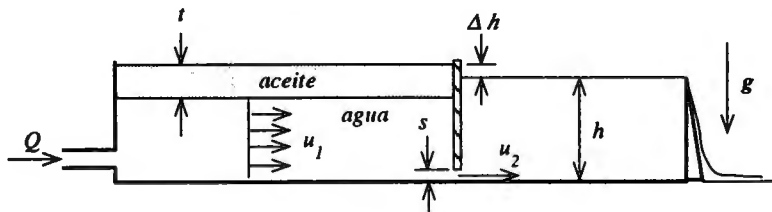


Figura P 4.17

Problema 4.17

Se usa un tanque para separar aceite de un flujo de agua ligeramente contaminado con gotas de aceite. Como se ilustra en la figura P 4.17, el agua contaminada fluye hacia el tanque con un gasto volumétrico por anchura W del tanque de Q/W . Las gotas de agua suben a la superficie, donde se retiene una capa estacionaria de aceite, de espesor t uniforme, mediante una barrera a la mitad del tanque. Una ranura delgada en el fondo de la barrera, la cual tiene una altura $s \ll h$, permite que el agua sin aceite fluya hacia un segundo compartimiento en el cual la profundidad del agua, h , se mantiene por medio de una barrera de flujo de salida.

(a) Suponiendo que el flujo de agua por debajo de la capa de aceite sea no viscoso, encuentre una expresión para la diferencia en los niveles de superficie, Δh , como función de las alturas t , h y s , así como el gasto Q/W y las densidades del aceite y del agua, ρ_o y ρ_w .

(b) Conforme aumenta el gasto, se observa que la superficie inferior de la capa de aceite cerca de la barrera se mueve hacia abajo cerca de la ranura, hasta que el aceite comience a fluir por debajo de la barrera. Suponiendo que se trata de un flujo no viscoso de agua y una capa inmóvil de aceite, obtenga una expresión para el gasto volumétrico Q/W crítico en el cual el aceite comienza a escapar por la ranura.

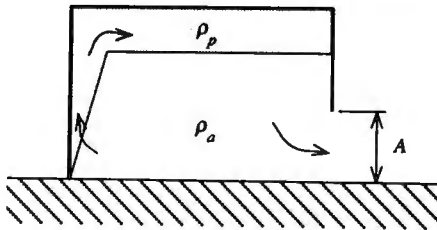


Figura P 4.18

Problema 4.18

Una habitación grande tiene una puerta pequeña de área A abierta al exterior. En el piso de la habitación, del lado opuesto a la entrada, comienza a incendiarse. El fuego consume combustible con un gasto másico constante de \dot{m} . Por cada kilogramo de combustible que se quema, se consumen f kilogramos de aire, y se forman productos de la combustión cuya densidad ρ_p es menor que la densidad ρ_a del aire.

Poco después de iniciado el fuego, se forma una capa de productos de la combustión a lo largo del techo de la habitación, como se ilustra en la figura P 4.18. Esta capa tiene una densidad uniforme de ρ_p y no se mezcla con el aire más frío de abajo. La creciente capa de productos de combustión desplaza el aire de la habitación a través de la puerta.

(a) Suponiendo que se trata de un flujo incompresible no viscoso del aire en la habitación, encuentre una expresión para la velocidad V_a del aire a través de la puerta en términos de los parámetros \dot{m} , A , f , ρ_a y ρ_p . (b) Obtenga una expresión para la diferencia de presión Δp por medio de la cual la presión del aire en la habitación a nivel del suelo supere a la presión atmosférica del exterior al mismo nivel.

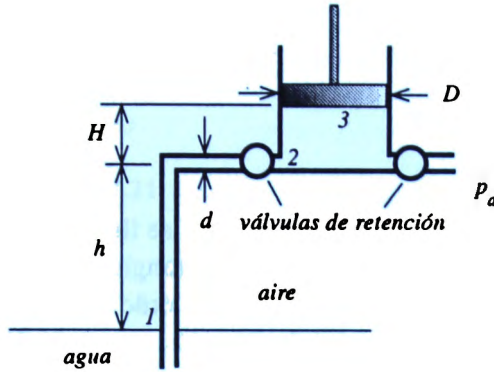


Figura P 4.19

Problema 4.19

Se utiliza una bomba aspirante e impelente de diámetro $D = 10 \text{ cm}$ y de carrera $S = 10 \text{ cm}$ para bombear el agua del sótano inundado de una casa a una altura $h = 3 \text{ m}$ por encima de la superficie del agua donde se descarga ésta a la superficie del suelo fuera del sótano, como se ilustra en la figura P 4.19. La bomba, conectada a líneas de succión y descarga de igual diámetro $d = 2 \text{ cm}$, está equipada con válvulas de retención que permiten que el agua fluya sólo desde el sótano cuando el movimiento (carrera) del pistón es hacia arriba, y que el agua fluya hacia afuera por el tubo de descarga cuando es hacia abajo. En ambos movimientos, hacia arriba y hacia abajo, la velocidad del pistón $V_p = 10 \text{ cm/s}$ es constante a lo largo de la distancia de carrera S . (a) Durante el movimiento hacia arriba, ¿cuál es la velocidad V del agua en el tubo de succión? ¿Cuál es la presión p_2 en la salida del tubo de succión? ¿Cuál es la presión p_3 en la cara del pistón cuando está a una distancia H por encima de la salida del tubo de succión. Si el peso del pistón se desprecia, ¿qué fuerza F_u se requiere para levantar el pistón? (b) Durante el movimiento hacia abajo, ¿cuál es la presión p_3 en la cara del pistón? ¿Qué fuerza F_d se requiere para empujar el pistón hacia abajo? (c) ¿Qué trabajo se debe realizar sobre el pistón para bombear cada kilogramo de agua desde el sótano? ¿Qué potencia P se requiere para operar la bomba?

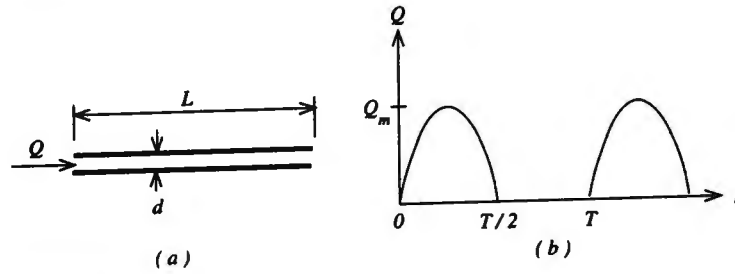


Figura P 4.20

Problema 4.20

Un modelo simple del sistema arterial humano, como se ilustra en el dibujo (a) de la figura P 4.20, consiste en un tubo rígido circular de longitud L y diámetro d . Por el extremo izquierdo llega la sangre del ventrículo izquierdo del corazón con un gasto volumétrico $Q\{t\}$ periódico que varía con el tiempo:

$$Q\{t\} = Q_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$= 0 \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

como se ilustra en el dibujo (b) de la figura P 4.20, donde Q_m es el máximo gasto y T es el periodo del latido del corazón. En el extremo derecho de la arteria modelo, la presión p_2 (medida por encima del nivel de presión venosa constante) se relaciona con el gasto volumétrico Q_c en el lecho capilar mediante:

$$p_2 = kQ_c$$

donde k es una constante que caracteriza la conductancia del sistema capilar. Suponiendo que el flujo arterial es incompresible, (a) ¿cuál es el gasto volumétrico Q_c en el lecho capilar en función del tiempo? (b) Deduzca una expresión para la presión p_2 en el extremo derecho de la arteria, considerándola función del tiempo. (c) Obtenga una expresión para la presión p_1 en el extremo izquierdo (entrada) de la arteria en función del tiempo. (d) Basándose en la respuesta al inciso (c), describa el efecto sobre la presión p_1 si el diámetro d de la arteria disminuye a causa de sedimentos grasos.

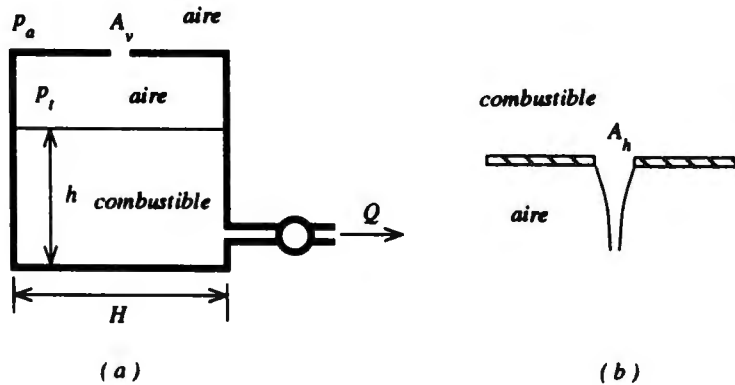


Figura P 4.21

Problema 4.21

Un tanque cúbico de combustible, con dimensiones $H = 1.0 \text{ m}$ por lado, contiene combustible de densidad $\rho_f = 9.0E(2) \text{ kg/m}^3$, el cual llena parcialmente el tanque hasta una profundidad h , como se aprecia en la figura P 4.21(a). Se retira el combustible del tanque y se suministra a una cámara de combustión por medio de una bomba, con un gasto volumétrico de $Q = 4.0 \text{ l/min}$. Conforme el combustible sale del tanque, el aire del ambiente entra a través de un orificio de ventilación de área $A_v = 10 \text{ mm}^2$ en la parte superior del tanque. Si se considera que el flujo de aire al interior del tanque es incompresible, (a) determine la velocidad V_v del aire al pasar por el agujero de ventilación. (b) Calcule la cantidad a la cual la presión p , del aire en el tanque disminuye por debajo de la presión atmosférica p_a , si se supone que la densidad del aire es $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

En otro momento, cuando la bomba de combustible no está funcionando ($Q = 0$), se presenta una fuga de área $A_h = 1.0 \text{ mm}^2$ en el fondo del tanque, como se esquematiza en la figura P 4.21 (b). (c) ¿Cuál es la razón V_v/V_h de la velocidad del aire a través de la ventilación a la velocidad del combustible a través de la fuga? (d) Obtenga una expresión para la velocidad V_h del combustible que se escapa en función de la altura h del combustible en el tanque. (e) Determine el tiempo que se requiere para que un tanque lleno de combustible se vacíe por completo a través de la fuga.

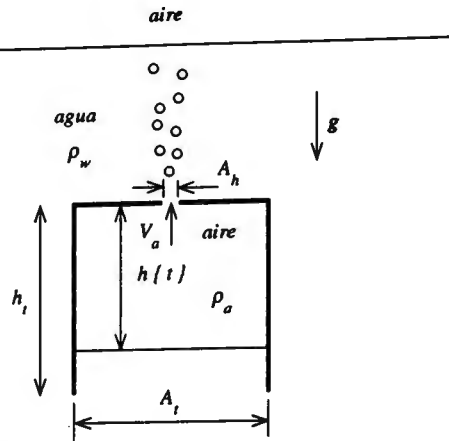


Figura P 4.22

Problema 4.22

Un tanque cilíndrico, abierto por abajo, se sumerge por debajo de la superficie de un estanque con agua de densidad $\rho_w = 1E(3) \text{ kg/m}^3$, como se ilustra en la figura P 4.22. La parte superior del tanque tiene una pequeña abertura de área $A_h = 1 \text{ cm}^2$. El tanque, con área de sección transversal $A_i = 1 \text{ m}^2$ y altura $h_i = 1 \text{ m}$, inicialmente está lleno de aire de densidad $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$, la cual permanece constante conforme el aire se escapa por la abertura de la parte superior. La profundidad de aire en el tanque, $h\{t\}$, disminuye con el tiempo a partir de su valor inicial h_i , conforme el aire se escapa por el agujero con una velocidad que varía con el tiempo $V_a\{t\}$.

Encuentre expresiones para (a) la velocidad del aire V_a y (b) la derivada dh/dt en términos de los parámetros ρ_a , ρ_w , A_i , A_h , g y la variable h . (c) Por medio de integrales, obtenga una expresión para la profundidad $h\{t\}$ en función del tiempo t y de los parámetros ρ_a , ρ_w , A_i , A_h y g . (d) Tomando en cuenta la solución de (c), determine el tiempo necesario para que el tanque se vacíe de aire.

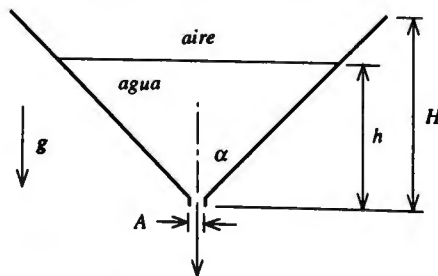


Figura P 4.23

Problema 4.23

Como se ilustra en la figura P 4.23, un embudo cónico de altura H y semiángulo en el vértice α tiene un pequeño agujero de salida de área $A \ll H^2$. Cuando $t = 0$ el embudo se llena de agua, a la cual se le permite salir por el agujero. Si en todo momento se supone que el flujo es cuasiestacionario y no viscoso, encuentre una expresión para el tiempo t que se requiere para que el embudo se vacíe.

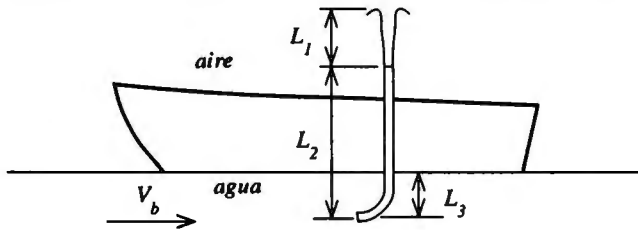


Figura P 4.24

Problema 4.24

Un inventor sugirió un método sencillo, económico, para determinar la velocidad con la cual viaja un pequeño bote de motor. Su invento sólo consta de un tubo con un codo de 90° en el extremo inferior. Cuando éste se introduce en el agua, como se ilustra en la figura P 4.24, desde el extremo superior del tubo fluye una fuente de agua. Para calcular la velocidad del bote, la altura máxima L_1 que alcanza la corriente de agua por encima del extremo del tubo se mide y determina que es de 1.0 m . Además, se conocen la longitud del tubo $L_2 = 1.5 \text{ m}$ y la profundidad de la abertura por debajo de la superficie $L_3 = 0.5 \text{ m}$. Si se considera que el flujo es estacionario con respecto al bote, calcule el valor de la velocidad V_b del bote.

Problema 4.25

Una burbuja esférica de gas se forma en un líquido no viscoso, incompresible y sin confinar. La presión p_∞ en la parte alejada de la burbuja es constante. Si la presión inicial en la burbuja es mayor que p_∞ , se observa que la burbuja experimenta oscilaciones radiales, y se expande hasta que su presión cae por debajo de p_∞ para después contraerse y regresar a una presión por arriba de p_∞ , y así sucesivamente. Se tiene interés en deducir algunas de las ecuaciones necesarias para describir este movimiento.

(a) Utilice la conservación de la masa en el líquido para obtener una expresión algebraica que relacione la velocidad radial V del líquido a una distancia r desde el centro de la burbuja con la velocidad V_b de la superficie de la burbuja a una distancia r_b . (b) Considerando la ecuación del movimiento para el flujo no estacionario, no viscoso, a lo largo de una línea de corriente radial, obtenga una ecuación diferencial ordinaria que relacione el radio r_b de la burbuja y sus derivadas respecto al tiempo, dr_b/dt y d^2r_b/dt^2 , con la presión p_b instantánea de la burbuja, la presión p_∞ y la densidad ρ del líquido.

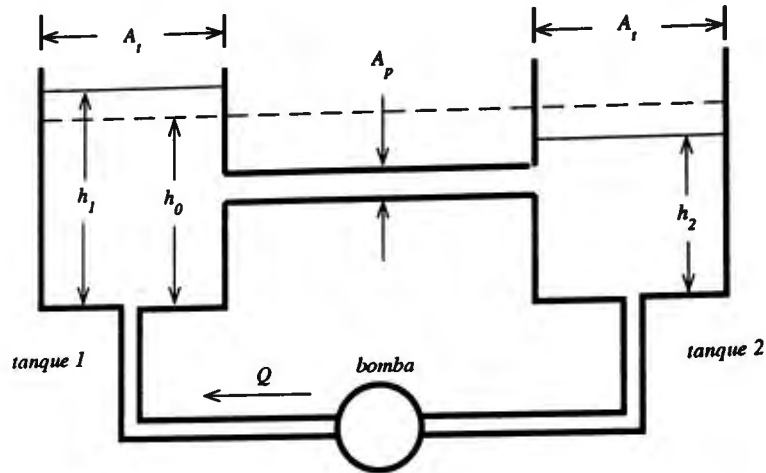


Figura P 4.26

Problema 4.26

Dos tanques idénticos con área de sección transversal A_t están conectados por un tubo de área de sección transversal A_p ($\ll A_t$) y una bomba con su tubería de conexión como se ilustra en la figura P 4.26. En un inicio, los tanques se llenan de agua hasta una altura h_0 , desde el fondo de los tanques. Al encender la bomba, ésta proporciona un gasto volumétrico Q constante del tanque 2 al tanque 1, así, el nivel de agua $h_1(t)$ en el tanque 1 aumenta y el nivel en el tanque 2, $h_2(t)$, disminuye. Después de mucho tiempo ambos niveles de agua se estabilizan y alcanzan valores fijos, $h_1(\infty)$ y $h_2(\infty)$.

Si se considera que el flujo dentro del tubo de conexión es no viscoso, (a) deduzca una expresión para $h_1(\infty)$ en términos de A_p , Q y h_0 . (b) Obtenga una expresión para la derivada $dh_1(t)$ en términos de los parámetros A_p , A_t , Q y h_0 . (c) Al integrar esta expresión para el intervalo de tiempo t que corre a partir del encendido de la bomba, encuentre una expresión para t en función de A_p , A_t , Q , h_0 y h_t , usando la siguiente relación integral:

$$\int_0^z \frac{z dz}{a - bz} = \frac{1}{b^2} \left(a \ln \left[\frac{a}{a - bz} \right] - bz \right)$$

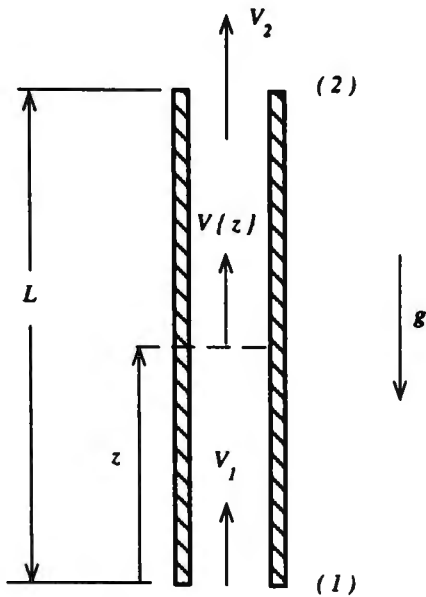


Figura P 4.27

Problema 4.27

Un tubo vertical de longitud L dentro de una caldera se calienta desde el exterior por medio de gases calientes de combustión, y hace hervir el agua que está dentro del tubo, la cual fluye hacia arriba. Agua pura entra por abajo (1) con una velocidad V_1 mientras que una mezcla de agua y vapor sale por arriba (2) con una velocidad V_2 . La densidad ρ promedio de la mezcla disminuye de abajo hacia arriba conforme una mayor cantidad de agua se transforma en vapor. Se observa que la velocidad de la mezcla de vapor y agua aumenta linealmente con la distancia z desde el fondo, de acuerdo con la relación:

$$V\{z\} = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{z}{L}$$

El flujo dentro del tubo puede considerarse como libre de fricción. En términos de las cantidades conocidas V_1 , V_2 , L y la densidad ρ_1 de entrada, obtenga expresiones para (a) la densidad $\rho\{x\}$ en cualquier punto de la columna y (b) la diferencia de presión $p_1 - p_2$ entre un lado y otro de la columna.

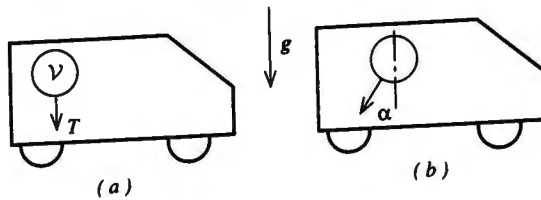


Figura P 4.28

Problema 4.28

En el interior de un automóvil que espera en un semáforo (figura P 4.28(a)), un niño sujeta un cordón atado a un globo. El globo, con volumen $V = 0.1 \text{ m}^3$, está lleno de helio cuya densidad es $\rho_{\text{He}} = 0.14 \text{ kg/m}^3$. El aire en el interior del automóvil tiene una densidad $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$. (a) Calcule la tensión T en el cordón si se desprecia la masa del material del globo.

Cuando el semáforo cambia a luz verde, el automóvil acelera uniformemente a 100 km/h en 10 s . Se observa que el globo se desplaza hacia adelante, formando un ángulo α con la vertical, como se ilustra en la figura P 4.28(b). (b) Determine el ángulo α y la tensión T en el cordón.

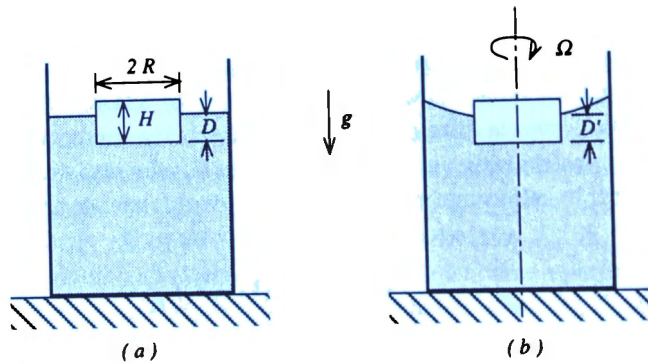


Figura P 4.29

Problema 4.29

Una barra de jabón que tiene forma de cilindro circular (radio R , altura H y densidad relativa SG), flota libre en la superficie del agua de densidad ρ en un vaso de precipitados parcialmente lleno, como se ilustra en la figura P 4.29(a). Se observa que la parte inferior de la barra de jabón está a una profundidad D por debajo de la superficie del agua. (a) Encuentre una expresión para la profundidad D en términos de algunas o todas las cantidades conocidas R , H , SG y ρ .

El vaso de precipitados se coloca sobre un tornamesa que gira alrededor de un eje vertical, con una velocidad angular Ω . Después de mucho tiempo, la barra de jabón y

el agua en el vaso giran como un cuerpo rígido y se observa que la profundidad D' del extremo de la barra de jabón por debajo de la superficie del agua es diferente que la del caso (a), como se ejemplifica en la figura P4.29 (b). (b) Obtenga una expresión para D' en términos de algunas o todas las cantidades conocidas R , H , SG , Ω y ρ .

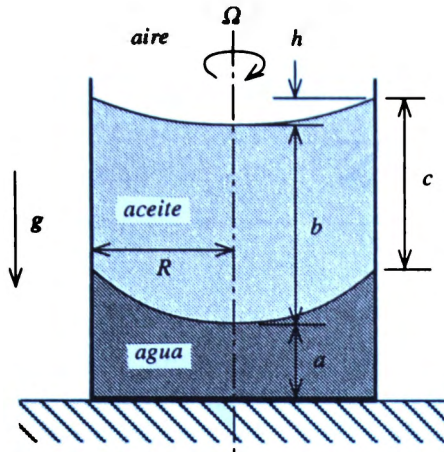


Figura P 4.30

Problema 4.30

Un vaso de precipitados cilíndrico de vidrio, está parcialmente lleno con dos líquidos inmiscibles, una capa de agua abajo y una capa de aceite arriba. La densidad ρ_w del agua es mayor que la densidad ρ_o del aceite. La parte superior del vaso de precipitados está abierta a la atmósfera. El vaso con su contenido gira alrededor del eje vertical con una velocidad angular Ω constante, y los fluidos giran, después de un tiempo, como cuerpos rígidos. Se observa que la superficie libre del aceite y la interfaz aceite-agua alcanzan una forma curva como se ilustra en la figura P 4.30, donde las respectivas capas de agua y aceite tienen una profundidad a y b .

(a) Obtenga una expresión para la presión $p\{z, r\}$ en el aceite a una altura z con respecto a la base del vaso de precipitados y un radio r a partir de la línea central, usando como parámetros sólo las cantidades conocidas a , b , g , p_a , ρ_o , ρ_w y Ω . (b) Usando los resultados de (a), encuentre una expresión para la altura h a la cual la interfaz aceite-agua correspondiente al radio R se eleva por encima de la interfaz en la línea central. (c) Encuentre una expresión para la presión en la interfaz aceite-agua en la línea central. (d) Como se hizo en el inciso (a), deduzca una expresión para la presión $p\{z, r\}$ en el agua, usando la respuesta dada al inciso (c), después determine una expresión para la distancia c que se ilustra en la figura P 4.30.

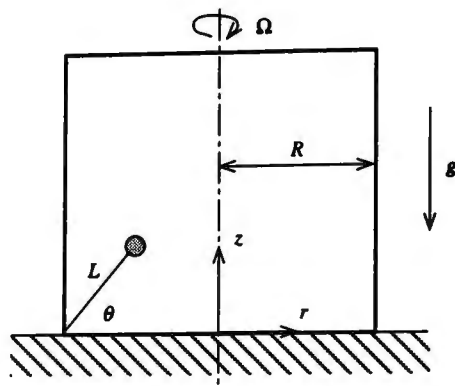


Figura P 4.31

Problema 4.31

Un recipiente cilíndrico sellado, de radio R , lleno con agua de densidad ρ_w , el cual se muestra en corte transversal en la figura P 4.31, se hace girar alrededor de su eje vertical a una frecuencia angular Ω fija. Un corcho esférico muy pequeño de radio $a \ll R$ y densidad $\rho_c < \rho_w$ está atado por un hilo de longitud $L < R$ al extremo inferior exterior del recipiente. Después de suficiente tiempo, el recipiente, el agua y el corcho giran como un cuerpo rígido, y mantienen la configuración de la figura P 4.31.

(a) Obtenga expresiones para la fuerza de presión F en el corcho y la tensión T en el hilo, en términos de los parámetros ρ_w , ρ_c , g , Ω y r . (b) Encuentre una expresión por medio de la cual sea posible encontrar el ángulo θ .

Bibliografía

Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Sabersky, Rolf H., Allan J. Acosta y Edward G. Hauptman, *Fluid Flow, A First Course in Fluid Mechanics*, 3a. ed., Nueva York: Macmillan Publishing Co., 1989.

5.1 Introducción

Al tratar la dinámica de los cuerpos sólidos, algunas veces se encuentra que es de utilidad emplear la cantidad de movimiento de un cuerpo como la variable que define su estado de movimiento. La ley del movimiento de Newton, según la cual la razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza neta aplicada al cuerpo, puede así integrarse respecto al tiempo, de modo que el cambio en la cantidad de movimiento sea igual a la integral de tiempo de la fuerza, o impulso. Cuando dos cuerpos chocan, se sabe que la suma de sus cantidades de movimiento en el choque no cambia puesto que el impulso neto aplicado a los dos cuerpos durante la colisión es cero. Parece probable que la comprensión del movimiento de un fluido pueda aclararse si se considera la cantidad de movimiento de una partícula de fluido como la variable que se utilizará en la descripción del flujo de un fluido.

En este capítulo, se deducen y emplean expresiones integrales en la descripción del movimiento de un fluido, las cuales utilizan la cantidad de movimiento del fluido como la variable dependiente. La cantidad de movimiento por unidad de volumen del fluido es simplemente el producto de la densidad ρ (masa por unidad de volumen) multiplicado por la velocidad \mathbf{V} . No se emplea un símbolo diferente para la cantidad de movimiento por unidad de volumen, sino que se escribe el producto $\rho\mathbf{V}$ cuando se necesita especificar la cantidad de movimiento por unidad de volumen. Según sea la aplicación, se emplea una integral de la cantidad de movimiento o una integral del momento angular para relacionar las cantidades del fluido que interesan.

Antes de desarrollar una forma general de la ley de conservación de la cantidad de movimiento aplicable al flujo de un fluido, se verá que es conveniente encontrar una relación integral general para cualquier propiedad de un fluido, que se conoce como teorema de transporte de Reynolds, que relaciona las formas lagrangiana y euleriana de la razón de cambio con respecto al tiempo de esa propiedad para una cantidad finita de fluido.

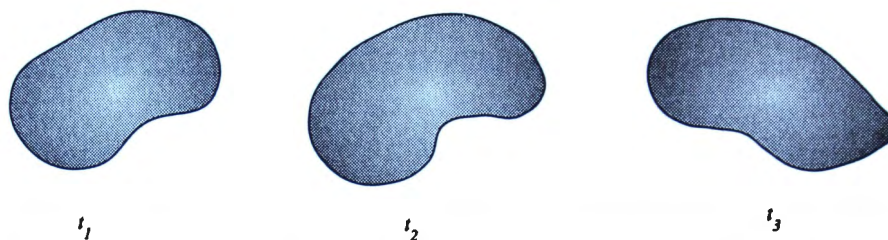


Figura 5.1 Representación de un volumen material \mathcal{M} , el cual contiene el mismo fluido que se mueve y deforma al seguir el movimiento de un fluido, en tres tiempos sucesivos t_1 , t_2 y t_3 .

5.2 Teorema del transporte de Reynolds

Considérese la propiedad escalar b de un fluido, la cual es la cantidad de esta propiedad por unidad de masa del fluido. Por ejemplo, b puede ser una propiedad termodinámica, como la energía interna o la entalpía por unidad de masa, o la carga eléctrica por unidad de masa del fluido. En general, se estaría interesado en las propiedades del fluido que emergen de la expresión de las leyes de conservación de la masa, la cantidad de movimiento, la energía, la carga eléctrica, etc. En este capítulo, se considera la cantidad de movimiento de un fluido, de modo que b podría ser una componente escalar de la cantidad de movimiento por unidad de masa del fluido, v.g., la velocidad \mathbf{V} . Por lo tanto, es posible pensar en b como la propiedad u , v y w .

Las leyes de la física se expresan según se aplican a una masa fija de material. En el flujo de un fluido, una masa fija de material se identifica mediante el *volumen material* \mathcal{M} . A diferencia del volumen de control \mathcal{V} , el volumen material \mathcal{M} se mueve con el fluido y siempre encierra las mismas partículas del fluido. Por lo tanto, su posición, forma, volumen y área de superficie cambian con el tiempo. En la figura 5.1, se ilustra el volumen material de un fluido y se ejemplifica cómo se mueve éste y cómo cambia de forma en tiempos sucesivos t_1 , t_2 , t_3 .

Es posible encontrar la cantidad total de la propiedad b dentro del volumen material \mathcal{M} , que se designa con la letra B , al integrar la propiedad por unidad de volumen, ρb , sobre el volumen material \mathcal{M} :

$$B \equiv \iiint_{\mathcal{M}} \rho b \, d\mathcal{V} \quad (5.1)$$

Las leyes de la física pueden expresarse en términos de la razón de cambio con respecto al tiempo de la propiedad B . Por ejemplo, la primera ley de la termodinámica exigiría que la razón de aumento respecto al tiempo de la energía en el volumen material \mathcal{M} fuera igual a la rapidez con la cual se agrega calor al volumen menos la rapidez con la cual el volumen realiza trabajo sobre sus alrededores. Por consiguiente, se necesita encontrar una expresión para dB/dt en términos de las propiedades del fluido. Puesto que el volumen material se mueve con el fluido, su razón de cambio con respecto al

tiempo puede encontrarse al integrar el producto de la derivada material de b multiplicado por la densidad ρ , sobre el volumen material \mathcal{M} :

$$\frac{dB}{dt} = \iiint_{\mathcal{M}} \rho \frac{Db}{Dt} dV \quad (5.2)$$

La ecuación 5.2 no posee una forma conveniente que permita evaluar la integral de volumen puesto que no está expresada en variables eulerianas. Sin embargo, es posible reescribir el integrando al desarrollar la derivada material:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Db}{Dt} &= \rho \frac{\partial b}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)b \\ &= \rho \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}b) - b \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \\ &= \rho \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}b) + b \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde en la segunda línea se ha empleado la ecuación 1.38 y la ecuación 3.13 de la conservación de la masa en la tercera línea.

El lado derecho de la ecuación 5.3 se expresa en coordenadas eulerianas. Es posible sustituir la integración de $\rho Db/Dt$ sobre el volumen material \mathcal{M} mediante la integración del lado derecho de 5.3 sobre un volumen fijo de control \mathcal{V} que coincida con el volumen material en cualquier instante de tiempo:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{M}} \rho \frac{Db}{Dt} dV &= \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho b) + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{V}) \right) dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \iint_S \rho b \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde se utilizó el teorema de la divergencia 1.44 para convertir una integral de volumen en una integral de superficie. Al combinar la ecuación 5.2 con la 5.4, se encuentra el *teorema del transporte de Reynolds*:¹

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \iint_S \rho b \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho b dV + \iint_S \rho b \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (5.5)$$

¹ Osborne Reynolds (1842-1912) dilucidó la naturaleza del movimiento turbulento de los fluidos. Otra de sus contribuciones a la mecánica de fluidos comprende la teoría de la lubricación y la producción de vórtices. Fue propietario de muchas patentes de bombas y turbinas.

donde la derivada respecto al tiempo puede sacarse de la integral de volumen, pues el volumen de control está fijo en el espacio.

El teorema del transporte de Reynolds, ecuación 5.5, contiene dos términos que contribuyen a la razón de cambio de B dentro del volumen material. El primero es la razón de cambio respecto al tiempo de B dentro del volumen de control fijo \mathcal{V} que ocupa el mismo lugar que el volumen material, y el segundo es el flujo neto B que sale a través de la superficie \mathcal{S} del volumen de control fijo \mathcal{V} .² A esta segunda cantidad se le llama, por lo común, *flujo* de B .

El teorema del transporte de Reynolds expresa la derivada con respecto al tiempo de una de las propiedades del un fluido dentro del volumen material (una derivada lagrangiana) en términos de la descripción euleriana de los cambios dentro de un volumen de control fijo. Ésta es una relación matemática y no una ley de la física. Es posible apreciar que ésta es sólo una fórmula para derivar una integral de volumen cuyos límites de integración varían con el tiempo. Por ejemplo, supóngase que se tiene un flujo para el cual $\mathbf{V} = u \{x, t\} \mathbf{i}_x$, y se elige un volumen material de fluido que se localiza entre $x_1 \{t\}$ y $x_2 \{t\}$ y tiene un área constante A de sección transversal, por lo que $d\mathcal{V} = A dx$. La propiedad B sería:

$$B = \iiint_{\mathcal{M}} \rho b d\mathcal{V} = A \int_{x_1 \{t\}}^{x_2 \{t\}} \rho b dx$$

Al derivar con respecto al tiempo, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= A \int_{x_1 \{t\}}^{x_2 \{t\}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dx + A(\rho b)_2 \frac{dx_2}{dt} - A(\rho b)_1 \frac{dx_1}{dt} \\ &= A \int_{x_1 \{t\}}^{x_2 \{t\}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dx + A(\rho b u)_2 - A(\rho b u)_1 \end{aligned}$$

lo cual es equivalente al teorema del transporte para este caso especial donde $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})_2 = u_2$ y $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})_1 = u_1$.

Ejemplo 5.1

Si se supone que $b = 1$, demuestre que el teorema del transporte de Reynolds se reduce a la ecuación 3.9 de la conservación de la masa.

² Adviértase que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ es el gasto volumétrico de salida por unidad de área y ρb es la cantidad de B por unidad de volumen, de modo que $\rho b \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ es el gasto de salida de B por unidad de área superficial.

Solución

Si $b = 1$, la ecuación 5.1 define B como la masa de material en el volumen material:

$$B = \iiint_{\mathcal{M}} \rho \, d\mathcal{V}$$

Por definición, el volumen material siempre encierra la misma cantidad de material, de modo que $dB/dt = 0$. Al sustituir en el teorema del transporte de Reynolds, ecuación 5.5,

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

5.3 Cantidad de movimiento lineal

La cantidad de movimiento de un fluido en un volumen material, que se denota con el símbolo \mathbf{M} , es la integral de la cantidad de movimiento por unidad de volumen $\rho\mathbf{V}$ sobre el volumen material:

$$\mathbf{M} \equiv \iiint_{\mathcal{M}} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V} \quad (5.6)$$

A \mathbf{M} también se le llama *cantidad de movimiento lineal* a fin de distinguirla de la cantidad de movimiento angular o *momento angular* que se tratará más adelante, en la sección 5.5.

Ahora, se aplica el teorema del transporte de Reynolds a fin de determinar la forma de $d\mathbf{M}/dt$. Si se toma $b = \mathbf{V}$ de forma que dB/dt se convierta en $d\mathbf{M}/dt$, la ecuación 5.5 se transforma en:³

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V} + \iint_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (5.7)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación 5.7 es la razón de aumento respecto al tiempo de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control \mathcal{V} , en tanto que el segundo es la cantidad de movimiento neta de salida del volumen de control.

³ Al deducir el teorema del transporte de Reynolds, se ha supuesto que b es una propiedad escalar. Puesto que el teorema se aplica a cada una de las componentes escalares de una propiedad vectorial \mathbf{b} , al sumar vectorialmente el teorema del transporte para cada una de estas componentes, se encuentra que el teorema se aplica también a una propiedad vectorial \mathbf{b} .

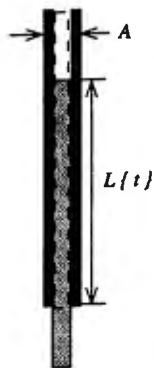


Figura E 5.2

Ejemplo 5.2

Un tubo con área constante A de sección transversal se llena con un líquido de densidad ρ . El tubo se mantiene en posición vertical y los extremos superior e inferior están abiertos a la atmósfera al tiempo $t = 0$, que permiten que el fluido salga del tubo (véase la figura E 5.2). Conforme el fluido sale, se mide la longitud $L\{t\}$ de la columna de líquido dentro del tubo en función del tiempo. Obtenga una expresión para la derivada de la cantidad de movimiento respecto al tiempo del fluido dentro del tubo como una función de ρ , A y $L\{t\}$.

Solución

Seleccione un volumen de control que encierre todo el interior del tubo, como se ejemplifica en la figura E 5.2. Si V denota la velocidad del fluido, en dirección hacia abajo, al aplicar la conservación de la masa al líquido dentro del volumen de control:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\rho AL) + \rho VA = 0$$

$$\frac{dL}{dt} + V = 0$$

$$V = -\frac{dL}{dt}$$

A continuación, aplique la ecuación 5.7 para determinar la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento hacia abajo, dM/dt :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_V \rho V dV + \iint_S \rho V (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \frac{d}{dt} (\rho V A L) + \rho V (VA) \\ &= \rho A \left(\frac{d}{dt} (VL) + V^2 \right) \\ &= \rho A \left(V \frac{dL}{dt} + L \frac{dV}{dt} + V^2 \right) \end{aligned}$$

Al sustituir V por $-dL/dt$ y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \rho A \left(- \left(\frac{dL}{dt} \right)^2 + L \left(- \frac{d^2L}{dt^2} \right) + \left(- \frac{dL}{dt} \right)^2 \right) \\ &= \rho A L \left(- \frac{d^2L}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

5.3.1 Ley del movimiento de Newton

Para aplicar la ley del movimiento de Newton al volumen material que coincida con el volumen de control para un tiempo determinado, es preciso determinar las fuerzas que actúan sobre el fluido dentro del volumen de control. Antes que nada, se tendrá la fuerza ocasionada por la presión p que actúa hacia adentro sobre la superficie de control S :

$$\text{fuerza de presión} = \iint_S (-pn) dS$$

En segundo lugar, un esfuerzo viscoso τ que actúa sobre la superficie de control dará lugar a una fuerza viscosa:

$$\text{fuerza viscosa} = \iint_S \tau dS$$

Por último, sobre todo el fluido dentro del volumen de control actúa una fuerza gravitatoria:

$$\text{fuerza gravitatoria} = \iiint_V \rho g dV$$

La ley del movimiento de Newton exige que la razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del fluido en el volumen material de control,

dM/dt , sea igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el fluido en el volumen de control:⁴

$$\frac{dM}{dt} = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho g dV \quad (5.8)$$

5.3.2 Teorema de la cantidad de movimiento lineal

Ahora es posible combinar la ley de Newton, ecuación 5.8, con el teorema del transporte de Reynolds para la cantidad de movimiento, ecuación 5.7, a fin de obtener el *teorema de la cantidad de movimiento lineal*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + \iint_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \\ = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho g dV \end{aligned} \quad (5.9)$$

En palabras, el teorema de la cantidad de movimiento lineal exige que la suma de la razón de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento en el volumen de control más la cantidad de movimiento neta que sale del volumen de control, sea igual a la suma de las fuerzas y las fuerzas sobre la totalidad de los cuerpos que actúan en el fluido dentro del volumen de control.

Adviértase que el teorema de la cantidad de movimiento es una ecuación vectorial la cual es equivalente a tres ecuaciones escalares. En algunas aplicaciones, es posible que exista interés en sólo una componente del movimiento y que no sea necesario utilizar todas las tres componentes de la ecuación 5.9.

Ejemplo 5.3

En el caso del flujo descrito en el ejemplo 5.2, encuentre una expresión para la fuerza viscosa $\iint \tau dS$ que experimenta el fluido dentro del tubo.

Solución

Después de haber evaluado dM/dt en el ejemplo 5.2, se puede usar la ecuación 5.8 para encontrar la fuerza viscosa (hacia abajo). La fuerza de presión es cero puesto que la presión es igual a la presión atmosférica en las superficies superior e inferior de la superficie de control S . La fuerza de la gravedad, ρgAL , actúa hacia abajo. Por lo tanto, 5.8 se transforma en:

$$-\rho AL \frac{d^2 L}{dt^2} = 0 + \iint_S \tau dS + \rho gAL$$

⁴ Si las fuerzas de tensión superficial, eléctrica y magnética actúan en el fluido en el volumen de control, tendrían que incluirse también.

$$\iint_S \tau dS = -\rho AL \left(g + \frac{d^2 L}{dt^2} \right)$$

(Para un flujo no viscoso, $\tau = 0$, y así $d^2 L/dt^2 = -dV/dt = -g$, v.g., el fluido está en un estado de caída libre con una aceleración g . En el caso de un fluido muy viscoso, se observaría que la velocidad hacia abajo es constante, de forma que $dV/dt = -d^2 L/dt^2 = 0$, y la fuerza viscosa (hacia abajo) sería igual a $-\rho gAL$, v.g., la fuerza viscosa es igual en magnitud, pero con dirección opuesta, a la fuerza de gravedad ρgAL que actúa sobre el fluido en el tubo.)

En muchas aplicaciones, existirán corrientes identificables de flujos de entrada y flujos de salida. En el capítulo 3, se denotó el gasto másico de salida mediante \dot{m}_{sal} . Por consiguiente, se denotará el flujo de cantidad de movimiento de la corriente del flujo de salida utilizando la combinación $(\dot{m}\mathbf{V})_{sal}$ y el de la corriente del flujo de entrada mediante $(\dot{m}\mathbf{V})_{ent}$. Con esta notación, el teorema de la cantidad de movimiento, ecuación 5.9, adquiere la forma:⁵

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-p\mathbf{n}) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (5.10)$$

Fuerzas externas

Al deducir el teorema de la cantidad de movimiento lineal, ecuación 5.9, se supone que el volumen de control sólo contenía el fluido de interés. En muchas aplicaciones, empero, se simplificaría el análisis si se seleccionara un volumen de control fijo que encierre objetos sólidos, como las paredes de un recipiente o, incluso, un pistón en movimiento. Cualquier objeto sólido que esté en contacto con un fluido dentro del volumen de control ejercerá una fuerza sobre el fluido que sea igual a la integral del esfuerzo $(-p)\mathbf{n} + \tau$ del fluido sobre la superficie del fluido en contacto con el objeto sólido. Esta fuerza sobre el fluido, que se llamará fuerza externa F_{ex} , debe sostenerla algún agente externo al volumen de control, al igual que la superficie de una mesa que sirve de soporte a un vaso lleno con agua o la mano que se encarga de mover una cuchara pequeña al mezclar leche en una taza con café. Para considerar esas fuerzas, es posible

⁵ Tómese en cuenta que la dirección del vector $\dot{m}\mathbf{V}$ es la misma que la del vector velocidad \mathbf{V} pero que la diferencia vectorial entre las cantidades del flujo de salida y del de entrada intervienen en el teorema de la cantidad de movimiento, ecuación 5.10.

añadir al lado derecho del teorema de la cantidad de movimiento lineal, ecuación 5.10, un término $\Sigma \mathbf{F}_{ex}$ que es la suma vectorial de todas esas fuerzas:⁶

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \end{aligned} \quad (5.11)$$

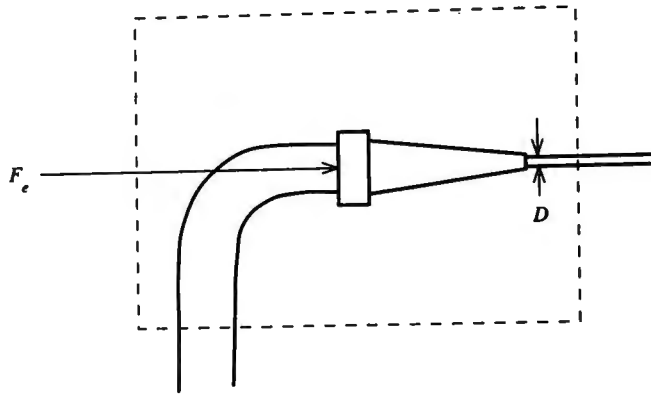


Figura E 5.4

Ejemplo 5.4

Un bombero dirige una corriente de agua desde la boquilla de una manguera contra incendios. El gasto volumétrico Q de la corriente de agua es 150 *gall/min* y la salida de la boquilla tiene un diámetro $D = 1$ *in*. Determine la fuerza F_e que el bombero ejerce sobre la boquilla de la manguera para sostenerla en su lugar.

Solución

Elija un volumen de control que envuelva la boquilla de la manguera, como se aprecia en la figura E 5.4. Ahora, aplique la componente horizontal del teorema de la cantidad de movimiento lineal, ecuación 5.11, al notar que el término no estacionario es cero puesto que el flujo es estacionario, que el término correspondiente a la fuerza de presión es cero pues la presión es constante (presión atmosférica) en la superficie de control en posición vertical, que el término de la fuerza viscosa es cero puesto que el esfuerzo

⁶ En el raro caso en el que el objeto sólido sufre una aceleración considerable, la fuerza \mathbf{F}_{ex} que actúa sobre el fluido diferirá de la que ejerce el agente externo en una cantidad igual al producto de la masa del objeto sólido por su aceleración.

viscoso también lo es sobre la superficie de control y que la cantidad de movimiento del flujo de entrada no posee una componente horizontal y queda:

$$\dot{m}V_{sal} = F_e$$

$$F_e = \rho Q V_{sal}$$

Al evaluar estos términos:

$$Q = \frac{150 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{3.785E(-3) \text{ m}^3}{1 \text{ gal}} = 9.463E(-3) \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$V_{sal} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 9.463E(-3)}{\pi (2.54E(-2) \text{ m})^2} = 18.68 \text{ m/s}$$

$$F_e = 1E(3) \text{ kg/m}^3 \times 9.463E(-3) \text{ m}^3 \times 18.68 \text{ m/s} = 176.8 \text{ N}$$

$$= 176.8 \text{ N} \times \frac{1 \text{ lbf}}{4.448 \text{ N}} = 39.74 \text{ lbf}$$

Note la considerable fuerza necesaria para dirigir este moderado flujo de agua.

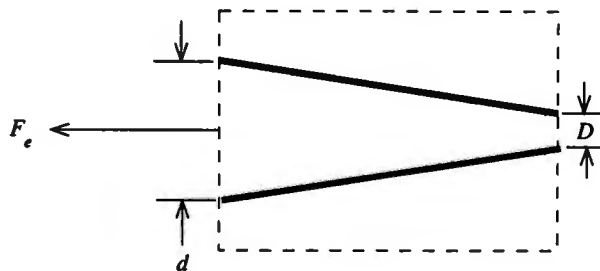


Figura E 5.5

Ejemplo 5.5

El diámetro de la boquilla de la manguera contra incendios del ejemplo 5.4 se ensancha de $D = 1 \text{ in}$ en el extremo abierto a un diámetro $d = 2 \text{ in}$ en el extremo que se une a la manguera, como lo ejemplifica la figura E 5.5. Calcule la fuerza F_c que ejerce en la boquilla la unión que la sujeta a la manguera. (Suponga que el flujo en la boquilla es no viscoso.)

Solución

Al elegir el volumen de control que se ilustra en la figura E 5.5, la componente horizontal de la integral de la cantidad de movimiento lineal, ecuación 5.11, se transforma en:

$$(\dot{m}V)_{sal} - (\dot{m}V)_{ent} = (p_{ent} - p_{sal})A_{ent} - F_c$$

$$F_c = (p_{ent} - p_{sal})A_{ent} - \dot{m}(V_{sal} - V_{ent})$$

Al evaluar la fuerza de presión, sólo aquella porción de la superficie de control (A_{ent}) donde la presión supera la presión atmosférica en una cantidad $p_{ent} - p_{atm} = p_{ent} - p_{sal}$ contribuye a la fuerza neta de presión.

A fin de determinar la diferencia de presión $p_{ent} - p_{sal}$, es necesario utilizar la ecuación de Bernoulli para un flujo estacionario:

$$\frac{p_{ent}}{\rho} + \frac{V_{ent}^2}{2} = \frac{p_{sal}}{\rho} + \frac{V_{sal}^2}{2}$$

$$p_{ent} - p_{sal} = \frac{\rho}{2} (V_{sal}^2 - V_{ent}^2)$$

de modo que la ecuación de la cantidad de movimiento se convierte en:

$$F_c = \frac{\rho}{2} (V_{sal}^2 - V_{ent}^2)A_{ent} - \dot{m}(V_{sal} - V_{ent})$$

Pero por la conservación de la masa,

$$\rho V_{ent}A_{ent} = \rho V_{sal}A_{sal}$$

$$V_{ent} = V_{sal} \frac{A_{sal}}{A_{ent}}$$

Al sustituir V_{ent} por este valor en la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$\begin{aligned} F_c &= \frac{\rho}{2} V_{sal}^2 \left(1 - \frac{A_{sal}^2}{A_{ent}^2} \right) A_{ent} - \rho A_{sal} V_{sal}^2 \left(1 - \frac{A_{sal}}{A_{ent}} \right) \\ &= \rho Q V_{sal} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{A_{ent}}{A_{sal}} + \frac{A_{sal}}{A_{ent}} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Puesto que $\rho Q V_{sal} = 176.8 \text{ N}$ del ejemplo 5.4 y $A_{ent} = (d/D)^2 A_{sal} = 4A_{sal}$,

$$F_c = 176.8 \text{ N} \left[\frac{1}{2} \left(4 + \frac{1}{4} \right) - 1 \right] = 176.8 \text{ N} \times \frac{9}{8} = 198.9 \text{ N}$$

5.4 Aplicaciones del teorema de la cantidad de movimiento

El teorema de la cantidad de movimiento se aplica a todos los flujos, ya sean viscosos o no viscosos, compresibles o incompresibles, subsónicos o supersónicos. Puesto que se trata de un teorema integral, es preciso saber algo acerca de las corrientes de flujo que entran y salen de un volumen de control con el objeto de aplicar el teorema a un flujo particular. Sin embargo, es una poderosa herramienta para el análisis de muchos flujos importantes. En esta sección, se consideran varios ejemplos de utilidad.

5.4.1 Propulsión

Los cohetes, aviones y barcos son impulsados mediante dispositivos que aumentan la cantidad de movimiento del fluido que pasa por el sistema de propulsión. En el caso de los cohetes, el fluido propulsor es el combustible del cohete, en tanto que para los aviones y barcos un motor de reacción o hélice aumenta la cantidad de movimiento del fluido circundante. La fuerza propulsora que ejerce ese motor se emplea para acelerar el vehículo y/o vencer la resistencia al movimiento a través del fluido circundante.

Motores cohete

Un motor cohete se abastece con una mezcla de combustible y oxidante, la cual al quemarse alcanza una presión y una temperatura altas. Los productos de la combustión fluyen hacia afuera del motor cohete a través de una boquilla, acelerándose a alta velocidad conforme la presión del fluido baja a un valor ambiente mucho menor. Sobre el motor cohete se ejerce una fuerza propulsora como consecuencia de la fuerza de presión que actúa sobre la superficie interna del motor, incluyendo la boquilla. Por el teorema de la cantidad de movimiento, esta fuerza es igual al aumento de la cantidad de movimiento de los productos de la combustión.

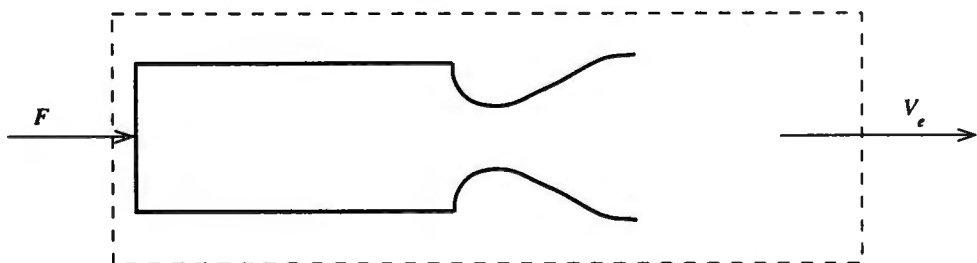


Figura E 5.6

Ejemplo 5.6

Un motor cohete de combustible sólido se enciende horizontalmente sobre una plataforma de pruebas, como se ilustra en la figura E 5.6. El combustible se quema con un gasto másico $\dot{m} = 2 \text{ kg/s}$ y la velocidad V_e del chorro del cohete es 200 m/s . Calcule la fuerza limitadora F que se necesita para mantener el cohete en su lugar.

Solución

Elija un volumen de control que encierre el cohete e intercepte la columna del chorro en un punto suficientemente alejado corriente abajo de modo que la presión de la columna iguale la presión atmosférica (véase la figura E 5.6). Aplique la componente horizontal del teorema de la cantidad de movimiento, ecuación 5.11,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} \, dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-pn) \, dS + \iint_S \tau \, dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\ 0 + \dot{m}V_e - 0 = 0 + 0 + 0 + F \end{aligned}$$

Advierta que el término no estacionario, la cantidad de movimiento del flujo de entrada y la fuerza de gravedad son cero, así como la fuerza de presión y la fuerza viscosa puesto que la presión es constante y el esfuerzo viscoso es cero en la superficie de control. Al evaluar la fuerza F ,

$$\begin{aligned} F &= \dot{m}V_e \\ &= 2 \text{ kg/s} \times 200 \text{ m/s} = 400 \text{ N} \end{aligned}$$

El flujo de los gases de combustión de un motor cohete es compresible. La máxima velocidad del fluido en la columna del chorro, V_e , se determina mediante las propiedades termodinámicas del gas. Cuanto mayor sea este valor, tanto mayor será la velocidad que alcanzará el cohete cuando se haya consumido su combustible.

Motores de reacción

El conocido motor de reacción de un avión toma, a través de su admisión de aire, aire ambiente, el cual, a continuación, se comprime, se mezcla con el combustible, se quema y se expande en toda la etapa de la turbina y en la tobera de escape. El gas que sale tiene una velocidad mayor que la velocidad de vuelo por lo que aumenta la cantidad de movimiento del fluido que pasa por el motor, lo cual da lugar al empuje que el motor ejerce sobre toda la estructura del avión o célula. En el motor de reacción con ventilador carenado (o con soplante canalizada), parte del flujo de entrada de aire pasa por una etapa de compresión y luego es acelerado en la tobera sin pasar por la cámara de

combustión. En ambos casos, la función del motor de reacción consiste en aumentar la cantidad de movimiento del fluido que entra al motor de modo que produzca un empuje en la estructura del avión o célula.

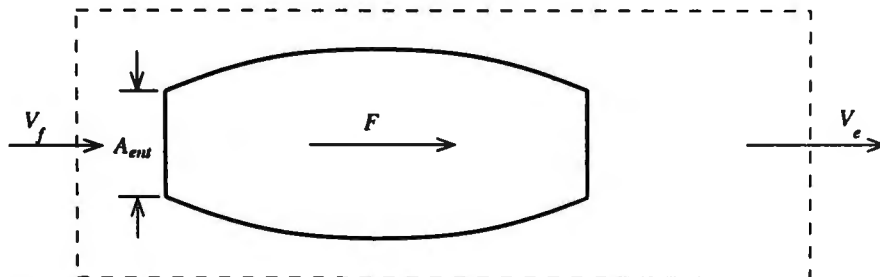


Figura E 5.7

Ejemplo 5.7

Un motor de reacción, cuyo esquema aparece en la figura E 5.7, se une a un avión en vuelo estacionario con velocidad $V_f = 250 \text{ m/s}$, toma aire de densidad $\rho_a = 0.4 \text{ kg/m}^3$ a través de una admisión de área $A_{ent} = 1.0 \text{ m}^2$. Se alimenta combustible en el motor con un gasto másico $\dot{m}_f = 2 \text{ kg/s}$. El chorro de escape tiene una velocidad $V_e = 500 \text{ m/s}$ cuando alcanza la presión atmosférica ambiente. Determine el valor de la fuerza F que toda la estructura del avión ejerce sobre el motor.

Solución

Aplique el teorema de la cantidad de movimiento, ecuación 5.11, en la dirección horizontal del flujo y observe que el término no estacionario y la presión, así como las fuerzas viscosa y gravitatoria son cero:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-p\mathbf{n}) dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \end{aligned}$$

$$0 + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} = 0 + 0 + 0 + F$$

El flujo neto de cantidad de movimiento $(\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent}$ sólo incluye el flujo que pasa por el motor de reacción. Cualquier flujo a través del volumen de control que pase por el motor tiene la misma velocidad al entrar y al salir y no existe flujo neto de cantidad de movimiento. A continuación se calcula \dot{m}_{ent} :

$$\dot{m}_{ent} = \rho_a V_f A_{ent} = 0.4 \text{ kg/m}^3 \times 250 \text{ m/s} \times 1.0 \text{ m}^2 = 100 \text{ kg/s}$$

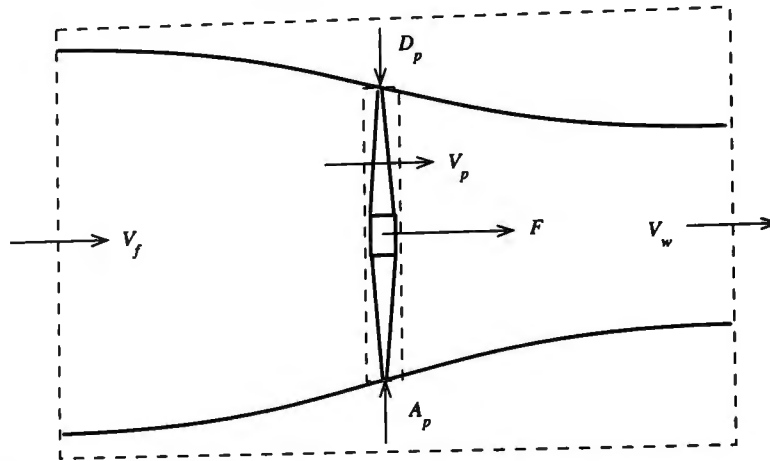


Figura 5.2 En el flujo que pasa por la hélice de un avión, las líneas de corriente que pasan a los lados de la hélice, encierran el fluido que pasa por ella. El fluido de acercamiento tiene la velocidad de vuelo V_f , se acelera por la hélice a una velocidad V_p y a una velocidad todavía mayor V_w en la estela de la hélice lejos de la corriente hacia abajo, resultando en una fuerza de empuje F .

Puesto que se advierte que $\dot{m}_{sal} = \dot{m}_{ent} + \dot{m}_f = 102 \text{ kg/s}$ por la conservación de la masa, se encuentra que F :

$$F = (\dot{m}V)_{sal} - (\dot{m}V)_{ent} = 102 \text{ kg/s} \times 500 \text{ m/s} - 100 \text{ kg/s} \times 250 \text{ m/s} = 2.6E(4) \text{ N}$$

Hélices

A pesar de haberlo inventado en el siglo XV Leonardo da Vinci, el propulsor de hélice no se utilizó como método práctico de propulsión de barcos y aviones sino hasta los siglos XIX y XX, respectivamente, cuando se dispuso de motores con suficiente potencia. Tanto para barcos como aviones, el principio de propulsión con hélices es el mismo. Las palas o paletas al girar con rapidez desarrollan una fuerza ascensional que tiene una componente en la dirección del eje de rotación que se suma a la fuerza de empuje en la dirección axial. Las aspas giratorias hacen que el fluido se acelere en la dirección axial, de forma que el fluido que ha pasado por la hélice se mueve con una rapidez mayor que la que tenía cuando llegó hasta el barco o avión. Este aumento de la cantidad de movimiento del fluido impelido es igual al empuje de la hélice.

En la figura 5.2, se proporciona el esquema del flujo a través de una hélice. Corriente arriba de la hélice, el fluido experimenta una aceleración desde una velocidad de vuelo V_f a una velocidad mayor V_p conforme pasa por la hélice. Esta aceleración la provoca una presión p_{ent} en la parte de enfrente de la hélice, la cual es menor que la presión atmosférica. El fluido sobre el cual ha actuado la hélice experimenta un aumento de presión y alcanza el valor p_{sal} que es superior al de la presión atmosférica. En la región

de la estela, detrás de la hélice, el fluido se acelera hasta alcanzar una velocidad V_w aún mayor conforme la presión desciende a la presión atmosférica. La hélice actúa como una bomba para aumentar la presión del fluido que fluye a través de ella una cantidad $p_{sal} - p_{ent}$, con lo que la velocidad del flujo V_f aumenta a V_w . Al acelerarse el flujo, las líneas de corriente convergen a fin de preservar el gasto másico constante del fluido que pasa por la hélice.

Para analizar este flujo de la hélice, primero se selecciona un volumen de control que rodee la hélice únicamente, como lo ilustra la línea punteada de la figura 5.2. Si se supone que el flujo es incompresible, la conservación de la masa requiere que las velocidades del flujo entrante y del flujo saliente sean iguales:

$$(\rho VA_p)_{ent} = (\rho VA_p)_{sal} = \rho V_p A_p = \dot{m} \quad (5.12)$$

pues las dos áreas, la del flujo entrante y la del saliente, son iguales al área del flujo de la hélice, $A_p = \pi D_p^2/4$. Al aplicar la ecuación 5.11 de la cantidad de movimiento a este volumen de control, es posible encontrar la fuerza de empuje F :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-p\mathbf{n}) dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\ 0 + \dot{m}V_p - \dot{m}V_p = p_{ent}A_p - p_{sal}A_p + 0 + 0 + F \\ F = (p_{sal} - p_{ent})A_p \end{aligned} \quad (5.13)$$

También es posible expresar la fuerza de empuje F en términos de las velocidades de vuelo y estela, lo cual equivale a las velocidades del flujo de entrada y de salida del motor de reacción. Para ello, supóngase que el flujo corriente arriba y corriente abajo de la hélice es estacionario y no viscoso y aplíquese la ecuación de Bernoulli a cada región:⁷

$$\begin{aligned} \frac{p_a}{\rho} + \frac{V_f^2}{2} &= \frac{p_{ent}}{\rho} + \frac{V_p^2}{2} \\ \frac{p_{sal}}{\rho} + \frac{V_p^2}{2} &= \frac{p_a}{\rho} + \frac{V_w^2}{2} \end{aligned}$$

donde la presión del fluido es la presión atmosférica p_a en un punto alejado corriente abajo y corriente arriba. Si se suman estas ecuaciones, se encuentra que la presión aumenta a través de la hélice:

⁷ Al escribir la segunda de estas ecuaciones, se supone que el flujo detrás de la hélice es puramente axial y no tiene una componente tangencial. La rotación de la hélice inducirá cierta componente corriente abajo, pero ésta será pequeña si la velocidad de la hélice es suficientemente grande comparada con V_f , como se verá a continuación, en la sección 5.6.3.

$$\frac{p_{sal} - p_{ent}}{\rho} = \frac{V_w^2}{2} - \frac{V_f^2}{2} \quad (5.14)$$

Si se sustituye esta ecuación 5.13, la fuerza de empuje F también puede expresarse como:

$$F = \rho A_p \left(\frac{V_w^2}{2} - \frac{V_f^2}{2} \right) \quad (5.15)$$

Por lo tanto, la fuerza de empuje aumenta con un aumento en la velocidad de estela V_w que supere la velocidad de vuelo V_f , aunque no sólo en proporción a ese aumento.

A fin de encontrar la velocidad del flujo V_p a través de la hélice, se aplica la ecuación 5.11 de la cantidad de movimiento al volumen externo de control que se ejemplifica en la figura 5.2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\ 0 + \dot{m}V_w - \dot{m}V_f = 0 + 0 + 0 + F \\ F = \dot{m}(V_w - V_f) \end{aligned}$$

donde sólo el fluido dentro de las líneas de corriente que pasan por la punta de la hélice contribuye al cambio neto en el flujo de cantidad de movimiento, $(\dot{m}\mathbf{V})_{ent} - (\dot{m}\mathbf{V})_{sal}$. Si ésta se sustituye en la ecuación 5.15 y se aplica la ecuación 5.12, se encuentra que:

$$V_p = \frac{V_w + V_f}{2} \quad (5.16)$$

La velocidad V_p del flujo de la hélice es la media aritmética de la velocidad de vuelo V_f y la velocidad de estela V_w . Conforme la hélice desarrolla un mayor empuje, aumenta tanto el incremento en la velocidad de estela como el flujo másico a través de la hélice, y el empuje aumenta como el producto de estas cantidades, lo cual puede apreciarse al combinar las ecuaciones 5.15 y 5.16:

$$F = \rho A_p V_p (V_w - V_f) \quad (5.17)$$

En un marco de referencia fijo en el fluido por el cual se mueve la hélice, el paso de la hélice deja una estela de fluido que se mueve con velocidad $V_w - V_f$ en la dirección opuesta al movimiento del vehículo. Esta corriente de fluido en movimiento contiene la energía cinética originada del consumo de parte de la potencia que suministra el motor de propulsión que hace funcionar la hélice. Es relativamente sencillo calcular la potencia que interviene para impulsar el vehículo, si se advierte que la potencia P_p suministrada a la hélice es el producto del gasto volumétrico $V_p A_p$ a través de la hélice multiplicado por el aumento de presión $p_{sal} - p_{ent}$:

$$\begin{aligned}
 P_p &= V_p A_p (p_{sal} - p_{ent}) \\
 &= V_p F
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

donde se ha utilizado la ecuación 5.13 para eliminar $p_{sal} - p_{ent}$. Sin embargo, la potencia P_v que se suministra al vehículo es el producto de la fuerza de empuje F multiplicado por la velocidad V_f del vehículo, potencia que es menor a la potencia P_p de la hélice. La razón de estas dos cantidades se conoce como *rendimiento de propulsión* η_{prop} :

$$\eta_{prop} \equiv \frac{P_v}{P_p} = \frac{FV_f}{FV_p} = \frac{2V}{V_w + V_f}
 \tag{5.19}$$

donde se usó la ecuación 5.16 para eliminar V_p . Puesto que V_w debe ser mayor que V_f a fin de producir cierto empuje, el rendimiento de propulsión siempre es menor que la unidad. La potencia perdida se consume en la energía cinética de la estela. A fin de reducir esta pérdida de potencia y aumentar el rendimiento de propulsión, se debe utilizar el área A_p lo más grande posible de forma que se reduzca al mínimo la diferencia de velocidad $V_w - V_f$, en tanto se siga proporcionando el empuje necesario. El tamaño de las hélices de los barcos y aviones se encuentra limitado por consideraciones prácticas y proporciona rendimientos de propulsión que, en general, se aproximan al 90%.

El área de la paleta o pala de la hélice de un avión es sólo cierto porcentaje del área A_p ya que es posible desarrollar la fuerza de empuje requerida incluso con una paleta de área relativamente pequeña. Sin embargo, en el caso de las hélices de un barco, el área de la paleta es una fracción grande de A_p a fin de evitar *cavitación*, v.g., la formación de burbujas de vapor en la superficie de la paleta.

Ejemplo 5.8

Un avión que vuela con una velocidad $V_f = 200 \text{ km/h}$ en el aire, con densidad $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, necesita una fuerza propulsora F de $3E(3) \text{ N}$. El avión se encuentra equipado con una hélice de diámetro $D_p = 2 \text{ m}$.

Calcule (a) la velocidad de estela V_w , (b) el rendimiento de propulsión η_{prop} y (c) la potencia P_p del motor para este avión.

Solución

(a) La velocidad de vuelo $V_f = 200E(3) \text{ m}/3600 \text{ s} = 55.56 \text{ m/s}$. Se puede encontrar la velocidad de estela al resolver la ecuación 5.15 para V_w :

$$V_w^2 = V_f^2 + \frac{2F}{\rho A_p}$$

$$= (55.56 \text{ m/s})^2 + \frac{2 \times 3E(3) \text{ N}}{1.2 \text{ kg/m}^3 \times \pi \times 1 \text{ m}^2}$$

$$V_w = 68.40 \text{ m/s}$$

(b) El rendimiento de propulsión puede calcularse a partir de la ecuación 5.19:

$$\eta_{prop} = \frac{2V_f}{V_w + V_f} = \frac{2 \times 55.56}{68.40 + 55.56} = 89.64\%$$

(c) Con la ecuación 5.16, puede encontrarse la potencia $P_p = FV_p$ del motor:

$$P_p = FV_p = -\frac{F(V_w + V_f)}{2} = \frac{3E(3) \text{ N} \times (68.40 + 55.56) \text{ m/s}}{2} = 185.9 \text{ kW}$$

5.4.2 Turbinas eólicas

Una turbina eólica es un dispositivo que permite producir potencia mecánica útil con el movimiento del viento. Aunque ya en los siglos pasados se utilizaron los molinos de viento para moler granos y bombear agua, en los últimos años, se han construido eficientes turbinas eólicas que generan energía eléctrica, la cual se aprovecha lejos del lugar donde se encuentra la turbina. Estas turbinas están montadas sobre torres que permiten que el eje de la turbina, que por lo regular es horizontal, se oriente en la dirección del viento. Las paletas de la turbina (tres, por lo común) son muy parecidas a las paletas de la hélice de un avión, aunque en general su diámetro es mucho mayor a fin de generar cantidades económicas de potencia.

El flujo del viento que pasa por las paletas giratorias de la turbina eólica es idéntico al que atraviesa por la hélice de la figura 5.2, a excepción de que las direcciones del flujo están invertidas, v.g., el flujo corre de derecha a izquierda en la figura 5.2. En otras palabras, la velocidad del viento, V_w es mayor que la velocidad de estela, V_f , el aire desacelera al pasar a través de la turbina eólica. La presión del aire decrece a través de la turbina eólica ($p_{ent} > p_{sal}$), la cual extrae una potencia P_{wt} del flujo del viento a una rapidez que se determina al combinar las ecuaciones 5.18, 5.15 y 5.16:

$$P_{wt} = \rho A_p \left(\frac{V_w + V_f}{2} \right)^2 (V_w - V_f) \quad (5.20)$$

Podría pensarse que la máxima potencia se extraería de la turbina eólica cuando su velocidad de estela $V_f = 0$, v.g., la turbina eólica extraería toda la energía cinética del viento. De hecho, la potencia máxima se obtiene cuando la velocidad de estela $V_f = V_w/3$,⁸ valor de V_f para el cual la potencia es:

⁸ Para demostrar que esto es así, iguale a cero la derivada $\partial P_{wt}/\partial V_f$ de la ecuación 5.20 y resuelva para V_f .



Figura 5.3 Turbinas eólicas dispuestas en línea en una “granja eólica”. Estas turbinas, que generan 400 kW cada una de ellas, tienen un diámetro de 33 m y sus ejes se encuentran 30 m por encima del nivel del suelo. (Fotografía cortesía de U.S. Windpower.)

$$\text{máxima } P_{wi} = \frac{16}{27} \left(\frac{1}{2} \rho A_p V_w^3 \right) \quad (5.21)$$

donde el término dentro del paréntesis es el flujo de la energía cinética del viento que pasa por un área A_p , v.g., el producto de un gasto másico $\rho V_w A_p$ multiplicado por la energía cinética del viento por unidad de masa de aire, $V_w^2/2$. Puesto que la máxima potencia que puede suministrar una turbina eólica varía según el cubo de la velocidad del viento, los lugares más económicos para las turbinas eólicas son los que presentan altas y sostenidas velocidades del viento.

La figura 5.3 presenta un arreglo de turbinas eólicas en una “granja eólica”. Por lo regular se encuentran separadas una distancia de 2 a 3 diámetros en la dirección transversal del viento y de 5 a 10 diámetros en la dirección del viento, con respecto a la dirección del viento prevaleciente. Estas turbinas eólicas poseen un sistema activo

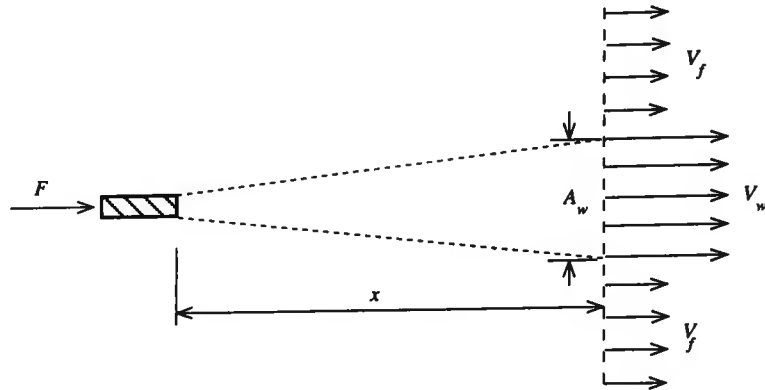


Figura 5.4 El área A_w de sección transversal de la estela que deja detrás un motor de reacción se expande al aumentar la distancia x a partir del motor de reacción, en tanto que la velocidad V_w de estela disminuye y se acerca a la velocidad V_f de vuelo.

de control para orientarlas en la dirección del viento de modo que las paletas de la turbina se encuentren corriente arriba de la torre de apoyo.

Ejemplo 5.9

Determine la potencia máxima que puede generarse con una turbina eólica de diámetro $D = 6 \text{ m}$ cuando la velocidad del viento es de 20 millas por hora y la densidad del aire es 1.2 kg/m^3 .

Solución

Utilizando la ecuación 5.21, la máxima potencia es:

$$\text{máxima } P_{wt} = \frac{8}{27} (1.2 \text{ kg/m}^3) \left(\frac{\pi}{4} (6)^2 \text{ m}^2 \right) \left(20 \text{ mph} \times \frac{0.447 \text{ m/s}}{\text{mph}} \right)^3 = 7.183 \text{ kW}$$

5.4.3 Estelas y chorros

En la sección 5.4.1, se mencionó que una hélice o un motor de reacción dejan detrás un rastro de fluido que se mueve con respecto al medio por el cual viaja el vehículo. Este "río" de fluido se conoce como *estela*. Con el tiempo, el fluido de la estela se mezcla con el medio circundante y disminuye su velocidad. El cambio en la velocidad del flujo de la estela es tal que éste conserva la cantidad de movimiento.

El flujo en la estela de un motor de reacción en un avión se ilustra en la figura 5.4, donde el marco de referencia está unido al avión de modo que el flujo es estacionario. Al aumentar la distancia x atrás del avión, la velocidad de estela V_w se aproxima a un valor igual al de la velocidad de vuelo V_f , en tanto que el área A_w de la sección transversal

de la estela aumenta sin límite. Es posible determinar la forma en que V_w cambia con el aumento de A_w si se aplica la ecuación 5.11 de la cantidad de movimiento al volumen de control que rodea el motor de reacción y la estela a una distancia suficiente del avión donde la presión de la superficie de control sea igual a la presión atmosférica en cualquier punto, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\ 0 + \dot{m}(V_w - V_f) = 0 + 0 + 0 + F \end{aligned}$$

donde \dot{m} es el gasto másico del fluido que pasa por la estela a la distancia x ,

$$\dot{m} = \rho_w A_w V_w$$

Al combinar estas ecuaciones, se encuentra que:

$$\begin{aligned} V_w(V_w - V_f) &= \frac{F}{\rho_w A_w} \\ V_w &= \frac{V_f + \sqrt{V_f^2 + 4F/\rho_w A_w}}{2} \rightarrow V_f + \frac{F}{\rho_w A_w V_f} \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde el valor asintótico de V_w se cumple para $F/\rho_w A_w V_f^2 \ll 1$. A grandes distancias desde el avión, las observaciones revelan que el área A_w de la estela aumenta como x^2 , por lo que el exceso de velocidad en la estela, $V_w - V_f$, varía como x^{-2} .

Ejemplo 5.10

Para el motor de reacción del ejemplo 5.7, encuentre la velocidad V_w de estela si el área de ésta es $A_w = 100 \text{ m}^2$ para $x = 100 \text{ m}$.

Solución

Si se supone que puede aplicarse la forma asintótica de la ecuación 5.22,

$$\begin{aligned} V_w &= V_f + \frac{F}{\rho_w A_w V_f} \\ &= 250 \text{ m/s} + \frac{2.6E(4) \text{ N}}{0.4 \text{ kg/m}^3 \times 250 \text{ m/s} \times 100 \text{ m}^2} = 252.6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Advierta que esto satisface la condición de la forma asintótica.

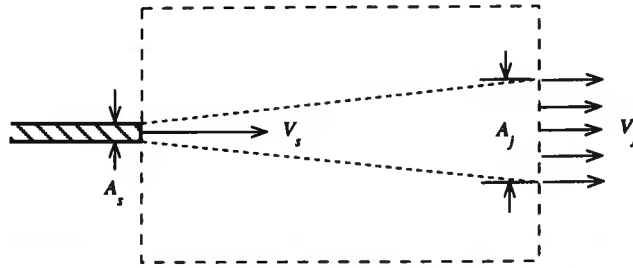


Figura 5.5 Un chorro dirigido hacia un medio estacionario se difunde con la distancia x desde la fuente del chorro al arrastrar con él el fluido circundante. El fluido del chorro viaja más lentamente al aumentar el área A_j del chorro, pero la cantidad de movimiento del chorro permanece constante.

El flujo de un fluido que proviene de una fuente dirigida hacia los alrededores en estado estacionario, forma un flujo de *chorro*. Al igual que la estela, el área de sección transversal de la corriente de fluido que parte de una fuente crece al mezclarse con fluido del medio circundante, como lo ilustra la figura 5.5. La velocidad del chorro V_j disminuye con la distancia x desde la fuente de forma que se conserve la cantidad de movimiento en el chorro. Si se aplica la ecuación 5.11 de la cantidad de movimiento al volumen de control de la figura 5.5, donde la presión es constante en la superficie de control, se encuentra que la velocidad del chorro es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\ 0 + \rho_j A_j V_j^2 - \rho_s A_s V_s^2 = 0 + 0 + 0 + 0 \\ V_j = V_s \sqrt{\frac{\rho_s A_s}{\rho_j A_j}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde el subíndice s identifica las condiciones del flujo en la fuente de chorro. Como en el caso de la estela, se observa que el área A_j del chorro crece como x^2 a grandes distancias de la fuente.

Ejemplo 5.11

Un chorro de agua con velocidad $V_j = 1 \text{ m/s}$ sale de un orificio con diámetro $D_s = 3 \text{ cm}$ hacia una alberca. Si el diámetro del chorro es $D_j = 10 \text{ cm}$ a una distancia $x = 1 \text{ m}$ de la fuente, ¿cuál es el valor de la velocidad V_j del chorro en ese punto?

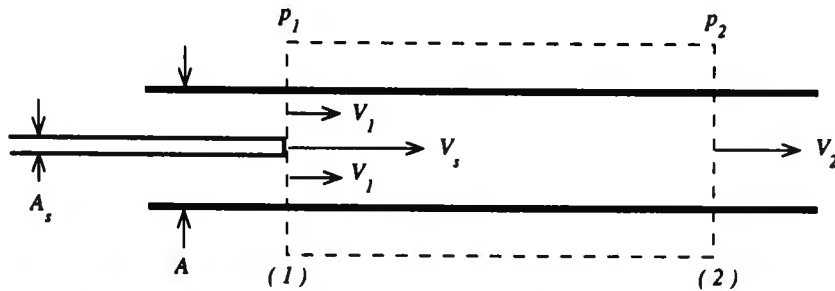


Figura 5.6 Una bomba de chorro está compuesta de un chorro coaxial de un fluido de alta velocidad que se inyecta en un tubo que lleva un fluido de menor velocidad. Al mezclarse las dos corrientes, se produce un aumento en la presión corriente abajo.

Solución

Si se utiliza la ecuación 5.23 y se advierte que $\rho_j = \rho_s$ para el agua,

$$V_j = V_s \sqrt{\frac{\rho_s A_s}{\rho_j A_j}} = V_s \frac{D_s}{D_j} = 1 \text{ m/s} \times \frac{3 \text{ m}}{10 \text{ cm}} = 0.3 \text{ m/s}$$

La velocidad del chorro disminuye de manera inversa al diámetro del chorro.

La bomba de chorro

Uno de los usos prácticos del chorro de un fluido comprende el bombeo de fluidos para llevarlos a una presión mayor mediante el uso del chorro de un fluido que se inyecta en una tubería que contiene un fluido en movimiento. En la figura 5.6, se ejemplifica esta *bomba de chorro* y presenta un chorro, con velocidad V_s y área A_s , alineado con el eje de una tubería de área A en un punto donde la velocidad del flujo de la tubería es V_1 y la presión p_1 . A una distancia corriente abajo, donde las dos corrientes se han mezclado por completo, V_2 es la velocidad y p_2 es la presión que es mayor que p_1 . La cantidad del aumento de presión $p_2 - p_1$ depende de las velocidades V_1 y V_s y la razón A_s/A de las áreas, dependencia que es posible determinar si se aplica la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento al fluido dentro del volumen de control de la figura 5.6.

Se considerará el caso para el cual tanto el fluido del chorro como el bombeado son incompresibles y tienen la misma densidad ρ . Si se aplica la conservación de la masa al flujo estacionario del fluido a través de la superficie de control de la figura 5.6,

$$\rho A V_2 = \rho(A - A_s) V_1 + \rho A_s V_s$$

Después, se utiliza la ecuación 5.11 de la cantidad de movimiento para el mismo volumen de control, pero se supone que la fuerza viscosa en las paredes de la tubería puede despreciarse ($\tau = 0$):

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\
&= \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\
& 0 + \rho AV_2^2 - \rho(A - A_s) V_1^2 - \rho A_s V_s^2 \\
&= (p_1 - p_2) A + 0 + 0 + 0
\end{aligned}$$

Al eliminar V_2 entre estas dos ecuaciones y al resolver para el aumento de presión,

$$p_2 - p_1 = \frac{A_s}{A} \left(1 - \frac{A_s}{A} \right) \rho (V_s - V_1)^2 \quad (5.24)$$

El máximo aumento de presión que podría esperarse sería el de un flujo no viscoso correspondiente a un chorro que experimenta una desaceleración al cambiar su velocidad de V_s a $V_2 = V_s A_s/A$, es decir, un aumento de presión de $(\rho V_s^2/2)(1 - A_s^2/A^2)$. Al dividir las ecuaciones 5.24 entre este aumento de presión, se tiene una forma adimensional de la ecuación de la bomba de chorro:

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2} \rho V_s^2 [1 - (A_s/A)^2]} = 2 \left(\frac{A_s/A}{1 + A_s/A} \right) \left(1 - \frac{V_1}{V_s} \right)^2 \quad (5.25)$$

Puesto que $A_s/A \leq 1$ y $V_1/V_s \leq 1$, el lado derecho de la ecuación 5.25 siempre es menor que uno.

La bomba de chorro permite bombear un gasto volumétrico mayor ($V_1[A - A_s]$) que el necesario para suministrar el chorro ($V_s A_s$), aunque con un aumento menor en la presión que el necesario para proporcionar el chorro.

Ejemplo 5.12

Una bomba de chorro consta de un chorro con diámetro $D_s = 1$ in dentro de una tubería cuyo diámetro es $D = 3$ in. El gasto volumétrico del chorro Q_s es 100 GPM (galones por minuto). Calcule el aumento de presión en esta bomba cuando el gasto volumétrico Q_1 es 500 GPM.

Solución

En unidades del SI, las áreas y los gastos del flujo son:

$$A_s = \frac{\pi}{4} (2.54E(-2) \text{ m})^2 = 5.067E(-4) \text{ m}^2; \quad A = 9A_s = 4.560E(-3) \text{ m}^2$$

$$Q_s = \frac{100 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{3.785E(-3) \text{ m}^3}{\text{gal}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} = 6.308E(-3) \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q_1 = 5 Q_s = 3.154E(-2) \text{ m}^3/\text{s}$$

y las velocidades V_1 y V_s son:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A - A_s} = \frac{3.154E(-2) \text{ m}^3/\text{s}}{4.560E(-3) \text{ m}^2 - 5.067E(-4) \text{ m}^2} = 7.781 \text{ m/s}$$

$$V_s = \frac{Q_s}{A_s} = \frac{6.308E(-3) \text{ m}^3/\text{s}}{5.067E(-4) \text{ m}^2} = 12.45 \text{ m/s}$$

Si estos valores se sustituyen en la ecuación 5.24,

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9} \right) (1E(3) \text{ kg/m}^3) (12.45 \text{ m/s} - 7.781 \text{ m/s})^2 = 2.153E(3) \text{ Pa}$$

5.4.4 Paletas de turbina y coronas de paletas

El fluido que fluye a través de una turbina produce potencia al ejercer una fuerza sobre la paleta de la turbina en movimiento. Se da forma a la paleta de modo que ésta permita producir un cambio en la dirección del fluido que la atraviesa, con lo cual se produce una fuerza ocasionada por el cambio en la cantidad de movimiento del flujo del fluido.

En la figura 5.7, se proporciona un ejemplo de dicho flujo y se ilustra un chorro de agua con velocidad V_n que parte de una boquilla cuya área de flujo es A_n e incide sobre la paleta de una turbina que se mueve con una velocidad V_b que es menor que la velocidad del chorro. La forma de la paleta permite casi invertir el flujo de agua, al redirigirlo en cantidades iguales hacia ambos lados de la corriente de la boquilla. La fuerza F_b que se ejerce sobre la paleta equilibra el cambio en la cantidad de movimiento del fluido redirigido.

Para analizar este flujo, elíjase un volumen de control alrededor de la paleta, como se ejemplifica en la figura 5.7, el cual quede fijo en relación con la paleta, lo cual constituye un marco de referencia inercial.⁹ La velocidad V_r de la corriente de agua relativa a la paleta, v.g., la velocidad medida relativa al volumen de control, es:

$$V_r = V_n - V_b$$

Al aplicar la ecuación 5.11 del teorema de la cantidad de movimiento al flujo que pasa por el volumen de control, si se sabe que el gasto másico que entra (y que sale) del volumen de control es $\rho A_n V_r$, se encuentra que:

⁹ Aquí se está despreciando el movimiento circular la paleta alrededor del eje de la turbina, el cual produce una aceleración normal al plano de la figura 5.7 y no repercute en el equilibrio de la cantidad de movimiento en el plano de la figura.

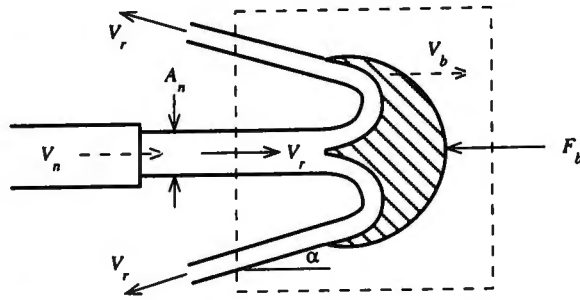


Figura 5.7 En el flujo de agua que choca con el álabe o paleta de una turbina Pelton, una boquilla dirige una corriente de agua de alta velocidad tangente al disco de la turbina al cual se han fijado álabes radiales (la forma del área transversal de los álabes se esquematiza en esta figura). Los álabes se mueven en la dirección del chorro de agua, interceptando la corriente por lo menos un álabe. Las velocidades del fluido relativas al álabe se indican con las flechas de línea continua, en tanto que las velocidades del fluido y el álabe en el marco de referencia del laboratorio se representan con las flechas punteadas.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \end{aligned}$$

$$0 + \rho A_n V_r (-V_r \cos \alpha - V_r) = 0 + 0 + 0 - F_b$$

$$F_b = \rho A_n V_r^2 (1 + \cos \alpha) = \rho A_n (V_n - V_b)^2 (1 + \cos \alpha) \quad (5.26)$$

La potencia P_b producida por el movimiento de la paleta es el producto de la fuerza F_b multiplicado por la velocidad V_b de la paleta:

$$P_b = F_b V_b = \rho A_n V_b (V_n - V_b)^2 (1 + \cos \alpha) \quad (5.27)$$

La potencia de la paleta es cero cuando su velocidad es cero ($V_b = 0$) y cuando la velocidad de la paleta es igual a la velocidad del flujo de la boquilla ($V_b = V_n$).

La potencia P_t de la turbina es mayor que la potencia P_b de la paleta debido a que hay un tiempo durante el cual más de una paleta está desarrollando potencia. A fin de determinar la potencia de la turbina, se comienza por advertir que si el tiempo que transcurre entre el contacto de cada paleta con el chorro es Δt , entonces la masa del fluido procesada por cada paleta es $\rho A_n V_n \Delta t$. Sin embargo, el gasto másico en cada paleta es $\rho A_n V_r$, por lo que la paleta está produciendo potencia durante un tiempo $(\rho A_n V_n \Delta t) / (\rho A_n V_r) = V_n \Delta t / V_r$. De ahí que el valor medio de la potencia que en un intervalo de tiempo desarrolla la turbina sea V_n / V_r multiplicado por la potencia P_b de la paleta dada por la ecuación 5.27:

$$P_t = \frac{V_n}{V_r} P_b = \rho A_n V_n V_b (V_n - V_b)(1 + \cos \alpha) \quad (5.28)$$

La potencia P_t de la turbina es máxima cuando $V_b = V_n/2$:¹⁰

$$\text{máxima } P_b = \rho A_n \frac{V_n^2}{2} \left(V_n - \frac{V_n}{2} \right) (1 + \cos \alpha) = \frac{(1 + \cos \alpha)}{2} \left(\rho A_n \frac{V_n^3}{2} \right) \quad (5.29)$$

La potencia disponible en la boquilla es el gasto másico $\rho A_n V_n$ multiplicado por la energía cinética por unidad de masa de agua, $V_n^2/2$, la cual es igual a $\rho A_n V_n^3/2$. La potencia máxima que puede desarrollar la paleta es $(1 + \cos \alpha)/2 \leq 1$ multiplicada por la potencia disponible.

Ejemplo 5.13

Desde un depósito de agua cuya superficie se encuentra a una altura $h = 100 \text{ m}$ por encima de la altura de la turbina, se abastece a una pequeña turbina Pelton. El área A_n de la corriente del chorro de la turbina es 1.0 in^2 y el ángulo de la paleta es $\alpha = 20^\circ$.

Calcule (a) la velocidad V_n de la boquilla, (b) la potencia máxima P_t de la turbina y (c) la velocidad V_b de la paleta y la fuerza F_b cuando se produce la potencia máxima.

Solución

(a) Al aplicar la ecuación de Bernoulli a un flujo estacionario no viscoso desde la superficie del depósito a la salida de la boquilla:

$$0 + \frac{p_a}{\rho} + gh = \frac{V_n^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + 0$$

$$V_n = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.807 \text{ m/s}^2 \times 100 \text{ m}} = 44.29 \text{ m/s}$$

(b) Se encuentra la potencia máxima a partir de la ecuación 5.29:

$$\begin{aligned} \text{máxima } P_b &= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} \left((1\text{E}(3) \text{ kg/m}^3)(2.54\text{E}(-2) \text{ m})^2 \frac{(44.29 \text{ m/s})^3}{2} \right) \\ &= 27.18 \text{ kW} \end{aligned}$$

(c) Para máxima potencia y aplicando la ecuación 5.26:

$$V_b \frac{V_n}{2} = 22.15 \text{ m/s}$$

$$F_b = (1\text{E}(3) \text{ kg/m}^3)(2.54\text{E}(-2) \text{ m})^2 ([44.29 - 22.15] \text{ m/s})^2 (1 + \cos 20^\circ) = 163.4 \text{ N}$$

¹⁰ Para probar esto, haga $\partial P_t / \partial V_b = 0$ y resuelva para V_b .

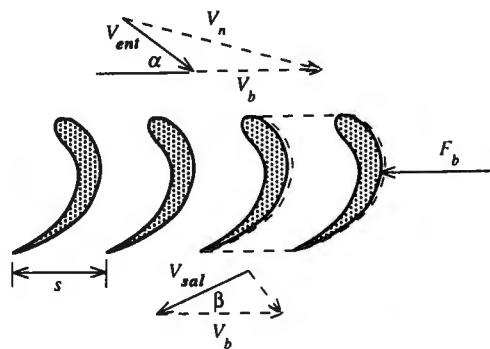


Figura 5.8 Flujo a través de la corona de álabes de una turbina. Se representan las velocidades del flujo de entrada y del flujo de salida en el marco de referencia del laboratorio (flechas punteadas) y en el marco de referencia de la corona de álabes (flechas de línea continua), vistas en dirección radial hacia adentro. Los álabes, con forma aerodinámica, desvían el flujo desde el ángulo relativo α del flujo de entrada hasta el ángulo relativo β del flujo de salida.

La mayoría de las turbinas de gas y de vapor emplean coronas de paletas sobre las cuales se envía un fluido alrededor de toda la circunferencia del rotor de la turbina. La velocidad del fluido posee componentes tangencial y axial pero no radial. Si sobre la corona de paletas se observa radialmente hacia abajo, se vería un flujo como el de la figura 5.8, donde las paletas se encuentran espaciadas por una separación s . El flujo entrante tiene una velocidad absoluta V_n y una velocidad V_{ent} relativa a la paleta, en tanto que la diferencia vectorial es la velocidad V_b de la paleta, como se ejemplifica en el diagrama vectorial en la parte superior de la figura 5.8. Las paletas poseen una forma tal que permite cambiar la dirección de este flujo un ángulo grande, desde el ángulo de entrada α hasta el ángulo de salida β . La velocidad del flujo saliente relativa a la paleta, V_{sal} , será igual a la velocidad del flujo entrante si no hay caída de presión del flujo de entrada al de salida, en cuyo caso se habla de *etapa de impulso*, o es posible que esa velocidad aumente si la presión cae, lo que se conoce como *etapa de reacción*.

Para encontrar la fuerza F_b que actúa sobre una sola paleta de la corona de la turbina en cuestión, se selecciona una superficie de control que encierra una paleta (como lo ilustra la línea punteada de la figura 5.8), la cual tiene superficies que se encuentran a lo largo de la superficie derecha de las paletas contiguas. Con esta elección, la fuerza de presión sobre la parte de la superficie de control que está en contacto con las paletas será cero puesto que las fuerzas diferenciales sobre elementos de área localizados en forma semejante de las paletas contiguas que tocan el volumen de control son iguales y opuestas en dirección. En la dirección tangencial, no habrá contribución de la integral de la cantidad de movimiento de la fuerza de presión.

Si h denota la altura de la paleta, al aplicar la conservación de la masa a este volumen de control, resulta que:

$$\rho_{ent}(V_{ent} \text{ sen } \alpha)(sh) = \rho_{sal}(V_{sal} \text{ sen } \beta)(sh) \quad (5.30)$$

Ahora, aplique el teorema de la cantidad de movimiento en la dirección tangencial:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent}$$

$$= \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex}$$

$$0 + \rho_{ent}(V_{ent} \text{ sen } \alpha)(sh)(-V_{sal} \text{ cos } \beta) - \rho_{sal}(V_{sal} \text{ sen } \beta)(sh)(V_{ent} \text{ cos } \alpha) = 0 + 0 + 0 - F_b$$

$$F_b = \rho_{ent} V_{ent}(sh)(\text{sen } \alpha)(V_{ent} \text{ cos } \alpha + V_{sal} \text{ cos } \beta)$$

$$= \rho_{ent} V_{ent}^2 (sh)(\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha) \left(1 + \frac{\rho_{ent} \tan \alpha}{\rho_{sal} \tan \beta} \right) \quad (5.31)$$

donde se ha utilizado la ecuación 5.30 de la conservación de la masa para sustituir V_{sal} .

Ejemplo 5.14

Obtenga una expresión de la fuerza F_b sobre la paleta para una etapa de impulso para la cual la velocidad de la paleta se elige de tal modo que sea mínima la energía cinética del flujo corriente abajo.

Solución

Para una etapa de impulso, la ecuación 5.31 se simplifica si se advierte que $\rho_{ent} = \rho_{sal}$ y $V_{ent} = V_{sal}$ puesto que no hay cambio de presión en este caso y, por lo tanto, $\beta = \alpha$ por la ecuación 5.30 de la conservación de la masa. (La forma de la paleta de la turbina es, así, simétrica respecto de la línea central de la paleta.) Para reducir al mínimo la energía cinética del flujo que sale de una etapa de impulso, se elige la velocidad de la paleta tal que $V_{sal} \text{ cos } \beta = V_b$, de modo que no habrá componente tangencial del flujo que sale de la etapa de impulso (véase el diagrama vectorial en la parte inferior de la figura 5.8). Con estas restricciones, la ecuación 5.31 se transforma en:

$$F_b = 2\rho_{ent} V_b^2 (sh) \tan \alpha$$

5.4.5 Flujos horizontales con una superficie libre

El flujo de agua en canales, vertederos y compuertas de esclusa puede verse acompañado de cambios en la velocidad originados por obstrucciones del flujo. Las fuerzas que actúan sobre estas obstrucciones pueden determinarse aplicando a estos flujos la integral de la cantidad de movimiento. En esta sección, se considerarán dos ejemplos de estos flujos.

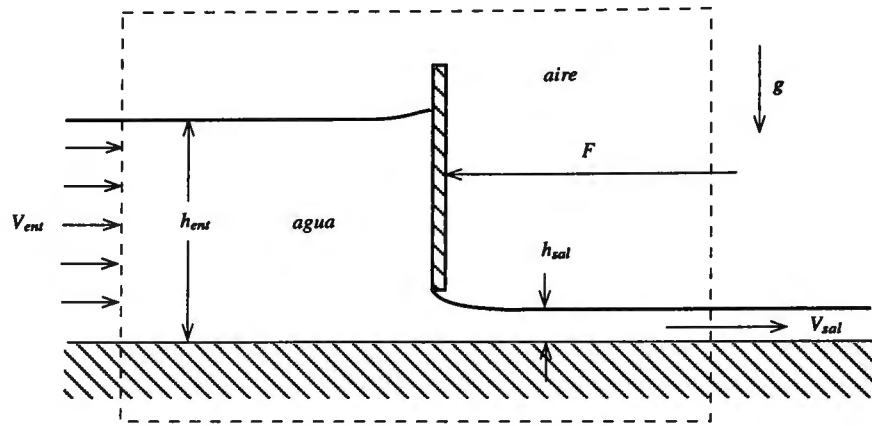


Figura 5.9 El flujo bidimensional de agua debajo de una compuerta es un flujo uniforme, horizontal lejos tanto corriente arriba como corriente abajo de la compuerta. La fuerza limitadora o restrictiva que mantiene la compuerta fija en su lugar resulta del equilibrio de la cantidad de movimiento lineal.

Flujo a través de una compuerta

La figura 5.9 representa el flujo bidimensional debajo de una compuerta insertada en un ancho canal de agua corriente. Lejos, corriente arriba y corriente abajo, las velocidades del flujo V_{ent} y V_{sal} , respectivamente, son horizontales y uniformes desde el fondo hasta la interfaz aire-agua en la parte superior, y la profundidad de las capas de fluido, h_{ent} y h_{sal} , son también constantes. Cerca de la compuerta, la velocidad y la profundidad de la capa de agua varían, al acelerarse el fluido que entra para pasar por debajo de la abertura de la compuerta. Por lo tanto, se selecciona un volumen de control que encierre la compuerta y se extienda una distancia suficiente corriente arriba y corriente abajo de forma que se conozcan las condiciones del flujo.

Al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento al volumen de control que se indica mediante la línea punteada de la figura 5.9, se necesitará evaluar la integral de la presión sobre la superficie de control. Sin embargo, sólo se necesita considerar la porción del flujo donde la presión difiere de la atmosférica en una cantidad $p - p_a$, lo cual ocurre en las capas de agua corriente arriba y corriente abajo puesto que una presión uniforme p_a se integra a cero. En estas capas de agua, las líneas de corriente son horizontales y no se curvan y la distribución de la presión es hidrostática:

$$p + \rho g z = p_a + \rho g h_{ent}$$

de tal forma que la integral de la presión neta en el flujo corriente arriba, por ejemplo, se convierte en:

$$\int_0^{h_{ent}} (p - p_a) dz = \rho g \int_0^{h_{ent}} (h_{ent} - z) dz = \rho g \left[h_{ent} z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{h_{ent}} = \frac{1}{2} \rho g h_{ent}^2 \quad (5.32)$$

Ahora, se puede utilizar el teorema 5.11 de la cantidad de movimiento en la dirección horizontal a fin de encontrar la fuerza horizontal por unidad de anchura de la compuerta, F/W , que se necesita para contener la compuerta:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m} \mathbf{V})_{sal} - (\dot{m} \mathbf{V})_{ent} \\ & = \iint_S (-pn) dS + \iint_S \tau dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_{ex} \\ & 0 + \rho V_{sal}^2 (Wh_{sal}) - \rho V_{ent}^2 (Wh_{ent}) \\ & = W \int_0^{h_{ent}} (p - p_a) dz - W \int_0^{h_{sal}} (p - p_a) dz + 0 + 0 - F \\ & \frac{F}{W} = \frac{1}{2} \rho g (h_{ent}^2 - h_{sal}^2) + \rho h_{ent} V_{ent}^2 - \rho h_{sal} V_{sal}^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde se ha despreciado la fuerza viscosa que actúa sobre el cauce de la corriente. Ahora es posible eliminar V_{ent} de esta expresión aplicando la conservación de la masa al volumen de control:

$$\begin{aligned} \rho V_{ent} (Wh_{ent}) &= \rho V_{sal} (Wh_{sal}) \\ V_{ent} &= \left(\frac{h_{sal}}{h_{ent}} \right) V_{sal} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Al sustituir en la ecuación 5.33 y al simplificar,

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2} \rho g (h_{ent}^2 - h_{sal}^2) - \rho g h_{sal} V_{sal}^2 \left(1 - \frac{h_{sal}}{h_{ent}} \right) \quad (5.35)$$

El primer término de esta expresión es simplemente la fuerza que existiría si la compuerta se cerrara con el fin de separar las dos capas estáticas con profundidades h_{ent} y h_{sal} . El segundo término reduce esta cantidad en proporción al flujo que pasa por la compuerta.

Para simplificar más aún esta expresión, se supone que el flujo que atraviesa la compuerta es un flujo no viscoso, por lo que se puede aplicar a una línea de corriente a lo largo de la interfaz aire-agua la ecuación de Bernoulli para un flujo estacionario:

$$\begin{aligned} \frac{p_a}{\rho} + \frac{V_{sal}^2}{2} + gh_{ent} &= \frac{p_a}{\rho} + \frac{V_{sal}^2}{2} + gh_{sal} \\ \left(1 - \frac{h_{sal}^2}{h_{ent}^2} \right) \frac{V_{sal}^2}{2} &= g(h_{ent} - h_{sal}) \end{aligned}$$

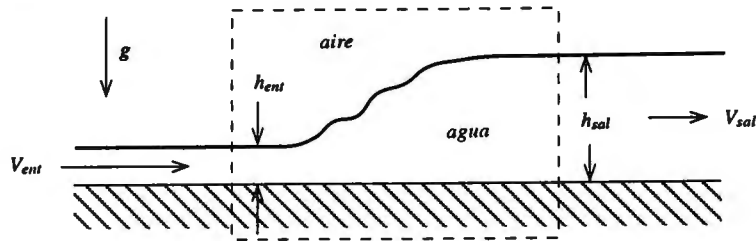


Figura 5.10 Un resalto hidráulico en el flujo a través de un canal siempre va acompañado de un aumento en la profundidad de la corriente en la dirección del flujo.

$$V_{sal}^2 = \frac{2gh_{ent}^2}{h_{ent} + h_{sal}} \quad (5.36)$$

donde se ha usado la ecuación 5.34 de la conservación de masa en la segunda línea para eliminar V_{ent} . Si se sustituye esta expresión por V_{sal} en la ecuación 5.3 para la fuerza en la compuerta de la esclusa y se simplifica la expresión resultante, se encontrará que:

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{(h_{ent} - h_{sal})^3}{h_{ent} + h_{sal}} \right) \quad (5.37)$$

Resalto hidráulico

Puede suceder que un flujo de agua en un canal sin obstrucción sufra un aumento espontáneo de nivel, como se presenta en la figura 5.10. Este flujo se conoce como *resalto hidráulico*. La región de transición desde el flujo uniforme corriente arriba a otro flujo uniforme corriente abajo es irregular y aleatoria, pues se trata de un flujo turbulento con pequeñas ondas en la superficie que parecen romperse. En tanto que no es posible describir el flujo en esta región de transición, se pueden relacionar las condiciones corriente arriba y corriente abajo en el resalto hidráulico utilizando el teorema de la cantidad de movimiento.

Si se aplica la conservación de la masa y la cantidad de movimiento al volumen de control de la figura 5.10, se obtendrán ecuaciones idénticas a las 5.33 - 5.35, a excepción de $F = 0$. Al despejar la ecuación 5.35 (con $F = 0$) para V_{sal} y luego para V_{ent} (usando 5.34), se encuentra que:

$$\begin{aligned} \frac{V_{sal}^2}{gh_{sal}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_{ent}}{h_{sal}} \right) \left(\frac{h_{ent}}{h_{sal}} + 1 \right) \leq 1 \\ \frac{V_{ent}^2}{gh_{ent}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_{sal}}{h_{ent}} \right) \left(\frac{h_{sal}}{h_{ent}} + 1 \right) \geq 1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde la desigualdad proviene de la observación de que el nivel de agua siempre aumenta ($h_{sal} \geq h_{ent}$) a través de un resalto hidráulico.

La conclusión a extraer de la ecuación 5.38 es que el flujo corriente arriba debe tener una velocidad suficientemente grande y una profundidad pequeña tal que $V_{ent} \geq \sqrt{gh_{ent}}$.

Este flujo se conoce como *flujo supercrítico* puesto que se mueve más rápido de lo que se pueden propagar las pequeñas ondas gravitatorias en la interfaz agua-aire. Por otra parte, el flujo corriente abajo $V_{sal} \leq \sqrt{gh_{sal}}$ es un *flujo subcrítico*.

Para el flujo debajo de la compuerta que se ilustra en la figura 5.9, la velocidad del flujo de salida V_{sal} de la ecuación 5.36 obedece la relación:

$$\frac{V_{sal}^2}{gh_{sal}} = \frac{2(h_{ent}/h_{sal})^2}{(h_{ent}/h_{sal}) + 1} \geq 1 \quad (5.39)$$

donde la desigualdad se cumple cuando $h_{ent} \geq h_{sab}$ lo cual siempre es el caso para el flujo debajo de la compuerta. Por lo tanto, es posible que exista un resalto hidráulico corriente abajo de una compuerta. Sin embargo, la profundidad de la corriente final corriente abajo de ese resalto hidráulico siempre es menor que el nivel corriente arriba de la compuerta.

5.5 Momento angular

El producto vectorial $\mathbf{R} \times m\mathbf{V}$ del vector de posición \mathbf{R} de una partícula en movimiento multiplicado por su cantidad de movimiento $m\mathbf{V}$ se conoce como el momento de la cantidad de movimiento o, lo que es más común, *momento angular* (o *cantidad de movimiento angular*) de la partícula. Tanto en la mecánica clásica como en la cuántica, el momento angular es un importante concepto que describe el movimiento porque, en muchas circunstancias, es invariante en el tiempo.¹¹ ¿Existen flujos de fluidos para los cuales el momento angular será un elemento descriptivo útil? En esta sección, se considerarán algunos ejemplos de flujos para los cuales el uso del momento angular como variable de un flujo ayuda a simplificar el análisis.

5.5.1 La ley de Newton del momento angular

La ley del movimiento de Newton puede expresarse en términos del momento angular al multiplicar por \mathbf{R} la ley de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) &= \mathbf{R} \times \mathbf{F} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times m\mathbf{V}) - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times m\mathbf{V} &= \mathbf{R} \times \mathbf{F} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times m\mathbf{V}) &= \mathbf{R} \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.40)$$

¹¹ La constancia del momento angular de un planeta que se mueve alrededor del Sol está contenida en las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, que precedieron a la ley del movimiento de Newton.

donde el segundo término de la segunda línea de la ecuación 5.40 es cero debido a que $d\mathbf{R}/dt \times \mathbf{V} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0$. Expresado en palabras, la ley de Newton establece que *la razón de cambio respecto al tiempo del momento angular de una masa es igual al momento de la fuerza que actúa sobre la masa*. Por supuesto, ésta no es una segunda ley adicional a la de la cantidad del movimiento, sino sólo otra forma de expresar la misma ley del movimiento.

Ahora se desea aplicar esta ley al fluido encerrado por un volumen material de control. Se comienza por denotar el momento angular del fluido en el volumen de control mediante \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} \equiv \iiint_{\mathcal{M}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV \quad (5.41)$$

por lo que $d\mathbf{H}/dt$ es la razón de cambio respecto al tiempo del momento angular. A continuación, se necesita evaluar el momento de las fuerzas que actúan sobre el fluido dentro del volumen de control. Estas fuerzas comprenden la fuerza de presión $p(-\mathbf{n})$ y la fuerza viscosa τ que actúan sobre la superficie S y la fuerza de gravedad $\rho \mathbf{g}$ que actúa sobre el volumen \mathcal{V} . Multiplicando cada una de estas fuerzas por \mathbf{R} , integrando sobre la superficie S o el volumen \mathcal{V} según resulte apropiado, sumando e igualando con $d\mathbf{H}/dt$, se tiene la *ley de Newton del momento angular* para el fluido en un volumen material de control:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \iint_S (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \tau) dS + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV \quad (5.42)$$

Éste es el momento angular equivalente a la ecuación 5.8 de la cantidad de movimiento.

5.5.2 El teorema del momento angular

La razón de cambio respecto al tiempo del momento angular, $d\mathbf{H}/dt$, en la ley de Newton del momento angular, ecuación 5.42, se refiere a un volumen material. Para expresar esto en términos de un volumen fijo de control que ocupe la misma posición que el volumen material en un instante particular de tiempo, se aplica el teorema 5.5 del transporte de Reynolds con $b = \mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}$:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + \iint_S (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (5.43)$$

Si esta ecuación 5.43 se sustituye en la ley de Newton del momento angular, ecuación 5.42, se encuentra el *teorema del momento angular* para el flujo de un fluido:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + \iint_S (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \iint_S (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \tau) dS + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV \end{aligned} \quad (5.44)$$

Al igual que el teorema de la cantidad de movimiento, esta ecuación vectorial tiene tres componentes. Un producto como $\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ tiene una dirección que es perpendicular tanto a \mathbf{R} como a \mathbf{V} . En el caso de flujos con simetría axial, como el que se encuentra en las turbomáquinas, la única componente distinta de cero del momento angular tiene la misma dirección que el eje de simetría.

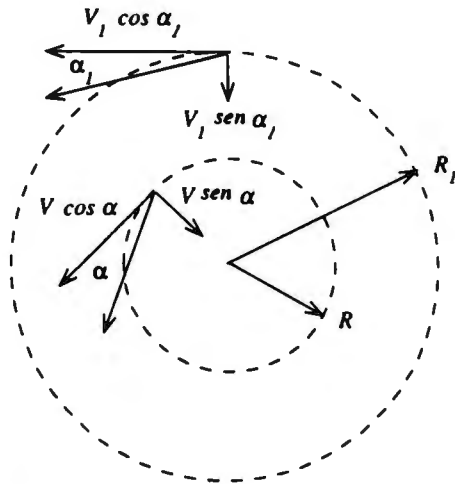


Figura E 5.15

Ejemplo 5.15

El flujo estacionario con simetría axial en un plano de un flujo incompresible no viscoso consta de un flujo vorticial (o turbulento) dirigido hacia adentro que tiene una velocidad \mathbf{V} y forma un ángulo α con respecto a la tangente a un círculo de radio R , como se ilustra en la figura E 5.15. En coordenadas cilíndricas, la velocidad \mathbf{V} puede expresarse como:

$$\mathbf{V} = (V \cos \alpha)\mathbf{i}_\theta - (V \sin \alpha)\mathbf{i}_r,$$

donde, gracias a la simetría axial, V y α depende de R .

La velocidad V_1 del flujo y el ángulo α_1 son conocidos en el radio R_1 del flujo que entra. (a) Si se desprecia la gravedad, obtenga una expresión para la velocidad V y el ángulo α del flujo para cualquier radio $R \leq R_1$. (b) Si se supone que el flujo es estacionario y no viscoso, encuentre una expresión para la diferencia de presión $p_1 - p$ a lo largo de una línea de corriente entre R_1 y R .

Solución

(a) Al aplicar el teorema del momento angular, ecuación 5.44, al volumen de control contenido entre los dos círculos concéntricos de la figura E 5.15, el momento de la fuerza

de presión es cero, puesto que la presión es constante en la circunferencia de un círculo (por la simetría axial) y los momentos de las fuerzas viscosa y de la gravedad son cero por suposición. De ahí que el momento angular de los términos del flujo que entra y el que sale que aparecen en la ecuación 5.44 deben ser cero:

$$0 + (R_1 \rho V_1 \cos \alpha_1) \hat{i}_z (-V_1 \sin \alpha_1) 2\pi R_1 + (R \rho V \cos \alpha) \hat{i}_z (V \sin \alpha) 2\pi R = 0 + 0 + 0$$

$$R^2 V^2 \cos \alpha \sin \alpha = R_1^2 V_1^2 \cos \alpha \sin \alpha_1$$

donde se ha utilizado el producto $\mathbf{R} \times \mathbf{V} = (RV \cos \alpha) \hat{i}_z$ y se ha supuesto una anchura unitaria del volumen de control en la dirección z . También, es necesario que la masa se conserve:

$$\rho V \sin \alpha (2\pi R) = \rho V_1 \sin \alpha_1 (2\pi R_1)$$

$$RV \sin \alpha = R_1 V_1 \sin \alpha_1$$

Al elevar al cuadrado la segunda de estas ecuaciones y dividir entre la primera, se encuentra que:

$$\tan \alpha = \tan \alpha_1$$

$$\alpha = \alpha_1$$

Por lo tanto, el ángulo α es constante en todo este campo de flujo, y una línea de corriente es una espiral de ángulo constante. Puesto que α es constante, la ecuación de la conservación de la masa puede resolverse para V :

$$V = V_1 \left(\frac{R_1}{R} \right)$$

(b) Utilizando la ecuación de Bernoulli para un flujo no viscoso e incompresible a lo largo de una línea de corriente,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

$$p_1 - p = \frac{\rho}{2} (V^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2} V_1^2 \left[\left(\frac{R_1}{R} \right)^2 - 1 \right]$$

Esta relación no se aplica para una R pequeña porque requeriría una presión negativa p , la cual es físicamente imposible.

El flujo en este ejemplo ilustra el flujo del viento de un tornado, en cuyo caso la velocidad aumenta y la presión disminuye hacia el centro del tornado.

Al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento a flujos prácticos, se advirtió que por lo general existen corrientes de flujos que entran y salen fácilmente identifi-

cables para los cuales el flujo de la cantidad de movimiento podría escribirse, por ejemplo, como $(\dot{m}\mathbf{V})_{ent}$. Se puede adoptar la misma notación para el flujo del momento angular al escribirlo como $(\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{ent}$. Con este cambio, el teorema del momento angular, ecuación 5.44, toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + (\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (\mathbf{R} \times [-pn]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}) dS + \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV \end{aligned} \quad (5.45)$$

El momento de fuerzas externas

Cuando el volumen de control encierra estructuras sólidas, es posible ejercer tanto una fuerza como un par de fuerzas, o momento de torsión, sobre un fluido dentro del volumen de control. En el caso de compresores giratorios, bombas y turbinas, el momento de torsión aplicado al eje giratorio es el medio por el cual se cambia la presión y velocidad del fluido entre el flujo de entrada y el de salida. En consecuencia, es necesario tomar en consideración la suma de los momentos de estas fuerzas externas, $\Sigma \mathbf{T}_{ex}$, al sumar este término al lado derecho de la ecuación 5.45:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + (\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (\mathbf{R} \times [-pn]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}) dS + \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV + \Sigma \mathbf{T}_{ex} \end{aligned} \quad (5.46)$$

En el caso de flujos con simetría axial en turbomáquinas, el momento de las fuerzas externas, $\Sigma \mathbf{T}_{ex}$, es un vector par que apunta en la dirección del eje de rotación.

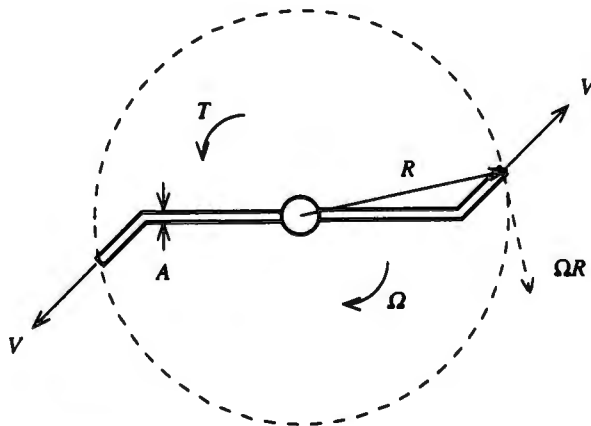


Figura E 5.16

Ejemplo 5.16

Un aspersor rotativo para césped consta de un tubo giratorio con área interna $A = 10 \text{ mm}^2$, dentro del cual fluye agua con una velocidad $V = 5 \text{ m/s}$. El agua se suministra mediante una manguera unida al centro de rotación. Visto desde arriba en la figura E 5.16, el aspersor gira en el sentido de las manecillas del reloj, la punta del tubo forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ respecto de la dirección tangencial. La dimensión radial de la punta es $R = 10 \text{ cm}$. A causa de la fricción de la chumacera del rotor, éste sufre un retardo originado por el momento de torsión $T = 2E(-2) \text{ Nm}$ que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se aprecia en la figura E 5.16.

Determine (a) la velocidad angular Ω del rotor del aspersor y (b) la velocidad \mathbf{V} de la corriente del fluido relativa al suelo.

Solución

(a) Si se seleccionan coordenadas cilíndricas con el eje z apuntando hacia afuera del plano de la figura y un volumen de control de radio R , la velocidad \mathbf{V} del fluido medida en el marco de referencia inercial del suelo es:

$$\mathbf{V} = (V \sin \alpha) \mathbf{i}_r + (V \cos \alpha - \Omega R) \mathbf{i}_\theta$$

y el producto $\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ es:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{V} = R \mathbf{i}_r \times \mathbf{V} = R(V \cos \alpha - \Omega R) \mathbf{i}_z$$

Si se advierte que el gasto másico en cada brazo es ρAV y al sustituir en la ecuación 5.46 del teorema del momento angular, se encuentra que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + (\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{sal} - (\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{ent} \\ &= \iint_S (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}) dS + \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV + \Sigma \mathbf{T}_{ex} \\ &= 0 + 2R(V \cos \alpha - \Omega R)(\rho AV) \mathbf{i}_z + 0 = 0 + 0 + 0 + T \mathbf{i}_z \\ \Omega &= \left(\frac{V}{R} \right) \cos \alpha - \frac{T}{2\rho AR^2 V} \\ &= \left(\frac{5 \text{ m/s}}{0.1 \text{ m}} \right) \cos 30^\circ - \frac{2E(-2) \text{ Nm}}{(2)(1E(3) \text{ kg/m}^3)(1E(-5) \text{ m}^2)(0.1 \text{ m})^2(5 \text{ m/s})} \\ &= 23.30 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

(b) La velocidad \mathbf{V} en el marco de referencia inercial del suelo es:

$$\mathbf{V} = V \sin \alpha \mathbf{i}_r + (V \cos \alpha - \Omega R) \mathbf{i}_\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= (5 \text{ m/s}) \text{ sen } 30^\circ \mathbf{i}_r + ((5 \text{ m/s}) \text{ cos } 30^\circ - (23.30 \text{ s}^{-1})(0.1 \text{ m}))\mathbf{i}_\theta \\
 &= (2.5 \text{ m/s})\mathbf{i}_r + (2.0 \text{ m/s})\mathbf{i}_\theta
 \end{aligned}$$

Note que si no hay fricción ($T = 0$), entonces $V \cos \alpha - \Omega R = 0$, y la velocidad V es sólo radial, v.g., el flujo del fluido no posee momento angular. A pesar de que la corriente del fluido que sale del aspersor tiene la forma de una espiral giratoria, las gotas se mueven en la dirección radial.

5.6 Aplicaciones del teorema del momento angular

Las aplicaciones más comunes del teorema del momento angular comprenden maquinaria giratoria como son bombas, ventiladores, compresores, turbinas y hélices. Estas aplicaciones permiten determinar el momento de torsión y la potencia absorbida (o producida) por estas máquinas, que constituyen una parte integral del diseño de la turbomaquinaria. La relación entre el momento de torsión y la velocidad de una turbomaquinaria debe coincidir con la del motor eléctrico, generador eléctrico o máquina a los que se encuentre conectada la turbomaquinaria a fin de que se transmita con eficiencia la potencia entre ellos. De ahí que el teorema del momento angular resulte esencial en la comprensión de cómo operan las turbomáquinas.

5.6.1 Compresores y bombas centrífugas (flujo radial)

Las turbomáquinas centrífugas aumentan la presión del fluido que pasa a través de ellas en virtud de la alta velocidad angular Ω del rotor, el cual somete al fluido a una aceleración centrífuga que debe mantenerse mediante un intenso gradiente radial de presión. En la sección 4.6.3, se encontró que el aumento de presión en un fluido incompresible y no viscoso a través de una bomba centrífuga es $\rho\Omega^2 R_{sal}^2$, donde R_{sal} es el radio de la punta de la pala del rotor, en el supuesto de que las áreas del flujo que entra y el que sale son iguales.

Para cualquier dispositivo centrífugo con un flujo axial de entrada (v.g., sin momento angular del flujo de entrada) y un flujo radial de salida, como el caso que se ilustra en la figura 4.9, es posible determinar el momento de torsión T del rotor al aplicar el teorema 5.46 del momento angular a un volumen de control que circunde al rotor:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + (\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{sal} - (\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{ent} \\
 &= \iint_S (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}) dS + \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV + \Sigma \mathbf{T}_{ex} \\
 &0 + \dot{m}(RV_\theta)_{sal} \mathbf{i}_z - 0 = 0 + 0 + 0 + T
 \end{aligned}$$

$$T = \dot{m}(RV_\theta)_{sal} \hat{i}_z \quad (5.47)$$

donde $(V_\theta)_{sal}$ es la componente tangencial de la velocidad del flujo de salida (medida en el marco de referencia inercial de un estator estacionario) y donde \dot{m} es el gasto másico a través de la máquina. Si el flujo relativo al rotor en su salida es puramente radial, entonces $(V_\theta)_{sal} = \Omega R_{sal}$ y el momento de torsión se transforma en:

$$T = \dot{m}\Omega^2 R_{sal}^2 \hat{i}_z \quad \text{si } (V_\theta)_{sal} = \Omega R_{sal} \quad (5.48)$$

La potencia P_{ent} que se requiere para operar la máquina es el producto $\Omega \cdot T$ de la velocidad angular $\Omega = \Omega \hat{i}_z$ y el momento de torsión T :

$$\begin{aligned} P_{ent} &= \Omega \cdot T = \dot{m}\Omega(RV_\theta)_{sal} \\ &= \dot{m}\Omega^2 R_{sal}^2 \quad \text{si } (V_\theta)_{sal} = \Omega R_{sal} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Ejemplo 5.17

El dispositivo del aspersor rotativo del ejemplo 5.16 puede operarse como una turbina de reacción si se le acopla un generador eléctrico que aplique un momento de torsión $T \hat{i}_z$ limitador al rotor y que absorba una cantidad de potencia $-\Omega \cdot T = -(\Omega \hat{i}_z) \cdot (T \hat{i}_z) = \Omega T$.

(a) Para cualquier velocidad angular Ω , deduzca una expresión para la potencia P_{sal} de la turbina. (b) Obtenga una expresión de la velocidad angular que maximice la potencia y otra para la potencia máxima. (c) Si se supone que el flujo a través del dispositivo es no viscoso y se suministra desde un recipiente a presión, encuentre una expresión para la presión p_s del fluido en el recipiente a presión.

Solución

(a) Del ejemplo 5.16, el momento de torsión T y la potencia P_{sal} son:

$$T = (2\rho AV)R(V \cos \alpha - \Omega R) = \dot{m}R(V \cos \alpha - \Omega R)$$

$$P_{sal} = \Omega T = \dot{m}\Omega R(V \cos \alpha - \Omega R)$$

(b) El valor máximo de P_{sal} tiene lugar cuando $dP_{sal}/d\Omega = 0$:

$$\dot{m}R(V \cos \alpha - 2\Omega R) = 0$$

$$\Omega R = \frac{1}{2} V \cos \alpha$$

Para este valor de ΩR , la potencia máxima es:

$$\text{máxima } P_{sal} = \dot{m} \left(\frac{1}{2} V \cos \alpha \right) \left(\frac{1}{2} V \cos \alpha \right) = \dot{m} \frac{1}{4} (V \cos \alpha)^2$$

(c) En el caso de un flujo estacionario no viscoso a través del rotor, se puede aplicar la forma de la ecuación de Bernoulli para un marco de referencia que gira de modo estacionario, ecuación 4.28, entre el flujo que entra en el eje y el que sale en R (se desprecia la gravedad):

$$\frac{V_{ent}^2}{2} + \frac{p_{ent}}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} - \frac{(\Omega R)^2}{2}$$

Sin embargo, el flujo de entrada se relaciona con las condiciones del recipiente a presión por medio de la ecuación de Bernoulli para el marco de referencia inercial del laboratorio (otra vez, se desprecia la gravedad):

$$0 + \frac{p_s}{\rho} = \frac{V_{ent}^2}{2} + \frac{p_{ent}}{\rho}$$

Al combinar estas ecuaciones:

$$p_s = p_a + \frac{\rho}{2} [V^2 - (\Omega R)^2]$$

Estas relaciones simples ejemplifican las características de operación de las turbinas. Por ejemplo, el momento de torsión ejercido sobre el rotor disminuye linealmente desde el valor $\dot{m}RV \cos \alpha$, cuando el rotor es estacionario ($\Omega = 0$), hasta cero, cuando la turbina marcha con rotor libre a una velocidad $\Omega = (V \cos \alpha)/R$. En estos extremos, la potencia P_{sal} es cero. Cuando la velocidad del rotor es cero, la diferencia de presión $p_s - p_a$ es $\rho V^2/2$, lo cual es de esperarse puesto que el flujo es estacionario en el marco de referencia inercial del laboratorio. De modo inverso, con el rotor libre, $p_s - p_a = (\rho/2)(V^2 - (V \cos \alpha)^2) = (\rho/2)(V \sin \alpha)^2$, donde $V \sin \alpha$ es la velocidad del fluido en el marco de referencia inercial. En la condición de máxima potencia, la diferencia de presión $p_s - p_a$ es igual a $(\rho/2)V^2(1 - [\cos \alpha]^2)/4$.

5.6.2 Turbinas y compresores de flujo axial

En los motores de reacción y en las plantas de energía con turbinas de gas o vapor, el flujo del fluido posee una componente radial muy pequeña, donde las componentes de la velocidad son principalmente tangencial y axial. A éstas se les llama máquinas de flujo axial para distinguirlas de las máquinas centrífugas. El cambio en la presión a través de la etapa del rotor se relaciona con el cambio en la velocidad tangencial relativa, como se explicó en la sección 4.6.3. En contraste con la máquina centrífuga, la corriente del flujo de entrada puede poseer algún momento angular, en especial en el caso del rotor de una turbina, el cual debe considerarse al aplicar el teorema del momento angular.

Un ejemplo particular de una etapa de turbina, que comprende una corona de paletas del estator y una corona de paletas del rotor, se ilustra en la figura 5.11(a). En este caso, las paletas del estator y del rotor están diseñadas para aceptar un flujo de entrada meramente axial y hacer girar al flujo un ángulo grande en tanto que el flujo se acelera debido a una caída en la presión. El aumento en la velocidad y el ángulo de deflexión

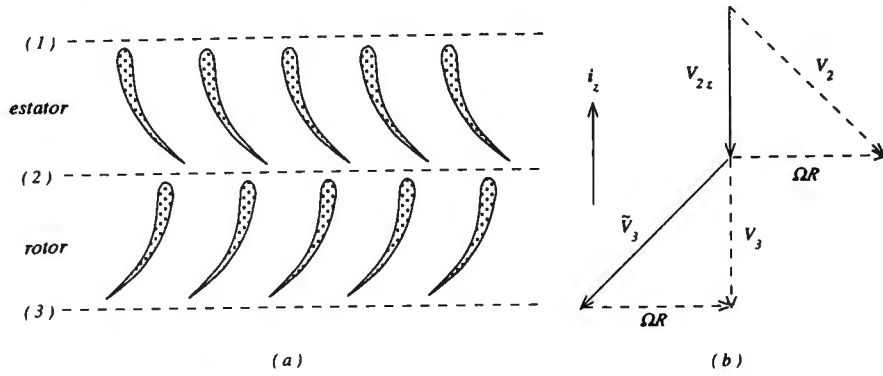


Figura 5.11 Como se ilustra en (a), la etapa de una turbina de flujo axial comprende un juego de álabes o paletas estacionarios del estator y una corona de álabes del rotor en movimiento que tiene una velocidad tangencial ΩR a la derecha. Como se ejemplifica en el diagrama (b) de velocidades, cada una de las coronas desvía el flujo que entra y lo cambia de un flujo (relativo) puramente axial a un flujo con una componente tangencial relativa de ΩR . (Los vectores de líneas punteadas son las velocidades relativas al estator estacionario, en tanto que los vectores de líneas continuas son velocidades relativas al rotor en movimiento.)

son tales que la componente tangencial de la velocidad de salida es igual a la velocidad tangencial ΩR del rotor. En la figura 5.11(b) se ilustra el diagrama de vectores correspondiente a las velocidades absoluta y relativa a través del estator y el rotor.

Es posible aplicar el teorema del momento angular al rotor a fin de calcular el momento de torsión T aplicado al rotor:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V}) dV + (\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{sal} - (\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}]) dS + \iint_S (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}) dS + \iiint_V (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g}) dV + \Sigma \mathbf{T}_{ex} \\ 0 + 0 - (R\dot{m}\Omega R)\mathbf{i}_z = 0 + 0 + 0 + T \\ T = -\dot{m}\Omega R^2\mathbf{i}_z \end{aligned}$$

y luego se calcula la potencia $P = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T}$ que suministra el rotor:

$$P = -(\Omega\mathbf{i}_z) \cdot (-\dot{m}\Omega R^2\mathbf{i}_z) = \dot{m}(\Omega R)^2$$

De haberse aplicado el teorema del momento angular *tanto* al estator *como* al rotor, se habría encontrado que el momento de torsión neto sería cero debido a que ninguno de los dos flujos, el flujo de entrada del estator y el de salida del rotor, tiene componente tangencial de la velocidad. Por lo tanto, el momento de torsión aplicado al estator es igual en magnitud, pero de dirección opuesta, al aplicado al rotor. Este momento de torsión del estator se transmite al apoyo de la turbina y se compensaría por

el momento de torsión transmitido a la base del generador eléctrico accionado por la turbina de gas.¹²

Si este flujo fuera incompresible y no viscoso, entonces podría calcularse la caída de presión a través de la etapa. Para el estator, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

Para el rotor, la ecuación 4.28 de Bernoulli en el marco de referencia giratorio es:

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_{2z}^2}{2} - \frac{(\Omega R)^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{\tilde{V}_3^2}{2} - \frac{(\Omega R)^2}{2}$$

$$\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_3}{\rho} = \frac{\tilde{V}_3^2}{2} - \frac{V_{2z}^2}{2} = \frac{V_3^2}{2} + \frac{(\Omega R)^2}{2} - \frac{V_{2z}^2}{2}$$

donde se ha empleado la relación $\tilde{V}_3^2 = V_3^2 + (\Omega R)^2$ de la figura 5.11(b). Sin embargo, la conservación de la masa incompresible exige que:

$$V_1 = V_{2z} = V_3$$

si se supone que no hay cambio en el área del flujo a través de la etapa. Si se suman las dos ecuaciones para el cambio de presión y se utiliza la constancia de la componente axial de la velocidad que se deduce de la conservación de la masa, así como la relación $V_2^2 = V_{2z}^2 + (\Omega R)^2$ de la figura 5.11(b), se encuentra que:

$$p_1 - p_3 = \rho(\Omega R)^2$$

Advierta que en este caso especial la potencia P es igual a $(\dot{m}/\rho)(p_1 - p_3)$, o el producto del gasto volumétrico \dot{m}/ρ multiplicado por la caída de presión a través de la etapa.¹³

¹² En el caso del motor de reacción de un avión, en el cual las corrientes del flujo de entrada y del flujo de salida no tienen momento angular, no existe un momento de torsión aplicado a la estructura del avión o célula, donde los momentos de torsión del compresor más el del rotor de la turbina y el estator suman cero.

¹³ En los ciclos termodinámicos que emplean las turbomáquinas para producir potencia mecánica, como las plantas con turbinas de vapor o gas, la potencia producida por la turbina excede la que absorbe la bomba de alimentación de agua o el compresor debido a que el gasto volumétrico \dot{m}/ρ a través de la turbina aumenta (comparado con el gasto volumétrico a través de una bomba o compresor) al calentar el fluido en la caldera o cámara de combustión a presión constante, disminuyendo así ρ y aumentando \dot{m}/ρ , puesto que \dot{m} es el mismo para la turbina y la bomba o el compresor. Por supuesto, en estos ejemplos, el flujo no es incompresible por lo que la potencia no es exactamente el producto del gasto volumétrico multiplicado por el cambio de presión, pero el efecto según el cual la densidad del fluido utilizado disminuye al calentarse sirve para provocar que la potencia de la turbina supere la de la bomba o compresor y, por lo tanto, resulte posible aprovechar la potencia neta en trabajo útil.

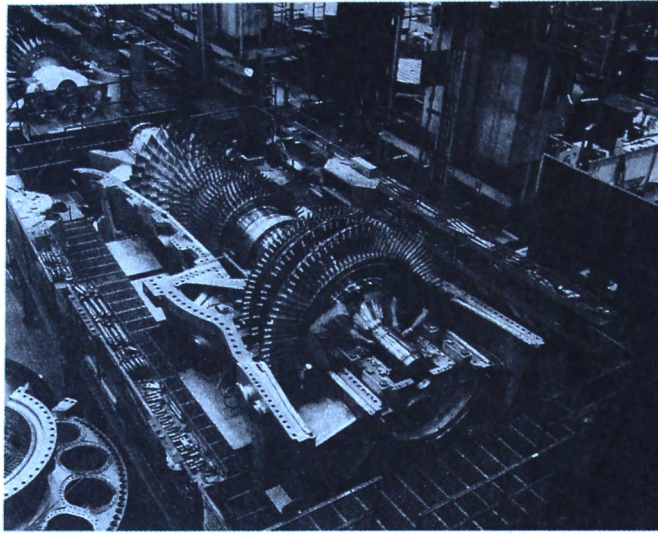


Figura 5.12 Una turbina de gas de flujo axial de 226 megawatts que aparece en la fotografía sin la mitad superior de la caja. Se aprecian las etapas del compresor en la sección superior izquierda y las etapas de la turbina de gas en la sección inferior derecha. (Fotografía cortesía de GE Industrial and Power Systems.)

En la figura 5.12 se aprecia una vista desde arriba de una gran turbina estacionaria de gas a la que se le ha quitado la mitad superior de la caja. El fluido fluye en dirección axial desde la parte superior izquierda hacia la parte inferior derecha, primero a través del compresor de 18 etapas, luego por las cámaras de combustión (no aparecen en la figura) y, por último, a través de la turbina de 3 etapas. Adviértase el acortamiento gradual de las paletas del compresor a través de las etapas sucesivas al aumentar la densidad del aire durante la compresión. En las etapas de la turbina, las paletas se hacen más largas al bajar la densidad.

5.6.3 Hélices

El fluido que fluye hacia el interior de una hélice en un avión o en un barco no posee momento angular, pero gracias a la rotación de la hélice, se agrega al fluido cierto momento angular en la dirección de rotación de la hélice. Como se verá a continuación, la cantidad de este momento angular depende de la velocidad angular Ω de la hélice y de su empuje F .

La fuerza de empuje F que incide sobre la hélice es el resultado de una fuerza ascensional (o sustentación) que la paleta en movimiento de la hélice genera. La figura 5.13 proporciona un diagrama de vectores de la velocidad \vec{V}_b relativa a la paleta, la cual es la suma vectorial de la velocidad axial V_p del fluido al pasar por la hélice menos la velocidad tangencial de rotación de la paleta de la hélice, $\Omega \times \mathbf{R} = \Omega \mathbf{i}_z \times R \mathbf{i}_r = \Omega R \mathbf{i}_\theta$. La paleta de la hélice tiene una forma helicoidal que le permite producir un pequeño ángulo de ataque de la sección transversal de la paleta respecto al flujo relativo, como

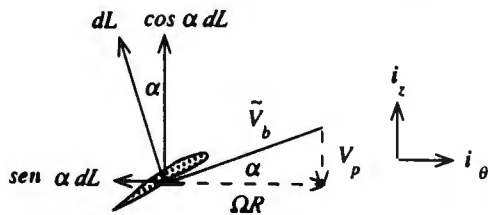


Figura 5.13 La velocidad $\tilde{\mathbf{V}}_b$ del fluido relativa a la paleta o pala de la hélice es una combinación de la velocidad \mathbf{V}_p del flujo a través de la hélice y la velocidad tangencial $\Omega R \mathbf{i}_\theta$ de la paleta de la hélice. Este flujo relativo produce un incremento dL de la fuerza ascensional o sustentación que tiene componentes en las direcciones axial y tangencial.

se ilustra en la figura 5.13. El perfil aerodinámico de la hélice genera un incremento dL de la fuerza ascensional (o sustentación) que actúa sobre un incremento ds de la separación de la hélice. La fuerza ascensional dL tiene una dirección perpendicular a $\tilde{\mathbf{V}}_b$ que forma un ángulo α con el eje de rotación de la hélice.¹⁴ El incremento dL de la fuerza ascensional tiene una componente $(\cos \alpha)dL$ en la dirección axial y una componente tangencial $(\sin \alpha)dL$ que contribuyen, respectivamente, a los incrementos dF y dT del empuje F y el momento de torsión T :

$$\begin{aligned} dF &= (\cos \alpha)dL \\ dT &= R(\sin \alpha)dL \end{aligned} \quad (5.50)$$

Al eliminar dL y al advertir que $\tan \alpha = V_p / \Omega R$,

$$dT = R(\sin \alpha) \left(\frac{dF}{\cos \alpha} \right) = R(\tan \alpha)dF = \frac{V_p}{\Omega} dF$$

lo cual puede integrarse a lo largo de la envergadura de la hélice para dar la magnitud del momento de torsión T en relación con el empuje F .

$$T = \frac{V_p F}{\Omega} \quad (5.51)$$

Adviértase que esta relación es consistente con el requisito de que la potencia P_p suministrada a la hélice, que es igual a ΩT , también es igual a $V_p F$, por la ecuación 5.18.

Muchas de las hélices operan en condiciones en las cuales la velocidad ΩR de la punta de las paletas de la hélice (donde R_p es el radio de la hélice) es mucho mayor que V_p , de forma que $V_p / \Omega R$ y α son pequeñas. En consecuencia, se tiene que, a partir de la ecuación 5.51, $T \ll R_p F$.

La conservación del momento angular, ecuación 5.51, dice que, para una hélice, el momento angular de la estela de la hélice, $(\mathbf{R} \times \dot{m} \mathbf{V})_{sal}$, es igual al momento de torsión T y así es proporcional al empuje F en virtud de la ecuación 5.51:

¹⁴ Aquí se está despreciando cualquier fuerza de resistencia al avance del perfil aerodinámico, que podría actuar en la dirección de \mathbf{V}_b .

$$0 + (\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{sal} - 0 = 0 + 0 + 0 + \mathbf{T}$$

$$(\mathbf{R} \times \dot{m}\mathbf{V})_{sal} = \frac{V_p F}{\Omega} \mathbf{i}_\theta \quad (5.52)$$

En un avión de un solo motor accionado por hélice, el momento de torsión de la hélice se transmite a la bancada del motor y a la estructura del avión o célula. A fin de impedir que el avión se balancee, los alerones están dispuestos para contrarrestar este momento de torsión. En aviones de dos motores, se acostumbra tener motores con rotaciones opuestas de forma que no se aplique a la célula un momento de torsión neto.

5.7 Problemas

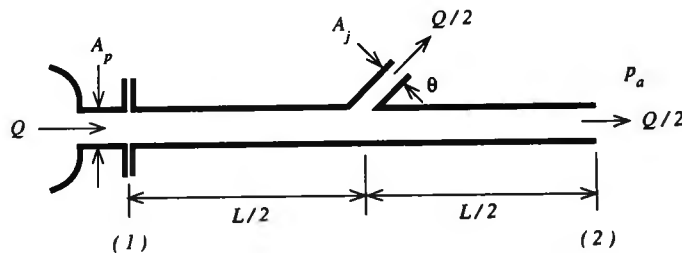


Figura P 5.1

Problema 5.1

Un líquido de densidad ρ fluye desde un depósito hacia un tubo recto con área constante A_p y longitud total L . El tubo está conectado al depósito mediante una brida sujetada con pernos en la sección 1, como se ejemplifica en la figura P 5.1. El gasto volumétrico $Q(t)$ en el tubo es función del tiempo t :

$$Q(t) = Kt$$

donde K es una constante. En un punto a la mitad de la longitud del tubo, se arroja la mitad del flujo ($Q(t)/2$) a través de un corto chorro lateral de área A_j , a un ángulo θ respecto del eje del tubo. El resto del fluido sale por el extremo abierto ubicado en la sección 2, donde la presión externa del ambiente externo es p_a .

Si se supone que el flujo es no viscoso, obtenga expresiones para (a) la presión $p_1(t)$ del líquido dependiente del tiempo en la sección 1 correspondiente a la toma o entrada del tubo y (b) la fuerza F de tensión en los pernos que sujetan el tubo al depósito en términos de los parámetros ρ , K , A_p , L , θ y p_a .

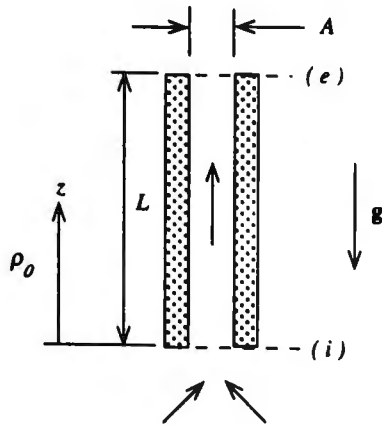


Figura P 5.2

Problema 5.2

En la figura P 5.2, un intercambiador natural de calor por convección consta de dos placas calentadas entre las cuales el aire ambiente se mueve en dirección vertical hacia arriba. Se suministra calor, a través de las paredes del intercambiador de calor, a un canal de aire con área A de sección transversal uniforme. Hay suficiente mezclado, de tal modo que la velocidad del flujo y la temperatura del aire sean casi uniformes en cualquier sección transversal, lo cual da lugar a una distribución vertical de la densidad en el canal:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{4L} \right)$$

donde ρ_0 es la densidad uniforme del aire no calentado fuera del intercambiador.

Si se supone que la fricción con las paredes del canal del intercambiador de calor es despreciable, que el aire del flujo de entrada que proviene de la región circundante hacia la sección i de la entrada o toma, en $z = 0$, es no viscoso e incompresible, que el flujo sale por la parte superior del intercambiador, en la sección e , donde $z = L$, a una presión que es igual a la presión del medio circundante en ese nivel, que el flujo es estacionario y que la atmósfera de los alrededores tiene una distribución de presión estática con densidad ρ_0 constante, obtenga una expresión para la velocidad de entrada V_i en términos de los parámetros L , g , A y ρ_0 .

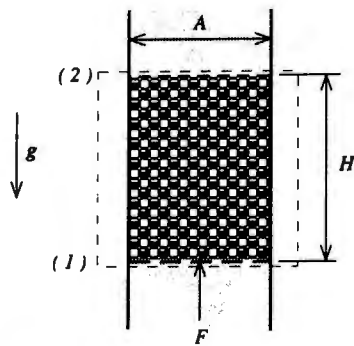


Figura P 5.3

Problema 5.3

Un tubo vertical lleno de agua cuya densidad es $\rho_w = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ y con un área $A = 1E(2) \text{ cm}^2$ de sección transversal contiene una capa de cuentas de vidrio con una altura $H = 20$ que se mantiene en su lugar mediante una malla que se coloca debajo de la capa de las cuentas de vidrio, como se ilustra en la figura P 5.3. Las cuentas tienen una densidad $\rho_b = 2.4E(3) \text{ kg/m}^3$ y la fracción de volumen AH de la capa que ocupan las cuentas es $\epsilon = 0.52$.

(a) Cuando no hay flujo de agua, la malla que está debajo de las cuentas ejerce una fuerza F hacia arriba sobre ellas. Deduzca una expresión para la fuerza F en términos de los parámetros ρ_w , ρ_b , ϵ , A , H y g al considerar un equilibrio de fuerzas en las cuentas en el volumen de control de la figura P 5.3. (Puede despreciarse cualquier fuerza vertical sobre las cuentas de vidrio por las paredes del tubo.) (b) Se bombea agua hacia arriba con un gasto tal que la malla no ejerza ninguna fuerza sobre el lecho de las cuentas ($F = 0$). Al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento al volumen de control, calcule la caída de presión $p_1 - p_2$ entre la parte inferior y la superior de la capa de cuentas.

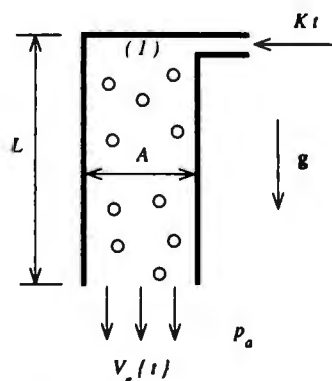


Figura P 5.4

Problema 5.4

Hacia una cámara con área A de sección transversal y longitud L fluye agua por un orificio de toma localizado en la parte superior de la cámara. Ésta se encuentra situada en un campo gravitatorio g como se ilustra en la figura P 5.4. El gasto másico \dot{m} cambia con el tiempo de acuerdo con:

$$\dot{m} = Kt$$

donde K es una constante dimensional. Al entrar el agua en la cámara, fluye una corriente eléctrica a través de ella en la parte superior de la cámara, lo cual genera una electrólisis parcial y la formación de burbujas de hidrógeno y oxígeno. La mezcla resultante de agua y burbujas posee una densidad promedio ρ_0 que es uniforme dentro de la cámara y no cambia con el tiempo. La mezcla fluye con rapidez hacia abajo (todos los componentes tienen la misma velocidad) a través de la cámara, lo cual sucede de modo turbulento y viscoso, y es expulsada a la atmósfera, donde la presión es p_a .

(a) Deduzca una expresión para la velocidad de salida dependiente del tiempo $V_e \{t\}$ en la salida de la cámara. (b) Si se considera que puede despreciarse el esfuerzo cortante sobre las paredes de la cámara, encuentre una expresión para la presión dependiente del tiempo, $p_1 \{t\}$, en la parte superior de la cámara.

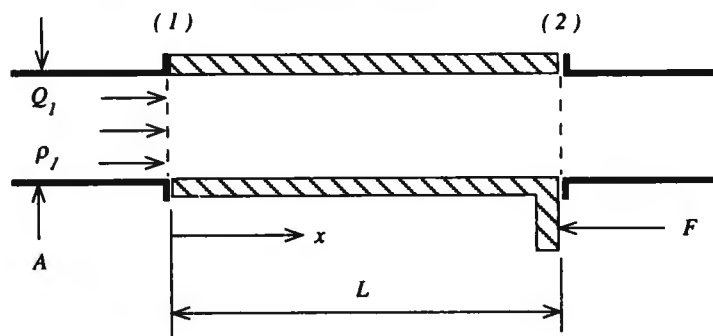


Figura P 5.5

Problema 5.5

Se realiza un experimento en una sección recta de pruebas con longitud L y área A de sección transversal, como se aprecia en la figura P 5.5. El flujo es estacionario y aproximadamente uniforme en toda la sección de prueba en cada sección transversal. La densidad del fluido varía con la posición axial x a lo largo del eje de la sección de prueba según:

$$\rho \{x\} = \frac{\rho_1}{1 + Kx}$$

donde ρ_1 es la densidad en la entrada a la sección de prueba y K es una constante dimensional. Debido al flujo viscoso y turbulento en la sección de prueba, hay un

gradiente de presión en la dirección x que depende del gasto volumétrico local $Q(x)$ en cada punto x a lo largo de la sección de prueba, de acuerdo con:

$$\frac{dp}{dx} = -\alpha(Q(x))^2$$

donde α es una constante dimensional. Encuentre una expresión para la fuerza F necesaria para impedir que la sección de prueba se mueva en la dirección del flujo. Exprese esta respuesta en términos de los parámetros conocidos Q_1 , ρ_1 , K , L y A .

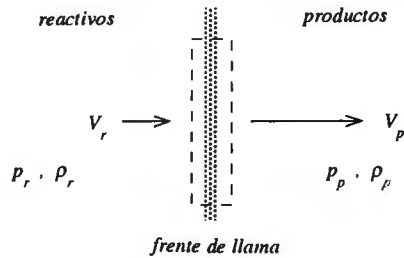


Figura P 5.6

Problema P 5.6

Un frente plano de llama es una zona muy delgada dentro de la cual los reactivos (combustible y aire) se transforman en productos (vapor de agua, bióxido de carbono, etc.). En este proceso, la temperatura del fluido aumenta y la densidad disminuye.

En la figura P 5.6, se observa que un frente plano de llama permanece estacionario y normal al flujo estacionario uniforme de los reactivos. Las propiedades del flujo corriente arriba se miden y se encuentra que $p_r = 1E(5) \text{ Pa}$, $\rho_r = 1 \text{ kg/m}^3$ y $V_r = 0.1 \text{ m/s}$. Mediante un cálculo termodinámico, la densidad de los productos corriente abajo es $\rho_p = 0.2 \text{ kg/m}^3$. Al aplicar las integrales de la masa y de la cantidad de movimiento al volumen de control que aparece en la figura, calcule la velocidad V_p corriente abajo y la diferencia de presión $p_r - p_p$.

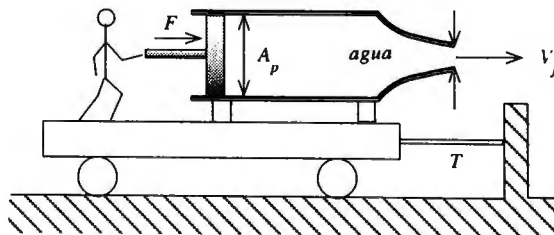
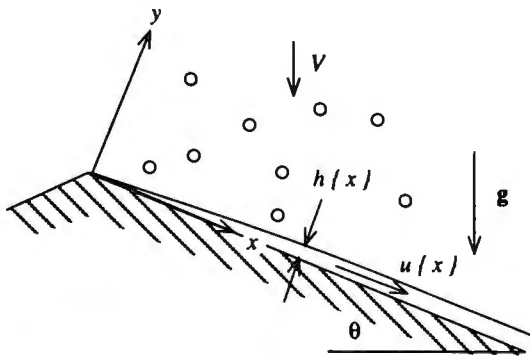


Figura P 5.7

Problema 5.7

Un cilindro provisto de un pistón sin fricción y área A_p que se encuentra lleno de agua con densidad ρ se monta en un carrito de ruedas, como se aprecia en la figura P 5.7. Una persona que permanece de pie en el carrito ejerce sobre el pistón una fuerza F , lo que provoca la expulsión de un chorro de agua hacia el aire circundante por una boquilla en la parte derecha del cilindro. Mediante una cuerda amarrada a un sitio fijo, se impide que el carrito se mueva a la izquierda. Encuentre las expresiones para la velocidad V_j del chorro de agua y la tensión T en la cuerda en términos de ρ , F , A_j y A_p .

**Figura P 5.8****Problema 5.8**

Una violenta lluvia golpea un techo inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal según la figura P 5.8. Hacia abajo, escurre la lluvia con un gasto másico \dot{m} por unidad de área horizontal y cada gota de lluvia cae con una velocidad V con dirección sólo vertical. Se produce un estado estacionario en el cual una capa de agua fluye hacia abajo por el techo inclinado en tanto que las gotas de lluvia salpican con violencia sobre la parte superior de la capa de agua. Al analizar el flujo, puede suponerse lo siguiente: (i) la fricción entre el techo y la capa de agua es despreciable, (ii) el ángulo de la superficie del agua en relación con el techo es muy pequeño ($dh/dx \ll 1$), pero la inclinación del techo θ no es necesariamente pequeña, (iii) las gotas de lluvia pierden su cantidad de movimiento instantáneamente al golpear el borde superior de la capa de agua y (iv) la velocidad del agua $u\{x\}$ en la dirección x es independiente de y en cualquier sección x .

Obtenga expresiones para (a) la presión p_i exactamente debajo de la superficie del agua y (b) la presión $p\{x, y\}$ en cualquier punto x como función de y en términos de los parámetros \dot{m} , V , θ , g , ρ y p_a y el espesor desconocido $h\{x\}$. (c) Al aplicar el teorema de la conservación de la masa y el de la cantidad de movimiento a un volumen de control que encierre la capa del líquido entre $x = 0$ y un punto x , deduzca una ecuación integral a partir de la cual es posible calcular $h\{x\}$ en términos de los parámetros conocidos.

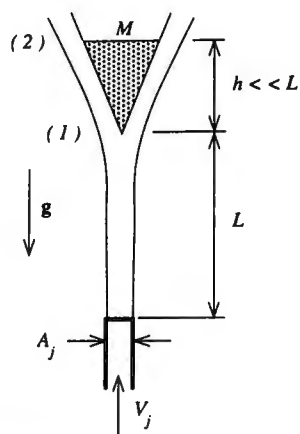


Figura P 5.9

Problema 5.9

Un cono circular de masa M se suspende a una distancia L por encima de un chorro de agua, como se aprecia en la figura P 5.9. El lado del cono forma un ángulo θ con la horizontal, y su altura $h \ll L$. Deduzca expresiones para la velocidad del fluido del chorro en los puntos 1 y 2, así como para la distancia L .

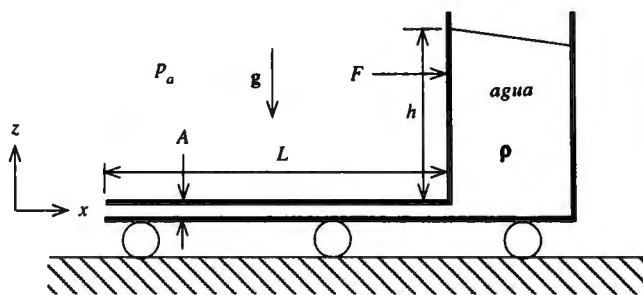


Figura P 5.10

Problema 5.10

Se aplica una fuerza horizontal F a un carrito que descansa sobre rodillos sin fricción de forma que hacen que éste se mueva con una aceleración constante a . El carrito contiene un gran depósito con agua en cuyo fondo se encuentra un tubo con área A de sección transversal y longitud L abierto a la atmósfera en su extremo izquierdo, como se ejemplifica en la figura P 5.10. El agua fluye sin viscosidad desde el depósito, que tiene una altura h , hacia la atmósfera a través del tubo.

Obtenga expresiones para (a) la velocidad \tilde{V} de salida *relativa* al carrito y (b) la fuerza F aplicada que se necesita para mantener constante la aceleración a del carrito en términos de las variables conocidas ρ , g , a , h , L , A y la masa M del carrito y su fluido.

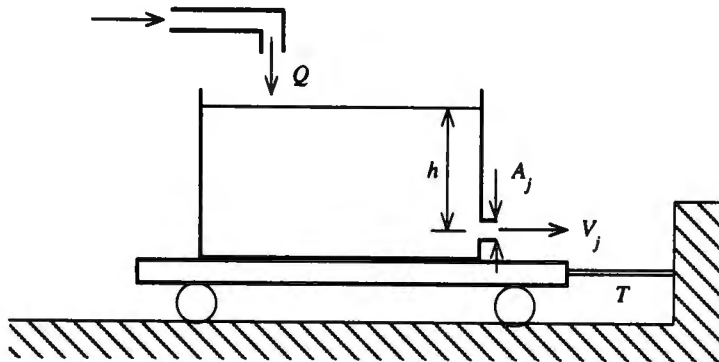


Figura P 5.11

Problema 5.11

En la figura P 5.11, sobre un carrito montado en rodillos sin fricción, se coloca un tanque de agua con área A de sección transversal. El agua del tanque se descarga a la atmósfera mediante una boquilla muy corta con área $A_j \ll A$. El agua dentro del tanque se mantiene a una altura h constante por encima de la boquilla mediante un suministro externo con un gasto volumétrico Q . Mediante el cable que se aprecia en la figura P 5.11, se impide que el carrito se mueva. La masa del tanque, del carrito y del agua juntos es M .

En términos de los parámetros h , A_j y la densidad del agua ρ , encuentre expresiones para (a) el gasto volumétrico Q y (b) la fuerza de tensión T que experimenta el cable. (c) Al tiempo $t = 0$, se corta el cable y el carrito comienza a desplazarse hacia la izquierda con una velocidad $V_c(t)$ que aumenta con el tiempo. Deduzca una expresión para $V_c(t)$.

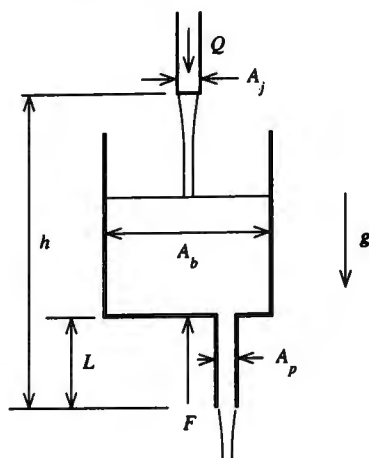


Figura P 5.12

Problema 5.12

Una corriente de agua que proviene de un chorro vertical con gasto volumétrico Q y área A_j cae en una balde con área A_b de sección transversal, como se ve en la figura P 5.12. El agua en la balde se drena a través de un tubo con área $A_p \ll A_b$ y longitud L . El fondo del tubo está a una distancia h por debajo de la salida del chorro de agua. Encuentre una expresión para la fuerza F que se requiere para mantener el balde en estado estacionario en términos de los parámetros dados en la figura P 5.12 y la masa M de la balde.

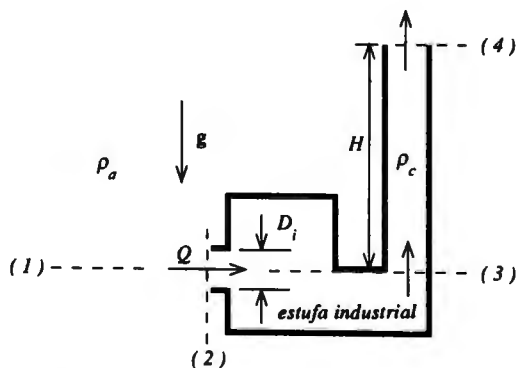


Figura P 5.13

Problema 5.13

Una estufa industrial de desecación, calentada por lámparas infrarrojas, requiere un suministro de aire de enfriamiento con un gasto volumétrico $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$. Para inducir este flujo de aire, se añadirá, corriente abajo de la estufa, una chimenea vertical con altura H (véase figura P 5.13) y el flujo flotante en la parte superior de la chimenea proporciona suficiente tiro para succionar aire atmosférico hacia el interior de la estufa. Especifique la altura H de la chimenea.

El diámetro de la toma del horno es $D_i = 1 \text{ m}$, en tanto que el diámetro de la chimenea debe ser $D_c = 1.5 \text{ m}$. Se calienta el aire en la estufa a fin de que su densidad en la chimenea sea $\rho_c = 0.6 \text{ kg/m}^3$. No hay cambio de presión $p_2 - p_3$ entre la toma de la estufa en el punto 2 y la entrada de la chimenea en el 3. La densidad atmosférica es $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

(a) Si se supone que el flujo que va de la atmósfera a la admisión de la estufa es incompresible y no viscoso, determine el valor numérico del cambio de presión $p_1 - p_2$, donde el punto 1 está muy alejado de la admisión pero a la misma altura. (b) Si se supone que el flujo arriba de la chimenea es incompresible y no viscoso, encuentre la altura H de la chimenea necesaria para inducir un flujo $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$. (c) Si se supone que el flujo en la chimenea es incompresible pero viscoso y que en la pared de la chimenea el esfuerzo cortante es de $\tau_w = 5E(-3)\rho_c V_c^2$, calcule la altura H de la chimenea.

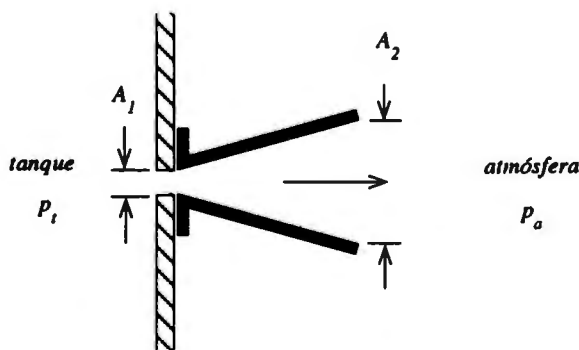


Figura P 5.14

Problema 5.14

Un líquido fluye de modo estacionario desde un tanque, cuya presión es p_1 , hacia la atmósfera de presión p_a por una boquilla cónica unida al tanque. A_1 es el área de la entrada de la boquilla y A_2 el área de la salida, como lo indica la figura P 5.14. Es posible considerar que el flujo es no viscoso.

(a) Encuentre una expresión para la fuerza F que se necesita para mantener la boquilla en su lugar contra el tanque en términos de los parámetros A_1 , A_2 , p_1 y p_a . (b) Exprese, en términos de A_1 , A_2 y p_a , la condición que debe cumplir p_1 que garantice que la presión p_1 en la entrada de la boquilla sea positiva.

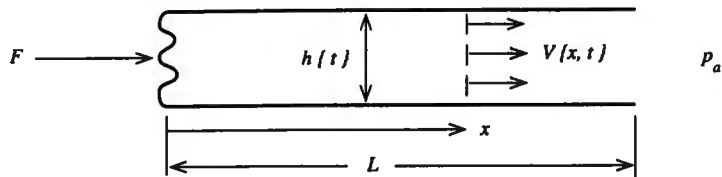


Figura P 5.15

Problema 5.15

Se conectan dos placas rectangulares delgadas, con L de largo por W de anchura, según un arreglo de fuelle flexible cerrado por uno de sus extremos, como se ejemplifica en la figura P 5.15. Las placas paralelas están separadas una distancia $h\{t\}$ que disminuye a una rapidez constante w , v.g., $dh/dt = -w$. El fluido entre las placas es no viscoso e incompresible y tiene una densidad ρ . La anchura W de la placa es mucho mayor que la longitud L , por lo que puede suponerse que el flujo es cuasiunidireccional y que la velocidad $V\{x, t\}$ es uniforme en cualquier sección transversal en todo punto x . La presión en la salida $x=L$ es la presión atmosférica, p_a .

(a) Deduzca una expresión para la velocidad $V\{x, t\}$ del fluido en términos de los parámetros x, h y w . (b) Exprese $p\{x, t\}$ como función de ρ, x, L y $h\{t\}$. (c) Con el teorema de la cantidad de movimiento, obtenga una expresión para la fuerza F que se requiere a fin de evitar que las placas se muevan en sentido horizontal.

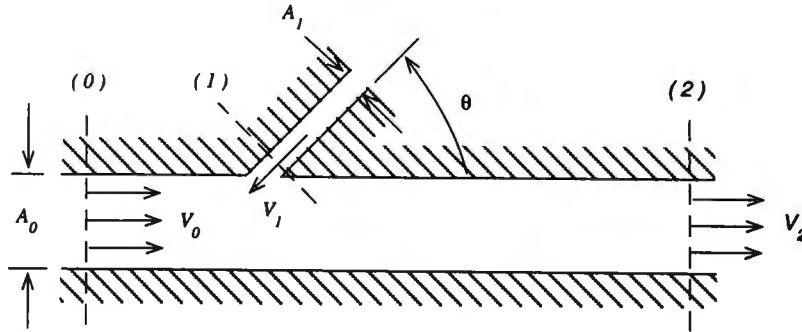


Figura P 5.16

Problema 5.16

Un fluido incompresible de densidad ρ fluye en forma estacionaria a lo largo de un conducto con área A_0 de sección transversal constante con una velocidad V_0 corriente arriba. Se diluye por inyección de un fluido distinto de igual densidad el cual entra formando un ángulo θ con el eje del conducto a través de un orificio con área normal A_1 y velocidad V_1 (véase la figura P 5.16). Las dos corrientes se mezclan de modo viscoso

y turbulento. La mezcla resultante, de densidad igual a la del fluido que fluye corriente arriba adquiere una velocidad V_2 uniforme corriente abajo de la región de la mezcla.

(a) Encuentre una expresión para la caída de presión $p_0 - p_2$ entre los puntos 0 y 2 en términos de los parámetros ρ , A_0 , A_1 , θ , V_0 y V_1 dados correspondientes al flujo de entrada. (b) Deduzca expresiones para las componentes vertical y horizontal de la fuerza que el fluido ejerce sobre las paredes del canal.

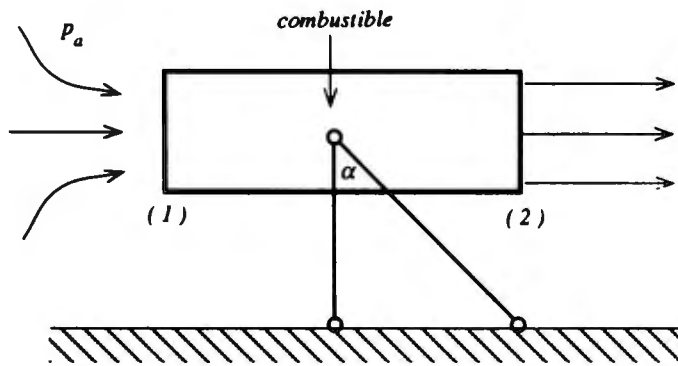


Figura P 5.17

Problema 5.17

Se prueba un motor con turbina de gas en condiciones de flujo estacionario en la instalación de pruebas que aparece en la figura P 5.17. El empuje del motor se equilibra mediante la fuerza F del tirante de apoyo, el cual forma un ángulo $\alpha = 45^\circ$ con la vertical. El gasto másico de aire desde la atmósfera ambiente al motor es $\dot{m}_a = 1E(2) \text{ kg/s}$ a una densidad $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$. El gasto másico de combustible hacia el motor es $\dot{m}_f = 2 \text{ kg/s}$. La densidad del gas de escape es $\rho_2 = 0.4 \text{ kg/m}^3$. Las áreas del flujo de admisión y escape son iguales, $A_1 = A_2 = 1 \text{ m}^2$. La presión atmosférica $p_a = 1E(5) \text{ Pa}$.

Calcule (a) las velocidades en la admisión y en la salida, V_1 y V_2 , (b) la presión p_1 en la admisión y (c) la tensión F en el tirante diagonal de apoyo.

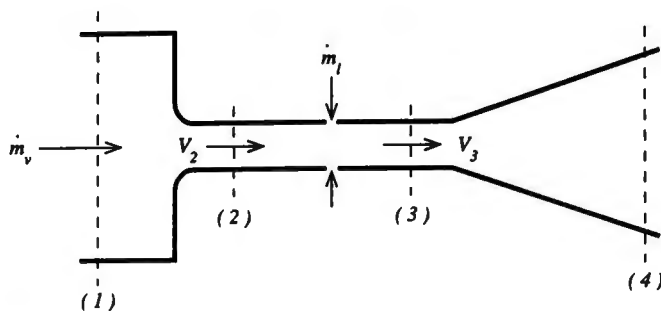


Figura P 5.18

Problema 5.18

En el aparato de la figura P 5.18, el vapor de un flujo no viscoso que proviene de un depósito muy grande de baja velocidad (sección 1) se acelera con un gasto másico \dot{m}_v estacionario y densidad ρ_v a través de una boquilla. El vapor alcanza una velocidad V_2 en un conducto con área A constante de sección transversal. Unas boquillas rociadoras que rodean el conducto inyectan agua líquida en dirección radial con un gasto másico \dot{m}_l suficiente tal que permite condensar todo el vapor de forma que sólo en la sección 3 el líquido fluye con una velocidad V_3 y densidad ρ_l . La corriente líquida de un flujo no viscoso se desacelera a través de un difusor hasta alcanzar una velocidad muy baja en la sección 4.

El flujo es estacionario y los cambios de presión entre los puntos 1 y 2 y 3 y 4 son suficientemente pequeños de forma que los flujos a través de la boquilla y el difusor pueden tratarse como incompresibles, con densidades ρ_v y ρ_l , respectivamente. (a) Obtenga expresiones para la razón de velocidades adimensional, V_3/V_2 , y el cambio de presión adimensional, $(p_2 - p_3)/(\rho_v/2)V_2^2$, en términos de los parámetros conocidos ρ_v , ρ_l , \dot{m}_v y \dot{m}_l . (b) Demuestre que la presión p_4 corriente abajo es mayor que la presión corriente arriba p_1 si $(\dot{m}_l/\dot{m}_v) < \sqrt{\rho_l/\rho_v} - 1$.

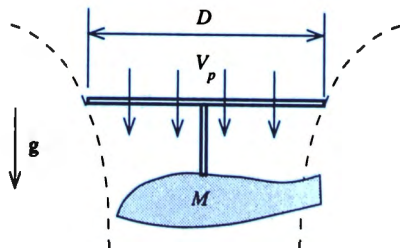


Figura P 5.19

Problema 5.19

Un helicóptero, con masa $M = 1E(3) \text{ kg}$ y diámetro $D = 10 \text{ m}$ del rotor, permanece en el aire en vuelo estacionario como se aprecia en la figura P 5.19. El aire succionado hacia el rotor pasa hacia abajo a través de él con una velocidad axial V_p desconocida. Calcule la velocidad V_p y la potencia necesaria para mantener el vuelo estacionario en el aire si la densidad de éste es $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

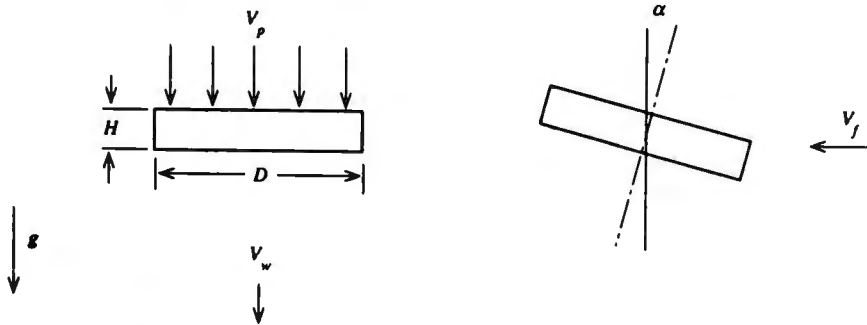


Figura P 5.20

Problema 5.20

Un "platillo volador" consta de un par de hélices (y un motor) que giran en sentidos contrarios dentro de una cubierta cilíndrica con D por diámetro y altura axial H . Las hélices inducen un flujo de aire con velocidad uniforme V_p a través del dispositivo, cuya masa es M .

El platillo volador permanece fijo en el aire en una atmósfera estacionaria de densidad ρ , como se aprecia en la parte izquierda de la figura P 5.20. Expresé (a) la velocidad axial V_p a través del dispositivo (b) la potencia P_p que se requiere para mantener éste flujo en términos de los parámetros M , D y ρ .

Cuando el eje del dispositivo se inclina un ángulo pequeño α respecto de la vertical, éste se mueve horizontalmente con una velocidad constante V_f , como se aprecia en la parte derecha de la figura P 5.20. La fuerza horizontal D de resistencia al avance que ejerce el aire sobre el dispositivo en movimiento es

$$D = (\rho/2)V_f^2 C_D (HD)$$

donde el coeficiente de resistencia al avance C_D es una constante. Para este movimiento, encuentre expresiones para (c) la velocidad de vuelo V_f y (d) la potencia P_p que se necesita para mantener esa velocidad de vuelo en términos de los parámetros M , D , H , α , C_D y ρ .

Problema 5.21

Un inventor propone montar en un barco una turbina eólica con eje horizontal. La potencia que genera la turbina eólica se aprovechará para accionar la hélice del barco

y, así, impulsar el barco en el agua. Si se supone (i) que se trata de una turbina eólica ideal con 100% de conversión de la potencia P_{wt} de la turbina eólica a potencia de propulsión del barco, (ii) que la fuerza de resistencia al avance en el casco del barco que se resiste a su movimiento a través del agua es mucho más pequeña que la fuerza de empuje F que actúa sobre la turbina eólica y (iii) que la turbina eólica se hace funcionar de tal forma que genere la máxima potencia posible, calcule la razón V_s/V_a de la velocidad V_s del barco a la velocidad V_a del aire (relativas al agua) cuando el barco avanza directamente hacia el viento.

Problema 5.22

Se propone la construcción de una turbina de corriente de marea en un punto de un estuario con mareas donde la velocidad V_t de la corriente de marea varía respecto al tiempo en forma sinusoidal a lo largo de un periodo de marea de 12.5 h. $(V_t)_m = 2.5 \text{ m/s}$ es la máxima velocidad de la corriente de marea. Se utilizará una hélice adicional del barco, con diámetro $D = 1 \text{ m}$, como el equivalente subacuático de una turbina eólica para activar un generador eléctrico. Se sumergirá el dispositivo a una profundidad suficiente respecto de la superficie del agua, pero a cierta distancia del fondo del estuario.

(a) Si la hélice actuara como una turbina ideal, calcule la máxima potencia que podría generarse y la potencia promediada en el tiempo. (b) Las características de la hélice, al actuar como un dispositivo productor de potencia, no se conocen. Se decide operar el dispositivo en forma conservadora, con una velocidad del flujo axial V_p en la hélice igual a $0.9 V_t$. Para esa carga ligera, la razón de la velocidad ΩR de la punta de la hélice a la velocidad V_t de la corriente, según se calcula de la razón paso/diámetro de la hélice, se determina que es 3. Si se supone un flujo ideal a través de la hélice/turbina, determine la potencia P , la velocidad angular Ω , el momento de torsión T y la fuerza F de empuje para el tiempo de máxima corriente, cuando $V_t = 2.5 \text{ m/s}$.

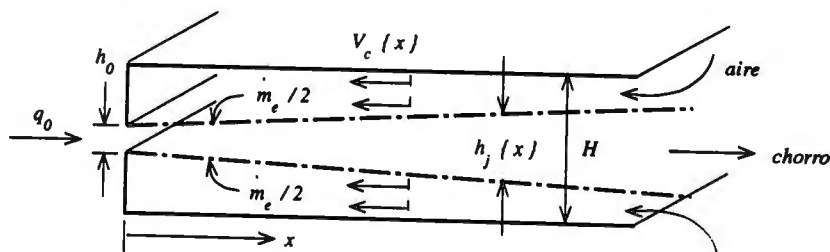


Figura P 5.23

Problema 5.23

Un largo conducto bidimensional con altura constante H se abre a la atmósfera (con presión p_a en uno de sus extremos). En el otro extremo, el conducto está cerrado, a excepción de la línea central, donde se inyecta axialmente un chorro de aire turbulento de alta velocidad con un gasto volumétrico q_0 por unidad de anchura, como lo ejempli-

fica la figura P 5.23. El espesor del chorro en el punto de inyección es h_0 . El chorro recorre el conducto a lo largo de la línea central y sale por el extremo abierto sin tocar las paredes.

El chorro turbulento “arrastra” aire hacia su interior: el chorro extrae el aire circundante de su periferia y se mezcla con el aire de gran cantidad de movimiento que contiene el chorro. Ese arrastre de aire da origen a un contraflujo de aire por encima y por debajo del chorro turbulento (véase la figura P 5.23). Por lo tanto, la velocidad del chorro y su espesor $h_j(x)$ cambian ligeramente con la posición x en el canal.

La densidad ρ del aire en el chorro y en el contraflujo es constante y uniforme. Es posible concebir el aire de contraflujo como si fluyera sin viscosidad, pero el flujo del chorro sí es viscoso. El gasto másico \dot{m}_e del aire arrastrado en la parte superior y en la parte inferior del chorro, por unidad de anchura multiplicado por la longitud del chorro, varía con la posición x según:

$$\dot{m}_e = 2\rho Kx$$

En términos de los parámetros conocidos q_0 , ρ , K , H y h_0 , deduzca expresiones para (a) el gasto másico por unidad de anchura del chorro, $q(x)$, como función de la posición x a lo largo del eje del chorro, (b) la velocidad $V_c(x)$ del flujo de entrada del aire del contraflujo como función de x y (c) la presión $p(x)$ del aire en la región externa del contraflujo como una función de x . (d) Demuestre cómo podría usarse la integral de la cantidad de movimiento para encontrar una expresión con la cual podría determinarse el espesor del chorro $h_j(x)$ en términos de los parámetros listados arriba.

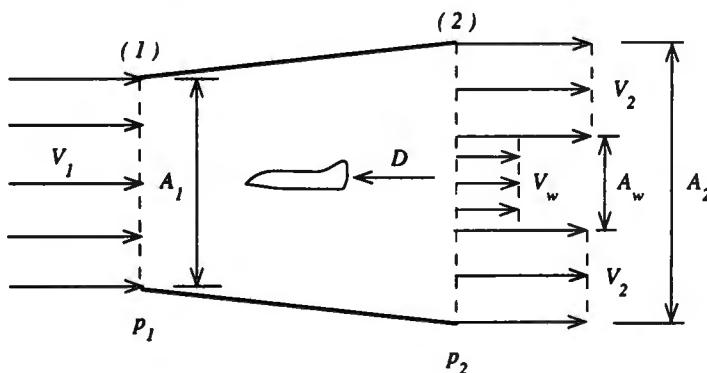


Figura P 5.24

Problema 5.24

Un túnel aerodinámico de área variable se utiliza para determinar la resistencia al avance D de un modelo de avión. El flujo corriente arriba en el túnel tiene una velocidad V_1 y presión p_1 uniformes en toda el área A_1 de entrada de la sección de prueba del túnel. A pesar de que la presión p_2 corriente abajo también es uniforme en toda el área A_2 del flujo de salida, existe un núcleo del flujo, con área A_w , dentro del cual la velocidad

uniforme V_w es menor que la velocidad uniforme V_2 del resto del flujo de salida (véase la figura P 5.24).

(a) El ingeniero de pruebas ajusta el área A_2 de salida hasta que la presión p_2 y la velocidad V_2 coincidan con los valores de la entrada, p_1 y V_1 . Esto simulará vuelo libre en la atmósfera debido a que las líneas de corriente que pasan lejos del modelo de avión se perturban poco. Si se supone que el flujo es incompresible y que la fricción de las paredes del túnel es despreciable, encuentre expresiones para el área A_2 corriente abajo y la fuerza D de resistencia al avance del modelo en términos de A_1 , V_1 , A_w , V_w , p_1 y ρ , cantidades que se miden en la prueba.

(b) En la segunda prueba, el ingeniero mantiene las paredes del túnel paralelas entre sí de forma que $A_2 = A_1$, pero permite que se succione cierta cantidad de aire del túnel mediante paredes porosas con un gasto volumétrico Q , en tanto que el flujo de succión que sale del túnel con una componente tangencial de la velocidad es igual a V_1 . Se ajusta el gasto Q hasta que $V_2 = V_1$ y $p_2 = p_1$. Obtenga expresiones para el gasto volumétrico Q y la fuerza D de resistencia al avance en términos de las cantidades medidas A_1 , V_1 , A_w , V_w , p_1 y ρ .

(c) En una tercera prueba, el ingeniero mantiene las paredes paralelas, como en (b), apaga la succión ($Q = 0$) y mide todas las cantidades del flujo corriente arriba y corriente abajo (p_1 , A_1 , V_1 , p_2 , $A_2 = A_1$, $V_2 A_w$ y V_w). En términos de estas cantidades, encuentre expresiones para la fuerza D de resistencia al avance, así como una relación entre ellas que exprese la conservación de la masa.

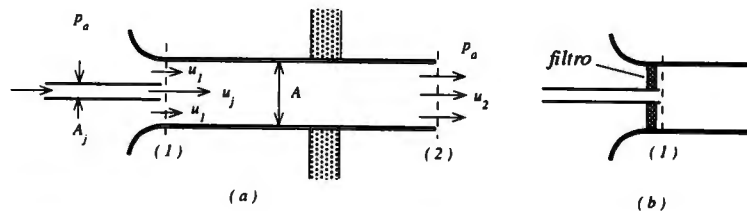


Figura P 5.25

Problema 5.25

En la figura P 5.25(a), se utiliza un conducto de ventilación con área A de sección transversal a fin de extraer el aire de un lugar de trabajo y expulsarlo hacia el exterior de un edificio. En lugar de utilizar un ventilador, se equipa el conducto con un chorro de aire de alta velocidad (con área A_j de la boquilla y velocidad u_j), el cual induce un flujo de aire a través del conducto al mezclarse en forma turbulenta con el aire dentro de él. Si bien es posible considerar como no viscoso el flujo de aire de la habitación hacia la entrada del conducto, el flujo en éste consta de una mezcla viscosa pero la fricción de las paredes es despreciable. Tanto el flujo del conducto como el del chorro tienen la misma densidad constante ρ , y las velocidades de la entrada y salida (u_j , u_1 y u_2) son uniformes en las áreas de los flujos respectivos (A_j , $A - A_j$ y A). La presión ambiente dentro y fuera del edificio es la misma y es igual a p_a .

(a) Deduzca un conjunto de ecuaciones algebraicas a partir de las cuales sea posible encontrar la velocidad u_1 de succión en términos de las cantidades conocidas A , A_j , u_j , p_a y ρ , pero sin resolver para u_1 . Demuestre que se tienen las suficientes ecuaciones para encontrar u_1 explícitamente. (b) En una prueba del sistema, se encuentra que el flujo volumétrico por el conducto es proporcional al gasto volumétrico del chorro. Demuestre que este resultado experimental es consistente con las ecuaciones que se dedujeron en (a). (c) Se decide colocar un filtro en la entrada del conducto para detener las partículas de polvo, como se aprecia en la figura P 5.25(b). La caída de presión Δp a través del filtro se relaciona con el flujo mediante:

$$\Delta p = C \left(\rho \frac{u_1^2}{2} \right)$$

donde C es una constante. Deduzca la modificación de las ecuaciones del inciso (a) que se necesitan para permitir la determinación de la velocidad u_1 del flujo incluyendo el filtro.

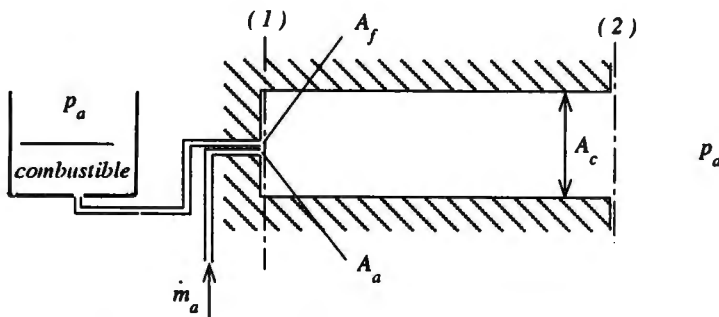


Figura P 5.26

Problema 5.26

En una cámara simple de mezclado para combustible y aire según la figura P 5.26, se extrae combustible de un tanque mediante una presión subatmosférica p_1 producida por un chorro de aire adyacente que tiene un gasto másico conocido de aire, \dot{m}_a . En una operación de flujo estacionario, el combustible entra en la cámara de mezclado como corriente estacionaria y uniforme que se descompone en gotas debido a los efectos combinados de la tensión superficial y la turbulencia del flujo de aire. Más tarde, estas gotas se mezclan con el aire (pero no se vaporizan) y salen en la sección (2) con la misma velocidad que el aire bajo la forma de una corriente de velocidad uniforme. Los efectos de la fricción de las paredes, tanto en la línea de suministro de combustible líquido como en la cámara de mezclado, son pequeños y pueden despreciarse. La densidad ρ_a del aire es constante y mucho menor que la densidad ρ_f del combustible. En (1), las áreas del chorro de combustible y de aire, A_f y A_a , respectivamente, son mucho menores que el área A_c del flujo de la cámara de mezclado.

(a) Si se supone que el flujo es no viscoso en la línea de combustible, encuentre una expresión para el gasto másico \dot{m}_f del combustible en términos de la presión p_1 (desconocida) y otros parámetros del problema que se dieron arriba. (b) Al aplicar al flujo de la cámara de mezclado el principio de la cantidad de movimiento, obtenga otra expresión que relacione las incógnitas, \dot{m}_f y p_1 , y, en combinación con los resultados de (a), deduzca una expresión para el gasto másico \dot{m}_f/\dot{m}_a en términos de las áreas del flujo y las densidades del fluido que se conocen.

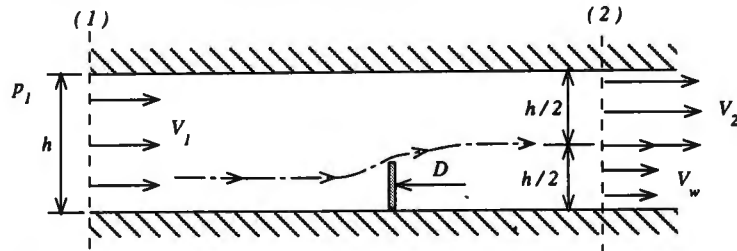


Figura P 5.27

Problema 5.27

Se prueba un modelo de estacada paranieves en un túnel aerodinámico a fin de determinar la fuerza D de resistencia al avance que el viento ejerce sobre la estacada. (Una estacada paranieves es un cerco hecho con malla de claros anchos diseñado para recoger la nieve que lleva el viento.) La figura P 5.27 ejemplifica la estacada en el túnel aerodinámico, cuya anchura normal a la figura es W . Corriente arriba de la estacada, en la sección 1, la presión p_1 y la velocidad V_1 se miden y se encuentra que son uniformes en toda la sección transversal del túnel. Corriente abajo de la estacada, en la sección 2, la velocidad no es uniforme. En la mitad inferior del túnel, se mide una velocidad V_w , la cual es menor que V_1 . Al inyectar humo en el túnel a fin de localizar líneas de corriente, se concluye que el fluido de velocidad más baja en la mitad inferior del túnel de la sección 2 es el fluido que ha pasado a través de la estacada paranieves, en tanto que el fluido en la parte superior del túnel en 2 ha pasado por encima de la estacada. (Estos flujos se separan mediante la línea de corriente divisoria que se ilustra en la figura P 5.27.)

Suponga que el flujo es incompresible de densidad ρ . En términos de las cantidades conocidas p_1 , V_1 , V_w , ρ , W y h , obtenga expresiones para (a) la velocidad V_2 en la mitad superior del túnel en 2, (b) la presión p_2 en 2, suponiendo que el flujo en la mitad superior del túnel, que no pasa por la estacada paranieves, es no viscoso y (c) la fuerza D necesaria para sostener la estacada paranieves (si se supone que las fuerzas de fricción en las paredes del túnel aerodinámico son despreciables). (d) Al examinar las líneas de corriente que pasan por la estacada, se concluye que no hay cambio en la velocidad V_f del aire al pasar por la estacada, pero que hay una caída de presión Δp a través de la estacada debido a los efectos de la viscosidad. Si se supone que el flujo corriente arriba y corriente abajo respecto de la estacada (pero no a través de ella) es no viscoso, encuentre una expresión para Δp . (Note que no se mide V_f .)

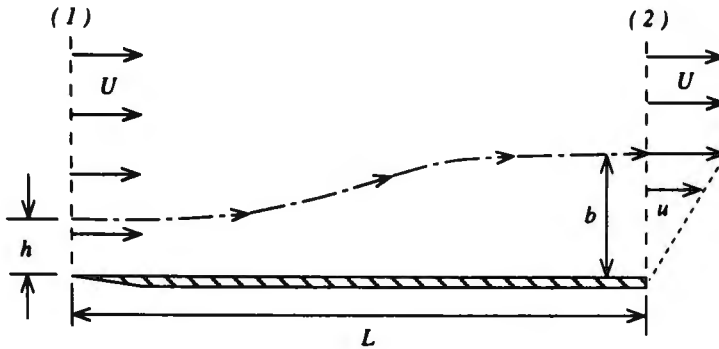


Figura P 5.28

Problema 5.28

Una placa plana con longitud L se coloca en un túnel aerodinámico alineada con el flujo, como se ilustra en la figura P 5.28. Las mediciones del flujo por encima de la placa revelan que el perfil de la velocidad horizontal en el borde de ataque, sección 1, es uniforme (véase la figura P 5.28) y tiene una rapidez U . En el borde posterior (o borde de salida), sección 2, el perfil de velocidades es lineal fuera a una distancia b , pero es uniforme más allá de ese punto:

$$u = U \left(\frac{y}{b} \right), \quad 0 \leq y \leq b; \quad u = U, \quad y \geq b$$

La figura P 5.28 ilustra la línea de corriente que termina a una distancia b desde el borde posterior; no se mide su distancia h desde el borde de ataque.

En términos de los valores medidos b , L , U y la densidad ρ , encuentre expresiones para (a) la distancia h y (b) la fuerza D de resistencia al avance (por unidad de distancia normal al plano de la figura P 5.28) que el aire ejerce sobre la superficie superior de la placa, suponiendo que la presión es uniforme en todo el campo de flujo. (c) La placa es porosa. Se inyecta aire por la placa en dirección hacia arriba, el cual emerge con una velocidad $v = U/10$ hacia arriba a lo largo de la superficie superior de la placa. No existe componente horizontal de este aire en la superficie de la placa. Deduzca expresiones para h y D en términos de b , L , U y ρ .

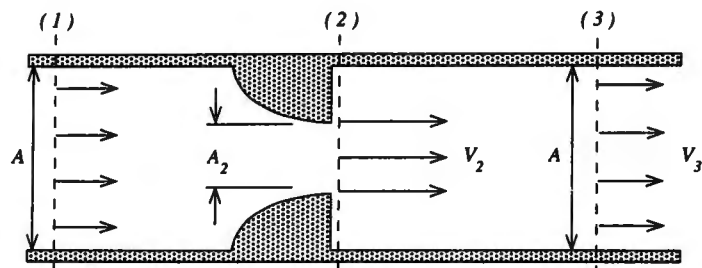


Figura P 5.29

Problema 5.29

Un fluido incompresible de densidad ρ fluye de modo estacionario en un tubo circular con área A de sección transversal que encierra una boquilla, como se ejemplifica en la figura P 5.29. En las secciones 1, 2 y 3, las presiones p_1 , p_2 y p_3 son uniformes en toda el área A . Las velocidades V_1 y V_3 también son uniformes en toda el área A , en tanto que en la salida de la boquilla, la velocidad V_2 es uniforme en toda el área A_2 , pero es cero en toda el área restante, $A - A_2$.

(a) Dadas las cantidades conocidas A , A_2 y V_1 , encuentre expresiones para las velocidades V_2 y V_3 . (b) Debido a los efectos de la viscosidad corriente abajo de la boquilla, no se aplica la ecuación de Bernoulli al flujo que va del punto 2 al 3. Utilizando la integral de la cantidad de movimiento, obtenga una expresión para $p_3 - p_2$ en términos de ρ , V_1 , A_2 y A . (Se puede despreciar las fuerzas cortantes viscosas a lo largo de la pared del tubo entre los puntos 2 y 3.) (c) Si se supone que el flujo entre 1 y 2 es no viscoso, demuestre que $p_3 < p_1$. (d) Deduzca una expresión para la fuerza F que el fluido ejerce sobre la boquilla.

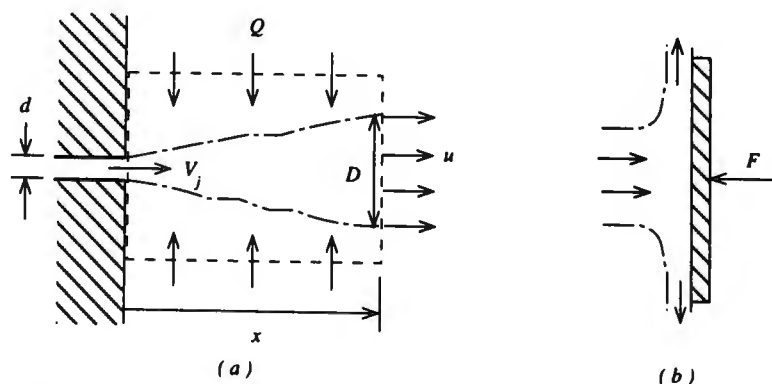


Figura P 5.30

Problema 5.30

Se expulsa un chorro de aire de simetría axial (velocidad de salida V_j) en una atmósfera estacionaria desde un tubo con diámetro d empotrado en una pared, como se aprecia en la figura P 5.30(a). En el chorro, la velocidad del fluido u es uniforme en toda la sección transversal de diámetro D . Se observa que el diámetro D del chorro crece linealmente con la distancia x desde la pared:

$$D = d + Kx$$

donde K es una constante proporcional adimensional. El chorro arrastra con él parte del aire circundante, el cual fluye radialmente hacia adentro en dirección del chorro, como se representa en la figura P 5.30(a).

(a) Si se supone que la presión dentro del chorro es la misma que la presión atmosférica y que la densidad del fluido del chorro es la misma que la densidad ρ de la atmósfera, obtenga una expresión para la velocidad u del chorro como función de x y los parámetros V_j , d y K al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento al volumen de control de la figura P 5.30(a). (b) A gran distancia del orificio del chorro éste incide sobre una pared sólida, como se ejemplifica en la figura P 5.30(b). Encuentre una expresión para la fuerza F que se requiere para mantener esta segunda pared estacionaria. (c) Deduzca una expresión para el gasto volumétrico $Q(x)$ del aire atmosférico que el chorro arrastra con él entre $x = 0$ y el punto x en términos de x , V_j , d y K .

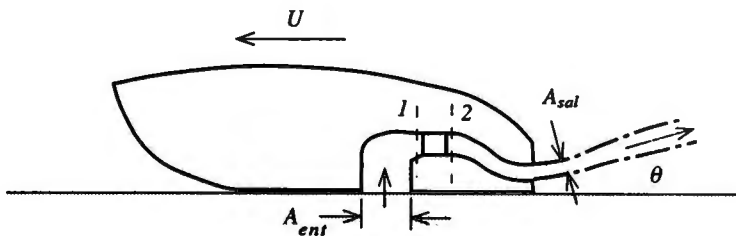


Figura P 5.31

Problema 5.31

Un autobote es impulsado hacia adelante por un chorro de agua que apunta hacia atrás con una inclinación que forma un ángulo θ por encima de la horizontal (véase la figura P 5.31). Una bomba produce el chorro al succionar agua por una toma con área A_{ent} y la descarga por un orificio de salida con área A_{sal} mucho menor con un gasto másico \dot{m} . La toma de agua está al nivel del fondo del casco y es horizontal. La densidad del agua es ρ .

(a) Encuentre una expresión para el empuje F horizontal creado por el sistema de propulsión cuando el bote se encuentra en reposo. Dé la respuesta en términos de \dot{m} , A_{sal} , ρ y θ . (b) Al moverse por el agua con una velocidad U , el casco experimenta

una fuerza F horizontal que se resiste al movimiento, originada por la fricción y el movimiento ondulatorio del agua sobre la superficie del casco:

$$F = KU^2$$

donde K es una constante. Obtenga una expresión para la velocidad U de crucero en términos de \dot{m} , A_{sal} , ρ , θ y K . (c) Si se supone que la presión p_{ent} en la toma o admisión es la presión atmosférica y que el flujo es no viscoso desde la admisión hasta la sección 1 (sólo corriente arriba de la bomba) y desde la sección 2 (sólo corriente abajo de la bomba) hasta la salida, encuentre una expresión para $p_2 - p_1$ si $A_1 = A_2$. (Puede despreciarse la gravedad.) Exprese la respuesta en términos de \dot{m} , A_{ent} , A_{sal} y ρ .

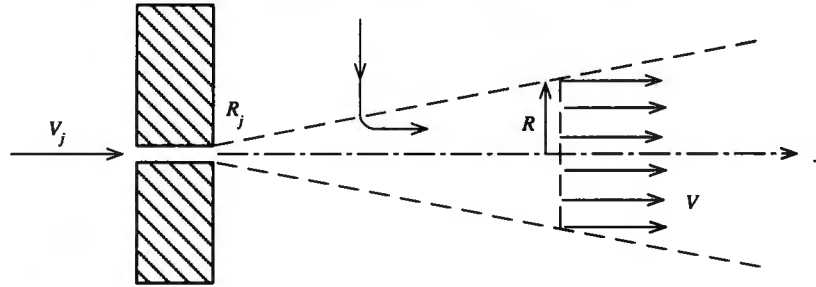


Figura P 5.32

Problema 5.32

La corriente de aire de un flujo estacionario emerge desde una pared, a través de un orificio de radio $R_j = 2E(-3)$ m con velocidad $V_j = 10$ m/s, hacia una atmósfera estacionaria de presión constante. Conforme la corriente se mezcla con la atmósfera circundante, ésta forma un chorro cónico cuyo radio R aumenta linealmente con la distancia x a partir de la pared según:

$$R = \alpha x$$

donde la constante de proporcionalidad tiene el valor $\alpha = 0.15$. Como se ilustra en la figura P 5.32, la velocidad V del fluido en el chorro es constante en toda el área πR^2 de la sección transversal del chorro. El fluido que sale del orificio de la pared se mezcla con el aire circundante aspirándolo hacia su interior en dirección radial y lo acelera en la dirección axial (véase la figura P 5.32).

(a) Si se supone que el aire que sale del orificio tiene la misma densidad ρ_a que la atmósfera circundante, determine el valor numérico de la velocidad V del fluido del chorro a una distancia $x = 10$ m desde la pared.

En un segundo experimento, el fluido que sale del orificio es gas argón cuya densidad ρ_j es mayor que la del aire circundante, ρ_a . Debido a que ese gas se mezcla con el aire,

la fracción de volumen de argón, $\phi(x)$, que es uniforme dentro de la sección transversal del chorro a cualquier distancia x , disminuye al aumentar x . En un punto en el chorro donde la fracción de volumen de argón es ϕ , la densidad ρ del chorro es la suma de la densidad $\phi\rho_j$ del argón y la densidad $(1-\phi)\rho_a$ del aire.

(b) Si se considera también el flujo másico de argón, deduzca (pero no resuelva) dos ecuaciones cuyas soluciones darían V y ϕ como funciones de x .

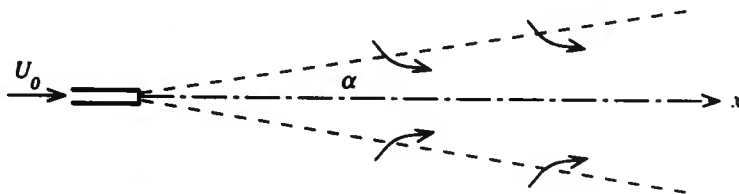


Figura P 5.33

Problema 5.33

Se rocía un líquido de densidad ρ , desde una boquilla hacia aire tranquilo con densidad ρ_a , como se aprecia en la figura P 5.33. La corriente líquida sale de la boquilla a una velocidad U_0 y se descompone en gotas pequeñas, arrastra aire y lo acelera en la dirección del eje x del rocío. El gasto másico del líquido que sale de la boquilla es \dot{m} . Se observa que las gotas de líquido se distribuyen uniformemente a través de la sección transversal de un cono sólido con semiángulo α y tienen la misma velocidad U dentro de la sección transversal.

Si se utiliza una fotografía, la velocidad $U(x)$ de las gotas de rocío se mide en función de la distancia x desde la punta de la boquilla. (a) Encuentre una expresión para la velocidad media $V(x)$ del aire dentro del cono de rocío como función de x y las variables del flujo que se conocen, si se supone que V es uniforme en toda la sección transversal del chorro. (b) Se observa que el rocío consta de gotas con un diámetro uniforme d . Obtenga una expresión para el número de gotas por unidad de volumen, $n(x)$ en función de x y los parámetros del flujo.

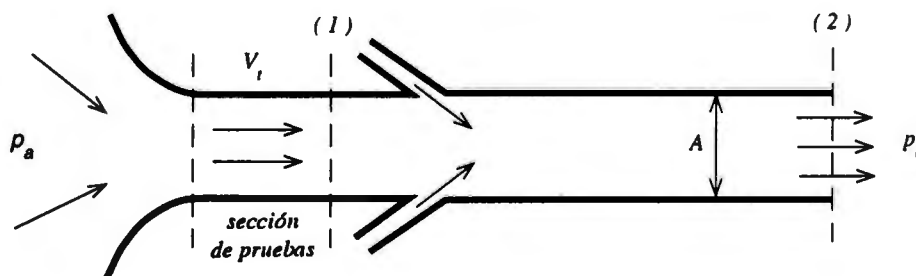


Figura P 5.34

Problema 5.34

Se propone construir un túnel aerodinámico en el cual se induce un flujo mediante bombas de chorro, como se esquematiza en la figura P 5.34. El túnel consta de un conducto con área constante A , con una entrada bien redondeada que conduce a la sección de pruebas. Corriente abajo de la sección de pruebas, en el túnel se inyectan chorros de aire con una componente horizontal V_j de la velocidad con un gasto másico total \dot{m}_j . El aire de alta velocidad de los chorros se mezcla en forma turbulenta y viscosa con el aire que entra por la sección de prueba y, mientras la mezcla alcanza la sección de salida (2), todo el aire tiene la misma velocidad uniforme.

Al analizar este flujo, se puede suponer que la densidad ρ del aire es constante, que entre (1) y (2) la fuerza cortante de la pared es despreciable y que el flujo de aire que proviene de la atmósfera hacia 1 es no viscoso.

Se está interesado en determinar la relación entre la velocidad V_i del túnel y las variables V_j , \dot{m}_j , A y ρ de diseño del túnel. (a) Al examinar el flujo entre (1) y (2), deduzca una expresión para la presión p_1 en la estación (1) en términos de la velocidad V_i del túnel y las variables de diseño. (b) Al considerar el flujo corriente arriba de (1), obtenga otra relación entre p_1 y V_i . (c) A partir de los resultados de (a) y (b), encuentre una relación entre V_i y las variables del diseño.

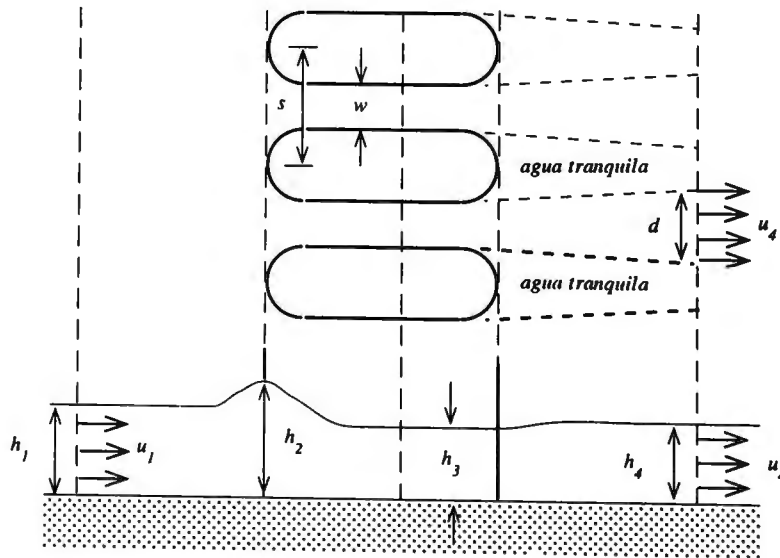


Figura P 5.35

Problema 5.35

Un puente sobre un río se encuentra sostenido mediante una serie de cajones neumáticos separados por una distancia s respecto de sus líneas centrales, pero con sólo una anchura w para cada canal formado entre los lados paralelos de cajones contiguos, como se aprecia en la mitad superior de la figura P 5.35 (vista de planta). El río tiene un cauce uniforme. Corriente arriba del puente, la profundidad del río es h_1 , y la velocidad del flujo u_1 es uniforme de arriba a abajo y de un lado al otro.

Cuando se observa desde uno de los lados (la parte inferior de la figura P 5.35, en proyección vertical), se puede ver que la superficie del río se eleva a una altura h_2 en el extremo corriente arriba del cajón neumático y, luego, baja a una menor altura h_3 en el canal formado entre los cajones neumáticos. Además, se observa que corriente abajo del puente, la velocidad u_4 del flujo es uniforme dentro de un canal con d de anchura, pero esencialmente es cero dentro de una región de estela con anchura $s - d$. También, la superficie del agua tiene una altura h_4 uniforme.

(a) Si se supone que el flujo es no viscoso entre 1 y 3, obtenga expresiones para las alturas h_2 y h_3 en términos de los parámetros h_1 , u_1 , s y w . (b) Expresé la velocidad u_4 corriente abajo en términos de los parámetros u_1 , h_1 , s , d y h_4 . (c) Si se desprecia la fricción en el cauce del río, deduzca una expresión para la fuerza horizontal que el flujo del río ejerce sobre un solo cajón neumático.

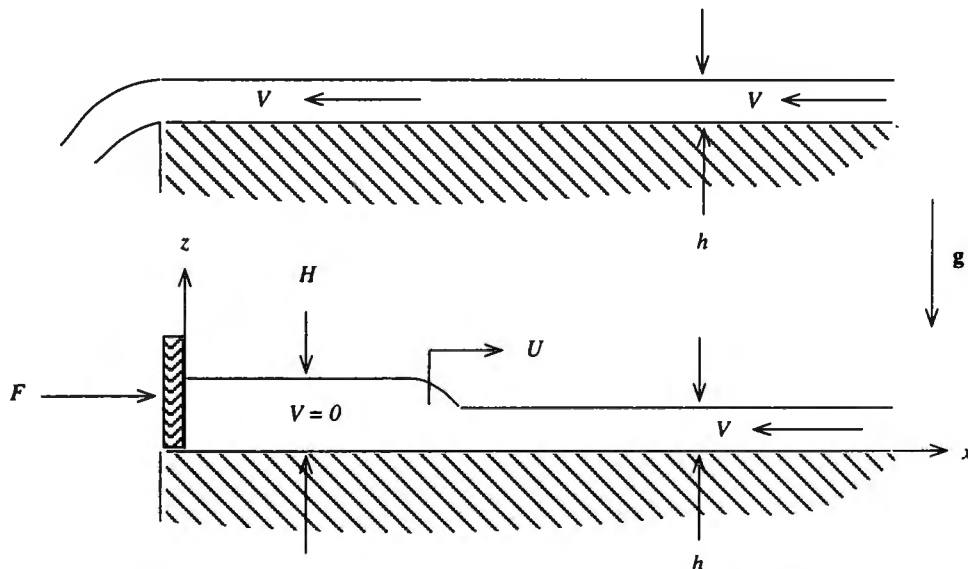


Figura P 5.36

Problema 5.36

Por un canal horizontal con anchura W corre un flujo estacionario de agua con una profundidad h y velocidad V que es uniforme en todo el canal, como se aprecia en la

mitad superior de la figura P 5.36. Al tiempo $t = 0$, de repente se inserta una compuerta en la corriente que fluye en el extremo corriente abajo ($x = 0$) y se observa que junto a la compuerta se forma una gruesa capa de agua estacionaria. El borde frontal de esta capa se mueve contra la corriente con una velocidad constante U hacia el flujo que llega (véase la mitad inferior de la figura P 5.36).

(a) Si se considera la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x , obtenga una expresión para la fuerza F horizontal que se requiere para sostener la compuerta en una posición estacionaria, en términos de las cantidades observadas h , V y U correspondientes al flujo. (b) Al considerar la conservación de la masa, deduzca una expresión para el espesor H de la capa estacionaria en términos de las mismas cantidades. (c) Si el borde frontal de la capa estacionaria es un resalto hidráulico que se caracteriza por las relaciones de la ecuación 5.38, encuentre una expresión para la velocidad frontal U en términos de las cantidades observadas V y h del flujo.

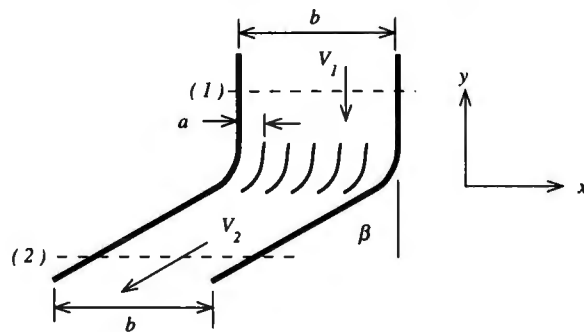


Figura P 5.37

Problema 5.37

El agua fluye en un conducto horizontal que tiene forma rectangular, una profundidad $W = 1 \text{ m}$ y $b = 0.6 \text{ m}$ de anchura, el cual está doblado un ángulo $\beta = 60^\circ$ (véase la figura P 5.37). En la parte doblada hay paletas directrices espaciadas a intervalos iguales $a = 0.1 \text{ m}$. Si se supone que el flujo es no viscoso, calcule (a) el cambio de presión $p_1 - p_2$ entre el flujo corriente arriba y corriente abajo de la parte doblada y (b) las componentes x y y de la fuerza F ejercida por el agua en una paleta directriz.

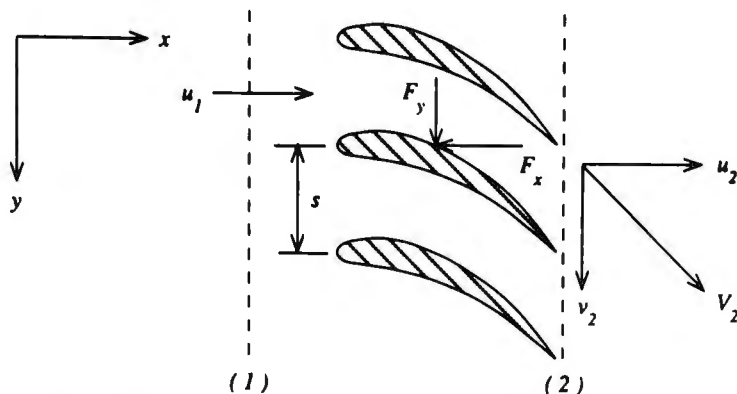


Figura P 5.38

Problema 5.38

El estator de entrada de una hidroturbina de flujo axial está compuesto por álabes que desvían un ángulo β el flujo axial de la entrada, como se observa en la figura P 5.38. El espacio de separación de los álabes es s y la altura del álabe (dimensión normal al plano de la figura P 5.38) es W . En términos de los parámetros S , W , u_1 , β y la densidad ρ , obtenga expresiones para (a) la velocidad V_2 del flujo de salida, (b) la caída de presión $p_1 - p_2$ y (c) las componentes F_x y F_y de la fuerza limitadora o restrictiva en un álabe.

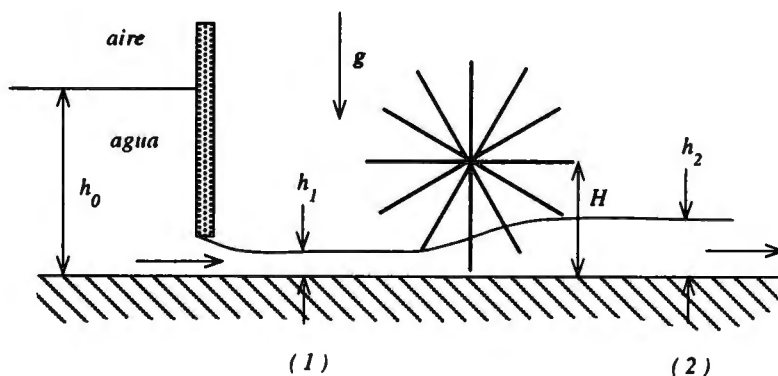


Figura P 5.39

Problema 5.39

La rueda de paletas de un viejo aserradero se encuentra localizada en una corriente de agua que mide $W = 2 \text{ m}$ de ancho. El agua que impulsa la máquina proviene de un depósito con agua cuya superficie se encuentra a una altura $h_0 = 5 \text{ m}$ por encima del cauce de la corriente. Al pasar por debajo de una compuerta, el agua es acelerada y alcanza la rueda de paletas a una profundidad $h_1 = 1 \text{ m}$ (véase la figura P 5.39). El flujo corriente abajo de la rueda de paletas tiene una profundidad $h_2 = 2 \text{ m}$.

El flujo que proviene del depósito hacia el punto 1 puede considerarse que es no viscoso, pero entre los puntos 1 y 2, donde la rueda de paletas agita el agua, ocurre una disipación viscosa y ya no es posible considerar el flujo como no viscoso. Sin embargo, la fuerza cortante viscosa en el cauce de la corriente es muy pequeña y puede despreciarse. Calcule (a) las velocidades V_1 y V_2 en los puntos 1 y 2, y (b) la fuerza horizontal F_x que ejerce el flujo de corriente sobre la rueda de paletas.

Problema 5.40

Se monta la rueda de paletas del problema 5.39 de forma que su eje quede a una distancia $H = 4 \text{ m}$ por encima del cauce de la corriente, como se aprecia en la figura P 5.39. Determine el momento de torsión T en el sentido que giran las manecillas del reloj que experimenta la rueda a causa de la corriente de agua cuando $V_1 = 8.858 \text{ m/s}$.

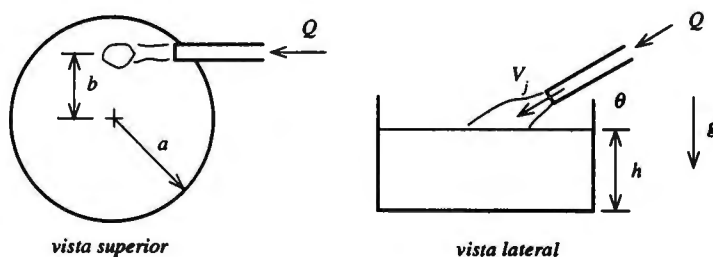


Figura P 5.41

Problema 5.41

En el instante $t = 0$, un tanque circular con radio $a = 0.5 \text{ m}$ contiene agua en reposo a una profundidad $h = 0.2 \text{ m}$. En el intervalo $0 \leq t \leq \tau$, sobre la superficie del agua en el tanque de la figura P 5.41, se coloca una manguera que tiene $Q = 2E(-3) \text{ m}^3/\text{s}$ por gasto volumétrico y una velocidad de salida $V_j = 1 \text{ m/s}$. El chorro golpea tangencialmente sobre la superficie del agua con un radio $b = 0.3 \text{ m}$ formando un ángulo $\theta = 30^\circ$ por encima de la horizontal. Después de un tiempo $\tau = 100 \text{ s}$, se retira la manguera. Con el tiempo, a causa del mezclado turbulento dentro del agua, toda el agua del tanque termina por girar como un cuerpo rígido con una velocidad angular Ω . Si se desprecia cualquier fuerza de fricción entre el agua y las paredes del tanque, calcule el valor de Ω .

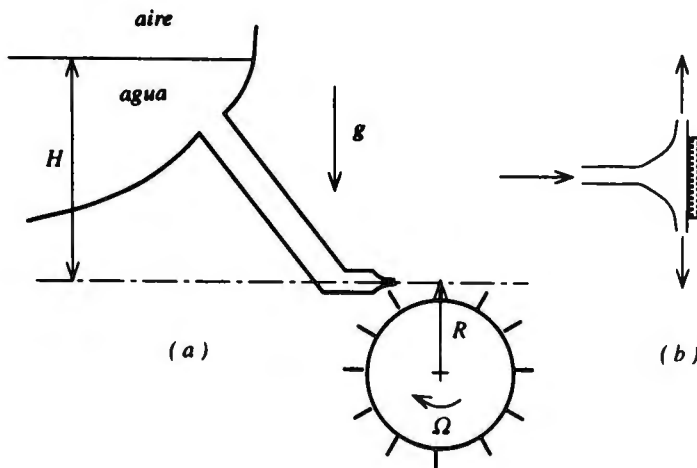


Figura P 5.42

Problema 5.42

Una turbina hidráulica rudimentaria es accionada por un chorro de agua que sale de una boquilla hacia la atmósfera circundante. El fluido se suministra desde un gran depósito cuya superficie está a una altura $H = 100 \text{ m}$ por encima de la boquilla, como se ilustra en la figura P 5.42(a). Las paletas de la turbina son unas placas planas que se extienden radialmente hacia afuera del rotor de la turbina e interceptan la corriente del chorro. La distancia radial desde el eje de la turbina hasta la línea central del chorro, $R = 1 \text{ m}$, es mucho mayor que la altura de las paletas. Relativo a las paletas en movimiento, la corriente del chorro se desvía en forma lateral, perpendicular al eje del chorro, como se ejemplifica en la figura P 5.42(b).

(a) Si se desprecia la fricción en el conducto de suministro, calcule la velocidad V_j del fluido del chorro. (b) Si el eje de la turbina se inmoviliza para impedir su rotación, calcule la fuerza F que el chorro ejerce sobre la paleta que lo intercepta cuando el gasto másico del chorro es $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$. (c) Si el eje de la turbina gira con una velocidad angular $\Omega = 20 \text{ radianes/s}$, calcule el momento de torsión T que la corriente del fluido ejerce sobre el eje de la turbina.

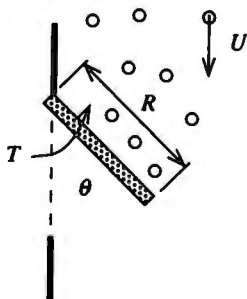


Figura P 5.43

Problema 5.43

En un día lluvioso, una ventana con altura R y anchura W , articulada por la parte superior, se abre contra la lluvia que cae, como se ilustra en la figura P 5.43. Las gotas de lluvia se precipitan con una velocidad U y h es la razón de precipitación pluvial (volumen de agua recogida por unidad de área horizontal por unidad de tiempo). Todas las gotas de lluvia que caen sobre la ventana pierden toda su cantidad de movimiento al transferirlo a la ventana.

(a) Deduzca una expresión para la masa de lluvia por unidad de volumen de aire, ρ_r . (b) Despreciando la fuerza gravitatoria, obtenga una expresión para el momento de torsión T que se requiere para mantener la ventana fija a $\theta = 45^\circ$. (c) Si la ventana se abre con una velocidad angular constante Ω desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 90^\circ$, encuentre una expresión para la masa de lluvia que golpea la ventana. (En los incisos (a)-(c), exprese la respuesta sólo en términos de ρ , U , h , R , W y Ω .)

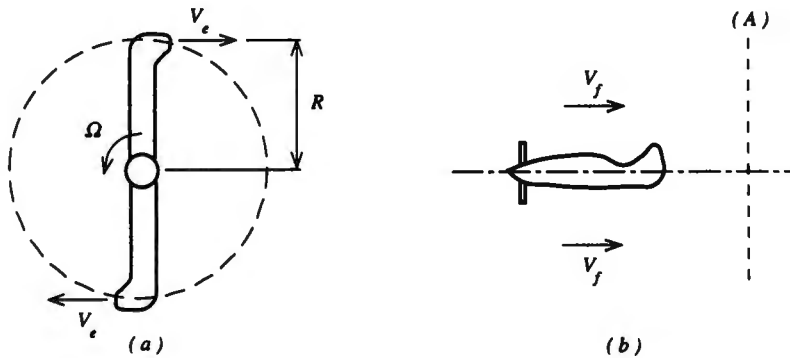


Figura P 5.44

Problema 5.44

Un inventor está diseñando un nuevo método para impulsar un avión ligero. El método, que se esquematiza en la figura P 5.44(a), comprende el bombeo de aire a través del interior de una hélice convencional desde cuya punta sale el aire en chorro con una velocidad V_e (relativa a la hélice) a través de un orificio con área A_e . La densidad del chorro es la misma que la densidad atmosférica ρ . La acción del chorro hace girar la hélice, suministrando un momento de torsión T_j . El motor del avión acciona un compresor que suministra los chorros de aire. El momento de torsión T_p que se requiere para hacer girar la hélice con una velocidad angular Ω es:

$$T_p = 0.01 \rho \Omega R^4 V_f$$

donde R es el radio de la hélice y V_f es la velocidad de vuelo del avión. (a) Obtenga una expresión para el momento de torsión T_j que los chorros proporcionan a la hélice como

función de los parámetros ρ , V_e , A_e , Ω y R . Para valores fijos de ρ , V_e , A_e y R , haga una gráfica de cómo varía T_j en función de Ω , encontrando las intersecciones con los ejes T y Ω . En la misma gráfica, indique cómo varía el momento de torsión T_p que requiere la hélice en función de Ω . (b) El inventor elige $V_e = 3 V_f$ y $A_e = 0.01 R^2$. Calcule el valor numérico de $\Omega R / V_f$ que resulte de esta elección. (c) Corriente abajo del avión, ¿cuál es el valor de la integral $\iint \rho(\mathbf{R} \times \mathbf{V})\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ evaluada a través de un plano (A) transversal al eje de rotación de la hélice, como se aprecia en la figura P 5.44(b)? Justifique la respuesta.

Bibliografía

Landau, L. D. y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, vol. 6, *Course of Theoretical Physics*, Traducido al inglés por J. B. Sykes y W. H. Reid, Londres: Pergamon Press, 1959.

Sabersky, Rolf H., Allan J. Acosta y Edward G. Hauptman, *Fluid Flow, A First Course in Fluid Mechanics*, 3a. ed., Nueva York: Macmillan Publishing Co., 1989.

6.1 Introducción

Después de haber visto que es posible despreciar los efectos viscosos sólo bajo algunas circunstancias, como en el caso de un fluido estático o un fluido con un número de Reynolds¹ grande sin efectos en la frontera, es necesario considerar cómo incluir los efectos viscosos cuando éstos son importantes. En tanto que se podrá formular una ecuación diferencial del movimiento de un fluido viscoso (conocida como ecuación de Navier-Stokes), se encontrará que resulta muy difícil aplicarla a cualquier flujo a excepción de los flujos más simples. En el caso de un flujo viscoso, no existe una relación con el grado de sencillez que presenta la ecuación de Bernoulli. Sin embargo, al considerar algunos flujos viscosos simples es posible aprender bastantes cosas acerca de los flujos viscosos en general que resultarán de ayuda en la comprensión de los flujos complejos que surgen de las aplicaciones de la ingeniería.

Una de las complicaciones importantes que surgen en el estudio de los flujos viscosos es la que atañe al hecho de que algunos de estos flujos se comportan de forma muy irregular: a estos flujos se les da el nombre de *flujos turbulentos*. Éstos se caracterizan por campos no estacionarios de velocidades caóticas, incluso cuando las condiciones que controlan el flujo son independientes del tiempo. Se depende mucho de las descripciones empíricas al tratar los flujos turbulentos debido a que las habilidades analíticas y numéricas con que se cuenta no son capaces de describir en forma apropiada la naturaleza de esos flujos que destaca por su enorme abundancia de detalles. Sin embargo, al estudiar los flujos viscosos no turbulentos, denominados *flujos laminares*, es posible desarrollar una suficiente intuición física que permita comprender las principales características de los flujos turbulentos.

En este capítulo, primero se considera la formulación de la ecuación básica del movimiento de un fluido viscoso, la ecuación de Navier-Stokes. Después, se prosigue con algunas soluciones simples, aunque prácticas, de la citada ecuación para flujos laminares, primordialmente estacionarios, a través de canales o alrededor de cuerpos

¹ Como recordatorio, el número de Reynolds de un flujo es VL/ν , donde V y L son la velocidad y longitud características del campo de flujo y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

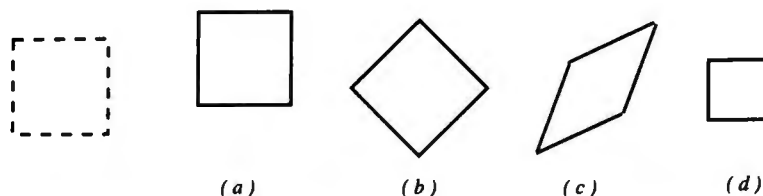


Figura 6.1 El movimiento de un elemento de un fluido, que inicialmente se define por la figura de líneas punteadas, puede describirse como una combinación de (a) movimiento de traslación, (b) movimiento de rotación de un cuerpo rígido, (c) movimiento cortante y (d) compresión pura. Sólo las deformaciones de (c) y (d) dan origen a esfuerzos viscosos.

sólidos. En la mayoría de estos ejemplos, las variables del fluido sólo dependen de una coordenada espacial, aunque para unos cuantos de ellos existe dependencia en dos coordenadas puesto que el flujo es más complejo. No obstante, el número de Reynolds correspondiente a estos flujos puede ser grande; éstos son viscosos a causa de la pronunciada influencia de las fronteras sólidas cercanas.

En el capítulo 7, se considerará un flujo turbulento (viscoso), principalmente desde un punto de vista empírico. Se describirán las condiciones que hacen que un flujo viscoso sea turbulento en lugar de laminar. Por el momento, sólo se considerarán flujos laminares que, aun cuando no son estacionarios, no son aleatorios o caóticos.

6.2 Esfuerzo viscoso

En hidrostática, el único esfuerzo que un elemento de superficie de un fluido experimenta es un esfuerzo normal, llamado presión, que es el mismo cualquiera que sea la orientación del elemento de superficie (Ley de Pascal).² Sin embargo, en un flujo viscoso el esfuerzo σ no será, en general, normal a la superficie: de hecho, por lo común éste tendrá una componente tangencial proporcional a la viscosidad. Se verá que resulta conveniente considerar el esfuerzo σ del fluido como la suma de un esfuerzo de presión $(-p)\mathbf{n}$ en la dirección normal y un *esfuerzo viscoso* $\boldsymbol{\tau}$ que es proporcional a la viscosidad:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv (-p)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \quad (6.1)$$

Con anterioridad, se ha utilizado esta descomposición del esfuerzo en una componente de presión y otra componente de viscosidad cuando se dedujeron los teoremas de la cantidad de movimiento lineal y angular, ecuaciones 5.11 y 5.46.

Un esfuerzo viscoso tiene lugar cuando en un flujo cambia la forma de un elemento de fluido. Puede considerarse el movimiento de un elemento de fluido como la suma de cuatro componentes, como se ilustra en la figura 6.1: (a) traslación simple, (b) rotación

² Véase la sección 2.3.1.

simple como cuerpo rígido, (c) movimiento cortante o tangencial y (d) compresión pura que es igual en todas las direcciones. Sólo el movimiento cortante (c) y la compresión (d) darán origen a un esfuerzo viscoso que es proporcional a la *velocidad* de estos movimientos, puesto que la forma del elemento de fluido no cambia en la traslación (a) ni en la rotación (b).

Ahora, se determinará el esfuerzo viscoso que surge del movimiento cortante. Considérese primero el flujo cortante más simple que resulte posible, que es aquél entre dos planos paralelos según se ejemplifica en la figura 6.2(a). Un elemento de fluido se deforma cuando la superficie superior se desliza respecto de su superficie inferior. Para un fluido newtoniano, en las superficies inferior y superior de un elemento de fluido se genera un esfuerzo cortante proporcionalmente al gradiente de velocidad y la viscosidad del fluido:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.2)$$

de acuerdo con la ecuación 1.5. (El símbolo τ_{xy} indica que el esfuerzo cortante actúa en la dirección x sobre un elemento de superficie cuya normal está en la dirección y .) Pero debe existir un esfuerzo complementario τ_{yx} en las caras verticales del elemento de la figura 6.2(b) que es igual a τ_{xy} , pues de lo contrario el movimiento de rotación del elemento sufriría una aceleración con una velocidad angular infinita al hacerse su tamaño infinitesimal.³ Una relación así debe cumplirse para cualquier dirección de los ejes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (6.3)$$

Ahora, considérese un flujo cortante en el cual las placas que lo limitan están orientadas en la dirección y , como ejemplifica la figura 6.2(c). El esfuerzo cortante τ_{yx} en la superficie de este elemento es:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \tau_{xy}$$

Cualquier combinación de los flujos que describe la figura 6.2(b) y (c) origina esfuerzos viscosos que son simplemente la suma de cada una estas contribuciones por separado:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Este resultado es válido para el movimiento cortante o tangencial en el plano x, y de la figura 6.2. También deben cumplirse relaciones parecidas en los planos y, z y z, x . En resumen, los esfuerzos cortantes viscosos son:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

³ El momento de las fuerzas cortantes que actúan sobre el elemento de la figura 6.2(b) varía según el cuadrado de la longitud del elemento, en tanto que su momento de inercia varía según la cuarta potencia de esa longitud, de forma que la aceleración angular variaría según el inverso del cuadrado de la longitud del elemento.

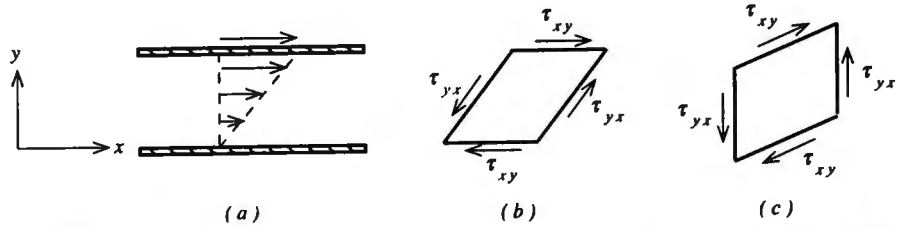


Figura 6.2 El movimiento de corte más sencillo de (a) da origen a los esfuerzos viscosos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} que se muestran en (b). Si dicho movimiento está en la dirección y , los esfuerzos viscosos cortantes son los de (c).

$$\begin{aligned}\tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (6.4)$$

¿Existe una componente del esfuerzo viscoso normal a la superficie de un fluido? Puede intuirse, a partir de la analogía con los esfuerzos cortantes viscosos, que el esfuerzo viscoso normal τ_{xx} que actúa en un plano normal al eje x puede ser:

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Sin embargo, esto es correcto sólo en parte. Se tiene otra contribución para τ_{xx} , cuya forma correcta es:

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{V}\quad (6.5)$$

donde μ_B es la *viscosidad volumétrica* del fluido.⁴ En el caso de un fluido incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, el segundo término de la parte derecha de la ecuación 6.5 es cero, por lo que la suposición inicial era correcta. Así, los esfuerzos viscosos normales en un fluido incompresible se transforman en:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} &= 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

⁴ Véase, por ejemplo, Robert S. Brodkey, 1867, *The Phenomena of Fluid Motions* (Reading: Addison-Wesley Publishing Co.). La viscosidad volumétrica de un gas perfecto monoatómico es cero. Para un fluido compresible sometido a la compresión pura de la figura 6.1(d), donde $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = \partial w/\partial z = \nabla \cdot \mathbf{V}/3$, $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \mu_B \nabla \cdot \mathbf{V}$. Sólo en casos extremos de flujo compresible (v.g., ondas de choque o, bien, ondas de sonido de alta frecuencia) los esfuerzos proporcionales a la viscosidad volumétrica serían importantes.

$$\tau_{zx} = 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{si } \nabla \cdot \mathbf{V} = 0) \quad (6.6)$$

Las ecuaciones 6.4 y 6.6 juntas definen el esfuerzo viscoso $\boldsymbol{\tau}$ para un fluido incompresible.

Ejemplo 6.1

La velocidad \mathbf{V} de un flujo estacionario de aire por encima de una superficie horizontal ($z = 0$) es:

$$\mathbf{V} = (az - bz^2) \mathbf{i}_x + cz \mathbf{i}_y$$

donde las constantes a , b y c tienen los siguientes valores numéricos:

$$a = 1.0 \text{ s}^{-1}, \quad b = 0.1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad c = 2.0 \text{ s}^{-1}$$

Calcule los valores numéricos de todas las componentes del esfuerzo viscoso (ecuaciones 6.4 y 6.6) para $z = 1.0 \text{ m}$ si $\mu = 1.82E(-5) \text{ Pa s}$.

Solución

Puesto que \mathbf{V} sólo depende de z , las únicas derivadas de \mathbf{V} distintas de cero son:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a - 2bz; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = c$$

y las únicas componentes del esfuerzo viscoso distintas de cero son:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu(a - 2bz) = [1.82E(-5) \text{ Pa s}](1.0 \text{ s}^{-1} - 2[0.1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}][1.0 \text{ m}]) \\ &= 1.456E(-5) \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu c = [1.82E(-5) \text{ Pa s}](2 \text{ s}^{-1}) = 3.64E(-5) \text{ Pa}$$

6.3 Fuerza viscosa

De igual forma que el esfuerzo de presión $(-p)\mathbf{n}$ da origen a una fuerza de presión por unidad de volumen igual a $-\nabla p$, el esfuerzo viscoso $\boldsymbol{\tau}$ dará origen a una fuerza viscosa por unidad de volumen, la cual se denota por \mathbf{f} . Si esta fuerza se divide entre la densidad ρ , entonces la razón \mathbf{f}/ρ es la fuerza viscosa por unidad de masa. Al sumar esto a la fuerza de presión por unidad de masa, $-\nabla p/\rho$, y a la fuerza de gravedad por unidad de masa, \mathbf{g} , se tendría la fuerza total que actúa sobre una unidad de masa de fluido viscoso. Si esto se iguala a la aceleración de una partícula de fluido, $D\mathbf{V}/Dt$, se obtendría una ecuación del movimiento para un fluido viscoso. En efecto, lo que se haría es añadir un término de más, \mathbf{f}/ρ , al lado derecho de la ecuación 4.5 de Euler a fin de tomar en cuenta

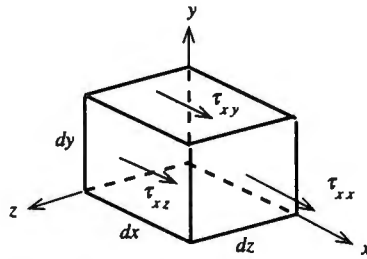


Figura 6.3 Al encontrar la componente x de la fuerza viscosa que actúa sobre un elemento de fluido con volumen $dx dy dz$, sólo se necesitan considerar los esfuerzos cortantes viscosos τ_{xy} y τ_{xz} que actúan sobre las superficies normales a y y z y el esfuerzo viscoso normal τ_{xx} que actúa sobre las superficies normales al eje x .

la fuerza viscosa que se despreció en la deducción de la ecuación de Euler. Esta nueva ecuación es la llamada ecuación de Navier-Stokes.

Para obtener una expresión para la fuerza viscosa por unidad de volumen, \mathbf{f} , considérese el elemento de fluido con volumen $dx dy dz$ de la figura 6.3. Por el momento, sólo tórnense en cuenta los esfuerzos viscosos que actúan en la dirección x , τ_{xx} , τ_{xy} y τ_{xz} . El esfuerzo viscoso normal τ_{xx} aumenta con la distancia x desde un valor τ_{xx} en una de las caras del elemento hasta un valor $\tau_{xx} + (\partial\tau_{xx}/\partial x) dx$ a $x + dx$. La diferencia neta entre estos esfuerzos, $(\partial\tau_{xx}/\partial x) dx$, actúa sobre un área $dy dz$ y contribuye con una cantidad $(\partial\tau_{xx}/\partial x) dx dy dz$ a la componente x de la fuerza que actúa en el elemento de fluido o con una cantidad $(\partial\tau_{xx}/\partial x)$ a la componente x de la fuerza por unidad de volumen, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{i}_x$. Se tendrán contribuciones semejantes de los esfuerzos τ_{xy} y τ_{xz} debido a sus aumentos en las direcciones y y z , respectivamente, lo que dará una componente x total de la fuerza viscosa por unidad de volumen:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{i}_x = \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \quad (6.7)$$

En el caso de un fluido incompresible, es posible sustituir en las ecuaciones 6.4 y 6.6 los esfuerzos viscosos τ_{xx} , τ_{xy} y τ_{xz} por sus valores:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right) \quad (6.8)$$

Es posible simplificar esta enorme expresión si se supone que μ es una constante en todo punto en el campo de flujo, por lo que puede sacarse de las derivadas parciales para obtener:⁵

⁵ En el caso de los flujos viscosos con transferencia de calor, la viscosidad μ puede variar de modo considerable debido a que es una función de la temperatura. La simplificación de μ constante puede no resultar apropiada en algunas aplicaciones en las que existe transferencia de calor. En esos casos, la variación de μ exige la adición de un término, $(\partial\mathbf{V}/\partial x + \nabla u) \cdot \nabla\mu$, al lado derecho de la ecuación 6.9.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} \cdot \mathbf{i}_x &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &= \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \\
 &= \mu \nabla^2 u
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde la condición de incompresibilidad elimina el término que incluye a $\nabla \cdot \mathbf{V}$. Puesto que la componente x de \mathbf{f} es $\mu \nabla^2 u$, las componentes y y z deben ser $\mu \nabla^2 v$ y $\mu \nabla^2 w$, respectivamente. Después de haber encontrado las tres componentes de \mathbf{f} , el término de la fuerza viscosa puede escribirse en forma vectorial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= (\mu \nabla^2 u) \mathbf{i}_x + (\mu \nabla^2 v) \mathbf{i}_y + (\mu \nabla^2 w) \mathbf{i}_z \\
 &= \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad \text{si } \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \quad \mu = \text{constante}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

6.4 La ecuación de movimiento de Navier-Stokes

Después de encontrar la fuerza viscosa por unidad de volumen, \mathbf{f} en la ecuación 6.10, ésta puede dividirse entre ρ para obtener la fuerza viscosa por unidad de masa y sumarla a las fuerzas de presión y de gravedad por unidad de masa de la ecuación 4.5 de Euler a fin de obtener la forma de la *ecuación de Navier-Stokes*⁶ para un fluido incompresible con viscosidad constante:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad \text{si } \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \quad \mu = \text{constante} \tag{6.11}$$

donde se ha sustituido μ/ρ por ν . Cuando la densidad del fluido es constante en todo el campo de flujo, resulta conveniente introducir la variable $p^* \equiv p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$, definida en la ecuación 4.7, de forma que el término correspondiente a la gravedad se combine implícitamente con el término de la presión, como en la ecuación 4.8:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad \text{si } \rho, \mu = \text{constante} \tag{6.12}$$

⁶ Esta ecuación fue desarrollada en forma independiente por Navier y Stokes. Claude-Louis-Marie-Henry Navier (1785-1836) hizo aportaciones a la ingeniería y a la mecánica, tanto de sólidos como de fluidos. Al formular las ecuaciones de Navier-Stokes, Navier no consideró el concepto de corte. George Gabriel Stokes (1842-1912) contribuyó mucho al estudio de los flujos viscosos, incluyendo la formulación completa de la ecuación Navier-Stokes y del flujo (de Stokes) de baja velocidad o fluencia. Este científico también analizó las ondas de agua y luminosas y contribuyó a la teoría de las ondas de sonido. La unidad de viscosidad cinemática en el sistema de unidades *cgs*, el *stoke* (véase la tabla 1.5), recibe ese nombre en honor a Stokes.

Las componentes x , y y z de la ecuación de Navier-Stokes, expresada en coordenadas cartesianas, son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (6.15)$$

Ejemplo 6.2

Para el flujo del ejemplo 6.1, calcule el valor de ∇p^* .

Solución

Al despejar ∇p^* de la ecuación 6.12 de Navier-Stokes:

$$\nabla p^* = -\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

Todas las componentes de $D\mathbf{V}/Dt$ son cero porque todas las derivadas de \mathbf{V} son cero, a excepción de $\partial V/\partial z$ que está multiplicada por $w = 0$. El único término de $\nabla^2 \mathbf{V}$ que es distinto de cero es el de la derivada respecto a z , de forma que:

$$\begin{aligned} \nabla p^* &= \mu \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \mu(2b \mathbf{i}_z) \\ &= [1.82\text{E}(-5) \text{ Pa s}](2)(0.1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}) \mathbf{i}_z = [3.64\text{E}(-6) \text{ Pa/m}] \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

En coordenadas cilíndricas, la forma de la ecuación de Navier-Stokes es más complicada porque no existen términos no diferenciales tanto en $D\mathbf{V}/Dt$ (véase la ecuación 4.4) como en $\nabla^2 \mathbf{V}$. Las componentes en las direcciones radial (\mathbf{i}_r), tangencial (\mathbf{i}_θ) y axial (\mathbf{i}_z) son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \quad (6.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_\theta V_r}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ejemplo 6.3

Un líquido viscoso fluye en el interior de un tubo recto muy largo con sección transversal circular. Las líneas de corriente del flujo son paralelas al eje del tubo, de forma tal que las componentes de la velocidad en las direcciones radial y tangencial son cero ($V_r, V_\theta = 0$). Puesto que el flujo tiene simetría axial, la componente axial de la velocidad, V_z , sólo depende de la coordenada radial r . Use coordenadas cilíndricas y escriba la forma simplificada de la ecuación de Navier-Stokes para este flujo.

Solución

Al eliminar todos los términos de las ecuaciones 6.16-6.18 que contienen V_r, V_θ o las derivadas de V_z respecto a z o θ , puesto que estos términos son todos cero, lo que queda es:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right]$$

Reacomodando:

$$\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$$

De las dos primeras ecuaciones puede concluirse que p^* no depende de r o θ y, por lo tanto, por lo mucho depende de z . Sin embargo, la tercera ecuación exige que $\partial p^*/\partial z$ sea, a lo sumo, una función sólo de r . La única forma de satisfacer estos requisitos es que $\partial p^*/\partial z$ sea constante, lo cual significa que el término de la tercera ecuación encerrado entre corchetes también sea constante. Más adelante, en la sección 6.5.4 referente al flujo circular de Poiseuille, se trata la solución a esta ecuación diferencial.

6.4.1 Condiciones iniciales y en la frontera

La ecuación de Navier-Stokes es una ecuación diferencial parcial con cuatro variables independientes (v.g., x, y, z, t) y cuatro variables dependientes (v.g., u, v, w, p^*).⁷ Junto con la ecuación de la conservación de la masa, ecuación 3.13, hay cuatro ecuaciones escalares (tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de la conservación de la masa) que pueden resolverse para las cuatro variables dependientes que no se conocen. Huelga decir que no existe una solución general para este enorme conjunto de ecuaciones.

Antes de poder resolver los problemas del flujo viscoso al integrar las ecuaciones del movimiento y la conservación de la masa, es preciso especificar las condiciones físicas que limitan o restringen al flujo en sus fronteras, conocidas como *condiciones en la frontera*, así como el estado del flujo en un tiempo inicial (si el flujo depende del tiempo) que se conoce como *condiciones iniciales*. En general, es posible reconocer estas condiciones a partir de la naturaleza del flujo.

En el lugar donde un fluido viscoso entra en contacto con una frontera sólida, no existe un movimiento relativo del fluido y el sólido, v.g., el fluido y el sólido en un punto de la frontera tiene la misma velocidad:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{sólido} \quad (6.19)$$

Con frecuencia a esto se le denomina condición *no deslizante*, lo cual significa que el fluido no se desliza sobre la superficie sólida del modo que lo haría con un sólido distinto. La explicación física de la condición no deslizante es que las moléculas del fluido que golpean la pared del sólido chocan de forma muy frecuente con las moléculas de dicha pared, por lo que aquéllas no tienen un movimiento promedio distinto del de las moléculas de la pared.⁸ La condición no deslizante en la frontera se aplica a las tres componentes de la velocidad \mathbf{V} del fluido en cualquier parte sobre la superficie de una frontera sólida.

⁷ Pues se supuso que ρ y μ son constantes al derivar la forma 6.12 de la ecuación de Navier-Stokes, éstas no son variables dependientes sino parámetros del flujo.

⁸ En flujos de gas a presiones extremadamente bajas, puede producirse deslizamiento entre el gas y la pared de un sólido cuando las moléculas de gas recorren, entre colisión y colisión, pequeñas distancias que no pueden despreciarse en comparación con la longitud de la pared.

En la interfaz entre dos fluidos inmiscibles, como aire y agua, el esfuerzo que actúa sobre uno de los fluidos (σ_a por ejemplo) es igual en magnitud, pero con dirección opuesta, al esfuerzo que actúa en el otro fluido (σ_b):⁹

$$\sigma_a = -\sigma_b$$

o

$$[(-p)\mathbf{n}]_a + \tau_a = -[(-p)\mathbf{n}]_b + \tau_b \quad (6.20)$$

donde se ha utilizado la ecuación 6.1 para descomponer el esfuerzo del fluido en un esfuerzo de presión $(-p)\mathbf{n}$ y en un esfuerzo viscoso τ . En el caso de un flujo no viscoso, el único esfuerzo del fluido es el de presión $(-p)\mathbf{n}$, un esfuerzo normal, y la ecuación 6.20 sólo exige que la presión en cada fluido sea la misma en la interfaz. Sin embargo, para flujos viscosos la suma de los esfuerzos de presión y viscosos debe equilibrarse en la interfaz del fluido. En casi todos los casos prácticos, el esfuerzo viscoso es tangencial a la interfaz, por lo que los esfuerzos de presión y viscosos son, por separado, iguales (pero opuestos) en la interfaz:

$$p_a = p_b; \quad \tau_a = -\tau_b \quad (6.21)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $\mathbf{n}_a = -\mathbf{n}_b$.

En el caso de flujos alrededor de cuerpos, las condiciones en la frontera en lugares alejados del cuerpo ($\mathbf{R} \rightarrow \infty$) son, por lo común, las que corresponden a un flujo uniforme, v.g., la presión p^* y la velocidad \mathbf{V} son constantes.¹⁰ Para estos flujos uniformes, el esfuerzo viscoso es cero y el flujo satisface la ecuación de Navier-Stokes y la conservación de la masa en puntos alejados del cuerpo.

Las condiciones iniciales para flujos no estacionarios corresponden, con frecuencia, a un fluido en reposo ($p^* = \text{constante}$ y $\mathbf{V} = 0$). En la sección 6.5.9 se considerará un flujo viscoso de esta índole.

6.5 Aplicaciones de la ecuación de Navier-Stokes

En esta sección, se consideran flujos viscosos laminares para los cuales el campo de velocidad depende sólo de una o dos dimensiones espaciales y el tiempo. Puesto que este análisis se restringe a sólo una o dos variables independientes y como las condiciones en la frontera son convenientemente simples, casi siempre es posible obtener soluciones analíticas para los campos de velocidad y de presión. A pesar de esta simplicidad, estos flujos son útiles desde el punto de vista práctico, pues exhiben los efectos físicos de la viscosidad presentes en flujos semejantes pero más complicados. En algunos casos, estos flujos se aplican directamente a problemas de ingeniería.

⁹ Esto supone que los efectos de la tensión interfacial son despreciables.

¹⁰ A éstas se les denota, en general, por p^* y \mathbf{V}_∞ .

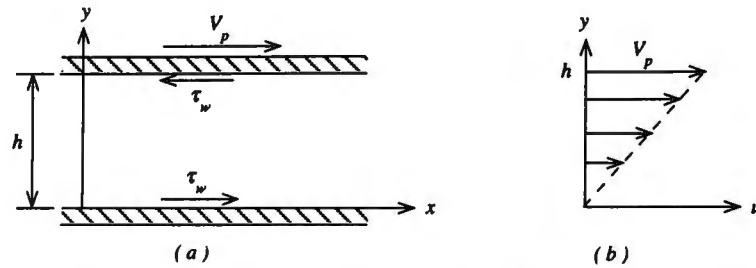


Figura 6.4 Arriba, (a) ejemplifica un flujo plano de Couette correspondiente a un flujo viscoso entre dos placas paralelas separadas por una distancia h . La placa superior se mueve con una velocidad $\mathbf{V} = V_p \mathbf{i}_x$, en tanto que la inferior permanece fija. En las placas superior e inferior actúa un esfuerzo cortante τ_w . En (b), la variación en la velocidad u del fluido se ve como función de y .

6.5.1 Flujo plano de Couette

El flujo viscoso estacionario entre dos placas paralelas, una de las cuales se mueve paralela a la otra a una distancia fija de separación, se conoce como *flujo plano de Couette*.¹¹ La figura 6.4(a) ilustra el flujo de un fluido entre dos placas paralelas separadas una distancia h ; la placa inferior permanece estacionaria y la placa superior se desplaza con una velocidad constante $\mathbf{V} = V_p \mathbf{i}_x$ en la dirección x . El fluido se extiende al infinito en las direcciones x y y , en tanto que el único cambio de velocidad ocurre en la dirección y . El fluido se desplaza sólo en la dirección x con una velocidad $\mathbf{V} = u(y) \mathbf{i}_x$ que sólo depende de y , y el fluido no sufre cambio de presión:

$$\mathbf{V} = u(y) \mathbf{i}_x; \quad p^* = \text{constante} \quad (6.22)$$

A lo largo de una línea de corriente del flujo, que en la figura 6.4(a) se representa mediante una línea horizontal, no hay cambio en \mathbf{V} , por lo que la derivada material $D\mathbf{V}/Dt = 0$. También, $\nabla p^* = 0$. Al sustituir estas relaciones en la ecuación 6.12 de Navier-Stokes y al notar que sólo las derivadas con respecto a y son distintas de cero,

$$0 = 0 + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

¹¹ M. Maurice Couette (1858-1943) inventó un viscosímetro que medía el esfuerzo de la pared en lo que ahora se conoce como flujo de Couette.

Ésta es una ecuación diferencial total porque u depende sólo de y . Al integrar dos veces sobre y :

$$u = c_1 y + c_2$$

Es posible determinar las constantes de integración (c_1 , c_2) al aplicar las condiciones en la frontera de la ecuación 6.19: la velocidad $u(0) = 0$ en la placa fija ($y = 0$) y $u(h) = V_p$ en la placa en movimiento ($y = h$), con lo que se obtiene:

$$u = V_p \left(\frac{y}{h} \right) \quad (6.23)$$

Esta variación de la velocidad, la cual es lineal con la distancia vertical y , se grafica en la figura 6.4(b) con u como abscisa y y como ordenada; esta gráfica de $u(y)$ se conoce como *perfil de velocidad*.¹²

El esfuerzo cortante τ_w que actúa en la placa superior, como lo ejemplifica la figura 6.4(a), es igual y opuesto al esfuerzo cortante $\tau_{xy} \mathbf{i}_x$ que actúa en el fluido en $y = h$:

$$\tau_w = -\tau_{xy} \mathbf{i}_x = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} \mathbf{i}_x = -\mu \left(\frac{V_p}{h} \right) \mathbf{i}_x \quad (6.24)$$

En la placa inferior actúa un esfuerzo cortante igual pero con dirección opuesta. Adviértase que el esfuerzo cortante $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ es constante en el campo de flujo puesto que $\partial u / \partial y = V_p / h = \text{constante}$.

El gasto volumétrico del fluido en la dirección x que la placa en movimiento induce tiene un interés práctico. Si a este gasto se le denota mediante Q y W es la anchura del canal en la dirección z (normal al plano de la figura 6.4[a]), el gasto volumétrico que se calcula al integrar u sobre el área Wh del flujo:

$$Q = \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = W \int_0^h u \, dy = \frac{WV_p}{h} \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{2} WV_p h$$

$$\frac{Q}{W} = \frac{1}{2} V_p h \quad (6.25)$$

Con frecuencia, es importante determinar la velocidad promediada del gasto volumétrico, representada por \bar{V} :

$$\bar{V} \equiv \frac{Q}{Wh} = \frac{1}{2} V_p \quad (6.26)$$

¹² Adviértase que el campo de velocidad satisface la ley de la conservación de la masa para un fluido compresible, $\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$.

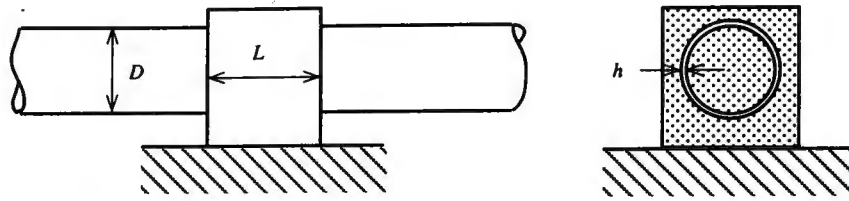


Figura E 6.4

Ejemplo 6.4

Una chumacera sirve de apoyo a un eje circular con diámetro $D = 10 \text{ cm}$ y que gira a 3600 revoluciones por minuto. La longitud de la chumacera es $L = 10 \text{ cm}$. La holgura entre el eje y la chumacera, $h = 0.1 \text{ mm}$, está llena de un lubricante con viscosidad $\mu = 6.7E(-5) \text{ Pa s}$. Calcule el momento de torsión T que se aplica al eje para vencer la fricción en la chumacera, así como la potencia P que se disipa en la chumacera a causa de la fricción.

Solución

El flujo de aceite lubricante que tiene lugar en la holgura de la chumacera es, en forma muy aproximada, un flujo plano de Couette puesto que la anchura de la holgura h es mucho menor que el radio de curvatura $D/2$ de la superficie del eje. Si se utiliza la ecuación 6.24, el esfuerzo cortante τ_w que se ejerce en la superficie del eje es:

$$\tau_w = \mu \frac{V_p}{h} = \mu \frac{\Omega D}{2h}$$

donde Ω es la velocidad angular del eje. El momento de torsión T es el producto del esfuerzo cortante τ_w multiplicado por el radio $D/2$ por el área πDL de superficie de la chumacera:

$$\begin{aligned} T &= \tau_w \frac{D}{2} (\pi DL) = \frac{\pi \mu \Omega L D^3}{4h} \\ &= \frac{\pi (6.7E(-5) \text{ Pa s}) (2\pi \times 60 \text{ s}^{-1}) (0.1 \text{ m}) (0.1 \text{ m})^3}{4 \times 1.0E(-4) \text{ m}} = 1.984E(-2) \text{ Nm} \end{aligned}$$

La potencia P que se disipa es el producto del momento de torsión T multiplicado por la velocidad angular Ω :

$$P = T\Omega = 1.984E(-2) \text{ Nm} \times (2\pi \times 60 \text{ s}^{-1}) = 7.479 \text{ W}$$

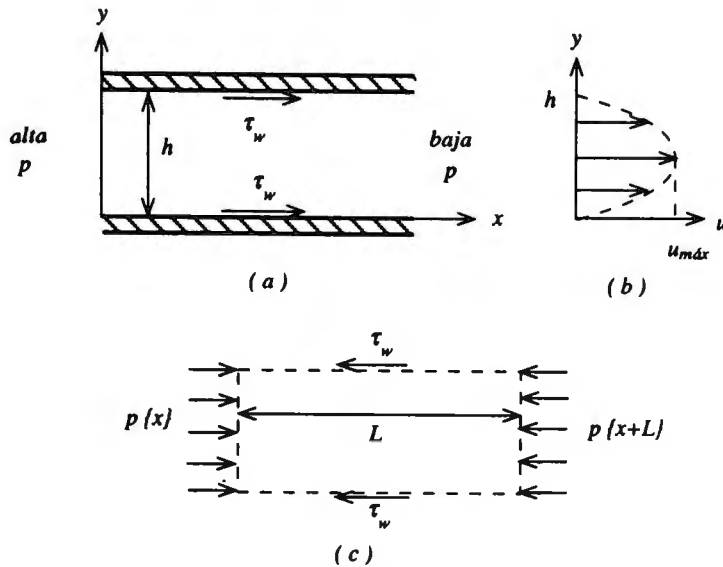


Figura 6.5 Arriba, (a) ilustra que en el flujo plano de Poiseuille entre las dos paredes paralelas, el fluido fluye desde una región de alta presión a una de baja presión y se ejerce un esfuerzo cortante sobre las paredes en la dirección del flujo. En (b), el perfil de velocidades es parabólico, y en (c) el esfuerzo cortante que actúa sobre el fluido en un volumen de control se encuentra compensado por el gradiente de presión.

6.5.2 Flujo plano de Poiseuille

El flujo viscoso laminar estacionario en un canal o tubo que parte de una región con presión mayor a una de presión menor se conoce como *flujo de Poiseuille*.¹³ El flujo entre placas paralelas separadas una distancia fija h , como se ilustra en la figura 6.5(a), se conoce como *flujo plano de Poiseuille*. Si se supone que la región de mayor presión está a la izquierda y la de menor presión a la derecha, el gradiente de presión $\partial p^*/\partial x$ sería negativo cuando la velocidad del fluido se dirija hacia la derecha, v.g., el fluido se mueve de una región de mayor presión ($-x$) a una de menor presión ($+x$). Al igual que el flujo plano de Couette, la velocidad \mathbf{V} se encuentra en la dirección de x y es función sólo de y , pero el gradiente de presión, que también se encuentra en la dirección x , no es cero sino constante:

$$\mathbf{V} = u(y) \mathbf{i}_x; \quad \nabla p^* = \frac{\partial p^*}{\partial x} \mathbf{i}_x = \text{constante}$$

¹³ Jean Marie Louis Poiseuille (1799-1869) fue un físico francés que estudió el flujo sanguíneo en los vasos capilares. La unidad de viscosidad en el sistema de unidades *cgs*, que se conoce como *poise* (véase la tabla 1.5), recibe ese nombre en honor de Poiseuille.

Si se sustituye esta forma de los campos de velocidad y presión en la ecuación 6.12 de Navier-Stokes y si se multiplica por ρ , se encuentra que:

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp^*}{dx}$$

donde se han utilizado las derivadas totales para indicar que u y p^* sólo depende de y y x , respectivamente. Al integrar dos veces sobre y ,

$$\mu u = \left(\frac{dp^*}{dx} \right) \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

Al aplicar las condiciones en la frontera según las cuales la velocidad en la pared es cero, ($u\{0\} = 0$; $u\{h\} = 0$), es posible determinar las constantes (c_1 , c_2) de integración y así se encuentra que la velocidad $u\{y\}$ es:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) y(h-y) \quad (6.27)$$

lo cual se grafica en la figura 6.5(b).¹⁴ (Se conserva el signo negativo dentro del paréntesis que encierra al término dp^*/dx como recordatorio de que la velocidad del fluido es positiva cuando dp^*/dx es negativa.) La distribución de velocidades de la figura 6.5(b) es parabólica en y , en tanto que la velocidad máxima $u_{m\max}$ se presenta en el centro del canal ($y = h/2$):

$$u_{m\max} = \frac{h^2}{8\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \quad (6.28)$$

Se encuentra el gasto volumétrico Q a través de la sección transversal del canal con área Wh al integrar la ecuación 6.27:

$$Q = W \int_0^h u \, dy = \frac{W}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \int_0^h y(h-y) \, dy = \frac{W}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \left[\frac{y^2 h}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$\frac{Q}{W} = \frac{h^3}{12\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \quad (6.29)$$

La velocidad media \bar{V} del flujo es:

$$\bar{V} = \frac{Q}{Wh} = \frac{h^2}{12\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) = \frac{2}{3} u_{m\max} \quad (6.30)$$

El esfuerzo cortante τ_w que actúa sobre la pared inferior (y la pared superior también) puede encontrarse al evaluar el gradiente de velocidad $\partial u/\partial y$ en la pared ($y = 0$):

¹⁴ Esta distribución de velocidades satisface la conservación de la masa incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \mathbf{i}_x = \mu \frac{h}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \mathbf{i}_x = \frac{h}{2} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \mathbf{i}_x \quad (6.31)$$

Adviértase que el esfuerzo cortante τ_w en la pared no depende explícitamente de la viscosidad del fluido (ecuación 6.31), sino que, en contraste con el flujo plano de Couette, la velocidad del fluido sí (ecuación 6.27). En el flujo plano de Poiseuille, la velocidad del flujo se ajusta hasta que el esfuerzo cortante de la pared alcance un valor que equilibre el gradiente de presión impuesto, como en la ecuación 6.31.

La relación 6.31 entre el esfuerzo cortante de la pared y el gradiente de presión expresa el equilibrio de fuerzas en un volumen de control que encierra al fluido dentro del canal, como se ejemplifica en la figura 6.5(c). Si se supone que la longitud de este volumen es L y si se aplica el teorema de la cantidad de movimiento lineal, ecuación 5.11, donde se observa que $(\dot{m}\mathbf{V})_{sal} = (\dot{m}\mathbf{V})_{ent}$ y $\mathbf{F}_e = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV + (\dot{m}\mathbf{V})_{sal} - (\dot{m}\mathbf{V})_{ent} \\ = \iint_S (-p\mathbf{n}) dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \Sigma \mathbf{F}_e \end{aligned}$$

$$0 = Wh [p^* \{x\} - p^* \{x+L\}] \mathbf{i}_x - 2(\tau_w \mathbf{i}_x)LW$$

$$\tau_w = \frac{h}{2L} [p^* \{x\} - p^* \{x+L\}] = \frac{h}{2} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right)$$

donde los términos correspondientes a la presión y la gravedad de la ecuación 5.11 se combinaron utilizando p^* en lugar de p .

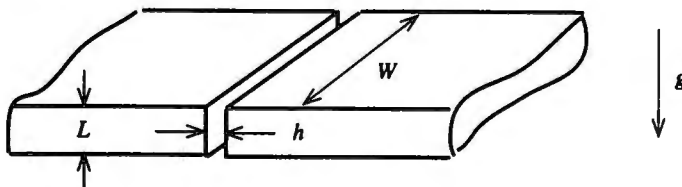


Figura E6.5

Ejemplo 6.5

El techo plano de un edificio se construye de bloques de hormigón prefabricado con una anchura $W = 1.0 \text{ m}$ y profundidad $L = 0.1 \text{ m}$, como se aprecia en la figura E 6.5. Por omisión, no se selló una de las uniones entre dos placas, lo que dejó una hendidura con

una anchura $h = 1.0 \text{ mm}$. Cuando llueve, la hendidura se llena de agua y permite su paso hacia el interior del edificio. Determine el gasto volumétrico del agua pluvial que pasa a través de la hendidura si se supone que se trata de un flujo (plano de Poiseuille) viscoso laminar con $\mu = 1.13E(-3) \text{ Pa s}$.

Solución

El gasto volumétrico a través de la hendidura es el de la ecuación 6.29:

$$Q = \frac{h^3 W}{12\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right)$$

Si se mide x verticalmente hacia abajo desde la superficie superior, p^* es:

$$p^* = p - \rho g \cdot \mathbf{R} = p - \rho(g \mathbf{i}_x) \cdot (x \mathbf{i}_x) = p - \rho g x$$

y, si se supone que la presión es la atmosférica por arriba y por debajo del techo, $-dp^*/dx$ se transforma en:

$$-\frac{dp^*}{dx} = -\frac{(p_a - \rho g L) - p_a}{L} = \rho g$$

En consecuencia, el gasto volumétrico Q es:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\rho g h^3 W}{12\mu} \\ &= \frac{(1.0E(3) \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)(1.0E(-3) \text{ m})^3(1.0 \text{ m})}{12 \times 1.13E(-3) \text{ Pa s}} = 7.232E(-4) \text{ m}^3/\text{s} \\ &= 0.7232 \text{ l/s} \end{aligned}$$

Flujo hacia abajo por un plano inclinado

En algunas aplicaciones, un líquido viscoso puede fluir cuando está en contacto sólo con una superficie sólida y el movimiento del fluido lo produce una componente de la fuerza de gravedad paralela a la superficie sólida. Este tipo de flujo plano de Poiseuille se ejemplifica en la figura 6.6(a), donde se aprecia una superficie plana inclinada y que forma un ángulo ϕ por encima de la horizontal. La superficie está cubierta por una capa líquida con espesor constante h que fluye paralela a la placa pendiente abajo. La superficie superior del fluido ($y = h$) está en contacto con el aire, el cual tiene una presión constante ($p = p_a$ en $y = h$) y ejerce un esfuerzo cortante despreciable sobre la superficie líquida ($\tau_{xy} = 0$ en $y = h$).

Para describir este movimiento, selecciónese la componente x de la ecuación 6.11 de Navier-Stokes, considerando que $DV/Dt = 0$, $\partial p/\partial x = 0$ puesto que la presión del aire es constante y la componente x de g es $g \sin \phi$:

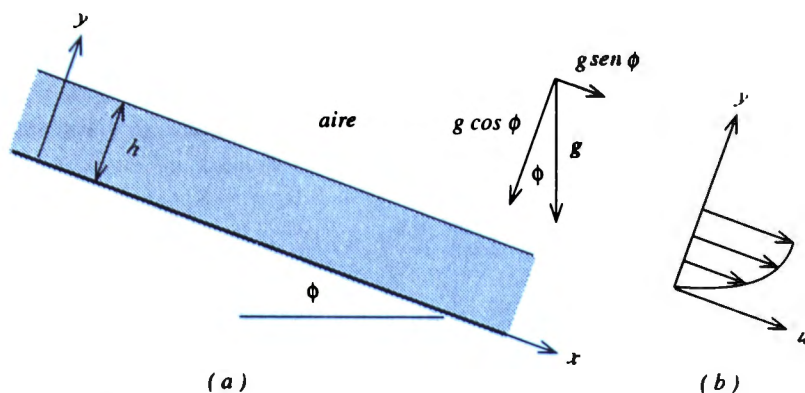


Figura 6.6 En el flujo de un líquido viscoso en contacto con aire en un plano inclinado, la componente de la gravedad en la dirección de la superficie del plano es la que ocasiona el flujo paralelo al plano.

$$0 = 0 + g \operatorname{sen} \phi + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g \operatorname{sen} \phi}{\nu}$$

Al integrar dos veces sobre y :

$$u = -\frac{g (\operatorname{sen} \phi) y^2}{2\nu} + c_1 y + c_2$$

y al aplicar las condiciones en la frontera $u = 0$ en $y = 0$ y $\tau_{xy} = \mu du/dy = 0$ en $y = h$ es posible encontrar la distribución de velocidades $u(y)$:

$$u = \frac{g \operatorname{sen} \phi}{\nu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (6.32)$$

Este perfil de velocidades, que se esquematiza en la figura 6.6(b), es parabólico con un valor máximo $u_{m\acute{a}x}$ en la superficie superior ($y = h$):

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{gh^2 \operatorname{sen} \phi}{2\nu} \quad (6.33)$$

El gasto volumétrico por unidad de distancia normal al plano del flujo, Q/W , se encuentra al integrar la ecuación 6.32 sobre y :

$$\frac{Q}{W} = \int_0^h u \, dy = \frac{g \operatorname{sen} \phi}{\nu} \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^h = \frac{gh^3 \operatorname{sen} \phi}{3\nu} \quad (6.34)$$

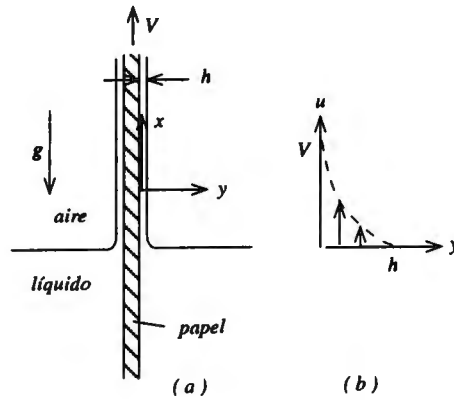


Figura E 6.6

Ejemplo 6.6

Un proceso de recubrimiento de papel comprende el paso de una hoja continua de papel que se desplaza hacia arriba por la superficie de un depósito que contiene líquido para recubrir a una velocidad $V = 0.1 \text{ m/s}$. Al papel se adhiere una película de este líquido con un espesor constante h , como se presenta en la figura E 6.6(a). La velocidad $u(h)$ del líquido en el borde externo de la capa de líquido ($y = h$) es cero (véase la figura E 6.6(b)). Calcule el espesor h de la película si la viscosidad cinemática del líquido es $\nu = 1.0E(-6) \text{ m}^2/\text{s}$.

Solución

Si se toma el eje x vertical hacia arriba y g hacia abajo, la ecuación 6.11 de Navier-Stokes en la dirección vertical es:

$$0 = -g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{g}{\nu}$$

Luego de integrar dos veces se obtiene:

$$u = \frac{gy^2}{2\nu} + c_1 y + c_2$$

Si se aplica la condición en la frontera $du/dy = 0$ en $y = h$,

$$0 = \frac{gh}{\nu} + c_1$$

$$u = \frac{g}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) + c_2$$

Pero $u = V$ en $y = 0$ por lo que $c_2 = V$ y:

$$u = \frac{g}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) + V$$

Si $u = 0$ en $y = h$ entonces:

$$0 = -\frac{gh^2}{2\nu} + V$$

$$h = \sqrt{\frac{2\nu V}{g}} = \sqrt{\frac{2(1.0E(-6) \text{ m}^2/\text{s})(0.1 \text{ m/s})}{9.807 \text{ m/s}^2}} = 1.428E(-4) \text{ m}$$

6.5.3 Flujo plano combinado de Couette y Poiseuille

Puesto que la forma de la ecuación de Navier-Stokes para el flujo de Couette y el flujo de Poiseuille es *lineal*, v.g., ésta contiene el término $u \{y\}$ elevado a la primera potencia, es posible sumar estas dos soluciones, ecuaciones 6.23 y 6.27, para encontrar un flujo que satisfaga las condiciones en la frontera del flujo de Couette pero que posea un gradiente de presión:

$$u = V_p \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) y(h-y) \quad (6.35)$$

En la figura 6.7 se esquematiza un flujo combinado de Couette y Poiseuille que es la suma de los flujos de las figura 6.4 y 6.5, el último de los cuales es un caso en el que la presión

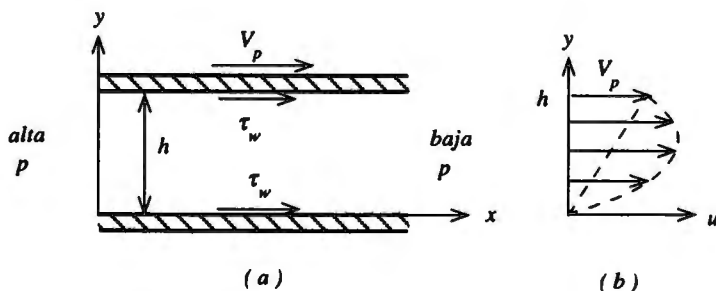


Figura 6.7 Arriba, (a) ilustra la combinación lineal de flujos planos de Couette y Poiseuille entre dos placas paralelas que tienen un movimiento relativo; (b) el gradiente de presión aplicado da como resultado un perfil de velocidades que es la suma de dos flujos.

cae (gradiente negativo de presión).¹⁵ El gasto volumétrico Q es, simplemente, la suma de los gastos correspondientes a los flujos respectivos (ecuaciones 6.25 y 6.29):

$$\frac{Q}{W} = \frac{V_p h}{2} + \frac{h^3}{12\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \quad (6.36)$$

De la misma forma, se puede encontrar una expresión para el esfuerzo cortante τ_w sobre la pared superior (en movimiento) si se suman las ecuaciones 6.24 y 6.31:

$$\tau_w = -\mu \left(\frac{V_p}{h} \right) \mathbf{i}_x + \frac{h}{2} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \mathbf{i}_x \quad (6.37)$$

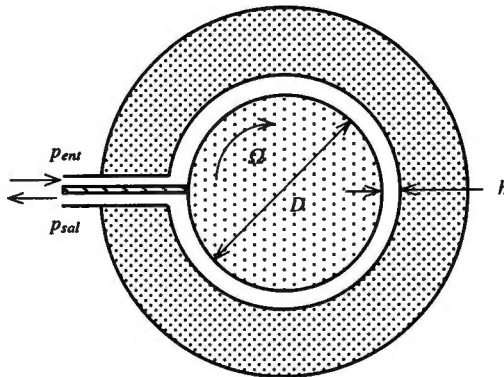


Figura E 6.7

Ejemplo 6.7

Una bomba de fricción consta de un cilindro sólido con diámetro D y longitud W que gira en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular Ω dentro de un cilindro hueco coaxial con diámetro interior $D + 2h$, como se ilustra en la figura E 6.7. El flujo del fluido que entra en la bomba es obligado a circular en el sentido de las manecillas del reloj a través de un círculo completo por la fricción con la superficie interior del cilindro en movimiento. Los conductos del flujo de entrada y del flujo de salida de la bomba se encuentran separados mediante un diafragma que impide fugas de la parte de mayor presión p_{sal} del flujo de salida a la parte de menor presión p_{ent} del flujo de entrada, al mismo tiempo que se mantiene la diferencia de presión $\Delta p \equiv p_{sal} - p_{ent}$ mediante el flujo a través de la bomba en la dirección de las manecillas del reloj.

¹⁵ Si el gradiente de presión fuera positivo, la velocidad $u(y)$ sería menor que el valor de sólo el flujo de Couette, en lugar de ser mayor que ese valor, según el esquema de la figura 6.7(b).

Obtenga expresiones para (a) el gasto volumétrico Q a través de la bomba y (b) el momento de torsión T que debe aplicarse al rotor para una operación estacionaria como funciones del aumento de presión, Δp . (c) Si la potencia P_{sal} producida por el fluido bombeado es $Q\Delta p$ calcule una expresión para el valor Δp que haga máxima la potencia P_{sal} y encuentre el valor numérico de la eficiencia de la bomba $\eta_p \equiv P_{sal}/P_{ent}$ para este valor de Δp , donde la potencia de entrada es $P_{ent} = \Omega T$.

Solución

(a) El flujo de la bomba es un flujo combinado de Couette y Poiseuille en el cual la velocidad V_p de la pared y el gradiente de presión dp^*/dx son:

$$V_p = \frac{\Omega D}{2}; \quad \frac{dp^*}{dx} = \frac{P_{sal} - P_{ent}}{\pi D} = \frac{\Delta p}{\pi D}$$

Al insertar estos valores en la ecuación 6.36 para el gasto volumétrico Q ,

$$Q = W \left[\frac{\Omega D h}{4} + \frac{h^3}{12\mu} \left(-\frac{\Delta p}{\pi D} \right) \right] = \frac{W\Omega D h}{4} \left(1 - \frac{h^2 \Delta p}{3\pi\mu\Omega D^2} \right)$$

(b) Si τ_w es la magnitud del esfuerzo cortante que actúa sobre la pared del cilindro rotatorio y que se opone a su movimiento, entonces el momento de torsión T que debe aplicarse al cilindro en la dirección en que giran las manecillas del reloj es:

$$T = \tau_w \frac{D}{2} (\pi D W) = \frac{\pi D^2 W}{2} \left(\frac{\mu\Omega D}{2h} + \frac{h\Delta p}{2\pi D} \right) = \frac{\pi\mu W\Omega D^3}{4h} \left(1 + \frac{h^2 \Delta p}{\pi\mu\Omega D^2} \right)$$

donde se ha utilizado la ecuación 6.37 para evaluar τ_w .

(c) La potencia P_{sal} es:

$$P_{sal} = Q\Delta p = \frac{W\Omega D h}{4} \left(1 - \frac{h^2 \Delta p}{3\pi\mu\Omega D^2} \right) \Delta p$$

Para hacer máxima la potencia P_{sal} , se deriva respecto a Δp y se iguala a 0:

$$1 - \frac{2h^2 \Delta p}{3\pi\mu\Omega D^2} = 0; \quad \Delta p = \frac{3\pi\mu\Omega D^2}{2h^2}$$

lo cual da como resultado una P_{sal} máxima igual a:

$$\text{máxima } P_{sal} = \frac{W\Omega D h}{4} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{3\pi\mu\Omega D^2}{2h^2} \right) = \frac{3\pi\mu W\Omega^2 D^3}{16h}$$

El valor correspondiente de P_{ent} es:

$$P_{ent} = \Omega T = \frac{\pi\mu W\Omega^2 D^3}{4h} \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{5\pi\mu W\Omega^2 D^3}{8h}$$

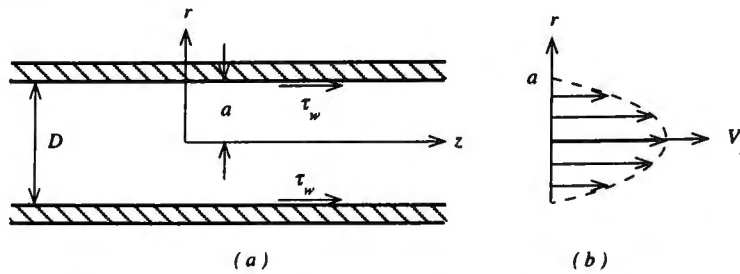


Figura 6.8 Arriba, (a) se representa un flujo de Poiseuille con simetría axial en un tubo circular donde se emplean coordenadas cilíndricas y (b) ilustra el perfil axial de velocidades, que es parabólico.

La razón de estas dos potencias es la eficiencia de la bomba η_p :

$$\eta_p = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} = \frac{3\pi}{16} \times \frac{8}{5\pi} = 30\%$$

6.5.4 Flujo circular de Poiseuille

El flujo laminar por un tubo circular es de gran interés práctico debido a que la sección transversal circular es la forma más común de los tubos o tuberías. De hecho, fueron las investigaciones del flujo sanguíneo en los vasos capilares de animales las que por primera vez pusieron de manifiesto la relación entre el gasto volumétrico y el cambio de presión en tubos de sección transversal circular. En mamíferos, tanto el flujo sanguíneo en los vasos capilares y en las venas, como el flujo de aire en los alveolos pulmonares ejemplifican el flujo circular de Poiseuille. Otros ejemplos comunes son los relativos al flujo que se presenta en una paja para tomar bebidas o el que pasa por la aguja de una jeringa.

Gracias a la simetría circular del contenedor, el flujo circular de Poiseuille es un flujo con simetría axial cuya descripción resulta mejor si se utilizan coordenadas cilíndricas, como se ilustra en la figura 6.8(a). En el ejemplo 6.3, se encontró que la ecuación de Navier-Stokes para este flujo se simplifica y adquiere la forma:

$$\frac{d^2 V_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dz} \left(r \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz} \quad (6.38)$$

donde se han utilizado derivadas totales puesto que V_z es función sólo de la distancia radial r y p^* es función sólo de la distancia axial z . Al multiplicar 6.38 por r e integrar una vez,

$$r \frac{dV_z}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{dp^*}{dz} + c_1 \quad (6.39)$$

El esfuerzo cortante en la línea central del tubo, $r = 0$, debe ser cero en virtud de la simetría axial y, así, $dV_z/dr = 0$ para $r = 0$, de donde se requiere que $c_1 = 0$. Al dividir 6.39 (con $c_1 = 0$) entre r e integrando,

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dz} + c_2$$

Al escoger $c_2 = -a^2(dp^*/dz)(4\mu)$, la velocidad V_z en la pared del tubo, $r = a$, se convierte en cero, como debe suceder en una pared fija, y la distribución de velocidades para un flujo circular de Poiseuille es:

$$V_z = \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) \quad (6.40)$$

donde se incluye el signo menos que multiplica a dp^*/dz ya que éste es negativo en el caso de una V_z positiva, v.g., para un flujo en la dirección z .¹⁶ Esta distribución parabólica de velocidades se ilustra en la figura 6.8(b).

Puede encontrarse el gasto volumétrico Q si se integra la velocidad axial V_z en toda la sección transversal del tubo:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a V_z(2\pi r) dr = \frac{\pi}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) \int_0^a r(a^2 - r^2) dr = \frac{\pi}{2\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) \left[\frac{r^2 a^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

El gasto volumétrico por un tubo circular es muy sensible al diámetro D del tubo pues dicho gasto varía en proporción directa a la cuarta potencia del diámetro. En el caso de una diferencia de presión fija a lo ancho de una arteria coronaria, por ejemplo, una reducción del área del flujo $\pi D^2/4$ en un factor de dos disminuiría el gasto volumétrico sanguíneo en un factor de cuatro.

La velocidad promedio del flujo \bar{V} se obtiene al dividir el gasto volumétrico Q entre el área del tubo $\pi D^2/4$:

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{D^2}{32\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) \quad (6.42)$$

Una expresión para el esfuerzo cortante τ_w de la pared puede obtenerse si se aplica el teorema de la cantidad de movimiento a una muestra cilíndrica del fluido dentro del tubo circular que tiene una longitud L y un diámetro D . La diferencia de presión $(-dp^*/dz)L$ que actúa sobre el cilindro produce una fuerza $(-dp^*/dz)L(\pi D^2/4)$ en la dirección z que debe quedar equilibrada por la fuerza $\tau_w(\pi DL)$ del esfuerzo cortante que actúa en dirección opuesta:

$$\tau_w(\pi DL) = \frac{\pi D^2 L}{4} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right)$$

¹⁶ Adviértase que esto satisface la ecuación 3.15 para la conservación de la masa incompresible.

$$\tau_w = \frac{D}{4} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right) = 8\mu \left(\frac{\bar{V}}{D} \right) \quad (6.43)$$

donde se encuentra el último término aplicando la ecuación 6.42.

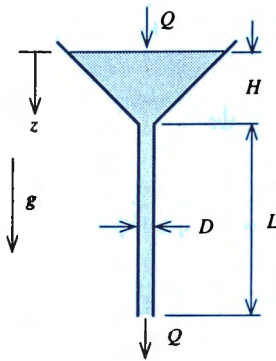


Figura E 6.8

Ejemplo 6.8

Se pretende medir la viscosidad cinemática de una mezcla de aceites residuales con un embudo de laboratorio. Se vacía el aceite en el embudo con un gasto estacionario Q , como se ejemplifica en la figura E 6.8, y se conserva el nivel de aceite en el embudo a una distancia $H = 3 \text{ cm}$ por encima de la entrada al tubo que tiene una longitud $L = 30 \text{ cm}$ y un diámetro $D = 3 \text{ mm}$. Se mide el tiempo que se requiere para que los 100 cm^3 pasen por el embudo y se encuentra que es de 152 s . Calcule la viscosidad cinemática ν de la mezcla de aceite.

Solución

Resolviendo la ecuación 6.41 para $\nu = \mu/\rho$:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\pi D^4}{128 Q \rho} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right)$$

Si se supone que el flujo en la parte superior del embudo no es viscoso, el valor p^* en la entrada al tubo del embudo es el mismo que en la superficie del líquido, v.g., p_a . En la salida del embudo, $p^* = p_a - \rho g(H + L)$. Por lo tanto, el gradiente de presión es:

$$\frac{dp^*}{dz} = \frac{(p_a - \rho g(H + L)) - p_a}{L} = -\rho g \left(1 + \frac{H}{L} \right)$$

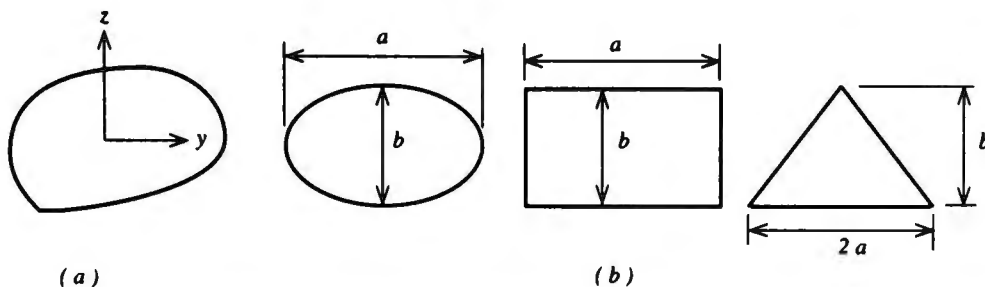


Figura 6.9 Arriba, (a) se ilustra un tubo de sección transversal arbitraria, para el cual es posible resolver la ecuación de Navier-Stokes para un flujo de Poiseuille, y (b) ilustra las dimensiones de tubos de forma elíptica, rectangular y triangular (isósceles) para los cuales es posible encontrar analíticamente el factor de fricción de Darcy f y el diámetro hidráulico D_h .

Al sustituir en la ecuación para ν :

$$\nu = \frac{\pi D^4 g}{128 Q} \left(1 + \frac{H}{L} \right)$$

$$= \frac{\pi (3.0E(-3) \text{ m})^4 (9.807 \text{ m/s}^2)}{128 (1.0E(-3) \text{ m}^3 + 152 \text{ s})} \left(1 + \frac{3}{30} \right) = 2.68E(-4) \text{ m}^2/\text{s}$$

(Si la longitud L del embudo se duplicara en este experimento, el gasto volumétrico Q disminuiría sólo ligeramente, en proporción a $1 + H/L$).

6.5.5 Flujo de Poiseuille en tubos no circulares

Aunque un tubo circular es la forma más común, en los sistemas de la ingeniería pueden utilizarse otras formas de tubos, como los ductos rectangulares para ventilación. Es posible describir las propiedades del flujo de Poiseuille en ese tipo de tubos, al resolver la ecuación de Navier-Stokes con condiciones en la frontera apropiadas para la forma particular del tubo.

Utilizando coordenadas cartesianas con el flujo en dirección del eje x , la ecuación de Navier-Stokes para un flujo en un conducto de sección transversal arbitraria, como se ejemplifica en la figura 6.9(a) es:

$$0 = -\frac{dp^*}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.44)$$

Esta ecuación diferencial parcial es una forma de la *ecuación de Poisson* y puede resolverse analíticamente para algunas formas simples, como es el caso de una elipse, un rectángulo y un triángulo isósceles (véase la figura 6.9(b)), o numéricamente para cualquier forma arbitraria con la condición en la frontera de que $u = 0$ en la pared del tubo. La solución a esta ecuación, $u(y, z)$, puede utilizarse así para determinar la

velocidad media \bar{V} del flujo al integrar u sobre toda la sección transversal del tubo. Es posible expresar este valor de \bar{V} en forma aproximada si se evalúa la magnitud de los términos de la ecuación 6.44:

$$0 = -\frac{dp^*}{dx} + \mu \frac{\bar{V}}{\ell^2}$$

$$\bar{V} \sim \frac{\ell^2}{\mu} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \quad (6.45)$$

donde ℓ es una dimensión característica de la forma del tubo que da más peso a la dimensión b menor que a la dimensión a mayor de la figura 6.9(b). Para un flujo circular de Poiseuille, se tiene la relación exacta de la ecuación 6.42, en la cual la dimensión característica es el diámetro D y la constante de proporcionalidad es 32. Para otras formas, la dimensión característica se elige que sea el *diámetro hidráulico* D_h , que se define como:

$$D_h \equiv \frac{4 \times \text{Área}}{\text{Perímetro}} \quad (6.46)$$

Para un tubo circular, el diámetro hidráulico es $D_h = 4(\pi D^2/4)/2\pi D = D$, el diámetro del tubo, en tanto que $D_h = 2h$ para un flujo plano de Poiseuille.

Factor de fricción de Darcy

La relación lineal 6.45 entre la velocidad media del flujo y el gradiente de presión se expresa de modo convencional en forma adimensional al definir el *factor f de fricción de Darcy* como:

$$f \equiv \frac{(-dp^*/dx) D_h}{\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2} \quad (6.47)$$

donde tanto el numerador como el denominador del lado derecho de la ecuación 6.47 tiene dimensiones de presión. Adviértase que si se conoce el valor f , es relativamente sencillo encontrar la caída de presión Δp^* en un tubo de longitud L al invertir la ecuación 6.47:¹⁷

$$\Delta p^* = \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) L = f \left(\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 \right) \frac{L}{D_h} \quad (6.48)$$

En el caso de un tubo circular, el factor de fricción de Darcy f puede encontrarse al sustituir la ecuación 6.42 en la 6.47, de lo que resulta que:

¹⁷ La ecuación 6.48 se conoce como la *ecuación de Darcy-Weisbach*. Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) realizó amplios experimentos sobre la caída de presión del agua que fluye en las tuberías. Julius Weisbach (1806-1871) propuso la forma de esta ecuación en su influyente tratado sobre mecánica industrial de fluidos.

Tabla 6.1 Factor de fricción y diámetro hidráulico para tubos no circulares

b/a	Elipse		Rectángulo		Triángulo isósceles	
	$(Re_{D_h})f$	D_h/b	$(Re_{D_h})f$	D_h/b	$(Re_{D_h})f$	D_h/b
1.0	64.00	1.0	56.91	1.0	52.61	0.828
0.5	67.29	1.298	62.19	1.333	50.49	0.944
0.2	74.41	1.4965	76.28	1.667	48.63	0.990
0.1	77.26	1.548	84.68	1.818	48.31	0.998

$$f = \frac{64}{Re_D}; \quad Re_D = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} \quad (6.49)$$

En el capítulo 7 que trata del flujo turbulento, se encontrará que f es de tanta utilidad para el flujo turbulento en canales, como lo es en el caso del flujo viscoso laminar (de Poiseuille).

Si se multiplica la ecuación 6.47 por el número de Reynolds Re_{D_h} , basado en el diámetro hidráulico D_h ,

$$Re_{D_h} \equiv \frac{\rho V D_h}{\mu} \quad (6.50)$$

se obtiene:

$$(Re_{D_h})f = \frac{2D_h^2}{\mu V} \left(-\frac{dp^*}{dx} \right) \quad (6.51)$$

El grupo adimensional en el lado derecho de la ecuación 6.51 es función sólo de la forma de la sección transversal. Para un tubo circular, ese grupo tiene el valor de 64, en tanto que en el caso de un flujo plano de Poiseuille (un rectángulo con $a/b = \infty$), el grupo adimensional tiene el valor de 48. La tabla 6.1 lista los valores de $(Re_{D_h})f$ y D_h/b para canales con sección transversal elíptica, rectangular y triangular (isósceles) que tienen muchos valores distintos para la razón de aspecto b/a , como se define en la figura 6.9. Adviértase que para todas las formas consideradas, el valor de $(Re_{D_h})f$ no difiere en más de un 25% del valor del tubo circular que es de 64.

Al combinar las ecuaciones 6.48 y 6.50, es posible expresar la caída de presión Δp^* en un tubo de longitud L en la forma:

$$\Delta p^* = \frac{(Re_{D_h})f}{(D_h/b)^2} \left(\frac{\mu \bar{V} L}{2b^2} \right) \quad (6.52)$$

donde los valores numéricos del numerador y el denominador del primer factor en el lado derecho de la ecuación 6.52 puede obtenerse a partir de la tabla 6.1.

6.5.6 Flujos de lubricación

Cuando una superficie sólida se desliza sobre otra, la resistencia por fricción puede reducirse en gran medida al separar las superficies con una película delgada de aceite

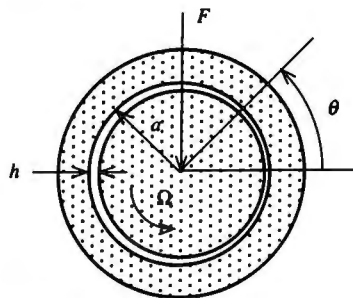


Figura 6.10 Un eje o árbol que gira en una chumacera se mueve lateralmente para alcanzar una posición excéntrica cuando se carga con una fuerza F .

lubricante. Por ejemplo, en los motores de automóvil, el movimiento deslizante de los pistones en los cilindros y el movimiento rotacional del cigüeñal y las bielas en sus cojinetes se encuentran copiosamente lubricados con el aceite del motor para reducir la fricción. De igual importancia es el hecho de que la presencia del aceite impide que las superficies en movimiento entren en contacto sólido, aun cuando existan grandes fuerzas que las empujan unas contra otras, con lo cual se impide el desgaste abrasivo y el daño de las superficies sólidas. La descripción del movimiento de delgadas películas de fluido lubricante que experimentan un movimiento cortante y están sujetas a fuerzas normales se conoce como *teoría de la lubricación*. En esta sección, se examinará un caso simple de flujo de lubricación, aquel que ocurre en una chumacera.

Una chumacera es un cilindro hueco que encierra un eje sólido que gira alrededor de su eje con una velocidad Ω . Como se aprecia en la figura 6.10, el radio a de la chumacera es ligeramente mayor que el del eje una cantidad \bar{h} que es muy pequeña comparada con el valor de a .¹⁸ Cuando está sometido a una fuerza vertical F , el eje se mueve hacia la derecha, como se aprecia en la figura 6.10, adquiriendo una posición excéntrica respecto de la chumacera, y la holgura h entre el eje y la chumacera varía con la posición angular θ :

$$h = \bar{h}(1 - \eta \cos \theta) \quad (6.53)$$

donde la excentricidad η es la razón del desplazamiento lateral del eje a \bar{h} .

¿Por qué se mueve el eje hacia la derecha en lugar de seguir la dirección de la fuerza aplicada F ? Para comprender este desplazamiento, considérese el flujo de aceite lubricante en el semicírculo inferior de la holgura que se representa en la figura 6.10. A causa del flujo de Couette inducido por el eje giratorio, existe un flujo de entrada en la parte izquierda ($\theta = \pi$) igual a $V_p h/2 = (\Omega a/2)\bar{h}(1 + \eta)$ y un flujo de salida en la derecha ($\theta = 0$) igual a $(\Omega a/2)\bar{h}(1 - \eta)$ para un flujo neto de entrada $\Omega a h \eta$. Puesto que se trata de un flujo estacionario incompresible, este flujo neto de entrada debe ser neutralizado por un gradiente de presión suficiente que permita inducir un flujo de salida de Poiseuille igual para $\theta = 0$ y π :

¹⁸ Por lo común, $\bar{h}/a = 1E(-3)$.

$$\frac{\bar{h}^3}{12\mu} \left(-\frac{dp}{a d\theta} \right) = \left(\frac{\Omega ah}{2} \right) \eta$$

$$\left(-\frac{dp}{d\theta} \right) = 6\mu\Omega \left(\frac{a}{h} \right)^2 \eta$$

Por lo tanto, la presión en la mitad inferior de la chumacera excederá a aquella que existe en la mitad superior en una cantidad:

$$\Delta p \simeq 6\mu\Omega \left(\frac{a}{h} \right)^2 \eta$$

la cual soportará una fuerza F/W por unidad de longitud de la chumacera:

$$\frac{F}{W} \simeq a\Delta p \simeq 6\mu\Omega \left(\frac{a^3}{h^2} \right) \eta$$

Adviértase que la excentricidad η del eje en la chumacera es proporcional a la carga F aplicada.

A fin de resolver de forma exacta este problema, se empezará con la ecuación 6.36 para el gasto volumétrico Q/W en un flujo combinado de Couette y Poiseuille, que se resuelve para el gradiente de presión:

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{12\mu a}{h^3} \left(\frac{\Omega ah}{2} - \frac{Q}{W} \right) \quad (6.54)$$

en el cual h es la función de θ dada en la ecuación 6.53. Si se integra la ecuación 6.54 desde 0 hasta 2π , la integral del lado izquierdo es cero porque la presión es la misma en 0 y 2π , y la integral del lado derecho puede resolverse para Q/W :

$$\frac{Q}{W} = \frac{\bar{h}\Omega a(1 - \eta^2)}{2 + \eta^2} \quad (6.55)$$

Conforme se carga la chumacera y η se incrementa, el gasto volumétrico Q de aceite lubricante disminuye.

Si se usa este valor de Q/W en la ecuación 6.54 y se integra desde 0 hasta θ , se encuentra la presión $p\{\theta\}$:

$$p\{\theta\} = p\{0\} - 6\mu\Omega \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{\eta \operatorname{sen}\theta(2 - \eta \cos\theta)}{(2 + \eta^2)(1 - \eta \cos\theta)^2} \quad (6.56)$$

La presión en la mitad superior de la chumacera ($0 \leq \theta \leq \pi$) siempre es menor que $p\{0\}$, en tanto que en la mitad inferior es mayor en una cantidad igual. Se puede integrar la fuerza de presión dirigida hacia arriba a fin de obtener la carga por unidad de anchura:

$$\frac{F}{W} = 12\pi\mu\Omega \left(\frac{a^3}{h^2} \right) \frac{\eta}{(\sqrt{1 - \eta^2})(2 + \eta^2)} \quad (6.57)$$

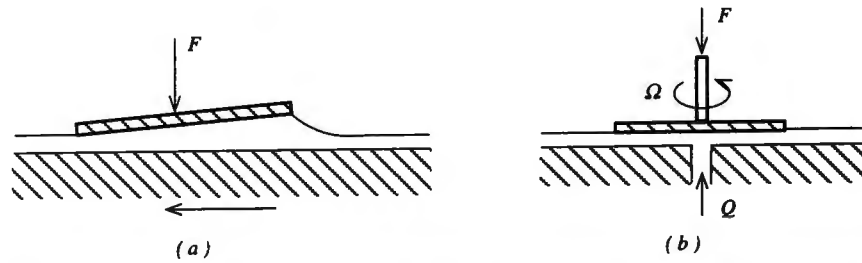


Figura 6.11 En (a), un cojinete de deslizamiento sostiene una carga F al apretarse el lubricante que hay entre el cojinete y la superficie plana en movimiento, en tanto que en (b), un cojinete lubricado a presión soporta una carga de empuje sobre un eje o árbol giratorio cuando se abastece a ésta con un flujo Q de lubricante presurizado.

También, es posible calcular el momento de torsión por unidad de anchura T/W al integrar el esfuerzo cortante τ_w de la pared para la componente de Couette del flujo ($\tau_w = \mu\Omega a/h$) y la componente de Poiseuille del flujo ($\tau_w = (h/2)(dp/da d\theta)$) sobre la circunferencia del eje:

$$\frac{T}{W} = 4\pi\mu\Omega \left(\frac{a^3}{h} \right) \frac{1 + 2\eta^2}{(\sqrt{1 - \eta^2})(2 + \eta^2)} \quad (6.58)$$

La capacidad para soportar carga de una chumacera aumenta con la disminución de la holgura \bar{h} y el aumento de la excentricidad η . Si la excentricidad $\eta = 1$, la chumacera y el eje estarían en contacto en $\theta = 0$, lo cual es indeseable. En la práctica, con una chumacera no se alcanzarían los valores infinitos para F y T que predicen las ecuaciones 6.57 y 6.58 cuando $\eta = 1$, debido a que habría cierto flujo de salida en la dirección axial que reduciría la presión y la carga a un valor finito. Es posible proveer las chumaceras que soportan una gran carga con un flujo de aceite que contrarreste la fuga a lo largo del eje y que se lleve el calor.

En la deducción anterior, se utilizó el flujo combinado de Couette y Poiseuille, ecuación 6.36, para describir el flujo en una chumacera con un espesor variable h y, por consiguiente, una velocidad media variable \bar{V} . Pero \bar{V} se consideró constante, independiente de x , cuando se encontró la solución de estos flujos, la cual se simplificó ya que $DV/Dt = 0$. ¿Se cometió un error al olvidarse de esta restricción?

De ninguna manera. Mientras que la aceleración DV/Dt no sea cero en un flujo de lubricación, ésta puede ser lo bastante pequeña comparada con los otros términos de la ecuación de Navier-Stokes como para omitirla; en efecto, considerándola igual a cero. En el caso de un flujo estacionario en una chumacera, es posible estimar la magnitud de $DV/Dt = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ como aproximadamente igual a \bar{V}^2/a y la fuerza viscosa por unidad de volumen $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ como alrededor de $\nu \bar{V}/h^2$, de tal modo que la condición que desprecie el término de la aceleración sea:

$$\frac{\bar{V}^2}{a} \ll \nu \frac{\bar{V}}{h^2}$$

$$\frac{\bar{V}\bar{h}}{\nu} \equiv Re_h \ll \frac{a}{\bar{h}}$$

esto es, el número de Reynolds Re_h , con base en el espesor \bar{h} de la película y la velocidad media \bar{V} , debe ser mucho menor que la razón formada por el radio a del muñón al espesor de la película. Puesto que a/\bar{h} es, en general, del orden de $10^2 - 10^3$ en una chumacera, el número de Reynolds puede ser mayor que la unidad y no obstante permitir que se desprecie el término de la aceleración comparado con el término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes.

En la figura 6.11, se presentan otros tipos de cojinetes lubricados. El cojinete de deslizamiento (figura 6.11[a]) se desliza lateralmente con respecto a una superficie plana pero formando un pequeño ángulo que provoca que se genere una presión del lubricante conforme el espacio entre el cojinete y la superficie plana disminuye, permitiendo que el cojinete soporte una carga normal. En las unidades de disco duro de las computadoras, el captador magnético se desliza sobre la superficie del disco sobre una película de aire que impide el contacto físico. En la figura 6.11(b), se esquematiza un ejemplo de un cojinete lubricado a presión, en el cual el lubricante se introduce desde un suministro presurizado al eje de un cojinete giratorio de empuje con el fin de soportar un empuje F sobre el cojinete. En este caso, el movimiento de rotación del eje no induce un aumento de presión para sostener la fuerza aplicada.

Ejemplo 6.9

Un cojinete del cigüeñal del motor de un automóvil tiene un radio $a = 1.5 \text{ cm}$, una longitud $W = 3 \text{ cm}$ y una holgura $\bar{h} = 5E(-5) \text{ m}$. Esta holgura se llena con un aceite lubricante de viscosidad $\mu = 2E(-2) \text{ Pa s}$ y densidad $\rho = 9E(2) \text{ kg/m}^3$. El cigüeñal gira a 3600 revoluciones por minuto.

(a) Si la excentricidad η no es mayor que 0.5, calcule la máxima carga F que el cojinete puede sostener. (b) En estas condiciones, calcule el momento de torsión T y la potencia de fricción $P = \Omega T$ del cojinete. (c) Encuentre el número de Reynolds $Re_h \equiv \bar{V}\bar{h}/\nu$ bajo esta condición.

Solución

(a) La fuerza F de carga se determina a partir de la ecuación 6.57 para $\eta = 0.5$:

$$\begin{aligned} L &= 12\pi\mu\Omega W \left(\frac{a^3}{\bar{h}^2} \right) \frac{\eta}{(\sqrt{1-\eta^2})(2+\eta^2)} \\ &= 12\pi(2E(-2) \text{ Pa s})(2\pi \times 60 \text{ s}^{-1})(3E(-2) \text{ m}) \left(\frac{(1.5E(-2) \text{ m})^3}{(5E(-5) \text{ m})^2} \right) \frac{0.5}{\sqrt{0.75}(2.25)} \\ &= 2.954E(3) \text{ N} \end{aligned}$$

(b) Utilice la ecuación 6.58 para calcular el momento de torsión T y la potencia P :

$$\begin{aligned} T &= 4\pi\mu\Omega W \left(\frac{a^3}{h} \right) \frac{1 + 2\eta^2}{(\sqrt{1 - \eta^2})(2 + \eta^2)} \\ &= 4\pi(2E(-2)Pa\ s)(2\pi \times 60\ s^{-1})(3E(-2)\ m) \left(\frac{(1.5E(-2)\ m)^3}{(5E(-5)\ m)} \right) \frac{1.5}{\sqrt{0.75}(2.25)} \\ &= 0.1477\ Nm \end{aligned}$$

$$P = \Omega T = (2\pi \times 60\ s^{-1})(0.1477\ Nm) = 55.68\ W$$

(c) En el cálculo del número de Reynolds, aplique la ecuación 6.55 para encontrar $\bar{V} = Q/W\bar{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}\bar{h}}{\nu} &= \frac{\Omega a(1 - \eta^2)\bar{h}}{\nu(2 + \eta^2)} = \frac{\rho\Omega a\bar{h}(1 - \eta^2)}{\mu(2 + \eta^2)} \\ &= \frac{(9E(3)\ kg/m^3)(2\pi \times 60\ s^{-1})(1.5E(-2)\ m)(5E(-5)\ m)(0.75)}{(2E(-2)\ Pa\ s)(2.25)} = 42.41 \end{aligned}$$

Advierta que $Re_h \ll a/h = 1.5E(-2) + 5E(-5) = 300$.

6.5.7 Fluencia (flujo de Stokes)

En un flujo viscoso para el cual la velocidad V y la escala de longitud L son pequeñas, el número de Reynolds $Re = VL/\nu$ puede ser mucho menor que la unidad. Un flujo que posee un número de Reynolds muy pequeño se conoce como *fluencia* o *flujo de Stokes*. En flujos como éstos, la aceleración DV/Dt es tan pequeña comparada con la fuerza viscosa por unidad de masa, $\nu\nabla^2V$, que es posible despreciarla en la ecuación 6.12 de Navier-Stokes y obtener una ecuación de movimiento más sencilla que es la ecuación de la fluencia:

$$0 = \nabla p^* + \mu\nabla^2V \quad (6.59)$$

después de haber multiplicado todo por ρ . Junto con la ecuación de la conservación de la masa, $\nabla \cdot V = 0$, puede utilizarse la ecuación 6.59 para encontrar los campos tridimensionales de velocidad de la fluencia.

El ejemplo más conocido de fluencia es el de un fluido viscoso sobre una esfera sólida estacionaria de radio a que ocurre a una velocidad V_∞ . Este flujo es de simetría axial alrededor de la dirección del flujo. Si se utilizan las coordenadas R y ϕ definidas en la figura 6.12, las componentes radial y tangencial de la velocidad, V_R y V_ϕ , que satisfacen las condiciones $V = 0$ en la superficie de la esfera, $R = a$ y $V = V_\infty$ en $R = \infty$ son:¹⁹

¹⁹ Para una derivación completa, véase F. S. Sherman, *Viscous Flow* (Nueva York: McGraw-Hill Publishing Co.) 1990.

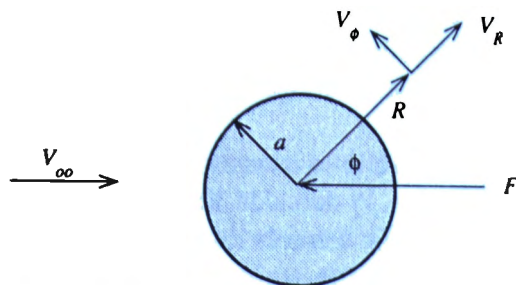


Figura 6.12 Sistema de coordenadas para un flujo de Stokes (fluencia) viscoso con velocidad V_∞ que ocurre sobre una esfera sólida de radio a .

$$\begin{aligned} V_R &= V_\infty \cos \phi \left(1 - \frac{3a}{2R} + \frac{a^3}{2R^3} \right) \\ V_\phi &= V_\infty \sin \phi \left(-1 + \frac{3a}{4R} + \frac{5a^3}{4R^3} \right) \end{aligned} \quad (6.60)$$

donde la componente axial de la velocidad, $V_R \cos \phi - V_\phi \sin \phi$, es evidentemente igual a V_∞ en $R = \infty$. Los valores correspondientes de la presión p^* y del esfuerzo cortante $\tau_{\phi R}$ son:

$$\begin{aligned} p^* &= p_\infty^* - \frac{3\mu a V_\infty \cos \phi}{2R^2} \\ \tau_{\phi R} &= -\frac{\mu V_\infty \sin \phi}{R} \left(1 - \frac{3a}{4R} + \frac{5a^3}{4R^3} \right) \end{aligned} \quad (6.61)$$

La presión p^* es más alta en la parte anterior de la esfera que en la parte posterior y contribuye a la resistencia al avance sobre la esfera. El esfuerzo cortante de la pared, $\tau_{\phi R}$ en $R = a$, actúa en la dirección que aumente la resistencia al avance. Si se supone que la fuerza de presión y la fuerza del esfuerzo viscoso actúan sobre cada elemento de la superficie de la esfera, es posible encontrar la fuerza total F de resistencia al avance.²⁰

$$F = 6\pi\mu V_\infty a \quad (6.62)$$

De la resistencia total al avance, dos terceras partes corresponden al esfuerzo cortante de la pared y una tercera parte a la presión.

La resistencia al avance de los cuerpos en los flujos de Stokes no es sensible a la forma del cuerpo. Por ejemplo, un disco plano de radio a orientado normal o paralelo a

²⁰ Esta relación, obtenida primero por Stokes, desempeñó un papel destacado en la determinación experimental de dos constantes físicas, la constante de Boltzman y la carga eléctrica de un electrón. En el primer caso, la incorporación de la teoría de Einstein del movimiento browniano al análisis de las observaciones de este movimiento condujo al cálculo de la constante de Boltzman. La carga eléctrica se determinó en el famoso experimento de la gota de aceite de Milikan, en el que se arrastraron gotas de aceite a través de un fluido mediante un campo eléctrico.

la dirección del flujo tiene una resistencia al avance $16\mu V_\infty a$ o $(32/3)\mu V_\infty a$, respectivamente, la cual no difiere mucho de la correspondiente a una esfera, ecuación 6.62, en especial cuando se considera que hay enormes diferencias en la forma y orientación del flujo.

Puede aplicarse esta expresión para la resistencia al avance en una esfera al hacer el cálculo de la velocidad constante V_f de caída libre de una partícula esférica de densidad ρ_p que se mueve hacia abajo a través de un fluido de densidad ρ_f bajo la influencia de la gravedad. La fuerza de la gravedad que actúa sobre la partícula es $\rho_p g(4\pi a^3/3)$, pero la fuerza de empuje hacia arriba (o empuje ascendente) del fluido circundante es $\rho_f g(4\pi a^3/3)$, por lo que la fuerza neta hacia abajo es $(\rho_p - \rho_f)g(4\pi a^3/3)$. Si esto se hace igual a la fuerza F de resistencia al avance de la ecuación 6.62 y si se despeja para V_f ,

$$(\rho_p - \rho_f)g \left(\frac{4\pi a^3}{3} \right) = 6\pi\mu V_f a$$

$$V_f = \frac{2(\rho_p - \rho_f)g a^2}{9\mu} \quad (6.63)$$

La condición de que el número de Reynolds sea pequeño en la caída libre es:

$$\frac{\rho_f V_f a}{\mu} = \frac{2}{9} \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right) \left(\frac{\rho_f g^{1/2} a^{3/2}}{\mu} \right)^2 \ll 1 \quad (6.64)$$

que puede satisfacerse si el término $\rho_f g^{1/2} a^{3/2} / \mu$ es menor que uno.

Ejemplo 6.10

Una partícula sólida esférica con diámetro $D = 1$ micrómetro $= 1.0E(-6)$ m y densidad $\rho_p = 2E(3)$ kg/m³ cae lentamente a través de aire fijo cuyas densidad y viscosidad son $\rho_f = 1.206$ kg/m³ y $\mu = 1.80E(-5)$ Pa s, respectivamente. Calcule (a) la velocidad V_f de caída libre y (b) el número de Reynolds $Re_D \equiv V_f D / \nu$.

Solución

(a) Al emplear la ecuación 6.63,

$$V_f = \frac{2(\rho_p - \rho_f)g a^2}{9\mu} = \frac{2([2E(3) - 1.206] \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)(1E(-6) \text{ m})^2}{9(1.8E(-5) \text{ Pa s})}$$

$$= 2.420E(-4) \text{ m/s}$$

(b)

$$Re_D = \frac{\rho_f V_f D}{\mu} = \frac{(1.206 \text{ kg/m}^3)(2.420E(-4) \text{ m/s})(2E(-6) \text{ m})}{1.8E(-6) \text{ Pa s}} = 3.24E(-5)$$

El número de Reynolds es mucho menor que la unidad, con lo que se garantizan las condiciones para existencia del flujo de Stokes que se supusieron al utilizar la ecuación 6.63.

6.5.8 Flujo a través de un medio poroso

Al igual que sucede en la superficie de la Tierra, el agua también fluye debajo del suelo, pero sólo a través de los poros del suelo y las estructuras geológicas subyacentes. No obstante estos poros son muy pequeños y representan sólo una pequeña porción del volumen subterráneo, es posible que el agua se desplace a grandes distancias por debajo de la tierra, aunque muy lentamente.²¹ Otros fluidos, como el gas natural y el petróleo, también pueden extraerse desde su ubicación subterránea mediante el bombeo de pozos. El movimiento de fluido contaminado que tiene lugar desde un relleno sanitario para la disposición de desechos hacia los acuíferos de agua potable que se encuentran debajo de él, es un ejemplo de flujo subterráneo indeseable. Por lo que el movimiento de fluidos a través de roca porosa, inducido por las fuerzas de presión y gravedad puede ser de gran importancia práctica.

Es posible filtrar partículas dañinas en la corriente de un fluido haciendo que ésta pase por un sólido poroso cuyos poros sean tan pequeños que no permitan el paso de las partículas. En otros casos, la extensa área superficial de los poros microscópicos puede proporcionar sitios para la catálisis o adsorción química de las componentes del fluido. El flujo a través de filtros y lechos catalizadores constituye una aplicación en la ingeniería de los flujos a través de medios porosos.

Aunque los pasos del fluido a través de sólidos porosos son irregulares en cuanto a su tamaño y longitud, se puede esperar que la velocidad promedio del flujo a través de ellos sea comparable a la de un flujo a través de un tubo circular de diámetro D , como está dada por la ecuación 6.42:²²

$$\bar{V} = \frac{D^2}{32\mu} \left(-\frac{dp^*}{dz} \right)$$

A fin de generalizar esta relación para un sólido poroso, donde el tamaño y longitud del poro sea variable, se introduce una constante de proporcionalidad k , que se conoce como *permeabilidad*, la cual incluye un promedio del tamaño, forma y longitud del poro, para determinar el gasto por unidad de área del sólido, V_d , como sigue:

$$V_d = -\frac{k}{\mu} \nabla p^* \quad (6.65)$$

²¹ Es un hecho sorprendente que una gran fracción de toda el agua dulce contenida en la masa de los continentes se encuentre almacenada en acuíferos subterráneos más bien que sobre su superficie como en lagos y ríos.

²² Ésta es la generalización de la ecuación 6.42 para un flujo viscoso laminar en el supuesto de que el número de Reynolds del flujo por los poros, $V_d \sqrt{k} / \nu$, es mucho menor que la unidad. También, se parte del supuesto de que el tamaño de los poros es mucho menor que la escala de longitud para la cual p^* y V_d cambian.

La ecuación 6.65 se conoce como *Ley de Darcy*. La permeabilidad k , que tiene dimensiones de longitud al cuadrado, es una medida aproximada del promedio del cuadrado de los diámetros del poro. La unidad de permeabilidad, que se conoce como *darcy*, es de $1 \text{ cm}^2 = 1\text{E}(-4) \text{ m}^2$.²³

La velocidad del fluido en un poro será mucho mayor que V_d puesto que ésta se basa en que el volumen de fluido pasa por un área unitaria, sólo una pequeña porción del total de poros que contiene. Por lo tanto, una partícula de fluido recorrerá una distancia L en un tiempo que es mucho menor que L/V_d , pero es la cantidad V_d la que resulta observable en los flujos porosos y la que presenta mayor interés práctico.

En el caso de flujos incompresibles, el campo de velocidad V_d debe satisfacer la condición de la conservación de la masa, ecuación 3.17:

$$\nabla \cdot V_d = 0 \quad (6.66)$$

Juntas, las ecuaciones 6.65 y 6.66 nos permiten encontrar el campo de flujo en un medio poroso. Los métodos de solución para un flujo de Darcy son semejantes a los que se utilizaron en los flujos irrotacionales (véase el capítulo 11).

La fracción del volumen de un sólido que está ocupada por el fluido se conoce como *porosidad*. La porosidad de un sólido poroso determina su capacidad para almacenar fluidos, pero no afecta de manera explícita el campo de flujo V_d .

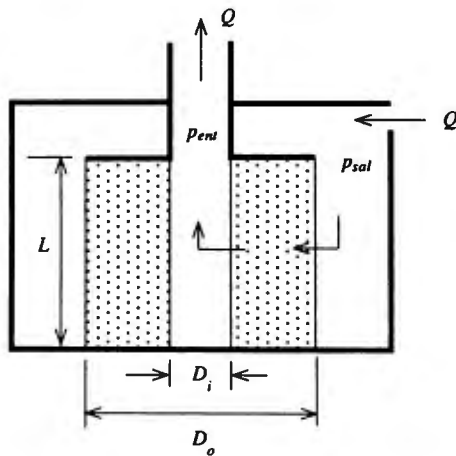


Figura E 6.11

²³ Las permeabilidades varían mucho. Algunos intervalos característicos (en *darcys*) son, para arena, 1-100; suelo, 0.1-10; piedra arenosa, $1\text{E}(-7)$ -10; piedra caliza, $1\text{E}(-6)$ -1; y ladrillo, 0.01-0.1.

Ejemplo 6.11

Un filtro de combustible diesel, que se ilustra en la figura E 6.11, consta de un material poroso con la forma de un cilindro hueco con diámetro interior $D_i = 3 \text{ cm}$, diámetro exterior $D_o = 10 \text{ cm}$ y longitud $L = 20 \text{ cm}$ que está contenido dentro de una cámara que suministra un flujo radial de entrada de combustible que debe filtrarse. Si el gasto volumétrico es $Q = 1 \text{ l/mín}$, la viscosidad del combustible $\mu = 2E(-6) \text{ Pa s}$ y la permeabilidad del filtro $k = 0.01 \text{ darcys} = 1E(-6) \text{ m}^2$, determine la caída de presión $p_{ent} - p_{sal}$ que se requiere para hacer que el combustible pase por el filtro.

Solución

Si r es una distancia radial desde el centro del filtro, la velocidad radial del flujo que entra $V_r \equiv -V_d$ se determina mediante la ecuación 6.65:

$$V_r = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}$$

Sin embargo, la conservación de la masa requiere que el gasto volumétrico del combustible diesel a través de un cilindro de radio r y longitud L sea igual a Q :

$$2\pi r L V_r = Q$$

Al eliminar V_r entre estas ecuaciones,

$$\frac{Q}{2\pi r L} = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}$$

$$dp = \frac{\mu Q}{2\pi k L} \frac{dr}{r}$$

Si se integra desde el radio interior $D_i/2$ al radio exterior $D_o/2$:

$$\begin{aligned} p_{ent} - p_{sal} &= \frac{\mu Q}{2\pi k L} \ln \left(\frac{D_o}{D_i} \right) \\ &= \frac{(2E(-6) \text{ Pa s})(1 \text{ l}/60 \text{ s})}{2\pi(1E(-6) \text{ m}^2)(0.2 \text{ m})} \ln \left(\frac{10}{3} \right) \\ &= 3.194E(-2) \text{ Pa} \end{aligned}$$

La ley de Darcy, ecuación 6.65, tiene la misma forma que la ley de Ohm para la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} en un conductor eléctrico con conductividad eléctrica σ :

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi \quad (6.67)$$

donde ϕ es el potencial eléctrico, o voltaje. Los electrones libres se mueven en un conductor del mismo modo que un fluido viscoso lo hace en un sólido poroso,

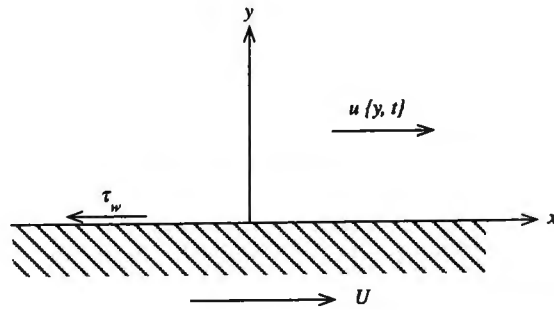


Figura 6.13 Un fluido inicialmente estacionario ($y \geq 0$) se pone en movimiento no estacionario gracias a un movimiento horizontal de la superficie sólida ($y=0$) con una velocidad fija U comenzando al tiempo $t=0$. La velocidad del fluido $u(y, t)$ es una función sólo de y y t .

encontrando resistencia de los átomos del conductor eléctrico. En superconductores eléctricos, donde $\sigma = \infty$, puede fluir una corriente finita sin caída de voltaje ($\nabla\phi = 0$). En helio superfluido, ${}^4\text{He}$ por debajo de los 4.2 K , la fase superfluida tiene viscosidad cero y es capaz de fluir a través de la fase normal con una velocidad finita sin caída de presión, como en la ley de Darcy con $\mu = 0$. Tanto la superconductividad como la superfluidez son ejemplos del comportamiento cuántico que se exhibe a escala macroscópica.

6.5.9 Flujo laminar no estacionario

Las aplicaciones consideradas hasta este momento han sido aquéllas en las que la aceleración de una partícula de fluido, DV/Dt , ha sido o bien cero o mucho menor que la fuerza viscosa por unidad de masa, $\nu\nabla^2V$, por lo que podía despreciarse. Los flujos de estos tipos se conocen como *libres de inercia*. No obstante, cuando un flujo es no estacionario, puede resultar esencial incluir el término de la aceleración en la solución de la ecuación de Navier-Stokes. En esta sección, se consideran dos ejemplos de flujo viscoso laminar no estacionario que son lo bastante simples para permitir obtener soluciones analíticas a la ecuación de Navier-Stokes. Lo que es más importante, estos ejemplos revelan características físicas que son comunes a muchos de los flujos complejos que se encuentran en las aplicaciones de la ingeniería.

Movimiento cortante de impulsión de una pared plana

En la figura 6.13 se aprecia un movimiento cortante simple no estacionario. Un fluido viscoso sin movimiento en un principio, el cual se localiza por encima de una superficie sólida plana y horizontal en $y=0$, se extiende hasta el infinito en las direcciones x , y y z . Comenzando al tiempo $t=0$, se pone en movimiento por impulsión de la pared sólida con una velocidad $U \mathbf{i}_x$ en la dirección x . La fuerza del esfuerzo viscoso que ejerce sobre

el fluido la acción de la pared en movimiento provoca que el fluido se desplace en la dirección x , por lo que una cantidad mayor de fluido es obligada a moverse conforme transcurre el tiempo. Las fuerzas cortantes viscosas provocan por completo el movimiento y no se experimenta un gradiente de presión en la dirección del movimiento. La velocidad \mathbf{V} sólo tiene una componente $u \mathbf{i}_x$, la cual depende sólo de y y t . Por lo tanto, las únicas componentes de $D\mathbf{V}/Dt$ y $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ son $(\partial u / \partial t) \mathbf{i}_x$ y $\nu (\partial^2 u / \partial y^2) \mathbf{i}_x$, respectivamente, y la ecuación 6.12 de Navier-Stokes se transforma en:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.68)$$

La componente de la velocidad $u\{y, t\}$ debe satisfacer la condición inicial $u\{y, 0\} = 0$ y las condiciones en la frontera $u\{0, t\} = U$ y $u\{\infty, t\} = 0$.

La ecuación 6.68 es un ejemplo de una muy conocida ecuación diferencial parcial de la física matemática que se conoce como *ecuación de difusión*. El coeficiente ν se conoce como *difusividad*, cuyo valor determina la velocidad con la cual la cantidad u , que es la cantidad de movimiento en x por unidad de masa, se difunde en la dirección y y al transcurrir el tiempo. En este ejemplo, ν es así la *difusividad de la cantidad de movimiento*, cuyas unidades en el sistema SI son m^2/s .

La ecuación diferencial parcial 6.68 tiene una solución elegante que es compatible con las condiciones iniciales y en la frontera de este flujo. Es posible encontrar esta solución si se supone que $u\{y, t\}$ es una función de una combinación particular de y y t , la cual se representa por η :

$$\eta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu t}} \quad (6.69)$$

$$u = U f\{\eta\} \quad (6.70)$$

donde $f\{\eta\}$ es una función sólo de su argumento, η . Las condiciones en la frontera para f son, de este modo, $f\{0\} = 1$ y $f\{\infty\} = 0$.

La sustitución de las ecuaciones 6.69 y 6.70 en la ecuación 6.68 de Navier-Stokes da origen a una ecuación diferencial total para f . Con la finalidad de ver cómo se llega a esto, primero evalúense las derivadas parciales,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}} \right) = -\frac{1}{2t} \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}} \right) = -\frac{\eta}{2t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}};$$

$$\frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{df}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{df}{d\eta}, \quad \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{df}{d\eta} \right) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \left(\frac{df}{d\eta} \right);$$

$$\frac{1}{U} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu t} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} \right)$$

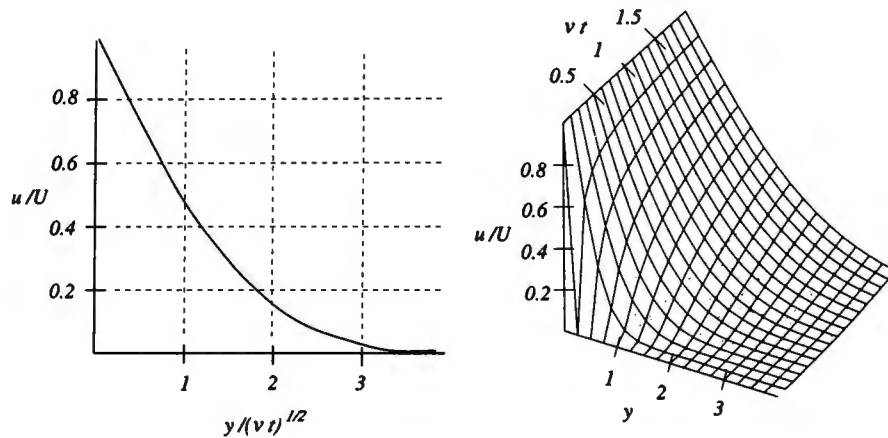


Figura 6.14 Arriba a la izquierda, el perfil de velocidades $u/U \equiv f$ como función de $y/(\nu t)^{1/2} \equiv \eta$ para el movimiento por impulsión de una pared plana. Arriba a la derecha, el perfil de velocidades u/U como función de y y el tiempo modificado νt .

y luego sustitúyanse en la ecuación 6.68 para obtener:

$$-\frac{\eta}{2} \left(\frac{df}{d\eta} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} \right)$$

que puede integrarse dos veces:

$$\frac{df}{d\eta} = c_1 e^{-(\eta/2)^2}$$

$$f = c_1 \int_0^{\eta/2} e^{-\xi^2/4} d\xi + c_2$$

Si se elige $c_1 = -1/\sqrt{\pi}$ y $c_2 = 1$, se habrán satisfecho las condiciones en la frontera para f y, por lo tanto, para u , con lo que se obtiene:²⁴

$$\frac{u(y, t)}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/2\sqrt{\nu t}} e^{-\xi^2/4} d\xi \quad (6.71)$$

El segundo término de la ecuación 6.71 se conoce como *función de error* del argumento $y/2\sqrt{\nu t}$. La anterior es una función trascendental que surge en la teoría de

²⁴ La integral definida $\int_0^\infty \exp(-\xi^2/4) d\xi = \sqrt{\pi}/2$.

probabilidad y para la cual se dispone de valores tabulados.²⁵ Al utilizar estos valores, la figura 6.14 ilustra el perfil de velocidades $u/U \equiv f$ como función de $y/\sqrt{\nu t} \equiv \eta$. Puesto que esto no revela en forma directa la creciente penetración del fluido en movimiento en el flujo estacionario, la figura 6.14 incluye una gráfica del perfil de velocidades u/U como función de y y del tiempo modificado νt .

Resulta de utilidad contar con un método preciso en la definición del espesor de la región del flujo que se ve afectada por la pared en movimiento. Un método consiste en el cálculo de un espesor δ^* tal que el gasto volumétrico en una capa de este espesor que tenga una velocidad uniforme U sea igual que aquélla del fluido en movimiento:

$$U\delta^* \equiv \int_0^\infty u \, dy = U\sqrt{\nu t} \int_0^\infty f \, d\eta = 2U \left(\frac{\nu t}{\pi} \right)^{1/2}; \quad \delta^* = 2 \left(\frac{\nu t}{\pi} \right)^{1/2} \quad (6.72)$$

donde el valor numérico de la integral definida se determina mediante las propiedades de la función de error. Ya que este espesor δ^* no es muy diferente de $\sqrt{\nu t}$, se puede afirmar que $\sqrt{\nu t}$ es una medida aproximada del espesor de la capa.

El esfuerzo cortante τ_w que actúa sobre la pared (véase la figura 6.13) se opone al movimiento de ésta. La potencia necesaria para mover la pared, por unidad de área de la pared, es el producto $\tau_w U$. Para encontrar el valor de τ_w se determina el gradiente de velocidad en la pared mediante la ecuación 6.71:

$$\tau_w = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left(\frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} \right) \quad (6.73)$$

El esfuerzo cortante es el mismo que el de la pared en movimiento del flujo de Couette en un canal con una altura $\sqrt{\pi \nu t}$.

Ejemplo 6.12

El eje de la chumacera del ejemplo E 6.4 se arranca por impulsión desde el reposo hasta alcanzar la velocidad Ω . (a) Deduzca una expresión para el momento de torsión T como función del tiempo cuando éste es lo bastante pequeño como para que $\sqrt{\nu t} \ll h$. (b) Calcule el valor numérico de t que haría que $\sqrt{\nu t} = h$ si $\rho = 8.0E(2) \text{ kg/m}^3$.

Solución

(a) Puesto que la ecuación 6.73 revela que el esfuerzo cortante τ_w de la pared en el flujo inicial no estacionario es el mismo que el del flujo de Couette cuando $h = \sqrt{\pi \nu t}$, sólo se sustituye h por $\sqrt{\pi \nu t}$ en la expresión para T de la solución del ejemplo E 6.4:

²⁵ Véase H. S. Carslaw y J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (Oxford: Oxford University Press) 1947, o M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Washington, D.C.: U.S. Department of Commerce) 1964.

$$T = \frac{\pi\mu\Omega LD}{4\sqrt{\pi}\nu} = \frac{\sqrt{\pi\rho\mu\Omega LD}}{4\sqrt{\nu}}$$

(b)

$$t = \frac{h^2}{\nu} = \frac{\rho h^2}{\mu} = \frac{(8E(2) \text{ kg/m}^3)(1E(-4) \text{ m})^2}{6.7E(-5) \text{ Pa s}} = 0.1194 \text{ s}$$

Movimiento cortante oscilatorio de una pared plana

Una importante forma alternativa de movimiento cortante de una pared plana a la forma de movimiento que se ilustra en la figura 6.13 es aquella para la cual la velocidad es senoidal en el tiempo:

$$u\{0, t\} = U \cos \omega t \quad (6.74)$$

donde ω es la frecuencia angular del movimiento senoidal. La perturbación del fluido originada por el movimiento de la pared se propaga en el flujo hacia afuera, de la misma forma que en el caso del flujo por impulsión, pero después de un tiempo $t = \pi/\omega$ la pared ha invertido su movimiento y envía una perturbación anuladora. Por lo tanto, el movimiento de la pared sólo penetra en el fluido una distancia cercana a $\sqrt{\pi\nu/\omega}$, sin importar cuánto tiempo dure el movimiento oscilatorio de la pared.

Es posible encontrar la velocidad $u\{y, t\}$ del fluido originada por el movimiento oscilatorio de la pared plana si se resuelve la ecuación 6.68 utilizando el método de separación de variables:²⁶

$$\frac{u}{U} = \exp\left[-\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} y\right] \cos\left[\omega t - \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} y\right] \quad (6.75)$$

lo cual se reduce a la ecuación 6.74 cuando $y = 0$. Este perfil de velocidades es una onda coseno cuya amplitud disminuye exponencialmente en la dirección y en un factor de e por cada incremento $\sqrt{2\nu/\omega}$ en la distancia. El movimiento a una distancia y también es una función senoidal del tiempo pero lleva un atraso de $\sqrt{\omega/2\nu}$ del ángulo de fase en la pared. Por lo tanto, a una distancia $y = \pi\sqrt{2\nu/\omega}$, el fluido se mueve en dirección opuesta a la de la pared. En la figura 6.15, se ilustra una gráfica del perfil de velocidades de la ecuación 6.75 y es posible apreciar que la perturbación de la pared se encuentra confinada a una región cercana a la pared.

²⁶ Véase F. S. Sherman, *Viscous Flow* (Nueva York: McGraw-Hill Publishing Co.) 1990.

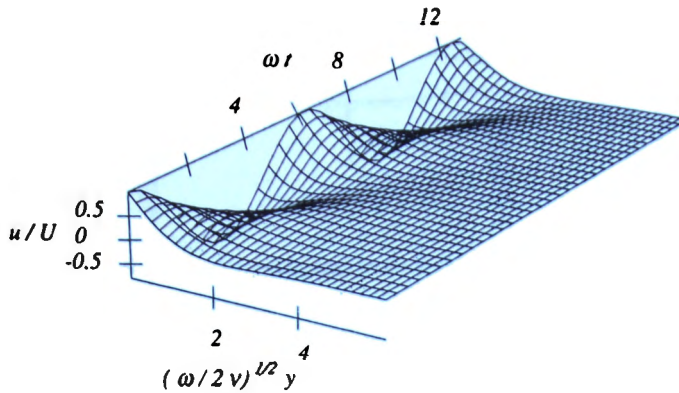


Figura 6.15 Perfil de velocidades $u/U \equiv f$ del flujo contiguo a una pared plana oscilatoria como función de la distancia adimensional $(\omega/2\nu)^{1/2} y$ y del tiempo adimensional ωt .

Para encontrar el esfuerzo cortante τ_w que actúa sobre la pared, se multiplica el gradiente de velocidad de la pared por la viscosidad:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} [\text{sen } \omega t - \text{cos } \omega t] \quad (6.76)$$

La potencia por unidad de área, P/A , que debe suministrarse para mantener la pared oscilatoria es el producto de la fuerza externa por unidad de área aplicada a la pared, $-\tau_w$, multiplicado por la velocidad de la pared $u(0, t) = U \cos \omega t$.

$$\frac{P}{A} = -\tau_w U \cos \omega t = \mu U^2 \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} [\cos^2 \omega t - \cos \omega t \text{sen } \omega t] \quad (6.77)$$

Si esta expresión se promedia en un intervalo de tiempo de un ciclo, para obtener la potencia promedio \bar{P} , el segundo término entre corchetes se promedia a cero y el primero a 1/2, lo que da:

$$\frac{\bar{P}}{A} = \frac{\mu U^2}{2} \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} \quad (6.78)$$

Puede utilizarse esta expresión para calcular la pérdida de la potencia en flujos oscilatorios, como una onda de sonido que se propaga dentro de un tubo o la vibración de un sólido elástico rodeado por un fluido estacionario.

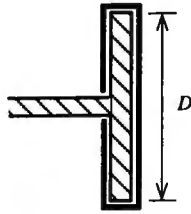


Figura E 6.13

Ejemplo 6.13

Un amortiguador de vibraciones torsionales para un motor diesel, como se esquematiza en la figura E 6.13, consta de un disco circular con diámetro $D = 0.5 \text{ m}$ que se encuentra rígidamente unido al extremo del cigüeñal del motor. El amortiguador se encuentra rodeado por un cárter que puede girar libremente con respecto al cigüeñal, y el espacio entre el cárter y el disco se encuentra lleno de aceite con viscosidad $\mu = 1.0 \text{ Pa s}$ y densidad $\rho = 9.0E(2) \text{ kg/m}^3$. Cuando el motor marcha a una velocidad fija, tanto el cárter como el disco giran a la misma velocidad y no existe un movimiento angular relativo entre ellos. Sin embargo, al desarrollarse una vibración torsional con una frecuencia angular de $\omega = 1E(3) \text{ s}^{-1}$ y amplitud angular $\phi = 1E(-3)$, el desplazamiento angular relativo del disco respecto del cárter es $\phi \sin \omega t$ y la velocidad angular relativa $\omega\phi \cos \omega t$. Por lo tanto, a cualquier distancia r desde el eje, la superficie del disco se mueve tangencialmente con una velocidad $r\omega\phi \cos \omega t$ respecto del aceite dentro del cárter. Calcule la potencia \bar{P} que absorbe el amortiguador de vibración.

Solución

La amplitud U de la velocidad de la superficie del disco es igual a $r\omega\phi$. Si se sustituye este valor en la ecuación 6.78 y se integra sobre ambos lados del área del disco, se encuentra la potencia \bar{P} :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} 2 \int_0^{D/2} (r\omega\phi)^2 (2\pi r) dr = 2\pi\mu(\omega\phi)^2 \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} \int_0^{D/2} r^3 dr \\ &= 2\pi\mu(\omega\phi)^2 \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} \left| \frac{r^4}{4} \right|_0^{D/2} = \frac{\mu}{32} \mu(\omega\phi)^2 \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} D^4 \\ &= \frac{\pi}{32} (1.0 \text{ Pa s})(1E(3) \text{ s}^{-1})^2 (1E(-3))^2 \left(\frac{(1E(3) \text{ s}^{-1})(9E(2) \text{ kg/m}^3)}{2 \times 1.0 \text{ Pa s}} \right)^{1/2} (0.5 \text{ m})^4 \\ &= 4.116 \text{ W} \end{aligned}$$

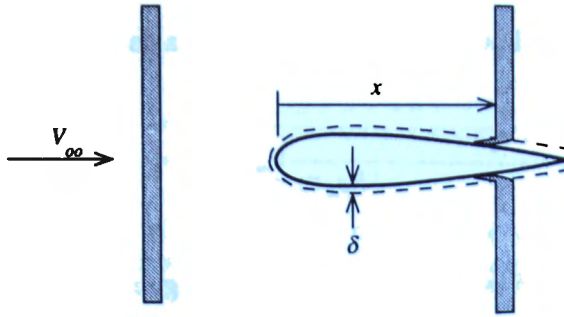


Figura 6.16 Una delgada sección de fluido que fluye por un perfil fuselado o aerodinámico con velocidad V_∞ se ve retrasada por las fuerzas viscosas dentro de una delgada capa límite con espesor δ cerca del perfil fuselado o aerodinámico.

6.6 Capas límite laminares

Se han considerado flujos para los cuales la fuerza viscosa nunca es pequeña comparada con la fuerza de presión o la gravitatoria o con la inercia del fluido. Éstos han sido flujos que se encuentran bajo la influencia de una superficie sólida que ocasiona que el fluido cercano se desplace de forma distinta al fluido más alejado. Estos flujos se caracterizan por un esfuerzo cortante en el fluido cercano a la superficie sólida. Este comportamiento estará siempre presente al moverse un fluido real con respecto a una superficie sólida.

Lo que queda menos claro a partir de los casos ya considerados es que la región del flujo que se encuentra bajo la influencia del fluido que se adhiere a la superficie sólida, v.g., la región de mayor esfuerzo cortante y una fuerza viscosa significativa, en general es sólo una capa delgada cerca de la superficie, que se conoce como *capa límite*, por lo menos en las condiciones del flujo propias de la ingeniería. Para ver por qué sucede esto, considérese el flujo estacionario de aire que pasa por un perfil fuselado o aerodinámico fijo, como se aprecia en la figura 6.16. Una capa delgada de fluido corriente arriba, al fluir corriente abajo, experimentará de pronto una desaceleración al contacto con una parte de la superficie del perfil fuselado aerodinámico, por lo menos en una región próxima a la superficie de espesor δ , el cual se encuentra relacionado con el tiempo de recorrido $t \approx x/V_\infty$ desde la parte anterior del perfil fuselado aerodinámico hasta un punto x a lo largo de la superficie mediante la expresión:

$$\delta \approx \sqrt{\nu t} \approx \left(\frac{\nu x}{V_\infty} \right)^{1/2} \quad (6.79)$$

donde se ha utilizado la relación de la ecuación 6.72 para calcular el espesor de la región que está bajo la influencia de la desigualdad de la velocidad entre el fluido y la superficie sólida. Ahora, permítase la comparación del espesor δ de la capa límite con la distancia x desde el borde de ataque del perfil fuselado o aerodinámico:

$$\frac{\delta}{x} \approx \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.80)$$

donde la longitud Re_x del número de Reynolds se basa en la distancia x y la velocidad V_∞ de la corriente libre:

$$Re_x \equiv \frac{V_\infty x}{\nu} \quad (6.81)$$

Por lo tanto, el espesor δ es mucho menor que la longitud x siempre que $Re_x \gg 1$. El espesor de la capa límite en la mayoría de las estructuras de la ingeniería —alas de aviones, cascos de barcos, hélices, álabes o paletas de turbinas, etc.— es pequeño comparado con la mayor dimensión del dispositivo puesto que, por lo común, éste opera con grandes valores del número de Reynolds. Lo que aún es más importante es que la fuerza viscosa en el campo de flujo que rodea al dispositivo *fuera* de la capa límite es despreciable, v.g., el flujo externo puede considerarse no viscoso. Por esta razón, es posible considerar el campo de flujo como si estuviera dividido en dos regiones, el límite cerca de la superficie sólida que debe tratarse como un flujo viscoso y el resto del campo de flujo que puede considerarse como no viscoso.²⁷

6.6.1 Aproximación en la capa límite

La existencia de una capa límite delgada en un flujo con un número grande de Reynolds garantiza una simplificación importante de la ecuación de Navier-Stokes aplicada al flujo dentro de la capa límite. Para ver cómo se logra esto, considérese el flujo de la capa límite a lo largo de la superficie del perfil fuselado o aerodinámico de la figura 6.16. Si se seleccionan los ejes x , y y x se mide en dirección del flujo a lo largo de la superficie con y normal a ésta, se puede escribir la componente x de la ecuación 6.12 de Navier-Stokes como sigue:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Las magnitudes de los términos de las dos segundas derivadas a la derecha de esta ecuación son muy distintos entre sí: la derivada respecto a y es mucho mayor ya que la distancia δ dentro de la cual la derivada cambia es mucho menor que la distancia x a partir del borde de ataque:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{u}{\delta^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u}{x^2} \approx \frac{u}{\delta^2} \times \frac{1}{Re_x} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

²⁷ Ludwig Prandtl (1875-1953) desarrolló estas ideas físicas en un sobresaliente pero breve artículo publicado en 1905, que influyó mucho en el desarrollo de la mecánica de fluidos en este siglo.

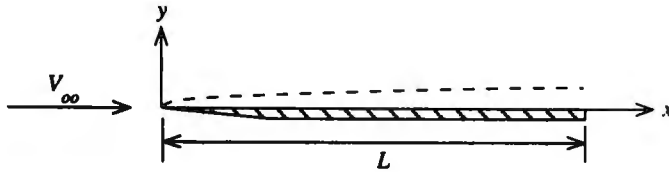


Figura 6.17 Capa límite en la superficie superior de una placa plana alineada con el flujo en un túnel aerodinámico. El espesor de esta capa límite crece con la distancia x desde el borde de ataque.

donde se ha utilizado la ecuación 6.80 para sustituir x^2 . Por lo tanto, es posible despreciar el término $\partial^2 u / \partial x^2$ comparado con los otros términos y así llegar a la *aproximación en la capa límite* a la ecuación de Navier-Stokes:²⁸

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.82)$$

Además, el flujo con capa límite debe satisfacer la ecuación de la conservación de la masa para un flujo incompresible:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.83)$$

Estas ecuaciones son el punto de partida para el examen de varias clases de flujos con capa límite.

6.6.2 Capa límite sobre una placa plana

El tipo más simple de capa límite es el que se desarrolla en una placa plana alineada con el flujo, como se ilustra en la figura 6.17. Puesto que la superficie superior se encuentra alineada en forma precisa con el flujo, no hay cambio de presión en la dirección x y $\partial p^* / \partial x = 0$. De ahí que la ecuación 6.82 que describe la capa límite se simplifique, y en combinación con la ecuación de la conservación de la masa incompresible, las componentes de la velocidad u y v deben satisfacer las relaciones de la cantidad de movimiento y de la conservación de la masa:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.84)$$

Esta combinación de una ecuación diferencial parcial de primer orden y otra de segundo orden, exige que las condiciones en la frontera $u(x, 0) = 0$ y $v(x, 0) = 0$ satisfagan la

²⁸ Al considerar la conservación de la masa, es posible demostrar que el término $\nu(\partial u / \partial y)$ tiene la misma magnitud que $u(\partial u / \partial x)$ y no puede despreciarse en la ecuación 6.82. También, al considerar la componente y de la ecuación de Navier-Stokes, se encuentra que $\partial p^* / \partial y = 0$ y, por lo tanto, $\partial p^* / \partial x$ son independientes de y , lo cual puede expresarse como la derivada total dp^* / dx .

ausencia de deslizamiento en la pared ($y = 0$) y $u(x, \infty) = V_\infty$ a fin de garantizar que la velocidad tangencial del flujo alcance el valor de corriente libre lejos de la superficie de la placa.

La ecuación 6.48 de la capa límite es no lineal, por lo que no existe una solución simple en términos de las funciones trascendentales como se encontró en el caso de la placa infinita, ecuación 6.17. De todos modos, es posible encontrar una solución numérica simple si se supone que la forma de la solución es:

$$\begin{aligned} u &= V_\infty \left(\frac{df}{d\eta} \right) \\ v &= \left(\frac{\nu V_\infty}{2x} \right)^{1/2} \left[\eta \frac{df}{d\eta} - f \right] \end{aligned} \quad (6.85)$$

donde la función f depende sólo de la variable η , que se define como:

$$\eta \equiv \left(\frac{V_\infty}{2\nu x} \right)^{1/2} y \quad (6.86)$$

Se observa que η es, en términos aproximados, la distancia y medida desde la pared dividida entre el espesor δ de la capa límite de la ecuación 6.79. Si se supone esta forma, las ecuaciones 6.84 se reducen a una ecuación diferencial total de tercer orden que se conoce como *ecuación de Blasius*:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) = 0 \quad (6.87)$$

donde las condiciones en la frontera sobre u y v se convierten en $f(0) = 0$, $(df/d\eta)_{\eta=0} = 0$ y $(df/d\eta)_{\eta=\infty} = 1$. La solución numérica a esta ecuación para f y sus derivadas puede sustituirse en la ecuación 6.85 para encontrar las componentes de la velocidad u y v . Estas soluciones se grafican en la figura 6.18 como funciones de la distancia adimensional η medida desde la superficie de la placa plana.²⁹

Rozamiento superficial y resistencia al avance

El perfil de velocidades u de la figura 6.18 tiene casi la misma forma que la diferencia $U - u$ de velocidad para una superficie plana que se desplaza por impulsión (véase la figura 6.14). A partir de este perfil de velocidades, se puede calcular que el valor del esfuerzo cortante τ_w de la pared es:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} \left(\frac{\rho \mu V_\infty^3}{x} \right)^{1/2} = 0.3321 \left(\frac{\rho \mu V_\infty^3}{x} \right)^{1/2} \quad (6.88)$$

²⁹ Los valores numéricos de f y sus derivadas pueden encontrarse en F. M. White, *Viscous Fluid Flow* (Nueva York: McGraw-Hill Book Co.) 1974 y L. Rosenhead, *Laminar Boundary Layers* (Oxford: Oxford University Press) Ed. 1963.

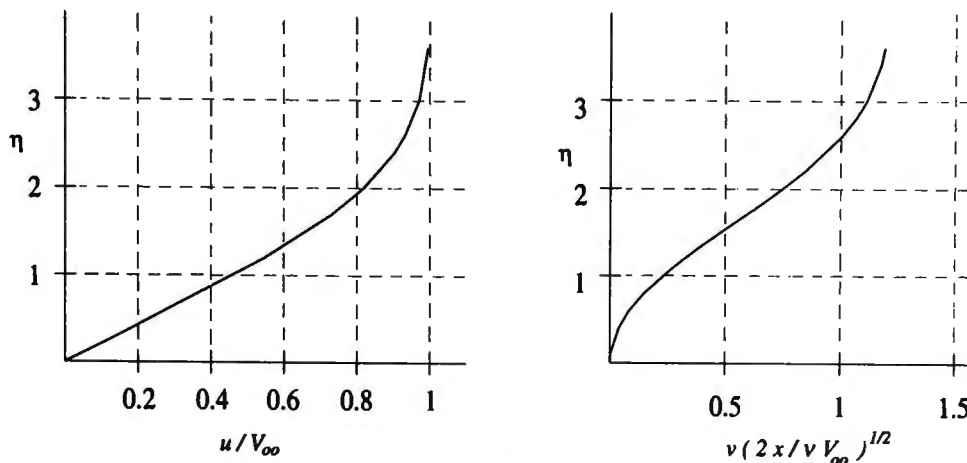


Figura 6.18 Perfiles de velocidad u/V_∞ (izquierda) y $v(2x/\nu V_\infty)^{1/2}$ (derecha) graficados en función de $\eta \equiv y(V_\infty/2\nu x)^{1/2}$ para la capa límite en una placa plana.

donde el coeficiente numérico se obtiene a partir de la solución numérica de la ecuación 6.87 de Blasius. Se acostumbra definir un esfuerzo cortante adimensional de la pared, que se conoce como *coeficiente de rozamiento superficial* C_f , al dividir τ_w entre la presión dinámica $\rho V_\infty^2/2$ del flujo que se aproxima:

$$C_f \equiv \frac{2\tau_w}{\rho V_\infty^2} \quad (6.89)$$

El coeficiente de rozamiento superficial $(C_f)_{fp}$ de una placa plana puede encontrarse al sustituir la ecuación 6.88 en la 6.89:

$$(C_f)_{fp} = 0.6641 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/2} = \frac{0.6641}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.90)$$

Los ingenieros pueden estar interesados en la fuerza total D de resistencia al avance sobre una placa plana. Para una placa con longitud L en la dirección que sigue la corriente y con anchura W perpendicular al flujo, la resistencia al avance D sería:

$$D = 2 \left(W \int_0^L \tau_w dx \right) = 0.6641 (2WL) \left(\frac{\rho \mu V_\infty^3}{L} \right)^{1/2} \quad (6.91)$$

donde el factor $2WL$ es el área total de la placa de las superficies tanto superior como inferior que se encuentran expuestas al flujo. La forma adimensional de la fuerza de

resistencia al avance, denominada *coeficiente de resistencia al avance* C_D , es la razón de la fuerza D de resistencia al avance al área A expuesta multiplicada por la presión dinámica $\rho V_\infty^2/2$:

$$C_D \equiv \frac{2D}{\rho V_\infty^2 A} \quad (6.92)$$

Para la placa plana, el coeficiente de resistencia al avance $(C_D)_{fp}$ se calcula al sustituir la ecuación 6.91 en la 6.92 para obtener:

$$(C_D)_{fp} = \frac{2D}{\rho V_\infty^2 (2WL)} = 1.3282 \left(\frac{\nu}{V_\infty L} \right)^{1/2} = \frac{1.3282}{\sqrt{Re_L}} \quad (6.93)$$

donde Re_L es la longitud del número de Reynolds.

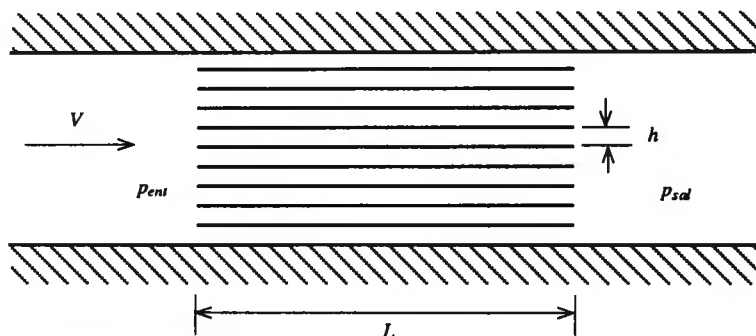


Figura E 6.14

Ejemplo 6.14

Un parallamas en el conducto de admisión de un motor de gasolina, el cual impide que se propague la llama en caso de que en el aire de la admisión existieran gases del combustible, consta de una serie de placas delgadas paralelas alineadas con el flujo de la admisión, como se ilustra en la figura E 6.14. El espacio entre las placas es h y la longitud de la placa, L .

Si se supone que el flujo es incompresible, derívense expresiones para la caída de presión $p_{ent} - p_{sal}$ entre las corrientes del flujo de entrada y el de salida para los casos límite de (a) baja velocidad V , donde el flujo entre cada par de placas es un flujo plano de Poiseuille, y (b) un flujo de alta velocidad, donde se desarrolla una capa límite en cada superficie de las placas como si el flujo estuviera bajo la influencia de placas adyacentes. (c) Determine el número de Reynolds Vh/ν para el cual la caída de presión en (a) y (b) es igual si $L = 10h$.

Solución

(a) Para el flujo plano de Poiseuille, puede encontrarse la caída de presión a partir de la ecuación 6.29:

$$V = \frac{h^2}{12\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x} \right) = \frac{h^2}{12\mu} \frac{p_{ent} - p_{sal}}{L}$$

$$p_{ent} - p_{sal} = \frac{12\mu LV}{h^2}$$

(b) Para un flujo con capa límite, la fuerza \mathcal{D} de resistencia al avance en una placa de anchura W está dada por la ecuación 6.91:

$$\mathcal{D} = 0.664 \sqrt{2WL} \left(\frac{\rho\mu V^3}{L} \right)^{1/2}$$

Si ahora se aplica la integral 5.11 de la cantidad de movimiento a un volumen de control que encierre uno de los canales, se encuentra que:

$$0 = (p_{ent} - p_{sal})(Wh) - \mathcal{D}$$

Al combinar estas expresiones y al resolver para la caída de presión:

$$p_{ent} - p_{sal} = 1.328 \left(\frac{\rho\mu V^3 L}{h^2} \right)^{1/2}$$

(c) Si se igualan las dos expresiones de (a) y (b) para la caída de presión y al resolver para Vh/ν ,

$$\frac{Vh}{\nu} = \left(\frac{L}{h} \right) \left(\frac{12}{1.328} \right)^2 = 10(8.165)^2 = 666.7$$

En el caso de velocidades del flujo para las cuales $Vh/\nu \ll 666.7$, la caída de presión estaría dada por (a), mientras que para $Vh/\nu \gg 666.7$ estaría dada por (b).

Espesor de desplazamiento

Como puede verse en la parte derecha de la figura 6.18, la componente v de la velocidad alcanza un valor constante $v\{x, \infty\}$ en el borde externo de la capa límite. Este valor,

$$v\{x, \infty\} = 1.2168 \left(\frac{\nu V_\infty}{2x} \right)^{1/2} \quad (6.94)$$

se determina mediante la solución numérica de la ecuación 6.87. Este comportamiento significa que el fluido en el borde externo de la capa límite se desplaza hacia afuera

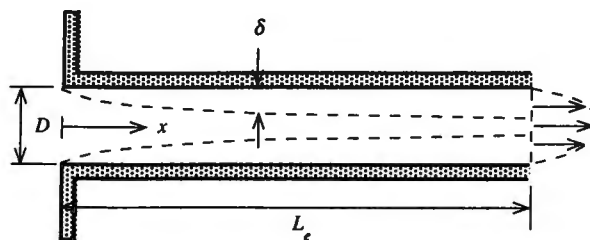


Figura 6.19 Un fluido viscoso fluye hacia la entrada de un tubo largo formando capas límite que crecen hacia el centro y, con el tiempo, conducen a un flujo de Poiseuille a una distancia L_e de la entrada.

formando un ángulo pequeño $v\{x, \infty\}/V_\infty$ porque el fluido dentro de la capa límite se mueve más despacio que la corriente libre y no es capaz de pasar el mismo gasto másico que la corriente libre. Como resultado, el flujo externo es desplazado hacia afuera una distancia δ^* , que se conoce como *espesor de desplazamiento*, por el flujo de movimiento más lento dentro de la capa límite. La magnitud de este desplazamiento es tal, que el gasto volumétrico entre la pared y una distancia y fuera de la capa límite es casi igual al gasto volumétrico a la velocidad V_∞ de la corriente libre entre y y δ^* :

$$\int_0^y u \, dy \equiv V_\infty (y - \delta^*)$$

$$\delta^* \equiv y - \int_0^y \frac{u}{V_\infty} \, dy = \int_0^y \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) \, dy = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) \, dy \quad (6.95)$$

Para la capa límite de la placa plana, es posible evaluar el espesor de desplazamiento δ_{fp}^* al sustituir la ecuación 6.85 en la 6.95 y aplicar la ecuación 6.86:

$$\delta_{fp}^* = \left(\frac{2\nu x}{V_\infty}\right)^{1/2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right) \, d\eta = \left(\frac{2\nu x}{V_\infty}\right)^{1/2} \ln -f|_{\eta=\infty}$$

$$\frac{\delta_{fp}^*}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.96)$$

donde el valor numérico proviene del valor de $\eta - f$ para grandes valores de η en la solución numérica de la ecuación de Blasius. Por lo tanto, para el flujo no viscoso circundante, una placa plana delgada se presenta como si se tratase de una placa de espesor creciente $2\delta_{fp}^*\{x\}$ a lo largo de la cual el flujo no viscoso se desliza sin fricción. Por supuesto, dentro de la capa límite, la viscosidad del fluido ocasiona una desaceleración de una cantidad cada vez mayor de fluido conforme aumenta x .

Longitud de entrada del flujo en un tubo

Cuando un fluido pasa por la entrada de una tubería o tubo largo, el flujo no logra de inmediato la distribución parabólica de la velocidad correspondiente al flujo circular de Poiseuille que se describe en la ecuación 6.40. En lugar de esto, se empieza a formar una capa límite a lo largo de las paredes del tubo y la profundidad δ del fluido desacelerado crece con el aumento de la distancia x a lo largo del eje del tubo, como se esquematiza en la figura 6.19. Cuando el espesor de la capa límite aumenta casi la mitad del radio del tubo, el perfil de velocidades en el tubo habrá casi alcanzado su forma estacionaria para considerarse como un flujo de Poiseuille. Se puede calcular la distancia L_e , conocida como *longitud de entrada*, que se requiere para que el perfil de velocidades alcance el de este flujo plenamente formado al establecer el espesor de la capa límite δ (ecuación 6.79) en $x = L_e$ igual a la mitad del radio del tubo:

$$\delta \sim \left(\frac{\nu L_e}{V_\infty} \right)^{1/2} \sim \frac{D}{4}$$

$$\frac{L_e}{D} \sim \frac{V_\infty D}{16\nu} = \frac{1}{16} Re_D \quad (6.97)$$

En esta región de entrada, el aumento de la capa límite en la pared del tubo desplaza al fluido hacia el eje del tubo, con lo que se estrecha el área del flujo cerca de la entrada una cantidad $\pi D \delta^*$ y ocasiona un aumento correspondiente en la velocidad u del flujo central, v.g., el fluido que está cerca del eje pero fuera de la capa límite. El flujo central no es viscoso y experimenta un gradiente de presión $-dp/dx$ igual a $\rho u(du/dx)$ en el flujo central. Por lo tanto, habrá una caída de presión en la región de entrada que se asocia con el ajuste del flujo que parte de una velocidad uniforme para llegar a un flujo circular de Poiseuille, disminución que resulta ser mayor que la que sucede en un flujo de Poiseuille a lo largo de un tubo de igual longitud. Este incremento en la caída de presión se conoce como *pérdida a la entrada* y se estudiará con más detalle en el capítulo 9.

6.6.3 Capa límite en un punto de estancamiento

¿En qué forma una capa límite en una superficie curva, donde existiera un gradiente de presión que afectara el flujo, diferiría de una placa plana en donde el gradiente de presión fuera nulo? Cuando el gradiente de presión es negativo, v.g., la fuerza de presión está en la dirección del movimiento (situación que se conoce como gradiente de presión favorable), el flujo de capa límite tenderá a parecerse a un flujo plano de Poiseuille con un perfil de velocidades parabólico. Sin embargo, cuando el gradiente de presión está en la dirección opuesta, como se verá más adelante, no es posible que sobreviva la capa límite y se produce la separación del flujo. En esta sección, se considera un ejemplo de flujo con un gradiente de presión favorable: el flujo en el punto de estancamiento es igual al que se encuentra en el borde de ataque de un perfil fuselado o aerodinámico. El punto de estancamiento marca el sitio donde el flujo entrante se divide y pasa por ambos lados del perfil aerodinámico.

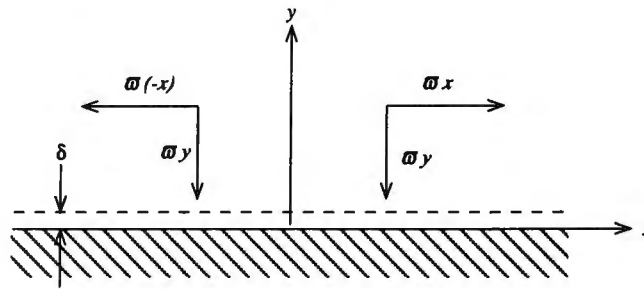


Figura 6.20 La capa límite en un punto de estancamiento sobre un perfil fuselado o aerodinámico tiene un espesor, δ . El flujo no viscoso fuera de la capa límite es simétrico respecto del plano $x=0$.

En la figura 6.20, se esquematiza el flujo en la vecindad inmediata del punto de estancamiento. El espesor δ de la capa límite es tan pequeño comparado con el radio de curvatura del borde de ataque, que el perfil fuselado o aerodinámico es localmente plano. Los ejes x , y miden las distancias a lo largo del perfil aerodinámico y la distancia normal a ésta, el plano $x=0$ que separa el fluido que pasa a la derecha y a la izquierda del punto de estancamiento $(0, 0)$.³⁰ Fuera de la capa límite, el campo de velocidad es no viscoso y tiene la misma forma que el del ejemplo 4.2:

$$u = \omega x; \quad v = -\omega y \quad (6.98)$$

donde el parámetro ω tiene dimensiones de s^{-1} .³¹ Conforme la partícula de fluido se aproxima a la superficie, ésta se alarga lateralmente y disminuye su velocidad.

Para el flujo dentro de la capa límite, se elige la forma:

$$u = \omega x \left(\frac{df}{d\eta} \right); \quad v = -\sqrt{\omega \nu} f \quad (6.99)$$

donde la función f sólo depende de la variable adimensional η , que se define como:

$$\eta \equiv \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{1/2} y \quad (6.100)$$

³⁰ El punto de estancamiento de la figura 6.20 es un punto a lo largo de la *línea de estancamiento* que es normal al plano de la figura y corre en el sentido de la longitud del ala a lo largo de su borde de ataque.

³¹ El término ω es aproximadamente igual a la razón de la velocidad del flujo que se acerca al perfil fuselado o aerodinámico al radio de curvatura del perfil.

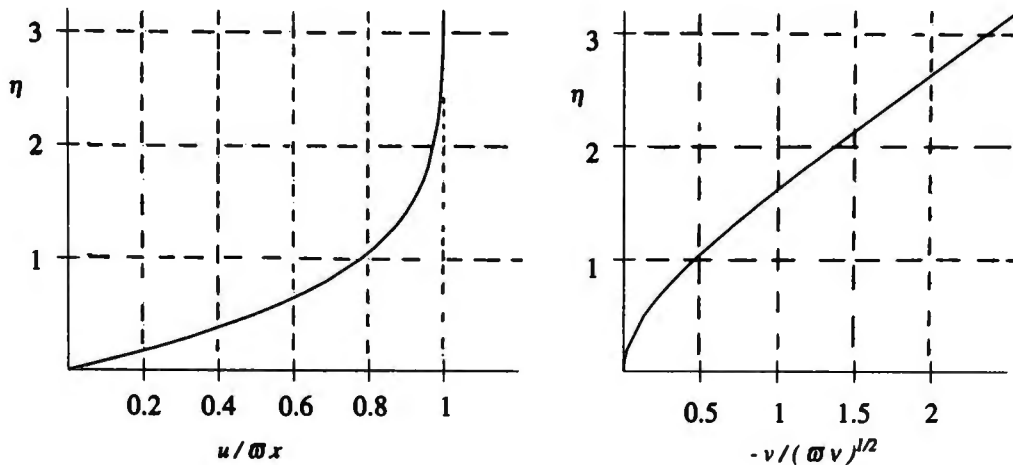


Figura 6.21 Perfiles de velocidad $u/\omega x$ (izquierda) y $-v/(\omega\nu)^{1/2}$ (derecha) graficados en función de $\eta \equiv (\omega/\nu)^{1/2}$ para la capa límite en el punto de estancamiento.

Si ahora se sustituyen las ecuaciones 6.99 y 6.100 en las ecuaciones 6.82 y 6.83 para la capa límite, se encuentra que f es la solución de la ecuación diferencial total:³²

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \left(\frac{df}{d\eta} \right) + 1 - \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 = 0 \quad (6.101)$$

con condiciones en la frontera $f\{0\} = 0$, $(df/d\eta)_{\eta=0} = 0$ y $(df/d\eta)_{\eta=\infty} = 1$. La solución numérica de esta ecuación³³ puede sustituirse en la ecuación 6.99 para calcular las componentes u y v de la velocidad. Éstas se grafican en la figura 6.21 como funciones de la distancia dimensional desde el perfil fuselado o aerodinámico, η .

Comparado con la capa límite de la placa plana de la figura 6.18, la capa límite del punto de estancamiento presenta un perfil más lleno y curvo para $u\{\eta\}$. El espesor de desplazamiento δ^* de la capa límite es:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{\omega x} \right) dy = \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{df}{d\eta} \right) d\eta = \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/2} (\eta - f)_{\eta=\infty} \\ &= 0.6479 \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.102)$$

³² Esta solución es, en realidad, una solución a la ecuación de Navier-Stokes debido a que $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 v / \partial x^2 = 0$ en este caso.

³³ Véase L. Rosenhead, *Laminar Boundary Layers* (Oxford: Oxford University Press) Ed. 1963.

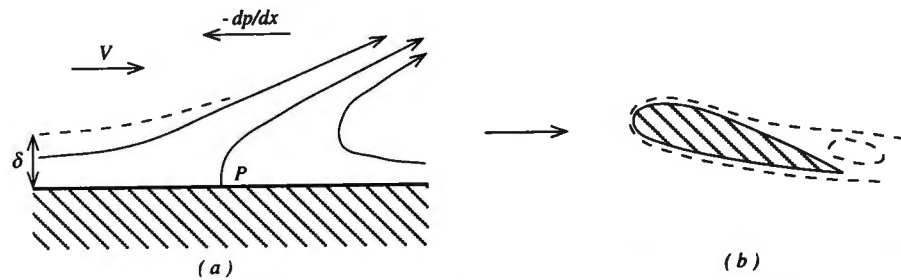


Figura 6.22 Arriba, (a) ilustra el flujo cerca del punto de separación P de una capa límite sometida a un gradiente de presión desfavorable y, en (b), la separación de la capa límite en la parte superior de un perfil fuselado o aerodinámico produce una región de estela viscosa cerca del borde posterior, la cual reduce la fuerza ascensional o sustentación y aumenta la resistencia al avance.

donde el coeficiente numérico proviene de la solución numérica de la ecuación 6.101. Lejos del perfil fuselado o aerodinámico, fuera de la capa límite, la componente v de la velocidad tiene la forma:

$$v = -\sqrt{\omega\nu}(\eta - 0.6479) = -\omega(y - \delta^*) \quad (6.103)$$

Respecto del flujo externo no viscoso, el perfil aerodinámico parece estar en $y = \delta^*$.

6.6.4 Separación de la capa límite

En un flujo con capa límite en una placa plana, el fluido dentro de la capa límite sufre una desaceleración debido a la fricción con la pared, v.g., existe un equilibrio entre la inercia del fluido, $\rho DV/Dt$, y la fuerza viscosa, $\mu \partial^2 u / \partial y^2$. Cuando está presente un gradiente (negativo) de presión favorable, como en el caso de la capa límite en el punto de estancamiento que se describió con anterioridad, la fuerza de presión tiende a acelerar el fluido dentro de la capa límite y esa fuerza debe equilibrarse mediante un aumento de la fuerza viscosa. Sin embargo, si existe un gradiente (positivo) de presión desfavorable, es posible que la fuerza de presión sea suficiente por sí misma para desacelerar el fluido dentro de la capa límite, e incluso provoque que el flujo y el esfuerzo cortante inviertan su dirección. De ocurrir esto, la capa límite se separará de la pared sólida porque su cantidad de movimiento es demasiado pequeña para vencer la fuerza adversa de la presión que actúa sobre ella.

En la figura 6.22(a), se proporciona un esquema del flujo en la vecindad de un punto de separación. Corriente arriba del punto de separación P , el espesor de la capa límite se reduce con rapidez al acercarse el punto de separación, y el esfuerzo cortante de la pared disminuye y tiende a cero. En el punto de separación, el fluido más próximo a la pared se aleja de ella en dirección de la corriente libre al avanzar hacia el fluido que se desplaza corriente arriba y que es empujado por la presión que va en aumento. El flujo inverso corriente abajo del punto de separación forma un flujo separado, v.g., una

región de fluido más lento sujeto a una fuerte influencia de las fuerzas de presión y viscosa. El movimiento subsecuente de la capa límite, una vez que ésta ha abandonado la superficie sólida, se determina por su interacción con el flujo externo, el cual, a su vez, se ve modificado por la región separada. Huelga decir que el cálculo de este complicado flujo corriente abajo del punto de separación, resulta muy difícil.

La separación de la capa límite puede degradar seriamente un flujo en regiones donde la presión se eleva demasiado rápido. Por ejemplo, considérese el flujo que pasa por un perfil fuselado o aerodinámico colocado a cierto ángulo respecto del flujo entrante con el propósito de lograr una fuerza ascensional o sustentación, de acuerdo con el esquema de la figura 6.22(b). Se crea la fuerza ascensional en parte gracias a una región de baja presión en la parte superior del perfil fuselado o aerodinámico. La capa límite en esa parte superior experimenta primero una disminución de la presión (gradiente de presión favorable) que ocurre en la parte anterior del perfil aerodinámico y luego un aumento de presión al aproximarse esa capa límite al borde posterior. Si esta presión aumenta en forma demasiado abrupta, es posible que la capa límite se separe de la superficie superior como se ilustra y se forme, atrás del perfil aerodinámico, una larga estela de flujo recirculante. El flujo externo a la capa límite a lo largo de la superficie superior se ve sustancialmente alterado, al igual que la distribución de presión en la superficie del perfil fuselado o aerodinámico, con lo que se reduce la fuerza ascensional en éste y aumenta su resistencia al avance. En el caso de la eficiente operación de las alas, hélices y compresores de flujo axial de los aviones, debe evitarse la separación de la capa límite mediante un cuidadoso diseño de las secciones de los perfiles fuselados o aerodinámicos.

Es posible que una capa límite evite la separación incluso en presencia de un gradiente de presión adverso, siempre y cuando éste sea suficientemente pequeño. Es posible cuantificar este criterio al exigir que la fuerza de presión $-dp/dx$ (que es igual a la inercia $\rho V dV/dx$ de la corriente libre) sea mucho menor que la fuerza viscosa, $\mu \partial^2 u / \partial y^2$:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho V \frac{dV}{dx} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \mu \frac{V}{\delta^2}$$

$$\frac{dV}{dx} \ll \frac{\nu}{\delta^2} \simeq \frac{V}{x} \quad (6.104)$$

donde se ha supuesto que el espesor δ de la capa límite en cualquier punto se encuentra relacionado, mediante la ecuación 6.79, con la distancia x desde el borde de ataque. La ecuación 6.104 puede interpretarse para afirmar que la longitud a lo largo de la cual aumenta la presión debe ser mucho mayor que la longitud a lo largo de la cual se aceleró el flujo externo o, alternativamente, que el crecimiento de la capa límite durante la fase de aumento de presión debe ser mayor que el que ocurre durante la fase de disminución de la presión. Es por este motivo que las formas fuseladas o aerodinámicas, como en los perfiles fuselados o aerodinámicos, tienen la nariz redondeada con un radio de curvatura que es pequeño comparado con la longitud del perfil fuselado o aerodinámico.

6.7 Problemas

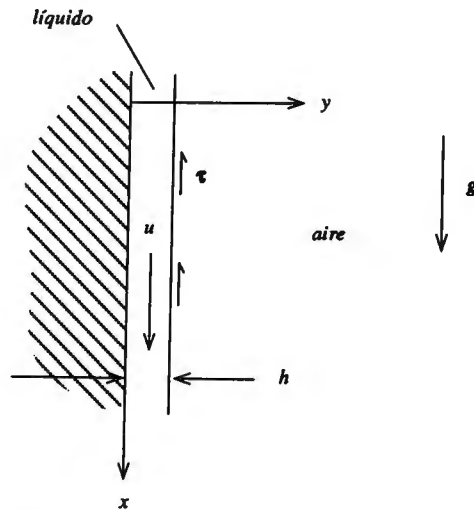


Figura P 6.1

Problema 6.1

Bajo la influencia de la gravedad, un líquido viscoso (con densidad ρ y viscosidad μ) fluye hacia abajo por una pared vertical fija, formando una película delgada de espesor constante h . Un flujo de aire que apunta hacia arriba y que se encuentra próximo a la película, ejerce un esfuerzo cortante τ hacia arriba sobre la superficie de la capa de líquido, como se ejemplifica en la figura P 6.1. La presión en el flujo es uniforme.

Deduzca expresiones para (a) la velocidad $u(y)$ como función de y y los parámetros del flujo ρ , μ , h y τ , y (b) el esfuerzo cortante τ que resultaría con un gasto volumétrico nulo en la película.

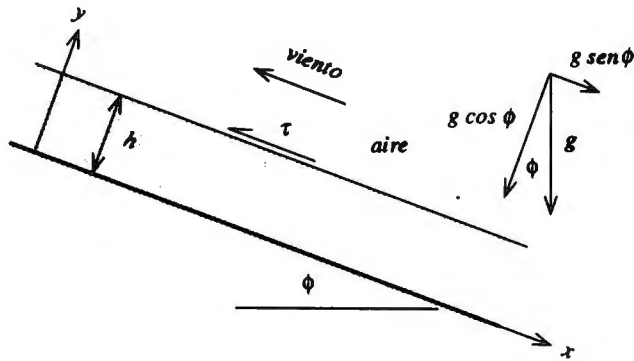


Figura P 6.2

Problema 6.2

Cuando la lluvia escurre por un techo, se forma una capa con velocidad u y gasto volumétrico Q/W dados por las ecuaciones 6.32 y 6.34, respectivamente. Como se ilustra en la figura P 6.2, considere el caso de un flujo de aire dirigido hacia arriba que ejerce un esfuerzo cortante τ sobre la superficie superior ($y = h$) de la capa de líquido. El flujo del viento tiende a empujar la capa de lluvia hacia arriba, en tanto que la gravedad ejerce sobre ella una fuerza hacia abajo. Obtenga una expresión para el espesor h de la capa de líquido para la cual no hay gasto volumétrico neto Q/W a lo largo del techo y exprese la respuesta en términos de los parámetros τ , ρ , g y ϕ .

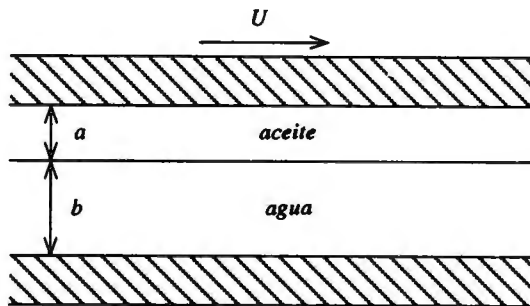


Figura P 6.3

Problema 6.3

Una capa de aceite con espesor a y viscosidad μ_0 flota en la superficie de una capa de agua con espesor b y viscosidad μ_w . Ambas capas están contenidas entre dos placas planas grandes; la placa inferior es fija y la superior se desplaza con una velocidad U en la dirección x (véase la figura P 6.3). Halle expresiones para (a) la velocidad V_i de la interfaz agua-aceite y (b) los gastos volumétricos del aceite y del agua, Q_0/W y Q_w/W ,

por unidad de distancia normal a la dirección del flujo. Exprese las respuestas en términos de los parámetros conocidos a , b , μ_w , μ_o y U .

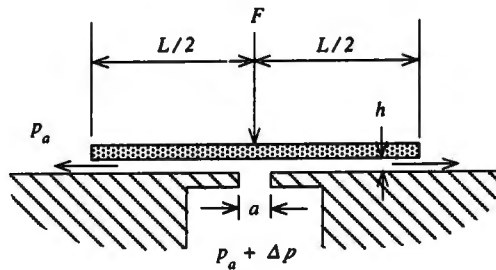


Figura P 6.4

Problema 6.4

En la figura P 6.4, una placa con anchura $L = 10 \text{ cm}$ y longitud $W = 1 \text{ m}$ soporta una carga $F = 1E(5) \text{ N}$ mediante un flujo de aceite con viscosidad $\mu = 1E(-2) \text{ Pa s}$ entre la placa y una estructura de apoyo. El aceite, que se suministra a una presión $p_a + \Delta p$ y con un gasto volumétrico Q , se introduce en el centro a través de una ranura con una anchura $a = 1 \text{ cm}$ y fluye en dirección horizontal hacia la atmósfera, cuya presión es p_a . Calcule la presión Δp y el gasto volumétrico Q que se necesita para mantener una altura de separación $h = 0.1 \text{ mm}$ entre la placa y la estructura de apoyo.

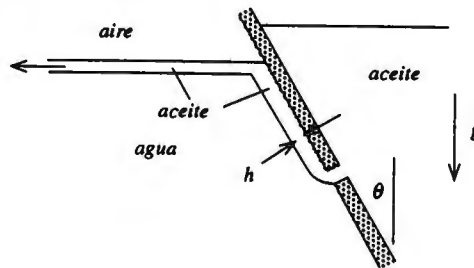


Figura P 6.5

Problema 6.5

Una barcaza llena de petróleo ha sufrido una fractura longitudinal delgada en uno de sus lados y se extiende a una distancia $W = 3 \text{ m}$ en dirección perpendicular al plano de la

figura P 6.5. A través de la hendidura, se fuga el petróleo y, puesto que es menos denso que el agua, asciende por el lado dañado de la barcaza (con un ángulo de inclinación $\theta = 30^\circ$ respecto de la vertical) en la forma de una delgada capa con espesor constante $h = 1 \text{ cm}$. Al llegar a la interfaz aire-agua, la capa de petróleo fluye lateralmente y se aleja de la barcaza. La densidad del petróleo es $\rho_o = 0.9E(3) \text{ kg/m}^3$, en tanto que la del agua es $\rho_w = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$. La viscosidad del petróleo, $\mu_o = 0.1 \text{ Pa s}$, es mucho mayor que la del agua. Calcule el valor del gasto volumétrico Q del flujo que sale de la barcaza.

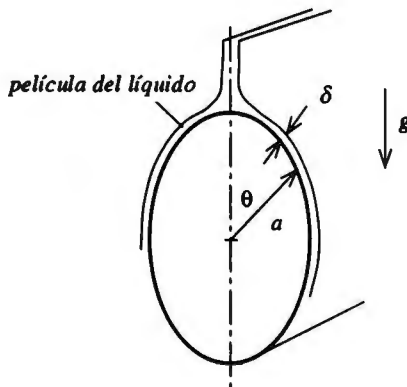


Figura P 6.6

Problema 6.6

Una corriente de líquido viscoso, de densidad ρ y viscosidad μ , se descarga desde una ranura sobre la superficie superior de un cilindro circular horizontal de radio a con un gasto volumétrico Q/W conocido por unidad de longitud del cilindro. El fluido fluye alrededor de la circunferencia del cilindro bajo la acción de la gravedad, formando una película delgada, como se aprecia en la figura P 6.6.

(a) Si se supone que es posible despreciar la inercia del fluido, encuentre una expresión para el espesor δ de la capa como función del ángulo θ respecto a la vertical y los parámetros a , ρ , μ , g y Q/W . (b) Si se supone que el flujo es no viscoso, obtenga una expresión para el espesor δ . (c) Deduzca una expresión de la desigualdad que garantice que se observará el flujo de (a) más bien que el de (b).

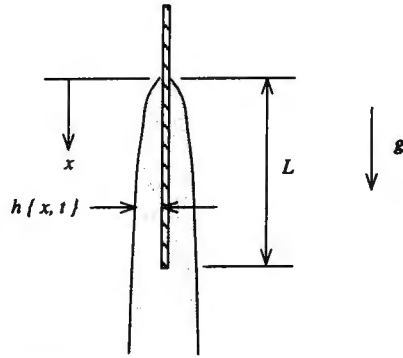


Figura P 6.7

Problema 6.7

Una placa plana delgada con anchura W se sumerge en un fluido viscoso a una profundidad L y, al poco tiempo, se saca. Luego, se mantiene fija en posición vertical mientras el fluido se escurre, como se aprecia en la figura P 6.7. El espesor $h\{x, t\}$ de la película de fluido aumenta de la parte superior ($x=0$) hacia la parte inferior ($x=L$) y disminuye con el tiempo conforme escurre el fluido. Si se supone que la inercia del fluido es despreciable y que en cualquier punto existe un equilibrio de las fuerzas de gravedad y viscosa en la película de fluido en la placa, (a) encuentre una expresión para el gasto volumétrico por unidad de anchura, Q/W , en la película en uno de los lados de la placa como función del espesor $h\{x, t\}$ de la misma y las propiedades del fluido. (b) Del principio de la conservación de la masa, demuestre que existe una solución con la forma:

$$h\{x, t\} = x^{1/2} f\{t\}$$

donde $f\{t\}$ es función sólo de t , y determine el valor de la función $f\{t\}$ si se conoce $h_0 \equiv h\{L, 0\}$.

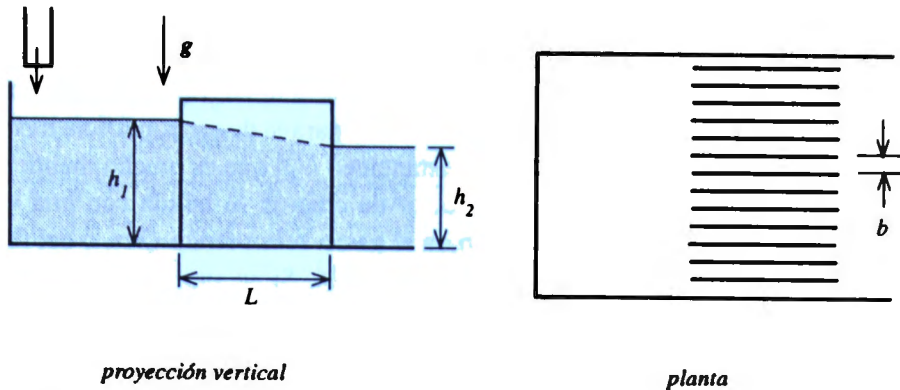


Figura P 6.8

Problema 6.8

Considere el problema de medir el gasto volumétrico de un líquido muy viscoso que fluye en un canal descubierto. Un método novedoso para el cálculo del gasto volumétrico comprende la medición del cambio de altura en el fluido al pasar por un conjunto de placas verticales espaciadas entre sí una distancia pequeña. En la figura P 6.8, el fluido entra al canal desde arriba a través de una espiga que está a la izquierda y fluye en forma estacionaria hacia la derecha con una profundidad uniforme h_1 . A cierta distancia corriente abajo, el fluido pasa por un conjunto de placas separadoras uniformemente espaciadas que se encuentran orientadas verticalmente en el canal. El espaciado entre las placas es b y la longitud en la dirección del flujo es L . Cuando el flujo emerge de entre las placas, la profundidad del fluido es h_2 . La geometría es tal que $b \ll L, h_1, h_2$, lo cual permite despreciar todos los efectos terminales. Si se supone que el flujo entre las placas es localmente un flujo plano de Poiseuille, deduzca una expresión para el gasto volumétrico Q entre dos placas, en términos de las propiedades del fluido ρ y μ y los parámetros geométricos b, L, h_1 y h_2 .

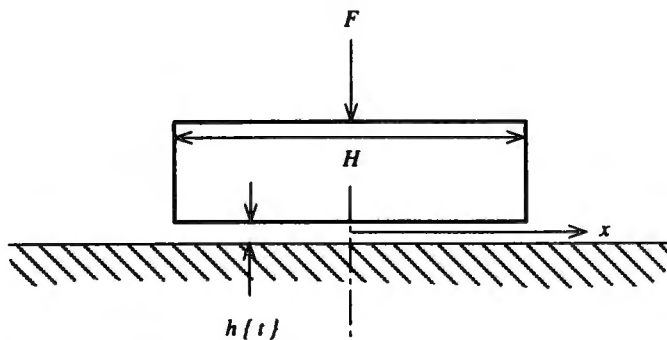


Figura P 6.9

Problema 6.9

La figura P 6.9 presenta el sector de empuje de una chumacera que tiene forma rectangular con una anchura L y una longitud $W \gg L$ que descansa sobre una superficie horizontal plana pero que se encuentra separada de esa superficie mediante una película delgada de aceite con espesor instantáneo $h\{t\}$ que es mucho menor que L . Una fuerza constante F ocasiona que el sector de empuje se hunda con una velocidad variable $S\{t\}$. (a) Halle una expresión para el gasto volumétrico $Q\{x, t\}$ del fluido que pasa por una sección x en términos de W , x y $h\{t\}$. Si se supone que la inercia del aceite es despreciable, encuentre expresiones para (b) la presión $p\{x, t\}$ en cualquier posición x y (c) la velocidad $S\{t\}$ como función de F , L , W , h y la viscosidad del fluido μ . (d) Demuestre cómo es que se llevaría un tiempo infinito para que el sector de empuje entrara en contacto con la superficie subyacente.

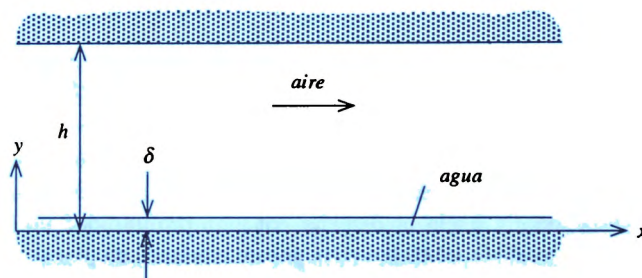


Figura P 6.10

Problema 6.10

Un largo canal bidimensional de forma horizontal y altura h lleva un flujo laminar estacionario totalmente desarrollado de aire en la dirección x , el cual es producido por un gradiente de presión constante negativo, dp/dx . (No hay flujo o cambio en la dirección z). Una capa muy delgada de agua con espesor constante δ fluye a lo largo del fondo del canal, como se ilustra en la figura P 6.10. El espesor δ de la capa de agua es mucho menor que la altura h del canal, y la viscosidad μ_w del agua es mucho mayor que la del aire, μ_a . En términos de los parámetros h , δ , μ_a , μ_w y dp/dx del flujo, halle expresiones para (a) el esfuerzo cortante en la interfaz aire-agua, si se supone que la capa de agua no ejerce ningún efecto en el flujo de aire, y (b) el perfil de velocidades $u\{y\}$ en la capa de agua, si se supone que el esfuerzo cortante en la superficie del agua tiene el valor determinado en (a). (c) Demuestre que el efecto directo que el gradiente de presión ejerce sobre $u\{y\}$ es pequeño.

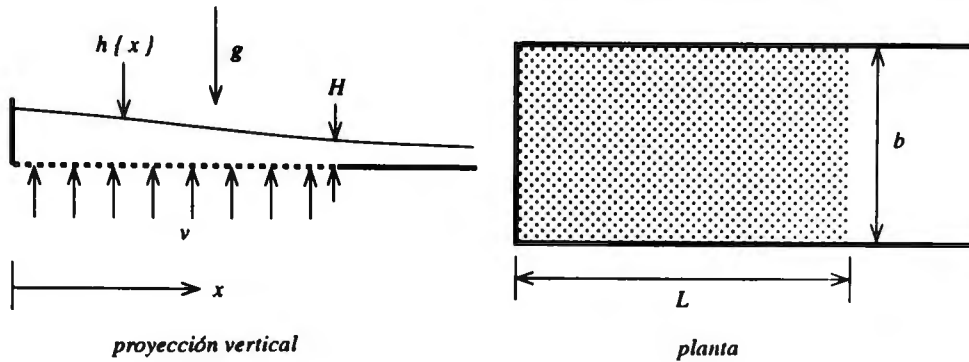


Figura P 6.11

Problema 6.11

Un líquido viscoso con densidad ρ y viscosidad μ se filtra lentamente, a través del suelo poroso de un canal rectangular descubierto a la atmósfera, con una velocidad v que es uniforme en toda el área porosa con longitud L y anchura b , como se aprecia en la figura P 6.11. El canal está cerrado en su extremo izquierdo $x = 0$ y se extiende hacia la derecha más allá del extremo del suelo poroso, $x = L$. El espesor $h(x)$ del fluido disminuye al aumentar x y tiene un valor H en $x = L$. En términos de los parámetros conocidos v , b , L , H , ρ y μ y el espesor desconocido $h(x)$ de la capa, obtenga expresiones para (a) el gasto volumétrico $Q(x)$, (b) la distribución de presiones $p(x, y)$ y (c) la distribución de velocidades en dirección horizontal en cualquier sección a una distancia x desde el extremo izquierdo. (d) A partir de estas expresiones, encuentre una expresión para $h(x)$.

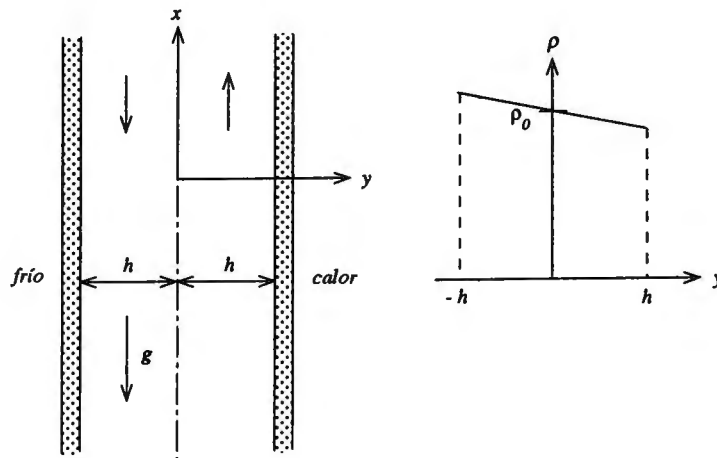


Figura P 6.12

Problema 6.12

Una capa de aire entre dos placas de vidrio en una ventana aislante de doble vidrio tiene una densidad ρ que varía linealmente con la distancia y desde el centro de la capa de aire,

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha y)$$

cuando se conduce calor desde el interior caliente hacia el exterior frío, como se ilustra en la figura P 6.12. (Sin embargo, la viscosidad μ es uniforme dentro de la capa de aire.) En consecuencia, el aire se desplaza hacia arriba en la parte caliente ($0 \leq y \leq h$) y hacia abajo en la parte fría ($-h \leq y \leq 0$), y las líneas de corriente son paralelas a la superficie del vidrio. Por simetría, el gasto volumétrico hacia arriba en el lado caliente es igual al gasto volumétrico hacia abajo en la parte fría. (a) Haga un diagrama del perfil de velocidades $u\{y\}$ en dirección vertical. Establezca las condiciones en la frontera para u en $y = 0$ y $y = \pm h$. (b) Obtenga una expresión para el gradiente de presión $\partial p / \partial x$ a lo largo del plano central $y = 0$, al notar que la fuerza de presión y la fuerza de gravedad se equilibran justo en ese lugar. (c) Deduzca una expresión para el perfil de velocidades $u\{y\}$ en dirección vertical en términos de los parámetros ρ_0 , α , h y μ .

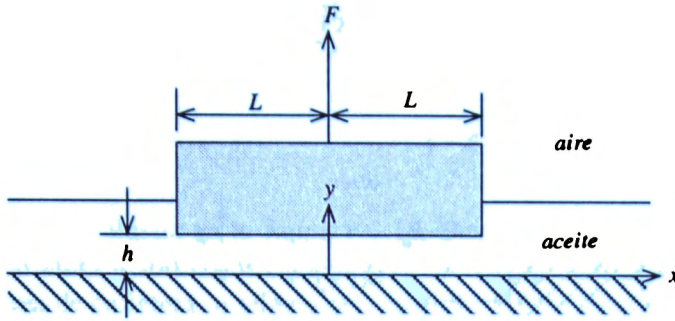


Figura P 6.13

Problema 6.13

Un bloque sólido rectangular con anchura $2L$ y de gran longitud, $W \gg L$, se encuentra parcialmente sumergido en una capa de aceite de un depósito. El bloque está separado del fondo del depósito por una distancia h que es mucho menor que L (véase la figura P 6.13). Se tira hacia arriba el bloque con una velocidad constante v al aplicar una fuerza F . (a) Encuentre una expresión para el gasto volumétrico $Q(x)$ en cualquier sección que esté a una distancia x del plano de simetría como función de x , v y W . (b) Si se desprecia la gravedad y se supone que la inercia del aceite puede despreciarse, obtenga una expresión para la fuerza F como función de la altura h y de los parámetros μ , v y L .

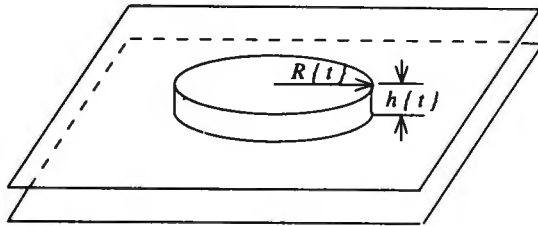


Figura P 6.14

Problema 6.14

Un volumen fijo \mathcal{V} de aceite viscoso se encuentra atrapado entre dos placas paralelas. Se aplica una fuerza F normal a las placas de modo que el aceite forme un volumen cilíndrico con radio $R(t)$ y altura $h(t)$ que varía con el tiempo al presionar el aceite entre las dos placas (véase la figura P 6.14).

(a) Aplicando la conservación de la masa a un volumen cilíndrico de aceite con radio r , obtenga una expresión para la velocidad radial promedio \bar{V}_r , en términos de r , la separación h de la placa y su derivada respecto al tiempo dh/dt . (b) Si se supone que el flujo radial del aceite que está entre las placas se comporta localmente como un flujo plano de Poiseuille, encuentre una expresión para la fuerza F como función del volumen

ν , la viscosidad del fluido μ , h y dh/dt . (c) Mediante la integración de (b), deduzca una expresión para $h\{x\}$.

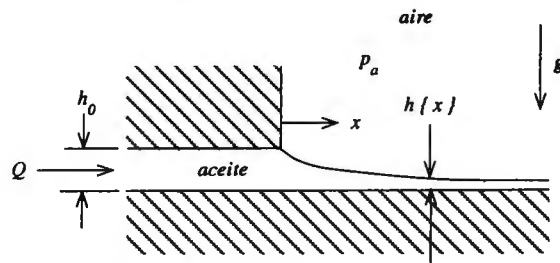


Figura P 6.15

Problema 6.15

En la figura P 6.15, se observa una fuga de aceite viscoso con un gasto volumétrico Q hacia la atmósfera por una hendidura con una altura h_0 sobre una superficie horizontal, donde el flujo continúa su camino horizontal, pero su espesor $h\{x\}$ disminuye. La anchura W de la hendidura en la dirección normal al plano del flujo es mucho mayor que h_0 . Si se supone que el espesor inicial de la capa en $x=0$ es h_0 , obtenga una expresión para $h\{x\}$ como función de los parámetros h_0 , Q , W y las propiedades del aceite ρ y μ .

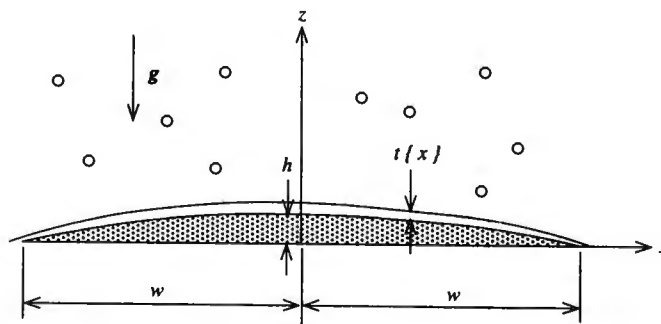


Figura P 6.16

Problema 6.16

Una carretera de anchura w de tamaño mediano tiene forma convexa en su centro de forma que la lluvia escurre hacia los lados. La elevación z de superficie (medida por

encima del nivel del acotamiento de la carretera) es una parábola con una altura h ($\ll w$) en el centro de la carretera:

$$z = h \left(1 - \frac{x^2}{w^2} \right)$$

como se ilustra en la figura P 6.16. Durante una tormenta, sobre la superficie de la carretera se forma una capa de agua con un espesor $t(x)$. El gasto másico por unidad de área de carretera se mide y resulta ser m . En términos de los parámetros conocidos h , w , m y de la densidad ρ y viscosidad μ de la lluvia, encuentre expresiones para (a) el gasto volumétrico $q(x)$ de agua que escurre de la carretera por unidad de longitud normal al plano de la figura P 6.16, a cualquier distancia x medida desde la línea central y (b) el espesor $t(x)$ de la capa de agua que se forma sobre la superficie de la carretera como función de la distancia x medida desde la línea central de la carretera. (c) Calcule t en $x = 0$ si $m = 1E(-2) \text{ kg/m}^2\text{s}$, $h = 0.1 \text{ m}$, $w = 5 \text{ m}$, $\mu = 1.31E(-3) \text{ Pa s}$ y $\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$.

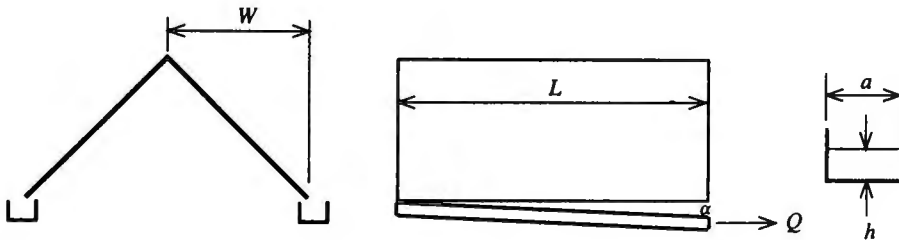


Figura P 6.17

Problema 6.17

Un arquitecto está diseñando unos canalones de recogida de aguas para llevarse el agua de lluvia que cae sobre un techo de dos aguas, como se ilustra en la figura P 6.17. El techo tiene una longitud $L = 20 \text{ m}$ y semiancho $W = 8 \text{ m}$. Cada canalón tendrá una sección transversal cuadrada con una anchura $a = 0.1 \text{ m}$. Los canalones se instalarán formando un ligero ángulo $\alpha = 1E(-3) \text{ radianes}$ respecto de la horizontal, de forma que toda la lluvia que caiga sobre el techo se escurra desde uno de los extremos de cada canalón. El arquitecto desea saber si el canalón se desbordará para condiciones de la máxima tasa de precipitación pluvial esperada $p = 1 \text{ in/h}$. (Ésta es la tasa a la cual el agua de lluvia se acumularía en una superficie plana, nivelada y sin desagüe.)

- Calcule el valor numérico del gasto volumétrico Q [m^3/s] que sale del extremo más bajo de uno de los canalones durante la tormenta de lluvia que considera el diseño.
- Si se supone que el flujo es laminar y viscoso, halle una expresión para la altura h del agua de lluvia acumulada en el canalón en su extremo más bajo en términos del gasto volumétrico Q , la anchura a , la densidad ρ del agua y la viscosidad μ del agua.
- Calcule el valor de h a partir de las respuestas de los puntos (a) y (b) con

$\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1E(-3) \text{ Pa s}$. (d) ¿Cuál sería la altura del agua de lluvia en el canalón en un punto situado a la mitad de la longitud del canalón?

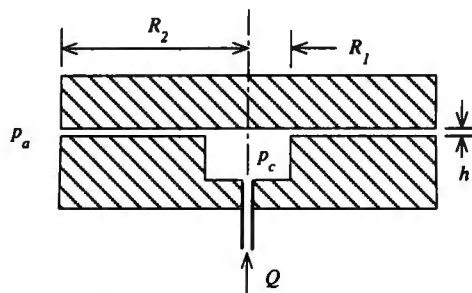


Figura P 6.18

Problema 6.18

Un medidor de flujo improvisado consta de una placa circular superior con radio R_2 y otra placa circular inferior con el mismo radio externo pero que contiene una cavidad central de radio R_1 de la cual se presenta una sección transversal en la figura P 6.18. Las dos placas están separadas por un pequeño espacio de espesor h ($\ll R_1$). La cavidad recibe un flujo estacionario de gas con un gasto volumétrico Q desconocido y la presión se determina que es p_c . El gas se mueve radialmente hacia afuera por el espacio entre las placas, que escapa hacia la atmósfera donde la presión es p_a . Puede considerarse que el flujo del gas es incompresible.

(a) Si se supone que el flujo es no viscoso, deduzca una expresión para el gasto volumétrico Q en términos de las cantidades conocidas p_c , p_a , ρ y las dimensiones que se indican en la figura P 6.18. (b) En el supuesto de que el flujo sea muy viscoso y que para cualquier radio r el perfil de velocidades es el de un flujo plano de Poiseuille, obtenga una expresión para Q en términos de p_c , p_a , ρ , μ y las dimensiones que aparecen en la figura P 6.18. (c) Exprese el requisito de que el flujo se regiría por las condiciones de (b) en lugar de las de (a) en términos de un parámetro adimensional.

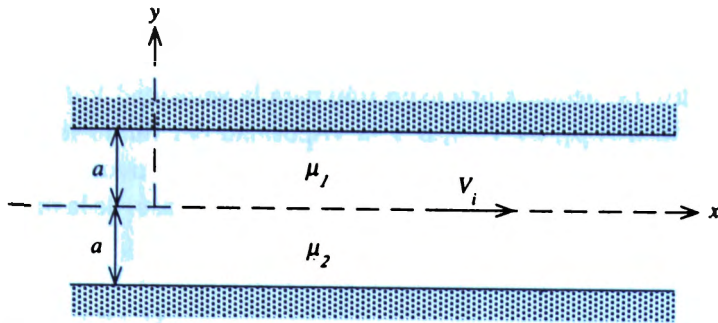


Figura P 6.19

Problema 6.19

Dos líquidos inmiscibles con viscosidades μ_1 y μ_2 fluyen uno encima del otro en un canal horizontal que tiene una altura fija $2a$ y una extensión infinita en la dirección del flujo sujeto a la influencia de un gradiente de presión constante negativo, dp^*/dx . (La dimensión del canal W en dirección normal al plano del flujo es mucho mayor que $2a$.) Cada uno de los fluidos ocupa la mitad del canal, como se aprecia en la figura P 6.19. Si se considera que el flujo tanto del fluido superior como del inferior es un flujo combinado de Poiseuille y Couette con un gradiente de presión dp^*/dx y una velocidad interfacial V_i , encuentre expresiones para (a) V_i , (b) los gastos volumétricos Q_1/W y Q_2/W para los dos fluidos y (c) el perfil de velocidades $u_1(y)$ en el fluido 1 en términos de los parámetros a , μ_1 , μ_2 y dp^*/dx .

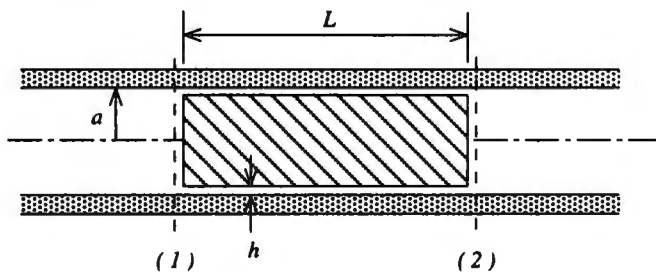


Figura P 6.20

Problema 6.20

Considere un cilindro circular sólido que se inserta en una tubería con diámetro ligeramente mayor, el cual se utiliza para separar dos fluidos distintos que se bombean en serie por la tubería. La figura P 6.20 ilustra un cilindro con longitud L dentro de una tubería de radio a y con un espacio radial $h \ll a$ entre su superficie y la superficie interna de la tubería. Cuando la presión p_1 en 1 supera la presión p_2 en 2, el cilindro se desplazará hacia la derecha con una velocidad constante V .

Si se supone que el flujo entre el cilindro y la pared de la tubería puede considerarse como un flujo estacionario plano de Couette y Poiseuille en un marco de referencia fijo en el cilindro, (a) deduzca una expresión para la velocidad V del cilindro en términos de los parámetros p_1 , p_2 , L , h , a y la viscosidad del fluido μ . (b) Si Q es el gasto volumétrico de fluido que se fuga por el espacio, relativo al cilindro, obtenga una expresión para la razón $Q/\pi a^2 V$, la cual es la razón del gasto de la fuga al gasto del fluido por la tubería.

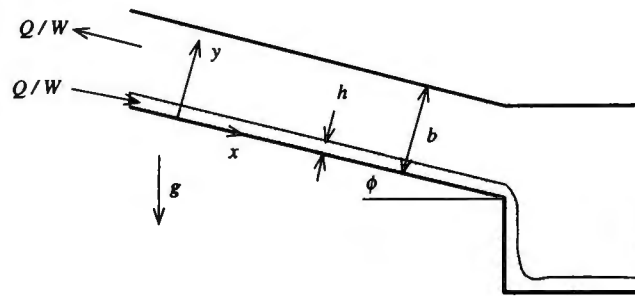


Figura P 6.21

Problema 6.21

Como se ilustra en la figura P 6.21, un canal rectangular con una altura b y anchura W que está inclinado y forma un ángulo ϕ por encima de la horizontal, recibe un fluido de densidad ρ_1 con un gasto volumétrico Q . El canal es lo suficientemente largo y ancho dando por resultado un flujo viscoso estacionario. El denso fluido forma una capa con espesor constante h al fluir por el canal y hacia una cámara cerrada localizada en el extremo inferior del canal. En esta cámara, el fluido en cuestión desplaza (sin mezclarse) un fluido más ligero, cuya densidad es ρ_2 , el cual se mueve luego hacia arriba por el canal con el mismo gasto volumétrico Q . El fluido más ligero tiene una viscosidad μ_2 que es mucho menor que la del fluido denso, μ_1 .

(a) Obtenga expresiones para el espesor h de la capa de fluido denso y su velocidad u_i en la interfaz entre los dos fluidos, advirtiendo que este fluido denso es mucho menos viscoso que el fluido ligero. (b) Calcule una expresión para el gradiente de presión dp/dx a lo largo del canal.

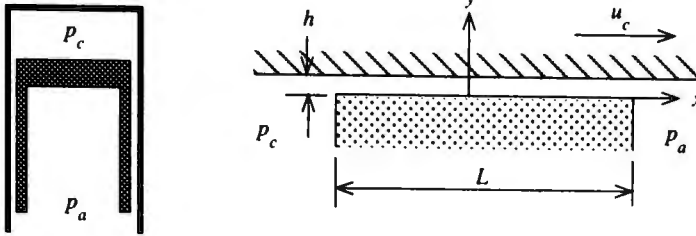


Figura P 6.22

Problema 6.22

En la figura P 6.22, un pistón colocado en el cilindro de un motor de combustión interna se desliza de un lado hacia otro sobre una delgada película de aceite que llena la holgura entre la superficie del pistón y la pared del cilindro. El espesor de la holgura h es uniforme a lo largo de la longitud L y la circunferencia del pistón y es mucho menor que estas dos dimensiones.

Se desea determinar la velocidad del aceite en la holgura. Suponga que la inercia del aceite es despreciable comparada con las fuerzas de presión y viscosa, y se escoge un sistema de referencia fijo en el pistón en movimiento, como se aprecia en la figura P 6.22. En este sistema de coordenadas, la pared del cilindro se mueve con una velocidad u_c :

$$u_c = u_m \operatorname{sen} \omega t$$

donde u_m es la velocidad máxima del pistón y ω es la frecuencia angular del cigüeñal. La presión debajo del pistón es la presión atmosférica p_a , en tanto que por encima del pistón en la cámara de combustión, p_c , es:

$$p_c = p_a + \frac{p_m}{2} (1 - \cos \omega t)$$

donde p_m es el máximo aumento de presión en el cilindro, el cual ocurre en $\omega t = \pi$.

Si se supone que el flujo de aceite en la holgura es una combinación de flujos planos de Couette y Poiseuille, (a) obtenga una expresión para la distribución de velocidades $u\{y, t\}$ en términos de los parámetros p_m , u_m , ω , h , L y la viscosidad μ . (b) Encuentre una expresión para el gasto volumétrico \bar{Q} promediado en el tiempo del aceite al lado del pistón.

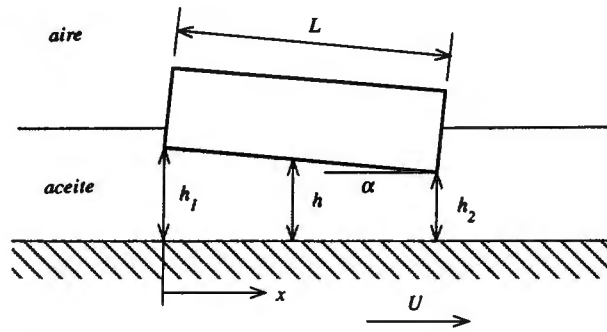


Figura 6.23

Problema 6.23

La experiencia cotidiana enseña que al lubricarse con aceite superficies sólidas deslizantes, la fricción se reduce mucho. Esta situación se ilustra en la figura P 6.23, en la cual un bloque de gran longitud W (perpendicular al plano de la figura) se desliza con velocidad relativa U sobre una película de aceite con espesor $h(x)$, el cual es mucho menor que la anchura L ($\ll W$) del bloque. El dibujo de la figura P 6.23 se realizó en el marco de referencia del bloque de forma que la superficie del fondo se mueve con una velocidad U , mientras el bloque está fijo. Éste está inclinado y forma un ángulo α con la horizontal; el ángulo es muy pequeño por lo que $\sin \alpha \simeq \alpha$ y $\cos \alpha \simeq 1$. Si se desprecia la gravedad de forma que $p(0) = p(L)$ y si se supone que la inercia del fluido es despreciable, halle una expresión para el gasto volumétrico Q de aceite a través del espacio entre el bloque y la superficie horizontal medido en el marco de referencia de la figura P 6.23. Exprese la respuesta en función de U , W , h_1 y h_2 .

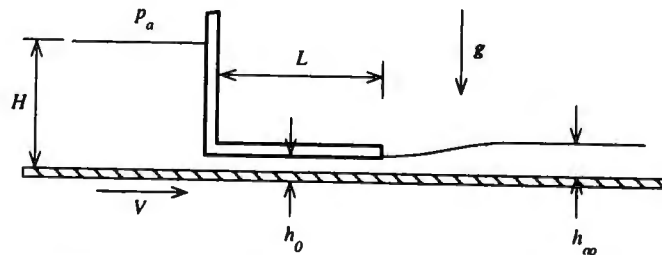


Figura P 6.24

Problema 6.24

En una operación de fabricación, se produce una película continua de polímero al tirar una banda con una velocidad V por debajo de un depósito que contiene el polímero líquido (véase la figura P 6.24). El líquido es arrastrado en la banda por una estrecha ranura con altura h_0 y, luego, una vez que el líquido ha logrado su espesor h_∞ final de equilibrio en la banda, se endurece el polímero y después se enrolla lejos del lado derecho de la figura P 6.24.

El polímero líquido tiene una viscosidad μ y densidad ρ , y la altura h_0 de la ranura es mucho más pequeña que su longitud L . Dependiendo de la altura H del líquido en el depósito, el espesor final h_∞ de la película puede ser mayor o menor que la altura de la ranura h_0 . Se desea determinar la altura H del depósito que haga que $h_\infty = h_0$. Encuentre expresiones para H que garanticen esta igualdad cuando (a) el fluido es muy viscoso y (b) cuando éste puede considerarse no viscoso. Exprese las respuestas en términos de los parámetros que se conocen, V , L , h_0 , μ y ρ . (d) Enuncie un criterio que garantice que sea válido alguno de los puntos (a) o (b).

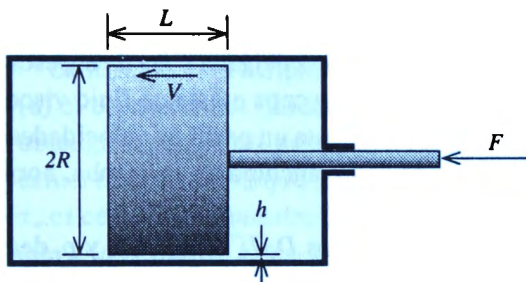


Figura P 6.25

Problema 6.25

Un amortiguador es un dispositivo instalado entre el eje de una rueda y el chasis de un vehículo con el fin de absorber la vibración. El amortiguador consta de un pistón con radio R dentro de un cilindro y existe una holgura h entre el pistón y la pared del cilindro. Este espacio es mucho menor que la longitud L del pistón, como se ilustra en la figura P 6.25. Al moverse con una velocidad V , el pistón desplaza aceite de uno de sus lados hacia el otro a través de la holgura entre el mismo y la pared del cilindro.

Si se desprecia la inercia del aceite, obtenga expresiones para (a) el gasto volumétrico Q que pasa al lado de una sección del espacio de la holgura, (b) el gradiente de presión dp/dz en esa holgura y (c) la fuerza F aplicada al pistón en términos de los parámetros V , h , L , R y la viscosidad μ del aceite.

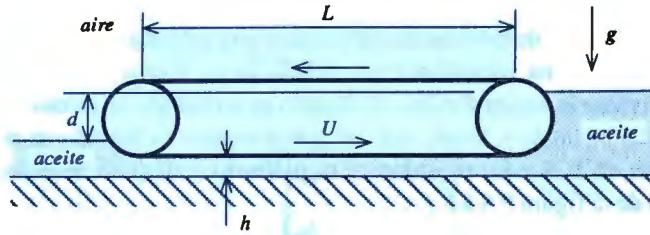


Figura P 6.26

Problema 6.26

Desde un depósito a otro, los dos abiertos a la atmósfera, se bombea aceite (con viscosidad μ y densidad ρ), mediante una bomba accionada por banda cuya sección transversal se esquematiza en la figura P 6.26. Las componentes de la velocidad del fluido se encuentran completamente sobre el plano de la figura P 6.26 y no dependen de la distancia normal a este plano. La diferencia en los niveles de la superficie libre de los dos depósitos es d . La banda se desplaza con una velocidad U hacia el depósito de mayor profundidad y se lleva con ella una delgada capa de espesor h . La longitud de esta capa, L , es tan grande que dentro de la capa existe un flujo viscoso laminar unidireccional plenamente desarrollado y presenta un perfil de velocidades independiente de la distancia horizontal a lo largo de L . La anchura de la bomba, normal al plano de la figura P 6.26, es W .

En términos de los parámetros conocidos D , L , h , W , U , μ y ρ , deduzca expresiones para (a) la componente horizontal del gradiente de presión $\partial p/\partial x$ en la capa, (b) el gasto volumétrico Q a través de la bomba y (c) la potencia \mathcal{P} que se requiere para hacer funcionar la bomba.

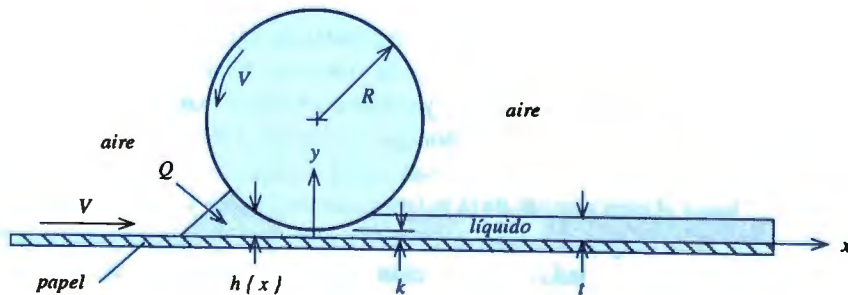


Figura P 6.27

Problema 6.27

Una hoja continua de papel con anchura W se recubre con una capa de líquido viscoso mediante el proceso que se ilustra en la figura P 6.27. Un rodillo cilíndrico fijo con radio

R gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad periférica V igual a la velocidad V con la que se mueve el papel al pasar al lado del rodillo de izquierda a derecha. El fluido muy viscoso, que se abastece desde el lado izquierdo del rodillo con un gasto volumétrico Q , es presionado por el rodillo hasta formarse una delgada película sobre el papel. Corriente abajo del rodillo, donde el espesor t del fluido es uniforme, el fluido se mueve con la misma velocidad V que el papel. El espesor t es mayor que la holgura mínima k que hay entre el rodillo y el papel. Tanto t como k son mucho menores que R .

En la región del flujo donde $x \ll R$, el espesor h de la película del flujo viscoso puede calcularse en forma aproximada:

$$h(x) = k + \frac{x^2}{2R}$$

Para cualquier valor de x en esta región, se puede suponer que el flujo de fluido *relativo a la hoja del papel* es localmente un flujo plano de Poiseuille.

Al contestar las siguientes preguntas, hágalo sólo en términos de los parámetros conocidos, V , Q , W , R , k , x y la viscosidad μ del fluido.

Utilizando el principio de la conservación de la masa, encuentre expresiones para (a) el espesor t del fluido y (b) el gradiente de presión dp/dx . Con estos resultados, obtenga expresiones para (c) el valor de x para el cual la presión es máxima, (d) el esfuerzo cortante τ_w que actúa en la hoja de papel y (e) los valores de x para los cuales τ_w es cero. (f) Demuestre que la máxima presión (manométrica) en el fluido es menor que $24\mu V \sqrt{2R(t-k)}(t-k)/k^3$.

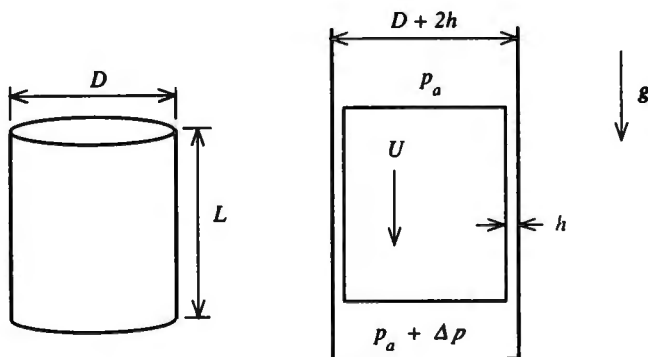


Figura P 6.28

Problema 6.28

Un cilindro circular sólido de metal con diámetro D , longitud L y densidad ρ_m se coloca dentro de un cilindro circular hueco con un diámetro interno ligeramente grande, $D + 2h$. Cuando se libera, se observa que el cilindro metálico cae lentamente con una velocidad constante U (véase la figura P 6.28). Se desea calcular U , si se supone que el

flujo de aire a través de la estrecha separación de espesor h entre los dos cilindros es un flujo laminar estacionario. Si ρ es la densidad del aire y μ su viscosidad y si se considera que el aire es incompresible, (a) obtenga una expresión para el gasto volumétrico Q de aire a través de la separación entre los dos cilindros. (b) Si la presión por encima del cilindro metálico es la presión atmosférica p_a y la presión debajo de éste es $p_a + \Delta p$, deduzca una expresión para Δp en términos de μ , L , D , U y h . (c) Encuentre una expresión para el esfuerzo cortante τ vertical sobre la superficie lateral externa del cilindro metálico sólido en términos de las cantidades μ , L , D , U y h . (d) Utilice el equilibrio de fuerzas en el cilindro metálico para encontrar una expresión para la velocidad U de caída en términos de las cantidades ρ_m , h , μ y D .

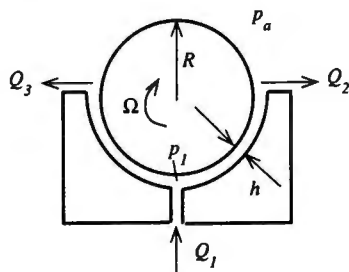


Figura P 6.29

Problema 6.29

Un eje o árbol de radio $R = 0.1 \text{ m}$, que gira en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj con una velocidad angular $\Omega = 1.0E(2) \text{ rad/s}$, se encuentra apoyado sobre una chumacera semicircular con una holgura o huelgo constante $h = 1E(-4) \text{ m}$, como se aprecia en la figura P. 6.29. Para mantener una película de aceite en la chumacera, se bombea a ésta aceite con gasto volumétrico Q_1 , por una estrecha ranura localizada en el fondo, y parte de este flujo sale de la chumacera por el lado derecho (Q_2) y el resto, por la izquierda (Q_3). La presión del aceite en la entrada, p_1 , es mayor que la presión atmosférica, p_a , en las salidas. La longitud de la chumacera, $W = 0.5 \text{ m}$, es suficientemente grande de tal forma que el flujo de aceite es bidimensional, sin componente de la velocidad del fluido normal al plano de la figura P 6.29. La viscosidad del aceite es $\mu = 1.0E(-2) \text{ Pa s}$.

El flujo en el espacio de la holgura puede considerarse una combinación lineal del flujo plano de Poiseuille y Couette. (a) Determine la mínima diferencia de presión, $p_1 - p_a$, que garantice exactamente un flujo positivo de salida de aceite en el lado derecho ($Q_2 \geq 0$). Para la condición de (a), calcule (b) el gasto volumétrico Q_1 y (c) el momento de torsión T que se requiere para hacer girar el eje o árbol contra la fricción en la chumacera.

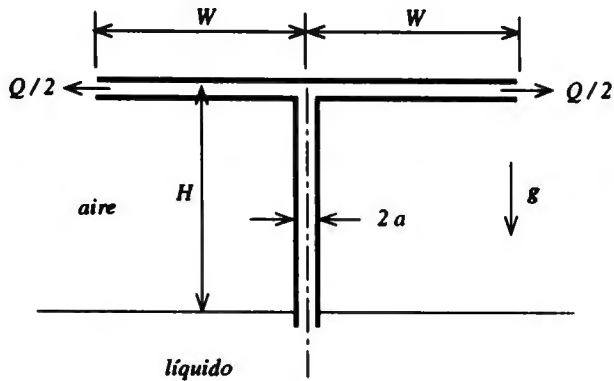


Figura P 6.30

Problema 6.30

En la figura P 6.30, un tubo de vidrio en forma de T con radio interior a abierto en sus extremos, se inserta justo debajo de la superficie de un líquido viscoso (con densidad ρ y viscosidad μ). El tubo, inicialmente lleno con el mismo líquido, se hace girar alrededor de su eje vertical con una velocidad angular Ω . La fuerza centrífuga que experimenta el fluido en los brazos del tubo bombea lentamente el fluido viscoso hacia arriba por la columna central y hacia afuera a través de los brazos.

Si se selecciona un marco de referencia rotacional estacionario fijo en el tubo, con la ecuación 4.27 y si se desprecia la aceleración de Coriolis, la ecuación de Navier-Stokes puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\frac{p}{\rho} + \mathbf{g} + \Omega^2 r \mathbf{i}_r + \nabla^2 \mathbf{V} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \rho g z - \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \right) + \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned}$$

donde z es el eje vertical y r es la distancia radial desde el eje de la figura P 6.30. Para el flujo de Poiseuille en las secciones del tubo, dp^*/dx puede sustituirse así por $d(p + \rho g z - \Omega^2 r^2/2)/ds$, donde s es la distancia a lo largo de una línea de corriente. Con esta información, obtenga una expresión para el gasto volumétrico Q por el tubo en términos de los parámetros conocidos ρ , μ , Ω , H , W y a .

Problema 6.31

Se utiliza un tubo poroso muy largo con diámetro D para irrigar las cosechas. Por uno de sus extremos, el tubo se abastece con agua a una presión p_0 . En cada sección a lo largo del eje z del tubo, se fuga agua a la atmósfera, a través de la pared del tubo, con una velocidad radial $V_r = \alpha p \{z\}$ del flujo, donde $p \{z\}$ es la presión manométrica interna del tubo y α es una constante. Si se supone un flujo circular de Poiseuille en cada sección a lo largo del eje del tubo, obtenga expresiones para (a) la derivada dQ/dz del gasto

volumétrico, (b) la presión $p\{z\}$ y (c) el gasto volumétrico Q_0 en la toma o entrada del tubo. Expresé estas respuestas en términos de los parámetros D , α , μ , p_0 y la distancia axial z .

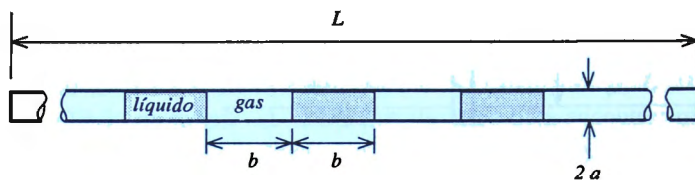


Figura P 6.32

Problema 6.32

En un tubo horizontal circular largo con longitud L y radio interno a hay una diferencia de presión Δp entre la entrada y la salida. El fluido en el tubo consta de secciones alternadas de gas y líquido con una longitud b que se desplazan con velocidad constante U a lo largo del tubo, como se indica en la figura P 6.32. El radio del tubo a es mucho menor que la longitud b de las secciones y es, a su vez, mucho menor que la longitud L (v.g., $a \ll b \ll L$) del tubo. La viscosidad μ_l del líquido es mucho menor que la del gas, μ_g .

Expresé las respuestas a las siguientes preguntas en términos de las cantidades conocidas a , b , L , μ_l y μ_g . (a) Considere el flujo en el líquido como un observador que se mueve con la velocidad U de las secciones alternadas. En un marco de referencia en movimiento de esta índole r , z , donde z se mide a partir de la mitad de la longitud de una de las separaciones de líquido, haga un esquema del perfil axial de velocidades relativas $V_z\{0, r\}$ si se supone que existe un flujo laminar estacionario en la sección con líquido. Indique en ese esquema el valor de $V_z\{0, a\}$ en la pared del tubo. (b) Determine el valor de la velocidad axial relativa $V_z\{0, 0\}$ del flujo en la línea central del tubo, si se supone una distribución parabólica de velocidades. (c) Halle una expresión para la diferencia de presión, Δp .

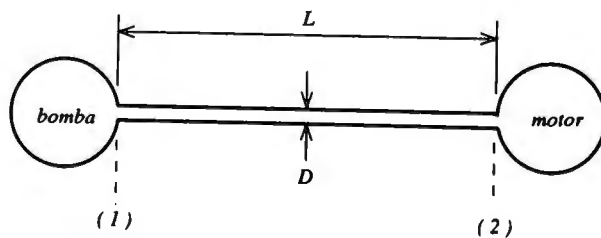


Figura P 6.33

Problema 6.33

Un sistema hidráulico para transmitir la potencia a un robot consta de una bomba conectada a un motor hidráulico mediante un tubo muy largo con diámetro D y longitud L que está lleno de un fluido incompresible con viscosidad μ y densidad ρ . El gasto volumétrico $Q(t)$ de la bomba es senoidal en el tiempo con una amplitud Q_0 y periodo T .

$$Q = Q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

(a) Si se supone que el término de la fuerza viscosa en la ecuación de movimiento es despreciable comparado con el término de la inercia, obtenga una expresión para la diferencia de presión $p_1(t) - p_2(t)$ entre la bomba y el motor, en términos de los parámetros D , L , Q_0 , T y ρ . (b) Ahora, suponga que lo inverso es cierto, es decir, que el término de la viscosidad excede en gran medida al término de la inercia de tal modo que es posible considerar el flujo como un flujo circular de Poiseuille para el gasto volumétrico instantáneo $Q(t)$. Deduzca una expresión para $p_1(t) - p_2(t)$ en términos de los parámetros D , L , Q_0 , T y μ . (c) Si el diámetro D es lo suficientemente pequeño, el término de la viscosidad será tan importante como el de la inercia en la determinación de la diferencia de presión. Obtenga una expresión para el valor de D para el cual estos dos términos son casi iguales. (d) La potencia promediada en el tiempo \bar{P} que se pierde entre la bomba y el motor es:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T (p_1 - p_2) Q dt$$

Para el caso (b) anterior, calcule el valor de \bar{P} si $D = 2E(-2) m$, $L = 10 m$, $Q_0 = 1E(-3) m^3/s$, $\mu = 1 Pa s$ y $\rho = 1E(3) kg/m^3$.

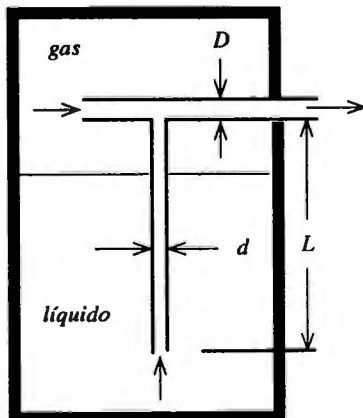


Figura P 6.34

Problema 6.34

Un atomizador en aerosol consta de un recipiente presurizado que contiene un gas con densidad $\rho_g = 2 \text{ kg/m}^3$ y presión manométrica $p_g = 5E(4) \text{ Pa}$ y un líquido con densidad $\rho_l = 1.0E(3) \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\mu = 1.0E(-2) \text{ Pa s}$. Como se ilustra en la figura P 6.34, cuando el tubo de descarga de gas, cuyo diámetro es $D = 1.0E(-3) \text{ m}$, se abre a la atmósfera, la presión más baja en el tubo induce tanto un flujo hacia afuera de gas como un flujo hacia arriba de líquido a través del tubo de líquido, el cual tiene un diámetro $d = 1.0E(-4) \text{ m}$ y una longitud $L = 0.1 \text{ m}$.

Al responder las siguientes preguntas, desprecie sobre el flujo el efecto de la gravedad. (a) Si se supone que el flujo de gas es incompresible y no viscoso y que el flujo de líquido también lo es, calcule la razón Q_l/Q_g del gasto volumétrico Q_l de líquido al gasto volumétrico Q_g de gas. (b) De nuevo, si se supone que el flujo de gas es incompresible y no viscoso pero que el flujo de líquido es un flujo viscoso laminar de Poiseuille, calcule la razón Q_l/Q_g . (c) Explique cuál modelo alternativo de flujo, (a) o (b), es mejor y por qué.

Problema 6.35

La diseñadora de una máquina ha incorporado a sus bosquejos un largo tubo circular con diámetro D_A y longitud L_A por el cual fluiría un líquido viscoso de modo estacionario con un gasto volumétrico Q_A , suministrado por una bomba de desplazamiento positivo. La diseñadora determina que el flujo será laminar y calcula que la caída de presión será Δp_A , lo cual está dentro de los límites aceptables. Después, otra diseñadora encuentra una forma de reducir la longitud del tubo en un factor de 2 de forma que $L_B = L_A/2$, pero ella debe utilizar un tubo con sección transversal rectangular con una altura b y una anchura $10b$ e incluso, el área del flujo sigue siendo igual a la del tubo circular cuyo diámetro es D_A . Puesto que el diseño B tiene la misma área de flujo pero la mitad de longitud, la segunda diseñadora cree que la caída de presión Δp_B en este caso será menor que Δp_A . ¿Está en lo correcto la diseñadora?

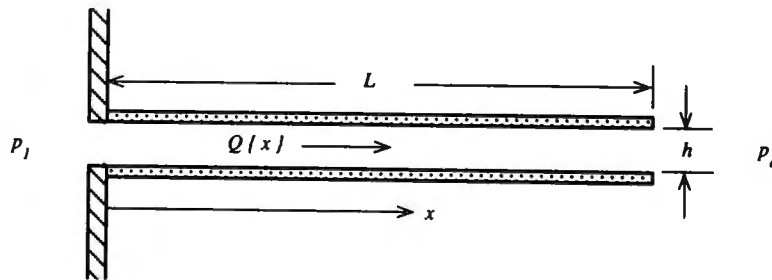


Figura P 6.36

Problema 6.36

Un fluido incompresible con viscosidad μ fluye por un canal rectangular con longitud L , anchura W y altura h , donde $h \ll L \ll W$. El fluido entra al canal desde un depósito a una presión p_1 y sale desde el canal externo a la atmósfera, cuya presión es p_a (véase la figura P 6.36). Las placas superior e inferior del canal son ligeramente porosas. El fluido se fuga por las placas con una velocidad $w = (k/\mu)(p\{x\} - p_a)/t$ (ley de Darcy, ecuación 6.65), donde k es la permeabilidad y t es el espesor de las placas y $p\{x\} - p_a$ es la diferencia de presión entre el fluido en el canal y la atmósfera que rodea las placas.

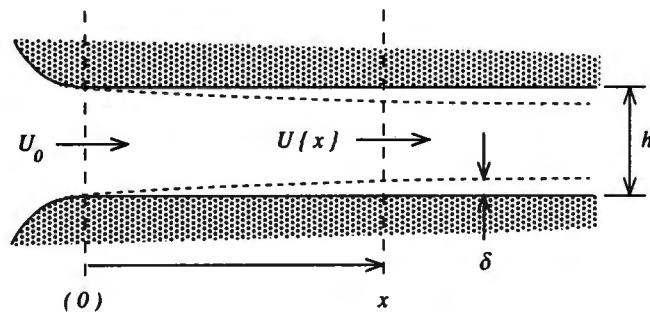
(a) Al aplicar el principio de la conservación de la masa, obtenga una expresión para $dQ\{x\}/dx$, donde $Q\{x\}$ es el gasto volumétrico en cualquier punto x a lo largo del canal, y exprese el resultado en términos de las cantidades k, μ, t, W y $p\{x\} - p_a$. (b) Si se supone que el flujo es localmente un flujo plano de Poiseuille, obtenga una ecuación diferencial de segundo orden para $p\{x\} - p_a$ en términos de k, h y t . (c) Demuestre que la solución a esta ecuación es:

$$p - p_a = \frac{(p_1 - p_a)e^{\alpha x}}{e^{2\alpha L} - 1} (e^{2\alpha(L-x)} - 1)$$

donde $\alpha \equiv 24k/h^3t$. (d) Utilizando la solución de (c), exprese el gasto volumétrico $Q\{0\}$ en la entrada o toma en términos de W, k, h, μ, t, L y $p\{x\} - p_a$.

Problema 6.37

Una placa cuadrada con dimensión lateral $L = 1E(-2) m$, espesor $h = 1E(-3) m$ y densidad relativa $SG = 3$ cae con velocidad constante a través de agua de densidad $\rho_w = 1E(3) kg/m^3$ y viscosidad $1E(-6) Pa s$. El plano de la placa es vertical. Si se supone que el flujo es laminar en la capa límite de la placa, calcule (a) la velocidad V de caída con velocidad constante y (b) el número de Reynolds VL/ν de la placa.

**Figura P 6.38**

Problema 6.38

La figura P 6.38 es un diagrama de la sección de prueba de un túnel aerodinámico que tiene una sección transversal rectangular con altura h y una anchura que es mucho mayor que h , de tal modo que el flujo del túnel se encuentra en el plano de la figura P 6.38. La velocidad U del aire del túnel es suficientemente baja, de tal forma que el flujo de aire en el túnel es incompresible. El flujo en la entrada del túnel, sección 0, tiene una presión (p_0) y una velocidad (U_0) uniformes. En la pared del túnel, se desarrolla una capa límite que empieza en la sección (0), donde $x = 0$. Esta creciente capa límite desplaza al flujo central, cambiando su velocidad $U(x)$ y presión $p(x)$ al desplazarse el aire por el túnel. Si se supone que el flujo es laminar en esta capa límite, deduzca expresiones para $U(x)$ y $p(x)$ en términos de los parámetros U_0 , h y las propiedades del aire ρ y μ .

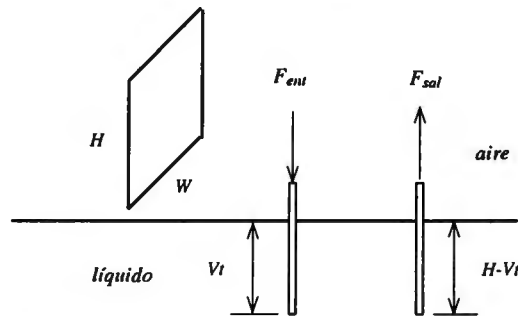


Figura P 6.39

Problema 6.39

En un proceso de fabricación, se pretende sumergir en un líquido con viscosidad μ y densidad ρ a una velocidad constante V una delgada placa rectangular con anchura W y altura vertical H hasta que su borde superior quede sumergido justo debajo de la superficie del líquido, según la figura P 6.39. Luego, en este mismo proceso, la placa se retira con la misma velocidad constante. Se necesita estimar cuál es la fuerza F de resistencia al avance por la viscosidad que se necesita para introducir y retirar la placa.

(a) Al estimar la fuerza F_{ent} de inserción, suponga que F_{ent} es igual a la fuerza de resistencia al avance de una placa plana dentro de un flujo estacionario que se mueve con una velocidad V y que tiene una longitud V_t en dirección del flujo, donde t es el tiempo desde que se comenzó la inserción. Encuentre una expresión para F_{ent} como función del tiempo t y los parámetros W , H , ρ , V y μ . (b) Al estimar F_{sal} , suponga que el esfuerzo cortante τ_w sobre la parte sumergida de la placa es independiente de la posición en la placa y que tiene un valor igual al de una placa infinita que de pronto se pone en movimiento a una velocidad V .

$$\tau_w = \mu \frac{V}{\sqrt{\pi \nu t}} = \frac{\sqrt{\rho \mu} V}{\sqrt{\pi t}}$$

donde t es el tiempo desde el que se comenzó a retirar la placa. Halle una expresión para F_{sal} como función de t , despreciando el efecto de cualquier porción de líquido que pudiera adherirse a la placa por encima de la superficie del líquido. (c) Para el tiempo $t = H/2V$, cuando la mitad de la placa está dentro del líquido, calcule la razón F_{ent}/F_{sal} .

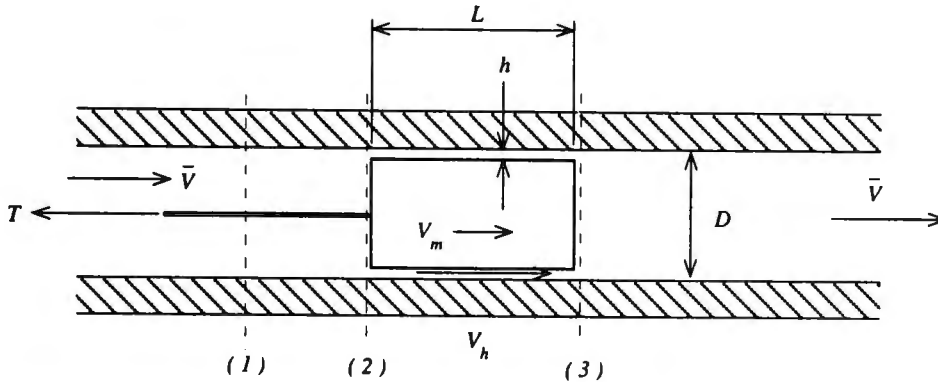


Figura P 6.40

Problema 6.40

Un "ratón" es un dispositivo para tirar un cable dentro de un tubo. Como se indica en el diagrama, el dispositivo consta de un cilindro sólido que tiene L por longitud y una distancia de holgura h entre el cilindro y el interior del tubo, separación que es mucho menor que su diámetro interno D . Cuando se bombea un fluido a través del tubo con una velocidad media \bar{V} , el ratón se desplazará con una velocidad V_m menor, en tanto que ejerce una tensión T en el cable.

Considere el caso en el que el ratón está fijo ($V_m = 0$) y el flujo puede considerarse incompresible y no viscoso. Obtenga expresiones para (a) la velocidad V_h en el anillo de la holgura y (b) el cambio de presión $p_1 - p_3$ entre las secciones 1 y 3 de la figura. (c) Al utilizar el teorema de la cantidad de movimiento, deduzca una expresión para la tensión T en el cable. (Estas expresiones sólo deben contener los parámetros conocidos D , h , \bar{V} y la densidad ρ del fluido.) (d) Obtenga una expresión para la tensión T si el ratón se desplaza con una velocidad constante V_m .

Si el fluido es viscoso, cuya viscosidad es μ , habrá una caída de presión viscosa de 2 a 3 en el anillo de holgura. (e) Si se supone que el flujo en el anillo es un flujo plano de Poiseuille, deduzca una expresión para la tensión T , para el caso en que $V_m = 0$.

Bibliografía

Abramowitz, Milton e Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Washington, D.C.: U.S. Department of Commerce, 1964.

Brodkey, Robert S., *The Phenomena of Fluid Motions*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1967.

Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford: Oxford University Press, 1947.

Rosenhead, L., *Laminar Boundary Layers*, Oxford: Oxford University Press, Ed. 1963.

Sherman, Frederick S., *Viscous Flow*, Nueva York: McGraw-Hill Publishing Co., 1990.

White, Frank M., *Viscous Fluid Flow*, Nueva York: McGraw-Hill Publishing Co., 1974.

7.1 Introducción

En el capítulo anterior, se encontró que es posible considerar los efectos de la viscosidad en el flujo de un fluido al añadir a la ecuación de movimiento un término para la fuerza viscosa, con lo que se obtiene la ecuación de Navier-Stokes. Varias de las soluciones estacionarias y no estacionarias a esta ecuación pusieron de manifiesto cómo la fricción de un fluido con una superficie sólida desacelera al fluido, lo cual impide que el mismo se desplace tan rápido como lo haría en caso de que la viscosidad fuera cero. A este tipo de flujo se le dio el nombre de laminar porque las partículas del fluido se desplazaban a lo largo de trayectorias suaves de modo predecible. Sin embargo, existe otra clase de flujo viscoso que obedece la misma ecuación de Navier-Stokes pero posee un carácter muy diferente, a saber: el *flujo turbulento*. En un flujo viscoso turbulento, el movimiento de cada una de las partículas del fluido no puede predecirse, excepto en un sentido estadístico, puesto que el movimiento del fluido es parcialmente aleatorio. Se debe confiar mucho más en las mediciones experimentales que en la teoría si se desea predecir las propiedades de los flujos turbulentos.

En este capítulo se describen las características principales de los flujos turbulentos que determinan cómo se utiliza la información empírica relacionada con ellos para resolver problemas de ingeniería. El interés, en este caso, se centra más en la física que en la matemática del flujo turbulento, lo cual se debe a que la primera sirve mejor de guía en la comprensión del comportamiento más probable de un flujo turbulento dentro del contexto de la ingeniería. Incluso cuando se cuenta con información básica sobre los flujos turbulentos, es posible que se siga teniendo que recurrir al experimento para encontrar valores precisos de las cantidades técnicas de interés. Es en este sentido que el flujo de fluidos turbulentos sigue siendo principalmente una ciencia empírica.

7.2 Características del flujo turbulento

El flujo turbulento es uno de los problemas clásicos no resueltos de la física clásica. A pesar del centenar de años que lleva la investigación realizada por científicos de vanguardia

estudiosos de la hidrodinámica, aún se carece de un pleno conocimiento del flujo turbulento. De todos modos, las principales características físicas de los flujos turbulentos, en especial sus aplicaciones a la ingeniería, están ahora bien determinadas. En esta sección, se describen estos aspectos, los cuales sientan la base para una plena comprensión de cómo se comportan los flujos turbulentos en circunstancias comunes de la ingeniería.

7.2.1 Comienzo de los flujos turbulentos

Cuando los fluidos viscosos se desplazan con lentitud a través de canales pequeños o alrededor de cuerpos pequeños, el flujo es laminar, incluso cuando es no estacionario, pero cuando la velocidad del flujo de un fluido aumenta lo suficiente, el flujo pasará a ser aleatoriamente no estacionario, por lo general, cuando entra en contacto con superficies sólidas. Es posible caracterizar cualquier flujo por su número de Reynolds, $Re \equiv VL/\nu$, donde V y L son las escalas de velocidad y longitud características del campo de flujo. Lo que empíricamente se observa, es que el flujo se hace turbulento siempre que el número de Reynolds sobrepasa cierto valor, $(Re)_{tr}$, que se conoce como *número de transición de Reynolds*. Al acelerar un flujo suficientemente, puede aumentar el número de Reynolds hasta un punto para el cual el flujo exceda el valor del número de transición de Reynolds para esa geometría del flujo y es así que el flujo cambia de laminar a turbulento.

Un ejemplo clásico de transición a flujo turbulento ocurre en el flujo de un tubo cuando el gasto volumétrico aumenta en forma gradual a partir de cero. Para valores bajos del número de Reynolds $Re_D \equiv VD/\nu$ en el tubo, el flujo es estacionario y laminar, y la caída de presión se relaciona con el gasto volumétrico mediante la ecuación 6.41. Sin embargo, conforme el flujo se aproxima al número de transición de Reynolds, cuyo valor es:

$$(Re_D)_{tr} \equiv \left(\frac{\bar{V}D}{\nu} \right)_{tr} = 2300 \quad (7.1)$$

el flujo comienza a convertirse en no estacionario, a pesar de que sigue siendo laminar. Al aumentar más el número de Reynolds, se empieza a encontrar indicios de flujo turbulento hasta que, con números de Reynolds mayores, el flujo se hace turbulento por completo. De este modo, existe un intervalo de números de Reynolds, cuyo centro es el valor de transición, en el cual el flujo pasa de ser completamente laminar estacionario a totalmente turbulento. La transición no es un proceso instantáneo.

Puede observarse un fenómeno semejante en la formación de una capa límite en una placa plana. Cerca del borde de ataque, donde el número de Reynolds $Re_x \equiv V_\infty x/\nu$ es bastante pequeño, se forma una capa límite laminar y estacionaria que tiene un esfuerzo cortante de la pared dado por la ecuación 6.88. Más allá, corriente abajo, donde Re_x es mayor, el flujo laminar comienza a exhibir cierta inestabilidad y, luego, se transforma en turbulento un poco más allá, sobre la placa. El valor del número de transición de Reynolds que separa a estos dos tipos de flujo es:

$$(Re_x)_{tr} \equiv \left(\frac{V_\infty x}{\nu} \right)_{tr} = 3E(5) \quad (7.2)$$

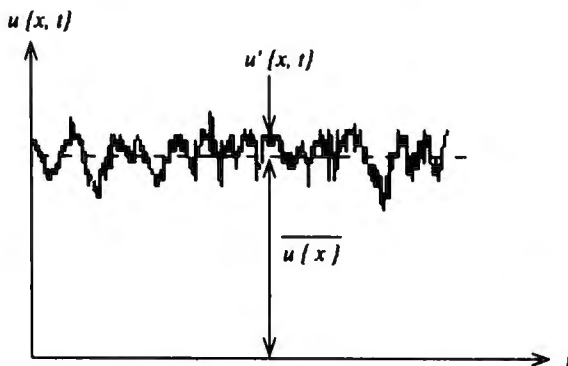


Figura 7.1 Componente turbulenta de la velocidad, $u(x, t)$, en la posición x en función del tiempo t , que permite ver el valor medio $\overline{u(x)}$ de la velocidad en un intervalo de tiempo y el incremento aleatorio $u'(x, t)$.

De nuevo, la transición a partir de un flujo laminar estacionario a un flujo turbulento se presenta a lo largo de un intervalo de longitud finita.

7.2.2 Carácter aleatorio del flujo turbulento

Aunque un flujo turbulento puede generarse gracias a un proceso estacionario global, como en el caso de un flujo volumétrico estacionario en un tubo, el flujo turbulento jamás será localmente estacionario. Sin embargo, la naturaleza no estacionaria del flujo no es necesariamente una característica agobiante, sino más bien una pequeña perturbación del flujo promedio.

Para ilustrar este punto, considérese la historia de la velocidad respecto al tiempo medida en un punto dentro del flujo turbulento en un tubo, como se ilustra en la figura 7.1, donde la componente x de la velocidad $u(x, t)$ medida en un punto fijo x se grafica como función del tiempo t . Es posible ver que $u(x, t)$ puede considerarse como la suma del valor medio en un intervalo de tiempo, $\overline{u(x)}$, y el incremento variable en el tiempo, $u'(x, t)$, que por lo común es menor que el valor medio en un intervalo de tiempo:

$$u(x, t) \equiv \overline{u(x)} + u'(x, t) \quad (7.3)$$

En este caso, el valor medio en un intervalo de tiempo de $u(x, t)$, que se denota por $\overline{u(x)}$, se define como la integral sobre el tiempo a lo largo de un intervalo de tiempo T , dividida entre el intervalo de tiempo:¹

$$\overline{u(x)} \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x, t') dt' \quad (7.4)$$

¹ El intervalo de tiempo T sólo necesita ser lo suficientemente grande para poder promediar las fluctuaciones en $u(x, t)$.

Adviértase que el valor medio en un intervalo de tiempo de $u' \{x, t\}$ es automáticamente cero:

$$\overline{u' \{x, t\}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [u \{x, t'\} - \overline{u \{x\}}] dt' = \overline{u \{x\}} - \frac{\overline{u \{x\}}}{T} \int_t^{t+T} dt' = 0 \quad (7.5)$$

La componente aleatoria de la velocidad, $u' \{x, t\}$, tiene algunas de las características de las señales aleatorias de ruido, como es el caso del ruido eléctrico en circuitos electrónicos. Si se descompone este registro de la velocidad del flujo en un tubo en las frecuencias que lo componen, se encuentra que la mínima frecuencia es aproximadamente \bar{V}/D , en tanto que la máxima es, en forma aproximada, $(Re_D)^{3/4}(\bar{V}/D)$, un intervalo de frecuencias que por lo común es superior a un factor de un ciento. Por supuesto, mucho del movimiento de un flujo turbulento comprende movimientos de pequeña amplitud, alta frecuencia y aleatorio, cuyos detalles son muy difíciles de calcular o predecir.

El valor medio de la energía cinética en un intervalo de tiempo por unidad de masa de fluido en un punto del flujo puede calcularse en términos de la velocidad media \bar{V} en un intervalo de tiempo y la velocidad fluctuante v' al expresar la velocidad V como la suma $\bar{V} + v'$:

$$V \cdot V = (\bar{V} + v') \cdot (\bar{V} + v') = \bar{V} \cdot \bar{V} + 2\bar{V} \cdot v' + v' \cdot v'$$

y al obtener luego el valor medio en un intervalo de tiempo, notando que el valor medio en el tiempo del término que contiene v' a la primera potencia es cero:

$$\begin{aligned} \overline{V \cdot V} &= \bar{V} \cdot \bar{V} + \overline{v' \cdot v'} \\ \frac{\overline{|V|^2}}{2} &= \frac{|\bar{V}|^2}{2} + \frac{\overline{|v'|^2}}{2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

El valor medio de la energía cinética en un intervalo de tiempo es, así, la suma de la energía cinética del flujo promedio más la energía cinética asociada con las fluctuaciones turbulentas, que se conoce como *energía cinética turbulenta*. En coordenadas cartesianas, la energía cinética turbulenta puede expresarse como:

$$\frac{\overline{|v'|^2}}{2} = \frac{\overline{(u')^2} + \overline{(v')^2} + \overline{(w')^2}}{2} \quad (7.7)$$

La energía cinética turbulenta es una medida de la cantidad de energía cinética invertida en el movimiento aleatorio de la turbulencia del flujo. En general, esta energía representa sólo un pequeño porcentaje de la energía cinética del flujo promedio para un intervalo de tiempo, $V^2/2$.² Aun así, el campo de velocidades aleatorias produce esfuerzos cortantes en el flujo que son mucho mayores que los que existirían si se tratara de un flujo laminar.

² \bar{V} denota el valor medio de la velocidad en un intervalo de tiempo, en tanto que \bar{V} denota el valor medio espacial de la velocidad de un flujo en un tubo.

7.2.3 Descripción vorticial de un flujo turbulento

Cuando un flujo turbulento se hace visible al inyectar en uno de sus puntos un colorante o trazador, es posible ver que el fluido se distorsiona formando patrones de gran complejidad, los cuales contienen rasgos tanto burdos como finos. Se dice que el flujo contiene *vórtices* o *remolinos*, regiones de flujo arremolinado que, durante cierto tiempo, conservan su identidad conforme derivan con el flujo pero que, en última instancia, se descomponen en vórtices o remolinos más pequeños. Puede considerarse el campo de velocidad de un flujo turbulento como la superposición de un gran número de vórtices de varios tamaños, donde el más grande de ellos se encuentra limitado por la dimensión transversal del flujo, como es el caso del diámetro del tubo o el espesor de la capa límite, en tanto que los más pequeños son los que rápido se suprimen por la acción de las fuerzas viscosas.

¿De dónde provienen los vórtices turbulentos? Los análisis matemáticos de los flujos viscosos laminares estacionarios revelan que las perturbaciones infinitesimales del flujo pueden crecer exponencialmente con el tiempo siempre que el número de Reynolds del flujo sea bastante grande. Estos flujos son inestables en estas condiciones y no pueden permanecer estacionarios en circunstancias prácticas puesto que siempre están presentes algunas perturbaciones que son capaces de crecer en forma espontánea. Las perturbaciones que muestran un crecimiento más rápido son aquellas cuyas dimensiones son comparables con la dimensión transversal del flujo. Estas perturbaciones crecen para formar los vórtices más grandes. La amplitud de la velocidad de esas perturbaciones representa, en general, el 10% de la velocidad promedio del flujo. Estos grandes vórtices son, en sí, inestables y se descomponen en vórtices de menor dimensión, los cuales son sustituidos por nuevos grandes vórtices que se generan en forma continua.

La generación y desaparición de vórtices proporcionan un mecanismo para convertir la energía del flujo medio en la energía aleatoria de las moléculas mediante la disipación viscosa de los vórtices más pequeños. Comparado con un flujo laminar con el mismo número de Reynolds, un flujo turbulento es como un corto circuito en el campo de flujo; este corto circuito aumenta la razón a la cual se pierde energía. En consecuencia, un flujo turbulento produce fuerzas de resistencia al avance mayores y pérdidas de presión más elevadas que un flujo laminar para las mismas condiciones.

7.2.4 Espectro de energía turbulenta

El valor medio de la energía turbulenta en un intervalo de tiempo por unidad de masa, $\overline{v'^2}/2$, es la combinación de las energías cinéticas de muchos vórtices de diferente tamaño. La asignación de esta energía cinética a movimientos de diferentes escalas de longitud recibe el nombre de *espectro de energía turbulenta*. Si se conoce este espectro es posible saber algo acerca de los detalles del movimiento turbulento.

Un espectro de energía con el cual se está indudablemente familiarizado es el de la luz solar. Si ésta se descompone en sus diferentes longitudes de onda por reflexión en una rejilla de difracción, es posible medir el flujo de energía en cada longitud de onda, o banda de frecuencia. Cuando esto se lleva a cabo, se encuentra que el flujo de energía

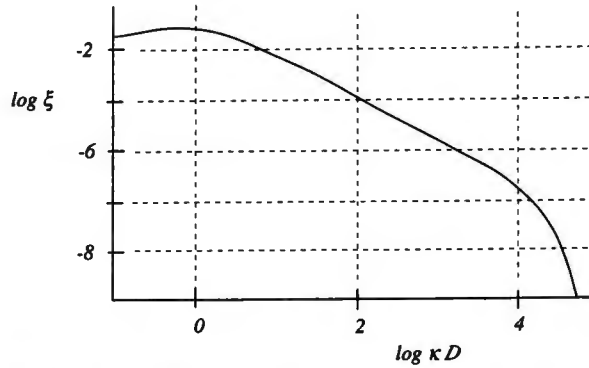


Figura 7.2 Gráfica con abscisas y ordenadas logarítmicas del espectro adimensional $\xi \equiv E\{\kappa\}/\overline{|\mathbf{v}'|^2}D$ de la energía turbulenta en función del número de onda adimensional κD para un flujo en un tubo con número de Reynolds $Re_D = 1E(6)$.

pico ocurre cerca de una longitud de onda de $0.5 \mu m$, con valores mucho menores para longitudes de onda más larga (infrarrojo) y más corta (ultravioleta). Esta distribución refleja el equilibrio térmico en la fotosfera del Sol, que es el origen de la luz solar.

La distribución de la energía cinética turbulenta existente entre los movimientos de diferentes escalas de longitud está dada, por lo común, en función del número de onda κ (que es inversamente proporcional al tamaño del vórtice³) definido como:

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{V} \quad (7.8)$$

donde ω es la frecuencia angular de las componentes de las velocidades turbulentas que se ilustran en la figura 7.1. Si se denota por $E\{\kappa\}$ esta energía turbulenta por unidad de número de onda, la energía turbulenta total es:⁴

$$\overline{|\mathbf{v}'|^2} = \int_0^{\infty} E\{\kappa\} d\kappa \quad (7.9)$$

La figura 7.2 contiene un esquema del espectro $E\{\kappa\}$ de energía turbulenta para el flujo en un tubo con un número de Reynolds $Re_D = 1E(6)$. El valor pico de $E\{\kappa\}$ se presenta en $\kappa \sim 1/D$ en el extremo inferior del número de onda del espectro, donde la mayor parte de la energía turbulenta se encuentra asociada a los vórtices más grandes (número de onda más bajo). Sobre la mayor parte de la región espectral $E\{\kappa\}$ que varía como $\kappa^{-5/3}$, los vórtices más pequeños (número de onda mayor) contribuyen menos a la energía turbulenta total. Para números de onda mayores que $(Re_D)^{3/4}/D$, aproximada-

³ Para una perturbación sinusoidal, el número de onda es igual a 2π dividido entre la longitud de onda.

⁴ Por lo general, $\overline{|\mathbf{v}'|^2}$ es denominado la energía turbulenta aunque es el doble de la energía cinética turbulenta.

mente, se tiene una energía despreciable puesto que la disipación viscosa ocasiona una disminución rápida de tales pequeños vórtices.⁵

La cantidad de energía turbulenta en un flujo está limitada por la pérdida de energía a causa de la disipación viscosa. Se puede calcular la rapidez o razón con la cual se pierde energía turbulenta con base en un conocimiento de las derivadas de la velocidad en la forma de la función de disipación Φ_i para un flujo incompresible, ecuación 8.61. Cuando se promedia en un intervalo de tiempo, la rapidez o razón de pérdida de energía turbulenta, que se denota mediante ϵ , puede expresarse en la forma:

$$\epsilon = \frac{\overline{\Phi_i}}{\rho} = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E\{\kappa\} d\kappa \quad (7.10)$$

Adviértase que la principal contribución a la integral en el lado derecho de 7.10 proviene del extremo superior del número de onda del espectro de la figura 7.2, donde $\kappa^2 E\{\kappa\}$ alcanza su máximo. Por lo tanto, los vórtices o remolinos más pequeños son los que contribuyen más a la disipación de energía, en tanto que los vórtices más grandes son los que generan la energía turbulenta.

Kolmogoroff demostró que el vórtice más pequeño tiene un número de onda κ_K que está relacionado con ϵ y el número de Reynolds del flujo mediante:⁶

$$\kappa_K = \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4} \simeq \frac{Re_D^{3/4}}{D} \quad (7.11)$$

Los vórtices más pequeños son, por consiguiente, varios órdenes de magnitud menores que los vórtices más grandes que contienen energía, puesto que el número de Reynolds de un flujo turbulento es necesariamente grande. Esta propiedad física fundamental del flujo turbulento hace que sea extremadamente difícil describir por completo un flujo turbulento, incluso utilizando las computadoras más grandes y rápidas que existen actualmente. En lugar de esto, hay que ingeniárselas con mucho menos información, como $|\overline{v'}|^2$ y ϵ , para caracterizar los efectos de la turbulencia y aceptar obtener soluciones aproximadas al campo del flujo medio.

7.2.5 Esfuerzo turbulento de Reynolds

En un flujo laminar en un tubo, el esfuerzo cortante τ_w de la pared es igual a $8\mu\overline{V}/D$ (ecuación 6.43), pero para un flujo turbulento en un tubo, el esfuerzo cortante de la pared es mucho mayor que este valor. ¿Por qué en un flujo turbulento el esfuerzo cortante es mucho mayor que en un flujo laminar? La respuesta a esta pregunta, como se verá a continuación, es porque el flujo turbulento es no estacionario y, por lo tanto, capaz de transferir su cantidad de movimiento a la pared del tubo con mucho mayor rapidez que un flujo laminar estacionario.

⁵ Kolmogoroff fue quien por primera vez dedujo la ley de exponentes $-5/3$ para $E\{\kappa\}$ y la longitud $D/Re_D^{3/4}$ de escala utilizando argumentos dimensionales.

⁶ La primera de estas dos relaciones implica que el número de Reynolds del vórtice de Kolmogoroff $\sqrt{\kappa_K E\{\kappa_K\}}/\kappa_K \nu = 1$. Si esto es cierto, entonces $E\{\kappa_K\} = \kappa_K \nu^2$ y $\epsilon \simeq \nu \kappa_K^2 E\{\kappa_K\} \kappa_K = \nu^3 \kappa_K^4$.

En muchas aplicaciones de la ingeniería que comprenden flujos turbulentos, basta poder describir el campo de flujo medio correspondiente a un intervalo de tiempo, $\bar{\mathbf{V}}\{\mathbf{R}\}$, en tanto que debe hacerse caso omiso de la componente dependiente del tiempo, $\mathbf{v}'\{\mathbf{R}, t\}$, cuyo promedio en un intervalo de tiempo es cero. Si en la ecuación 6.12 de Navier-Stokes para un flujo incompresible se sustituye $\mathbf{V}\{\mathbf{R}, t\}$ por la suma de sus componentes, $\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}'$, se encuentra la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + [(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla](\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}') = -\frac{1}{\rho} \nabla(\bar{p}^* + p') + \nu \nabla^2(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}')$$

donde se ha sustituido p^* por la suma de un valor medio en un intervalo de tiempo, \bar{p}^* , y una componente fluctuante, p' . Si ahora se promedia respecto al tiempo esta ecuación, todos los términos que contienen \mathbf{v}' y p' a la primera potencia promedian cero y queda:

$$(\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\bar{p}^*) + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} - \overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla)\mathbf{v}'} \quad (7.12)$$

El valor medio en un intervalo de tiempo de la ecuación de la conservación de la masa incompresible, ecuación 3.17, da como resultado:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}')} &= 0 \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

A continuación, se multiplica la ecuación de la conservación de la masa incompresible por \mathbf{v}' y luego se obtiene el valor medio en un intervalo de tiempo, con lo que se encuentra:

$$\overline{\mathbf{v}'(\nabla \cdot (\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}'))} = \overline{\mathbf{v}'(\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}})} + \overline{\mathbf{v}'(\nabla \cdot \mathbf{v}')} = \overline{\mathbf{v}'(\nabla \cdot \mathbf{v}')} = 0$$

Si se resta esta ecuación de la 7.12 y luego se multiplica por ρ , se tiene la expresión de Reynolds para el valor medio en un intervalo de tiempo de la ecuación de movimiento en un flujo turbulento globalmente estacionario:

$$\rho(\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{V}} = -\nabla(\bar{p}^*) + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} - \rho[\overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla)\mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{v}'(\nabla \cdot \mathbf{v}')}] \quad (7.14)$$

El último término del lado derecho de la ecuación 7.14 comprende las derivadas de las cantidades que tienen dimensiones de esfuerzo. Por ejemplo, si se elige la componente x de 7.14, se encuentra, después de volver a ordenar los términos:

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\rho u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\rho u' w'} \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Los términos entre paréntesis en el lado derecho de la ecuación 7.15 son los valores medios en un intervalo de tiempo de los esfuerzos cortantes τ_{xx} , τ_{xy} y τ_{xz} que actúan en un punto en el flujo, como puede apreciarse al compararla con la ecuación 6.7. El primer término en el primer paréntesis es el esfuerzo cortante laminar debido al flujo medio $\bar{\mathbf{V}}$, en tanto que el segundo término, conocido como *esfuerzo de Reynolds*, es la

contribución de la componente v' . En los flujos turbulentos, el esfuerzo de Reynolds supera en mucho la componente del esfuerzo correspondiente al flujo laminar, excepto muy cerca de la superficie sólida. En un flujo laminar estacionario, $v' = 0$ y $\bar{V} = V$, de forma que la ecuación 7.14 se reduce a la conocida ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible.

7.3 Rozamiento superficial y resistencia al avance de un flujo turbulento

En un flujo turbulento, el esfuerzo cortante en la pared es mucho mayor que el correspondiente a un flujo laminar para el mismo número de Reynolds. Además, el flujo turbulento depende menos de su número de Reynolds —en algunas circunstancias, incluso llega a ser independiente del número de Reynolds. Para algunos flujos simples, como los casos del flujo por un tubo y las capas límite en placas planas, la relación entre el esfuerzo cortante en la pared y las variables del flujo de un flujo turbulento han sido determinadas mediante experimentos extensivos cuyos resultados se han correlacionado mediante fórmulas algebraicas simples. A diferencia del flujo laminar, no se dispone de soluciones analíticas al campo de flujo obtenidas de primeros principios que pueden coincidir universal y exactamente con estas mediciones.

En esta sección, se consideran dos flujos turbulentos elementales que se aplican a muchos de los sistemas de la ingeniería y para los cuales ya se han determinado las soluciones correspondientes a los flujos laminares: el flujo en un tubo circular y la capa límite en una placa plana. En tanto que el interés se centra más en la caída de presión que acompaña al flujo en un tubo y en la fuerza de resistencia al avance en una placa plana, ahora se resaltarán la diferencia en los perfiles de velocidad existentes entre el flujo turbulento y el laminar para estos dos casos.

7.3.1 Flujo turbulento en un tubo

La caída de presión del flujo turbulento en un tubo puede expresarse mediante la forma adimensional del factor de fricción f de Darcy definido en la ecuación 6.47. Para un flujo turbulento en tubos con paredes lisas, el factor de fricción que se mide es función del diámetro del número de Reynolds Re_D que puede representarse por la fórmula:⁷

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log \left(\frac{Re_D \sqrt{f}}{2.51} \right) \quad (7.16)$$

El factor de fricción f depende muy poco del número de Reynolds y varía en forma aproximada según $[\log(Re_D)]^{-2}$. Esta dependencia se ilustra mediante la curva más baja

⁷ Esta ecuación trascendental para $f\{Re_D\}$ puede resolverse con facilidad por iteración numérica. Estímese un valor para f , f_0 por ejemplo, e insértese en el lado derecho de 7.16 y luego resuélvase 7.16 para la siguiente aproximación, f_1 . Repítanse las iteraciones, que rápido convergen al valor correcto.

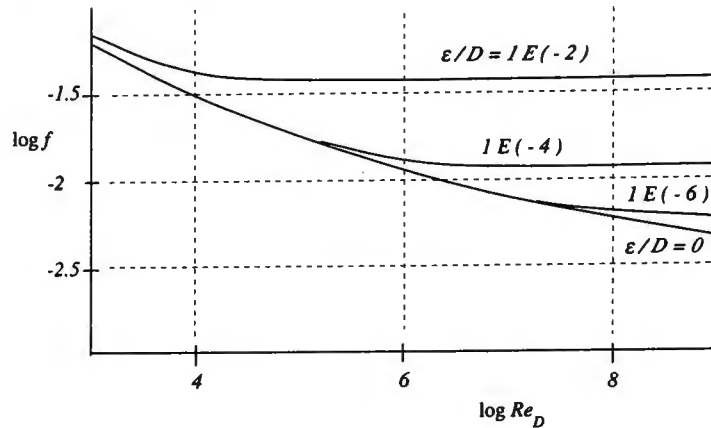


Figura 7.3 Gráfica con abscisas y ordenadas logarítmicas del factor de fricción f para un flujo turbulento en un tubo contra el número de Reynolds Re_D para el diámetro. La curva más baja es de un tubo de pared lisa, en tanto que las curvas progresivamente altas corresponden a tubos rugosos con valores ϵ/D de la rugosidad iguales a $1E(-6)$, $1E(-4)$ y $1E(-2)$, respectivamente.

de la figura 7.3 para $Re_D > 2E(3)$, el mínimo valor para el cual el flujo es turbulento. Adviértase cómo el factor de fricción disminuye sólo por un factor de diez para un aumento de un millón de veces del número de Reynolds.

Puesto que los movimientos aleatorios cerca de la pared se amortiguan mucho, el flujo turbulento en un tubo se convierte en laminar en ese lugar, dentro de lo que se denomina *subcapa laminar*. Esta capa es responsable de la ligera dependencia de f en la viscosidad del fluido como se concibe en la dependencia del número de Reynolds contenida en la ecuación 7.16.

Pocos tubos poseen paredes muy lisas. Muchos de ellos tienen superficies ásperas o rugosas debido a su fabricación y alteran la subcapa laminar y generan una turbulencia adicional en el flujo cerca de la pared que no existiría si ésta fuera completamente lisa. El flujo turbulento en un tubo con pared áspera posee un factor de fricción mayor que el flujo en un tubo con pared lisa para el mismo número de Reynolds. Colebrook encontró, en experimentos en tubos revestidos con un material áspero del tipo papel de lija con una altura física (de la rugosidad) ϵ , que el factor de fricción f medido se relacionaba con el número de Reynolds Re_D y la razón ϵ/D mediante la fórmula:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \quad (7.17)$$

Las curvas de f contra Re_D para varios valores de ϵ/D se ilustran en la figura 7.3. Adviértase que para una pared lisa $\epsilon = 0$, y la ecuación 7.17 se reduce a 7.16.

Para tubos muy ásperos o rugosos tal que $\epsilon/D \gg 1/(Re_D \sqrt{f})$, el factor de fricción depende sólo de ϵ/D y no del número de Reynolds. Esto sucede cuando la subcapa

Tabla 7.1 Rugosidad ϵ de los diferentes materiales que se emplean en tubos

Material	ϵ (m)
Concreto	$0.3E(-3)$ – $3.0E(-3)$
Hierro colado	$3E(-4)$
Hierro galvanizado	$1.5E(-4)$
Acero comercial	$5E(-5)$
Tubería estirada	$1.5E(-6)$
Vidrio, plástico	0

laminar se rompe por completo debido a la rugosidad de la pared y la viscosidad del fluido no desempeña ningún papel en la caída de presión.

La rugosidad equivalente ϵ de la pared de los tubos comerciales se ha determinado a partir de pruebas realizadas con flujos. Los valores de ésta se listan en la tabla 7.1.

El perfil de velocidades de un flujo turbulento en un tubo es muy distinto del perfil parabólico correspondiente al flujo laminar, ecuación 6.40. En el caso del flujo laminar, la velocidad axial $V_z\{r\}$ del flujo comparada con su valor medio \bar{V} puede encontrarse a partir de las ecuaciones 6.40 y 6.42, que es:

$$\frac{V_z}{\bar{V}} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (7.18)$$

donde a es el radio del tubo. En contraste, el perfil turbulento del valor medio $V_z\{r\}$ de la velocidad en un intervalo de tiempo puede calcularse en forma aproximada mediante la expresión:

$$\frac{\bar{V}_z}{\bar{V}} = \frac{60}{49} \left(1 - \frac{r}{a} \right)^{1/7} \quad (7.19)$$

Como se ilustra en la figura 7.4, el flujo turbulento en un tubo tiene un perfil de velocidades mucho más uniforme que el flujo laminar, y sufre un rápido descenso sólo cerca de la pared. Esta diferencia refleja la existencia de un esfuerzo cortante mucho mayor en el flujo turbulento, comparado con el flujo laminar para las mismas condiciones de flujo.

Ejemplo 7.1

Un tubo de acero con diámetro $D = 6$ in lleva agua con un gasto volumétrico de 2000 galones por minuto. (a) ¿Es turbulento el flujo? (b) Calcule la caída de presión Δp^* para una longitud $L = 1.0$ km y (c) la potencia $(\Delta p^*)Q$ que se requiere para conservar el flujo.

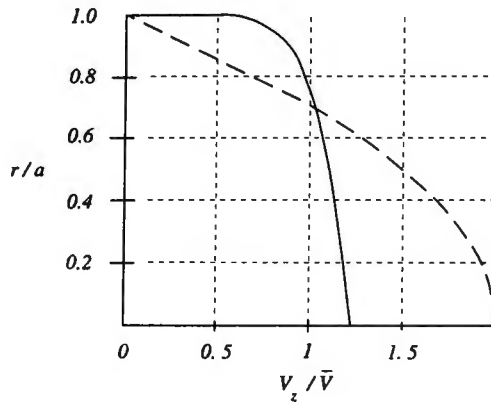


Figura 7.4 Comparación de la velocidad axial V_z/\bar{V} como función de la distancia radial r/a para un flujo turbulento (línea continua) y uno laminar (línea punteada) en un tubo circular de radio a y velocidad media \bar{V} .

Solución

(a) Para calcular el número de Reynolds, encuentre D , Q y \bar{V} en unidades del SI, utilizando las tablas 1.1 y 1.6:

$$D = 6 \text{ in} \times \frac{2.54 E(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 0.1524 \text{ m}$$

$$Q = \frac{2000 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{3.782 E(-3) \text{ m}^3}{\text{gal}} = 1.262 E(-1) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(1.262 E(-1) \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(0.1524 \text{ m})^2} = 6.18 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{(6.18 \text{ m/s})(0.1524 \text{ m})}{1.0 E(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 1.054 E(6)$$

El flujo es turbulento puesto que el número de Reynolds sobrepasa el valor de transición de 2300.

(b) Si se selecciona $\varepsilon = 5 E(-5) \text{ m}$ de la tabla 7.1 y se inserta este valor en la ecuación 7.17, el factor de fricción f es la solución a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2.0 \log \left(\frac{5 E(-5) \text{ m}}{3.7(0.1524 \text{ m})} + \frac{2.51}{1.054 E(6) \sqrt{f}} \right) \\ &= -2.0 \log \left(8.867 E(-5) + \frac{2.381 E(-6)}{\sqrt{f}} \right) \end{aligned}$$

Si se supone intuitivamente un valor de $f = 1 E(-2)$ e insertando éste en el lado derecho de la ecuación anterior, se resuelve para encontrar $f = 1.603 E(-2)$. Si se repite dos

veces esta iteración, se encuentra que $f = 1.588E(-2)$. Para encontrar Δp^* , sustituya este valor en la ecuación 6.48:

$$\begin{aligned}\Delta p^* &= f \left(\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 \right) \frac{L}{D} = 1.588E(-2) \left(\frac{1E(3) \text{ kg/m}^3 (6.918 \text{ m/s})^2}{2} \right) \frac{1E(3) \text{ m}}{0.1524 \text{ m}} \\ &= 2.493E(6) \text{ Pa}\end{aligned}$$

(c)

$$(\Delta p^*)Q = 2.493E(6) \text{ Pa} \times 1.262E(-2) \text{ m}^3/\text{s} = 3.146E(4) \text{ W}$$

7.3.2 Capa límite turbulenta en una placa plana

Para números de Reynolds grandes $Re_L \equiv V_\infty L/\nu$ mayores que $3E(5)$, la capa límite en una placa plana es turbulenta, a excepción de una pequeña región cerca del borde de ataque. Al igual que en el flujo por un tubo, el esfuerzo cortante turbulento τ_w en la pared es mucho mayor que su valor laminar (Blasius) dado en la ecuación 6.88. La medición empírica de la fuerza de resistencia al avance en la placa plana que es un efecto acumulativo del esfuerzo cortante que actúa en la superficie, se expresa, por lo común, en términos del coeficiente C_D de resistencia al avance, según se define en la ecuación 6.92 y se basa en el área A de la placa que está expuesta al flujo y la longitud L de la placa en la dirección que sigue el flujo. Para un flujo turbulento sobre una placa plana lisa, el coeficiente $(C_D)_{fp}$ de resistencia al avance se relaciona con el número de Reynolds $Re_L \equiv V_\infty L/\nu$ para la longitud de la placa mediante:⁸

$$(C_D)_{fp} = \frac{0.455}{[\log(Re_L)]^{2.58}} \quad (7.20)$$

Al igual que en el caso del flujo turbulento en un tubo, existe una débil dependencia del coeficiente de resistencia al avance sobre el número de Reynolds. La figura 7.5 representa a $(C_D)_{fp}$ en función de Re_L . Los coeficientes de la resistencia turbulenta al avance en una placa plana son del orden de $1E(-3)$ y son, por lo menos, cinco veces el valor de Blasius en la ecuación 6.93 para los números de Reynolds que exceden el valor de transición de $3E(5)$.

La capa límite turbulenta en una placa plana se ve afectada por la rugosidad de la pared del mismo modo que en el caso del flujo turbulento en un tubo, v.g., el coeficiente de resistencia al avance aumenta por encima de su valor en una placa lisa, ecuación 7.20. Cuando la pared es bastante rugosa como para romper la subcapa laminar, el coeficiente de resistencia al avance se vuelve independiente del número de Reynolds a lo largo de la placa y sólo depende de la razón adimensional ϵ/L según:

$$(C_D)_{fp} = \frac{0.30}{[\log(14.7 L/\epsilon)]^{2.5}} \quad (7.21)$$

⁸ Véase H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, 7a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill Publishing Co.), 1979.

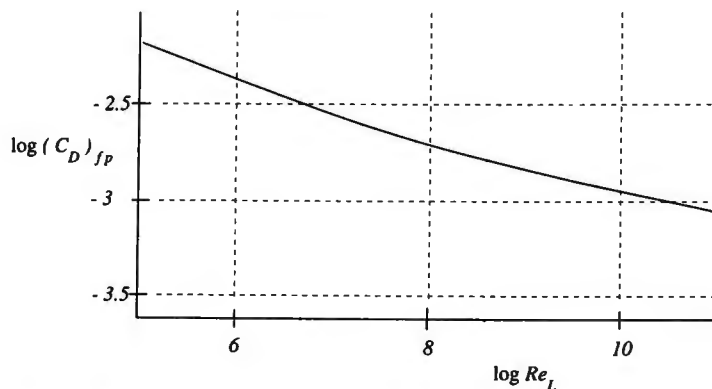


Figura 7.5 Gráfica con abscisas y ordenadas logarítmicas del coeficiente $(C_D)_{fp}$ de resistencia al avance contra el número de Reynolds Re_L para la longitud de un flujo turbulento sobre una placa plana lisa.

En el caso de una placa plana con una altura de rugosidad ε , el coeficiente de resistencia al avance será el mayor de los valores calculados a partir de las ecuaciones 7.20 y 7.21.

La capa límite turbulenta en la placa tiene un espesor mayor que su equivalente en el caso laminar. Una expresión aproximada del espesor $\delta_{fp}(x)$ respecto del borde externo de la capa límite turbulenta en una placa plana lisa a una distancia x del borde de ataque es:

$$\delta_{fp} \approx 0.14 \left(\frac{\nu}{V_\infty} \right)^{1/7} x^{6/7} = 0.14 \left[\frac{x}{(Re_x)^{1/7}} \right] \quad (7.22)$$

Adviértase que la capa límite turbulenta de la placa plana crece según $x^{6/7}$, lo cual es mucho más rápido que el crecimiento $x^{1/2}$ de una capa límite laminar (véase la ecuación 6.79). Esto es una consecuencia del esfuerzo cortante que es mucho mayor en el caso de la capa límite turbulenta.

Ejemplo 7.2

Deduzca una expresión para el valor de Re_L para el cual el coeficiente de resistencia al avance de una placa plana lisa, ecuación 7.20, es exactamente igual al coeficiente de resistencia al avance de una placa plana rugosa, ecuación 7.21.

Solución

Al igualar las dos expresiones para el coeficiente de resistencia al avance y despejar $\log(Re_L)$,

$$\frac{0.455}{[\log(Re_L)]^{2.58}} = \frac{0.30}{[\log(14.7L/\varepsilon)]^{2.5}}$$

$$\log(Re_L) = 1.175 \left[\log \left(\frac{14.7L}{\varepsilon} \right) \right]^{1-0.03}$$

En el término de la derecha, el factor elevado a la -0.03 puede considerarse igual a la unidad y así se resuelve para Re_L :

$$Re_L = \left(\frac{14.7L}{\epsilon} \right)^{1.175}$$

En el caso de los números de Reynolds menores que este valor, la placa puede considerarse lisa y viceversa.

Ejemplo 7.3

Un barco mercante con longitud $L = 100 \text{ m}$ y área superficial $A = 3E(3) \text{ m}^2$ expuesta al agua de mar ($\rho = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$) se mueve con una velocidad $V = 8 \text{ m/s}$. Calcule la fuerza \mathcal{D} de resistencia al avance por fricción y la potencia $\mathcal{D}V$ que se requiere para vencer esta fuerza, si se supone que $\epsilon = 1E(-4) \text{ m}$ y $\nu = 1E(-6) \text{ m}^2/\text{s}$.

Solución

El número de Reynolds Re_L es:

$$Re_L = \frac{VL}{\nu} = \frac{(8 \text{ m/s})(100 \text{ m})}{1E(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 8E(8)$$

el cual cae dentro del régimen de flujo turbulento. Si la superficie del barco fuera lisa, el coeficiente de resistencia al avance de la ecuación 7.20 sería:

$$(C_D)_{fp} = \frac{0.455}{(\log [8E(8)])^{2.58}} = 1.615E(-3)$$

Para una superficie rugosa, el coeficiente de resistencia al avance de la ecuación 7.21 es:

$$(C_D)_{fp} = \frac{0.30}{[\log (14.7 [100 \text{ m}]/[1E(-4) \text{ m}])]^{2.5}} = 2.181E(-3)$$

Puesto que este último es mayor, la rugosidad de la superficie determina la resistencia al avance por fricción. La fuerza de resistencia al avance \mathcal{D} se encuentra a partir de la ecuación 6.92:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) A C_D = 0.5(1.03E(3) \text{ kg/m}^3)(8 \text{ m/s})^2(3E(3) \text{ m}^2)[2.181E(-3)] \\ &= 2.094E(5) \text{ N} \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}V = (2.094E(5) \text{ N})(8 \text{ m/s}) = 1.675 \text{ MW}$$

7.4 Modelos simples para determinar el flujo medio de un flujo turbulento

En esta sección, se dan algunos ejemplos de cómo puede calcularse el flujo medio \bar{V} en flujos turbulentos simples si el esfuerzo de Reynolds puede modelarse. Estos ejemplos ponen de relieve la gran diferencia existente entre los flujos turbulento y laminar.

7.4.1 Capa de esfuerzo constante

Cerca de la pared de un tubo o en la superficie de una placa plana, el esfuerzo cortante será casi el mismo que aquél en la pared, τ_w . En esta región, llamada capa de esfuerzo constante, se puede encontrar el perfil de velocidad media $\bar{u}\{y\}$ si se supone un modelo simple de cómo el esfuerzo turbulento de Reynolds $-\rho\overline{u'v'}$ depende de las propiedades del flujo. En analogía con un flujo laminar, se supone que el esfuerzo cortante turbulento es proporcional a la derivada de la velocidad media:⁹

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.23)$$

donde el coeficiente de viscosidad cinemática ν_T , denominado *viscosidad vorticial*, no es una propiedad constante del fluido sino una propiedad variable del campo de flujo que depende de las propiedades de los vórtices en cada punto del flujo. En el flujo laminar de un gas, ν es aproximadamente igual a la velocidad media térmica de las moléculas multiplicado por la distancia entre las colisiones moleculares. Para ν_T se necesita un producto de la velocidad local del flujo por la longitud del flujo. La velocidad característica del flujo que se escoge se denomina *velocidad de fricción* u_* , definida como:

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (7.24)$$

y la escala de longitud es la distancia desde la pared, y .¹⁰ Por lo tanto, se elige:

$$\nu_T = ku_*y \quad (7.25)$$

Al sustituir las ecuaciones 7.25 y 7.24 en 7.23 y despejar $d\bar{u}/dy$, se encuentra que:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{ky}$$

⁹ Esta relación fue sugerida por primera vez por T.V. Boussinesq en 1877.

¹⁰ Esta forma de ν_T fue propuesta por primera vez por L. Prandtl en 1933, y la longitud y se conoce como *longitud de mezclado*. A la constante k se le da el nombre de *constante de von Kármán*.

lo cual puede integrarse para dar:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad (7.26)$$

donde y_0 , que se conoce como *altura de rugosidad*, identifica la altura para la cual \bar{u} se extrapola a cero. Si este caso se contrasta con el flujo laminar (de Poiseuille), donde u es proporcional a y , el flujo turbulento exhibe una dependencia mucho menor de \bar{u} en y .

El perfil logarítmico de velocidades de la ecuación 7.26 concuerda bastante bien con las mediciones y la constante de von Kármán k posee el valor empírico de 0.4. Éste es apropiado para un flujo sobre superficies rugosas, donde y_0 se relaciona con la rugosidad de la superficie geométrica. En el caso de un flujo sobre superficies lisas, la ecuación 7.26 es exacta sólo si $yu_*/\nu > 30$; para este caso, la altura de rugosidad equivalente es $y_0 = \nu/7.39 u_*$:

$$\bar{u} = 2.5 u_* \ln \left(\frac{7.39 u_* y}{\nu} \right) = 5.75 u_* \log \left(\frac{7.39 u_* y}{\nu} \right); \quad \frac{yu_*}{\nu} \geq 30 \quad (7.27)$$

Ejemplo 7.4

Cerca de la superficie terrestre, la capa límite atmosférica es una región con esfuerzo cortante constante. Una medición del valor medio $\bar{u}\{z\}$ de la velocidad horizontal promediada en el tiempo para alturas $z = 10 \text{ m}$ y $z = 1 \text{ m}$ proporciona los valores $\bar{u}\{10 \text{ m}\} = 9 \text{ m/s}$ y $\bar{u}\{1 \text{ m}\} = 6 \text{ m/s}$, respectivamente. Determine los valores numéricos de u_* , y_0 y el coeficiente de fricción $C_f \equiv 2\tau_w/\rho(\bar{u}\{10 \text{ m}\})^2$.

Solución

Se tienen dos ecuaciones de la forma de la ecuación 7.26 para resolverse para u_* y y_0 . Si se restan estas ecuaciones y se fija $k = 0.4$,

$$\bar{u}\{10 \text{ m}\} - \bar{u}\{1 \text{ m}\} = 2.5 u_* \left[\ln \left(\frac{10 \text{ m}}{y_0} \right) - \ln \left(\frac{1 \text{ m}}{y_0} \right) \right] = 2.5 u_* \ln(10)$$

$$u_* = \frac{3 \text{ m/s}}{2.5 \ln(10)} = 0.546 \text{ m/s}$$

Si este valor de u_* se usa, se resuelve para y_0 :

$$\bar{u}\{10 \text{ m}\} = 2.5 u_* \ln \left(\frac{10 \text{ m}}{y_0} \right)$$

$$\ln \left(\frac{10 \text{ m}}{y_0} \right) = \frac{9 \text{ m/s}}{2.5(0.546 \text{ m/s})} = 6.593$$

$$y_0 = 1.37E(-2) \text{ m}$$

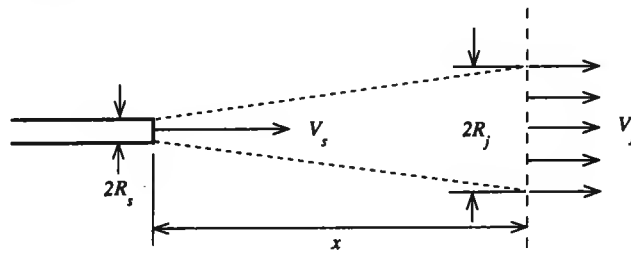


Figura 7.6 El flujo turbulento de un chorro en una atmósfera fija arrastra el fluido circundante.

El valor de C_f es:

$$C_f = \frac{2u_*^2}{[\bar{u}\{10m\}]^2} = 2 \left(\frac{0.546}{9} \right)^2 = 7.36 E(-3)$$

7.4.2 Chorros y estelas turbulentos

En la sección 5.4.3, se aplicó el teorema de la cantidad de movimiento al flujo que se presenta en estelas y chorros y se encontró cómo varía la velocidad del flujo con el área de sección transversal del chorro o de la estela (ecuaciones 5.22 y 5.23). En esta sección, se mostrará cómo se calcula el radio R de un chorro o estela de simetría axial en función de la distancia medida desde la fuente al suponer la existencia de una ley simple que exprese la rapidez o razón de arrastre del fluido circundante en un chorro o estela causada por la turbulencia del flujo. Estos dos son ejemplos de la mezcla turbulenta inducida por una *capa libre de esfuerzo cortante*, v.g., flujos en los cuales las corrientes paralelas del fluido, con velocidades distintas, se mezclan entre sí en ausencia de una pared sólida. En esos casos, puede esperarse que el valor medio del flujo en un intervalo de tiempo sea independiente de la viscosidad del fluido, siempre y cuando el número de Reynolds del flujo sea suficientemente grande como para garantizar que el flujo sea turbulento.¹¹

Chorro turbulento en un fluido estacionario

Considérese un chorro turbulento de aire que sale de un tubo circular y sale a la atmósfera fija, como se ilustra en la figura 7.6. Conforme el fluido se mueve a lo largo del eje del chorro, el área del flujo del chorro, πR_j^2 , aumenta al arrastrar hacia el chorro el aire circundante, con lo que el fluido sufre una disminución de su velocidad. De acuerdo con el análisis de la sección 5.4.3, el flujo de la cantidad de movimiento en el

¹¹ Es característico que el número de Reynolds basado en la velocidad relativa y la anchura del chorro o estela sea mayor que 100 para que el flujo sea turbulento.

chorro es constante en cualquier punto x corriente abajo de la salida del chorro y es igual al del flujo de la fuente:

$$\begin{aligned}\rho(\pi R_j^2) V_j^2 &= \rho(\pi R_s^2) V_s^2 \\ R_j V_j &= R_s V_s\end{aligned}\quad (7.28)$$

si se supone que la densidad ρ es la misma para la fuente del chorro y la atmósfera.

El gasto volumétrico en el chorro, $\pi R_j^2 V_j$, aumenta con x conforme el chorro ingiere aire circundante. Si se supone que la razón de aumento del gasto volumétrico, $d(\pi R_j^2 V_j)/dx$, es proporcional a la circunferencia $2\pi R_j$ del chorro por la velocidad V_j del mismo:

$$\frac{d}{dx} (\pi R_j^2 V_j) = \alpha_j (2\pi R_j) V_j \quad (7.29)$$

donde α_j es una constante empírica que debe determinarse a partir de experimentos con flujos de chorros. Al combinar 7.29 con 7.28 e integrar,

$$\begin{aligned}\frac{dR_j}{dx} &= 2\alpha_j \\ R_j &= R_s + 2\alpha_j x = R_s \left[1 + 2\alpha_j \left(\frac{x}{R_s} \right) \right]\end{aligned}\quad (7.30)$$

donde se usa la condición en la frontera $R_j = R_s$ en $x = 0$. Adviértase que el radio del chorro aumenta linealmente con x , como se ilustra en la figura 7.6.

Al combinar las ecuaciones 7.30 y 7.28, se encuentra cómo V_j varía con x :

$$V_j = \frac{V_s}{1 + 2\alpha_j(x/R_s)} \quad (7.31)$$

A grandes distancias ($x \gg R_s/2\alpha_j$), V_j varía como x^{-1} . Si se mide V_j en la línea central del chorro, entonces $\alpha_j = 0.04$ correlaciona mejor la dependencia de V_j en R_s .

Ejemplo 7.5

Un chorro de aire contiene una pequeña cantidad de gas tóxico cuya densidad parcial (masa de gas tóxico por unidad de volumen del fluido del chorro) en la fuente, ρ_{is} , es mucho menor que la densidad ρ del chorro y de la atmósfera. Deduzca una expresión para la densidad ρ_{ij} del gas tóxico como función de la distancia x medida desde la fuente.

Solución

El gasto másico del gas tóxico en cualquier posición axial x debe ser igual a su gasto másico en la fuente:

$$\rho_{is} \pi R_s^2 V_s = \rho_{ij} \pi R_j^2 V_j$$

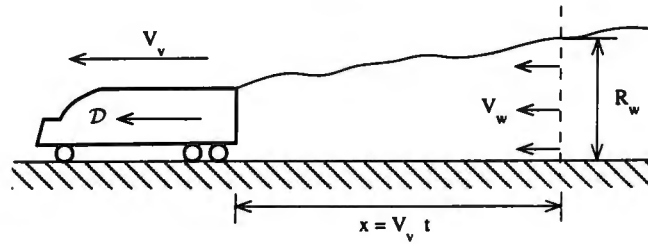


Figura 7.7 Fotografía instantánea de la estela que se forma detrás de un camión que se desplaza por una carretera. Se aprecia el fluido de la estela que se mueve en la dirección del desplazamiento del vehículo y el aumento del radio de la estela con la distancia.

Sin embargo, el radio y la velocidad del chorro están relacionados mediante la ecuación 7.28. Al sustituir 7.28 en la ecuación anterior y resolver para ρ_{ij}/ρ_{is} ,

$$\frac{\rho_{ij}}{\rho_{is}} = \left(\frac{R_s}{R_j}\right)^2 \frac{V_s}{V_j} = \frac{V_j}{V_s} = \frac{1}{1 + 2\alpha_j(x/R_s)}$$

después de utilizar la ecuación 7.31 para V_j .

Estela turbulenta de un vehículo en movimiento

Al desplazarse por una carretera un vehículo imprime cierta cantidad de movimiento al aire que pasa por él y deja una estela de fluido que se mueve en la dirección de desplazamiento del vehículo. Si se modela la estela en cuestión con una sección transversal semicircular de radio R_w y velocidad V_m del flujo relativa al suelo, como se aprecia en la figura 7.7, se observaría que R_w aumenta y V_m disminuye con el tiempo $t = x/V_v$ desde el momento en que pasa el vehículo. Estos efectos son bastante notorios para un observador que permanece a un lado de la carretera, en especial si pasa un camión pesado.

Se puede relacionar R_w y V_m con la fuerza D de resistencia al avance que el vehículo ejerce sobre el aire (véase la figura 7.7) utilizando la solución de la sección 5.4.3 a la integral de la cantidad de movimiento dada por la ecuación 5.22. Si se observa la diferencia que hay entre los marcos de referencia de las figuras 5.4 y 7.7, la velocidad V_v del vehículo y la velocidad V_m de la estela de la figura 7.7 se relacionan mediante el equilibrio de la cantidad de movimiento:¹²

$$(V_v - V_m)V_w = \frac{D}{\rho(\pi R_w^2/2)}$$

¹² Se está despreciando la fricción entre el fluido de la estela y la superficie de la carretera al compararla con la resistencia al avance del vehículo.

$$\left(\frac{\pi R_w^2}{2}\right) V_w = \frac{D}{\rho V_v} \text{ si } V_w \ll V_v \quad (7.32)$$

Si se hace la misma suposición acerca del arrastre hacia la estela que se hizo en el caso del chorro, entonces:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\pi R_w^2}{2}\right) V_v = \alpha_w (\pi R_w) V_w$$

$$\frac{dR_w}{dx} = 2\alpha_w \quad (7.33)$$

que tiene la misma forma que la ecuación 7.30, pero la constante α_w no es necesariamente la misma que α_j . Al integrar 7.33,

$$R_w = 2\alpha_w x \quad (7.34)$$

siempre que x sea grande comparada con el radio de la estela cerca de la parte posterior del vehículo. De 7.32 y 7.34 se sigue que V_w es:

$$V_w = \frac{2D}{\rho \pi V_v (2\alpha_w x)^2} \quad (7.35)$$

por lo que V_w varía como x^{-2} lejos de la parte posterior del vehículo.

Si se define el coeficiente C_D de resistencia al avance de un vehículo mediante la fórmula:

$$C_D \equiv \frac{2D}{\rho V_v^2 A_v} \quad (7.36)$$

donde A_v es el área frontal del vehículo, entonces:

$$V_w = V_v \left[\frac{C_D A_v}{\pi (2\alpha_w x)^2} \right] \quad (7.37)$$

A la cantidad $C_D A_v$, algunas veces se le da el nombre de área de resistencia al avance del vehículo. Puesto que C_D depende principalmente de la forma y no de las dimensiones del vehículo, la ecuación 7.37 indica que la velocidad de estela es proporcional a la velocidad V_v del vehículo por el área frontal A_v . Por lo tanto, a la misma distancia x , los camiones pesados tienen velocidades de estela mayores que los automóviles.

Ejemplo 7.6

Un automóvil viaja a una distancia fija $x = 40 \text{ m}$ detrás de un camión y los dos vehículos se desplazan a la misma velocidad $V_v = 100 \text{ km/h}$. Si el coeficiente de resistencia al avance del camión es $C_D = 1.0$ y su área frontal es $A = 9 \text{ m}^2$, calcule la velocidad relativa del aire, $V_v - V_w$, que experimenta el automóvil, si se supone que $\alpha_w = 0.05$.

Solución

Si se insertan estos valores en la ecuación 7.37 para calcular V_w :

$$V_w = (100 \text{ km/h}) \left(\frac{1.0(9 \text{ m}^2)}{\pi [2(0.05)40 \text{ m}]^2} \right) = 17.9 \text{ km/h}$$

$$V_v - V_w = 82.1 \text{ km/h}$$

Las leyes que rigen el crecimiento de los chorros y estelas, ecuaciones 7.33 y 7.30, las cuales son el resultado de la hipótesis del arrastre, son manifestaciones del concepto de difusividad ν_T vorticial turbulenta. En el caso de un flujo laminar, el espesor δ de una capa cortante, como una capa límite en una placa plana, es (ecuación 6.79):

$$\delta \simeq \sqrt{\nu \frac{x}{V}}$$

Si se sustituye la viscosidad laminar ν por $\nu_T = \alpha \delta V$, entonces:

$$\delta \simeq \sqrt{\alpha \delta V \frac{x}{V}}$$

$$\delta \simeq \alpha x \quad (7.38)$$

El crecimiento lineal de anchuras de chorro y estela con simetría axial en función de x es consistente con la existencia de grandes esfuerzos cortantes turbulentos y viscosidades vorticiales que son proporcionales a las escalas de la velocidad y longitud locales.

7.5 Problemas**Problema 7.1**

Un pozo petrolero consta de un tubo con diámetro $D = 3.5 \text{ in} = 8.89 \text{ cm}$, profundidad vertical $L = 2000 \text{ m}$ y rugosidad $\epsilon/D = 5E(-4)$. Cuando no produce petróleo ($\bar{V} = 0$), la presión manométrica p_0 en la parte superior del tubo lleno de petróleo (a la que se le llama *presión estática* o *presión de cierre temporal*) es $4E(7) \text{ Pa} = 5800 \text{ psig}$. El petróleo tiene una viscosidad $\mu = 0.1 \text{ Pa s}$ y una densidad $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$.

(a) Calcule la presión manométrica p_b en el yacimiento de petróleo en el fondo del pozo (denominada *presión del yacimiento* o *de criadero*) cuando no está produciendo el pozo. (b) Cuando el pozo está produciendo petróleo con un gasto volumétrico de $Q = 20\,000$ barriles por día ($= 3.768E(-2) \text{ m}^3/\text{s}$), la presión manométrica p_i en la parte superior del pozo es menor que la presión estática, en tanto que la presión p_b del yacimiento en el nivel del fondo del pozo permanece a la presión del yacimiento. Determine el valor de p_i para este gasto volumétrico. (c) Por un accidente, el pozo se desborda y el petróleo fluye libremente hacia la atmósfera y la presión manométrica

p_i en la parte superior del pozo es cero. Calcule el gasto volumétrico Q en términos de barriles por día en estas condiciones.

Problema 7.2

Un avión ligero tiene una envergadura de ala $s = 12 \text{ m}$ y una profundidad o cuerda media de ala $c = 2 \text{ m}$. Si se supone que el rozamiento superficial del ala es el mismo que el de una placa plana con las mismas dimensiones, calcule (a) la resistencia al avance D cuando el avión vuela a una velocidad $V = 200 \text{ km/h}$ y el aire tiene una densidad $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ y su viscosidad cinemática es $\nu = 1.5E(-5) \text{ m}^2/\text{s}$, y (b) la potencia $\mathcal{P} = DV$ que se necesita para vencer esta resistencia al avance.

Problema 7.3

Se mide la velocidad del viento a una altura $y = 10 \text{ m}$ por encima del suelo, contra el viento en un edificio alto, y se encuentra que es $\bar{u}\{10 \text{ m}\} = 10 \text{ m/s}$. Si se supone que la altura de rugosidad del terreno urbano circundante es $y_0 = 0.5 \text{ m}$, calcule la velocidad del viento $\bar{u}\{100 \text{ m}\}$ en la parte superior del edificio, $y = 100 \text{ m}$.

Problema 7.4

Un automóvil que tiene un área $C_D A = 5 \text{ m}^2$ de resistencia al avance viaja por una carretera a una velocidad $V_v = 55 \text{ mi/h}$. El automóvil emite un contaminante del aire a razón de 10 g por milla recorrida. Si se supone que $\alpha_w = 0.05$, calcule (a) el gasto másico \dot{m}_p del contaminante que emite el vehículo y (b) la densidad $\rho_p [\mu\text{g}/\text{m}^3]$ del contaminante en la estela del vehículo a una distancia $x = 100 \text{ m}$ detrás del automóvil.

Problema 7.5

Un sistema de ventilación de un edificio descarga aire a la atmósfera con una velocidad $V_s = 3 \text{ m/s}$ desde un orificio circular de radio $R_s = 0.2 \text{ m}$. La corriente de la descarga contiene un gas contaminante del aire cuya densidad parcial es $(\rho_p)_s = 0.01 \text{ kg/m}^3$. Calcule el valor de la densidad ρ_p del contaminante a una distancia $x = 30 \text{ m}$ desde el punto de descarga.

Bibliografía

Brodkey, Robert S., *The Phenomena of Fluid Motions*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1967.

Gerhart, Philip M., Richard J. Gross y John I. Hochstein, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2a. ed., Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1992.

Monin, A. S. y A. M. Yaglom., *Statistical Fluid Mechanics*, Editado por John L. Lumley, vol. 2, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975.

Schetz, Joseph A., *Injection and Mixing in Turbulent Flow*, Nueva York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1980.

Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 6a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1968.

8.1 Introducción

En el tratamiento de los diferentes flujos de fluidos se han utilizado hasta aquí dos leyes generales, la de la conservación de la masa y la de la conservación de la cantidad de movimiento. Estas leyes, expresadas en su forma integral, se aplican a todos los flujos de fluidos; no obstante, al expresarse en forma diferencial, el principio de conservación de la cantidad de movimiento se restringe al flujo no viscoso (ecuación 4.5 de Euler) o al flujo viscoso incompresible (ecuación 6.11 de Navier-Stokes para un flujo incompresible). Sin embargo, dentro de estas restricciones es posible tratar una gama de flujos prácticos importantes.

Existen otros tipos de flujos, también de gran interés práctico, que no es posible expresar sólo a partir de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento. En los flujos con transferencia de calor o reacción química (v.g., en el caso de las llamas), flujos con dos o más fases presentes y flujos de alta velocidad (v.g., flujos con velocidades comparables con la velocidad del sonido) implican una interacción del movimiento con el comportamiento termodinámico del fluido, lo cual debe tomarse en cuenta. Para estos flujos es necesario apelar al principio de la conservación de la energía.

Entre las aplicaciones de la ingeniería que necesitan utilizar la conservación de la energía es posible mencionar, por ejemplo, las turbinas de vapor y de gas, los compresores, motores de combustión interna, quemadores, equipo de transferencia de calor, flujos supersónicos, la acústica y muchas otras. Es imposible cubrir estas aplicaciones de importancia e interés en un solo capítulo del texto. No obstante, ya que es importante comprender de qué manera estos flujos difieren de lo que hasta aquí se ha considerado y a fin de proporcionar un vínculo con otros temas de la ingeniería mecánica, como la termodinámica y la transferencia de calor, las cuales consideran algunas de estas aplicaciones con mayor profundidad, se introducirá y aplicará el principio de la conservación de la energía, junto con la conservación de la masa y la cantidad de movimiento, a algunos casos sencillos de flujos de fluidos.

El procedimiento consistirá en deducir una forma integral de la ecuación de la conservación de la energía universalmente aplicable para luego expresarla en forma

diferencial. Esta metodología proporcionará formas del principio de la conservación de la energía compatibles con las formas de las expresiones de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento que se han utilizado con anterioridad en el texto.

Sin embargo, antes de proseguir con este largo pero necesario camino, se considerará primero una forma limitada del principio de conservación de la energía que se limita a flujos incompresibles. Aunque esta versión de la conservación de la energía no será suficiente para todos los ejemplos de flujos incompresibles ni, por supuesto, para los flujos compresibles, es muy útil en la explicación de algunas de las limitaciones que se encuentran en los flujos viscosos incompresibles.

8.2 Flujo viscoso incompresible

Los principios que rigen el movimiento de un flujo viscoso incompresible están comprendidos dentro de la ecuación de la conservación de la masa, ecuación 3.17:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (8.1)$$

o su forma alternativa, ecuación 3.18:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho = 0 \quad (8.2)$$

y la ecuación 6.11, de Navier-Stokes, que aquí se escribe en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (8.3)$$

donde \mathbf{f} es la fuerza viscosa por unidad de masa.¹ (Si $\rho, \mu = \text{constante}$, $\mathbf{f} = \mu \nabla^2 \mathbf{V}$.)

En principio, es posible encontrar p y \mathbf{V} a partir de la solución de estas ecuaciones, pero en la práctica eso resulta ser muy difícil en todos los casos, a excepción del más sencillo. Sin embargo, al expresar parte de la información contenida en estas ecuaciones en una forma alternativa, es posible apreciar con mayor claridad algunas de sus consecuencias.² Ese es el objetivo de la siguiente sección.

8.2.1 Conservación de la energía cinética

La energía cinética por unidad de masa de fluido, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}/2 = V^2/2$, es una propiedad de cada partícula de fluido en el campo de flujo. ¿Puede determinarse cuán rápido cambia?

¹ Como está escrita aquí, esta forma se aplica también a un flujo compresible.

² Por ejemplo, al estudiar un flujo incompresible no viscoso, se encuentra que parte de la información que abarca la ecuación de Euler podría transformarse en la forma de la integral de Bernoulli.

Para ese propósito, la ecuación 8.3 se multiplica por \mathbf{V} :

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) + \mathbf{V} \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(\frac{V^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}}{\rho}\end{aligned}\quad (8.4)$$

La ecuación 8.4 es la forma diferencial de la conservación de la energía cinética en un flujo viscoso. El lado izquierdo de la ecuación 8.4 es la razón de aumento de la energía cinética por unidad de masa, $V^2/2$, de una partícula de fluido conforme ésta se desplaza con el flujo de un fluido. El lado derecho de la ecuación 8.4 es la rapidez o razón con la cual las fuerzas de presión, gravitatoria y viscosa están aumentando esta energía cinética por unidad de masa.³

La ecuación 8.4, como se encuentra expresada, no es tan conveniente como podría pensarse para fines prácticos. En cambio, su forma integral es mucho más útil. Para obtener esta forma, se suma la ecuación 8.1 multiplicada por $(V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ a la 8.4, con lo que se obtiene (después de utilizar las ecuaciones 1.38 y 2.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = -\frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot \nabla p + \nabla \cdot [(\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{V}] + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}}{\rho}$$

Luego hay que multiplicar por ρ y sumar la ecuación 8.1 multiplicada por p más la ecuación 8.2 multiplicada por $(V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ a fin de obtener (después de usar la ecuación 1.38 otra vez):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{V^2}{2} \right) \rho \mathbf{V} \right] = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{p}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \rho \mathbf{V} \right] + \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} \quad (8.5)$$

Ahora se integra la ecuación 8.5 sobre un volumen fijo de control, convirtiendo los términos de la divergencia en integrales de superficie utilizando el teorema de la divergencia, ecuación 1.44, y así se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \right] d\mathcal{V} + \iint_S \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ = \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}) d\mathcal{V}\end{aligned}\quad (8.6)$$

En esta forma, el principio de conservación de la energía establece que la rapidez o razón de acumulación de energía cinética más la energía potencial dentro del volumen fijo de control más el gasto volumétrico neto de salida de la cantidad $(p/\rho + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ —cantidad que se conserva a lo largo de una línea de corriente en un flujo no viscoso estacionario y, además, posee las mismas dimensiones de la energía cinética—es igual a la rapidez o razón con la cual las fuerzas viscosas realizan trabajo sobre el fluido dentro del volumen de control.

³ No obstante se tiende a pensar que las fuerzas viscosas reducirán la energía cinética del flujo, en general, esto no es cierto.

En una sección posterior (8.5), se demuestra que es posible reescribir el término correspondiente al trabajo viscoso de la ecuación 8.6 como:

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}) d\mathcal{V} = \iint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} dS - \iiint_{\mathcal{V}} \Phi_i d\mathcal{V}$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el esfuerzo viscoso. La función Φ_i , que se conoce como *función de disipación incompresible* y se define en la ecuación 8.61, es proporcional a la viscosidad μ y siempre será una cantidad no negativa. Al combinar esta función con la ecuación 8.6, se tiene la forma integral de la ecuación de la energía correspondiente a flujos incompresibles:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(\frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) d\mathcal{V} + \iint_S \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ = \iint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} dS - \iiint_{\mathcal{V}} \Phi_i d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (8.7)$$

En esta forma, el principio de conservación de la energía equilibra la acumulación y flujo de energía del lado izquierdo con la suma de dos términos viscosos que aparecen en el derecho: la razón del trabajo realizado por el esfuerzo viscoso, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}$, que actúa sobre la superficie de control y un término *negativo*, menos la razón de disipación de energía Φ_i integrada sobre todo el volumen de control.

Esta ecuación resulta principalmente útil en el caso de flujos estacionarios en tuberías, ductos y canales. Al tratar el flujo estacionario, esta ecuación puede escribirse como:

$$\iint_S \left[\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} \right] dS = - \iiint_{\mathcal{V}} \Phi_i d\mathcal{V} \quad \text{si } \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (8.8)$$

Ejemplo 8.1

En el flujo plano estacionario de Couette que ilustra la figura 6.4, deduzca una expresión para el esfuerzo cortante τ_w de la pared al resolver la ecuación 8.8.

Solución

Para un volumen de control que consiste en una base de área unitaria y cuya altura es igual a la del canal, h , la única contribución al lado izquierdo de 8.8 proviene del término $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}$ sobre la superficie superior de área unitaria ya que no hay cambio de ninguna de las variables en dirección del flujo. En consecuencia, 8.8 se transforma en:

$$-\tau_w V = - \int_0^h \Phi_i dy$$

De las partes que componen a Φ_i en la ecuación 8.61, sólo $\partial u/\partial y = V/h$ es diferente de cero. Por lo tanto:

$$\tau_w V = \int_0^h \mu \left(\frac{V}{h}\right)^2 dy = \mu \left(\frac{V}{h}\right)^2 \int_0^h dy = \mu \frac{V^2}{h}$$

$$\tau_w = \mu \frac{V}{h}$$

8.2.2 Flujo estacionario por una tubería o cámara

Ahora, considérese un flujo por una tubería o aparato de transferencia de calor. En las paredes de la tubería o contenedor, $\mathbf{V} = 0$, por lo que las paredes no contribuyen a la integral de superficie de 8.8. En las superficies de entrada y de salida del volumen de control, el esfuerzo cortante τ es mucho menor que p , de manera que $\tau \cdot \mathbf{V}$ puede despreciarse en comparación con $p\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. Si se denotan por separado las integrales del flujo de entrada y de salida, y si se advierte que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ es positivo para el flujo de salida y negativo para el flujo de entrada, es posible escribir la ecuación 8.8 como:

$$\iint_{ent} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (-\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \iint_{sal} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$$

$$= \iiint_V \Phi_i dV \geq 0 \quad (8.9)$$

donde la desigualdad resulta del hecho de que Φ_i siempre es un número no negativo. La ecuación 8.9 establece que la magnitud de la cantidad $(p/\rho + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, integrada en toda la sección transversal del fluido en el flujo, decrece en dirección corriente abajo por los efectos de la viscosidad, v.g., el valor correspondiente al flujo corriente arriba supera al del flujo corriente abajo en una cantidad proporcional a la viscosidad del fluido.

En el capítulo 3, se encontró que la cantidad $p/\rho + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$, que tiene dimensiones de energía por unidad de masa, se conserva a lo largo de una línea de corriente en un flujo no viscoso incompresible estacionario. Algunos textos se refieren a esta cantidad como la energía del flujo, ya que ésta se conserva en un flujo no viscoso, pero es posible apreciar en la ecuación 8.9 que la conservación de la energía requiere que esta cantidad cambie en el flujo viscoso. A lo largo de una línea de corriente individual, esa cantidad puede aumentar o disminuir en un flujo viscoso estacionario, aunque la suma de los cambios desde la entrada hasta la salida de la estructura con paredes fijas y que contiene al flujo siempre experimentará una disminución en la dirección del flujo.

La cantidad $p + \rho(V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ puede llamarse *presión total* del flujo incompresible. Esta presión es la que tendría el fluido si se llevara al reposo en equilibrio con el fluido

estacionario en $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = 0$. La ecuación 8.9 implica que la presión total promedio del flujo por una tubería o cámara disminuye corriente abajo.

Carga hidráulica

Al tratar los flujos incompresibles se acostumbra definir una variable del flujo que se conoce como *carga hidráulica total*, representada por el símbolo h . Ésta tiene dimensiones de longitud y se define como:

$$h \equiv \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}}{g} \quad (8.10)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación 8.10 se denominan *carga hidráulica de la presión estática*, *carga hidráulica de la velocidad* y *carga hidráulica de la altura*, respectivamente. Esta costumbre se originó de las aplicaciones a flujos de agua en canales descubiertos y a través de hidroturbinas y compuertas de descarga.

En términos de la carga hidráulica total h , es posible escribir la ecuación 8.9 como:

$$\iint_{ent} gh(-\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \iint_{sal} gh(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V \Phi_i dV \geq 0 \quad (8.11)$$

En consecuencia, el valor de $gh(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$, integrado sobre toda la sección transversal del flujo, disminuye en la dirección del flujo.

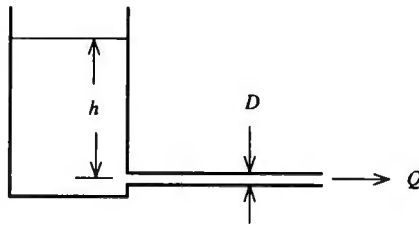


Figura E 8.2

Ejemplo 8.2

Un tanque de agua abierto a la atmósfera por la parte superior se desagua por un tubo con diámetro $D = 2 \text{ in}$, como se ejemplifica en la figura E8.2. La salida del tubo, que también está abierta a la atmósfera, está a una altura $h = 10 \text{ m}$ por debajo del nivel del agua del tanque cuando se mide el gasto volumétrico Q , que es de 425 gal/min . ¿Cuál es la disminución de la carga hidráulica $h_{ent} - h_{sal}$ entre el fluido estático del tanque y el fluido en la salida del tubo?

Solución

A partir de la definición de h , ecuación 8.10, la disminución $h_{ent} - h_{sal}$ es:

$$\begin{aligned} h_{ent} - h_{sal} &= \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{ent} - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{sal} \\ &= \frac{p_{ent} - p_{sal}}{\rho g} + \frac{V_{ent}^2 - V_{sal}^2}{2g} + z_{ent} - z_{sal} \\ &= 0 - \frac{V_{sal}^2}{2g} + h \end{aligned}$$

donde el punto del flujo de entrada se toma en la interfaz aire-agua en el tanque. Si se evalúa V_{sal} se tiene que:

$$Q = \frac{425 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{3.785 \text{ E}(-3) \text{ m}^3}{\text{gal}} = 2.681 \text{ E}(-2) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(2.681 \text{ E}(-2) \text{ m}^3/\text{s})}{\pi [2 \times 2.54 \text{ E}(-2)]^2 \text{ m}^2} = 13.23 \text{ m/s}$$

$$h_{ent} - h_{sal} = 10 \text{ m} - \frac{(13.23 \text{ m})^2}{2(9.807 \text{ m/s}^2)} = 1.076 \text{ m}$$

8.2.3 Conservación de la energía en máquinas rotoestacionarias

Las máquinas rotoestacionarias, como las bombas, turbinas, compresores, ventiladores, hélices, etc., son dispositivos importantes que producen o absorben trabajo mecánico en tanto que interactúan con el flujo de un fluido. Estas máquinas proporcionan energía a vehículos de transporte y producen casi toda la energía eléctrica. En esta sección, se considera la forma especial del principio de la conservación de la energía que se aplica a esta clase de dispositivos siempre y cuando el flujo pueda considerarse incompresible.⁴

En tanto que el flujo que entra o sale de estas máquinas puede ser un flujo estacionario, el flujo interno está muy lejos de serlo debido a los movimientos inducidos por las álabes del rotor que están en movimiento.⁵ En el capítulo 4, sección 4.6.3, se mencionó que el flujo en el marco de referencia no inercial del rotor era estacionario y, por tanto, resultaría más sencillo describir el flujo relativo al rotor. En el marco de referencia no inercial del rotor se encontró que la integral de Bernoulli a lo largo de una línea de

⁴ La condición general para un flujo incompresible es que su velocidad sea mucho menor que la velocidad del sonido. El flujo de aire a través de ventiladores y hélices puede considerarse como incompresible.

⁵ El elemento que gira se conoce como *rotor* en tanto que la estructura fija se llama *estator*. Las hélices y turbinas eólicas no tienen estator.

corriente del flujo del rotor tenía la misma forma que la de un marco de referencia inercial, a excepción de que el término $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ se sustituye por $\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}} + (\Omega \tilde{r})^2/2$. En las secciones siguientes se exploran los cambios en la expresión de la conservación de la energía en los flujos incompresibles que resultan de este término adicional.

Para el flujo estacionario incompresible relativo al rotor, la ecuación 8.9 de la conservación de la energía se transforma en:⁶

$$\begin{aligned} & \iint_{sal} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\tilde{V}^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \frac{(\Omega \tilde{r})^2}{2} \right) (\rho \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}) dS \\ & - \iint_{ent} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\tilde{V}^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \frac{(\Omega \tilde{r})^2}{2} \right) (-\rho \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}) dS = - \iiint_{\mathcal{V}} \tilde{\Phi}_i d\mathcal{V} \leq 0 \quad (8.12) \end{aligned}$$

Es posible expresar los integrandos de las integrales de superficie en términos de la velocidad y las coordenadas del marco de referencia inercial estacionario, utilizando la ecuación 4.25, para encontrar:⁷

$$\begin{aligned} & \iint_{sal} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \iint_{ent} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (-\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \\ & = \iint_{sal} \Omega r V_{\theta} (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \iint_{ent} \Omega r V_{\theta} (-\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \iiint_{\mathcal{V}} \tilde{\Phi}_i d\mathcal{V} \quad (8.13) \end{aligned}$$

Si ahora se aplica la integral de la conservación del momento angular, ecuación 5.46, al volumen de control de simetría axial, despreciando cualquier esfuerzo viscoso en los flujos de entrada y salida, se encuentra el momento de torsión \mathbf{T} aplicado al rotor:

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_z \iint_{sal} r V_{\theta} (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \mathbf{i}_z \iint_{ent} \Omega r V_{\theta} (-\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (8.14)$$

Sustituyendo en la ecuación 8.13 se encuentra la ecuación de la conservación de la energía aplicada a una máquina rotatoria:

$$\begin{aligned} & \iint_{sal} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \iint_{ent} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (-\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \\ & = \Omega \cdot \mathbf{T} - \iiint_{\mathcal{V}} \tilde{\Phi}_i d\mathcal{V} \quad (8.15) \end{aligned}$$

Una forma alternativa, si se supone que las variables del flujo a través de las corrientes del flujo de entrada y de salida son constantes, es la siguiente:

⁶ Véase la ecuación 4.28. Las velocidades y coordenadas medidas en el marco de referencia rotatorio se denotan mediante una tilde sobre la cantidad (v.g., \tilde{V}). Las relaciones entre las velocidades y coordenadas en los marcos de referencia inercial y no inercial están dadas por la ecuación 4.25.

⁷ Se ha elegido un volumen de control de simetría axial de manera que $\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$.

$$\dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right)_{sal} - \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right)_{ent} = \Omega \cdot \mathbf{T} - \iiint_V \tilde{\Phi}_i dV \quad (8.16)$$

donde \dot{m} es el gasto másico a través del dispositivo.

En términos de la carga hidráulica total h , definida en la ecuación 8.10, la ecuación 8.16 adquiere la forma:

$$\dot{m}g(h_{sal} - h_{ent}) = \Omega \cdot \mathbf{T} - \iiint_V \tilde{\Phi}_i dV \quad (8.17)$$

Expresada en esta forma, la conservación de la energía establece que el aumento de la carga hidráulica a través del dispositivo, $h_{sal} - h_{ent}$, multiplicado por el gasto másico \dot{m} por g es igual a la potencia $\Omega \cdot \mathbf{T}$ que se requiere para hacer girar el eje o árbol menos la potencia viscosa disipada dentro de la máquina, $\iiint_V \tilde{\Phi}_i dV$.

Para una bomba, la potencia $\Omega \cdot \mathbf{T}$ es positiva ya que Ω y \mathbf{T} tienen la misma dirección. La magnitud de la potencia $(\Omega T)_p$ de la bomba siempre es mayor que el aumento del flujo de carga hidráulica. La razón entre estos dos términos se define como la eficiencia de la bomba η_p :

$$\eta_p \equiv \frac{\dot{m}g(h_{sal} - h_{ent})}{(\Omega T)_p} = 1 - \frac{1}{(\Omega T)_p} \iiint_V \tilde{\Phi}_i dV \leq 1 \quad (8.18)$$

Si se conoce la eficiencia de una bomba, entonces la potencia que se requiere para bombear un fluido con un gasto másico \dot{m} con un incremento en la carga hidráulica $h_{sal} - h_{ent}$ es:

$$(\Omega T)_p = \frac{\dot{m}g(h_{sal} - h_{ent})}{\eta_p} \quad (8.19)$$

Por otra parte, para una turbina $\Omega \cdot \mathbf{T}$ es negativa y la turbina entrega potencia. Para este caso, la ecuación 8.17 de la energía puede escribirse en la forma:

$$-\Omega \cdot \mathbf{T} = \dot{m}g(h_{ent} - h_{sal}) - \iiint_V \tilde{\Phi}_i dV$$

lo cual demuestra que la potencia de la turbina siempre es menor que la disminución del flujo de la carga hidráulica a causa de las pérdidas en la turbina debidas a la viscosidad. Se acostumbra definir la eficiencia de la turbina como:

$$\eta_t \equiv \frac{(\Omega T)_t}{\dot{m}g(h_{ent} - h_{sal})} = 1 - \frac{1}{\dot{m}g(h_{ent} - h_{sal})} \iiint_V \tilde{\Phi}_i dV \leq 1 \quad (8.20)$$

Por lo tanto, la potencia $(\Omega T)_t$, disponible en una turbina con eficiencia η_t conocida y que experimenta una disminución de la carga hidráulica $h_{ent} - h_{sal}$ es:

$$(\Omega T)_t = \eta_t \dot{m}g(h_{ent} - h_{sal}) \quad (8.21)$$

Ejemplo 8.3

Una hidroturbina entrega una potencia mecánica de 8 MW a un generador eléctrico. El cambio de carga hidráulica $h_{ent} - h_{sal}$ entre la entrada y la salida de la turbina es de 10 m, en tanto que el gasto volumétrico $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$. Calcule la eficiencia η_t de la turbina.

Solución

A partir de la ecuación 8.20,

$$\eta_t = \frac{(\Omega T)_t}{\rho Q g (h_{ent} - h_{sal})} = \frac{8E(6) \text{ W}}{(1E(3) \text{ kg/m}^3)(100 \text{ m}^3/\text{s})(9.807 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})} = 81.57\%$$

8.3 La primera ley de la termodinámica

El principio de la conservación de la energía en el flujo de un fluido es una aplicación de la primera ley de la termodinámica al flujo de un fluido. Esta ley define la relación que existe entre la energía interna (U) de una sustancia termodinámica y la transferencia de calor (Q) y trabajo (W) hacia o desde la sustancia, durante un proceso de cambio. Cuando se aplica a un elemento de fluido en movimiento, la primera ley establece que la energía total (E) del elemento, que es la suma de sus energías interna, cinética y potencial en el campo gravitatorio de la Tierra, *aumenta en virtud de la cantidad neta de calor que se agrega al elemento y disminuye en virtud de la cantidad de trabajo que el elemento realiza sobre su ambiente.*⁸ (La convención en termodinámica es que el calor que se agrega al elemento de un fluido, o el trabajo que éste realiza sobre sus alrededores, es una cantidad positiva.) Puesto que la primera ley se aplica a una cantidad fija de materia, esa ley se expresa en forma lagrangiana, v.g., ésta describe los cambios operados en un elemento de fluido identificado al moverse éste a través del campo de flujo. Si se utiliza la notación anterior para la derivada material respecto al tiempo, es posible expresar la primera ley en la forma según la cual la rapidez o razón de aumento de la energía total es igual a la razón de incremento de calor menos la razón a la cual el elemento de fluido realiza trabajo, o

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} - \frac{DW}{Dt} \quad (8.22)$$

Con esta forma, la primera ley no puede aplicarse de modo sencillo a un problema relacionado con el flujo de un fluido; es necesario expresarla en forma euleriana que sea compatible con las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento utilizadas en este libro.

⁸ Las cantidades que intervienen en la expresión de la conservación de la energía son aquellas medidas en un marco de referencia inercial.

Considérese un volumen fijo de control en un marco de referencia inercial (v.g., un marco de referencia de laboratorio). La energía E del fluido dentro del volumen de control es, simplemente, la integral del producto $\rho(\hat{u} + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ sobre el volumen de control \mathcal{V} , donde \hat{u} es la energía interna por unidad de masa de fluido. Si se utiliza el teorema del transporte de Reynolds (ecuación 5.5) para la propiedad, energía total por unidad de masa $\hat{u} + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$, la derivada material de la energía total E se transforma en:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) d\mathcal{V} + \iint_S \rho \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.23)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación 8.23 es la razón de acumulación de energía total E dentro del volumen de control y el segundo término es la razón neta de transporte de E fuera del volumen de control debido al flujo del fluido a través de sus fronteras.

A continuación, se determina la transferencia de calor hacia el fluido en el volumen de control. El calor se transfiere dentro de un fluido a causa de diferencias de temperatura entre lugares contiguos dentro del fluido. Para la mayoría de los fluidos, la razón de flujo de calor por unidad de área a través de una superficie dentro del fluido, \mathbf{q} , es proporcional al gradiente de temperatura de acuerdo con la *Ley de Fourier*:⁹

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (8.24)$$

donde λ es la conductividad térmica del fluido, propiedad de transporte como la viscosidad. El calor fluye en la dirección en la que la temperatura disminuye. La razón neta de aumento de calor que experimenta el fluido dentro del volumen de control y que proviene de sus alrededores es así, la integral del flujo de calor \mathbf{q} sobre la superficie de control S :

$$\frac{DQ}{Dt} = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (8.25)$$

(El signo negativo resulta del hecho de que cuando el calor fluye hacia el interior del volumen de control, \mathbf{q} tiene el sentido opuesto a la normal \mathbf{n} que apunta hacia afuera y $\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n})$ es positiva, como lo exige la convención de la termodinámica para Q .)

Ahora considérese la razón a la cual el fluido dentro del volumen de control realiza trabajo sobre su ambiente. La fuerza diferencial que el fluido ejerce sobre sus alrededores es el esfuerzo que actúa sobre los alrededores por el área de la superficie dS . El esfuerzo puede dividirse en dos componentes, la presión $p\mathbf{n}$ que actúa en la dirección de la normal \mathbf{n} , apuntando hacia afuera del fluido hacia sus alrededores y el esfuerzo viscoso $-\boldsymbol{\tau}$ que es opuesto al esfuerzo $\boldsymbol{\tau}$ que actúa sobre el fluido. (El esfuerzo viscoso $\boldsymbol{\tau}$ se determinó en la sección 6.2.) La razón a la cual el fluido realiza trabajo es el producto escalar de la fuerza por la velocidad del fluido en la superficie de control:

⁹ En unidades del SI, \mathbf{q} tiene dimensiones de W/m^2 y λ tiene dimensiones de W/mK .

$$\frac{DW}{Dt} = \iint_S (p\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{V} dS = \iint_S (p\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) dS \quad (8.26)$$

Adviértase que el término correspondiente al trabajo contiene dos partes: la debida a la presión y la debida al esfuerzo viscoso. En un flujo no viscoso, el último término es cero y sólo el término de la presión contribuye al trabajo realizado por el fluido. De igual manera, si una porción de la superficie de control es una pared fija, entonces su contribución al término del trabajo es cero, tanto en el caso del flujo no viscoso ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\tau} = 0$) como en el del flujo viscoso ($\mathbf{V} = 0$).

La forma integral de la conservación de la energía para el flujo de un fluido ahora puede expresarse al sustituir las ecuaciones 8.23, 8.25 y 8.26 en la ecuación 8.22:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) dV + \iint_S \rho \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS - \iint_S (p\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) dS \end{aligned} \quad (8.27)$$

Expresada en palabras, esta ecuación de la conservación requiere que la razón de aumento de la energía total del fluido dentro del volumen de control más la razón de flujo de energía total que sale a través de la superficie de control sea igual a la suma de flujo de calor que entra a través de la superficie de control menos la razón a la cual el fluido realiza trabajo sobre su ambiente conforme se desplaza a través de la superficie de control.

Cuando se aplica la primera ley de la termodinámica a varios procesos en los que intervienen flujos, se acostumbra introducir la propiedad de entalpía h , que es la suma de la energía interna \hat{u} y la razón p/ρ :

$$\hat{h} \equiv \hat{u} + \frac{p}{\rho} \quad (8.28)$$

Si se usa la ecuación 8.28 para reemplazar $\rho\hat{u}$ por $\rho\hat{h} - p$ en el segundo término de la ecuación 8.27, se encuentra que la integral de superficie de la derecha que contiene $p\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ se cancela y, así:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) dV + \iint_S \rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS - \iint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} dS \end{aligned} \quad (8.29)$$

Si a la suma $(\hat{h} + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ se le denomina *entalpía total*, entonces la ecuación 8.29 expresa la conservación de la energía en términos de la energía total y la entalpía total: la razón de acumulación de energía total dentro del volumen de control más el flujo de salida de entalpía total es igual a la razón de aumento de calor que experimenta el fluido en el volumen de control menos la razón a la cual las fuerzas viscosas de la superficie de control realizan trabajo sobre los alrededores. Adviértase que si el flujo fuera

adiabático, v.g., el flujo de calor $\mathbf{q} = 0$, entonces el primer término de la derecha de la ecuación 8.29 sería cero. También, si el flujo fuera no viscoso ($\tau = 0$), entonces el segundo término sería cero. En el caso de un flujo adiabático no viscoso, la ecuación 8.29 de la energía es cero en el lado derecho, que es una forma más sencilla. Si el flujo es estacionario, entonces el primer término del lado izquierdo es cero.

Con anterioridad, se han deducido formas diferenciales de las ecuaciones de conservación de la masa y de conservación de la cantidad de movimiento, la última para casos especiales de flujos no viscosos (ecuación 4.5 de Euler) o flujos viscosos incompresibles (ecuación 6.11 de Navier-Stokes para un flujo incompresible). ¿Cuál es la forma diferencial para la ecuación de la conservación de la energía? Se tiene que no existe un camino sencillo para la deducción de esta ecuación puesto que no es posible convertir con facilidad el término correspondiente al trabajo viscoso de la ecuación 8.29 en una integral de volumen. En cambio, al aplicar la ecuación 8.27 a un elemento de volumen de fluido y con ayuda de la ecuación de Navier-Stokes, se llega a la siguiente forma diferencial de la ecuación de la energía:¹⁰

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (8.30)$$

donde el último término de esta ecuación, Φ , que se conoce como *función de disipación*, es proporcional a la viscosidad y es siempre positivo o cero ($\Phi \geq 0$), ya que contiene los cuadrados de las sumas de los términos que comprenden las derivadas espaciales de \mathbf{V} . Advértase que la ecuación de la energía, como la de la conservación de la masa, es una ecuación escalar.

Es posible obtener una forma alternativa de la ecuación 8.30 si se sustituye \hat{u} por $\hat{h} - p/\rho$, como se dio en la ecuación 8.28:

$$\rho \frac{D\hat{h}}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (8.31)$$

Ejemplo 8.4

En una chumacera, como la del ejemplo 6.4, el aceite lubricante es un flujo de Couette localmente, como se ejemplifica en la figura 6.4. Si se elimina la potencia disipada en el cojinete al enfriar el material de la chumacera ($y \leq 0$), (a) calcule el flujo de calor q hacia la pared ($y = 0$) para el cojinete que se describió en el ejemplo 6.4. (b) Determine la diferencia de temperatura entre las superficies del cojinete si $\lambda = 4 \text{ W/mK}$.

Solución

(a) Refiriéndose a la ecuación 8.31, y advirtiendo que no hay cambios en la dirección del flujo, x , sino sólo en la dirección normal, y , de la figura 6.4, la conservación de la energía tiene la forma:

¹⁰ Véase la sección 8.5 de este capítulo para esta deducción.

$$0 = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_i = -\frac{dq}{dy} + \Phi_i$$

que puede integrarse, si se advierte que $q = 0$ en la superficie del eje $y = h$, para dar:

$$\int_{q_w}^0 dq = \int_0^h \Phi_i dy$$

$$-q_w = \int_0^h \mu \left(\frac{V}{h}\right)^2 dy$$

$$q_w = -\mu \frac{V^2}{h}$$

donde se ha utilizado el valor de Couette de $\mu(V/h)^2$ para Φ_i . El valor negativo de q_w corresponde al calor que se extrae del aceite. Con los valores numéricos del ejemplo 6.4, $\mu = 6.7E(-5) \text{ Pa s}$, $V = \Omega D/2 = 18.85 \text{ m/s}$ y $h = 1E(-4) \text{ m}$, q_w es:

$$q_w = -(6.7E(-5) \text{ Pa s}) \frac{(18.85 \text{ m/s})^2}{1E(-4) \text{ m}} = -2.381E(2) \text{ W/m}^2$$

(b) Si se observa que $q = -\lambda dT/dy$, la conservación de la energía exige que:

$$0 = \frac{d^2 T}{dy^2} + \Phi_i$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

Al integrar dos veces sobre y con las condiciones en la frontera según las cuales $q = \lambda dT/dy = 0$ en $y = h$ y $T = T_0$ en $y = 0$, se obtiene:

$$T = -\frac{\mu}{2\lambda} \left(\frac{V}{h}\right)^2 y^2 + c_1 y + c_2 = T_0 + \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{V}{h}\right)^2 \left(y - \frac{y^2}{2h}\right)$$

La diferencia de temperatura $T_h - T_0$ a través de la holgura o huelgo para el aceite es:

$$T_h - T_0 = \frac{\mu}{\lambda} \frac{V^2}{2h} = \frac{6.7E(-5) \text{ Pa s}}{4 \text{ W/mK}} \times \frac{(18.85 \text{ m/s})^2}{2[1E(-4) \text{ m}]} = 29.98 \text{ K}$$

Hasta aquí, se han obtenido cuatro formas alternativas para expresar la conservación de la energía: ecuaciones 8.27, 8.29, 8.30 y 8.31. ¿Cuál de las formas resulta mejor utilizar? La respuesta a esta pregunta depende del tipo de flujo que se esté analizando.

En seguida, se consideran varios tipos comunes de flujos y su correspondiente expresión de la conservación de la energía que resulta más sencillo emplear.

8.3.1 Flujo estacionario compresible por un ducto o cámara

En un flujo compresible, puede existir un acoplamiento estrecho entre el teorema de transporte de calor y el cambio en densidad de forma que exista una vinculación entre la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Por consiguiente, se usa la ecuación 8.29 para el caso más general de flujo compresible. Para el flujo estacionario, ésta tiene la forma:

$$\iint_S \rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS + \iint_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} \, dS \quad (8.32)$$

Si se aplica esta fórmula al caso del flujo de un fluido compresible en un ducto o intercambiador de calor, despreciando el término $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}$ al compararlo con $\rho \hat{h} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ en las superficies de entrada y de salida del volumen de control, entonces se encuentra la versión para el caso compresible de la ecuación 8.9:

$$\begin{aligned} \iint_{sal} \rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_{ent} \rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) (-\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dS \\ = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS \end{aligned} \quad (8.33)$$

La cantidad $\hat{h} + V^2/2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ se conoce como *entalpía total*.¹¹ Ésta representa el valor de la entalpía que el fluido podría tener si se llevara al reposo en equilibrio con el fluido estacionario en $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = 0$. La ecuación 8.33 revela que el aumento en el flujo integrado de la entalpía total del flujo que pasa por un volumen de control es igual a la razón de adición del calor a través de la superficie de control. En contraste con el caso incompresible (ecuación 8.9), el cambio en el flujo total de entalpía se ve afectado sólo por la transferencia de calor, no por la viscosidad.

Es posible encontrar una forma diferencial de la ecuación 8.32 de la conservación de la energía para el caso de un flujo estacionario, adiabático ($\lambda, \mathbf{q} = 0$), no viscoso ($\mu, \boldsymbol{\tau} = 0$) al aplicar el teorema de la divergencia y la conservación de la masa en condiciones estacionarias. La ecuación 8.32, con estas restricciones, tiene la forma:

$$\iint_S \rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

Si se aplica el teorema de la divergencia (ecuación 1.44), la ecuación 1.38 y la conservación de la masa para un flujo estacionario,

¹¹ En la mayoría de los flujos compresibles, el cambio en $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ entre la corriente de entrada y de salida es mucho menor que el cambio en $\hat{h} + V^2/2$ y el término $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ puede eliminarse de la ecuación de la conservación de la energía por ser despreciable. La suma $\hat{h} + V^2/2$ se conoce como *entalpía de estancamiento*.

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \left[\rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \right] dV &= 0 \\ \iiint_V \left[\left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \right] dV &= 0 \\ \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) &= 0 \quad (\text{si } \mu, \lambda, \frac{\partial}{\partial t} = 0) \end{aligned} \quad (8.34)$$

Por lo que la entalpía total se conserva a lo largo de una línea de corriente en un flujo estacionario, adiabático, no viscoso. Éste es el caso del flujo compresible que equivale a la ecuación de Bernoulli.

En relación con los flujos no estacionarios que se encuentran en los compresores y turbinas, el flujo relativo al rotor puede considerarse estacionario, como se describe más adelante en la sección 8.4.1. En compresores y motores alternativos, la dependencia respecto al tiempo en términos de la ecuación 8.29 puede ser importante.

8.3.2 Flujos con transferencia de calor

Existen muchos flujos de naturaleza práctica en los que se calienta o enfría un fluido en forma significativa. De hecho, es posible que el propósito del flujo sea intercambiar calor, como en el radiador de un automóvil o el serpentín de enfriamiento de un refrigerador. En esos flujos, puede simplificarse la expresión de la conservación de la energía gracias a la posibilidad de despreciar algunos términos.

Se comienza por determinar las condiciones para las cuales el término de disipación Φ presente en la ecuación 8.30 o en la 8.31 es pequeño comparado con la divergencia del flujo de calor, $\nabla \cdot \mathbf{q}$. Por orden de magnitud, $\Phi \simeq \mu(V/L)^2$, donde V es la velocidad característica del flujo y L es su escala característica de longitud. Si ΔT es el cambio característico de temperatura en el flujo, entonces, por la ley de Fourier (8.24), $q \simeq \lambda \Delta T/L$ y $\nabla \cdot \mathbf{q} \simeq \lambda \Delta T/L^2$. Con el fin de que el término correspondiente a la conducción predomine,

$$\begin{aligned} \lambda \Delta T/L^2 &\gg \mu(V/L)^2 \\ \frac{c_p \Delta T}{V^2} &\gg \frac{c_p \mu}{\lambda} \end{aligned} \quad (8.35)$$

donde se ha multiplicado por el calor específico c_p a presión constante para obtener la forma adimensional en la segunda línea.

El término a la derecha de la ecuación 8.35, $c_p \mu/\lambda$, se conoce como *número de Prandtl* y es una razón adimensional de las propiedades del fluido. En el caso de los gases y de muchos fluidos, el número de Prandtl es del orden de la unidad, pero puede ser muy pequeño para los metales líquidos. De cualquier forma, resulta suficiente que la razón $c_p \Delta T/V^2$ sea muy grande comparada con la unidad para justificar que Φ se desprecie en la ecuación 8.30, o en la 8.31. Por ejemplo, una velocidad característica de flujo en un intercambiador de calor

podría ser 1 m/s, y un calor específico característico $1E(4)$ J/kg K de forma que la ecuación 8.35 quedaría satisfecha si $\Delta T \gg 1E(-4)$ K. Sin embargo, esta condición no puede satisfacerse para flujos compresibles cuando V^2 es del mismo orden que $c_p \Delta T$.

Puede utilizarse un argumento similar para demostrar que $\rho D\hat{h}/Dt \gg Dp/Dt$ en un flujo de transferencia de calor. Por orden de magnitud, $d\hat{h} \simeq d(c_p \Delta T)$ y $dp \simeq d(\rho V^2)$, de forma que:

$$\frac{\rho D\hat{h}/Dt}{Dp/Dt} \simeq \frac{c_p \Delta T}{V^2}$$

Por lo que es posible despreciar Φ y Dp/Dt en la ecuación 8.31, y la conservación de la energía adquiere la forma:

$$\rho \frac{D\hat{h}}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (\text{si } c_p \Delta T \gg V^2) \quad (8.36)$$

Siempre y cuando el cambio de temperatura sea lo suficientemente pequeño de forma que λ y c_p no varíen demasiado en todo el intervalo de temperatura ΔT , la ecuación 8.36 puede simplificarse como sigue:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T \quad (\text{si } \lambda, c_p = \text{constante}, c_p \Delta T \gg V^2) \quad (8.37)$$

La razón de $\lambda/\rho c_p$ se conoce como *difusividad térmica* y por lo común se denota por el símbolo κ . Posee las mismas dimensiones que la difusividad viscosa ν y, para los gases, alrededor de la misma magnitud.¹²

En la mayoría de las aplicaciones de transferencia de calor, el campo de la velocidad se determina primero a partir de la solución a la ecuación de Navier-Stokes, después de lo cual es posible resolver para el campo de temperatura la ecuación 8.37 de la conservación de la energía. Sin embargo, en problemas de convección natural, donde el flujo se ve afectado por la fuerza de empuje (o empuje ascendente) en partes (calentadas) del fluido menos densas, las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía se relacionan estrechamente y no es posible tratarlas por separado. El tratamiento de flujos de esta índole es más difícil que el de flujos de convección forzada, donde las fuerzas gravitatorias son pequeñas comparadas con otras fuerzas o la inercia.

Por último, se puede obtener una forma integral de la conservación de la energía para flujos estacionarios con convección forzada y transferencia de calor mediante la ecuación 8.33, si se nota que el cambio en $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \simeq gL$ es, por lo común, pequeño comparado con $c_p \Delta T$:

$$\int_{sal} \rho \hat{h} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{ent} \rho \hat{h} (-\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = \int \int_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS$$

$$(\text{si } c_p \Delta T \gg V^2, gL; \frac{\partial}{\partial t} = 0) \quad (8.38)$$

¹² Adviértase que ν/κ es igual al número de Prandtl.

Ejemplo 8.5

El agua que fluye por un tubo a razón de $Q = 5 \text{ gal/min}$ se calienta mediante un calentador eléctrico de resistencias a razón de 10 kW . Calcule el aumento de temperatura en el agua cuyo calor específico es $c_p = 4.18 \text{ J/kg K}$.

Solución

Si se aplica la ecuación 8.38 al flujo,

$$\rho Q c_p (T_{sal} - T_{ent}) = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS$$

$$[1E(3) \text{ kg/m}^3] \left(\frac{5 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{3.785E(-3) \text{ m}^3}{\text{gal}} \right) [4.18 E(3) \text{ J/kg K}] (T_{sal} - T_{ent})$$

$$= 1E(4) \text{ W}$$

$$(T_{sal} - T_{ent}) = 7.585 \text{ K}$$

8.4 La segunda ley de la termodinámica

La segunda ley de la termodinámica define dos propiedades termodinámicas, la temperatura absoluta T y la entropía S . Éstas se relacionan con el calor Q mediante la desigualdad de Clausius,

$$\frac{DS}{Dt} \geq \frac{1}{T} \frac{DQ}{Dt} \quad (8.39)$$

la cual establece que la entropía de un elemento de fluido sólo puede disminuir por enfriamiento, pero puede aumentar aun en ausencia de intercambio de calor. El caso límite de la desigualdad de la ecuación 8.39 se conoce como flujo termodinámicamente reversible. Éste es una idealización del flujo real, comparable al flujo incompresible o no viscoso, la cual nunca se cumple de manera exacta, pero puede aproximarse mucho al caso real en varias situaciones prácticas. Por este motivo, es deseable expresar la segunda ley en su forma euleriana más común.

La forma integral de la ecuación 8.39 se encuentra al aplicar el teorema de transporte de Reynolds, ecuación 5.5, a un volumen fijo de control, con lo que se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \hat{s} dV + \iint_S \rho \hat{s} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \geq \iint_S \left(\frac{\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n})}{T} \right) dS \quad (8.40)$$

donde \hat{s} es la entropía por unidad de masa de fluido. En un flujo adiabático estacionario, donde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$, la segunda ley requiere que el flujo de entropía que sale del volumen

de control sea igual, o exceder a aquel que entra al volumen de control; la producción de entropía dentro del volumen de control nunca es negativa para este caso.

Al aplicar el teorema de la divergencia y la ecuación 5.4 a la ecuación 8.40, se encuentra la forma diferencial de la segunda ley:

$$\rho \frac{D\hat{s}}{Dt} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \quad (8.41)$$

Para un flujo adiabático ($\mathbf{q} = 0$), la entropía \hat{s} de una partícula de fluido aumentará o permanecerá igual, pero nunca disminuirá.

El cambio de entropía de una partícula de fluido está relacionado con los cambios de energía interna y densidad mediante la ecuación 1.9:

$$T \frac{D\hat{s}}{Dt} = \frac{D\hat{u}}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (8.42)$$

Sin embargo, el lado derecho de la ecuación 8.42 se relaciona con \mathbf{q} y Φ mediante la primera ley, ecuación 8.30, de modo que 8.42 se transforma en:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\hat{s}}{Dt} &= \frac{\Phi}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} \\ &= \frac{\Phi_T}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \end{aligned} \quad (8.43)$$

donde la función Φ_T se define como:

$$\Phi_T \equiv \Phi - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (8.44)$$

y nunca es negativa puesto que Φ y $-\mathbf{q} \cdot \nabla T$ nunca son negativas.¹³

Si se comparan las ecuaciones 8.43 y 8.41, se puede ver que el origen de la desigualdad en 8.41 y el carácter irreversible del flujo está en el término Φ_T/T , que tiene contribuciones tanto de la disipación viscosa (Φ) como de la conducción de calor ($-\mathbf{q} \cdot \nabla T/T$). Si los gradientes de velocidad y temperatura son suficientemente pequeños, Φ_T/T puede ser despreciable si se compara con los otros términos de la ecuación y puede considerarse el flujo como termodinámicamente reversible.

Al integrar la ecuación 8.43 sobre el volumen de control, se encuentra su forma integral:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \hat{s} dV + \iint_S \rho \hat{s} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \left(\frac{\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n})}{T} \right) dS + \iiint_V \left(\frac{\Phi_T}{T} \right) dV \quad (8.45)$$

Este primer término a la derecha de la ecuación 8.45 es la contribución del flujo de calor, a través de la superficie de control, a la creación de la entropía dentro del volumen de control; el segundo término es la producción irreversible de entropía dentro del volumen de control.

¹³ Por la ley de Fourier, ecuación 8.24, la dirección de \mathbf{q} es opuesta a ∇T , por lo que $-\mathbf{q} \cdot \nabla T$ es positivo.

8.4.1 Flujo estacionario en máquinas rotoestacionarias

En la sección 8.2.3, se consideró el flujo incompresible en una máquina rotoestacionaria como es el caso de una bomba o una hélice. Para un flujo compresible en circunstancias parecidas, el cual se encontraría en las turbinas de gas, por ejemplo, el flujo se considera de nuevo estacionario respecto al rotor. En este marco de referencia no inercial, la conservación de la energía, ecuación 8.33, tiene la forma:

$$\begin{aligned} \iint_{sal} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \frac{(\Omega \tilde{r})^2}{2} \right) (\rho \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}) dS \\ - \iint_{ent} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \frac{(\Omega \tilde{r})^2}{2} \right) (-\rho \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (8.46)$$

que es el equivalente compresible de la ecuación 8.12. Si se siguen los mismos pasos de la sección anterior para el caso de un flujo incompresible, se llega al equivalente de la ecuación 8.16:¹⁴

$$\dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{sal} - \dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{ent} = \Omega \cdot \mathbf{T} + \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (8.47)$$

Adviértase que ésta no es simplemente la ecuación 8.16 de la energía para el caso incompresible con p/ρ sustituido por h . No existe un término de disipación viscosa que revele una irreversibilidad del flujo a través de la máquina, ni una forma evidente de definir una eficiencia que tome en cuenta los efectos viscosos.

Se debe recurrir a la segunda ley de la termodinámica para reescribir la ecuación 8.47 en una forma que reconozca de modo explícito los efectos de la disipación viscosa. Para un flujo globalmente adiabático ($\mathbf{q} = 0$ en la superficie de control), lo cual es generalmente el caso de los compresores y turbinas, la versión del flujo estacionario de la segunda ley, ecuación 8.45, es:

$$\dot{m} \hat{s}_{sal} - \dot{m} \hat{s}_{ent} = \iiint_V \left(\frac{\Phi_T}{T} \right) dV \quad \text{si } \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS = 0 \quad (8.48)$$

Se puede concluir que la entropía del flujo que sale \hat{s}_{sal} nunca es menor que la entropía del flujo que entra \hat{s}_{ent} ya que $\Phi_T \geq 0$. El aumento de entropía es la propiedad del fluido que mide los efectos debilitantes de la disipación viscosa y la conducción interna de calor en un flujo compresible globalmente adiabático.

Es posible introducir el cambio de entropía en forma explícita en la ecuación 8.47 de la energía para el caso compresible al definir una entalpía isentrópica \hat{h}_s del flujo

¹⁴ En la ecuación 8.47, se eliminó el término de la gravedad $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ puesto que es invariablemente pequeño (comparado con los otros términos) en flujos compresibles a través de turbomáquinas.

de salida como la entalpía del fluido para la presión en la *salida* y la entropía en la *entrada*:

$$\hat{h}_s \equiv \hat{h} \{p_{sal}, \hat{s}_{ent}\} \leq \hat{h}_{sal} \quad (8.49)$$

donde la desigualdad sigue directamente de la relación termodinámica según la cual $(\partial \hat{h} / \partial \hat{s})_p = T$ es siempre positiva. Si se sustituye en la ecuación 8.47, se llega al equivalente del flujo compresible adiabático de la ecuación 8.17:

$$\dot{m} \left(\hat{h}_s + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{sal} - \dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{ent} = \Omega \cdot T - \dot{m}(\hat{h}_{sal} - \hat{h}_s) \quad (8.50)$$

donde el último término, siempre positivo, es análogo a la integral de disipación de la ecuación 8.17.

Si se prosigue con la analogía con el flujo incompresible, las eficiencias *adiabáticas* de compresores y turbinas se definen como:

$$\eta_c \equiv \frac{1}{(\Omega T)_c} \left[\dot{m} \left(\hat{h}_s + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{sal} - \dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{ent} \right] \leq 1$$

$$\eta_t \equiv (\Omega T)_t \left[\dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{ent} - \dot{m} \left(\hat{h}_s + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{sal} \right]^{-1} \leq 1 \quad (8.51)$$

y las potencias para un compresor y una turbina pueden darse así, en términos de las eficiencias componentes:

$$(\Omega T)_c = \frac{1}{\eta_c} \left[\dot{m} \left(\hat{h}_s + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{sal} - \dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{ent} \right]$$

$$(\Omega T)_t = \eta_t \left[\dot{m} \left(\hat{h} + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{ent} - \dot{m} \left(\hat{h}_s + \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)_{sal} \right] \quad (8.52)$$

8.5 Deducción de la forma diferencial de la primera ley

En esta sección, se deduce la forma diferencial de la primera ley, ecuación 8.30, para cualquier flujo, ya sea compresible o incompresible. Para este fin, se tendrá que utilizar las relaciones entre el esfuerzo viscoso τ y las derivadas de la velocidad que se utilizaron con anterioridad en la obtención de la ecuación de Navier-Stokes.

Si se aplica la ecuación 5.4 al lado izquierdo de la ecuación 8.27 de la primera ley y también se aplica el teorema de la divergencia a los términos del flujo de calor y al de la presión que están en el lado derecho, se obtiene:

$$\iiint_V \rho \frac{D}{Dt} \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) dV = - \iiint_V [\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (p\mathbf{V})] dV + \iint_S \tau \cdot \mathbf{V} dS$$

Si ahora se elige como volumen de control un volumen unitario de fluido, estas integrales pueden evaluarse para obtener:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\hat{u} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla p + \psi \quad (8.53)$$

donde el término del trabajo correspondiente a la viscosidad ψ , expresado en coordenadas cartesianas, es:

$$\begin{aligned} \psi \equiv & \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{xz}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (v\tau_{yz}) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (w\tau_{zz}) \end{aligned} \quad (8.54)$$

El negativo del término ψ es la rapidez o razón a la cual el esfuerzo viscoso τ , que actúa sobre un volumen unitario de fluido, realiza trabajo en el ambiente circundante.

A continuación, se considera la ecuación de la conservación de la energía cinética, ecuación 8.4, en la forma:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\mathbf{V} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} \quad (8.55)$$

Las componentes de \mathbf{f} están dadas en la ecuación 6.7, y el término $\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}$ puede expresarse en coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} \equiv & u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ & + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ & + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (8.56)$$

El término $\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}$ es la razón a la cual la fuerza viscosa por unidad de volumen realiza trabajo al mover el elemento de fluido a través del espacio.

Por último, se advierte que la derivada material del término de la gravedad $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} (-\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) &= \rho \mathbf{V} \cdot \nabla (-\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) \\ &= -\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} \end{aligned} \quad (8.57)$$

donde se aplicó la independencia de \mathbf{g} respecto al tiempo y la ecuación 2.7.

Al restar las ecuaciones 6.5 y 8.57 de la ecuación 8.53, de la primera ley, y al advertir que $p \nabla \cdot \mathbf{V} = -(p/\rho) D\rho/Dt$ por la conservación de la masa, se encuentra la siguiente forma de la primera ley:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (8.58)$$

donde la función de disipación, Φ , está relacionada con ψ y $\mathbf{V} \cdot \mathbf{f}$ mediante:

$$\begin{aligned} \Phi \equiv \psi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} = & \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (8.59)$$

Si ahora se sustituyen las componentes del esfuerzo viscoso por sus valores apropiados para un fluido newtoniano, ecuaciones 6.4 y 6.5, se encuentra la siguiente forma para Φ , expresada en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{2}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu_B (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \end{aligned} \quad (8.60)$$

donde μ_B es la viscosidad volumétrica.

Adviértase que Φ siempre es positiva o cero puesto que es la suma de los términos cuadráticos. Si U es la magnitud de la velocidad de un flujo y L la magnitud de la longitud a lo largo de la cual cambia la velocidad, entonces la magnitud de Φ es $\mu(U/L)^2$.

Para un fluido incompresible, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ y Φ adquieren una forma en cierto grado más sencilla y se denota por Φ_i :

$$\begin{aligned} \Phi_i = & 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad \text{si } \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

8.6 Problemas

Problema 8.1

En el caso del flujo a través de un resalto hidráulico de la figura 5.10, deduzca una expresión para la pérdida de la carga hidráulica, $h_{ent} - h_{sal}$, a lo largo de la línea de corriente superficial en términos de h_{ent} y h_{sal} . Explique por qué $h_{sal} \geq h_{ent}$ en el resalto hidráulico.

Problema 8.2

En un compresor centrífugo entra aire a una velocidad de $V_{ent} = 100 \text{ m/s}$ por un orificio con diámetro $D_{ent} = 15 \text{ cm}$. El compresor extrae aire de la atmósfera ambiente con una densidad $\rho_a = 1.204 \text{ kg/m}^3$ y temperatura 20°C . El aire sale del compresor a una temperatura de 300°C y con una velocidad $V_{sal} = 80 \text{ m/s}$. En este intervalo de temperaturas, la entalpía $\hat{h} = \hat{c}_p T$, donde el calor específico es $\hat{c}_p = 1.005 \text{ E}(3) \text{ J/kg K}$.

(a) Si se supone que se trata de un flujo no viscoso que proviene de la atmósfera hacia el orificio de entrada del compresor, calcule el valor de $(\hat{h} + V^2/2g)_{sal} - (\hat{h} + V^2/2g)_{ent}$.
 (b) Si se supone que la densidad del flujo de entrada es la misma que la de la atmósfera, determine el gasto másico \dot{m} a través del compresor. (c) Calcule la potencia \mathcal{P} que se requiere para hacer funcionar el compresor.

Problema 8.3

Para el chorro turbulento de la figura 7.6, obtenga una expresión para el flujo de energía cinética $\iint (V^2/2)(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$ en cualquier punto x en términos de los parámetros x , R_s , V_s y α_j . ¿Concuera esta expresión con la desigualdad de la ecuación 8.11 correspondiente a la disminución del flujo de carga hidráulica de un flujo viscoso?

Problema 8.4

Una bomba de agua con áreas iguales en los flujos de entrada y salida, hace que aumente la presión del agua entre la entrada y la salida en una cantidad igual a 100 psi cuando el gasto es 50 gal/min . Si la eficiencia de la bomba es $\eta_p = 78\%$, calcule la potencia \mathcal{P} que se requiere para hacer funcionar la bomba en estas condiciones de flujo.

Problema 8.5

Un gas perfecto ($\hat{c}_p = 1 \text{ E}(3) \text{ J/kg K}$, $\hat{h} = \hat{c}_p T$) fluye en forma adiabática ($q = 0$) por una tubería larga de diámetro constante. Corriente arriba, la temperatura es $T_1 = 300 \text{ K}$, la presión $p_1 = 1 \text{ E}(6) \text{ Pa}$ y la velocidad $V_1 = 10 \text{ m/s}$. La presión corriente abajo es $p_2 = 1 \text{ E}(5) \text{ Pa}$. Calcule la temperatura T_2 y velocidad V_2 corriente abajo.

Bibliografía

Sabersky, Rolf H., Allan J. Acosta y Edward G. Hauptman, *Fluid Flow A First Course in Fluid Mechanics*, 3a. ed. Nueva York: Macmillan Publishing Co., 1989.

Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Howarth, L., *Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. 1, High Speed Flows*. Oxford: Oxford University Press., ed. 1953.

9.1 Introducción

En cualquier parte, es posible observar ejemplos de los sistemas que conducen fluidos dentro de tuberías y ductos para distintos usos. Las casas cuentan con sistemas de suministro de agua para beber, cocinar, lavar y hacer funcionar los inodoros. También, las casas cuentan con sistemas de drenaje para recoger las aguas negras y enviarlas a un sistema de tratamiento; éste puede ser un sistema séptico individual o una planta de tratamiento de aguas negras. Las ciudades y gran parte de las zonas rurales cuentan con sistemas de suministro de agua potable que bombean el agua de pozos o presas y la distribuyen a hogares, negocios, etc. Estos sistemas también deben proporcionar suministros de agua contra incendios para casos de emergencia. En Estados Unidos, el suministro de combustible de gas natural se envía a hogares, fábricas y plantas generadoras de energía eléctrica mediante una red nacional que conecta miles de pozos con los usuarios de este combustible gaseoso. El petróleo combustible se bombea de pozos y se envía a tanques de almacenamiento y, más tarde, se hace llegar por tubería a una refinería donde se procesa. En Estados Unidos, la mayor parte de los edificios cuenta con un sistema de calentamiento (y muchos de ellos también tienen un sistema de enfriamiento) que transporta el calor de un horno central hacia las áreas periféricas mediante un vapor de aire o agua caliente. Sistemas semejantes conducen calor o frío en vehículos de transportación. En las plantas generadoras de energía eléctrica a base de vapor, éste y el agua fluyen a través de un ciclo que convierte parte del calor del combustible en trabajo mecánico. Al leer este párrafo, el corazón del lector bombea sangre hacia todo un sistema muy complejo que proporciona a las células de su cuerpo oxígeno y nutrimentos en tanto que, en forma simultánea, elimina los productos de desecho. Queda claro que tanto los seres humanos como la sociedad dependen del funcionamiento apropiado de muchos sistemas de fluidos, los cuales proporcionan un sustento físico a las personas.

Este capítulo trata el problema de cómo es posible hacer que los fluidos se muevan por sistemas en forma conveniente. A partir de lo ya estudiado, se sabe que es necesario gastar energía si se desea hacer que los fluidos se muevan a través de tuberías y ductos, por lo que también es necesario determinar cuánta energía debe suministrarse a fin de

lograr que funcione el sistema de fluidos del modo que se desee. En los últimos años, la eficiencia en el uso que se da a la energía ha adquirido cada vez mayor importancia, lo cual repercute en el diseño y operación de muchos sistemas de la ingeniería. En este capítulo, se estudiarán los métodos empleados en el análisis del flujo eficiente de fluidos en sistemas.

9.2 Pérdida de la carga hidráulica en tuberías y ductos

En el capítulo 8, ecuación 8.10, se definió una cantidad llamada *carga hidráulica* que se utilizó para el caso del flujo incompresible y se denotó mediante el símbolo h :

$$h \equiv \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}}{g} = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \quad (9.1)$$

Se encontró que la carga hidráulica disminuye, cuando se promedia en toda la sección transversal de un ducto en un flujo estacionario, en la dirección del flujo a causa de la disipación viscosa (ecuación 8.11).¹ Entre la entrada y la salida de una tubería o ducto, habrá una disminución en la carga hidráulica, Δh_i , que se denomina *pérdida de la carga hidráulica*. En una tubería, la cantidad de esta pérdida de la carga hidráulica depende del diámetro (calibre) y longitud de la tubería y del gasto volumétrico del fluido que pasa por ella. Habrá pérdidas adicionales de la carga hidráulica si la tubería no es recta pero contiene codos pronunciados o si cuenta con válvulas u otras restricciones. En esta sección, el interés estará centrado a la evaluación cuantitativa de estas pérdidas de la carga hidráulica.

9.2.1 Pérdida de la carga hidráulica en tuberías rectas

En los capítulos 6 y 7, se aprendió cómo el esfuerzo viscoso en la pared de una tubería ocasiona una caída de presión en el flujo. Para una sección recta de tubería de longitud L y diámetro D , la relación cuantitativa entre la caída de presión² desde la entrada hasta la salida, $p_{ent}^* - p_{sal}^*$, y el gasto volumétrico se expresó en la ecuación 6.48 en términos del factor de fricción de Darcy f (definido en la ecuación 6.47) y la velocidad promedio del flujo \bar{V} de la forma siguiente:

$$p_{ent}^* - p_{sal}^* = f \left(\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 \right) \frac{L}{D} \quad (9.2)$$

¹ Pero, en el caso de las bombas y turbinas, la carga hidráulica puede aumentar o disminuir, respectivamente, debido a que el flujo no es estacionario dentro de estos dispositivos y se añade o extrae energía (véase la ecuación 8.17).

² En ésta y en las secciones siguientes, a la suma $p^* \equiv p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = p + \rho g z$ se le llamará "presión", a pesar de que se trata de la suma de la presión estática p a la que algunas veces se le da el nombre de presión hidrostática, $-\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = \rho g z$. Esto simplifica el análisis de los sistemas de tuberías para los cuales existe un cambio de altura entre la entrada y la salida debido a que sólo el cambio que experimenta p^* , no p , es el que determina el gasto.

Puesto que no hay cambio en \bar{V} entre la entrada y la salida, la pérdida de la carga hidráulica, $h_{ent} - h_{sal}$ es simplemente la diferencia de presión $p_{ent}^* - p_{sal}^*$ dividida entre ρg :

$$\Delta h_f \equiv h_{ent} - h_{sal} = \frac{p_{ent}^* - p_{sal}^*}{\rho g} = f \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) \frac{L}{D} \quad (9.3)$$

donde se ha utilizado 9.2 para eliminar la caída de presión.

Se acostumbra expresar la pérdida de la carga hidráulica entre dos puntos de un flujo en términos de un *coeficiente de pérdida de la carga hidráulica* K que es adimensional:

$$K \equiv \frac{\Delta h}{\bar{V}^2/2g} = \frac{2g(\Delta h)}{\bar{V}^2} \quad (9.4)$$

por lo que la pérdida de la carga hidráulica se transforma en:

$$\Delta h = K \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) \quad (9.5)$$

Al comparar la ecuación 9.4 con la 9.3, es posible observar que el coeficiente K_f de pérdida de la carga hidráulica es, simplemente:

$$K_f = f \left(\frac{L}{D} \right) \quad (9.6)$$

Por lo tanto, en el flujo de una tubería, el coeficiente de pérdida de la carga hidráulica es proporcional al factor de fricción y a la razón de la longitud al diámetro de la tubería.

El factor de fricción f de la tubería es una función del número de Reynolds $Re_D \equiv \bar{V}D/\nu$ para el diámetro y, si el flujo es turbulento, la razón de la altura de rugosidad de la pared, ϵ/D . Para un flujo laminar y turbulento, estas relaciones están dadas en las ecuaciones 6.49 y 7.17, respectivamente:

$$f = \frac{64}{Re_D} \quad \text{si } Re_D < 2300$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \quad \text{si } Re_D > 2300 \quad (9.7)$$

En el esquema de la ecuación 9.7, el factor de fricción de Darcy, f , aumenta en forma discontinua en $Re_D = 2300$ a partir de $2.783E(-2)$ para un flujo laminar a $4.728E(-2)$ para un flujo turbulento en un tubo liso. En realidad, el aumento en el factor de fricción se extiende a un intervalo del número de Reynolds cercano a 2300. Pocas veces esta discontinuidad numérica ocasiona problemas en los cálculos del flujo en una tubería.

El factor de fricción f como función del número de Reynolds $\bar{V}D/\nu$ para el diámetro y la razón de la altura de rugosidad de la pared ϵ/D se grafica en la figura 9.1 a partir de las ecuaciones 9.7, usando una escala logarítmica en ambos ejes. Esta gráfica se conoce como *diagrama de Moody* y su uso era corriente en las soluciones gráficas de 9.7 antes del advenimiento de las computadoras digitales. El diagrama de Moody resulta apropiado en el cálculo aproximado de los valores de las variables relevantes.

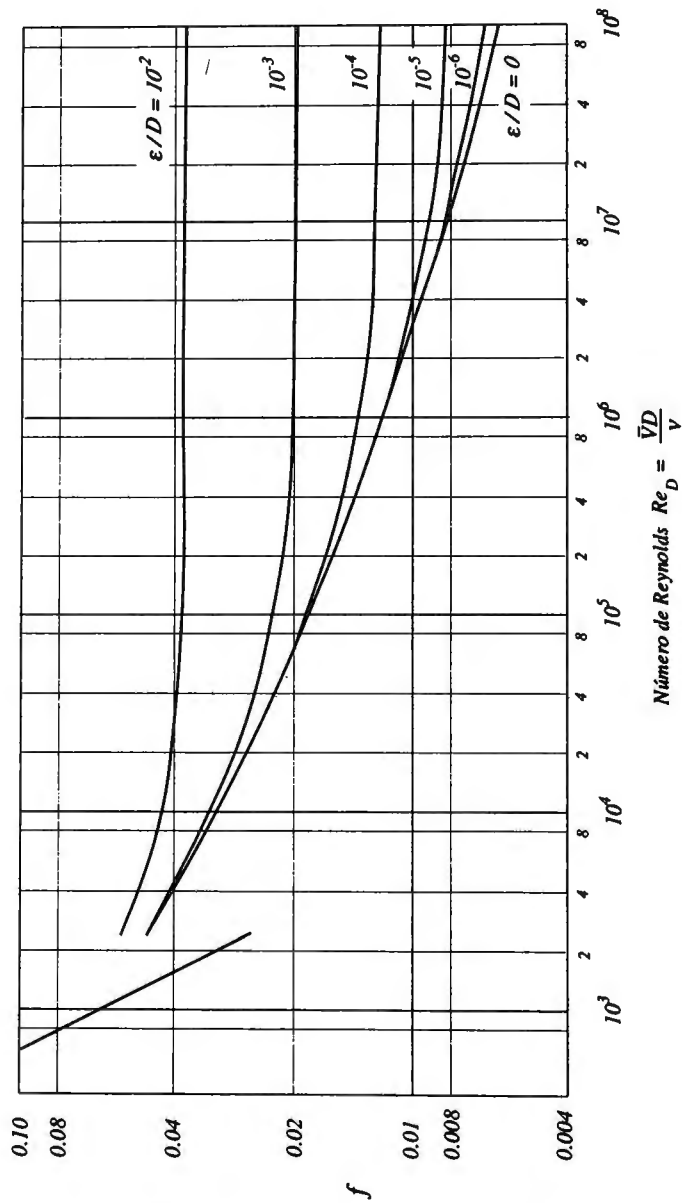


Figura 9.1 El factor de fricción de Darcy f en función del número de Reynolds Re_D para el diámetro y la razón de rugosidad ϵ/D de la pared de la tubería correspondiente a los flujos laminar ($Re_D < 2300$) y turbulento ($Re_D > 2300$) en tuberías circulares.

Pérdida de la carga hidráulica para un gasto dado

Si se conoce el gasto volumétrico Q por una tubería determinada, el cálculo de la pérdida de la carga hidráulica y la caída de presión es una tarea sencilla si se siguen estos pasos:

1. Calcule el número de Reynolds $Re_D = \bar{V}D/\nu = 4Q/\pi D\nu$.
2. Dependiendo de si el número de Reynolds es mayor o menor que 2300, calcule f a partir de la forma para el caso turbulento o el laminar de la ecuación 9.7.
3. Con este valor de f , calcule el coeficiente de pérdida, la pérdida de la carga hidráulica y la caída de presión a partir de las ecuaciones 9.6, 9.5 y 9.2.

Ejemplo 9.1

Una tubería de acero comercial con diámetro de 8 in conduce agua desde la salida de un tanque de almacenamiento (a una altura de 100 m) a una distancia $L = 2.2$ km desde el tanque de almacenamiento). Si el gasto volumétrico es de 1000 galones por minuto, calcule (a) el coeficiente de pérdida de la carga hidráulica, (b) la pérdida de la carga hidráulica y (c) el cambio en la presión *estática* $p_{ent} - p_{sal}$ entre la entrada y la salida de la tubería.

Solución

(a) Primero, calcule D , \bar{V} y Re_D con los datos de las tablas 1.1 y 1.6:

$$D = 8 \text{ in} \times \frac{2.54E(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 0.2032 \text{ m}$$

$$Q = \frac{1000 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{3.782E(-3) \text{ m}^3}{\text{gal}} = 6.303E(-2) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(6.303E(-2) \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(0.2032 \text{ m})^2} = 1.944 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{(1.944 \text{ m/s})(0.2032 \text{ m})}{1.0E(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 3.950E(5)$$

El flujo es turbulento puesto que Re_D es mayor que 2300. Si se elige $\epsilon = 5E(-5) \text{ m}$ de la tabla 7.1, debe encontrarse f a partir de la solución a la ecuación 9.7 para un flujo turbulento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2.0 \log \left(\frac{5E(-5) \text{ m}}{3.7(0.2032 \text{ m})} + \frac{2.51}{3.950E(5)\sqrt{f}} \right) \\ &= -2.0 \log \left(6.650E(-5) + \frac{6.354E(-6)}{\sqrt{f}} \right) \end{aligned}$$

Supóngase, en un principio, que $f = 1E(-2)$ en el lado derecho de esta ecuación y, luego, se calcula $f = 1.656E(-2)$ al evaluar el lado derecho. Después de tres o más iteraciones, se encuentra que $f = 1.616E(-2)$. El coeficiente de pérdida de la carga hidráulica a partir de la ecuación 9.6 es:

$$K_f = f \left(\frac{L}{D} \right) = 1.616E(-2) \left(\frac{2000m}{0.2032m} \right) = 1.590E(2)$$

(b) La pérdida de la carga hidráulica se calcula a partir de la ecuación 9.5:

$$\Delta h_f = K_f \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) = 1.590E(2) \left(\frac{(1.944m)^2}{2(9.807m/s^2)} \right) = 30.64m$$

(c) Si se observa que $p_{ent}^* - p_{sal}^* = p_{ent} - p_{sal} + \rho g(z_{ent} - z_{sal})$,

$$\begin{aligned} p_{ent} - p_{sal} &= p_{ent}^* - p_{sal}^* - \rho g(z_{ent} - z_{sal}) = [(h_{ent} - h_{sal}) - (z_{ent} - z_{sal})] \rho g \\ &= [30.64m - (100 - 22)m](1E(3) \text{ kg/m}^3)(9.807m/s^2) = -4.645E(5) \text{ Pa} \end{aligned}$$

Observe que existe un aumento de la presión estática a pesar de la pérdida de la carga hidráulica, ya que la salida se encuentra a una altura suficientemente menor como para que $z_{ent} - z_{sal}$ sea mayor que $h_{ent} - h_{sal}$.

Gasto para una pérdida dada de la carga hidráulica

En muchos de los casos de flujos en tuberías, el gasto por la tubería no está controlado sino que crece hasta alcanzar un nivel que concuerde con la caída de presión disponible. Por ejemplo, al abrir por completo el grifo de un lavamanos, el gasto aumenta hasta que la caída de presión en la tubería iguala la diferencia de presión entre el suministro de agua y la presión atmosférica.

El procedimiento para calcular el gasto Q dada la pérdida de la carga hidráulica $\Delta h_f = h_{ent} - h_{sal}$ disponible para contrarrestar la fricción de la pared depende de que el flujo sea laminar o turbulento. Si el flujo es laminar, puede obtenerse una expresión para \bar{V} en términos de cantidades conocidas al eliminar f entre las ecuaciones 9.7 y 9.3:

$$\bar{V} = \frac{g(\Delta h_f)D^2}{32\nu L} \quad (9.8)$$

Por otra parte, si el flujo es turbulento, primero se determina el valor de $\sqrt{f}Re_D$ utilizando la ecuación 9.3 y $Re_D \equiv \bar{V}D/\nu$ para encontrar:

$$\sqrt{f}Re_D = \left(\frac{2g(\Delta h_f)D^3}{\nu^2 L} \right)^{1/2} \quad (9.9)$$

y, con este valor, se resuelve para Re_D con la ecuación 9.7 de la forma siguiente:

$$Re_D = -2.0(\sqrt{f}Re_D) \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\sqrt{f}Re_D} \right) \quad (9.10)$$

a partir de la cual puede determinarse \bar{V} .

El procedimiento para calcular el gasto Q comprende los siguientes pasos:

1. Suponiendo que el flujo es laminar, se calcula \bar{V} a partir de la ecuación 9.8 y $Re_D = \bar{V}D/\nu$.
2. Si $Re_D < 2300$, el flujo es laminar y $Q = \pi D^2 \bar{V}/4$.
3. Si el flujo no es laminar, se calcula $\sqrt{f} Re_D$ a partir de la ecuación 9.9 y Re_D a partir de la 9.10.
4. Se calcula $Q = \pi D^2 \bar{V}/4 = \pi D \nu Re_D/4$.

Ejemplo 9.2

Para el sistema del flujo en una tubería correspondiente al ejemplo 9.1, calcule el gasto volumétrico Q cuando la caída de la presión estática $p_{ent} - p_{sal}$ es cero.

Solución

Si $p_{ent} - p_{sal} = 0$, entonces $p_{ent}^* - p_{sal}^* = p_{ent} - p_{sal} + \rho g(z_{ent} - z_{sal}) = \rho g(z_{ent} - z_{sal})$, y la pérdida de la carga hidráulica $\Delta h_f = h_{ent} - h_{sal} = (p_{ent}^* - p_{sal}^*)/\rho g = z_{ent} - z_{sal} = 100 \text{ m} - 22 \text{ m} = 78 \text{ m}$. Es muy probable que el flujo sea turbulento, por lo que se calcula $\sqrt{f} Re_D$ a partir de 9.9:

$$\sqrt{f} Re_D = \left(\frac{2(9.807 \text{ m/s}^2)(78 \text{ m})(0.2032 \text{ m}^3)}{[1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s}]^2(2.2\text{E}(3) \text{ m})} \right)^{1/2} = 7.638\text{E}(4)$$

y luego se resuelve para Re_D de la ecuación 9.10:

$$Re_D = -2[7.638\text{E}(4)] \log \left(6.65\text{E}(-5) + \frac{2.51}{7.638\text{E}(4)} \right) = 6.115\text{E}(5)$$

lo cual confirma que el flujo es turbulento. Ahora, calcule Q :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi D \nu Re_D}{4} = \frac{\pi(0.2032 \text{ m})(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})[6.115\text{E}(5)]}{4} = 9.759\text{E}(-2) \text{ m}^3/\text{s} \\ &= 9.759\text{E}(-2) \text{ m}^3/\text{s} \times \frac{\text{gal}}{3.782\text{E}(-3) \text{ m}^3} \times \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} = 1548 \text{ gal/min} \end{aligned}$$

Cómo seleccionar el diámetro de una tubería

Algunas veces, un ingeniero de diseño debe seleccionar el diámetro de la tubería que se necesita para proporcionar un nivel dado de servicio. Por ejemplo, es posible especificar el gasto máximo Q , junto con la máxima caída de presión permisible o pérdida de la carga hidráulica para este gasto. El ingeniero debe seleccionar el diámetro más pequeño para la tubería que permita este flujo sin sobrepasar el límite de la pérdida de la carga hidráulica.

Las tuberías se fabrican con espesores y diámetros estándares. Para un diámetro dado, cuanto más gruesa sea la tubería tanto mayor será la presión que soportará. El costo por unidad de longitud de tubería aumentará con la cantidad de material, la cual es proporcional al diámetro multiplicado por el espesor. El diseñador elegirá el diámetro mínimo que al mismo tiempo satisfaga los requisitos del flujo y el mínimo espesor de la pared que sea capaz de soportar la máxima presión que se espera en el sistema a fin de reducir al mínimo el costo de la tubería.

Algunas veces, la selección de la tubería se encuentra condicionada por consideraciones económicas más complicadas. En tanto que es cierto que el costo de una tubería es un factor importante, el costo de la energía necesaria para bombear el fluido requerido por la tubería también es un gasto que debe considerarse. Al seleccionar una tubería más larga, se experimentará una menor caída de presión, y se necesitará menos energía. Los ahorros derivados de gastos menores de energía pueden más que compensar el aumento del costo de una tubería con diámetro mayor. La *contabilidad de costos del ciclo de duración* es un método de análisis económico y técnico que toma en consideración el costo de construcción y operación de un sistema tecnológico y la selección de los componentes para lograr los objetivos técnicos y, simultáneamente, reducir al mínimo los costos totales.

Ejemplo 9.3

Desde la tubería principal, cuya presión manométrica es de 100 *psi*, se suministrará agua a una fábrica. Una línea horizontal con 100 *m* de longitud, la cual conecta la tubería municipal con la fábrica, debe suministrar un máximo de 2 000 *gal/min* de agua en casos de incendio, con una presión manométrica no inferior a cero en el extremo de la tubería. Se cuenta con tuberías de acero comercial de diámetros pares (en pulgadas). ¿Cuál es el diámetro mínimo de la tubería que satisface estos requisitos?

Solución

La caída de presión $p_{ent} - p_{sal}$ disponible de 100 *psi* es igual a la pérdida de la carga hidráulica $h_{ent} - h_{sal}$:

$$h_{ent} - h_{sal} = \frac{p_{ent} - p_{sal}}{\rho g} = \frac{100 \text{ psi}}{(1\text{E}(3) \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)} \times \frac{6.895\text{E}(3) \text{ Pa}}{\text{psi}} = 70.31 \text{ m}$$

Ahora, suponga inicialmente que un tubo de 4 *in* será el apropiado. Siga los pasos del ejemplo 9.1 para encontrar la caída de presión:

$$D = 4 \text{ in} \times \frac{2.54\text{E}(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 0.1016 \text{ m}$$

$$Q = \frac{2000 \text{ gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times 3.782\text{E}(-3) \text{ m}^3/\text{gal} = 1.261\text{E}(-1) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(1.261\text{E}(-1) \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(0.1016 \text{ m})^2} = 15.55 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{(15.55 \text{ m/s})(0.1016 \text{ m})}{1E(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 1.580E(6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{5E(-5) \text{ m}}{3.7(0.1016 \text{ m})} + \frac{2.51}{1.580E(6)\sqrt{f}} \right)$$

$$f = 1.697E(-2)$$

$$K_f = f \left(\frac{L}{D} \right) = 1.697E(-2) \left(\frac{100 \text{ m}}{0.1016 \text{ m}} \right) = 16.70$$

$$h_{ent} - h_{sal} = K_f \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) = 16.70 \left(\frac{(15.55 \text{ m/s})^2}{2(9.807 \text{ m/s}^2)} \right) = 205.9 \text{ m}$$

La pérdida de la carga hidráulica de 205.9 m es mayor que la pérdida permisible de 70.31 m. Si se prueba con el siguiente diámetro de tubería, $D = 6 \text{ in}$, y se repite el proceso, se encontrará que $\bar{V} = 6.913 \text{ m/s}$, $Re_D = 1.053E(6)$, $f = 1.530E(-2)$, $K_f = 10.04$ y $h_{ent} - h_{sal} = 24.46$. Esta última cantidad es más pequeña que la pérdida de la carga hidráulica que puede permitirse de forma que una tubería con 6 in de diámetro es aceptable.

9.2.2 Pérdida de la carga hidráulica en ductos rectos no circulares

Los ductos no circulares se utilizan, por lo común, en sistemas de calefacción, ventilación y acondicionamiento del aire gracias a la sencillez de su fabricación, montaje y adaptación a los espacios construidos en paredes y techos. No existe problema alguno en soportar la presión interna de estos sistemas, la cual es sólo ligeramente superior a la presión atmosférica. Sin embargo, para seleccionar en forma apropiada los ventiladores que se necesitan para entregar aire en todas partes del sistema, primero es necesario saber cómo determinar la caída de presión en ductos no circulares.

Al tratar en la sección 6.5.5 el flujo viscoso laminar en tubos no circulares, en la ecuación 6.46 se introdujo la definición del *diámetro hidráulico* \mathcal{D} de un ducto no circular, el cual depende del área y perímetro de su sección transversal:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{4 \times \text{Área}}{\text{Perímetro}} \quad (9.11)$$

Para un ducto circular de diámetro D , $\mathcal{D} = D$, pero para otras formas, \mathcal{D}/b tiene los valores que se dan en la tabla 6.1, donde b es la dimensión más corta de la sección transversal del ducto (véase la figura 6.9).

Si el número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico, $Re_{\mathcal{D}} \equiv \bar{V}\mathcal{D}/\nu$, es más o menos menor que 2300, el flujo será laminar y el factor de fricción de Darcy f se relaciona con el número de Reynolds mediante:

$$f = \frac{\text{constante}}{Re_{\mathcal{D}}} \quad (\text{laminar}) \quad (9.12)$$

donde la constante en el numerador del lado derecho de la ecuación 9.12 depende de la forma del ducto, como se aprecia en la lista de la tabla 6.1. Sin embargo, en el caso de un flujo turbulento, el factor de fricción de Darcy es casi independiente de la forma del ducto y puede expresarse en una forma semejante a la de la ecuación 9.7:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \quad (\text{turbulento}) \quad (9.13)$$

Las ecuaciones 9.11-9.13 forman un conjunto que permite la determinación de la pérdida de carga hidráulica en ductos no circulares.

Ejemplo 9.4

Un ducto vertical de ventilación con $6 \text{ in} \times 12 \text{ in}$ de sección transversal rectangular, con una altura $L = 20 \text{ ft}$, conducirá aire con un gasto volumétrico de 1000 *pies cúbicos por minuto (pcm)* desde el sótano hasta el piso superior de una casa. Calcule la pérdida de carga hidráulica y la caída de presión $p_{ent}^* - p_{sal}^*$ para este flujo si $\epsilon = 1E(-5) \text{ m}$ es la rugosidad del ducto.

Solución

Primero, exprese las cantidades del flujo en unidades del SI usando la ecuación 9.11 y la tabla 1.6:

$$D = \frac{4(6 \times 12) \text{ in}^2}{2(6 + 12) \text{ in}} = 8 \text{ in} \times \frac{2.54E(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 0.2032 \text{ m}$$

$$Q = \frac{100 \text{ ft}^3}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{2.832E(-2) \text{ m}^3}{\text{ft}^3} = 0.472 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A = 72 \text{ in}^2 \times \left(\frac{2.54E(-2) \text{ m}}{\text{in}} \right)^2 = 4.645E(-2) \text{ m}^2$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{0.472 \text{ m}^3/\text{s}}{4.645E(-2) \text{ m}^2} = 10.16 \text{ m/s}$$

$$L = 20 \text{ ft} \times \frac{0.3048 \text{ m}}{\text{ft}} = 6.096 \text{ m}$$

A continuación, calcule el número de Reynolds y la pérdida de carga hidráulica eligiendo $\nu = 1.51E(-5) \text{ m}^2/\text{s}$ a partir de la tabla 1.1 y usando la ecuación 9.13:

$$Re_D = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{(10.16 \text{ m/s})(0.2032 \text{ m})}{1.51E(-5) \text{ m}^2/\text{s}} = 1.367E(5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{1E(-5) \text{ m}}{3.7(0.2032 \text{ m})} + \frac{2.51}{1.367E(5)\sqrt{f}} \right)$$

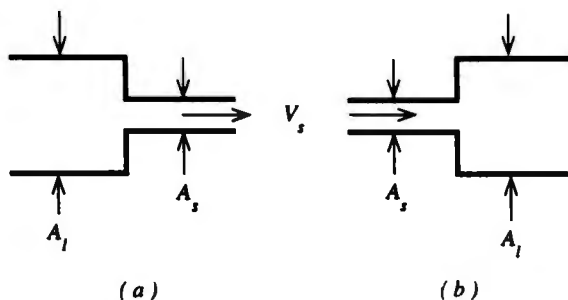


Figura 9.2 Pérdida de la carga hidráulica como resultado de (a) un estrechamiento repentino o (b) un aumento del área de flujo en una tubería.

$$= -2 \log \left(1.33E(-5) + \frac{1.836E(-5)}{\sqrt{f}} \right)$$

$$f = 1.718E(-2)$$

$$h_{ent} - h_{sal} = f \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) = 1.718E(-2) \left(\frac{6.096 m}{0.2032 m} \right) \times \frac{(10.16 m)^2}{2(9.807 m/s^2)} = 2.713 m$$

Si se supone que la densidad del aire es 1.204 kg/m^3 (véase la tabla 1.1), la caída de presión es:

$$p_{ent}^* - p_{sal}^* = \rho g (h_{ent} - h_{sal}) = (1.204 \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)(2.713 \text{ m}) = 32.03 \text{ Pa}$$

La diferencia $p_{ent}^* - p_{sal}^*$ será igual a la diferencia de presión manométrica entre la succión y la descarga si la densidad del aire que rodea al ducto es la misma que la del que está dentro de éste.

9.2.3 Otras pérdidas

Los sistemas de tuberías comprenden otras secciones de tubería que no son rectas. Las tuberías deben doblarse para evitar obstrucciones y se encuentran equipadas con válvulas y otras conexiones que provocan desviaciones locales en el flujo; aquellas tuberías que tienen diámetros distintos se unen con conexiones. Siempre que se perturbe el flujo paralelo en una tubería, habrá una pérdida de carga hidráulica ocasionada por este cambio localizado que se suma a la pérdida de carga hidráulica en la sección recta del tubo. En la presente sección, se ilustra cómo estimar estas pérdidas adicionales.

Pérdida derivada de un cambio en el área

Algunas veces, las tuberías coaxiales de diámetros distintos se conectan entre sí como se indica en la figura 9.2. Si el área de la tubería más grande se representa por A_1 y la

de la tubería más pequeña por A_s , entonces la pérdida de la carga hidráulica Δh producida por un cambio en el área puede definirse en términos de un coeficiente de pérdida, K :

$$\Delta h \equiv K \left(\frac{\bar{V}_s^2}{2g} \right) \quad (9.14)$$

donde la velocidad \bar{V}_s es la correspondiente al tubo *más pequeño* y el coeficiente de pérdida K depende de la razón de las dos áreas. Para un estrangulamiento, el coeficiente de pérdida K_c es:

$$K_c = 0.4 \left(1 - \frac{A_s}{A_l} \right) \quad (9.15)$$

en tanto que para una expansión repentina ese coeficiente, K_e , es:

$$K_e = \left(1 - \frac{A_s}{A_l} \right) \quad (9.16)$$

Estos valores pueden reducirse si la transición entre dos tuberías se hace más gradual, pero, en general, esas mejoras no resultan justificables desde el punto de vista económico.

Cuando una tubería se abastece desde un gran tanque o represa, o cuando ahí se descarga, el flujo de entrada y el de salida corresponde a un estrangulamiento o a un ensanchamiento, según sea el caso, desde una tubería de área infinita, o hacia ella, de forma que $A_s/A_l = 0$ y los coeficientes de pérdida para el flujo de entrada y el de salida se transforman en:

$$K_{ent} = 0.4; \quad K_{sal} = 1.0 \quad (9.17)$$

en virtud de las ecuaciones 9.15 y 9.16.

Pérdida en un codo

Cuando el tubo de una tubería contiene un codo en ángulo recto, el flujo de mayor velocidad en la línea central se desplaza hacia afuera del codo, en tanto que el flujo de menor velocidad cerca de la pared fluye hacia adentro del codo debido al desequilibrio en la aceleración centrífuga de los fluidos de mayor y menor velocidad. El codo induce así un flujo en el plano de la sección transversal de la tubería o ducto. Este flujo extrae energía del flujo axial, ocasionando una pérdida de carga hidráulica. Un flujo de esa índole se conoce como *flujo secundario*, para distinguirlo del flujo axial primario.

El coeficiente de pérdida para un codo representativo en ángulo recto, como es el caso de un codo para tubería, es aproximadamente 1.0. Si el codo se hace más gradual al aumentar el radio de curvatura comparado con el diámetro de la tubería, el coeficiente de pérdida podría reducirse, en términos aproximados, en proporción inversa al radio de curvatura.

Pérdida en conexiones para tubería

Los sistemas de tuberías contienen, con frecuencia, válvulas que regulan o detienen el flujo, así como uniones en T con ramificaciones. Cualquier conexión que se inserte en

una sección recta de tubería producirá una pérdida adicional en el flujo, dependiendo de lo intensa que sea su perturbación respecto del flujo axial de la tubería. Se dispone³ de tabulaciones de coeficientes de pérdida en conexiones para tubería y dichos coeficientes caen dentro del intervalo de 0.1 a 1.0.

9.2.4 Pérdida total de la carga hidráulica

En el caso de un flujo por una tubería o ducto, la pérdida total de la carga hidráulica Δh_f será la suma de la pérdida Δh_f debida a la fricción de la pared más las pérdidas de la entrada y la salida y las pérdidas derivadas de válvulas y conexiones. Para cualquier sección de tubería o ducto con longitud L_i , diámetro hidráulico \mathcal{D}_i y velocidad media \bar{V}_i , la pérdida total de la carga hidráulica $(\Delta h_f)_i$ sería, así:

$$(\Delta h_f)_i = \left[f_i \left(\frac{L_i}{\mathcal{D}_i} \right) + \sum_j (K_j)_i \right] \left(\frac{\bar{V}_i^2}{2g} \right) \quad (9.18)$$

donde $(K_j)_i$ es el coeficiente de pérdida para cada elemento de pérdida j . Puede utilizarse la ecuación 9.18 para determinar la caída de presión $(p_{ent}^* - p_{sal}^*)_i$ en la sección i :

$$(p_{ent}^* - p_{sal}^*)_i = \rho g (\Delta h_f)_i \quad (9.19)$$

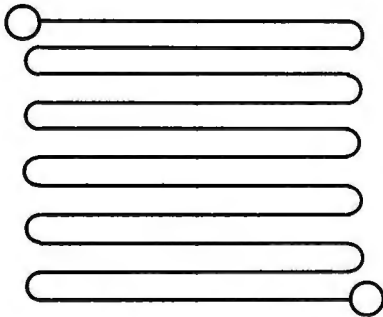


Figura E 9.5

Ejemplo 9.5

Un circuito recolector de calor para un panel solar consta de un tubo trefilado de cobre que mide 1 cm de diámetro y tiene una longitud de $L = 22$ m, y está dispuesto según el

³ Véase, por ejemplo, V. L., Streeter, *Handbook of Fluid Dynamics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Co.), Ed. 1961.

patrón de la figura E 9.5. El flujo de agua en el circuito, $Q = 4 \text{ l/min}$, se suministra con un cabezal cuyo diámetro es mucho mayor que el del tubo, y otro cabezal de igual tamaño recoge el flujo. Si se supone que el coeficiente de pérdida de cada uno de los dobleces de 180° es 1.0, calcule la pérdida de la carga hidráulica Δh_f entre los cabezales de suministro y colector.

Solución

Primero, calcule la pérdida por fricción en un tubo recto con longitud $L = 22 \text{ m}$:

$$Q = \frac{4 \text{ l}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1\text{E}(-3) \text{ m}^3}{\text{l}} = 6.667\text{E}(-5) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(1\text{E}(-2) \text{ m})^2}{4} = 7.854\text{E}(-5) \text{ m}^2$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{6.667\text{E}(-5) \text{ m}^3/\text{s}}{7.854\text{E}(-5) \text{ m}^2} = 0.8489 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{(0.8489 \text{ m/s})(1\text{E}(-2) \text{ m})}{1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 8.489\text{E}(3)$$

El flujo es turbulento. Si se elige $\epsilon = 1\text{E}(-6) \text{ m}$ de la tabla 7.1, f se calcula a partir de la ecuación 9.13:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{1\text{E}(-6) \text{ m}}{3.7[1\text{E}(-2) \text{ m}]} + \frac{2.51}{8.489\text{E}(3)\sqrt{f}} \right)$$

$$= -2.0 \log \left(2.703\text{E}(-5) + \frac{2.837\text{E}(-4)}{\sqrt{f}} \right)$$

$$f = 3.205\text{E}(-2)$$

$$f \left(\frac{L}{D} \right) = 3.205\text{E}(-2) \left(\frac{22 \text{ m}}{1\text{E}(-2) \text{ m}} \right) = 70.53$$

Los coeficientes de pérdida correspondientes a las diez vueltas suman 10, en tanto que los coeficientes de pérdida en la entrada y en la salida suman una cantidad adicional de 1.4 (ecuación 9.17), con lo que se tiene una pérdida total de $\Sigma K = 11.4$. La pérdida total de la carga hidráulica Δh_f queda como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta h_f &= \left(f \left(\frac{L}{D} \right) + \Sigma K \right) \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) \\ &= (70.53 + 11.4) \frac{(0.8489 \text{ m/s})^2}{2(9.807 \text{ m/s}^2)} = 3.01 \text{ m} \end{aligned}$$

9.3 Cambios de la carga hidráulica en sistemas con bombas y turbinas

El flujo viscoso por tuberías y ductos da como resultado una disminución de la carga hidráulica h en una cantidad Δh_f dada en la ecuación 9.18. Como se explicó en la sección 8.2.3, ocurren otros cambios en la carga hidráulica en bombas y turbinas: un aumento en la carga hidráulica $(\Delta h)_p$ en bombas (véase la ecuación 8.19) y una disminución en la cantidad de carga hidráulica $(\Delta h)_t$ en turbinas (véase la ecuación 8.21). El cambio total en la carga hidráulica para el sistema, $h_{sal} - h_{ent}$, desde el flujo de entrada al de salida, debe ser la suma algebraica de estos cambios:

$$h_{sal} - h_{ent} = -\Delta h_f + (\Delta h)_p - (\Delta h)_t \quad (9.20)$$

9.3.1 Cómo combinar bombas e hidroturbinas en sistemas de flujo

Para que los fluidos fluyan por tubos o ductos, debe suministrarse energía para vencer las pérdidas del flujo. Las bombas, ventiladores, compresores o fuentes por gravedad deben proporcionar un aumento en la carga hidráulica para superar la pérdida de carga hidráulica ocasionada por la viscosidad. Al diseñar estos sistemas de flujo de fluidos, el ingeniero debe elegir una fuente que posea características apropiadas a fin de obtener el flujo necesario a través del sistema. Esta concordancia del flujo y los requisitos de cambio de carga hidráulica son igualmente válidos para las hidroturbinas o motores hidráulicos que extraen energía del flujo de un fluido. En esta sección, se investiga la naturaleza del problema de hacer corresponder la maquinaria que suministra energía con el sistema del fluido al que esa maquinaria está conectada.

Cómo se bombea un fluido

Las bombas centrífugas para líquido y los ventiladores de aire funcionan, por lo regular, a una velocidad fija, proporcionando un aumento Δh en la carga hidráulica que varía con el gasto Q , como se ilustra en la figura 9.3. En el caso de un flujo nulo, como el que se experimentaría si la línea de descarga se cerrara, se experimenta el aumento máximo Δh_m de la carga hidráulica. Al permitir que fluya una cantidad cada vez mayor por la bomba, el aumento en la carga hidráulica disminuirá hasta llegar a cero a un gasto Q_m mínimo. La forma de la curva de Δh contra Q_m depende del diseño de la bomba o del ventilador, pero, para dispositivos centrífugos, es aproximadamente parabólica, como se ejemplifica en la figura 9.3.

La potencia ideal entregada a la corriente del fluido que pasa a través de una bomba o ventilador es igual al producto $\dot{m}g\Delta h = \rho Q\Delta h$, en tanto que la potencia requerida para hacer girar la bomba es mayor que este producto por un factor de $1/\eta_p$, donde η_p es la eficiencia de la bomba (véase la ecuación 8.19). En la figura 9.3, se grafica el producto $Q\Delta h$ y se aprecia cómo se produce la máxima potencia cuando el aumento Δh de la carga hidráulica y el gasto Q son menores que sus valores máximos respectivos, Δh_m y Q_m . El diseño de bombas consiste en alcanzar la eficiencia máxima cerca de la condición de máxima potencia del flujo. De ser posible, una bomba debe funcionar a su máxima eficiencia.

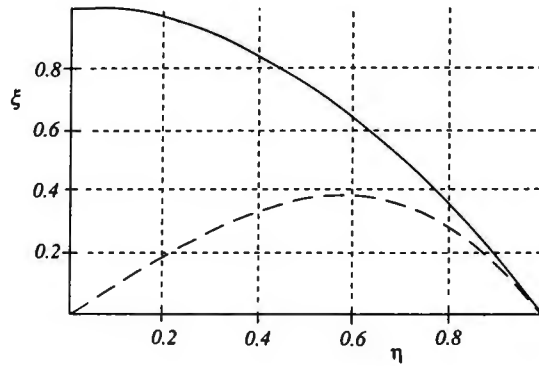


Figura 9.3 Características comunes de una bomba centrífuga que se ilustran a partir de la gráfica de la carga hidráulica adimensional de la bomba $\xi \equiv \Delta h/\Delta h_m$ (línea continua) contra el gasto adimensional $\eta \equiv Q/Q_m$ y curva del producto adimensional $\xi \equiv Q\Delta h/Q_m\Delta h_m$ (línea punteada) contra el gasto adimensional $\eta \equiv Q/Q_m$, donde Δh_m y Q_m son los valores máximos de la carga hidráulica y del gasto.

La curva característica de una bomba, para la cual el aumento Δh de la carga hidráulica disminuye conforme aumenta el gasto Q , es el recíproco de la curva característica de un sistema de tubería para el cual la pérdida Δh_f de la carga hidráulica aumenta con el aumento del gasto. Cuando se suministra un fluido a un sistema de tubería, una bomba determinada sólo proporcionará el flujo para el cual el aumento Δh de la carga hidráulica es igual a la pérdida Δh_f de carga hidráulica del sistema de tubería. A fin de ilustrar este principio, en la figura 9.4 se representa la curva (línea continua) de Δh contra Q de una bomba y una curva (línea punteada) de Δh contra Q para la pérdida de la carga hidráulica en un sistema de tubería abastecido por la bomba. El gasto a través del sistema será el correspondiente a la intersección de estas dos curvas.

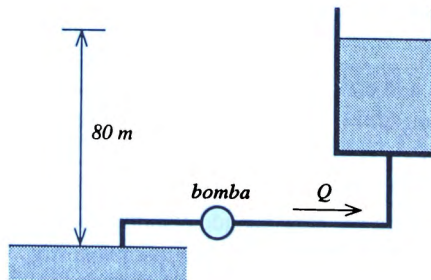


Figura E 9.6

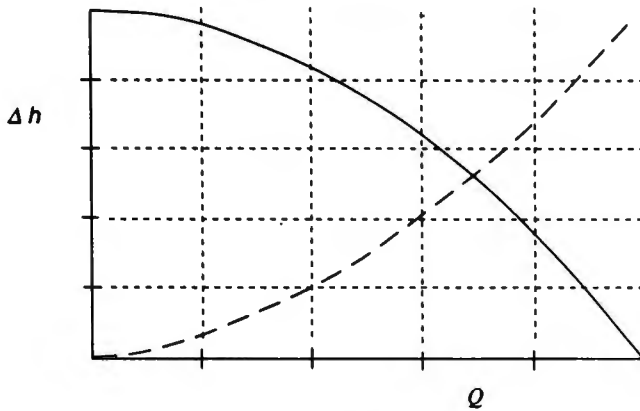


Figura 9.4 La curva de la carga hidráulica contra la curva del gasto correspondientes a una bomba (línea continua) y a un sistema de tubería (línea punteada) alimentado por la bomba se intersectan en un punto donde el cambio de la carga hidráulica y los gastos son iguales.

Ejemplo 9.6

Una bomba extrae agua de una represa y la entrega a un tanque elevado de almacenamiento cuya superficie se encuentra 80 m por encima de la superficie de la represa. La tubería de suministro de acero comercial, con 1.5 km de longitud, tiene 6 in de diámetro. El aumento Δh de la carga hidráulica de la bomba se relaciona con el gasto Q (GPM) del flujo mediante:

$$\Delta h = (150 m) \left[1 - \left(\frac{Q \text{ (GPM)}}{1000 \text{ (GPM)}} \right)^2 \right]$$

Calcule el gasto Q (GPM) a través del sistema.

Solución

El fluido entregado de la represa al tanque experimenta un aumento en la carga hidráulica igual a 80 m. El aumento Δh de la carga hidráulica de la bomba debe suministrar este aumento más la pérdida Δh_f de la carga hidráulica debida a la viscosidad:

$$\Delta h = 80 m + \Delta h_f$$

Si en un principio se supone una pérdida de la carga hidráulica $\Delta h_f = 20 m$ y se calcula el gasto Q_{20} que daría origen a esta pérdida. Siguiendo el procedimiento del ejemplo 9.2,

$$D = 6 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{E}(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 0.1524 \text{ m}$$

$$\sqrt{f} Re_D = \left(\frac{2(9.807 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})(0.1524 \text{ m})^3}{[1 \text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s}]^2(1500 \text{ m})} \right)^{1/2} = 3.04 \text{E}(4)$$

$$Re_D = -2[3.043E(4)] \log \left(\frac{5E(-5) m}{3.7(0.1524m)} + \frac{2.51}{3.043 E(4)} \right) = 2.292 E(5)$$

$$Q = \frac{\pi(0.1524m)(1E(-6) m^2/s)[2.292E(5)]}{4} = 2.744E(-2) m^3/s$$

$$Q_{20} = \frac{2.744E(-2) m^3}{s} \times \frac{60 s}{min} \times \frac{gal}{3.785E(-3) m^3} = 435 GPM$$

Para este gasto, la carga hidráulica Δh de la bomba sería:

$$\Delta h = (150m) \left[1 - \left(\frac{435}{1000} \right)^2 \right] = 121.6 m$$

que es 21.6 m mayor que el total 80 m + 20 m = 100 m necesario para un gasto de 435 (GPM). Por lo tanto, el gasto será mayor que 435 (GPM). De nuevo, suponga ahora que $\Delta h = 40 m$ y repita el cálculo anterior para encontrar $Q_{40} = 626 (GPM)$ y $\Delta h = 91.22$, que está 28.8 m por debajo del valor de 120 m necesario para proporcionar un flujo de 626 (GPM). Por lo tanto, el gasto será menor que 626 (GPM). Puede calcularse el gasto por interpolación lineal entre estos valores de forma que se reduzca a cero la discrepancia:

$$Q = \left(\frac{21.6}{2.16 - (-28.8)} \times (626 - 435) + 435 \right) (GPM) = 517 (GPM)$$

Usando este gasto, se calcula $\Delta h = 109.9 m$ y $\Delta h_f = 29.91 m$. Continuando con este proceso para mejorar el cálculo de Q y Δh , se llega por último a:

$$Q = 527.7 (GPM); \quad \Delta h = 108.3 m$$

Hidroturbinas

La hidroenergía se genera al construir un muro a través de un río a fin de contar con un dique de agua a un nivel superior a la corriente río abajo. Mediante una tubería, desde la represa se envía agua a una hidroturbina que la descarga hacia el flujo corriente abajo. Puesto que el flujo del río puede superar la capacidad de la hidroturbina en algunas épocas del año, se proporciona un aliviadero de crecidas para que se desvíe de las hidroturbinas cuando sea necesario.

Las hidroturbinas funcionan, por lo común, con una velocidad fija puesto que generan electricidad a una frecuencia requerida. La carga hidráulica disponible es casi constante, si bien el nivel de la represa puede cambiar con el flujo del río. La energía generada por la hidroturbina puede regularse al variar el gasto a través de la turbina, lo cual se logra ajustando el área por donde pasa el flujo de entrada. La energía mecánica de la hidroturbina debe ser igual a la energía eléctrica del alternador al que acciona, el cual, a su vez, se encuentra enlazado con una red de distribución de energía eléctrica. Las

hidroturbinas deben estar protegidas contra un exceso de velocidad en caso de que en forma repentina se quite la carga eléctrica.

Las pérdidas de carga hidráulica en tuberías que suministran agua desde una represa a la turbina y que conducen la descarga desde la turbina hacia el río aguas abajo, reducirán la carga hidráulica disponible para dar energía a la turbina y, por lo tanto, se presentan pérdidas de energía en el sistema que generan la energía. Los proyectistas hacen estas tuberías lo suficientemente largas como para permitir que el costo derivado de una mayor reducción de estas pérdidas de energía no sea superior al costo ocasionado por el aumento de la energía que genera la turbina.

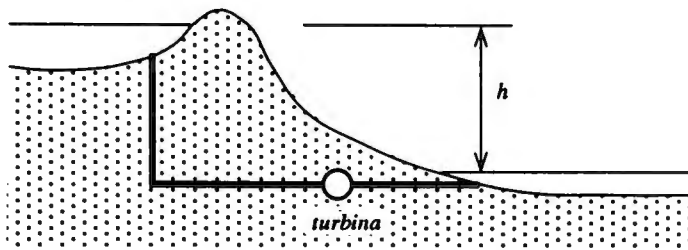


Figura E 9.7

Ejemplo 9.7

Una hidroturbina extrae agua de un lago cuya superficie está a una distancia $h = 100 \text{ m}$ por encima de la altura del río en el cual descarga la turbina, como se ilustra en la figura E 9.7. El gasto Q de la turbina es $10 \text{ m}^3/\text{s}$ y su eficiencia η_t es del 85%. El suministro de la turbina está compuesto por tuberías de flujo de entrada y salida con diámetro $D = 1.5 \text{ m}$, longitud total $L = 300 \text{ m}$ y rugosidad $\varepsilon = 1\text{E}(-4) \text{ m}$ en su superficie. Calcule la pérdida de la carga hidráulica en la tubería y la energía que genera la turbina.

Solución

Primero se calcula el coeficiente de pérdida por fricción en la tubería utilizando el método del ejemplo 9.1:

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4(10 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(1.5 \text{ m})^2} = 5.659 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{(5.659 \text{ m/s})(1.5 \text{ m})}{1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 8.488\text{E}(6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{1\text{E}(-4) \text{ m}}{3.7(1.5 \text{ m})} + \frac{2.51}{8.488\text{E}(6)\sqrt{f}} \right)$$

$$= 2.0 \log \left(1.802 E(-5) + \frac{2.957 E(-7)}{\sqrt{f}} \right)$$

$$f = 1.140 E(-2)$$

$$K_f = f \left(\frac{L}{D} \right) = 1.140 E(-2) \left(\frac{300 m}{1.5 m} \right) = 2.281$$

A este coeficiente de pérdida debe sumársele los coeficientes de pérdida en la entrada y en la salida, 0.4 y 1.0, respectivamente (ecuación 9.17), para obtener un total de 3.681:

$$\Delta h_l = \Sigma K \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) = 3.681 \left(\frac{(5.659 m/s)^2}{2(9.807 m/s^2)} \right) = 6.010 m$$

El cambio en la carga hidráulica a través de la turbina, Δh , es la diferencia entre la carga hidráulica suministrada por la represa, $h = 100 m$, y la pérdida de carga hidráulica en la tubería, $\Delta h_l = 6.010 m$, o $\Delta h_t = 93.99 m$. Con la ecuación 8.21, la potencia de la turbina se transforma en:

$$(\Omega T)_t = \eta_t (\rho Q) g (\Delta h_t) = 0.85 (1 E(3) kg/m^3) (10 m^3/s) (9.807 m/s^2) (6.010 m)$$

$$= 5.010 E(5) W = 501 kW$$

9.4 Redes complejas

Como ejemplos de sistemas de tuberías, hasta ahora se han considerado tuberías o ductos sin ramificaciones o divisiones del flujo, pero muchos sistemas de tubería, como los que entregan el agua potable en hogares y oficinas de zonas urbanas y rurales, contienen tuberías de diámetros y longitudes distintos que se conectan entre sí en un sistema que se asemeja a un árbol. ¿Cómo se analiza el flujo en sistemas de esa naturaleza? En esta sección, se enseñará cómo aplicar los principios antes empleados para una tubería simple a casos de sistemas complejos.

9.4.1 Componentes en serie y en paralelo

Como punto de partida, considérense dos tuberías, A y B , dispuestas en serie como en la figura 9.5(a). El gasto volumétrico Q es el mismo en cada tubería, v.g., $Q_A = Q_B = Q$. Si se conoce Q , entonces las pérdidas de la carga hidráulica Δh_A y Δh_B pueden calcularse en forma separada utilizando el método del ejemplo 9.1 y sumarse entre sí para obtener la pérdida global de la carga hidráulica. Por otra parte, si se conoce la pérdida global de la carga hidráulica Δh_l y si se desea un gasto volumétrico Q , se debe recurrir a una solución iterativa. El método más simple consiste en suponer la pérdida de la carga hidráulica Δh_A en la tubería A y la pérdida de la carga hidráulica $\Delta h_l - \Delta h_A$ correspondiente en el tubo B y calcular los gastos Q_A y Q_B . Si lo que se supuso es correcto, entonces $Q_A = Q_B = Q$. De modo invariable, si en el primer intento el valor supuesto es incorrecto,

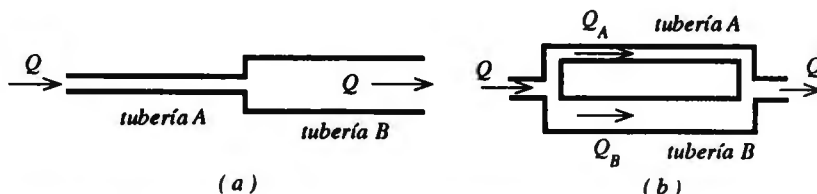


Figura 9.5 Dos tuberías diferentes dispuestas (a) en serie y (b) en paralelo experimentan pérdida de carga hidráulica y gasto volumétrico distintos, respectivamente.

y $Q_A - Q_B \neq 0$. Se necesita encontrar un valor para Δh_A que satisfaga $Q_A - Q_B = 0$. Mediante intentos así sucesivos y con la interpolación lineal, puede llegarse a la respuesta correcta.

Ejemplo 9.8

Dos tramos de 50 *ft* de manguera para jardín, uno de 3/4 *in* (*A*) y otro de 1/2 *in* (*B*) de diámetro, se unen en serie a un tanque de agua presurizado a 40 *psig*. Calcule el gasto por las mangueras cuando se descargan a la atmósfera al mismo nivel del tanque. (Suponga que $\epsilon = 0$.)

Solución

En unidades del SI, los diámetros y la longitud son:

$$D_A = 0.75 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{ E}(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 1.905 \text{ E}(-2) \text{ m};$$

$$D_B = 0.5 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{ E}(-2) \text{ m}}{\text{in}} = 1.270 \text{ E}(-2) \text{ m}$$

$$L = 50 \text{ ft} \times \frac{0.3048 \text{ m}}{\text{ft}} = 15.24 \text{ m}$$

en tanto que la pérdida de la carga hidráulica Δh , disponible es:

$$\Delta h_t = \frac{40 \text{ psi}}{\rho g} = \frac{40 \text{ psi}}{(1 \text{ E}(3) \text{ kg/m}^3)(9.807 \text{ m/s}^2)} \times \frac{6.895 \text{ E}(3) \text{ Pa}}{\text{psi}} = 28.12 \text{ m}$$

En principio, desprecie las pérdidas en la entrada y en la salida y la pérdida en la contracción en la conexión de las mangueras *A* y *B*. Puesto que la manguera *A* tiene dos veces el área de la manguera *B*, suponga que en *A* ocurrirá alrededor de una tercera parte de la pérdida de la carga hidráulica, o $\Delta h_A = 10 \text{ m}$ y $\Delta h_B = 18.12 \text{ m}$. Utilizando el método del ejemplo 9.1, calcule Q_A y Q_B :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{f}Re_D)_A &= \left(\frac{2g(\Delta h)D^3}{\nu^2 L} \right)_A^{1/2} = \left(\frac{2(9.807 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})(1.905 \text{ E}(-2) \text{ m})^3}{(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})^2(15.24 \text{ m})} \right)^{1/2} \\
 &= 9433 \\
 (Re_D)_A &= -2.0(\sqrt{f}Re_D) \log \left(\frac{2.51}{\sqrt{f}Re_D} \right) = -2(9433) \log \left(\frac{2.51}{9433} \right) = 6.745 \text{ E}(4) \\
 Q_A &= \left(\frac{\pi D \nu Re_D}{4} \right)_A = \frac{\pi(1.905 \text{ E}(-2) \text{ m})(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})(6.745 \text{ E}(4))}{4} \\
 &= 1.009 \text{ E}(-3) \text{ m}^3/\text{s} \\
 (\sqrt{f}Re_D)_B &= \left(\frac{2(9.807 \text{ m/s}^2)(18.12 \text{ m})(1.27 \text{ E}(-2) \text{ m})^3}{(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})^2(15.24 \text{ m})} \right)^{1/2} = 5135 \\
 (Re_D)_B &= -2(5135) \log \left(\frac{2.51}{5135} \right) = 3.400 \text{ E}(4) \\
 Q_B &= \frac{\pi(1.27 \text{ E}(-2) \text{ m})(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})(3.4 \text{ E}(4))}{4} = 3.392 \text{ E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}
 \end{aligned}$$

Ahora, calcule las pérdidas en la entrada, en la salida y en la contracción a partir de las ecuaciones 9.15-9.17:

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_A &= \frac{4Q_A}{\pi D_A^2} = \frac{4(1.009 \text{ E}(-3) \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(1.905 \text{ E}(-2) \text{ m})^2} = 3.540 \text{ m/s} \\
 \bar{V}_B &= \frac{4(3.392 \text{ E}(-3) \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(1.27 \text{ E}(-2) \text{ m})^2} = 2.678 \text{ m/s} \\
 \Sigma K \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) &= \frac{0.4\bar{V}_A^2 + (0.2 + 1)\bar{V}_B^2}{2g} = \frac{0.4(3.540 \text{ m/s})^2 + 1.2(2.678 \text{ m/s})^2}{2(9.807 \text{ m/s}^2)} = 0.6943 \text{ m}
 \end{aligned}$$

En segundo lugar, se calcula que la pérdida de la carga hidráulica disponible por fricción es $\Delta h_f = 28.12 \text{ m} - 0.694 \text{ m} = 27.43 \text{ m}$ y se decide asignar este total a $\Delta h_A = 2 \text{ m}$ y $\Delta h_B = 25.43$. Si se repiten los pasos anteriores, se llega a:

$$Q_A = 4.072 \text{ E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_B = 4.108 \text{ E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}; \quad \Sigma K \left(\frac{\bar{V}^2}{2g} \right) = 0.6851 \text{ m}$$

Esta segunda suposición es bastante aproximada y los gastos volumétricos coinciden dentro del 0.8% y la pérdida de la carga hidráulica dentro del 0.03%. De necesitarse mayor exactitud, se interpolaría linealmente sobre los valores de Δh_A contra $Q_A - Q_B$ para encontrar el valor de Δh_A que haría $Q_A - Q_B$ igual a cero. Si se representan mediante ' y ' ' la primera y segunda suposiciones, se encuentra una tercera que es:

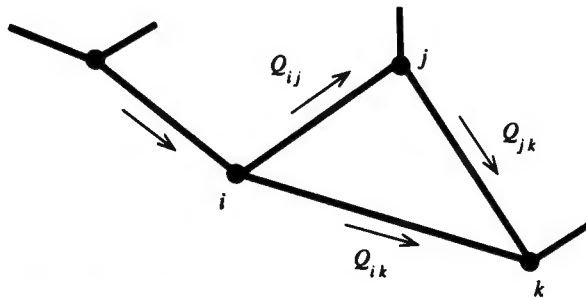


Figura 9.6 Red redundante con los puntos nodales i, j, k y los gastos Q_{ij} y Q_{ik} entre ellos.

$$\Delta h = \Delta h''_A - (Q''_A - Q''_B) \left(\frac{\Delta h'_A - \Delta h''_A}{(Q'_A - Q'_B) - (Q''_A - Q''_B)} \right)$$

$$= 2.043 m$$

Para el caso de tuberías en paralelo, como se ejemplifica en la figura 9.5(b), si se conoce la carga hidráulica, entonces Q_A y Q_B pueden calcularse por el método del ejemplo 9.2 y sumarse para obtener Q . Si se conoce Q , entonces es posible suponer la pérdida de la carga hidráulica Δh_l y puede calcularse Q_A y Q_B , con lo que se mejora la suposición hasta hacer que $Q - (Q_A + Q_B)$ se haga cero. Puede utilizarse la interpolación lineal entre los valores supuestos a fin de predecir un mejor valor de Δh_l para utilizarse en la siguiente iteración.

9.4.2 Redes redundantes

Una red redundante de fluido es aquella para la cual existen caminos múltiples a fin de que el fluido fluya entre dos puntos del sistema. El ejemplo más simple es el de la figura 9.5(b), en el cual el fluido puede fluir por las dos tuberías A y B . Un ejemplo común es el sistema de distribución del agua para los hogares en zonas urbanas. Las tuberías de distribución de agua siguen los sistemas de calles y avenidas y se encuentran interconectadas de acuerdo con esos mismos patrones. Al extraer agua en un punto, pueden inducirse flujos en muchas de las tuberías cercanas de la red. Otro ejemplo es el sistema circulatorio del cuerpo humano, el cual es muy redundante en relación con los pequeños vasos sanguíneos, pero no en cuanto a los grandes.

La figura 9.6 presenta varios nodos (puntos donde se conectan las tuberías entre sí) de una red compleja. Un nodo i se conecta a unos cuantos nodos cercanos j, k, \dots mediante las tuberías ij, ik, \dots . Si se conocen los valores de la carga hidráulica $h_i, h_j,$

$h_k, \dots, i, j, k, \dots$, entonces los gastos Q_{ij}, Q_{ik}, \dots pueden calcularse utilizando el método del ejemplo 9.2⁴. Si el nodo i es un punto donde no se toma fluido, entonces:

$$\sum_j Q_{ji} = 0 \quad (9.21)$$

Por otra parte, si se extrae fluido del sistema en i a un gasto conocido Q_{iw} , entonces:

$$\sum_j Q_{ji} = Q_{iw} \quad (9.22)$$

El análisis del flujo en una red exige la determinación del conjunto de valores nodales de la carga hidráulico, h_i, h_j, \dots , que darán origen a los flujos que satisfagan la ecuación 9.21 o 9.22 en todos los puntos nodales. Siempre es posible encontrar una solución de esa naturaleza cuando se conoce h_i o Q_i en un nodo donde el fluido sale o entra en el sistema o cuando existe una relación funcional entre ambas, como es el caso del flujo que entra o sale de una bomba o turbina en ese nodo.

La forma más simple de resolver el flujo a través de un sistema redundante consiste en suponer un conjunto de valores h_i, h_j, \dots , calcular los gastos Q_{ij} para todas las combinaciones de i y j conectados mediante tuberías y determinar las cantidades ΔQ_i por medio de las cuales $\sum Q_i$ no satisface las condiciones 9.21 o 9.22:

$$\Delta Q_i \equiv \sum_j Q_{ji} - Q_{iw} \quad (9.23)$$

Se hacen suposiciones subsiguientes cambiando h_i a fin de reducir ΔQ_i en cada nodo. Mediante la interpolación lineal de h_i contra ΔQ_i , se puede seleccionar un valor de prueba h_i con el propósito de hacer $\Delta Q_i = 0$. Siguiendo este proceso, al final se llegará a una solución precisa.

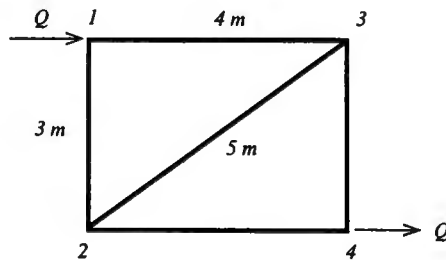


Figura E 9.9

⁴ El gasto Q_{ij} es la razón de flujo de i a j y es positivo si el flujo está en esa dirección. Por lo tanto, $Q_{ji} = -Q_{ij}$.

Ejemplo 9.9

La red de tubería que aparece en la figura E 9.9 recibe agua en el nodo 1 y la descarga en el nodo 4. La carga hidráulica en 1 es $h_1 = 10 \text{ m}$ y en 4 es $h_4 = 0 \text{ m}$. Las longitudes de los segmentos son 3 m , 4 m y 5 m y las dimensiones del tubo son $D = 1 \text{ cm}$, $\varepsilon = 0$ para todos los segmentos. Calcule el gasto Q .

Solución

Gracias a la simetría de la red, $h_1 - h_2 = h_3 - h_4$, $Q_{12} = Q_{34}$ y $Q_{13} = Q_{24}$. Por lo tanto, sólo se debe calcular Q_{12} , Q_{23} y Q_{13} para resolver el flujo de la red. A fin de comenzar con el cálculo, suponga que $h_2 = h_3 = 5 \text{ m}$, de forma que $Q_{23} = 0$. Luego, calcule Q_{12} y Q_{13} con el método del ejemplo 9.2, notando que $\Delta h_{12} = \Delta h_{13} = 5 \text{ m}$:

$$(\sqrt{f}Re_D)_{12} = \left(\frac{2g(\Delta h)D^3}{\nu^2 L} \right)_{12}^{1/2} = \left(\frac{2(9.807 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})(1\text{E}(-2) \text{ m})^3}{(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})^2(3 \text{ m})} \right)^{1/2} = 5718$$

$$(Re_D)_{12} = -2(\sqrt{f}Re_D) \log \left(\frac{2.51}{(\sqrt{f}Re_D)} \right) = -2(5718) \log \left(\frac{2.51}{5718} \right) = 3.840\text{E}(4)$$

$$Q_{12} = \frac{\pi D \nu Re_D}{4} = \frac{\pi(1\text{E}(-2) \text{ m})(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})(3.84\text{E}(4))}{4} = 3.016\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$(\sqrt{f}Re_D)_{13} = \left(\frac{2(9.807 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})(1\text{E}(-2) \text{ m})^3}{(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})^2(4 \text{ m})} \right)^{1/2} = 4952$$

$$(Re_D)_{13} = -2(4952) \log \left(\frac{2.51}{4952} \right) = 3.263\text{E}(4)$$

$$Q_{13} = \frac{\pi(1\text{E}(-2) \text{ m})(1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s})(3.263\text{E}(4))}{4} = 2.563\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

Ahora, calcule ΔQ_2 :

$$\Delta Q_2 = Q_{12} - Q_{23} - Q_{24} = (3.016 - 0 - 2.563)\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s} = 0.453\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

Esto corresponde a un flujo de salida en 2 y a un flujo de entrada igual en 3. Si se aumenta h_2 y si se disminuye h_3 la misma cantidad, ΔQ_2 disminuirá. Para intentar, considere $h_2 = 6 \text{ m}$ y $h_3 = 4 \text{ m}$, se siguen los pasos anteriores para calcular:

$$Q_{12} = 2.896\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_{13} = 2.842\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{23} = 1.341\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}; \quad \Delta Q_2 = -1.287\text{E}(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

Es evidente que h_2 se ha aumentado demasiado pues ΔQ_2 se hizo negativo. Por lo tanto, h_2 debe encontrarse entre 5 m y 6 m . Los dos valores supuestos para la carga hidráulica,

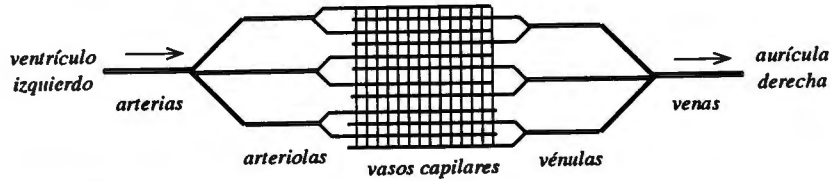


Figura 9.7 Diagrama del sistema circulatorio sistémico en el que se indican las partes que integran los sistemas arterial y venoso, encargados de entregar y recoger, respectivamente, el flujo sanguíneo. Esta figura también presenta el lecho capilar.

$h_2 = 5 \text{ m}$, 6 m , dieron como resultado dos valores negativos del flujo $\Delta Q_2 = 0.453E(-4) \text{ m}^3/\text{s}$, $-1.287E(-4) \text{ m}^3/\text{s}$. Mediante interpolación lineal,⁵ la siguiente alternativa para h_2 es:

$$h_2 = 6 \text{ m} - \frac{(6 - 5) \text{ m}}{(-1.287 - 0.453)E(-4) \text{ m}^3/\text{s}} (-1.287E(-4) \text{ m}^3/\text{s}) = 5.26 \text{ m}$$

Si se continúa de esta forma para otras dos iteraciones, se llega a la solución:

$$h_2 = 5.11 \text{ m}; \quad h_3 = 4.89 \text{ m}$$

$$Q_{12} = 2.978E(-4) \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_{13} = 2.595E(-4) \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_{23} = 0.375E(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = Q_{13} + Q_{12} = 5.573E(-4) \text{ m}^3/\text{s}$$

9.4.3 El sistema circulatorio del cuerpo humano

El corazón se encarga de hacer circular la sangre en todo el organismo mediante dos circuitos en serie. El primero de ellos se conoce como *sistema circulatorio sistémico*, llega a todos los órganos del cuerpo humano a excepción de los pulmones, los cuales reciben sangre del segundo circuito, o *sistema circulatorio pulmonar*. No obstante el gasto volumétrico de sangre es el mismo en ambos sistemas, ya que los dos están conectados en serie, la resistencia al flujo es mayor en el caso de la circulación sistémica debido a que ésta sirve a un volumen mayor del cuerpo a una distancia superior. En consecuencia, el ventrículo izquierdo, que abastece al sistema circulatorio sistémico, debe producir mayor potencia que el ventrículo derecho. La estructura asimétrica del corazón refleja esta diferencia en cuanto a su función.

Ambos sistemas circulatorios son muy complejos pues comprenden trayectorias redundantes dentro de los vasos más pequeños que proporcionan alguna protección contra bloqueo o daño. En la figura 9.7 se presenta un diagrama de la circulación sistémica. La sangre parte del ventrículo izquierdo, pasando a su vez por grandes arterias,

⁵ Se hacen coincidir los dos cálculos con la línea $h_2 = m(\Delta Q_2) + b$ para resolver la pendiente m y la intersección b , siendo ésta el valor de h_2 cuando $\Delta Q_2 = 0$.

Tabla 9.1 Propiedades del flujo que interviene en la circulación sistémica

	\mathcal{V} (%)	A (cm^2)	\bar{V} (cm/s)	\bar{p} (mm Hg)	L (cm)
Corazón	7				
Arterias grandes	8	4	20	100 ± 20	100
Arterias pequeñas	5	20	4	90 ± 20	13
Arteriolas	2	40	2	60 ± 5	3
Vasos capilares	5	2500	0.03	20	0.1
Vénulas	10	250	0.3	10	0.4
Venas pequeñas	15	80	1	5	10
Venas grandes	39	20	4	1	100
Vasos pulmonares	9				

pequeñas arterias, arteriolas, vasos capilares, vénulas, pequeñas y grandes venas. Después, la sangre regresa a la aurícula (o atrium) derecha del corazón. En cuanto a la parte arterial, existe una creciente ramificación del sistema en caminos paralelos hasta que el flujo alcanza el lecho capilar, el cual se encuentra altamente ramificado e interconectado a fin de aproximar la sangre a todas las células del cuerpo. En cuanto al aspecto venoso, la estructura es semejante, pero su función es inversa, ya que sirve para recoger el flujo del lecho capilar. Gran parte del área superficial de los vasos sanguíneos, por medio de los cuales deben difundirse los nutrimentos y productos de desecho hacia los vasos y desde éstos, se encuentra dentro del lecho capilar.

Los sistemas arterial y venoso, al mismo tiempo que distribuyen y recogen el flujo sanguíneo en el lecho capilar, no poseen una forma simétrica; el sistema venoso tiene un volumen mayor y una área del flujo superior respecto del sistema arterial. La tabla 9.1 lista los atributos de las partes que componen el sistema circulatorio sistémico y que repercuten en el flujo sanguíneo que pasa por dicho sistema. La primera columna es una lista del volumen \mathcal{V} de sangre en cada parte y se expresa como un porcentaje del volumen normal de sangre, 5 l. Tómese en cuenta que la parte venosa (vénulas, así como grandes y pequeñas venas) representa cerca de las dos terceras partes del volumen del sistema circulatorio completo. La segunda columna lista el área total A del flujo de los canales paralelos en cada parte componente; ahí puede apreciarse que el lecho capilar cuenta con un área de flujo mucho mayor. Puesto que un diámetro capilar es de $10 \mu\text{m}$ aproximadamente, existen alrededor de mil millones de vasos capilares en paralelo. La velocidad promedio $\bar{V} = Q/A$ aparece en la siguiente columna. Sólo en la arteria más grande, el número de Reynolds del flujo es lo bastante grande como para mantener un flujo turbulento, en tanto que el flujo en las otras partes componentes es laminar. La cuarta columna indica cómo la presión \bar{p} para un volumen promedio disminuye entre el flujo de entrada y el de salida, presentándose la mayor caída de presión en las arteriolas. La componente fluctuante de la presión, ocasionada por la función pulsátil del corazón visto como una bomba, disminuye con el aumento en el área del flujo y su distancia al corazón. No obstante el flujo que entra en la aurícula derecha también es pulsátil, no se

observa una presión fluctuante debido al gran volumen venoso y a la enorme elasticidad del sistema venoso. Por último, la columna final presenta la longitud promedio L de los vasos, la cual es igual al volumen V dividido entre el área A del flujo.

El sistema circulatorio sanguíneo del cuerpo humano es, evidentemente, muy complejo y difícil de presentar como modelo de un sistema de mecánica de fluidos: ¡es especial por sus miles de millones de vasos capilares! Este sistema también posee un complejo sistema de control. El ritmo cardíaco responde a varios estímulos, pero, en especial, a la demanda de más oxígeno. La distribución del flujo sanguíneo en el sistema también está controlada. Por ejemplo, el flujo de sangre aumenta localmente en zonas dañadas y aumenta o disminuye en la piel cuando es necesario aumentar o suprimir un aumento de calor. Sin embargo, los principios tratados en este capítulo se aplican a las componentes del sistema en cuestión y pueden utilizarse en la diagnosis y tratamiento de problemas circulatorios.

9.4.4 Con la ayuda de computadoras

Los ejemplos de este capítulo muestran que el cálculo del comportamiento de un flujo en sistemas de fluidos puede volverse tedioso cuando el cálculo se realiza con calculadoras portátiles, incluso cuando son programables, pues a menudo se necesita de una solución iterativa. Se dispone de software para computadoras personales, estaciones de trabajo y minicomputadoras que permiten tratar sistemas de tuberías del tipo que generalmente se encuentra en los diseños de la ingeniería. Este software reduce en gran medida el tiempo y el esfuerzo requeridos para resolver un problema. En casos especiales, puede ser necesario desarrollar programas para casos particulares que no están incluidos en los programas comerciales de software. Los principios descritos con anterioridad sirven como punto de partida en la creación de programas con fines específicos.

Al enfrentarse con un problema ocasional de carácter no muy complejo, un ingeniero puede encontrar que se invierte menos tiempo en la resolución de ese problema si emplea los métodos señalados en este capítulo, más bien que aprender o reaprender cómo se utiliza el software aplicable al caso.

9.5 Problemas

Problema 9.1

Se pidió a un ingeniero que determinara el diámetro de la tubería de suministro de agua que se necesita para abastecer un nuevo fraccionamiento residencial. La tubería tomará agua de un tanque cuyo nivel mínimo de agua es de 200 ft por encima del nivel del suelo de urbanización. La longitud L de la tubería será de 3 millas. Para proporcionar protección contra incendios, en la tubería de suministro debe disponerse de un flujo de 10 000 galones por minuto con una presión no inferior a la atmosférica en el fraccionamiento. Los tamaños de tubería disponibles son 12 in, 18 in, 24 in, 36 in y 48 in de diámetro interior D , con una altura de rugosidad $\epsilon = 0.01$ in.

(a) Si se utilizara una tubería con un diámetro de 12 in, calcule la pérdida de la carga hidráulica Δh_f entre el tanque de suministro y el lugar del fraccionamiento. (b) ¿Cuál es el diámetro mínimo de la tubería que debería utilizarse? (c) ¿Cuál será la presión de la tubería de suministro en el fraccionamiento si se usa este diámetro de la tubería para llevar el flujo requerido?

Problema 9.2

Una manguera contra incendios con longitud $L = 300 \text{ ft}$ y diámetro interior $D = 3 \text{ in}$ alimenta una boquilla con diámetro de salida $D_e = 1 \text{ in}$. La manguera toma el suministro de agua de una boca de incendios que tiene una presión manométrica $p_h - p_a$ correspondiente a una carga hidráulica de 100 ft. Los efectos de los codos son despreciables y la rugosidad interna ϵ es la misma que la de una tubería de hierro fundido. Calcule el gasto volumétrico Q por la manguera en galones por minuto (GPM).

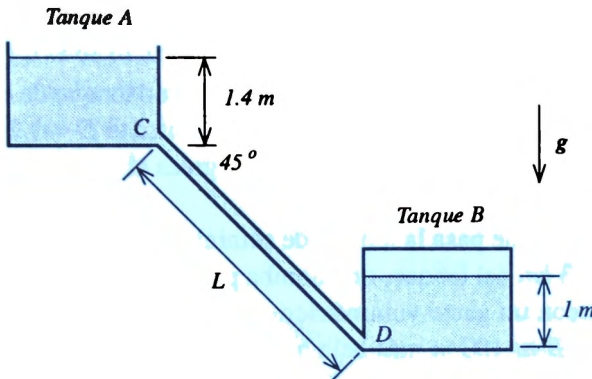


Figura P 9.3

Problema 9.3

Un tanque presurizado B se conecta a un tanque abierto A por medio de una tubería recta con diámetro $D = 6 \text{ mm}$ y longitud $L = 4.3 \text{ m}$ que forma un ángulo de 45° con la horizontal. Los dos tanques contienen agua con una densidad $\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\mu = 1E(-3) \text{ Pa s}$. En el tanque B, la presión manométrica del aire por arriba de la superficie del agua es $p_B = 3.45E(4) \text{ Pa}$. Las superficies del agua en los dos tanques están a mayor altura que los extremos de la tubería, C y D, una cantidad igual a 1.4 m y 1 m, respectivamente, como se aprecia en la figura P 9.3.

(a) Demuestre que el flujo de agua ocurre del tanque B al tanque A. (b) Si se supone que el flujo es laminar, calcule la velocidad media del flujo \bar{V} si se desprecian las pérdidas en la entrada y la salida. (c) Demuestre la validez de la suposición de que el flujo es laminar.

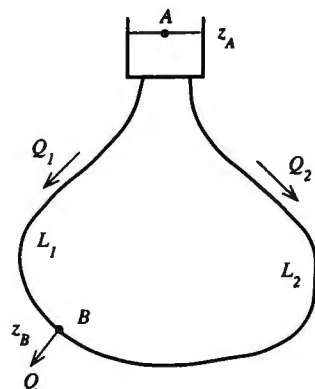


Figura P 9.4

Problema 9.4

El suministro de agua de una ciudad pequeña consta de un tanque de almacenamiento y una larga tubería de 10 km de longitud con diámetro interior $D = 0.2 \text{ m}$ ($\epsilon/D = 2E(-4)$) que forma un circuito que recorre todo el lugar y regresa al tanque de almacenamiento, como se ejemplifica en la figura P 9.4.

En un punto B por donde pasa la tubería de suministro de agua y que está localizado a una distancia $L_1 = 3 \text{ km}$ del tanque, una bomba para incendios bombea agua desde el suministro de agua con un gasto volumétrico $Q = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ para combatir el fuego. La altura z_B en el punto B es 100 m más baja que la superficie libre del agua que está en el tanque de almacenamiento, z_a . Parte del agua, Q_1 , fluye por la rama más corta ($L_1 = 3 \text{ km}$) y otra parte, Q_2 fluye por la rama más larga $L_2 = 7 \text{ km}$, en tanto que el total, $Q_1 + Q_2$, es igual al flujo Q de la bomba.

Al contestar las siguientes preguntas, use $\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ y $\nu = 1E(-6) \text{ m}^2/\text{s}$. (a) Si se supone que la pérdida de la carga hidráulica en cualquiera de las ramas se debe por completo a la pérdida por fricción y que los factores de fricción f_1 y f_2 para cada rama son iguales, calcule los gastos Q_1 y Q_2 . (b) Con las suposiciones hechas en (a), calcule la presión p_B en la toma de agua de donde la bomba para incendios extrae agua. (c) Justifique la suposición de que la pérdida en la entrada es despreciable comparada con la pérdida por fricción.

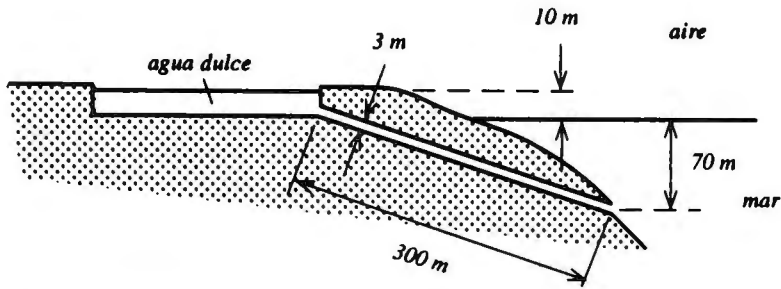


Figura P 9.5

Problema 9.5

La descarga de un estanque de sedimentación de una planta de tratamiento de aguas negras descarga agua dulce ($\rho_f = 1E(3) \text{ kg/m}^3$; $\nu_f = 1E(-6) \text{ m}^2/\text{s}$) en el mar ($\rho_s = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$) a una profundidad de 70 m por debajo del nivel del mar. La superficie del estanque está a 10 m por encima del nivel del mar. La tubería de descarga mide 70 m de longitud y 3 m de diámetro y tiene una rugosidad superficial de 3 mm.

(a) En caso de que el flujo de agua por la tubería no fuera viscoso, calcule cuál sería la velocidad V en ésta. (b) Si se supone que el flujo es viscoso, calcule \bar{V} para el flujo de la tubería.

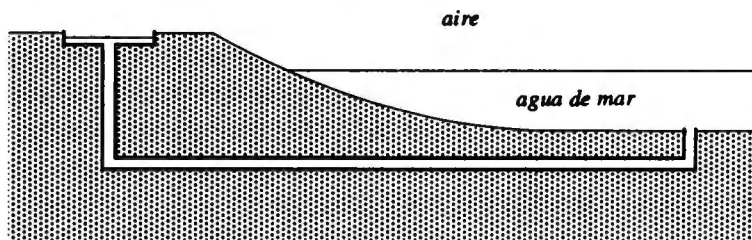


Figura P 9.6

Problema 9.6

La descarga de una planta de tratamiento de aguas negras en el puerto de Boston consta de un túnel de 24 pies de diámetro ($D = 7.3 \text{ m}$, $\varepsilon = 2E(-3) \text{ m}$) y alrededor de 9.5 millas ($L = 1.53E(4) \text{ m}$) de longitud total que conduce el flujo tratado, que sale de un tanque de sedimentación, a una salida en el fondo de la bahía de Massachussets, como se aprecia en la figura P 9.6. La superficie del agua en el tanque de sedimentación tiene una altura $\Delta h = 20 \text{ m}$ por encima del nivel del mar. Si se supone que el agua tratada y del mar tienen la misma densidad y la misma viscosidad cinemática, $\nu = 1E(-6) \text{ m}^2/\text{s}$, y si además se supone que la pérdida de la carga hidráulica en el flujo del túnel se debe por completo a la fricción, (a) calcule el gasto volumétrico Q en el túnel. (b) A partir de la

respuesta de (a), calcule la carga hidráulica en la entrada y un nuevo valor para Q que incluya esta pérdida.

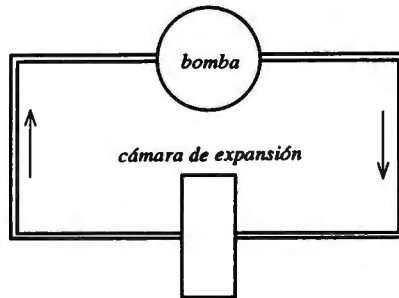


Figura P 9.7

Problema 9.7

En la figura P 9.7, un sistema de enfriamiento consta de una bomba que hace circular líquido por toda la tubería con longitud $L = 10\text{ m}$, diámetro $D = 5\text{ cm}$ y rugosidad $\epsilon = 0$. La tubería tiene cuatro codos en ángulo recto y cada uno de los cuales el coeficiente de pérdida es $K_e = 1.0$. La bomba, con eficiencia $\eta_p = 0.6$, cuenta con una potencia en el eje que es $\mathcal{P} = 1E(4)\text{ W}$. La densidad y viscosidad del refrigerante son $\rho = 1E(3)\text{ kg/m}^3$ y $\mu = 2E(-3)\text{ Pa s}$, respectivamente. En la tubería está montada una cámara de expansión con un área mucho mayor que la de la tubería. Los coeficientes de pérdida correspondientes al flujo que entra y que sale de las conexiones de la tubería, y que se dirige hacia la cámara de expansión, son $K_{ent} = 0.4$ y $K_{sal} = 1.0$, respectivamente. Calcule el gasto volumétrico Q por la tubería.

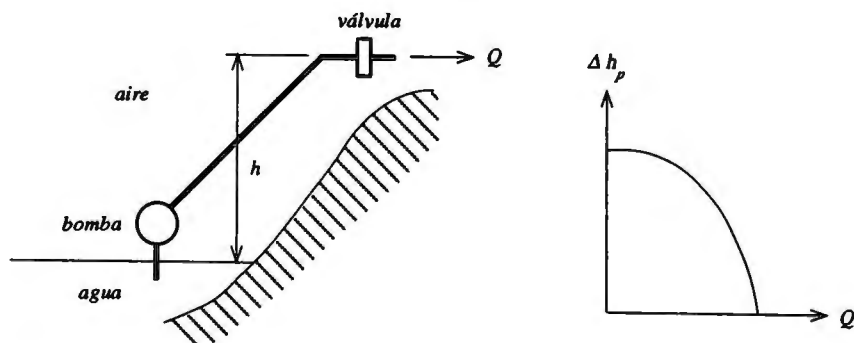


Figura P 9.8

Problema 9.8

Una bomba envía a la atmósfera agua a un gasto volumétrico Q por una tubería con diámetro D y que está equipada con una válvula parcialmente cerrada cerca de su salida. La salida se localiza a una altura h por encima de la superficie de la represa de donde se extrae el agua (véase la figura P 9.8). El incremento de la carga hidráulica Δh_p de la bomba se relaciona con el gasto volumétrico Q mediante:

$$\Delta h_p = A - BQ^2$$

donde A y B son constantes dimensionales. La eficiencia η_p de la bomba es independiente de Q . La pérdida de carga hidráulica en el sistema de la tubería se debe, en gran medida, a la pérdida en la válvula cuyo coeficiente de pérdida es K_v , por lo que la pérdida por fricción en la tubería puede despreciarse.

(a) Deduzca una expresión para el gasto volumétrico Q en términos de los parámetros ρ , A , B , h , D y K_v . (b) Deduzca una expresión para la potencia de bombeo \mathcal{P}_p requerida en términos de los parámetros dados.

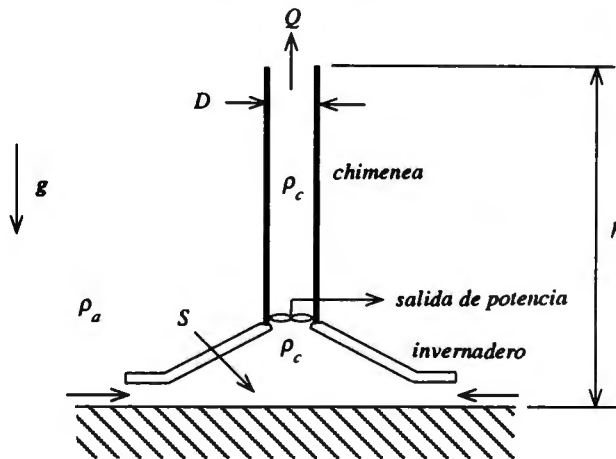


Figura P 9.9

Problema 9.9

En la figura P 9.9 se ilustra un dispositivo que produce potencia mecánica a razón de \mathcal{P} mediante radiación solar. Un invernadero circular, abierto a la atmósfera en su periferia, transmite energía por radiación solar a razón de S , energía que se absorbe en un piso negro. Esta energía calienta el aire del invernadero y la densidad resultante ρ_c es menor que la de la atmósfera exterior ρ_a . El aire caliente pasa a través de una turbina cuya eficiencia es η , al subir por una larga chimenea, dentro de la cual el aire conserva su densidad ρ_c más baja. La altura h de la chimenea es mucho mayor que la del invernadero, y su diámetro D es mucho menor que el del invernadero. Las paredes internas de la chimenea tienen una rugosidad ϵ y la entrada a la chimenea se caracteriza

por su coeficiente K_c de pérdida (que se debe a la velocidad del gas en la chimenea). La disminución en la densidad del aire $\rho_a - \rho_c$ se relaciona con la energía solar incidente S y con el gasto volumétrico Q del aire mediante:

$$\rho_a - \rho_c = \alpha \frac{S}{Q}$$

donde α es una constante dimensional.

- (a) Deduzca una expresión para la potencia \mathcal{P} que puede extraerse de este dispositivo como función de los parámetros conocidos ρ , h , D , ϵ , K_c , η , S , α y del gasto variable Q .
 (b) ¿Cuál es la potencia máxima que puede obtenerse de este dispositivo?

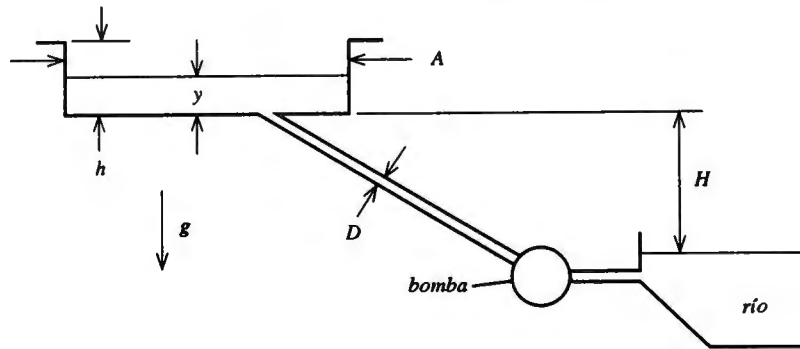


Figura P 9.10

Problema 9.10

Una presa de acumulación de agua bombeada consta de un embalse elevado a una altura $H = 150 \text{ m}$ por encima del nivel de la superficie de un río. El embalse puede llenarse hasta una altura extra de $h = 10 \text{ m}$ mediante una bomba con $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ de gasto, por una tubería con diámetro $D = 1 \text{ m}$, altura de rugosidad $\epsilon = 1 \text{ cm}$ y altura total $L = 1 \text{ km}$. El embalse tiene un área superficial $A = 1E(4) \text{ m}^2$ y es rectangular, como se presenta en la figura P 9.10.

(Un motor eléctrico acciona la bomba y extrae energía de una red de suministro de energía eléctrica. Después de llenar el embalse, se invierte el funcionamiento de la bomba y el motor, luego de haber transcurrido cierto tiempo, y éstos comienzan a funcionar como turbina y generador para proporcionar energía eléctrica a la red.)

Expresar en forma numérica la respuesta a las siguientes preguntas. (a) Si se empieza con el embalse vacío, ¿cuánto tiempo (en *segundos*) se necesitará para llenar éste? (b) Si se desprecian todas las pérdidas por fricción y otras pérdidas de carga hidráulica, ¿cuál sería el trabajo ideal (en *joules*) que se requiere para llenar el embalse? (c) Ahora, considere el flujo real de agua viscosa que pasa por la tubería hacia el interior del

embalse. Cuando éste está lleno a la mitad ($y = 5 \text{ m}$), ¿cuál es la diferencia de presión en pascales que existe entre la salida (descarga) y la entrada (succión) de la bomba?

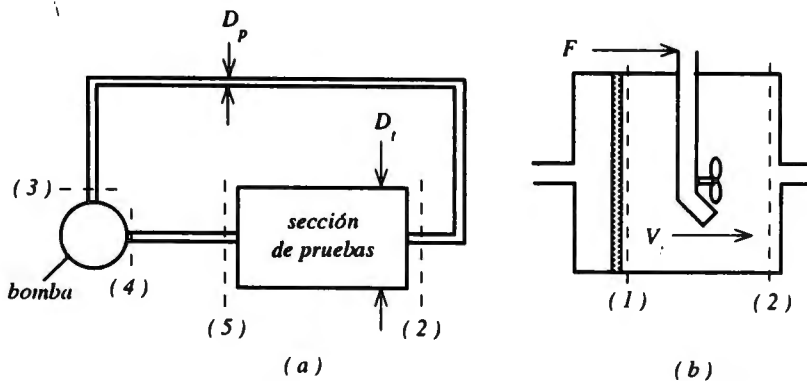


Figura P 9.11

Problema 9.11

Unas instalaciones experimentales destinadas a la prueba de motores marinos fuera borda constan de una bomba, un circuito cerrado de tubería y una sección de pruebas, como se ejemplifica en la figura P 9.11(a). La tubería tiene una longitud total $L = 10 \text{ m}$, un diámetro $D_p = 0.15 \text{ m}$ y una altura de rugosidad $\epsilon = 0.01 \text{ mm}$. La sección de pruebas que se ilustra en la figura P 9.11(b) tiene un diámetro $D_t = 0.45 \text{ m}$. En el extremo corriente arriba de la sección de pruebas, se encuentra una rejilla que asegura una velocidad V_t y una presión p_1 uniformes del flujo en el punto 1 de la sección de pruebas. En el punto 2, la presión p_2 también es uniforme en toda la sección de pruebas. Las instalaciones se llenan con agua de densidad $\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\mu = 1E(-3) \text{ Pa s}$.

(a) Se realiza una prueba en la que $V_t = 1 \text{ m/s}$ es la velocidad de prueba del fluido. La fuerza limitadora F que se ejerce sobre el motor fuera de borda en la dirección del flujo se mide y determina que es $1E(3) \text{ N}$. Despreciando cualquier fuerza de fricción en las paredes de la sección de pruebas, calcule la diferencia de presión $p_1 - p_2$. (b) En otra prueba a la misma velocidad $V_t = 1 \text{ m/s}$ de prueba, se mide la diferencia de presión $p_5 - p_2$ que es de $1E(4) \text{ Pa}$. Calcule el aumento de presión $p_4 - p_3$ a través de la bomba para esta prueba. (Suponga que el coeficiente de pérdida para cada codo es $K_c = 0.25$.)

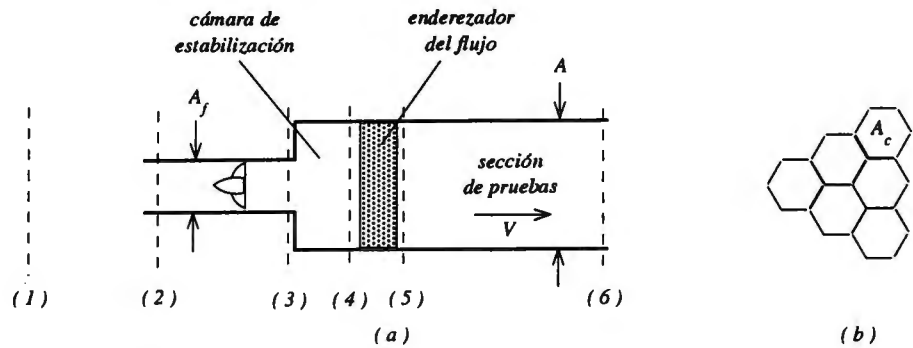


Figura P 9.12

Problema 9.12

Se construirá un pequeño túnel aerodinámico de baja velocidad con materiales disponibles. Como se ilustra en la figura P 9.12(a), el túnel se compone de un ventilador de flujo axial con área de succión y descarga $A_f = 0.5 \text{ m}^2$ y una cámara de estabilización, un enderezador de flujo y una sección de pruebas, todos éstos con un área de flujo $A = 1 \text{ m}^2$. Se pretende diseñar el túnel aerodinámico para funcionar con una velocidad constante de flujo $V = 1 \text{ m/s}$. El ventilador de flujo axial proporcionará un aumento de presión $p_3 - p_2 = 10 \text{ Pa}$ al entregar el gasto volumétrico $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ necesario para hacer funcionar el túnel.

El enderezador del flujo se compone de una estructura de panal que se ilustra en la figura P 9.12(b), en la cual los canales individuales tienen un área de flujo $A_c = 1E(-5) \text{ m}^2$ y una longitud L (que el lector determinará). El flujo viscoso a través del enderezador suprimirá cualquier fluctuación, produciendo un flujo suave y uniforme con velocidad V en la sección de pruebas. El flujo en cada uno de los canales del enderezador del flujo puede considerarse como un flujo viscoso estacionario en un tubo circular de área A_c , y todo el flujo puede considerarse como incompresible con una densidad $\rho = 1.204 \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\mu = 1.82 E(-5) \text{ Pa s}$.

(a) Si se supone un coeficiente de pérdida $K_c = 0.5$ en la succión para el flujo que ingresa al ventilador de succión, calcule la diferencia de presión $p_3 - p_4$ cuando se funciona para las condiciones del diseño. (b) Si se supone que se tiene el coeficiente de pérdida K_e apropiado para una ampliación repentina, calcule el valor de $p_4 - p_3$ para las mismas condiciones de funcionamiento. (c) Si se considera una pérdida por fricción despreciable en las paredes de la sección de pruebas, calcule el valor de la caída de presión $p_4 - p_5$ a través del enderezador del flujo. (d) Calcule el número de Reynolds del flujo en los canales del enderezador del flujo. (e) Calcule la longitud L del enderezador del flujo que proporcionará la caída de presión correspondiente al inciso (c).

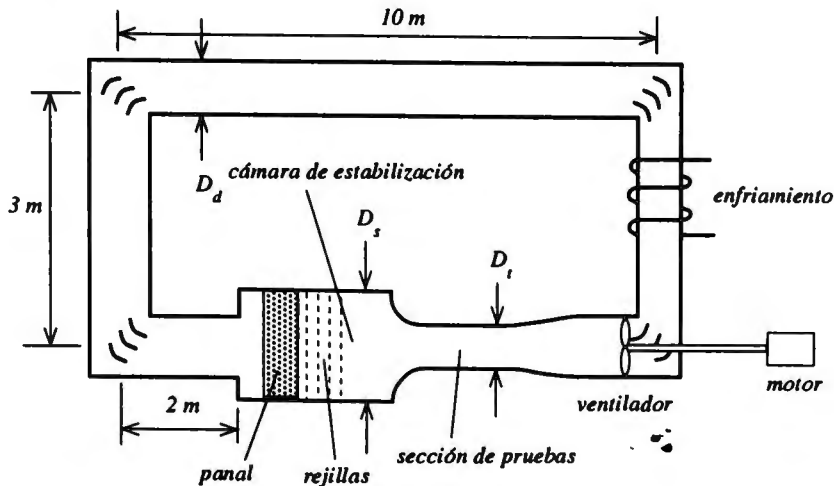


Figura P 9.13

Problema 9.13

La figura P 9.13 es un esquema del diseño preliminar de un túnel aerodinámico presurizado en circuito cerrado. Este túnel funcionará, con la mera finalidad de determinar el intervalo de números de Reynolds, a un nivel de presión absoluta de 8 atmósferas. El circuito se encuentra sobre el plano horizontal.

La sección de pruebas del túnel aerodinámico se alimenta mediante un estrechamiento de forma suave y apropiada, a continuación del cual, corriente arriba, hay una cámara de estabilización. Esta última contiene una sección de panel destinada a eliminar turbulencias y grandes remolinos, así como una serie de cuatro rejillas que reducen la escala de longitud de los movimientos turbulentos, por lo que la turbulencia es disipada gracias a la viscosidad antes del estrechamiento. Corriente abajo de la sección de pruebas se encuentra un difusor que desacelera la corriente de aire a fin de recuperar la presión estática. En las esquinas del circuito del ducto se han dispuesto paletas de viraje para desviar el flujo, reducir al mínimo su separación, el flujo no uniforme y las pérdidas de carga hidráulica. Mediante un ventilador se mantiene el flujo. A fin de impedir que la temperatura del aire se eleve demasiado, la potencia de entrada se disipa en calor en una sección de enfriamiento.

La velocidad de flujo de la sección de pruebas deberá ser $V_t = 30 \text{ m/s}$. El diámetro de la sección de pruebas es $D_t = 0.3 \text{ m}$, el diámetro del ducto $D_d = 0.6 \text{ m}$ y el diámetro de la cámara de estabilización es $D_s = 0.9 \text{ m}$. Todas las secciones tienen paredes lisas ($\epsilon = 0$). La densidad del aire del túnel (que puede considerarse constante) es $\rho = 9.60 \text{ kg/m}^3$ y la viscosidad es $\mu = 1.77E(-5) \text{ Pa s}$.

Las pérdidas de carga hidráulica en el panel, en el estrechamiento y en la sección de pruebas, pueden despreciarse ya que son pequeñas comparadas con las demás pérdidas del circuito. El coeficiente de pérdida para cada una de las secciones que contienen las veletas de viraje es $K_v = 0.3$ (lo cual se debe a la velocidad V_d en el ducto), para cada rejilla es $K_r = 2.0$ (lo cual se debe a la velocidad V_s en la cámara de estabilización) y para el difusor es $K_d = 0.2$ (lo cual se debe a la velocidad V_t en la sección de pruebas).

(a) Calcule cuál sería la lectura en metros de agua en el manómetro de un tubo de Pitot que apunta corriente arriba en el centro de la sección de pruebas. (b) Calcule la pérdida de carga hidráulica por fricción en el tramo del entubado del circuito (sin contar la cámara de estabilización, el estrechamiento, el difusor y las esquinas), expresada en metros de aire con densidad igual al aire en el túnel. (c) Calcule el aumento de presión en el ventilador. (d) Si se supone que el ventilador tiene una eficiencia $\eta_f = 70\%$, calcule la potencia que se requiere para hacerlo funcionar.

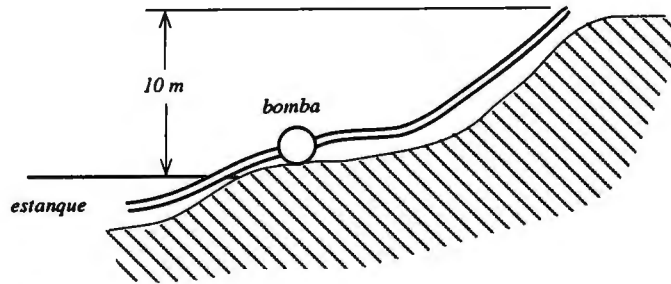


Figura P 9.14

Problema 9.14

Un motor para incendios bombea agua desde un estanque con un gasto volumétrico $Q = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ por una manguera contra incendios de longitud total $L = 100 \text{ m}$, diámetro $D = 0.1 \text{ m}$ y altura de rugosidad $\epsilon = 1E(-3) \text{ m}$. La altura de la boquilla de la manguera está a 10 m por encima de la superficie del estanque. El extremo de la manguera de la toma está insertado debajo del nivel del agua del estanque, como se ejemplifica en la figura P 9.14. El diámetro de salida de la boquilla es de 0.05 m .

Calcule (a) el aumento de carga hidráulica $(\Delta h)_p$ a través de la bomba y (b) la potencia de la bomba que se requiere si la eficiencia de la bomba η_p es 80% . Pueden despreciarse las pérdidas de flujo en la boquilla.

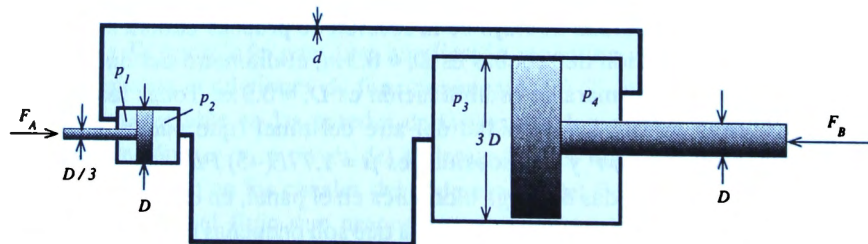


Figura P 9.15

Problema 9.15

Una prensa hidráulica usada en una operación de manufactura se compone de un pistón impulsor y cilindro con diámetro $D = 3 \text{ cm}$ conectados a un pistón y cilindro de la prensa con diámetro $3D$ mediante dos líneas hidráulicas, cada una de las cuales tiene una longitud $L = 10 \text{ m}$ y diámetro $d = 5 \text{ mm}$, como se ilustra en el diagrama. El fluido hidráulico tiene una viscosidad $\mu = 2E(-2) \text{ Pa s}$.

(a) Si sobre el pistón impulsor se aplica una fuerza $F_A = 100 \text{ N}$ y no se origina ningún movimiento, calcule la presión manométrica $p_2 = p_3$ y la fuerza F_B que sujeta el pistón de la prensa, si se supone que $p_1 = p_4$ es igual a la presión atmosférica. Cuando la fuerza de resistencia alcanza el valor $F_B = 1000 \text{ N}$, el pistón de la prensa se mueve a la derecha con una velocidad $V_B = 1 \text{ mm/s}$. Calcule (b) la velocidad V_A del pistón impulsor (c) la caída de presión $\Delta p \equiv p_2 - p_3 \simeq p_4 - p_1$, si se supone que el flujo es laminar viscoso en las líneas hidráulicas, (d) la fuerza F_A necesaria para provocar este movimiento y (e) la eficiencia $F_B V_B / F_A V_A$ del sistema en estas condiciones de funcionamiento.

Bibliografía

Gerhart, Philip M., Richard J. Gross y John I. Hochstein, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2a. ed., Reading, Pa.: Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

Guyton, Arthur C., *Textbook of Medical Physiology*, 5a. ed., Filadelfia: W.B. Saunders Company, 1976.

Streeter, V. L., *Handbook of Fluid Mechanics*, Nueva York: McGraw-Hill Book Co., Ed. 1961.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1986.

10.1 Introducción

El *análisis dimensional* es un procedimiento analítico que ayuda a organizar información empírica sobre el flujo de un fluido. Con base en el principio físico de *homogeneidad dimensional*, es posible simplificar de alguna forma la relación existente entre las cosas que se desea conocer sobre un flujo y las restricciones que a éste se le imponen. Este principio no es capaz de producir nueva información, sino permite apreciar cómo reordenar la información que se dispone para proporcionar una idea clara de las relaciones fenomenológicas.

En capítulos anteriores, se estudiaron algunos flujos simples que fue posible describir mediante expresiones algebraicas, como la ecuación de Bernoulli o soluciones en forma cerrada a las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible. Muchos de los flujos que estudia la ingeniería y que son de gran importancia práctica son más complejos que estos ejemplos y no poseen soluciones matemáticas así de elegantes que describan su comportamiento. Con mucha frecuencia, es necesario recurrir a un experimento para determinar, incluso, las características físicas principales del flujo. Al diseñar tales experimentos e interpretar sus resultados, el análisis dimensional puede resultar de gran utilidad.

Durante más de cien años, los ingenieros han utilizado modelos a pequeña escala de las estructuras de la ingeniería a fin de obtener información que haga que sus diseños resulten más eficaces. Los aviones, vehículos de motor, barcos y aliviaderos de presas son algunos ejemplos de las estructuras de la ingeniería que se prueban en laboratorios con el propósito de determinar los detalles del flujo de un fluido relacionados con su uso. Con frecuencia, el modelado físico de estos flujos realizado en un laboratorio es un paso necesario del diseño de dispositivos en tamaño real. El análisis dimensional proporciona al ingeniero una herramienta que le permite diseñar, dirigir y analizar los resultados de la prueba del modelo, así como predecir las importantes propiedades del flujo que se encontrarán en la estructura en tamaño real.

En este capítulo, primero se describe cómo el análisis dimensional puede aplicarse a cualquier problema en el que intervenga el flujo de un fluido y utilizarse para simplificar la expresión de la dependencia entre las propiedades importantes del flujo mediante las variables del flujo. Luego, se muestra cómo deducir información útil a partir de los

experimentos con el modelo mediante la aplicación del principio del análisis dimensional. Estos dos elementos constituyen esenciales herramientas para el ingeniero en el diseño de sistemas complejos.

Se concluye este capítulo con un estudio sobre la resistencia al avance y las fuerzas ascensionales o sustentación que obran sobre los cuerpos sumergidos en un flujo, un ejemplo sobre cómo relacionar el análisis dimensional con la comprensión de las importantes características físicas de algunos flujos prácticos y de interés.

10.2 Análisis dimensional

Mientras que el análisis dimensional puede aplicarse a cualquier experimento, en esta sección el interés está dirigido a sus aplicaciones a flujos de fluidos. Aunque existen varias formas interesantes de ver la importancia del análisis dimensional, aquí se adopta el enfoque directo que muestra cómo este análisis simplifica la organización de información referente a los experimentos con flujos de fluidos, con lo cual se reduce la cantidad de experimentación necesaria para obtener una descripción completa de los fenómenos relacionados con flujos. El análisis dimensional se convierte así, no en mágica prestidigitación, sino en un ejercicio de análisis racional sobre una situación compleja en un flujo, el cual puede conducir a útiles técnicas de modelado físico o matemático del diseño en los sistemas de la ingeniería.

10.2.1 Dimensiones y unidades de medida

De lo tratado en la sección 1.3, hay que recordar que una cantidad física observada tiene una *dimensión* y una magnitud que se mide en las *unidades* de esa dimensión. Las dimensiones fundamentales (masa, longitud, tiempo, temperatura y corriente eléctrica) son aquellas que no es posible medir en términos de las otras. Todas las cantidades físicas poseen dimensiones que son producto de estas dimensiones fundamentales, v.g., la densidad tiene dimensiones de masa entre (longitud)³. Para expresar la dimensión de una cantidad física, se utilizará una forma abreviada. Las dimensiones fundamentales que se utilizan en la mecánica de fluidos, masa, longitud, tiempo y temperatura, se designarán mediante \mathcal{M} , \mathcal{L} , \mathcal{T} y Θ , respectivamente. La dimensión de una cantidad, como la densidad ρ , por ejemplo, se designará mediante $[\rho]$ y puede expresarse en términos de las dimensiones fundamentales como:

$$[\rho] = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}^3} = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3} \quad (10.1)$$

Las dimensiones de todas las cantidades que se utilizan en la mecánica de fluidos pueden expresarse como múltiplos de las dimensiones fundamentales \mathcal{M} , \mathcal{L} , \mathcal{T} y Θ . Puesto que en el análisis dimensional se utilizarán ampliamente esas cantidades, en la tabla 10.1 se proporciona una lista de muchas de ellas. Por conveniencia, esas cantidades se clasifican en cantidades geométricas, propiedades del fluido y cantidades del flujo.

Tabla 10.1 Dimensiones de las cantidades de la mecánica de fluidos

Cantidad	Símbolo	Dimensión
Cantidades geométricas		
Longitud		\mathcal{L}
Área	S	\mathcal{L}^2
Volumen	\mathcal{V}	\mathcal{L}^3
Ángulo	θ, ϕ	1
Tiempo	t	T
Gradiente, divergencia, rotacional	$\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$	$1/\mathcal{L} = \mathcal{L}^{-1}$
Laplaciano	∇^2	$1/\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^{-2}$
Derivada respecto al tiempo	$\partial/\partial t, D/Dt$	$1/T = T^{-1}$
Propiedades de los fluidos		
Densidad	ρ	$M/\mathcal{L}^3 = M\mathcal{L}^{-3}$
Viscosidad	μ	$M/\mathcal{L}T = M\mathcal{L}^{-1}T^{-1}$
Viscosidad cinemática	ν	$\mathcal{L}^2/T = \mathcal{L}^2T^{-1}$
Tensión superficial	Υ	$M/T^2 = MT^{-2}$
Conductividad térmica	λ	$M\mathcal{L}T^3\Theta = M\mathcal{L}T^{-3}\Theta^{-1}$
Energía cinética, potencial por unidad de masa	$V^2/2, gz$	$\mathcal{L}^2/T^2 = \mathcal{L}^2T^{-2}$
Energía interna, entalpía	\hat{e}, \hat{h}	$\mathcal{L}^2/T^2 = \mathcal{L}^2T^{-2}$
Calor específico, entropía, constante de los gases	\hat{c}_p, \hat{s}, R	$\mathcal{L}^2/T^2\Theta = \mathcal{L}^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Cantidades del flujo		
Velocidad	\mathbf{V}	$\mathcal{L}/T = \mathcal{L}T^{-1}$
Aceleración	$D\mathbf{V}/Dt, g$	$\mathcal{L}/T^2 = \mathcal{L}T^{-2}$
Velocidad angular, frecuencia	Ω	$1/T = T^{-1}$
Vorticidad	ω	$1/T = T^{-1}$
Presión, esfuerzo	p, τ	$M/\mathcal{L}T^2 = M\mathcal{L}^{-1}T^{-2}$
Gradiente de presión	∇p	$M/\mathcal{L}^2T^2 = M\mathcal{L}^{-2}T^{-2}$
Gasto volumétrico <small>caudal</small>	Q	$\mathcal{L}^3/T = \mathcal{L}^3T^{-1}$
Gasto másico	\dot{m}	$M/T = MT^{-1}$
Fuerza	\mathbf{F}	$M\mathcal{L}/T^2 = M\mathcal{L}T^{-2}$
Momento de una fuerza, momento de torsión	$\mathbf{R} \times \mathbf{F}, \mathbf{T}$	$M\mathcal{L}^2/T^2 = M\mathcal{L}^2T^{-2}$
Cantidad de movimiento	\mathbf{M}	$M\mathcal{L}/T = M\mathcal{L}T^{-1}$
Momento de la cantidad de movimiento	\mathbf{H}	$M\mathcal{L}^2/T = M\mathcal{L}^2T^{-1}$
Flujo de la cantidad de movimiento	$\dot{m}\mathbf{V}$	$M\mathcal{L}/T^2 = M\mathcal{L}T^{-2}$
Temperatura	T	Θ
Carga hidráulica	h	\mathcal{L}
Trabajo, calor	W, Q	$M\mathcal{L}^2/T^2 = M\mathcal{L}^2T^{-2}$
Potencia	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}, \Omega \cdot \mathbf{T}$	$M\mathcal{L}^2/T^3 = M\mathcal{L}^2T^{-3}$
Flujo de calor	q	$M/T^3 = MT^{-3}$
Función de disipación	Φ	$M/\mathcal{L}T^3 = M\mathcal{L}^{-1}T^{-3}$

Ejemplo 10.1

Demuestre que cada término de la ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible, ecuación 6.11,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

tiene las mismas dimensiones.

Solución

Con la tabla 10.1, determine las dimensiones de cada término:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right] &= \frac{[\mathbf{V}]}{[t]} = \frac{\mathcal{L}T^{-1}}{T} = \mathcal{L}T^{-2} \\ [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] &= [\mathbf{V}]^2 [\nabla] = (\mathcal{L}T^{-1})^2 \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}T^{-2} \\ \left[\frac{1}{\rho} \nabla p \right] &= \frac{[\nabla][p]}{[\rho]} = \frac{(\mathcal{L}^{-1})(\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}T^{-2})}{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}} = \mathcal{L}T^{-2} \\ [\mathbf{g}] &= \mathcal{L}T^{-2} \\ [\nu \nabla^2 \mathbf{V}] &= [\nu][\nabla^2][\mathbf{V}] = (\mathcal{L}^2T^{-1})(\mathcal{L}^{-2})(\mathcal{L}T^{-1}) = \mathcal{L}T^{-2} \end{aligned}$$

10.2.2 El principio de homogeneidad dimensional

Cuando se utiliza álgebra y cálculo, por lo general se trata con números puros. Una ecuación como:

$$y = x^2 \quad (10.2)$$

describe una parábola que pasa a través del origen del espacio (x, y) , en este caso se trata de un espacio bidimensional o un plano. De igual manera, se podría escribir la ecuación 10.2 como

$$f\{x, y\} \equiv y - x^2 = 0 \quad (10.3)$$

donde $f\{x, y\}$ denota una función de las variables x y y . Desde el punto de vista geométrico, es posible afirmar que $f\{x, y\} = 0$ es la ecuación de una línea en el plano (x, y) , v.g., una "superficie" en el espacio bidimensional, (x, y) . Puesto que las variables x y y son números puros, existe un número ilimitado de funciones $f\{x, y\}$ que describirán esas "superficies".

Las expresiones algebraicas que describen relaciones entre variables físicas en un experimento se encuentran más restringidas que las variables matemáticas en una ecuación algebraica. Por ejemplo, supóngase que se tiene un conjunto de figuras cuadradas de diferentes tamaños cortadas en papel y que, para cada una, se mide su área

S y la longitud s de uno de sus lados. Se encontraría que estas dos variables se relacionan por medio de:

$$S = s^2 \quad (10.4)$$

Si bien la ecuación 10.4 parece idéntica a la 10.2, estas ecuaciones son, en realidad, muy distintas. A diferencia de 10.2, las variables S y s de 10.4 representan cantidades físicas y poseen dimensiones de:

$$[S] = \mathcal{L}^2; \quad [s] = \mathcal{L} \quad (10.5)$$

Lo que es más importante, las dimensiones de los dos lados de la ecuación 10.5 son las mismas, ya que $[s^2] = [s]^2 = \mathcal{L}^2 = [S]$. Éste es un requisito universal que se impone a las ecuaciones que representan la realidad física. A ese requisito se le conoce como *principio de homogeneidad dimensional*.

También, sería posible expresar los resultados de las mediciones en la forma:

$$f\{S, s\} \equiv S - s^2 = 0 \quad (10.6)$$

y sentirse tentado a describir esta forma como una superficie en el espacio (S, s) . Pero esto carece de sentido físico pues las dimensiones de este espacio, $[S] = \mathcal{L}^2$ y $[s] = \mathcal{L}$, respectivamente, son inconmensurables.¹ Para pensar en la ecuación 10.6 como una superficie en el espacio, debe ponerse en la forma:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{S}{s^2}\right\} \equiv \left(\frac{S}{s^2}\right) - 1 = 0 \quad (10.7)$$

donde \mathcal{F} es una función adimensional. Sin embargo, adviértase que en la ecuación 10.7 sólo existe una variable, S/s^2 , la cual es adimensional. Se ha reducido el número de variables de dos variables dimensionales, (S, s) , en la ecuación 10.6 a una variable adimensional S/s^2 en la ecuación 10.7 utilizando el principio de homogeneidad dimensional. Además, la ecuación 10.7 no tiene la forma de una superficie en un espacio: la "superficie" es el punto (1) en el "espacio" (S/s^2) , que es una línea.

Podría parecer que no hay diferencia entre las ecuaciones 10.6 (o 10.4) y 10.7, y que, a excepción de su más agradable interpretación geométrica, no se siente preferencia por ésta. Sin embargo, la capacidad de expresar los resultados de este experimento en forma adimensional se complicó puesto que se comenzó con la correlación de todos los resultados de la prueba, ecuación 10.4. Si se hubiera empezado sólo con la observación de que el área S depende de la dimensión de su lado, s , de alguna forma aún no comprendida, entonces se habría dicho que:

$$S = f\{s\} \quad (10.8)$$

¹ No existe forma de calcular la distancia entre dos puntos en un espacio de esta índole o de medir en él volúmenes o áreas.

La forma adimensional de esta ecuación, correspondiente a la ecuación 10.7, habría quedado como sigue:

$$\left(\frac{S}{s^2}\right) - \frac{f\{s\}}{s^2} = 0 \quad (10.9)$$

Puesto que ésta es una ecuación adimensional, el segundo término de la izquierda también debe serlo, pero la única forma de que $f\{s\}/s^2$ sea adimensional es si $f = (\text{constante})s^2$. Por lo tanto, de la ecuación 10.9 puede concluirse que S/s^2 es una constante cuyo valor resulta posible determinar a partir de una medición de S y s para un cuadrado solamente (donde se encontraría que es igual a 1). Conociendo esto, es posible ahorrarse mucho tiempo experimental si se realiza sólo una, en lugar de un gran número de mediciones para llegar a la conclusión de la ecuación 10.4.

Se verá cómo opera este enfoque en un experimento con el flujo de un fluido. Supóngase que se tiene un tubo de Pitot instalado en el canal de un flujo, como se aprecia en la figura 4.6, y se piensa que la velocidad V_1 del flujo que se pretende medir depende de la altura h de la columna del manómetro, la densidad ρ del fluido, la densidad del fluido ρ_m del manómetro y del valor de g :

$$V_1 = f\{h, \rho, \rho_m, g\} \quad (10.10)$$

¿Puede deducirse la forma de f ? Trátese de escribir la ecuación 10.10 en una forma adimensional al dividir esa ecuación entre alguna combinación de h , ρ , ρ_m y g . Ahora, se sabe, de la ecuación de Bernoulli, que gz y $V^2/2$ tienen las mismas dimensiones, por lo que es posible dividir 10.10 entre \sqrt{gh} para encontrar:

$$\frac{V_1}{\sqrt{gh}} - \frac{f\{h, \rho, \rho_m, g\}}{\sqrt{gh}} = 0 \quad (10.11)$$

Ahora, considérese el segundo término de la ecuación 10.11. Éste no sólo es adimensional, sino que debe ser función de variables adimensionales que son una combinación de h , ρ , ρ_m y g . La única función de esa índole sería una función adimensional de ρ/ρ_m , a saber \mathcal{F} :

$$\frac{V_1}{\sqrt{gh}} = \mathcal{F}\left\{\frac{\rho}{\rho_m}\right\} \quad (10.12)$$

Éste es un considerable avance respecto de la ecuación 10.10. Sólo se necesita realizar un conjunto de experimentos en los que se varíe la razón de densidades ρ/ρ_m en tanto que V_1 se mantenga fija en un valor conocido. Si se llevara a cabo esto, se tendría que $\mathcal{F}\{\rho/\rho_m\} = \sqrt{2(\rho_m - \rho)/\rho}$.

Aunque sólo se consideraron dos ejemplos particulares, otros análisis semejantes llevarían a la conclusión de que *la relación entre variables físicas en el flujo de un fluido puede reducirse a una relación adimensional entre un número menor de variables adimensionales formadas a partir de combinaciones de las variables físicas*. Es posible determinar el número de variables reducidas mediante el teorema Π , que se analizará a continuación.

10.2.3 El teorema Π

Por lo general, se acostumbra describir los resultados de un experimento con un flujo mediante la determinación de cómo una variable *dependiente*, v_1 por ejemplo, depende de las variables *independientes* v_2, v_3, \dots, v_n . Éstas son aquellas cantidades físicas que se encuentran bajo el control del experimentador y pueden variarse en un tiempo dado para ver el efecto que tendrán en la variable dependiente.² En el caso de un experimento en un túnel aerodinámico, por ejemplo, la variable dependiente puede ser la fuerza de resistencia al avance en el modelo de un avión, en tanto que las variables independientes podrían ser la velocidad del flujo, la densidad del aire y su temperatura dentro del túnel. El objeto del experimento consiste en encontrar la relación:

$$v_1 = f\{v_2, v_3, \dots, v_n\} \quad (10.13)$$

El principio de homogeneidad dimensional garantiza que esta relación puede expresarse en forma adimensional, pero con un número menor de variables independientes (adimensionales). Sin embargo, ¿cuántas variables adimensionales menos habrá? El teorema Π determina ese número.

Una relación entre n variables físicas (como la ecuación 10.13) puede reducirse a una relación adimensional entre $n - r$ variables adimensionales, denotadas por $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$, v.g.,

$$\Pi_1 = \mathcal{F}\{\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-r}\} \quad (10.14)$$

La cantidad r de reducción del número de variables es, en general, igual al número d de dimensiones fundamentales que se requiere para las dimensiones de las n variables físicas.³ Las variables $n - r$ Π están formadas por productos de las variables v_i , pero su determinación no es única. Sin embargo, esas variables adimensionales son independientes.⁴

El teorema Π no establece el procedimiento que se sigue en la determinación de un conjunto de variables Π en un caso particular de flujo de un fluido para el cual hay n variables dimensionales v_1, v_2, \dots, v_n . Sin embargo, los siguientes pasos son la forma más sencilla de llegar al resultado deseado:

1. Prepare una lista de las dimensiones de las n variables físicas, utilizando la tabla 10.1. Determine el número d de dimensiones fundamentales ($\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \Theta$) que aparece en esta lista.

² Las variables independientes son aquellas que no pueden expresarse en términos de las otras. Por ejemplo, sólo dos de las variables ρ, μ y ν son independientes puesto que $\nu = \mu/\rho$.

³ Sólo en casos raros, r puede ser menor que d . Aquí, r es el número máximo de variables dimensionales que no formarán un grupo adimensional.

⁴ Esto significa que ninguna Π se expresará en términos de las otras.

2. Suponiendo que la reducción r es igual a d , seleccione, entre las variables independientes, un número r que contenga todas las d dimensiones fundamentales, pero que por sí mismas no puedan formar una Π adimensional. Llame a estas variables seleccionadas v_s, \dots, v_{s+r-1} .
3. Para cada una de las $n-r$ variables restantes no seleccionadas, forme una Π encontrando un producto de esa variable y las variables seleccionadas que sea adimensional. A fin de hacer esto, seleccione la forma:

$$\Pi_i = v_i (v_s)^{a_s} \cdots (v_{s+r-1})^{a_{s+r-1}} \quad (10.15)$$

donde los exponentes a_s, \dots, a_{s+r-1} se eligen de forma que el producto sea adimensional:

$$[v_i (v_s)^{a_s} \cdots (v_{s+r-1})^{a_{s+r-1}}] = 1 \quad (10.16)$$

Algunas veces, es posible determinar los exponentes por inspección⁵. De lo contrario, éstos se determinan a partir del conjunto formado por las r ecuaciones algebraicas.

4. Puesto que las Π no son únicas, cualquier producto de entre las Π también es una Π . Es posible que sea conveniente expresar la ecuación 10.14 en una forma alternativa, como:

$$\Pi_1 = \mathcal{F}\{\Pi_2(\Pi_3)^2, \sqrt{\Pi_3}, \dots, \Pi_{n-r}\}$$

Esto no cambia el número de variables dimensionales Π y éstas siguen siendo independientes entre sí.

Cómo se aplica el teorema Π

Para ver cómo este procedimiento conduce a una formulación adimensional de las variables físicas, considérese la determinación experimental de la caída de presión en un flujo estacionario por una tubería recta horizontal estudiada en los capítulos 6 y 7. Si se comenzara con un conocimiento limitado de los experimentos, se encontraría que el gradiente de presión ∇p^* dependería del diámetro D de la tubería, su rugosidad ϵ , la velocidad media del flujo \bar{V} , la viscosidad μ y la densidad ρ , o:

$$\nabla p^* = f\{D, \epsilon, \bar{V}, \mu, \rho\}$$

Ahora, se procede según el paso 1 para determinar las dimensiones de estas variables empleando la tabla 10.1:

$$\begin{aligned} [\nabla p^*] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-2}\mathcal{T}^{-2}; & [D], [\epsilon] &= \mathcal{L}; & [\bar{V}] &= \mathcal{L}\mathcal{T}^{-1} \\ [\mu] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-1}; & [\rho] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3} \end{aligned}$$

Ya que sólo \mathcal{M} , \mathcal{L} y \mathcal{T} aparecen en estas dimensiones, $d = 3 = r$.

⁵ Por ejemplo, si $[v_i] = \mathcal{L}$ y $[v_s] = \mathcal{L}$, entonces $\Pi_i = v_i/v_s$.

Siguiendo el paso 2, deben elegirse tres de las variables independientes, D , ε , \bar{V} , μ , ρ como las variables seleccionadas. Por lo común es una buena idea elegir cada una de las variables de una clasificación distinta de la tabla 10.1, por lo que se elige D , \bar{V} y μ como las variables seleccionadas. Entre ellas están tres dimensiones fundamentales, \mathcal{M} , \mathcal{L} y \mathcal{T} y éstas no pueden combinarse para dar una variable adimensional.⁶

Siguiendo el paso 4, a continuación se calcula la Π adimensional. Primero se escribe:

$$\Pi_1 = \nabla p^* D^a \mu^b \bar{V}^c$$

y luego se determinan las dimensiones del producto:

$$\begin{aligned} [\nabla p^* D^a \mu^b \bar{V}^c] &= (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-2}\mathcal{T}^{-2})(\mathcal{L})^a (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-1})^b (\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^c \\ &= (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-2}\mathcal{T}^{-2})(\mathcal{M}^b \mathcal{L}^{a-b+c} \mathcal{T}^{-b-c}) = \mathcal{M}^{1+b} \mathcal{L}^{-2+a-b+c} \mathcal{T}^{-2-b-c} \end{aligned}$$

Ahora, es necesario elegir a , b y c de forma que los exponentes de \mathcal{M} , \mathcal{L} y \mathcal{T} sean cero:

$$\begin{aligned} 1 + b &= 0; & b &= -1 \\ -2 - b - c &= 0; & c &= -(2 + b) = -(2 - 1) = -1 \\ -2 + a - b + c &= 0; & a &= 2 + b - c = 2 - 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se encuentra que la primera Π es:

$$\Pi_1 = \frac{\nabla p^* D^2}{\mu \bar{V}}$$

Restan dos variables independientes no seleccionadas, ε y ρ . La primera de ellas forma con facilidad una Π con D :

$$\Pi_2 = \frac{\varepsilon}{D}$$

En el caso de la variable restante ρ , se siguen los pasos anteriores que se aplicaron para ∇p :

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \rho D^a \mu^b \bar{V}^c \\ [\rho D^a \mu^b \bar{V}^c] &= (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3})(\mathcal{L})^a (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-1})^b (\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^c = \mathcal{M}^{1+b} \mathcal{L}^{-3+a-b+c} \mathcal{T}^{-b-c} \\ 1 + b &= 0; & b &= -1 \\ -b - c &= 0; & c &= -b = 1 \\ -3 + a - b + c &= 0; & a &= 3 + b - c = 1 \end{aligned}$$

⁶ De haberse elegido D , ε y μ , en la última prueba se habría fracasado debido a que D/ε es adimensional.

por lo que Π_3 se transforma en:

$$\Pi_3 = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = Re_D$$

Π_3 es el conocido número de Reynolds que se basa en el diámetro de la tubería. Así, la ecuación 10.14 adopta la forma:

$$\frac{\nabla p^* D^2}{\mu \bar{V}} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right\}$$

La variable dependiente Π_1 no es una variable adimensional conocida. Si se divide entre Π_2 , se tiene:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\nabla p^* d}{\rho \bar{V}^2} = \frac{f}{2}$$

donde f es el factor de fricción de Darcy definido en la ecuación 6.47. Siguiendo el paso 4, es posible sustituir f por Π_1 a fin de obtener:

$$f = \mathcal{F} \left\{ \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right\} \quad (10.17)$$

Ésta es precisamente la forma de la ecuación 9.7 para el factor de fricción en un flujo laminar y turbulento por una tubería. El análisis dimensional ha permitido especificar el número y el tipo de variables adimensionales, pero no dice la forma de la función \mathcal{F} que las relaciona. Ésta debe obtenerse del experimento, pero como se ha visto, el número y la clase de experimentos que se necesitan para encontrar \mathcal{F} se reduce en gran medida después de haber logrado un análisis dimensional.

La elección de las variables seleccionadas (en este caso, D , \bar{V} , μ) no tiene un carácter crucial en el resultado del análisis dimensional. Una elección distinta conduciría a un conjunto diferente de variables Π que se identificarían como productos de las que aparecen en la ecuación 10.17 y se reordenarían hasta obtener la misma forma de la ecuación 10.17, de preferirse así.⁷ Los resultados de un análisis dimensional se expresan, por lo general, en términos de variables adimensionales convencionales, como el número de Reynolds, el coeficiente de resistencia al avance, el factor de fricción, etcétera.

Ejemplo 10.2

Una esfera sólida de radio a y densidad ρ_s se deja caer en un recipiente con líquido de densidad y viscosidad ρ_l y μ_l , respectivamente. Después de un tiempo breve de haber entrado, se observa que la esfera desciende en el líquido con una velocidad constante

⁷ Existen siete opciones posibles de las variables seleccionadas para este ejemplo que satisfagan el criterio del paso 2 anterior.

V_f . Deduzca una expresión adimensional para la dependencia de V_f respecto de las variables experimentales a , ρ_s , ρ_l y μ_l .

Solución

Una esfera cae por un líquido pues la fuerza de la gravedad que actúa sobre la esfera supera la fuerza de empuje (o empuje ascendente). Aunque no se varíe el valor de g en este experimento, éste debe considerarse, en principio, como una variable independiente porque caracteriza una importante fuerza que afecta al flujo en este caso. Por lo tanto, es necesario llevar a cabo un análisis dimensional para la relación:

$$V_f = f\{\rho_s, \rho_l, \mu_l, a, g\}$$

entre las $n = 6$ variables dimensionales. Las dimensiones de estas variables son:

$$[V_f] = \mathcal{L}T^{-1}; \quad [\rho_s, \rho_l] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}; \quad [\mu] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}T^{-1};$$

$$[a] = \mathcal{L}; \quad [g] = \mathcal{L}T^{-2}$$

Puesto que \mathcal{M} , \mathcal{L} y T aparecen en estas dimensiones, $r = d = 3$, y existen $n - r = 3$ variables Π que quieren determinarse, una dependiente (Π_1) y dos independientes (Π_2 , Π_3). Elíjase, como variables seleccionadas ρ_l , a y g , dejando ρ_s y μ_l como la variable independiente restante. Advirtiendo que \sqrt{ga} tiene dimensiones de velocidad, a partir de la primera variable Π de V_f , por inspección se obtiene:

$$\Pi_1 = \frac{V_f}{\sqrt{ga}}$$

La variable Π formada a partir de ρ_s es, evidentemente:

$$\Pi_2 = \frac{\rho_s}{\rho_l}$$

Para formar la variable Π a partir de μ_l , es necesario dividir entre una densidad ρ_l multiplicado por la velocidad \sqrt{ga} por la longitud a , como en el caso del recíproco del número de Reynolds:

$$\Pi_3 = \frac{\mu_l}{\rho_l \sqrt{ga} (a)} = \frac{\mu_l}{\rho_l g^{1/2} a^{3/2}}$$

La relación general adimensional se transforma en:

$$\frac{V_f}{\sqrt{ga}} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_l}, \frac{\rho_l g^{1/2} a^{3/2}}{\mu_l} \right\}$$

donde se ha invertido gratuitamente Π_3 a fin de expresarla en la forma de un número de Reynolds.

Es posible determinar \mathcal{F} para un caso límite. En el caso de pequeños diámetros de esferas que caen en un líquido muy viscoso, de forma que el número de Reynolds

$\rho_l V_f a / \mu_l$ sea menor que uno, la velocidad V_f corresponde a un flujo de Stokes según la ecuación 6.63, la cual puede expresarse en la forma adimensional:

$$\frac{V_f}{\sqrt{ga}} = \frac{2}{9} \left(\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \right) \left(\frac{\rho_l g^{1/2} a^{3/2}}{\mu_l} \right)$$

Esta ecuación tiene, por cierto, la forma general del análisis dimensional dada con anterioridad.

De haberse elegido ρ_l y μ_l como las variables seleccionadas, la forma del análisis dimensional habría sido:

$$\frac{\rho_l V_f a}{\mu_l} = \mathcal{F}' \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_l}, \frac{\rho_l g^{1/2} a^{3/2}}{\mu_l} \right\}$$

donde el lado izquierdo es, simplemente, la razón Π_1/Π_3 del análisis dimensional anterior y $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/\Pi_3$. Otras alternativas de las variables seleccionadas podrían conducir a expresiones distintas, pero igualmente válidas, del análisis dimensional.

Como lo ilustra el ejemplo 10.2, no siempre es evidente cuáles son las verdaderas variables independientes en un flujo físico. Es posible utilizar experimentos preliminares para determinar si repercutirá en el resultado un cambio en las variables obvias. No es posible alterar algunas variables, como la magnitud de la aceleración gravitatoria g ; si bien otras, como la densidad de un líquido, no pueden cambiarse mucho sin dificultad. En aquellos casos en los que no exista evidencia empírica o en los que ésta sea incompleta, será necesario depender de la experiencia y comprensión previas de que se disponga sobre las características físicas importantes del flujo que sirvan de guía en la selección de las variables significativas de un flujo dado.

10.2.4 Forma adimensional de las leyes de la conservación

La conservación de la masa, la cantidad de movimiento o la energía en el flujo de un fluido puede expresarse en forma diferencial o integral. En cualquiera de sus formas, las leyes poseen términos dimensionales, pero gracias al principio de homogeneidad dimensional, cada término aditivo debe tener las mismas dimensiones. Puesto que estas expresiones son ecuaciones con términos conocidos, no se les aplica el teorema Π , pero se usa el principio de homogeneidad dimensional a fin de reducir las a su forma adimensional.

Flujo incompresible

Como ejemplo, considérese un flujo viscoso no estacionario con densidad ρ y viscosidad ν constante en todo el campo del flujo. Las formas diferenciales de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento, ecuaciones 3.17 y 6.12, son:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (10.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (10.19)$$

Supóngase que el flujo se caracteriza por una escala de longitud L , una escala de velocidad V y una frecuencia Ω . (Por ejemplo, el flujo puede ser el que ocurre a través de una hélice con diámetro L y velocidad angular Ω que avanza hacia un fluido con velocidad V .) Es posible utilizar los parámetros dimensionales L , V , Ω y ρ a fin de hacer adimensionales las variables de las ecuaciones 10.18 y 10.19, denotando la forma adimensional por (\prime):

$$t' \equiv \Omega t; \quad \mathbf{R}' \equiv \frac{\mathbf{R}}{L}; \quad \nabla' \equiv L \nabla; \quad \mathbf{V}' \equiv \frac{\mathbf{V}}{V}; \quad (p^*)' \equiv \frac{p^*}{\rho V^2} \quad (10.20)$$

Si se sustituyen estas expresiones en las ecuaciones 10.18 y 10.19, adoptarían la forma adimensional:

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{V}' &= 0 \\ (S) \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t'} + (\mathbf{V}' \cdot \nabla') \mathbf{V}' &= -\nabla' (p^*)' + \left(\frac{1}{Re} \right) (\nabla')^2 \mathbf{V}' \end{aligned} \quad (10.21)$$

donde el número de Reynolds Re para el flujo y el número de Strouhal S son:

$$Re \equiv \frac{VL}{\nu}; \quad S \equiv \frac{\Omega L}{V} \quad (10.22)$$

Es posible interpretar el número de Reynolds Re como la magnitud de la razón de la aceleración de una partícula de fluido en un flujo estacionario, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$, a la fuerza viscosa por unidad de masa, $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$, puesto que se trata de la razón de los términos correspondientes en 10.21. El número de Strouhal S es la razón del tiempo L/V para que una partícula de fluido fluya una distancia L con una velocidad V al tiempo de un ciclo $1/\Omega$.

La ventaja principal de las ecuaciones adimensionales de la conservación es que los términos diferenciales son del orden de la unidad, lo cual es muy conveniente en los cálculos numéricos. Si se pretendiera resolver estas ecuaciones, éstas tendrían la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \mathcal{F}_V \{ \mathbf{R}', t'; Re, S \} \\ p' &= \mathcal{F}_p \{ \mathbf{R}', t'; Re, S \} \end{aligned} \quad (10.23)$$

donde las variables independientes Π incluyen tanto los parámetros Re como los S , así como las variables independientes \mathbf{R}' y t' . De las ecuaciones 10.23, también es posible calcular el empuje y el momento de torsión adimensionales de la hélice como funciones de Re y S .

En algunos flujos, las condiciones en la frontera de las ecuaciones 10.21 definen parámetros adimensionales adicionales que no aparecen en forma explícita en estas ecuaciones. Si el fluido incompresible tiene una superficie libre, como agua con aire

encima, la condición en la frontera para la presión p en un punto sobre la superficie libre ($z = z_B$) es que debe ser mayor que la presión constante p_B del aire una cantidad proporcional a la tensión superficial Υ :

$$p_B^* = (p + \rho g z)_B = p_B + \frac{\Upsilon}{r_1 + r_2} + \rho g z_B \quad (10.24)$$

donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura de la superficie en B . Si la ecuación 10.24 se hace adimensional al dividirla entre ρV^2 , se encuentra que:

$$(p_B^*)' = \frac{p_B}{\rho V^2} + \left(\frac{\Upsilon}{\rho V^2 L} \right) \frac{1}{r_1' + r_2'} + \left(\frac{g L}{V^2} \right) z_B' \quad (10.25)$$

Los coeficientes en paréntesis de los dos últimos términos de la ecuación 10.25 son nuevos parámetros adimensionales; a sus formas comunes se les conoce como *número de Weber* y *número de Froude*.⁸

$$W \equiv \frac{\rho V^2 L}{\Upsilon}; \quad F_r \equiv \frac{V}{\sqrt{g L}} \quad (10.26)$$

El número de Weber W puede interpretarse como la razón de la energía superficial de una muestra de fluido con dimensión L a su energía cinética, $\Upsilon L^2 / \rho V^2 L^3 = W$. El cuadrado del número de Froude F_r , es la razón de la aceleración de una partícula de fluido en un flujo estacionario, $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = V^2/L$, a la aceleración de la gravedad, g .

En algunos flujos líquidos, como el flujo alrededor de la hélice de un barco o el que ocurre en una bomba, el fluido puede transformarse en vapor, formando pequeñas burbujas debido a que la presión p cae por debajo de la presión de vapor p_v del líquido. Este fenómeno se conoce como *cavitación*. Con el tiempo, la cavitación puede ocasionar la erosión de una hélice o hidroturbina conforme las burbujas de vapor se colapsan contra la superficie cuando aumenta la presión por encima de la presión de vapor. Se utiliza un número adimensional, el *número de cavitación* Ca , en la caracterización de la aparición de burbujas de vapor en el flujo, v.g.:

$$Ca \equiv \frac{p_\infty - p_v}{\rho V^2} \quad (10.27)$$

donde p_∞ es una presión de referencia del flujo. El número de cavitación se encuentra claramente relacionado con el primer término de la derecha de la ecuación 10.25.

En resumen, ahora es posible apreciar que la solución de las ecuaciones adimensionales 10.21 de la conservación puede incluir todos estos parámetros adimensionales, según sean las condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \mathcal{F}_V \{ \mathbf{R}', t'; Re, S, W, Fr, Ca \} \\ p' &= \mathcal{F}_p \{ \mathbf{R}', t'; Re, S, W, Fr, Ca \} \end{aligned} \quad (10.28)$$

⁸ William Froude (1810-1879) mostró cómo utilizar experimentos con modelos para predecir la resistencia de los barcos.

Sólo en casos poco comunes, todos estos efectos tendrían importancia simultáneamente como, por ejemplo, en el caso de un flujo alrededor de la hélice, próxima a la superficie del océano, de un barco de alta velocidad.

Flujo compresible

Si un flujo es compresible, las ecuaciones de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento, 10.18 y 10.19, no describen por completo el flujo. En cambio, para un flujo compresible, debe utilizarse la forma de la ecuación de Navier-Stokes⁹ y la ecuación 3.13 de la conservación de la masa. Sin embargo, incluso esto no es suficiente debido a que ρ ahora es una variable dependiente, en lugar de una constante del flujo. A la conservación de la masa y la cantidad de movimiento debe agregársele, también, la conservación de la energía, ecuación 8.31, junto con una relación termodinámica entre las variables p , ρ y \hat{h} y la ley de Fourier, ecuación 8.24. Estas ecuaciones para un flujo compresible introducen parámetros adimensionales adicionales, el número de Mach M ¹⁰ y el número de Prandtl Pr , definidos por:

$$M \equiv \frac{V}{a}; \quad Pr \equiv \frac{\hat{c}_p \mu}{\lambda} \quad (10.29)$$

donde $a \equiv [(\partial p / \partial \rho)_s]^{1/2}$ es la velocidad del sonido y λ es la conductividad térmica del fluido. Además de estos dos parámetros adimensionales, Re y S también entran de modo explícito en las leyes adimensionales de la conservación.

Formas integrales

Con frecuencia, se utiliza la forma integral de una ley de la conservación, como la conservación de la masa, ecuación 3.9, la conservación de la cantidad de movimiento, ecuación 5.11, la conservación de la energía, ecuación 8.29. Éstas son de utilidad pues permiten calcular la fuerza externa F_{ex} o momento de torsión T_{ex} que se aplica a un fluido en un volumen de control, o su razón de transferencia de calor. Es posible hacer adimensionales estas expresiones integrales mediante los mismos procedimientos que se emplearon al deducir las ecuaciones 10.21 anteriores.

El método convencional para expresar la fuerza externa adimensional es el del coeficiente de fuerza C_F :

$$C_F \equiv \frac{F}{(1/2)\rho V^2 A_F} \quad (10.30)$$

⁹ Véase L. Howarth, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. I, *High Speed Flows* (Oxford: Oxford University Press), ed. 1953, para la expresión de la ecuación de Navier-Stokes para un flujo compresible.

¹⁰ Ernst Mach (1838-1916) demostró la existencia de flujos supersónicos y ondas de choque.

donde la fuerza \mathcal{F} es, por lo común, la fuerza de resistencia al avance o la fuerza ascensional (o sustentación) que experimenta un cuerpo sumergido en un fluido en movimiento. El área $A_{\mathcal{F}}$ se determina por las condiciones en las que se encuentra el flujo que, por lo general, son las impuestas por el área del perfil de un ala (vista desde arriba), en el caso de la fuerza ascensional, y el área proyectada de un cuerpo romo, en el caso de la fuerza de resistencia al avance. Para un momento de torsión externo o el momento de una fuerza, el *coeficiente del momento de torsión* C_T suele definirse, en general, como:

$$C_T \equiv \frac{T}{\rho V^2 \mathcal{R}_{\mathcal{T}}^3} \quad (10.31)$$

donde $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ es una longitud apropiada, usualmente el diámetro de un impulsor o hélice.

El esfuerzo cortante τ_w de la pared y la razón de transferencia de calor, q_w , aparecen en las ecuaciones de la cantidad de movimiento y energía. Éstas se hacen adimensionales de distintas maneras. En cuanto al esfuerzo cortante de la pared, se define el *coeficiente de fricción* C_f como:

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{(1/2)\rho V^2} \quad (10.32)$$

La razón adimensional de transferencia de calor de la pared es el *número de Nusselt*, Nu :

$$Nu \equiv \frac{q_w L}{\lambda(\Delta T)} \quad (10.33)$$

donde ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido y la pared y L es la dimensión característica del flujo.

La tabla 10.2 es una lista de los parámetros adimensionales definidos en esta sección.

10.3 Modelado

Un *modelo* en ingeniería es una representación física o matemática del *prototipo* del diseño de un sistema de ingeniería que se utiliza para predecir ciertos aspectos del comportamiento del prototipo. Los modelos físicos de menor tamaño pueden utilizarse en túneles aerodinámicos para obtener información sobre el flujo del prototipo que se presenta alrededor de los aviones, automóviles y rascacielos. Ahora, con el advenimiento de las supercomputadoras, es posible calcular el flujo alrededor de un avión en condiciones que no pueden simularse en un túnel aerodinámico mediante modelos matemáticos del flujo. Los pronósticos del tiempo de corto alcance se valen de la ayuda de modelos matemáticos de sistemas de circulación atmosférica. En esta sección, se concentraría la atención en el modelado físico de sistemas de la ingeniería como se realizan en los experimentos de laboratorio.

El uso de modelos de la ingeniería se remonta a por lo menos 1872, cuando William Froude construyó el primer canal hidrodinámico para probar la resistencia de los buques oceánicos. Los hermanos Wright utilizaron un pequeño túnel aerodinámico para desarrollar su primer avión. Hoy en día, los túneles aerodinámicos, los canales hidrodinámicos y los modelos hidráulicos de presas, ríos y puertos se han convertido en recursos

Tabla 10.2 Parámetros adimensionales del flujo de un fluido

Parámetro	Símbolo	Valor	Ecuación
Número de Reynolds	Re	$\frac{VL}{\nu}$	10.22
Número de Strouhal	S	$\frac{\Omega L}{V}$	10.22
Número de Weber	W	$\frac{\rho V^2 L}{\Upsilon}$	10.26
Número de Froude	Fr	$\frac{V}{\sqrt{gL}}$	10.26
Número de cavitación	Ca	$\frac{p_{\infty} - p_v}{\rho V^2}$	10.27
Número de Mach	M	$\frac{V}{a}$	10.29
Número de Prandtl	Pr	$\frac{\hat{c}_p \mu}{\lambda}$	10.29
Coefficiente de fuerza	C_F	$\frac{\mathcal{F}}{(1/2)\rho V^2 \mathcal{A}_F}$	10.30
Coefficiente de momento de torsión	C_T	$\frac{T}{\rho V^2 \mathcal{R}_T^3}$	10.31
Coefficiente de fricción	C_f	$\frac{\tau_w}{(1/2)\rho V^2}$	10.32

comunes para el diseño de sistemas de la ingeniería. La utilidad de esos modelos radica en los principios que se basan en la relación, conocida como *semejanza* , entre las características del modelo y las del prototipo.

10.3.1 Semejanza

En geometría, se aprendió cómo demostrar la semejanza de figuras en un plano, como triángulos y rectángulos. Figuras semejantes tienen la misma forma pero tamaños distintos. Los ángulos correspondientes deben ser iguales y la razón de las longitudes de los lados correspondientes también debe ser igual. Esto ilustra el principio de *semejanza geométrica* . Al aplicar este principio al modelado, se exige que las formas del modelo y del prototipo sean idénticas, pero el tamaño puede diferir en una *razón de escala SR* geométrica que es igual a la razón de sus longitudes características:

$$SR \equiv \frac{L_m}{L_p} \quad (10.34)$$

donde L_m y L_p representan la misma longitud característica (como la longitud de un barco o la envergadura del ala de un avión) del modelo y prototipo, respectivamente.¹¹

¹¹ Una razón de escala de 0.1 se expresa, con frecuencia, como 1/10 o 1 : 10.

Si se pretendiera tomar fotografías de un modelo y su prototipo, las fotografías no se distinguirían si éstas se tomaran a distancias del objeto que tuvieran la misma proporción que existe entre L_m y L_p .

Si se hace un modelo de una estructura de ingeniería que se desplace a través de un fluido, es necesario asegurarse que el modelo se desplace respecto al tiempo de una forma semejante a la del prototipo. Esto se logrará si la razón de la aceleración de la estructura a la aceleración de una partícula de fluido es la misma tanto para el modelo como para el prototipo. Por ejemplo, si se quiere el modelo de una turbina eólica de radio L que gira con una velocidad angular Ω en viento cuya velocidad es V_m , debe exigirse que la razón de la aceleración centrífuga de la turbina, $\Omega^2 L$, a la aceleración característica de un elemento de fluido, $V \cdot \nabla V \simeq V_w^2/L$, sea la misma tanto para el modelo como para el prototipo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega^2 L}{V_w^2/L} \right)_m &= \left(\frac{\Omega^2 L}{V_w^2/L} \right)_p \\ \left(\frac{\Omega L}{V_w} \right)_m &= \left(\frac{\Omega L}{V_w} \right)_p \end{aligned} \quad (10.35)$$

lo cual es equivalente a la igualdad del número de Strouhal $\Omega L/V$ para el modelo y el prototipo. Adviértase que, en combinación con la ecuación 10.34, esto implica una restricción en el valor de la longitud del flujo V/Ω :

$$\frac{(V_w/\Omega)_m}{(V_m/\Omega)_p} = SR \quad (10.36)$$

Esto ilustra el principio de *semejanza cinemática*, según la cual la aceleración del fluido y sus fronteras se mantiene a la misma razón para el modelo y el prototipo. Aplicando la analogía fotográfica, la semejanza cinemática entre el modelo y el prototipo implica que las imágenes móviles de los flujos del modelo y del prototipo deben ser idénticas si la frecuencia de los cuadros es proporcional a Ω_m y Ω_p y las velocidades del flujo satisfacen la relación de la ecuación 10.36.

Si bien las semejanzas geométrica y cinemática son condiciones necesarias que debe reunir el modelo de un experimento a fin de representar el flujo prototipo, dichas condiciones no son suficientes. Es necesario asegurarse de que los campos completos de flujo correspondientes a los flujos del modelo y del prototipo sean semejantes. Una forma de asegurarse de que esto ocurra consiste en exigir que las soluciones a las leyes adimensionales de la conservación, como se describieron en la sección 10.2.4, sean idénticas para los flujos tanto del modelo como del prototipo. Para que esto sea cierto, las variables adimensionales como Re , S , F_r , W , etc., deben ser las mismas para el modelo y el prototipo puesto que éstas aparecen como parámetros en la expresión adimensional de las leyes de la conservación. Sin embargo, estas variables adimensionales son las mismas que las variables Π que se dedujeron al emprender el análisis dimensional de un problema relativo a un flujo. De ahí que sea posible garantizar una

completa *semejanza dinámica* entre el flujo del modelo y el del prototipo al exigir que las variables Π correspondientes al modelo y prototipo sean iguales:¹²

$$\begin{aligned}(\Pi_1)_m &= (\Pi_1)_p \\(\Pi_2)_m &= (\Pi_2)_p \\&\dots \\(\Pi_{n-r})_m &= (\Pi_{n-r})_p\end{aligned}\tag{10.37}$$

La semejanza entre los campos de flujo del modelo y del prototipo queda, así, garantizada si las escalas de longitud de todas las dimensiones satisfacen la semejanza geométrica (ecuación 10.34) y si las variables independientes adimensionales Π son las mismas tanto para el modelo como para el prototipo (ecuación 10.37). Estas condiciones permiten relacionar entre sí las variables dimensionales del modelo y prototipo, con lo que es posible contar con una predicción de las variables del prototipo a partir de las mediciones de los valores del modelo. Éste es el objetivo de los experimentos realizados con el modelo.

Como ejemplo de modelación o modelado, supóngase que se construye un modelo a escala de laboratorio de un sistema complejo de tubería a fin de investigar las caídas de presión y los gastos en el sistema. Con el propósito de garantizar una semejanza, se necesita un modelo geoméricamente semejante de la razón de escala SR (todos los diámetros, longitudes y alturas de rugosidad de la tubería están en proporción respecto a SR) y todas las variables independientes Π del modelo y prototipo deben ser iguales. Del análisis dimensional de la ecuación 10.17 para el flujo en una tubería, pueden elegirse las variables independientes Π para que sean el número de Reynolds $\rho\bar{V}D/\mu$ y la razón de rugosidad ε/D . Puesto que se tiene un modelo a escala, la igualdad:

$$\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)_m = \left(\frac{(SR)\varepsilon}{(SR)D}\right)_p = \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)_p$$

de la razón de rugosidad queda garantizada en virtud de la ecuación 10.34. La igualdad de los números de Reynolds exige que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\rho\bar{V}D}{\mu}\right)_m &= \left(\frac{\rho\bar{V}D}{\mu}\right)_p \\ \frac{\bar{V}_m}{V_p} &= \frac{D_p\nu_m}{D_m\nu_p} = \frac{1}{SR} \frac{\nu_m}{\nu_p}\end{aligned}\tag{10.38}$$

Si se decide utilizar el mismo fluido en el modelo empleado en el flujo del prototipo (aunque esto no es necesario¹³), la velocidad del flujo del modelo debe superar la velocidad del prototipo por un factor de $(SR)^{-1}$.

¹² Si las variables Π son iguales, entonces las variables dependientes Π serán también iguales.

¹³ Resulta más seguro utilizar agua en el experimento de laboratorio en lugar de los líquidos tóxicos o inflamables del flujo prototipo.

Los cambios operados en la presión p^* entre cualquier par de puntos en el sistema será proporcional al gradiente de presión ∇p^* multiplicado por el diámetro D , pero puesto que la razón de rugosidad y el número de Reynolds del modelo y del prototipo son iguales, los factores de fricción también deben serlo (véase la ecuación 10.17):

$$\left(\frac{2\nabla p^* D}{\rho \bar{V}^2}\right)_p = \left(\frac{2\nabla p^* D}{\rho \bar{V}^2}\right)_m$$

$$\frac{(\nabla p^* D)_p}{(\nabla p^* D)_m} = \frac{\rho_p \bar{V}_p^2}{\rho_m \bar{V}_m^2} = (SR)^2 \frac{(\mu\nu)_p}{(\mu\nu)_m} \quad (10.39)$$

donde se ha utilizado la ecuación 10.38 para eliminar las velocidades en 10.39. Si los fluidos del modelo y prototipo son los mismos, entonces las diferencias del prototipo en p^* son menores que los valores del modelo por un factor de $(SR)^2$, para los puntos correspondientes en el sistema de tubería.

10.3.2 Aplicaciones del modelado

El modelado de los flujos de fluidos en la ingeniería se usa comúnmente en el diseño de aviones, barcos y vehículos terrestres, así como en obras civiles, pero existen muchos casos especiales del modelado que son de utilidad en investigación y desarrollo, como es el caso del flujo sanguíneo en vasos elásticos o el flujo de una columna de humo que proviene de una chimenea industrial. En esta sección, se consideran varios ejemplos de modelado de flujos en sistemas de la ingeniería.

Resistencia aerodinámica al avance de vehículos terrestres

En los últimos años, los fabricantes de automóviles y camiones han buscado la forma de mejorar el ahorro de energía de sus vehículos. Una componente de la resistencia al movimiento de avance de estos vehículos es la fuerza de resistencia aerodinámica al avance que ejerce el movimiento del aire relativo al vehículo. Esta fuente de resistencia puede representar la componente principal de consumo de combustible en un recorrido horizontal con velocidad constante a velocidades comunes de tráfico en carretera. La forma del vehículo, su tamaño y velocidad determinan la cantidad de fuerza de resistencia al avance. Los modelos de prueba en túneles aerodinámicos proporcionan información sobre los efectos de las variables del diseño que repercuten en el consumo aerodinámico de energía de los vehículos terrestres.¹⁴

¹⁴ Además de vencer la resistencia al avance del vehículo, el motor de éste debe proporcionar la potencia necesaria para la aceleración del vehículo, las pérdidas por fricción en el sistema de engranajes y las ruedas, el enfriamiento del motor y la ventilación del vehículo. La conducción de vehículos en situaciones de tránsito pesado, en las que es necesario frenar y avanzar constantemente, resulta menos eficiente en cuanto al gasto de energía en comparación con los viajes a velocidad constante por la pérdida de energía que se deriva del frenado y puesto que se consume energía cuando el vehículo está detenido esperando continuar.

A fin de determinar las condiciones para la prueba del modelo de un automóvil, se comienza con el análisis dimensional de la relación entre la fuerza \mathcal{D} de resistencia aerodinámica al avance y las variables independientes, la velocidad V del vehículo, el tamaño L del vehículo y las propiedades del aire, ρ y μ :

$$\mathcal{D} = f\{V, L, \rho, \mu\} \quad (10.40)$$

A partir de la tabla 10.1, se encuentran las dimensiones de las variables de la ecuación 10.40:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}] &= \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}; & [V] &= \mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}; & [L] &= \mathcal{L}; \\ [\rho] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}; & [\mu] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-1} \end{aligned} \quad (10.41)$$

Existen $n = 5$ variables físicas que contienen $r = 3$ dimensiones; por lo que hay $n - r = 2$ variables adimensionales Π . Eligiendo V , ρ y L como las variables seleccionadas (entre sus dimensiones están \mathcal{M} , \mathcal{L} y \mathcal{T}), está claro que la variable adimensional independiente, formada de la variable independiente μ que resta, es claramente el número de Reynolds:

$$\Pi_2 = \frac{\rho VL}{\mu} \quad (10.42)$$

Refiriéndose a la tabla 10.2, una forma conveniente para la fuerza adimensional de resistencia al avance es:

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho V^2 L^2} \quad (10.43)$$

Se acostumbra sustituir L^2 en la ecuación 10.43 por el área frontal \mathcal{A}_f del vehículo, v.g., el área del vehículo vista por un observador que se encuentra corriente arriba. Cuando se hace esto, Π_1 se convierte en el coeficiente $C_{\mathcal{D}}$ de resistencia al avance:

$$C_{\mathcal{D}} \equiv \frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho V^2 \mathcal{A}_f} \quad (10.44)$$

Luego, la ecuación 10.40 puede expresarse en la forma adimensional:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{D}} &= \mathcal{F}\{Re\} \\ \frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho V^2 \mathcal{A}_f} &= \mathcal{F}\left\{\frac{\rho VL}{\mu}\right\} \end{aligned} \quad (10.45)$$

Los números de Reynolds del prototipo y del modelo deben ser iguales. Si se utiliza aire atmosférico en las pruebas en el túnel aerodinámico, de forma que $\rho_m = \rho_p$ y $\mu_m = \mu_p$, entonces:

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\rho VL}{\mu}\right\}_m &= \left\{\frac{\rho VL}{\mu}\right\}_p \\ V_m &= V_p \left(\frac{L_p}{L_m}\right) = \frac{V_p}{SR} \end{aligned} \quad (10.46)$$

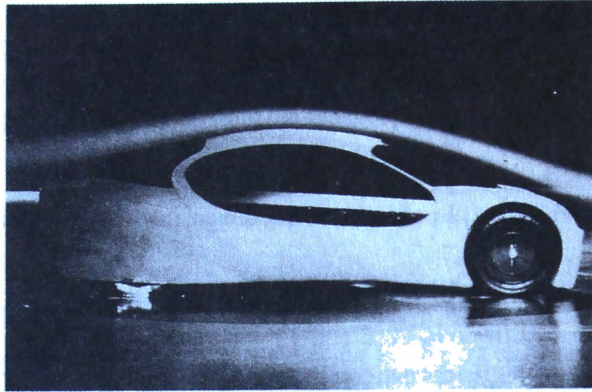


Figura 10.1 Fotografía del modelo de un automóvil experimental con ahorro de energía en el flujo de un túnel hidrodinámico en la que se aprecia la línea de corriente encima del techo del modelo. El coeficiente de resistencia al avance que se obtuvo es $C_D = 0.192$. (Fotografía cortesía del Centro Técnico de General Motors.)

La velocidad del viento en el modelo debe ser mayor que la velocidad del vehículo del prototipo por un factor de $(SR)^{-1}$. Sin embargo, a fin de evitar los efectos de la compresibilidad, V_m debe ser menor que la velocidad del sonido. Esto restringe la razón de escala SR a valores no inferiores a 0.3, aproximadamente, para un modelado a velocidades usuales de tráfico en carretera.

Al igualar los coeficientes de resistencia al avance del modelo y del prototipo, se encuentra que la relación entre las fuerzas de resistencia al avance del modelo y del prototipo, cuando la prueba del modelo se lleva a cabo a la velocidad dada por la ecuación 10.46, es:

$$\left(\frac{D}{(1/2)\rho V^2 A_f} \right)_p = \left(\frac{D}{(1/2)\rho V^2 A_f} \right)_m$$

$$D_p = D_m \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \frac{(A_f)_p}{(A_f)_m} = D_m (SR)^2 \frac{1}{(SR)^2} = D_m \quad (10.47)$$

donde se ha utilizado la relación geométrica de que el área A_f del modelo es $(SR)^2$ multiplicada por el área del prototipo. Este sorprendente resultado, de que la resistencia al avance del prototipo es la misma que la del modelo, se debe a dos efectos compensatorios: la mayor velocidad del flujo unida a una menor área frontal del modelo comparada con el vehículo prototipo.

En la figura 10.1 se aprecia el modelo de un automóvil que se está sometiendo a una prueba en un túnel aerodinámico. Mediante la inyección de humo contra el desplazamiento del modelo se ha hecho visible el flujo que ocurre sobre el techo del automóvil. Este tipo de pruebas no simulan por completo el flujo de aire relativo al vehículo pues el piso del túnel aerodinámico no se mueve a la misma velocidad que el aire del túnel y puesto que las ruedas no giran. Si el modelo se hace girar alrededor de un eje vertical en una posición distinta, es posible medir los efectos sobre las fuerzas del vehículo provocados por un viento transversal (o de costado).

La resistencia en los barcos

Cuando las embarcaciones marítimas con velas se sustituyeron por primera vez por barcos de vapor en la última mitad del siglo XIX, poco se sabía sobre la cantidad de potencia que se necesitaba para impulsar estos buques de vapor. Sin embargo, en 1872, William Froude desarrolló el método que emplea modelos a fin de predecir los requisitos de potencia de los buques oceánicos, método que hoy en día sigue utilizándose.

Un barco que se desplaza sobre la superficie del océano crea ondas (olas) superficiales de gravedad que extraen energía y cantidad de movimiento del barco. El sistema de las ondas (olas) altera la distribución de presión del casco del barco, produciendo una fuerza horizontal \mathcal{D}_w que se conoce como resistencia de las olas. Además, los esfuerzos cortantes viscosos en la superficie del casco se suman para dar una fuerza horizontal adicional, \mathcal{D}_f , que se conoce como resistencia por fricción. El empuje producido por la hélice (propela) del barco debe contrarrestar la resistencia total, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_w + \mathcal{D}_f$.

Ya que el flujo de agua alrededor del barco tiene una superficie libre, la aceleración de la gravedad, g , es una variable independiente que repercute en la resistencia \mathcal{D} , así como en la velocidad V del barco, su longitud L y las propiedades del agua, ρ y μ :

$$\mathcal{D} = f\{V, L, \rho, \mu, g\} \quad (10.48)$$

Si se eligen V , L y ρ como las variables seleccionadas para realizar un análisis dimensional, las dos variables adimensionales independientes formadas a partir de μ y g se convierten en el número de Reynolds y en el número de Froude:

$$\Pi_2 = \frac{\rho VL}{\mu} \equiv Re_L; \quad \Pi_3 = \frac{V}{\sqrt{gL}} \equiv Fr \quad (10.49)$$

en tanto que la resistencia adimensional se convierte en el coeficiente de resistencia:

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho VL^2} \equiv C_D \quad (10.50)$$

La forma adimensional de la ecuación 10.48 es, por lo tanto:

$$C_D = \mathcal{F}\{Re_L, Fr\}$$

$$\frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho VL^2} = \mathcal{F}\left\{\frac{\rho VL}{\mu}, \frac{V}{\sqrt{gL}}\right\} \quad (10.51)$$

Froude hizo una brillante sugerencia práctica. Él propuso la hipótesis de que la componente de la resistencia por fricción, \mathcal{D}_f , sólo depende del número de Reynolds y es igual a la fuerza de resistencia al avance en un plano llano con longitud L y área \mathcal{A}_w expuesto al fluido, donde \mathcal{A}_w es igual al área de la superficie del barco que está debajo del agua, en tanto que la componente de la resistencia de formación de olas, \mathcal{D}_w , sólo depende del número de Froude. En esencia, Froude supuso que existe una relación despreciable entre la capa límite viscosa de la superficie del barco y el flujo

que genera olas producido por el movimiento del barco a través del agua. Si se expresa en la forma de los coeficientes de resistencia, la hipótesis de Froude es:

$$\frac{D_f}{(1/2)\rho V^2 A_w} = (C_D)_{fp} \left\{ Re_L \frac{\varepsilon}{L} \right\} \quad (10.52)$$

$$\frac{D_w}{(1/2)\rho V^2 A_w} = \mathcal{F}_w \left\{ \frac{V}{\sqrt{gL}} \right\} \quad (10.53)$$

donde $(C_D)_{fp}$ es el coeficiente de resistencia al avance de la placa plana de las ecuaciones 7.20-7.21 para un flujo turbulento.¹⁵ Al realizar los experimentos con placas planas y formas de barcos de tamaños distintos, Froude confirmó la validez de su hipótesis, ecuaciones 10.52-10.53.

No es posible obtener una completa semejanza entre el modelo del barco y su prototipo pues el número de Reynolds y el número de Froude no pueden ser los dos iguales entre el modelo y el prototipo. Para números de Froude iguales,

$$\left(\frac{V}{\sqrt{gL}} \right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}} \right)_p$$

$$V_m = V_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = (\sqrt{SR}) V_p \quad (10.54)$$

en tanto que para números de Reynolds iguales,

$$\left(\frac{\rho VL}{\mu} \right)_m = \left(\frac{\rho VL}{\mu} \right)_p$$

$$V_m = V_p \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{SR}} \quad (10.55)$$

Puesto que los requisitos de las ecuaciones 10.54 y 10.55 son incompatibles, sólo el número de Froude o el número de Reynolds pueden igualarse. Sin embargo, de acuerdo con la hipótesis de Froude, ecuación 10.52, es posible calcular la resistencia por fricción D_f y, por consiguiente, sólo se necesita pedir que los números de Froude del modelo y su prototipo sean iguales (ecuación 10.53) a fin de determinar la resistencia de las olas (y la resistencia total) del barco a partir del experimento con el modelo.

La figura 10.2 presenta la prueba de un modelo de barco en un canal hidrodinámico. Es este tipo de pruebas, se mide la fuerza de resistencia al avance del modelo cuando el modelo se desplaza por el tanque con velocidad constante. Esta medición se utiliza en el cálculo de la resistencia del buque prototipo cuando se desplaza con el mismo número de Froude que el modelo.

¹⁵ El flujo alrededor de los barcos es invariablemente turbulento debido a las dimensiones del barco y a su velocidad. Los experimentos con modelos se diseñan, en general, con la finalidad de garantizar la existencia de un flujo turbulento, pues los flujos laminares tienden a producir un patrón de olas (ondas) distinto que emana de la popa del modelo del barco.



Figura 10.2 El modelo de un barco que se probó en un canal hidrodinámico del MIT, con el cual se simula el movimiento de un barco a través de las olas del mar. La prueba con el modelo se realizó con un número de Froude igual que el del prototipo, pero con un número de Reynolds menor. (Fotografía cortesía del profesor Michael S. Triantafyllou, MIT.)

En ocasiones, los arquitectos navales expresan la resistencia al avance debida a las olas en términos de un coeficiente de resistencia \mathcal{R}_w , que se define como la razón de la resistencia al avance de las olas, \mathcal{D}_w , a la fuerza de empuje (o empuje ascendente) $\rho g \mathcal{V}$:

$$\mathcal{R}_w \equiv \frac{\mathcal{D}_w}{\rho g \mathcal{V}} = \mathcal{F}'_w \left\{ \frac{V}{\sqrt{gL}} \right\} \quad (10.56)$$

donde \mathcal{V} es el volumen de agua desplazado por el barco. La función \mathcal{F}' de la ecuación 10.56 es proporcional a V^2/gL por \mathcal{F}_w de la ecuación 10.53. En el caso de un número de Froude característico de 0.25, el coeficiente de resistencia de embarcaciones marítimas es $1E(-3)$, más o menos, y varía en forma aproximada según Fr^4 .

Ejemplo 10.3

Un modelo de una embarcación marítima con $L_p = 100 \text{ m}$ de longitud está construido a una escala de 1 : 50. La longitud del modelo es $L_m = 2 \text{ m}$, su volumen desplazado, $\mathcal{V}_m = 5E(-2) \text{ m}^3$, y $(A_w)_m = 0.9 \text{ m}^2$ es su área húmeda. Cuando se prueba el modelo en un canal hidrodinámico ($\rho = 1E(3) \text{ kg/m}^3$) a una velocidad $V_m = 1.1 \text{ m/s}$, la fuerza total de resistencia al avance, \mathcal{D} , se mide y determina que es de 2.66 N. Calcule (a) la velocidad correspondiente, V_p , de la embarcación marítima prototipo, (b) su fuerza de resistencia al avance \mathcal{D}_p en el agua del mar ($\rho = 1.03E(3) \text{ kg/m}^3$) y (c) su potencia propulsora, $\mathcal{P}_p = \mathcal{D}_p V_p$.

Solución

(a) Para números iguales de Froude, la ecuación 10.55 exige que:

$$V_p = \frac{V_m}{\sqrt{SR}} = \frac{1.1 \text{ m/s}}{\sqrt{0.02}} = 7.778 \text{ m/s} = 7.778 \text{ m/s} \left(\frac{3600 \text{ s/h}}{1.852 \text{ E}(3) \text{ m/naut. mi.}} \right)$$

$$= 15.12 \text{ naut. mi./h}$$

Una velocidad de una milla náutica por hora (*mi. naut./h*) se conoce como *nudo*.

(b) Para encontrar la resistencia al avance de las olas para el modelo, primero se calcula la resistencia al avance debida a la fricción sobre una placa plana con $L_m = 2 \text{ m}$ como longitud y área $(A_w)_m = 0.9 \text{ m}^2$ a una velocidad $V_m = 1.1 \text{ m/s}$, usando la ecuación 7.20 para el coeficiente C_D de resistencia al avance:

$$(Re_L)_m = \frac{V_m L_m}{\nu} = \frac{(1.1 \text{ m/s})(2 \text{ m})}{1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 2.2\text{E}(6)$$

$$(C_D)_m = \frac{0.455}{[\log(Re_L)_m]^{2.58}} = \frac{0.455}{[\log(2.2\text{E}(6))]^{2.58}} = 3.874\text{E}(-3)$$

$$(D_f)_m = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 A_w \right)_m (C_D)_m = [0.5(1\text{E}(3) \text{ kg/m}^3)(1.1 \text{ m/s})^2(0.9 \text{ m}^2)][3.874\text{E}(-3)]$$

$$= 2.11 \text{ N}$$

$$(D_w)_m = D_m - (D_f)_m = 2.66 \text{ N} - 2.11 \text{ N} = 0.55 \text{ N}$$

Puesto que los números de Froude del modelo y del prototipo son los mismos, sus coeficientes de resistencia también serán iguales:

$$\left(\frac{D_w}{\rho g V} \right)_m = \left(\frac{D_w}{\rho g V} \right)_p$$

$$(D_w)_p = (D_w)_m \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{V_p}{V_m} \right) = (0.55 \text{ N})(1.03)(50)^3 = 7.081\text{E}(4) \text{ N}$$

ya que $V_m = (SR)^3 V_p$. A esta resistencia de las olas debe agregársele la resistencia al avance debida a la fricción en una placa plana de longitud $L_p = 100 \text{ m}$ y área $(A_w)_p = (0.9 \text{ m}^2)(50)^2 = 2250 \text{ m}^2$ a una velocidad $V_p = 7.778 \text{ m/s}$:

$$(Re_L)_p = \frac{(7.778 \text{ m/s})(100 \text{ m})}{1\text{E}(-6) \text{ m}^2/\text{s}} = 7.778\text{E}(8)$$

$$(C_D)_p = \frac{0.455}{[\log(Re_L)_p]^{2.58}} = \frac{0.455}{[\log(7.788\text{E}(8))]^{2.58}} = 1.621\text{E}(-3)$$

$$(D_f)_p = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 A_w \right)_p (C_D)_p$$

$$= [0.5(1.03E(3) \text{ kg/m}^3)(7.778 \text{ m/s})^2(2250 \text{ m}^2)][1.621E(-3)]$$

$$= 1.136E(5) \text{ N}$$

$$\mathcal{D}_p = (\mathcal{D}_w)_p + (\mathcal{D}_f)_p = 7.081E(4) \text{ N} + 1.136E(5) \text{ N} = 1.844E(5) \text{ N}$$

(c) La potencia \mathcal{P}_p es:

$$\mathcal{P}_p = \mathcal{D}_p V_p = 1.844E(5) \text{ N} \times 7.778 \text{ m/s} = 1.434 \text{ MW}$$

Hélices y turbinas eólicas

Las hélices de barcos y aviones deben probarse en túneles hidrodinámicos y aerodinámicos a una escala geométrica más pequeña que la de sus prototipos. Si bien la completa semejanza dinámica es posible, por lo común las pruebas con los modelos se realizan con un número de Reynolds más pequeño que el del prototipo a fin de reducir al mínimo los requisitos de potencia del túnel.

En el caso de las hélices, las variables dependientes de interés son la fuerza de empuje F_p y la potencia de entrada P_p . Éstas son funciones de las variables independientes, la velocidad de vuelo V_f , la densidad del aire ρ , la viscosidad μ , el diámetro D de la hélice y la velocidad angular Ω :

$$\begin{aligned} F_p &= f_F \{V_f, \rho, \mu, D, \Omega\} \\ P_p &= f_P \{V_f, \rho, \mu, D, \Omega\} \end{aligned} \quad (10.57)$$

Puesto que las dimensiones de las variables comprenden las tres dimensiones, \mathcal{M} , \mathcal{L} y \mathcal{T} , es posible reducir el número de variables independientes en un análisis dimensional de cinco a dos, eligiendo tres de ellas como las variables seleccionadas. Si se eligen ρ , Ω y D para este propósito, se encuentran las formas adimensionales de 10.57 que siguen:

$$\begin{aligned} C_T &\equiv \frac{F_p}{\rho \Omega^2 D^4} = \mathcal{F}_F \left\{ \frac{\rho \Omega D^2}{\mu}, \frac{V_f}{\Omega D} \right\} \\ C_P &\equiv \frac{P_p}{\rho \Omega^3 D^5} = \mathcal{F}_P \left\{ \frac{\rho \Omega D^2}{\mu}, \frac{V_f}{\Omega D} \right\} \end{aligned} \quad (10.58)$$

las cuales definen el *coeficiente de empuje* C_T y el *coeficiente de potencia* C_P y en las cuales las variables independientes son un número de Reynolds $\rho(\Omega D)D/\mu$ y el recíproco de un número de Strouhal, $V_f/\Omega D$.

Las hélices de los aviones producen el empuje y la potencia máximos durante el despegue ($V_f/\Omega D$ pequeño), pero en condiciones de vuelo a altitud, el empuje y la potencia son menores; los coeficientes de empuje y potencia son, en general, funciones decrecientes de $V_f/\Omega D$. En condiciones de funcionamiento próximas al diseño, estos coeficientes dependen sólo muy poco del número de Reynolds.

La eficiencia de propulsión η_{hel} es la razón de la potencia entregada al vehículo, $F_p V_f$, a la potencia del eje de la hélice, P_p , y puede relacionarse con los coeficientes de empuje y potencia mediante las ecuaciones 10.58:

$$\eta_{hel} \equiv \frac{F_p V_f}{P_p} = \left(\frac{V_f}{\Omega D} \right) \frac{C_T}{C_P} \quad (10.59)$$

Puesto que η_{hel} no puede ser mayor que la unidad, $C_P \geq (V_f/\Omega D)C_T$.

Para una completa semejanza dinámica, los números de Reynolds y Strouhal del modelo y su prototipo deben ser iguales. Si se supone que ρ/μ son iguales, esto requiere que:

$$\begin{aligned} (\Omega D^2)_m &= (\Omega D^2)_p \\ \left(\frac{V_f}{\Omega D} \right)_m &= \left(\frac{V_f}{\Omega D} \right)_p \end{aligned} \quad (10.60)$$

lo cual puede satisfacerse si se elige Ω_m y $(V_f)_m$ de forma que:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \Omega_p \left(\frac{D_p}{D_m} \right)^2 \\ (V_f)_m &= (V_f)_p \left(\frac{D_p}{D_m} \right) \end{aligned} \quad (10.61)$$

Las condiciones 10.61 exigen que la velocidad del modelo, V_f , sea mayor que la del prototipo por un factor de SR^{-1} , lo cual puede introducir efectos de compresibilidad en el experimento con el modelo, y que la potencia del modelo sea mayor que la del prototipo por el mismo factor, lo cual es un requisito poco práctico. En general, la prueba con el modelo se realiza con el número de Reynolds máximo disponible que resulte práctico en el túnel, y en la prueba con el modelo sólo se reproduce el recíproco del número de Strouhal del prototipo, $V_f/\Omega D$.

Los coeficientes de empuje y potencia y la eficiencia de una hélice característica de un barco se presentan en la figura 10.3, como función de la velocidad adimensional de avance. Tanto el empuje como la potencia disminuye con el aumento de la velocidad, pero la eficiencia aumenta a su máximo sólo muy poco antes de que la velocidad con la cual el empuje resulta ser cero.

En el caso de las hélices de barcos, la cavitación puede ser importante, por lo que el número de cavitación $Ca \equiv (p_\infty - p_v)/\rho\Omega^2 D^2$ debe hacerse igual para el modelo y su prototipo. Esto se logra al ajustar el nivel de presión p_∞ en la sección de prueba del túnel para la hélice. En la figura 10.4, se aprecia la fotografía de un flujo con cavitación alrededor del modelo de la hélice de un barco.

Para las turbinas eólicas, el empuje axial tiene poco interés. Sin embargo, la potencia de la turbina, P_{wt} , se hace adimensional al dividirla entre el flujo de energía cinética a través del área $\pi D^2/4$ de la hélice (véase la ecuación 5.21):

$$(C_P)_{wt} \equiv \frac{P_{wt}}{(1/2)\rho V_w^3 (\pi D^2/4)} = \mathcal{F}_{wt} \left\{ \frac{\rho\Omega D^2}{\mu}, \frac{V_w}{\Omega W} \right\} \quad (10.62)$$

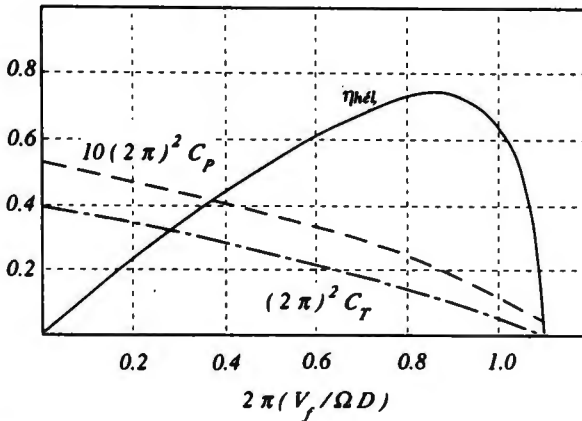


Figura 10.3 Coeficiente de empuje $(2\pi)^2 C_T$, coeficiente de potencia $10(2\pi)^2 C_P$ y eficiencia $\eta_{hélice}$ para el modelo de una hélice de un barco en función de la razón $2\pi(V_f/\Omega D)$. (Reimpresión con permiso de E. V. Lewis, *Principles of Naval Architecture, Second Revision*, vol. 2, Jersey City, N. J.: Sociedad de Arquitectos Navales e Ingenieros Marinos, ed. 1986.)

con lo que se define el *coeficiente de potencia de la turbina eólica* $(C_P)_{wt}$. Por lo general, las turbinas eólicas se encargan de accionar un generador de inducción a velocidad constante de forma que el recíproco del número de Strouhal, $V_w/\Omega D$, varía sólo con la velocidad V_w del viento. Al igual que en el caso de las hélices, por lo general las pruebas con modelos de turbinas eólicas no reproducen el número de Reynolds del prototipo, sólo el número de Strouhal.

Ejemplo 10.4

En un túnel aerodinámico, se prueba el modelo de una turbina eólica. Su mejor desempeño se presenta cuando $(V_w/\Omega D)_m = 0.1$, en cuyo caso el coeficiente de potencia es $(C_P)_m = 0.50$. Para un flujo semejante por una turbina prototipo que presenta una velocidad del viento $V_w = 10 \text{ m/s}$, ¿cuál sería el diámetro D_p de la turbina y la velocidad Ω_p de su flecha que el lector recomendaría a fin de producir una potencia $(P_{wt})_p = 100 \text{ kW}$?

Solución

Si se advierte que el prototipo tiene los mismos valores de $(V_w/\Omega D)_p = 0.1$ y $(C_P)_p = 0.50$ que el modelo, al reordenar la ecuación 10.62, es posible resolver para Ω_p ,

$$P_{wt} = C_P(1/2)\rho V_w^3(\pi D^2/4) = C_P \left(\frac{\pi}{8}\right) \rho V_w^3 D^2 = C_P \frac{\pi}{8} \rho \frac{V_w^5}{\Omega^2} \left(\frac{\Omega D}{V_w}\right)^2$$

$$\Omega_p^2 = \left\{ \frac{\pi C_P \rho V_w^5}{8 P_{wt}} \left(\frac{\Omega D}{V_w}\right)^2 \right\}_p = \frac{\pi(0.5)(1.2 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s})^5}{8(1E(5) \text{ W})(0.1)^2} = 23.56 \text{ s}^{-2}$$

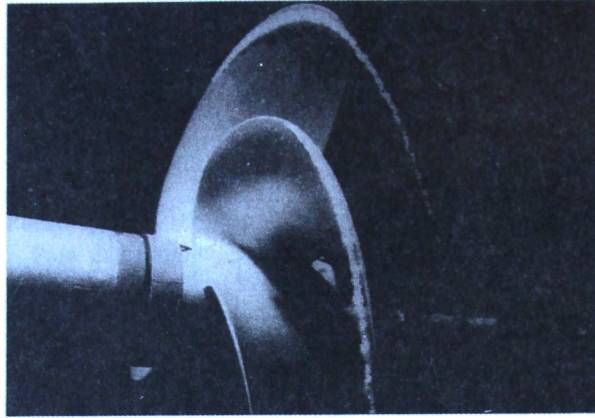


Figura 10.4 Modelo de la hélice de un barco en un túnel la cual presenta la cavitación que se forma en la cara frontal de la punta de la hélice, donde la presión es inferior a la de la presión de vapor del agua. La estela helicoidal de las burbujas permite apreciar por donde se movió el fluido de la punta en tiempos anteriores. (Fotografía cortesía del Profesor J. E. Kerwin, MIT.)

$$\Omega_p = 4.854 \text{ s}^{-1} = 4.854 \text{ s}^{-1} \times \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} \times \frac{\text{rev}}{2\pi \text{ rad}} = 46 \text{ RPM}$$

y luego, al despejar D_p :

$$D_p = \left\{ \left(\frac{\Omega D}{V_w} \right) \frac{V_w}{\Omega} \right\}_p = \frac{10 \text{ m/s}}{0.1(4.854 \text{ s}^{-1})} = 20.6 \text{ m}$$

Bombas e hidroturbinas

Las bombas, ventiladores e hidroturbinas centrífugas o de flujo axial procesan flujos de fluidos de gran volumen utilizando el efecto de altas velocidades periféricas de sus paletas a fin de cambiar la presión del flujo del fluido. En contraste con las bombas y motores de desplazamiento positivo, los cuales se valen del principio del pistón en movimiento dentro de un cilindro para cambiar la presión del fluido, las turbomáquinas alteran la cantidad de movimiento del fluido de trabajo a fin de producir un cambio de presión.

Una bomba aumentará la presión de un fluido una cantidad que depende del gasto volumétrico Q , las variables físicas de la bomba como son el diámetro D y la velocidad angular Ω , y las propiedades del fluido como son la densidad ρ y la viscosidad μ . Si se mide el aumento de presión de la bomba por medio del cambio en la carga hidráulica h , o en forma más convencional, por el producto gh , entonces la relación dimensional entre la variable dependiente gh y las variables independientes puede representarse mediante:

$$gh = f_h \{Q, D, \Omega, \rho, \mu\} \quad (10.63)$$

Para convertir esta relación en su forma adimensional utilizando el análisis dimensional, se eligen D , Ω y ρ como las variables seleccionadas a fin de reducir a dos las cinco variables independientes:

$$C_h \equiv \frac{gh}{\Omega^2 D^2} = \mathcal{F}_h \left\{ \frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu} \right\} \quad (10.64)$$

lo cual define el *coeficiente de carga hidráulica* C_h . El gasto de volumen adimensional $Q/\Omega D^3$ se denomina el coeficiente de flujo C_Q :

$$C_Q \equiv \frac{Q}{\Omega D^3} \quad (10.65)$$

y la variable adimensional $\rho \Omega D^2 / \mu$ es el número de Reynolds para el flujo. Para números de Reynolds suficientemente grandes ($\geq 1E(5)$), el coeficiente de carga hidráulica C_h es casi independiente del número de Reynolds y, por lo tanto, sólo depende del coeficiente C_Q del flujo. El coeficiente de carga hidráulica C_h es, en general, máximo cuando $C_Q = 0$ y disminuye hacia cero conforme aumenta C_Q .

Otra variable dependiente de interés es la potencia P que se requiere para operar una bomba (o que es entregada a una hidroturbina). Mediante el análisis dimensional, puede encontrarse que la potencia adimensional C_P , que se conoce como *coeficiente de potencia*, se relaciona con C_Q y el número de Reynolds por medio de:

$$C_P \equiv \frac{P}{\rho \Omega^3 D^5} = \mathcal{F}_P \left\{ C_Q, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu} \right\} \quad (10.66)$$

Para un número de Reynolds alto, el coeficiente de potencia C_P depende sólo de C_Q y alcanza su valor máximo hacia el valor más alto de C_Q , para el cual $C_h = 0$.

A partir de las ecuaciones 10.64-10.66, es posible demostrar que la eficiencia de la bomba η_p , definida en la ecuación 8.18, se relaciona con los coeficientes de carga hidráulica, flujo y potencia mediante:

$$\eta_p \equiv \frac{\rho g Q h}{P} = \frac{C_Q C_h}{C_P} \quad (10.67)$$

Para una hidroturbina, la eficiencia de la turbina, η_t (véase ecuación 8.20), es el recíproco de 10.67:

$$\eta_t \equiv \frac{P}{\rho Q h} = \frac{C_P}{C_Q C_h} \quad (10.68)$$

La eficiencia de la bomba o turbina alcanza su máximo valor cuando el flujo a través de la turbomáquina mejor se parece al flujo para el cual fueron diseñados los álabes o paletas y los pasos del flujo. Esto tiene lugar, en general, a la mitad del intervalo de C_Q .

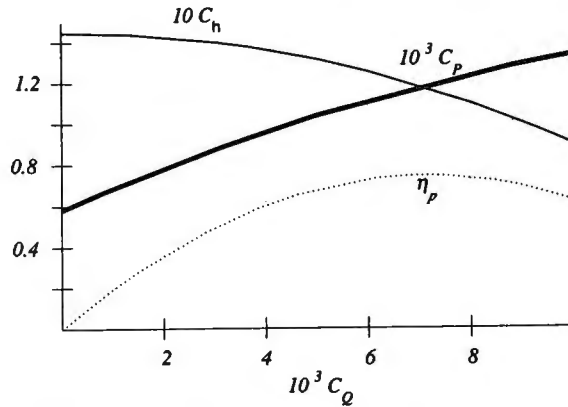


Figura 10.5 Gráfica de las características del comportamiento del modelo de una bomba. La ordenada de la línea continua gruesa es $10^3 C_P$, para la línea continua es $10 C_h$ y η_p corresponde a la ordenada de la línea punteada. La abscisa es $10^3 C_Q$. Para esta bomba, $N_s^* = 0.4$. (Datos y reimpresión con permiso de Val S. Lobanoff y Robert R. Ross, *Centrifugal Pumps: Design and Application*, [Houston: Gulf Publishing Co.] 1992. Reservados todos los derechos.)

Uno de los parámetros adimensionales independientes de D que se utilizan con frecuencia al seleccionar las bombas para los sistemas de la ingeniería es el de la *velocidad específica* N_s :

$$N_s \equiv \frac{Q^{1/2} \Omega}{(gh)^{3/4}} = \frac{C_Q^{1/2}}{C_h^{3/4}} \quad (10.69)$$

donde el último término en 10.69 se obtiene utilizando las ecuaciones 10.64 y 10.65 a fin de eliminar gh y Q en la definición de N_s . El cuadrado de la velocidad específica, $(N_s)^2$, es aproximadamente la razón de la velocidad axial promedio del flujo a la velocidad de las puntas del rotor. El valor N_s en la condición de máxima eficiencia, que se denota por N_s^* , se encuentra entre 0.3, para el caso de las máquinas centrífugas, y 4.0, para el caso de máquinas de flujo axial puro, en tanto que los valores intermedios se aplican a máquinas de flujo mixto.

Si se pretende elegir una bomba con el propósito de que proporcione un gasto Q dado con una carga hidráulica h , entonces la ecuación 10.69 puede utilizarse para encontrar la velocidad Ω del motor de la bomba si se conoce el valor de N_s^* para el tipo de bomba que se esté considerando. El diámetro D de la bomba y la potencia P de la bomba pueden, así, calcularse a partir de los valores de C_h^* y C_Q^* para este tipo de bomba.

En la figura 10.5 se presentan los coeficientes de la carga hidráulica y de la potencia y la eficiencia del modelo de una bomba centrífuga en función del coeficiente del flujo. Para los coeficientes del flujo mayores que se ilustran en la figura, tanto el coeficiente de la carga hidráulica como la eficiencia disminuirán más.

Ejemplo 10.5

Pretende utilizarse una bomba que reúne las características que se aprecian en la figura 10.5 para bombear 1000 GPM de agua contra una carga hidráulica de 100 m. Si se supone que la bomba funciona a su máxima eficiencia, calcule la velocidad de la bomba Ω , su diámetro D y su potencia P .

Solución

A partir de los valores que se leen en la figura 10.5 en el punto máximo de eficiencia, $C_Q = 7E(-3)$, $C_h = 0.116$ y $C_P = 1.16E(-3)$. Advirtiéndose que $Q = (1000 \text{ gal/min}) (\text{min}/60 \text{ s}) (3.785E(-3) \text{ m}^3/\text{gal}) = 6.308E(-2) \text{ m}^3/\text{s}$, se utiliza la ecuación 10.69 para encontrar Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{(gh)^{3/4} (C_Q)^{1/2}}{Q^{1/2} C_h^{3/4}} = \frac{[(9.807 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})]^{3/4} [7E(-3)]^{1/2}}{[6.308E(-2) \text{ m}^3/\text{s}]^{1/2} [0.116]^{3/4}} \\ &= 2.937E(2) \text{ s}^{-1} = [2.937E(2) \text{ s}^{-1}] \left(\frac{60 \text{ s}}{2\pi} \right) = 2805 \text{ RPM}\end{aligned}$$

De la ecuación 10.65, se calcula el diámetro D :

$$D = \left(\frac{Q}{\Omega D} \right) = \frac{6.308E(-2) \text{ m}^3/\text{s}}{[2.937E(2) \text{ s}^{-1}] [7E(-3)]} = 0.3131 \text{ m}$$

y de la ecuación 10.66, se calcula la potencia:

$$P = \rho \Omega^3 D^5 C_P = [1E(3) \text{ kg/m}^3] [2.937E(2) \text{ s}^{-1}]^3 [0.3131 \text{ m}]^5 [1.16E(-3)] = 88.43 \text{ kW}$$

10.4 Resistencia al avance

La fuerza de resistencia al avance \mathcal{D} que se requiere para mover un cuerpo a una velocidad constante V por un fluido viscoso es una función de la forma del cuerpo, de su tamaño L y velocidad V y de las propiedades del fluido, ρ y μ . El análisis dimensional común conduce a una relación entre el coeficiente C_D de resistencia al avance y el número de Reynolds Re_L :

$$C_D \equiv \frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho V^2 A} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\rho V L}{\mu} \right\} \quad (10.70)$$

donde L es la dimensión del cuerpo en la dirección del flujo y A es una área conveniente para el cuerpo, ya sea el área superficial del cuerpo o el área del cuerpo al proyectarla

sobre un plano normal al flujo (en el caso de cuerpos romos).¹⁶ Se ha probado una inmensa variedad de cuerpos en túneles aerodinámicos e hidrodinámicos a fin de determinar sus fuerzas de resistencia al avance y otras interesantes propiedades del flujo que los rodea. Para cada forma, el resultado de esas pruebas puede representarse mediante una gráfica del coeficiente de resistencia al avance como función del número de Reynolds.

Para ilustrar la relación entre el coeficiente de resistencia al avance y el número de Reynolds, se considerarán tres formas simples de cuerpos: (i) una esfera con diámetro D , (ii) un cilindro con diámetro D y longitud $L \gg D$ cuyo eje es normal a la dirección del flujo y (iii) una placa plana, alineada con el flujo de longitud D y en la dirección a éste, y que tiene una longitud $L \gg D$ en la dirección normal. Los coeficientes de resistencia al avance para estos cuerpos se presentan en la figura 10.6 como función del número de Reynolds $\rho VD/\mu$. (Para la esfera, $A = \pi D^2/4$, en tanto que en el caso del cilindro, $A = DL$, donde L es igual a la longitud del cilindro. Para una placa plana, $A = 2DL$ es el área superficial de la placa.)

En fluencia, o flujo de Stokes, cuando $Re_D \ll 1$, se cuenta con soluciones analíticas para un flujo viscoso. En el caso de una esfera, la fuerza de resistencia al avance está dada por la ecuación 6.62, y el coeficiente de resistencia al avance es:

$$(C_D)_{esfera} = \frac{24}{Re_D} \quad \text{si } Re_D \ll 1 \quad (10.71)$$

en tanto que para un cilindro,¹⁷

$$(C_D)_{cil} = \frac{8\pi}{Re_D \ln(7.4/Re_D)} \quad \text{si } Re_D \ll 1 \quad (10.72)$$

Estos valores concuerdan bastante con las mediciones cuando $Re_D \leq 1$. En este caso, el campo de flujo es casi simétrico en la dirección del flujo y las contribuciones más o menos iguales a la resistencia al avance se deben a la presión y esfuerzo viscoso sobre la superficie del cuerpo.

Para números de Reynolds mayores, $1 < Re_D < 100$, junto al cuerpo, detrás de él, se desarrolla un flujo de baja velocidad, que se conoce como estela y dentro de ésta circula, en su mayoría, el mismo fluido siguiendo un patrón simétrico. Hacia el extremo más alto de este intervalo, la estela se convierte en no estacionaria con una frecuencia de movimiento bien definida, momento en el cual porciones del fluido de la estela se separan de ésta obedeciendo un mismo patrón que se conoce como *tren (o cola) de vórtice*. Para un cilindro, se encuentra empíricamente que el número de Strouhal, formado a partir de esta frecuencia f , depende del número de Reynolds:

¹⁶ Para un cuerpo cercano a una superficie libre, el número de Froude sería también una variable adimensional independiente, como sería el caso del número de Mach si el flujo fuera compresible.

¹⁷ Véase G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge: Cambridge University Press.) 1867.

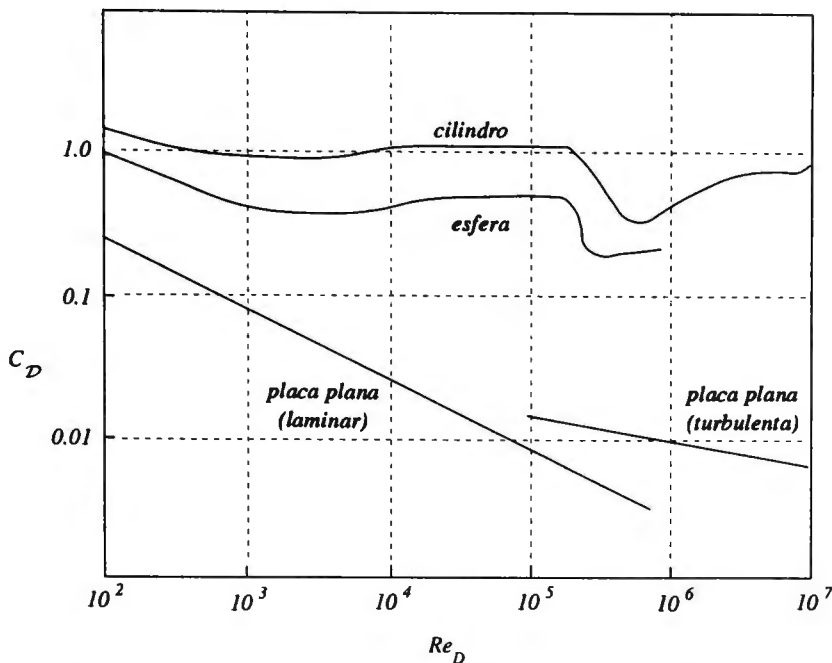


Figura 10.6 Coeficientes de resistencia al avance C_D de una esfera, un cilindro circular y una placa plana con dimensiones D graficados en función del número de Reynolds $Re_D \equiv \rho V D / \mu$. (Reimpresión con permiso de Macmillan Publishing Company, de Rolf H. Sabersky, Allan J. Acosta y Edward G. Hauptmann, *Fluid Flow. A First Course in Fluid Mechanics*, 3a. ed. Derechos Reservados 1989 por Mcmillan Publishing Company.)

$$\left(\frac{fD}{V}\right)_{cil} = 0.198 \left(1 - \frac{19.7}{Re_D}\right) \quad (10.73)$$

que alcanza el valor constante de 0.198 para números grandes de Reynolds. En forma semejante, pero menos regular, se desarrollan estelas detrás de una esfera. En el extremo superior de este intervalo de números de Reynolds, la componente de la resistencia al avance debida a la fuerza de presión que incide sobre la superficie del cuerpo, conocida como *resistencia al avance de la forma*, da cuenta de casi toda la resistencia al avance pues la otra componente, debida al esfuerzo cortante viscoso sobre la superficie, se hace relativamente pequeña con el aumento en el número de Reynolds, como sucede con una placa plana (véanse las ecuaciones 6.89-6.90). La presión en la estela es casi la misma que la que está presente lejos del cuerpo, por lo que la diferencia de presión promedio entre la parte delantera y trasera del cuerpo es, más o menos, $(1/2)\rho V^2$ y el coeficiente de resistencia al avance se aproxima a la unidad.

Para números de Reynolds aún mayores, $100 < Re_D < 10^5$, los coeficientes del flujo y de resistencia al avance muestran poca dependencia del número de Reynolds. En la parte del frente del cuerpo, se desarrolla una delgada capa límite laminar que, con el tiempo, se separa del cuerpo, formando el borde externo de la región de estela. La región de estela se hace turbulenta para $Re_D \geq 10^3$ y su tamaño y presión permanecen constantes

hasta que $Re_D \simeq 2E(5)$, cuando la capa límite de la parte frontal del cuerpo se hace turbulenta. Cuando esto sucede, el punto de separación se desplaza hacia la parte de atrás del cuerpo y el tamaño de la estela se reduce mucho. La resistencia al avance (y el coeficiente de resistencia al avance) se reducen en forma importante con sólo un ligero aumento en el número de Reynolds. Una vez que la capa límite se ha hecho por completo turbulenta, una reducción ulterior en el número de Reynolds produce un pequeño cambio en las propiedades del flujo y el coeficiente de resistencia al avance.

Los marcados cambios en el flujo a $Re_D \sim 10^5$ suceden en cuerpos lisos, achatados que poseen una capa límite separada que da lugar a una región de estela detrás del cuerpo, donde el proceso de separación puede verse muy afectado por la transición al estado turbulento del flujo en el punto de separación o cerca de él. Es posible reducir el número de Reynolds para el cual se presenta esta transición haciendo rugosa la superficie del cuerpo, con lo cual se reduce la resistencia al avance por debajo de su valor en la superficie lisa sobre un intervalo limitado de números de Reynolds cuyo centro se encuentra en $Re_D \sim 10^5$.¹⁸

Ahora, se regresará a la resistencia al avance en una placa plana alineada con el flujo. En un flujo de Stokes ($Re_D \ll 1$) el coeficiente de resistencia es:¹⁹

$$(C_D)_{fp} = \frac{4\pi}{Re_D \ln(24.4/Re_D)} \quad \text{si } Re_D \ll 1 \quad (10.74)$$

Esto difiere poco de la resistencia al avance en un cilindro circular, ecuación 10.72, si se toma en cuenta la diferencia en el área \mathcal{A} de referencia.²⁰ Esto refleja el hecho de que, en el flujo de Stokes, la resistencia al avance no se ve muy afectada por la forma del cuerpo. En un régimen de capa límite laminar, $10 < Re_D < 10^5$, el coeficiente de resistencia al avance en una placa plana está dado por la ecuación 6.93:

$$C_D = \frac{1.3282}{\sqrt{Re_D}} \quad (10.75)$$

Este coeficiente de resistencia al avance en una placa plana siempre es inferior al de formas romas, caso de la esfera y el cilindro circular, y es así en mayor medida para números de Reynolds mayores. Incluso cuando la capa límite de una placa plana se convierte en turbulenta ($Re_D \gg 10^5$), $(C_D)_{fp}$ (ecuación 7.20 y figura 7.5), este número sigue siendo considerablemente menor que el correspondiente a cuerpos de formas romas. Esta diferencia de comportamiento entre una placa plana y un cilindro circular o esfera surge del hecho de que la resistencia al avance de la forma de una placa plana es cero y de que la resistencia completa al avance es producto del esfuerzo cortante

¹⁸ Se dice que las pelotas de golf con hoquedades presentan este efecto.

¹⁹ Véase H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6a. ed. (Nueva York: Dover Publications) 1945.

²⁰ Si se define \mathcal{A} en el coeficiente de resistencia al avance (ecuación 10.70) como el área superficial del cuerpo, entonces C_D debe dividirse entre π y 4, respectivamente para el cilindro circular y la esfera de la figura 10.6 y las ecuaciones 10.72-10.71.

tangencial que incide en la superficie de la placa. Para $Re_D \gg 1$, el coeficiente de resistencia de los cuerpos redondeados es del orden de la unidad debido a que el flujo separado produce una estela con presión ambiente detrás del cuerpo.

Es posible impedir la formación de un flujo separado proporcionando una forma fuselada o aerodinámica al cuerpo, v.g., redondeando las esquinas puntiagudas y aumentando la dimensión en el sentido de la corriente en comparación con la dimensión transversal. Un cuerpo fuselado delgado tiene un coeficiente de resistencia al avance mucho más cercano al de una placa plana que un cilindro circular. Para un número grande de Reynolds, resulta redituable hacer los cuerpos aerodinámicos a fin de aprovechar la reducción que se logra en la resistencia al avance.

Blevens²¹ proporciona valores de C_D de cuerpos de formas diferentes para un número de Reynolds que se haya seleccionado.

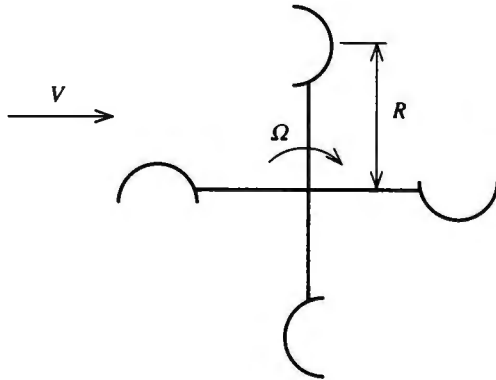


Figura E 10.6

Ejemplo 10.6

Un anemómetro de copas giratorio mide la velocidad del viento. Este dispositivo consta de cuatro copas semiesféricas unidas al extremo de dos brazos cruzados que, como se ilustra en la figura E 10.6, giran en el viento en la dirección de las manecillas del reloj con una velocidad angular Ω que se mide mediante un frecuencímetro eléctrico. Cuando está en la posición de la figura E 10.6, la copa superior de cara contra el viento (en la parte superior de la figura) tiene un coeficiente de resistencia al avance $(C_D)_u = 1.4$, en tanto que las tres copas restantes, que apuntan a favor del viento respecto de sus flujos relativos, tienen los mismo coeficientes de resistencia al avance, $(C_D)_d = 0.4$. Si se advierte que el momento de torsión neto T ocasionado por las fuerzas de resistencia al

²¹ R. D. Blevens, *Applied Fluid Dynamics Handbook* (Nueva York: Van Nostrand Reinhold), 1984.

avance de las copas es cero, calcule la velocidad angular adimensional $\Omega R/V$ con la cual gira el anemómetro.

Solución

El momento de torsión T debido a cada copa es:

$$T = R \left(\frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 A C_D \right) = \frac{1}{2} \rho R A (C_D V_{rel}^2)$$

donde V_{rel}^2 es la velocidad relativa a la copa. Si se suman los momentos de torsión de las cuatro copas,

$$T = \frac{1}{2} \rho R A [(C_D)_u (V - \Omega R)^2 - (C_D)_d (V + \Omega R)^2 - 2(C_D)_d (\Omega R)^2] = 0$$

$$\frac{(C_D)_u}{(C_D)_d} (V - \Omega R)^2 - [(V + \Omega R)^2 + (\Omega R)^2] = 0$$

lo cual debe resolverse para la razón $\Omega R/V$:

$$\left(\frac{\Omega R}{V} \right)^2 = \frac{(C_D)_u - (C_D)_d}{(C_D)_u + 4(C_D)_d} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\Omega R}{V} = 0.5774$$

Adviértase que el anemómetro funcionaría si se sustituyeran las copas por cualquier forma asimétrica achatada que tuviera diferentes coeficientes de resistencia al avance para el flujo hacia adelante y en sentido contrario. Las copas semiesféricas presentan una diferencia mayor en estos coeficientes de resistencia al avance que cualquier otra forma y, por lo tanto, proporcionan un valor mayor para $\Omega R/V$.

10.5 Fuerza ascensional o sustentación

Se tiende a pensar que el concepto de una fuerza ascensional aerodinámica o sustentación surgió cuando por primera vez se desarrollaron los planeadores y aviones a finales del siglo XIX y principios del XX. No obstante, tiempo atrás, los diseñadores de barcos de vela y molinos de viento ya contaban con una comprensión práctica de la fuerza ascensional, así como los ingenieros encargados de desarrollar las hélices de los barcos. Hoy en día, la caracterización cuantitativa de la fuerza ascensional está en el corazón del diseño de aviones, hélices, motores de avión, lanchas de vela, embarcaciones de hidroplaneo, bombas, hidroturbinas, turbinas eólicas y ventiladores.

Como se aprecia en la figura 10.7, la generación de una fuerza ascensional por un ala de avión colocada a un ángulo de ataque respecto del flujo que llega es una consecuencia de la alteración de las líneas de corriente del fluido que pasan por encima y por debajo del perfil

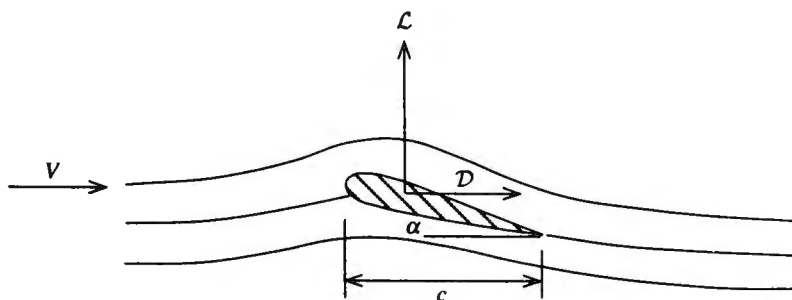


Figura 10.7 Líneas de corriente del flujo para un perfil aerodinámico para un ángulo de ataque α en un flujo estacionario de velocidad V . Las componentes de la fuerza en el perfil aerodinámico son la fuerza ascensional \mathcal{L} y la resistencia al avance \mathcal{D} .

aerodinámico y que se demuestra que son cóncavas hacia abajo. Para un flujo no viscoso estacionario, la presión disminuye hacia el centro de curvatura de una línea de corriente (ecuación 4.19), lo cual significa que la presión en la parte superior del perfil aerodinámico, o ala (que se conoce como lado de succión) es menor que la presión ambiente, en tanto que la presión en la superficie inferior (lado de presión) es mayor. Esta diferencia de presión da origen a la fuerza ascensional o sustentación \mathcal{L} , que se define como la componente de la fuerza total sobre el ala en la dirección normal al flujo que llega. La otra componente, en la dirección paralela al flujo que llega, es la fuerza de resistencia al avance \mathcal{D} .

Tanto la fuerza ascensional como las fuerzas de resistencia al avance dependen de la forma del perfil aerodinámico, su tamaño de cuerda c , la envergadura del ala s , la velocidad del aire V y el ángulo de ataque α , así como las propiedades del fluido, ρ y μ . Al aplicar el análisis dimensional a estas relaciones, se encuentra que los coeficientes de la fuerza ascensional y de la resistencia al avance dependen del número de Reynolds $\rho Vc/\mu$, el ángulo de ataque α y las razones s/c (conocidas como *razón de aspecto*):

$$C_{\mathcal{L}} \equiv \frac{\mathcal{L}}{(1/2)\rho V^2(cs)} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \left(\frac{\rho Vc}{\mu}, \alpha, \frac{s}{c} \right) \quad (10.76)$$

$$C_{\mathcal{D}} \equiv \frac{\mathcal{D}}{(1/2)\rho V^2(cs)} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \left(\frac{\rho Vc}{\mu}, \alpha, \frac{s}{c} \right) \quad (10.77)$$

donde el producto cs es el área del ala.

Para un número de Reynolds y razón de aspecto dados, los coeficientes tanto de la fuerza ascensional como de la resistencia al avance tienden a aumentar con el ángulo de ataque α , como se ejemplifica en la figura 10.8. Sin embargo, el coeficiente de resistencia al avance es mucho menor que el coeficiente ascensional, por cerca de un factor de diez.²² El coeficiente de resistencia al avance primero aumenta linealmente con α , pero luego alcanza su máximo valor, por lo común $C_{\mathcal{L}} \sim 1$, lo cual implica que

²² La disparidad en tamaño entre $C_{\mathcal{L}}$ y $C_{\mathcal{D}}$ resulta esencial en los vuelos económicos de aviones y para el ahorro de energía del vuelo de un pájaro.

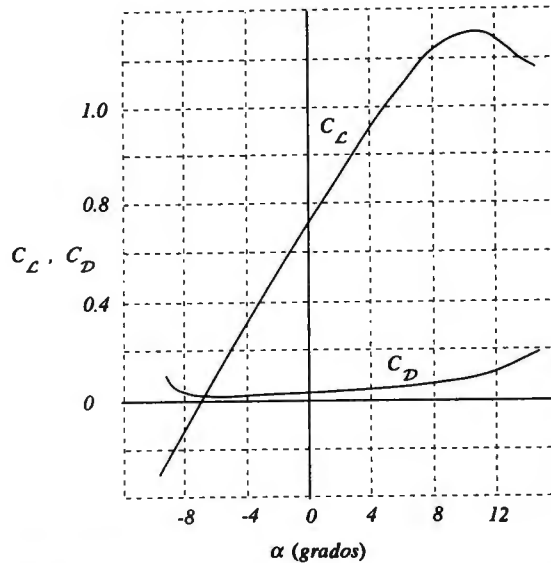


Figura 10.8 Coeficientes comunes de la fuerza ascensional y la resistencia al avance, C_L y C_D , contra el ángulo de ataque α para un ala. (De H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, 6a. ed., [Nueva York: McGraw-Hill Book Co.] 1968. Reimpresión con permiso de McGraw-Hill Book Co.)

la diferencia de presión promedio entre las superficies inferior (intradós) y superior (extradós) del perfil aerodinámico es, en términos aproximados, la presión dinámica, $(1/2)\rho V^2$. Esta nivelación de C_L es ocasionada por la separación de la capa límite de la superficie superior del perfil aerodinámico o extradós, con lo cual se crea una gran región de estela y la resistencia al avance aumenta mucho. A esta condición se le da el nombre de *entrar en pérdida*.

Si la razón de aspecto s/c del ala se reduce, el coeficiente de fuerza ascensional disminuye y el coeficiente de resistencia al avance aumenta. Estos cambios son provocados por la mayor influencia a lo largo de la envergadura del flujo oblitterante en la punta del ala. El aumento correspondiente en la resistencia al avance se conoce como *resistencia inducida al avance*.

Los aviones se diseñan para que vuelen en condiciones en las que la razón de la fuerza ascensional a la resistencia al avance, L/D , sea máxima, v.g., la resistencia al avance se reduce al mínimo para la cantidad de fuerza ascensional necesaria para superar la fuerza de la gravedad del avión y su carga. Sin embargo, en el despegue y aterrizaje, lo cual ocurre a velocidades más bajas que la velocidad de crucero en vuelo nivelado, ρV^2 es menor, y C_L debe ser proporcionalmente mayor a fin de mantener la misma fuerza ascensional. Esto se logra aumentando el ángulo de ataque para aumentar C_L y aplicando suficiente empuje de los motores para vencer los efectos de un C_D mucho mayor. En aviones de reacción comerciales, la fuerza ascensional durante el aterrizaje y el despegue se mejora al desplegar dispositivos hipersustentadores o flaps que aumentan tanto el área del ala como el C_L máximo, pero a costas de aumentar la resistencia al avance.

Estas mismas consideraciones gobiernan el diseño de los álabes o paletas en compresores de flujo axial. Sería conveniente hacer máxima la diferencia entre las componentes de la fuerza ascensional y las fuerzas de resistencia al avance en la dirección del movimiento de los álabes a fin de elevar al máximo el aumento de presión; no obstante, puesto que la presión aumenta en una etapa del compresor, el álabe es más susceptible a la separación del flujo, lo cual limita el ángulo de ataque más eficiente y el consiguiente aumento de presión que puede lograrse en una etapa.

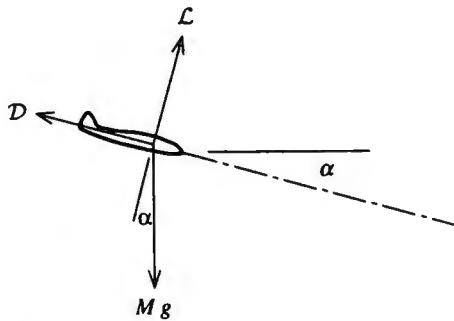


Figura E 10.7

Ejemplo 10.7

Un planeador planea con velocidad constante por aire tranquilo formando un ángulo α por debajo de la horizontal, como se ejemplifica en la figura E 10.7. Demuestre que α sólo depende de la razón C_L/C_D para el planeador.

Solución

Puesto que el planeador no está acelerando, las fuerzas aerodinámicas deben contrarrestar la fuerza de gravedad que experimenta el vehículo. La fuerza de gravedad, Mg , tiene una componente que contrarresta la fuerza ascensional \mathcal{L} y otra que equilibra la fuerza de resistencia al avance \mathcal{D} :

$$\mathcal{L} = Mg \cos \alpha$$

$$\mathcal{D} = Mg \operatorname{sen} \alpha$$

Eliminando Mg :

$$\alpha = \cot^{-1} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{D}} \right) = \cot^{-1} \left(\frac{C_L}{C_D} \right)$$

10.6 Problemas

Problema 10.1

Un investigador en medicina que estudia técnicas anticonceptivas, estudia la velocidad con la cual varios espermatozoides se impulsan por sí mismos. Puesto que su movimiento es un fenómeno de muy bajo número de Reynolds, el investigador reconoce que su velocidad V no depende de la densidad del fluido por el cual se mueven. Y, más aún, ya que muchas especies son, a grandes rasgos, parecidas, los principales parámetros que deben gobernar la velocidad de propulsión del espermatozoide son la longitud L del organismo, la viscosidad μ del fluido a través del cual se mueve el espermatozoide y la rapidez o razón de gasto de energía \dot{e} por unidad de volumen del organismo. (a) A partir de consideraciones dimensionales, deduzca la forma funcional de la dependencia de la velocidad V de propulsión respecto de L , μ y \dot{e} . (b) Si el espermatozoide empieza a contar con una energía total disponible e por unidad de volumen, deduzca una expresión para la distancia total ℓ que el espermatozoide puede viajar en términos de L , μ , e y \dot{e} .

Problema 10.2

Si se deja caer libremente una larga pieza rectangular de cartón o cartulina en el aire, se observa que gira con una frecuencia ω constante conforme cae. Si se supone que esta frecuencia depende de la longitud s del cartón, su anchura c , su masa por unidad de área Δ , la densidad del aire ρ , la viscosidad del aire μ y la aceleración de la gravedad g : (a) Defina una frecuencia de giro adimensional y determine los grupos adimensionales de los cuales depende el cuerpo de cartón. (b) Si la viscosidad μ y la longitud s de la cartulina carecen de importancia, determine cómo se ven afectados los resultados del punto (a). (c) Puede argumentarse algo más, que al ir cayendo el cartón a una velocidad vertical constante, existe un equilibrio entre la resistencia al avance por unidad de área y la fuerza de gravedad por unidad de área. La resistencia al avance sólo depende de las fuerzas aerodinámicas y, por consiguiente, de ρ , c y f solamente. Con esta información, obtenga una expresión exacta para la razón ω_A/ω_B de las frecuencias de giro en dos fluidos con densidades ρ_A y ρ_B diferentes.

Problema 10.3

Las gotas de lluvia se forman en nubes por condensación del vapor de agua alrededor de su núcleo. Al caer a través del aire, las gotas más grandes caen con mayor rapidez que las más pequeñas, alcanzando y fusionándose con éstas. Como resultado, una gota de mayor tamaño se hace todavía más grande por este proceso de aglomeración hasta que la fuerza de presión generada por el flujo de aire alrededor de ella supera la fuerza de tensión superficial que mantiene a la gota unida y ocasiona que se divida en gotas pequeñas. Esto mismo se repite hasta que la gota llega al suelo.

(a) Si se supone que el diámetro D de la gota grande para el cual se inicia la división de la gota depende de su velocidad U de caída libre, la densidad del aire ρ_a y la tensión superficial Υ , deduzca una expresión que relacione a D con estas otras variables. (b) Para una gota muy pequeña, se espera que su V de caída libre dependa de su

diámetro D , la viscosidad del aire μ_a y el producto $\rho_w g$, que es la fuerza de la gravedad por unidad de volumen de la gota. Deduzca una relación entre V y estas otras variables. Compare su respuesta con la ecuación 6.63 y explique la diferencia.

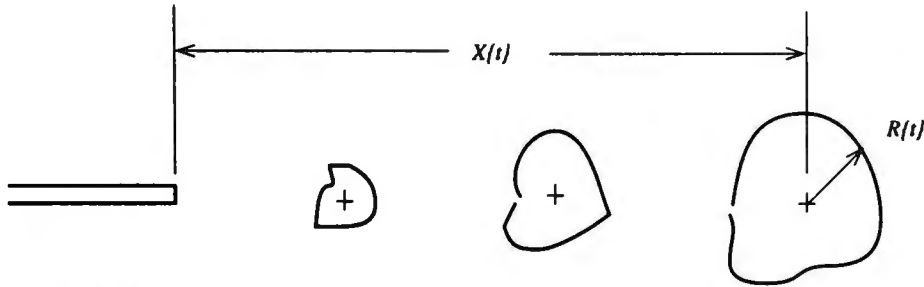


Figura P 10.4

Problema 10.4

Un soplo de aire marcado con humo, de pronto, por un tubo de diámetro pequeño, es expulsado a la atmósfera fija y de presión constante. Conforme el soplo se desplaza alejándose del extremo del tubo, éste aumenta de volumen por la mezcla turbulenta con el aire circundante, aunque conserva una forma esférica, en términos aproximados. A tiempos distintos después de haberse producido el soplo, éste ha avanzado una distancia $X\{t\}$ y se mide que su radio promedio es $R\{t\}$.

La expulsión del soplo imprime una cantidad de movimiento horizontal M total que permanece constante en el tiempo al mezclarse el soplo con el aire circundante. Puesto que la velocidad horizontal del soplo es dX/dt , la conservación de la cantidad de movimiento horizontal para el soplo puede escribirse aproximadamente como sigue:

$$\rho \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) \frac{dX}{dt} \simeq M$$

donde ρ es la densidad del aire.

La evolución del soplo adquiere la forma de un flujo turbulento no estacionario en el que las cantidades X y R observadas dependen del tiempo t y de los parámetros M y ρ , pero no de la viscosidad μ . Mediante el análisis dimensional, responda las siguientes preguntas. (a) Deduzca expresiones para la dependencia de X y R respecto a t , ρ y M . (b) Si se considera que la energía cinética por unidad de masa del soplo es proporcional a $(dX/dt)^2$, muestre cómo la energía cinética del soplo varía como función del tiempo t . (c) La razón de disipación de energía cinética es $\epsilon \simeq -(d/dt)(dX/dt)^2$. Determine cómo ϵ depende de t , ρ y M .

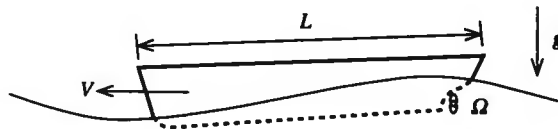
Problema 10.5

El colibrí es un modelo a escala lineal de 1/50 del albatros. Estos dos pájaros vuelan en un campo gravitatorio g en aire de densidad ρ_a , tienen la misma densidad promedio, ρ_b , y almacenan la misma energía por unidad de masa del pájaro, ϵ . El tamaño de cada pájaro puede caracterizarse por la envergadura d del ala.

(a) Determine el conjunto mínimo de variables independientes suficientes para especificar por completo la masa M de los dos pájaros. Calcule la razón de masa M_a de un albatros a la masa M_b de un colibrí. (b) Se ha sugerido que la frecuencia f con la cual el pájaro bate sus alas (aletea) debe depender a lo sumo de M , ϵ , ρ_b , d , g y ρ_a . Mediante el análisis dimensional, exprese una frecuencia adimensional de aleteo de un pájaro en términos de un conjunto de otras variables adimensionales. (c) Es posible que se cambie en forma artificial el valor efectivo de g sometiendo al pájaro a una aceleración vertical. Pruebas realizadas con colibríes muestran que la frecuencia de aleteo es proporcional a la raíz cuadrada del valor efectivo de g , manteniendo todo lo demás constante. Modifique su expresión del punto (b) para reflejar este hecho experimental. (d) Con base en su respuesta al punto (c), ¿cómo depende f de ϵ ? (e) Con base en su respuesta al punto (d), ¿cuál es la frecuencia de aleteo de un colibrí si un albatros aletea a 1 batido por segundo?

Problema 10.6

Se utiliza un túnel aerodinámico para determinar la resistencia al avance de un modelo para automóviles a escala de un cuarto ($SR = 1/4$). La longitud del modelo es $L_m = 1 \text{ m}$. La densidad $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$, la viscosidad $\mu = 2E(-5) \text{ Pa s}$ y la presión $p = 1E(5) \text{ Pa}$ del túnel aerodinámico son las mismas que las del flujo del prototipo. La velocidad V_m del vehículo de tamaño natural que se modelará en los experimentos del túnel aerodinámico es $V_p = 25 \text{ m/s}$. (a) Calcule la velocidad del viento V_m que se usará en las pruebas del modelo. (b) La fuerza de resistencia al avance del modelo que se midió a esta velocidad es de 600 N . Calcule la fuerza de resistencia al avance D_p del vehículo prototipo. (c) Después de extensas pruebas, se encuentra que el coeficiente de resistencia al avance del modelo, $(C_D)_m$, es independiente del número de Reynolds. El valor de dicho coeficiente, basado en una área de sección transversal $A_m = 0.19 \text{ m}^2$ del modelo, es $(C_D)_m = 0.50$. Calcule la potencia \mathcal{P}_p que se requiere para vencer la resistencia al avance debida al aire en el vehículo de tamaño natural. (d) Se prueba un modelo perfeccionado a la velocidad V_m dada en (a). Se encuentra que la potencia necesaria para hacer funcionar el túnel es mayor en 15 kW que cuando el modelo no estaba en el túnel, manteniendo todas las otras condiciones iguales. Calcule la potencia necesaria para vencer la resistencia al avance debida al aire del automóvil de tamaño natural de este nuevo diseño.

**Figura P 10.7**

Problema 10.7

Se probará un modelo autopropulsado de un barco de alta velocidad en un depósito de agua. El barco prototipo, cuyo modelo se probará, está diseñado para tener 150 m de longitud (L_p) y se espera que recorrerá 60 km/h (V_p) cuando la velocidad de la hélice (Ω) sea de 400 RPM . La longitud del modelo del barco es $L_m = 5\text{ m}$. En estas pruebas, a causa de la alta velocidad del barco, se considera que las fuerzas viscosas sobre el casco son despreciables comparadas con las fuerzas de presión. (a) ¿A qué velocidad (Ω_m) deberá hacerse girar la hélice del modelo a fin de modelar la velocidad del diseño, 400 RPM ? (b) Cuando se realiza la prueba con la velocidad de la hélice dada en (a), la velocidad del modelo es $V_m = 3\text{ m/s}$. ¿A qué velocidad V_p puede predecirse que el barco de tamaño completo funcionará? (c) Los diseñadores del barco están interesados en saber cómo se comportará el barco en presencia de las olas del mar. En condiciones de tormenta, se espera encontrar olas con una longitud $\lambda_p = 300\text{ m}$ y una altura $h_p = 10\text{ m}$. ¿Qué longitud de onda λ_m y altura h_m deben generarse en el depósito de agua del modelo para las pruebas que modelarán el comportamiento del prototipo? (d) En las pruebas que se realizan de acuerdo con los requisitos de (c), se mide un momento de flexión interno máximo (M_m) en la estructura del modelo del barco de $6E(5)\text{ Nm}$. ¿Cuál sería el momento de flexión M_p que podría predecir para el barco prototipo para estas condiciones?

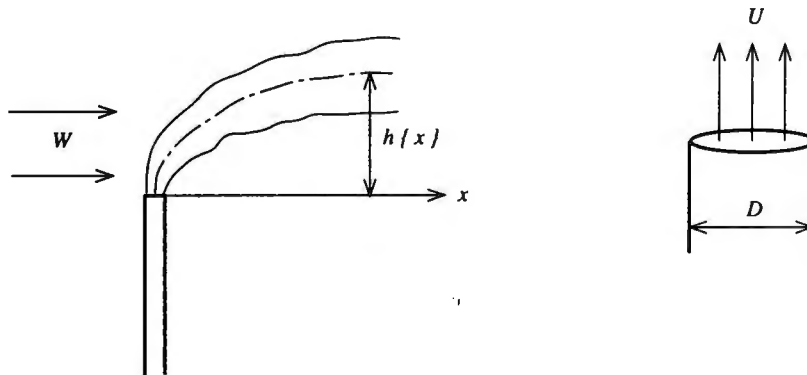


Figura P 10.8

Problema 10.8

Cuando sopla el viento por encima de una chimenea industrial, el gas caliente que sale de la chimenea se eleva verticalmente conforme es arrastrado en favor del viento, como se esquematiza en la figura P 10.8. Se desea modelar este flujo en un túnel aerodinámico mediante experimentos semejantes, desde el punto de vista dinámico, al flujo de tamaño completo.

El interés es determinar la altura $h(x)$ de la línea central de la columna de humo como función de la distancia x en dirección del viento medida desde la chimenea. De consideraciones físicas, se espera que la altura h dependa de x , la velocidad W del viento,

la velocidad U del gas en la salida de la chimenea, el diámetro D , la densidad del aire ρ_a , la densidad del gas de la chimenea, ρ_s , en su salida y la fuerza de gravedad g , pues el flujo experimenta un empuje ascendente. (Puesto que los flujos tanto del modelo como de tamaño natural son flujos turbulentos libres de esfuerzo cortante que poseen números de Reynolds grandes, no se espera que dependan de la viscosidad del fluido en forma significativa.)

(a) Deduzca un conjunto completo de variables adimensionales cuya igualdad para el modelo y el flujo de tamaño completo garantice una semejanza dinámica. (b) Suponiendo que el modelo del túnel aerodinámico tendrá los mismos valores para las densidades del flujo de tamaño completo, calcule la velocidad del viento en el túnel, W_m , y su velocidad U_m en la salida de la chimenea que se necesita para simular la velocidad $W_p = 5 \text{ m/s}$ del viento natural y la velocidad $U_p = 10 \text{ m/s}$ de salida cuando el diámetro D_m de la chimenea es una décima parte del valor del valor D_p del tamaño natural. (c) Se afirma que la altura h lejos de la salida de la chimenea sólo depende de la distancia x , la velocidad W del viento y un producto B (que se conoce como el flujo de empuje ascendente):

$$B \equiv gUD^2 \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_a} \right)$$

Si esto es cierto, deduzca una expresión explícita adimensional para la altura h como función de x . (d) Se está pensando tomar imágenes fotográficas en movimiento del modelo experimental utilizando una frecuencia alta de cuadros de Ω_m cuadros por segundo de forma que, cuando se proyecte la película a una velocidad normal de Ω_0 cuadros por segundo, se simulen los movimientos turbulentos en condiciones naturales, v.g., la película mostrará las frecuencias correctas de las turbulencias en condiciones naturales. ¿Cuál debe ser la razón Ω_m/Ω_0 si el túnel se hace funcionar en las condiciones descritas en (b)?

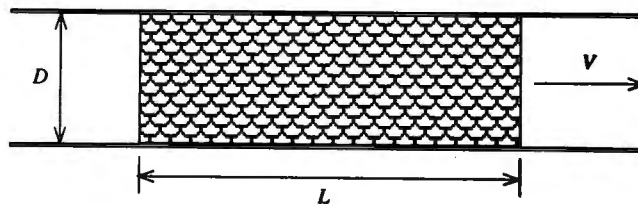


Figura P 10.9

Problema 10.9

A fin de amortiguar la turbulencia a gran escala, se llena una sección de una tubería de diámetro D con esferas de diámetro d para un tramo de longitud L , como se ilustra en la figura P 10.9. Las esferas permanecen fijas en su lugar mediante dos rejillas de malla fina, cuyos efectos pueden despreciarse. Se desea predecir la dependencia de la caída de presión Δp en esta sección respecto de la densidad ρ del fluido, la viscosidad μ , la velocidad media V y las longitudes d , D y L . Suponga que el fluido es incompresible.

(a) Exprese la relación funcional entre Δp y las variables restantes en forma adimensional. (b) Simplifique su respuesta dada al punto (a) para el caso en que los efectos de la pared sean despreciables cuando $d \ll D$. (c) Simplifique más su respuesta correspondiente a (b) para el caso en que los efectos debidos a los extremos (bordes) sean también pequeños ($d \ll L$). (d) Durante el funcionamiento de la tubería, se utilizará aire como fluido. A fin de determinar la caída de presión, se construye un modelo a escala de 1/10 y se prueba con agua como fluido. ¿Cuál debe ser la razón de la velocidad V_w del agua a la velocidad V_a del aire a fin de simular el flujo de aire con el modelo de agua? Bajo estas condiciones, ¿cuál será la razón de las caídas de presión, $\Delta p_a/\Delta p_w$?

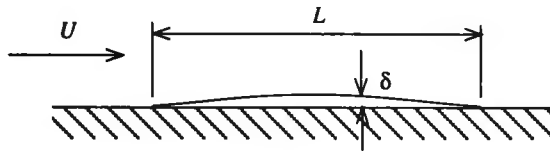


Figura P 10.10

Problema 10.10

En el secado por corriente de aire de una película delgada de líquido, éste se evapora y el aire en movimiento que pasa a lado de la superficie de la película arrastra y aleja el vapor, como se aprecia en la figura P 10.10. Se desea saber de qué forma el tiempo t de secado depende de la longitud L de la película y de su espesor δ , la presión de vapor p , la velocidad U del aire, la viscosidad μ del aire, y la densidad del aire ρ . (a) Deduzca un conjunto de variables adimensionales que relacionen el tiempo t de secado con el resto de las variables. (b) Se pretende diseñar un experimento de laboratorio para determinar el tiempo de secado de un campo de fútbol, donde $p_p = 2E(3) \text{ Pa}$, $L_p = 100 \text{ m}$, $\delta_p = 0.01 \text{ m}$ y $U_p = 2 \text{ m/s}$. En este experimento, la densidad del aire y la viscosidad serán las mismas que las del campo de fútbol, pero $L_m = 20 \text{ m}$. Calcule los valores de U_m , δ_m y p_m a fin de garantizar la semejanza dinámica con el flujo de tamaño natural. (c) Si el tiempo de secado medido en el experimento de laboratorio del punto (b) es $t_m = 10 \text{ min}$, calcule el tiempo t_p necesario para secar el campo de fútbol.

Problema 10.11

Se está desarrollando un nuevo diseño de una bomba giratoria, la cual se utilizará para subir agua subterránea desde un pozo a través de una altura H_p . El diámetro del rodete de la bomba es D_p y funcionará con una velocidad angular Ω_p . El aumento de la carga hidráulica de la bomba que se midió, gH , se espera que dependa del diámetro D , la velocidad angular Ω , la densidad ρ del fluido, su viscosidad μ y el gasto volumétrico Q . (a) Encuentre los grupos adimensionales que regulan el desempeño de la bomba. (b) Para estudiar el desempeño de la bomba, se construye un modelo a escala con diámetro $D_m = D_p/5$. Calcule las razones Q_m/Q_p y Ω_m/Ω_p que garantizarán que los flujos sean

dinámicamente semejantes cuando se utiliza agua en el experimento con el modelo. (c) Calcule los valores de H_m/H_p y P_m/P_p , donde P es la potencia de la bomba.

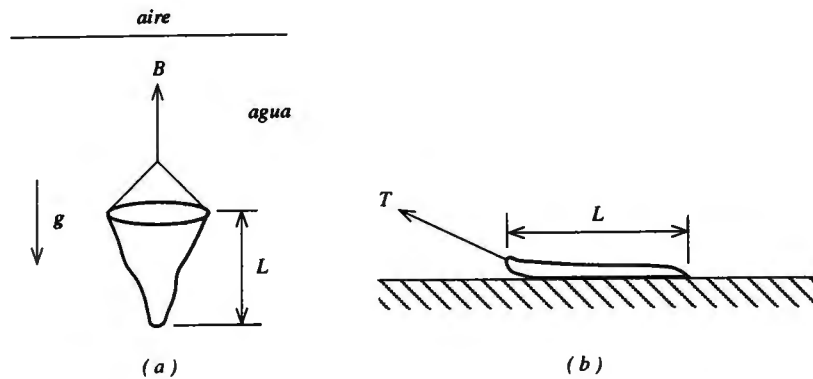


Figura P 10.12

Problema 10.12

Se utilizará un canal hidrodinámico para modelos de barcos que se utilizará con el fin de probar el remolque de una red de pesca a lo largo del fondo del mar. El tamaño de la red modelo será de una décima parte del tamaño de la red (prototipo) de tamaño natural. A fin de reproducir el comportamiento en condiciones naturales, en el modelo a escala, $(SG)_m = (SG)_p$ se utilizarán los mismo materiales que el prototipo, los cuales tendrán la misma densidad relativa SG , por sus siglas en inglés.

(a) Cuando la red está suspendida sin movimiento a un lado de una embarcación fija, la red ejerce una tensión B sobre el cable del remolque, como se aprecia en la figura P 10.12(a). Calcule la razón B_m/B_p de los valores de B para el modelo y el prototipo, si se supone que B depende de L , SG , g , y de la densidad ρ del agua. (b) Cuando la red se remolca a lo largo del fondo, como lo indica la figura P 10.12(b), se espera que la tensión T en la línea de remolque dependa de la velocidad V de remolque, la longitud L de la red, la densidad ρ del agua y la viscosidad μ , y de la fuerza B de inmersión. Por medio del análisis dimensional, deduzca dos variables adimensionales de las cuales dependa la tensión adimensional. (c) Se espera que el flujo alrededor de la red sea turbulento tanto para el prototipo como para el modelo, por lo que la tensión T no depende de ninguna manera de la viscosidad ni, por consiguiente, del número de Reynolds. Si esto es cierto, calcule la razón de velocidades V_m/V_p que relaciona las velocidades del modelo y del prototipo para flujos dinámicamente semejantes. (d) Después de una serie de experimentos con el modelo, se encuentra que la tensión T_m depende de la velocidad V_m de remolque de acuerdo con:

$$T_m = K_m V_m^2$$

donde K_m es una constante adimensional que tiene el valor $10 \text{ N s}^2/\text{m}^2$. ¿Qué valor recomendaría para K_p al capitán del barco de pesca de forma que él pudiera determinar la tensión T_p en función de la velocidad V_p del barco utilizando una fórmula similar?

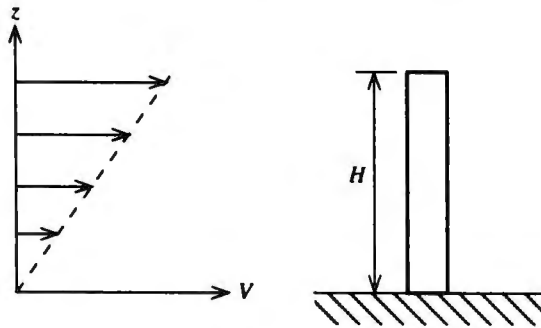


Figura P 10.13

Problema 10.13

Se pretende determinar las fuerzas aerodinámicas en un edificio alto mediante mediciones del modelo llevadas a cabo en un túnel aerodinámico. El campo de viento que se aproxima al edificio tiene un gradiente de velocidad constante dV/dz , como se ejemplifica en la figura P 10.13. Las variables independientes del flujo son, así, dV/dz , la altura del edificio, H , y la densidad del aire ρ . (Las variables independientes se determinarán para números de Reynolds suficientemente grandes, de forma que la viscosidad del aire carezca de importancia.) Se harán mediciones del momento T de la fuerza de resistencia aerodinámica al avance alrededor de la base del edificio y la presión $p\{z\}$ en función de la altura z respecto de la base.

(a) Por medio del análisis dimensional, exprese la forma de la relación funcional entre el momento adimensional T y cualquier número de variables independientes adimensionales que falten. (b) Se lleva a cabo una prueba del modelo para $(dV/dz)_m = 1 \text{ s}^{-1}$, $H_m = 1 \text{ m}$ y $\rho_m = 1.25 \text{ kg/m}^3$. La medición del valor correspondiente al momento arroja el resultado $T_m = 0.03 \text{ Nm}$. ¿Cuál será el valor numérico del prototipo para T_p' si $H_p = 100 \text{ m}$, $\rho_p = 1.25 \text{ kg/m}^3$ y $(dV/dz)_p = 0.30 \text{ s}^{-1}$? (c) Con el análisis dimensional, exprese la forma de la relación funcional entre la presión adimensional $p\{z\}$ y cualquier variable que falte. (d) Para las mismas condiciones de prueba del caso (b), se mide el aumento de presión $(p\{z\} - p_\infty)_m$ y es de 0.1 Pa para $z_m = H - m/2$. ¿Cuál será el aumento de presión del prototipo para $z_p = H_p/2$?

Problema 10.14

Un fabricante de bombas produce una bomba centrífuga cuyo rodete tiene un diámetro $D_m = 8$ in; la empresa afirma que esta bomba entregará un gasto volumétrico $Q_m = 300$ galones por minuto, lo cual es igual a $1.893E(-2) m^3/s$ de agua, con un aumento de presión $\Delta p_m = 60$ psi = $2.482E(7) Pa$ cuando gira a $\Omega_m = 3600$ revoluciones por minuto. En estas condiciones, se afirma que la eficiencia η_p de la bomba es del 85%.

(a) Calcule la potencia P_m que se requiere para hacer funcionar la bomba en estas condiciones. (b) El fabricante propone el desarrollo de una bomba geoméricamente semejante que es dos veces más grande en todas sus dimensiones lineales ($D_p = 2D_m$) y desea determinar los requisitos de aumento de presión y potencia de la bomba grande. Para que un flujo de agua en la bomba más grande sea dinámicamente semejante al de la bomba más pequeña, ¿cuáles deben ser los valores numéricos del gasto Q_p y la velocidad de rotación Ω_p ? (c) Para las condiciones de (b), ¿cuáles serán los valores numéricos del aumento de presión Δp_p y la potencia P_p ?

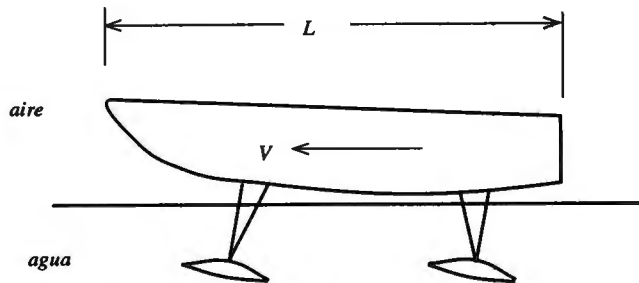


Figura P 10.15

Problema 10.15

Se prueba un modelo a escala de una embarcación con perfiles hidrodinámicos (superficie de reacción hidráulica) en un canal hidrodinámico para determinar la mínima velocidad V para la cual la embarcación se elevará hasta separarse del agua, de forma que también los perfiles hidrodinámicos sólo equilibren el peso del barco. La longitud L_m del modelo es $1/10$ de la embarcación prototipo, L_p . La masa del modelo M_m se ajusta de forma que ésta desplace el mismo volumen proporcional en agua tranquila que desplazaría el prototipo, v.g., $M_m/L_m^3 = M_p/L_p^3$.

(a) La velocidad V_m del modelo en la prueba resulta ser 3 m/s. Si se supone que el coeficiente de la fuerza ascensional o sustentación, $(C_L)_m$, del perfil aerodinámico del modelo es la misma que la de la embarcación prototipo para esta condición, calcule la velocidad V_p de la embarcación para la cual podría predecir la separación de la superficie del agua del barco de tamaño natural. (b) Al realizar las pruebas con el modelo en el canal hidrodinámico, se acostumbra exigir que el número de Froude, V/\sqrt{gL} , sea el mismo para el modelo y su prototipo. ¿Es esto válido para la prueba descrita con anterioridad? (c) Calcule la razón Re_m/Re_p de los números de Reynolds del modelo y prototipo

en esta prueba. Dado este valor, analice la validez de la suposición relativa a los coeficientes de la fuerza ascensional o sustentación que se formularon en el inciso (a).

Problema 10.16

En un túnel hidrodinámico (de agua), se prueba el diseño de un avión, de longitud $L_p = 50 \text{ ft}$, con un modelo a escala, $L_m = 5 \text{ ft}$. Se encuentra que, en el túnel de agua, la fuerza \mathcal{D}_m de resistencia al avance se relaciona con la velocidad V_m del flujo del túnel mediante:

$$\mathcal{D}_m = 1.10 V_m + 0.049 V_m^2$$

donde las unidades de resistencia al avance es lbf y las de la velocidad son ft/s . Cuando la velocidad del túnel se reduce a 30 ft/s , el modelo de avión experimenta una entrada en pérdida.

Para el experimento con el modelo, $\rho_w = 1E(3) \text{ kg/m}^3$, $\mu_w = 1E(-3) \text{ Pa s}$, en tanto que para el flujo del prototipo, $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu_a = 1.8 E(-5) \text{ Pa s}$.

(a) Calcule la velocidad de vuelo V_p para la cual el prototipo experimentaría una entrada en pérdida, en unidades de ft/s . (b) Deduzca una expresión para la fuerza \mathcal{D}_p de resistencia al avance del prototipo (en unidades de lbf) en función de la velocidad de vuelo V_p del prototipo (en unidades de ft/s). (c) Calcule la potencia P_p (en unidades de caballos de potencia) que se requiere para vencer la resistencia al avance del prototipo cuando éste vuela a una velocidad $V_p = 300 \text{ ft/s}$.

Problema 10.17

Un investigador está interesado en saber cómo se impulsan los peces a través del agua al oscilar sus aletas. El investigador considera una clase geoméricamente semejante a un pez y observa que el empuje F que genera un pez depende de su longitud L , la densidad ρ del agua, la velocidad V con la cual se desplaza el pez en el agua y la frecuencia Ω con la cual hace oscilar sus aletas posteriores. En un conjunto de experimentos, el investigador mide el empuje que desarrolla un pez bebé *Tetrapturus* ($L_m = 0.1 \text{ m}$) al moverse con una velocidad $V_m = 0.1 \text{ m/s}$ observando su aceleración cuando el pez aumenta la frecuencia Ω de las oscilaciones de su aleta posterior y encuentra que:

$$F_m = [2.5E(-3) \text{ N s}] \Omega + [4E(-5) \text{ N s}^2] \Omega^2$$

donde Ω es la frecuencia en rad/s .

(a) Mediante el análisis dimensional, defina un empuje adimensional y determine las variables adimensionales de las que éste depende. (b) Utilizando la relación empírica entre F_m y Ω_m , deduzca una expresión para el empuje F_p en función de V_p , L_p y Ω_p para todos los peces que sean geoméricamente semejantes al *Tetrapturus*. (c) De los resultados del inciso (b), calcule el empuje de un *Tetrapturus* adulto para el cual $L_p = 0.1 \text{ m}$, $V_p = 0.1 \text{ m/s}$ y $\Omega_p = 5/s$.

Problema 10.18

Como es bien sabido por los jugadores de béisbol y golf, una pelota que viaja a través del aire tenderá a “curvarse”, v.g., se desplaza en sentido transversal a su primera dirección de movimiento si ésta gira.

Considere una esfera de diámetro D que viaja a una velocidad V a través de un fluido incompresible con densidad ρ y viscosidad μ . La esfera gira con una velocidad angular Ω . Se está interesado en la fuerza F que incide en la esfera en dirección perpendicular a su movimiento y a su eje de rotación. Se dispone de un estudio experimental que muestra, antes que nada, que para condiciones de un número de Reynolds alto, F es independiente de la viscosidad μ . Además, las mediciones hechas a una esfera de diámetro $D_m = 0.02 \text{ ft}$ que se desplaza a través del agua ($\rho_w = 1E(3) \text{ kg/m}^3$) con una velocidad $V_m = 3 \text{ ft/s}$ muestran que la fuerza F es proporcional a Ω :

$$F = (4.4E(-6) \text{ lbf s})\Omega; \quad \Omega \leq 120 \text{ rad/s}$$

donde Ω es la velocidad de rotación en unidades de rad/s .

(a) Utilizando el análisis dimensional, defina una fuerza F adimensional y un conjunto de variables adimensionales de las cuales esa fuerza dependa. (b) Con la información del inciso (a) y a partir de los experimentos en agua, calcule la fuerza F_p (en unidades lbf) que actúa sobre la esfera de diámetro $D_p = 0.25 \text{ ft}$ que se desplaza en aire ($\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$) al girar a $\Omega_p = 10 \text{ revoluciones por segundo}$.

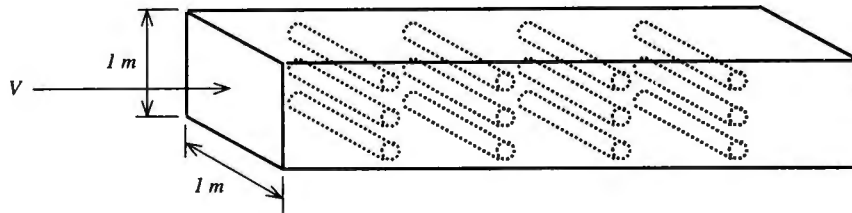


Figura P 10.19

Problema 10.19

Un intercambiador de calor consta de 500 tubos cilíndricos de cobre colocados en forma transversal al eje de un ducto de sección rectangular con área de sección transversal de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, como se observa en la figura P 10.19. El flujo de aire por el ducto tiene una velocidad $\bar{V} = 10 \text{ m/s}$, una densidad promedio $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ y una viscosidad promedio $\mu = 1.8E(-5) \text{ Pa s}$.

(a) Calcule la fuerza de resistencia al avance en un tubo, si se supone que el tubo está solo en un flujo con las propiedades promedio del flujo. (Utilice el coeficiente de resistencia al avance de la figura 10.6) (b) Si se supone que la fuerza total de resistencia al avance en todos los tubos es 500 veces la del inciso (a) y que las fuerzas de fricción en la pared del tubo pueden despreciarse, calcule el coeficiente K de pérdida de la carga hidráulica del intercambiador de calor para la velocidad de flujo $\bar{V} = 10 \text{ m/s}$.

Problema 10.20

Un inventor desarrolla una microbomba pequeña que podría utilizarse para mejorar la circulación si se inserta en una pequeña vena o arteria. El diámetro de la bomba es $D_p = 0.1 \text{ mm} = 1E(-4) \text{ m}$. La bomba girará con una velocidad angular $\Omega_p = 100 \text{ s}^{-1}$ en un fluido de densidad $\rho_p = 1E(3) \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\mu_p = 1E(-3) \text{ Pa s}$. Para predecir el comportamiento de la microbomba, el inventor ha construido un modelo a mayor escala de la bomba el cual tiene un diámetro $D_m = 3 \text{ cm} = 3E(-2) \text{ m}$. Este modelo se probará en glicerina, la cual tiene densidad $\rho_m = 1.26E(3) \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\mu_m = 1.49 \text{ Pa s}$. Tanto el modelo de la bomba como su prototipo se harán funcionar en condiciones en las que el número de Reynolds $\rho\Omega D^2/\mu$ es mucho menor que la unidad.

El razonamiento del inventor es correcto en cuanto a que el desempeño de la bomba no dependerá de la densidad del fluido, pues el número de Reynolds será muy pequeño. El aumento de la presión Δp de la bomba será, así, función de μ , Ω , D y Q :

$$\Delta p = f\{\mu, \Omega, D, Q\}$$

- Mediante el análisis dimensional, deduzca una forma adimensional de esta relación.
- Al realizar la prueba con el modelo, calcule cuál será el límite superior de la velocidad angular Ω_m de forma que el número de Reynolds sea menor que la unidad.
- El inventor realiza una prueba con el modelo para $\Omega_m = 0.1 \text{ s}^{-1}$. Para un aumento de presión cero ($\Delta p_m = 0$), el gasto es $Q_m = 5E(-8) \text{ m}^3$, en tanto que para un flujo cero ($Q_m = 0$) el aumento de presión es $\Delta p_m = 8E(4) \text{ Pa}$. Calcule los valores correspondiente del gasto Q_p de la microbomba y su aumento de presión Δp_p .

Problema 10.21

Para el prototipo del modelo probado en la figura 10.1, el producto $C_D A_f = 0.329 \text{ m}^2$. Calcule la potencia \mathcal{P} que se requiere para vencer la resistencia aerodinámica al avance del prototipo para 55 mph cuando $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

Bibliografía

Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Betz, Albert, *Introduction to the Theory of Flow Machines*, Nueva York: Pergamon, 1966.

Blevens, R. D., *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1984.

Lewis, Edward V., *Principles of Naval Architecture Second Revision*, vol. 2, *Resistance, Propulsion and Vibration*, Jersey City: Society of Naval Architects and Marine Engineers, ed. 1988.

Howarth, L., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol 1, *High Speed Flows*. Oxford: Oxford University Press, ed. 1953.

Lobanoff, Val S. y Robert R. Ross, *Centrifugal Pumps Design and Applications*. Houston: Gulf Publishing Co., 1985.

Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6a. ed., Nueva York: Dover Publications, 1945.

Rouse, Hunter y Simon Ince, *History of Hydraulics*, Ames: Iowa Institute of Hydraulic Research. State University of Iowa, 1957.

Sabersky, Rolf S., Allan J. Acosta y Edward G. Hauptman, *Fluid Flow*, 3a. ed., Nueva York: Macmillan Publishing Co., 1989.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1986.

11.1 Introducción

Muchos flujos de fluidos de importancia práctica son aquéllos para los cuales las variables dependientes, la velocidad \mathbf{V} y la presión p , dependen de dos o tres coordenadas espaciales y, tal vez, del tiempo. Incluso cuando la velocidad es constante, puede resultar necesario encontrar hasta cuatro variables dependientes escalares (v.g., u, v, w, p) como funciones de cuatro variables independientes escalares (v.g., x, y, z, t). Ésta es una enorme tarea, incluso con la ayuda de una computadora de alta velocidad, y comprende la reunión y exhibición de vastas cantidades de datos numéricos a fin de obtener una representación física del flujo.

Hasta el momento, se dependió de la integral de Bernoulli como ayuda en la descripción de algunos aspectos del flujo no viscoso para el cual podían identificarse con facilidad las líneas de corriente. Las integrales de la cantidad de movimiento también ayudaron en la determinación de las fuerzas que intervienen en flujos contenidos por fronteras. En uno de los ejemplos de un flujo viscoso, sobre una placa plana, se encontraron dos componentes de la velocidad (u, v) como funciones de dos coordenadas espaciales (x, y), pero no fue una cuestión sencilla hacerlo. Todo parece indicar que sería muy difícil predecir flujos multidimensionales.

Existe un tipo de flujo, conocido como *flujo irrotacional*, por medio del cual es muy sencillo realizar el tratamiento de flujos en varias dimensiones. Y más específicamente, con frecuencia es posible encontrar soluciones para los flujos multidimensionales en forma analítica o mediante el uso de algoritmos numéricos simples. En especial, es posible desarrollar un buen entendimiento físico sobre los flujos de fluidos al utilizar los conceptos que se introducen en la descripción de un flujo irrotacional.

En el presente capítulo, se definen las condiciones en las que un flujo puede ser irrotacional y se describen técnicas analíticas que es posible aplicar para flujos de densidad constante. Como ejemplos, sólo se tratan flujos en dos dimensiones en los que intervienen dos componentes de la velocidad y dos dimensiones espaciales. Estos ejemplos son ilustrativos de muchos flujos prácticos como el que ocurre a través de las

alas de un avión. Se hace hincapié en la definición de la función de corriente para estos flujos, lo cual permite definir las líneas de corriente del flujo y entender el comportamiento de los fluidos al moverse en varias direcciones espaciales.

11.2 Vorticidad

La vorticidad es una propiedad cinemática del campo de flujo, en cada punto, que mide la velocidad angular de una partícula de fluido. Esta propiedad es una cantidad vectorial que tiene tres componentes escalares. La vorticidad se representa con el símbolo ω y se define como:

$$\omega \equiv \nabla \times \mathbf{V} \quad (11.1)$$

$$= \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (11.2)$$

$$= \mathbf{i}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \quad (11.3)$$

donde se utilizaron las definiciones vectoriales de las ecuaciones 1.35 y 1.55 para expresar la vorticidad ω en coordenadas cartesianas y cilíndricas, ecuaciones 11.2 y 11.3.

Para ver cómo la vorticidad ω se relaciona con la velocidad angular de un elemento de fluido, considérese la rotación de un cuerpo rígido de un fluido alrededor de un eje fijo, como la que se presentaría si se colocara agua en un vaso con centro en una mesa giratoria y se esperara lo suficiente de forma que todo el fluido girara con la misma velocidad angular Ω que la de la mesa giratoria. Si se emplean coordenadas cilíndricas fijas en el marco de referencia inercial del laboratorio, con z como el eje vertical, las componentes de la velocidad son $V_r = 0$, $V_\theta = \Omega r$ y $V_z = 0$. Al sustituir estos valores en la ecuación 11.3 para encontrar la vorticidad, sólo una derivada es distinta de cero:

$$\omega = \mathbf{i}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) \right) = (2\Omega) \mathbf{i}_z \quad (11.4)$$

Puesto que el movimiento del fluido es el de rotación de un cuerpo rígido, la velocidad angular $(\Omega) \mathbf{i}_z$ es la misma para cada elemento de fluido y, a partir de la ecuación 11.4, es la vorticidad. Por lo tanto, *la vorticidad ω es dos veces la velocidad angular de un elemento de fluido.*

La vorticidad ω es un campo vectorial al igual que el campo de velocidad \mathbf{V} . Una "línea de corriente" del campo de vorticidad, v.g., la línea cuya tangente tiene la dirección de ω en cada punto, se conoce como *línea de vórtice*. Las líneas de vórtice, al igual que las líneas de corriente, no se intersecan. De hecho, el campo de vorticidad es como un campo magnético en el sentido de que su divergencia es cero:

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \equiv 0 \quad (11.5)$$

gracias a la identidad del cálculo vectorial, ecuación 1.37. Las líneas de vórtice no pueden comenzar ni terminar en el interior de un fluido, sólo en sus fronteras. Al igual que un campo magnético, para una línea de vórtice no puede haber una "fuente". A este campo vectorial se le llama *solenoidal*.¹

¿Cuál es el significado físico de la velocidad angular (o vorticidad) de un elemento de fluido? Si el elemento de fluido fuera un cuerpo rígido, entonces su velocidad angular no cambiaría en ausencia de un par de fuerzas que actuaran sobre él. Un elemento de fluido con velocidad angular cero no presentará vorticidad a menos de que sobre el elemento actuara un par de fuerzas que lo hicieran girar. Una fuente palpable de rotación está en esfuerzos cortantes no equilibrados que actúen sobre la periferia del elemento de fluido. Otra fuente, menos obvia, la constituye el efecto de una fuerza de presión que actúe en una dirección que no se encuentre alineada con el gradiente de densidad del fluido. En flujos en los que estos efectos están ausentes, un elemento de fluido con cero vorticidad inicial no adquirirá vorticidad alguna. Por buenos motivos, flujos de esta índole se conocen como *irrotacionales*, y sus campos de velocidad son tales que:

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (11.6)$$

Para flujos irrotacionales, la vorticidad (cero) es una constante de movimiento, v.g., ésta no cambia a lo largo de la trayectoria de cualquier partícula del fluido.

Ejemplo 11.1

Obtenga una expresión para la vorticidad ω en un flujo circular de Poiseuille para el cual la velocidad \mathbf{V} es $V_z \mathbf{i}_z$, donde

$$V_z = V_m \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

donde V_m es la máxima velocidad y a el radio del tubo. ¿Cuál es la forma de una línea de vórtice?

Solución

Si se usa la ecuación 11.3, la única componente distinta de cero de ω es:

$$\omega = -\mathbf{i}_\theta \frac{\partial V_z}{\partial r} = \mathbf{i}_\theta \frac{2rV_m}{a^2}$$

Una línea de vórtice es un círculo de radio r cuyo centro está en el eje z , y se encuentra en un plano perpendicular a ese eje.

¹ El campo de velocidad de un fluido incompresible es también solenoidal puesto que, en este caso $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Vorticidad en la capa límite

En la capa límite viscosa que se desarrolla junto a la pared de un sólido a lado de la cual fluye un fluido, la vorticidad se crea por una fuerza viscosa no equilibrada que hace girar a las partículas de fluido. La cantidad de vorticidad en la pared, ω_w , puede relacionarse con la magnitud del esfuerzo cortante τ_w de la pared al observar que, si x está en la dirección de la corriente y y en la dirección normal a la pared, entonces, por la ecuación 11.2:

$$\omega_w = \mathbf{i}_z \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = -\frac{\tau_w}{\mu} \mathbf{i}_z \quad (11.7)$$

ya que v , w y sus derivadas son cero en la pared. El vector de vorticidad ω_w en la pared es perpendicular a la dirección de la corriente y paralelo a la pared. Como el esfuerzo cortante viscoso del fluido disminuye por debajo del valor de la pared en puntos dentro de la capa límite que se encuentran alejados de la pared, también la vorticidad disminuirá por debajo de su valor en la pared, ω_w .

El flujo dentro de una capa límite viscosa no podrá ser irrotacional puesto que ahí la vorticidad es distinta de cero. Pero el flujo exterior a una capa límite puede ser irrotacional, siempre y cuando satisfaga ciertos requisitos que se tratan a continuación. Como los flujos reales siempre se adhieren a las superficies sólidas, formando capas límites, no pueden ser irrotacionales en todas partes.

11.2.1 Circulación

La *circulación* es una integral escalar del campo de velocidad que puede relacionarse con su vorticidad. Si se denota por el símbolo Γ , la circulación se define por la integral de línea:

$$\Gamma \equiv \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{c} \quad (11.8)$$

donde \mathbf{V} es la velocidad y $d\mathbf{c}$ el elemento de línea a lo largo de una curva *cerrada* C . Al utilizar el teorema de Stokes, ecuación 1.45, la circulación puede expresarse también como una integral de superficie:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{c} = \iint_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) dS = \iint_S \omega \cdot \mathbf{n} dS \quad (11.9)$$

donde la superficie S es cualquier superficie cuyo borde sea la curva C y cuya normal sea \mathbf{n} .² A Γ puede llamársele el flujo de vorticidad a través del área S encerrada por la curva C , en analogía con el flujo magnético encerrado por una espira de alambre por la cual fluye corriente eléctrica.³

² La dirección positiva de \mathbf{n} se determina por la regla de la mano derecha: si la dirección positiva de $d\mathbf{c}$ es la del dedo índice de la mano derecha, entonces la dirección positiva de \mathbf{n} es la del dedo pulgar.

³ El signo algebraico Γ depende de la dirección a lo largo de la curva C para la cual $d\mathbf{c}$ se define como positiva. La convención usual para flujos planos bidimensionales x , y o r , z es que la

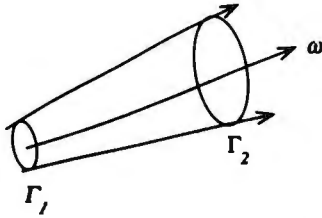


Figura 11.1 Tubo de vórtice que indica las líneas de vórtice y dos curvas en la superficie lateral del tubo en donde la circulación es Γ_1 y Γ_2 .

Otra posible interpretación de la ecuación 11.9 se ilustra en la figura 11.1, la cual presenta un segmento finito de un *tubo de vórtice*, v.g., un volumen cuya superficie lateral sea tangente a las líneas de vórtice y cuyas superficies en los extremos sean normales a esas líneas, en forma semejante a un tubo de corriente formado alrededor de líneas de corriente. La circulación Γ_1 encerrada por la curva C_1 puede evaluarse en términos de una integral de área que se extiende sobre la superficie lateral S_{lat} y el área S_2 :

$$\Gamma_1 = \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{c}_1 = \iint_{S_{lat}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dS_{lat} + \iint_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dS_2 = 0 + \Gamma_2 \quad (11.10)$$

ya que $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ en la superficie lateral. Por lo tanto, *la circulación alrededor de un tubo de vórtice no varía con la distancia a lo largo del tubo de vórtice.*

Teorema de Kelvin e irrotacionalidad

La circulación Γ se define para una curva cerrada C que se encuentra dentro del flujo de un fluido. Si se elige esta curva de forma que sea una *curva material* C_m , v.g., una línea que pasa a través de un conjunto de partículas de un fluido que han sido marcadas y que se desplazan con el flujo, puede calcularse la rapidez de cambio respecto al tiempo de la circulación, $D\Gamma_m/Dt$,

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma_m}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \int_{C_m} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{c} \\ &= \int_{C_m} \left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{c} + \mathbf{V} \cdot d \left[\frac{D\mathbf{c}}{Dt} \right] \right) \\ &= \int_{C_m} \left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{c} + \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} \right) \end{aligned}$$

dirección en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de C determina el signo de Γ . Según esta convención, la dirección de \mathbf{n} es $-\mathbf{i}_z$ o $-\mathbf{i}_\theta$, respectivamente. Se aplicará esta convención en los análisis, ejemplos y problemas subsecuentes.

$$= \int_{C_m} \frac{DV}{Dt} \cdot dc \quad (11.11)$$

donde el último término de la penúltima línea es cero pues es la integral de $d(V^2/2)$ sobre una curva cerrada cuyos límites de integración son idénticos.

La ecuación 11.11 es el *Teorema de Kelvin*.⁴ Para comprender su significado, ésta debe expresarse como una integral de superficie recurriendo al teorema de Stokes, ecuación 1.45:

$$\frac{D\Gamma_m}{Dt} = \iint_S \left(\nabla \times \frac{DV}{Dt} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (11.12)$$

Para un fluido viscoso incompresible, DV/Dt está dada por la ecuación de Navier-Stokes, ecuación 6.11, y su rotacional:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{DV}{Dt} &= \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times \mathbf{g} + \nabla \times (\mu \nabla^2 \mathbf{v}) \\ &= \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (11.13)$$

donde se han utilizado las ecuaciones 1.39 y 1.36 para simplificar $\nabla \times (\nabla p/\rho)$ y $\nabla \times \mathbf{g} = 0$. Usando la ecuación 11.9 para expresar Γ_m como una integral de superficie y sustituyendo 11.13 en 11.12, el teorema de Kelvin para un flujo incompresible adquiere la forma:

$$\frac{D}{Dt} \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \right] \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (11.14)$$

La ecuación 11.4 afirma que la rapidez de cambio del flujo de vorticidad encerrado por la curva material C es la suma de dos efectos, el primero se debe al gradiente de $1/\rho$ y el segundo a la difusión viscosa de la vorticidad. El primero de éstos surge cuando la dirección del gradiente de presión es distinta de la del gradiente de densidad, con lo que se ocasiona que la partícula del fluido cambie su velocidad angular y, por lo tanto, su vorticidad $\boldsymbol{\omega}$. El segundo efecto proviene de la transferencia de velocidad angular entre partículas contiguas del fluido en virtud de los esfuerzos cortantes viscosos. Si la densidad del fluido es constante en todo lugar, o si, en cualquier parte, es función sólo de la presión,⁵ entonces $\nabla(1/\rho)$ es cero o paralela a ∇p y $\nabla(1/\rho) \times \nabla p = 0$.

Si un flujo es irrotacional ($\boldsymbol{\omega} = 0$) en algún instante, entonces el teorema de Kelvin, ecuación 11.14, muestra que ese flujo seguirá siendo irrotacional si la densidad es

⁴ William Thompson [Lord Kelvin] (1824-1907), a quien mejor se le conoce por haber establecido la escala absoluta de temperatura, se graduó en la Universidad de Glasgow a la edad de 10 años. En mecánica de fluidos, desarrolló la teoría de las ondas de sonido, del movimiento turbulento, de las ondas capilares y la estabilidad del flujo viscoso. A él se debe la introducción del concepto de turbulencia para caracterizar un flujo no estacionario aleatorio.

⁵ La densidad sería una función de la presión sólo si la entropía es constante en todas partes. Esto se conoce como *flujo homentrópico*. Cuando éste no es el caso, el flujo se denomina *estratificado*.

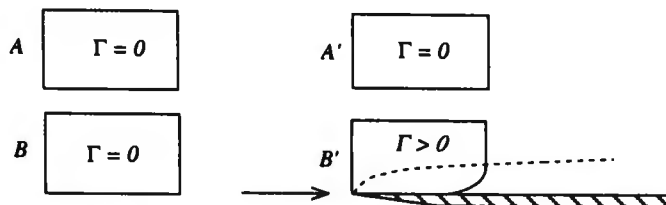


Figura 11.2 Ilustración del teorema de Kelvin aplicado al flujo estacionario de un fluido viscoso sobre una placa plana.

constante o función de la presión en cualquier lugar y si el flujo se encuentra fuera de esas regiones, como en capas límite viscosas, para las cuales la vorticidad puede difundirse desde las fronteras sólidas hacia el flujo. Un flujo que comienza a partir del reposo o que tiene condiciones uniformes lejos en dirección corriente arriba, debe ser irrotacional en un principio y lo seguirá siendo si se satisfacen estas condiciones.

Este principio se ilustra en la figura 11.2, donde dos curvas materiales, A y B , en un flujo uniforme corriente arriba que se aproxima a una placa plana, encierran una vorticidad cero y tienen circulación cero. Cuando estas curvas materiales derivan hacia los puntos A' y B' , el primer punto no presenta todavía circulación, pero el segundo desarrolla una circulación positiva (en el sentido de las manecillas del reloj) pues penetró la capa límite viscosa de la superficie superior de la placa plana, donde se produjo vorticidad dentro de la capa límite.

En la sección 4.7, ecuación 4.34, se mostró que la ecuación de Bernoulli regía a lo largo de cualquier línea C en un flujo no viscoso, irrotacional de densidad constante ($\mu = 0$, $\omega = 0$, $\nabla \rho = 0$):

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{c} + \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_1 \right) = 0$$

Pero, en un flujo viscoso incompresible irrotacional, la fuerza viscosa por unidad de volumen $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$, es cero:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (11.15)$$

donde se utilizó la ecuación 1.42 y se aplicaron las condiciones de incompresibilidad ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) e irrotacionalidad ($\omega = 0$). Por lo tanto, un flujo viscoso, irrotacional con densidad constante obedece la ecuación de Euler y la de Bernoulli a lo largo de una línea de flujo, aunque no existan esfuerzos viscosos en el fluido. Debido a la naturaleza irrotacional del flujo, estos esfuerzos viscosos no proporcionan una fuerza viscosa por unidad de volumen y el fluido se comporta como si fuera no viscoso. Es por este motivo que algunos flujos de fluidos pueden considerarse no viscosos aun cuando la viscosidad del fluido no es cero.

Ejemplo 11.2

La velocidad \mathbf{V} de un flujo plano viscoso estacionario con una densidad constante ρ es:

$$\mathbf{V} = \Omega x \mathbf{i}_x - \Omega y \mathbf{i}_y$$

(a) ¿Es irrotacional el flujo? (b) Deduzca expresiones para los esfuerzos viscosos τ_{xy} , τ_{xx} y τ_{yy} . (c) Si la presión p^* en $x = 0$, $y = 0$ es p_0^* , obtenga una expresión para $p^* \{x, y\}$.

Solución

(a) Puesto que $u = \Omega x$, $v = -\Omega y$, $w = 0$, el valor de ω que se obtiene a partir de la ecuación 11.2 es:

$$\omega = \mathbf{i}_x \left(0 - \frac{\partial(-\Omega y)}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial(\Omega x)}{\partial z} - 0 \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial(-\Omega y)}{\partial x} - \frac{\partial(\Omega x)}{\partial y} \right) = 0$$

por lo que el flujo es irrotacional.

(b) Las componentes del esfuerzo viscoso para un fluido incompresible están dadas por las ecuaciones 6.4 y 6.6:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu(\Omega - \Omega) = 0$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu\Omega$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\mu\Omega$$

(c) En $x = 0$, $y = 0$, la velocidad es cero. Puesto que la ecuación de Bernoulli se aplica a este flujo viscoso irrotacional,

$$p^* + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) = p_0^* + 0$$

$$p^* = p_0^* - \frac{\rho}{2} ([\Omega x]^2 + [\Omega y]^2)$$

11.3 La función de corriente para un flujo incompresible

Se trata de un teorema del cálculo vectorial según el cual cualquier campo vectorial puede expresarse como la suma del rotacional de una función vectorial y el gradiente de una función escalar espacial y temporal. Para flujos irrotacionales, se opta por determi-

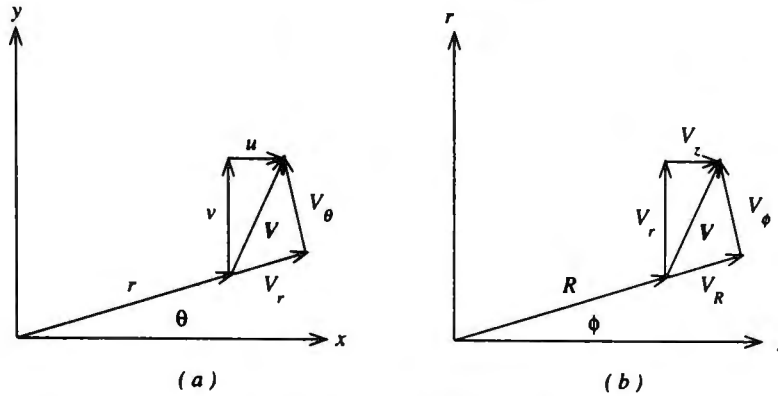


Figura 11.3 Coordenadas espaciales y de velocidad para un flujo (a) plano bidimensional y (b) de simetría axial, incluyendo las coordenadas polares en el plano de flujo.

nar la velocidad \mathbf{V} en términos del rotacional de un vector $\Psi \{\mathbf{R}, t\}$ que es una función de la posición \mathbf{R} y el tiempo t :

$$\mathbf{V} = \nabla \times \Psi \{\mathbf{R}, t\} \quad (11.16)$$

Por la identidad vectorial 1.37, un campo vectorial de esa naturaleza satisface la conservación de la masa para un fluido incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) \equiv 0 \quad (11.17)$$

El estudio sobre el flujo irrotacional se limitará a dos tipos de flujos bidimensionales, a saber, el flujo plano x, y , donde u y v son funciones de x, y y t (pero no de z) y $w = 0$, y el flujo con simetría axial en el plano r, z , donde V_r y V_z son funciones de r, z y t (pero no de θ y $V_\theta = 0$). (Las coordenadas y las componentes de la velocidad en estos dos flujos bidimensionales se representan en la figura 11.3, junto con las coordenadas polares correspondientes a los planos respectivos.) Para estos dos flujos bidimensionales particulares, se elige Ψ , para el flujo plano y el flujo con simetría axial, respectivamente, tal que:

$$\Psi \{x, y, t\} = \psi \{x, y, t\} \mathbf{i}_z \quad (11.18)$$

$$\Psi \{r, z, t\} = \frac{1}{r} \psi \{r, z, t\} \mathbf{i}_\theta \quad (11.19)$$

donde ψ es una función escalar. Utilizando las ecuaciones 1.35 y 1.55 con la finalidad de encontrar $\mathbf{V} = \nabla \times \Psi$ para 11.18 y 11.19, puede determinarse la velocidad \mathbf{V} en términos de las derivadas de ψ para un flujo plano:

$$\mathbf{V} = \nabla \times (\psi \mathbf{i}_z) = \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - 0 \right) + \mathbf{i}_y \left(0 - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11.20)$$

y para un flujo con simetría axial:

$$\mathbf{V} = \nabla \times \left(\frac{1}{r} \psi \mathbf{i}_\theta \right) = \mathbf{i}_r \left[0 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi}{r} \right) \right] + 0 + \mathbf{i}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - 0 \right]$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (11.21)$$

Algunas veces, resulta preferible emplear las coordenadas polares r, θ en el plano x, y o R, ϕ en el plano r, z para el flujo plano o el que posee simetría axial, respectivamente, como se ilustra en la figura 11.3. Al elegir estas coordenadas, las componentes de la velocidad para el flujo plano se transforman en:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (11.22)$$

en tanto que en el caso del flujo con simetría axial se encuentra que:

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}; \quad V_\phi = -\frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (11.23)$$

donde ψ es, respectivamente, una función de r, θ, t y R, ϕ, t .

La función escalar ψ se conoce como *función de corriente* puesto a que define las líneas de corriente del flujo. A lo largo de una línea $\psi = \text{constante}$ en el flujo plano, se tiene la relación diferencial:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = \frac{v}{u} \quad (11.24)$$

donde se utilizó 11.20 en 11.24 para sustituir la razón de las derivadas parciales por la razón de las componentes de la velocidad. Por lo tanto, la pendiente dy/dx de la curva $\psi = \text{constante}$ es la misma que la pendiente (v/u) del vector velocidad, lo cual significa que $\psi = \text{constante}$ es una línea de corriente. Si se realiza un análisis similar, se encuentra que lo anterior también es válido para un flujo con simetría axial.⁶ Mediante un conocimiento de la función de corriente ψ resulta posible graficar las líneas de corriente del flujo, para encontrar la velocidad en cualquier punto en el flujo, y utilizando la ecuación de Bernoulli, con el objeto de determinar el campo de presión cuando el flujo es irrotacional.

La diferencia en los valores de ψ sobre dos líneas distintas de corriente es igual al gasto volumétrico del fluido entre esos valores. Para demostrar que esta afirmación es cierta para un flujo plano, se conectan dos puntos, 1 y 2, en líneas distintas de corriente ψ_1 y ψ_2 mediante una curva C sobre el plano x, y . El gasto volumétrico, por unidad de distancia normal al plano x, y , a través de un incremento dc de la curva C es $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dc$,

⁶ $\psi(r, z, t)$ se conoce como la *función de corriente de Stokes*.

donde \mathbf{n} es la normal de la curva C . Sin embargo, del cálculo vectorial, $\mathbf{n} \, dc = \mathbf{i}_x \, dy - \mathbf{i}_y \, dx$, por lo que:⁷

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dc &= \mathbf{V} \cdot (\mathbf{i}_x \, dy - \mathbf{i}_y \, dx) = u \, dy - v \, dx \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \, dy - \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \, dx = d\psi \\ \int_1^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dc &= \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \end{aligned}$$

donde se utilizó la ecuación 11.20 para sustituir las componentes de la velocidad por las derivadas parciales de ψ .

En las ilustraciones subsecuentes, se graficarán las líneas de corriente con incrementos iguales en ψ , con el propósito de representar los gastos volumétricos para el fluido entre las líneas de corriente.

Flujo irrotacional: Ecuación de Laplace

Hasta aquí, no fue necesario que el flujo tuviera un carácter irrotacional ($\omega = 0$). Para un flujo irrotacional plano, utilizando las ecuaciones 11.2 y 11.20,

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (11.25)$$

en tanto que en el caso de un flujo con simetría axial, usando las ecuaciones 11.3 y 11.21, esta condición se transforma en:

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\psi}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\psi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\psi}{r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11.26)$$

Las ecuaciones 11.25 y 11.26 son la *ecuación de Laplace* para las variables correspondientes al caso plano y al de simetría axial, $\psi \mathbf{i}_z$ y $(\psi/r) \mathbf{i}_\theta$, respectivamente. Cualquier función que satisfaga la ecuación de Laplace puede describir un flujo irrotacional con

⁷ Para un flujo de simetría axial, el incremento del gasto volumétrico es $2\pi r \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dc$ y el gasto volumétrico entre dos tubos de corriente es $2\pi(\psi_2 - \psi_1)$.

densidad constante. Sin embargo, es imposible encontrar una solución a la ecuación de Laplace que satisfaga la condición de no deslizamiento ($\mathbf{V} = 0$) para un fluido viscoso en una frontera sólida fija. En cambio, sólo puede especificarse que la velocidad del fluido es paralela a una pared fija, lo cual hace $\psi = \text{constante}$ a lo largo de una pared, v.g., una pared fija es una línea de corriente del flujo.⁸ Es posible resolver las ecuaciones 11.25 y 11.26 para encontrar la función de corriente de un flujo irrotacional con densidad constante cuyas condiciones en la frontera estén especificadas.

El principio de superposición

Las componentes de la velocidad determinadas a partir de las derivadas de la función de corriente, como las de las ecuaciones 11.20 y 11.21, son lineales en la función de corriente. La suma de dos funciones de corriente, ψ_1 y ψ_2 , es también una función de corriente y describe un campo de velocidad que es la suma vectorial de los campos individuales. Por ejemplo, en el caso de un flujo plano:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \nabla \times (\psi \mathbf{i}_z) = \nabla \times ([\psi_1 + \psi_2] \mathbf{i}_z) = \nabla \times (\psi_1 \mathbf{i}_z) + \nabla \times (\psi_2 \mathbf{i}_z) \\ &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\end{aligned}\quad (11.27)$$

Por lo tanto, es posible superponer dos o más flujos irrotacionales al sumar sus funciones de corriente, y por lo tanto, sus campos de velocidad, para encontrar un nuevo flujo. Esto se conoce como el *principio de superposición*. Sin embargo, los campos de presión del flujo superpuesto *no* es aditivo debido a que la presión, a partir de la ecuación de Bernoulli, es cuadrática en cuanto a las velocidades del flujo ($(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)^2 \neq \mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_2^2$).

Se utilizará el principio de superposición para sumar flujos irrotacionales simples a fin de producir flujos más complejos pero de igual interés.

11.4 Flujos irrotacionales planos

Al tratar los flujos planos, se utilizarán tanto coordenadas cartesianas (x, y) como coordenadas polares (r, θ), dependiendo de cuál de las dos resulte más conveniente al trabajar con los ejemplos, de acuerdo con las circunstancias. Primero, se considerarán cuatro flujos elementales (flujo uniforme, flujo por una fuente lineal, flujo por un vórtice lineal y flujo en codos) y, luego, flujos de alguna manera más complejos formados por la superposición de dos flujos elementales, con lo que se ilustra el principio de construcción de flujos complejos por superposición de varios flujos elementales.

⁸ Sólo existe solución a la ecuación de Laplace cuando se especifican ψ o su derivada normal en una de sus fronteras.

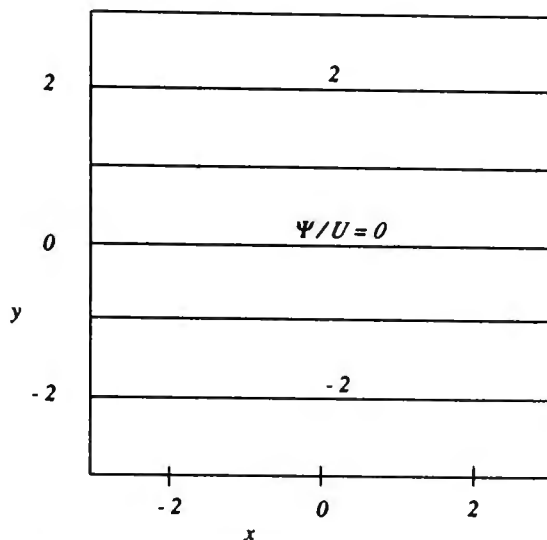


Figura 11.4 Líneas de corriente de un flujo plano uniforme, $\psi = Uy$, para valores de ψ/U que se encuentran espaciados de manera uniforme.

11.4.1 Flujos elementales

Flujo uniforme

El flujo irrotacional más sencillo posible es el que se mueve de izquierda a derecha con una velocidad uniforme U . Este flujo tendría una velocidad $\mathbf{V} = U \mathbf{i}_x$ y líneas de corriente horizontales $y = \text{constante}$. La función de corriente que produce este campo de velocidad es:

$$\psi = Uy = Ur \sin \theta \quad (11.28)$$

y sus componentes de la velocidad se encuentran a partir de las ecuaciones 11.20 y 11.21:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta \quad (11.29)$$

En la figura 11.4, se grafican las líneas de corriente del flujo para valores ψ/U de la integral. Las dimensiones de la función de corriente son de velocidad por longitud, o $\mathcal{L}^2 T^{-1}$, de forma que la razón ψ/U tiene dimensiones de longitud.

Como la velocidad en este flujo es uniforme, no habrá cambio de presión p^* , la cual tendrá el mismo valor en cualquier lugar.

Fuente lineal

Considérese un flujo plano que comienza a partir del origen ($x = 0, y = 0$) y se mueve radialmente y de igual manera en todas las direcciones de θ . La velocidad es sólo radial ($\mathbf{V} = \hat{i}_r V_r$), y las líneas de corriente están formadas por líneas rectas que emanan del origen, $\theta = \text{constante}$. Para crear en el laboratorio un flujo de esa naturaleza, se requiere alimentar una tubería porosa, que se extienda perpendicularmente entre dos paredes paralelas, separadas por una distancia W , con un gasto volumétrico Q . El gasto volumétrico por unidad de longitud de tubería, $q \equiv Q/W$, determina la velocidad radial V_r del flujo, y la función de corriente es:

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (11.30)$$

y las componentes de la velocidad del flujo son:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{2\pi r}; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right); \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.31)$$

Adviértase que esta velocidad radial satisface la conservación de la masa aplicada a un volumen de control cilíndrico con radio r :

$$\dot{m}_{ent} = \dot{m}_{sal}$$

$$\rho Q = \rho V_r W (2\pi r)$$

$$Q = Wq$$

Las líneas de corriente de la fuente lineal se esquematizan en la figura 11.5 para valores constantes de la razón adimensional ψ/q .

La función de corriente ψ de la ecuación 11.30 satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Es posible encontrar la presión p^* si se aplica el teorema de Bernoulli entre un punto localizado a una distancia radial r , donde la velocidad $V_r = (q/2\pi r)$, y otro punto en $r = \infty$, donde $V_r = 0$ y se supone que p^* tiene un valor fijo, p_∞^* :

$$p^* + \frac{\rho}{2} \left(\frac{q}{2\pi r} \right)^2 = p_\infty^*$$

$$p^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} \left(\frac{q}{2\pi r} \right)^2 \quad (11.32)$$

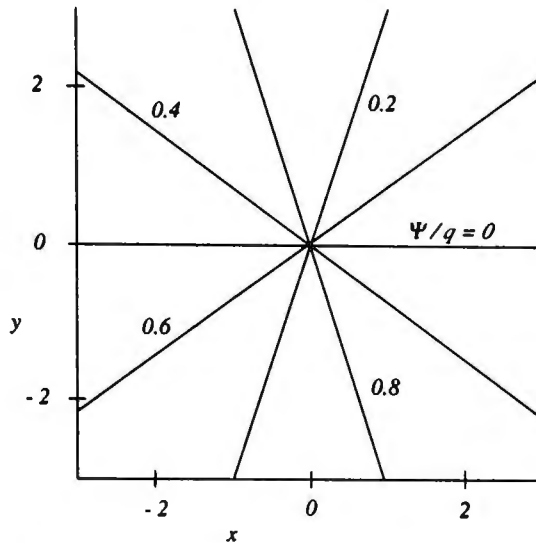


Figura 11.5 Líneas de corriente de un flujo de la fuente lineal, $\psi = q\theta/2\pi$, para valores de ψ/q que se encuentran espaciados de manera uniforme.

Para cualquier radio, la presión es *menor* que su valor en el infinito pues el flujo que se desplaza en dirección hacia afuera experimenta una desaceleración, lo cual exige que la fuerza de presión actúe hacia adentro ($\partial p/\partial r$ positiva).⁹ Pero la presión se hace cero cuando $r = \sqrt{\rho q^2/2p_\infty^*}/2\pi$, por lo que la ecuación 11.32 es físicamente imposible para radios más pequeños que este valor, para los cuales la presión sería negativa.

En la figura 11.6, se representa la distribución de presión con la distancia radial y se emplearon variables adimensionales. El flujo en el origen, $r = 0$, es *singular*, v.g., las magnitudes de V y p^* se hacen infinitas y las líneas de corriente convergen en un punto. Por lo tanto, se tiene que despreciar la solución en $r = 0$ pues es físicamente imposible que el fluido se comporte de esta forma. Sin embargo, la porción externa del campo de flujo describe un flujo que desde el punto de vista físico es posible conseguir.

Vórtice lineal

Un vórtice lineal es un flujo en el cual las partículas del fluido se mueven en círculos alrededor del origen con una velocidad tangencial V_θ que varía con el radio r de tal manera que se mantenga la misma circulación $\Gamma = -2\pi r V_\theta$ en todas las líneas de corriente. La función de corriente para este caso y las componentes de su velocidad son:

⁹ Si el flujo se mueve hacia adentro (q negativa), entonces experimenta una aceleración hacia adentro y $\partial p/\partial r$ sigue siendo positiva.

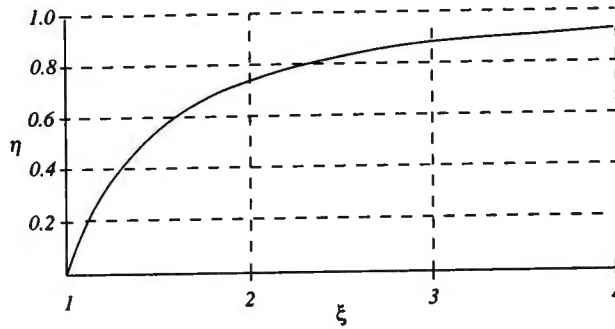


Figura 11.6 Razón de presiones $\eta \equiv p^*/p_{\infty}^*$ de la fuente lineal en función de la distancia radial adimensional $\xi \equiv 2\pi r/q(\rho/2p_{\infty}^*)^{1/2}$ para distancias donde la presión es positiva.

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11.33)$$

$$V_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right); \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.34)$$

La función de corriente para un vórtice lineal, ecuación 11.33, satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + 0 = 0$$

por lo que el flujo es irrotacional. Pero, si el flujo es irrotacional ($\omega = 0$), ¿cómo puede la circulación en una línea de corriente circular ser distinta de cero cuando esta circulación es igual a la integral de ω sobre el área del círculo, según la ecuación 11.9? La respuesta está en el comportamiento singular del flujo en el origen, donde la velocidad se hace infinita. En este punto, existe una región infinitesimal de vorticidad infinita que tiene una circulación Γ finita. Como en el flujo por una fuente lineal, el origen es un punto en el flujo que es físicamente imposible de conseguir, pero el resto del flujo es irrotacional.

Las líneas de corriente del flujo por un vórtice lineal se presentan en la figura 11.7. Adviértase cómo las líneas de corriente se encuentran más cercanas entre sí para r pequeños puesto que V_θ es mayor ahí.

La presión en un flujo estacionario de vórtice lineal se obtiene al aplicar la ecuación de Bernoulli entre cualquier radio r , donde $V = V_\theta$ y $r \rightarrow \infty$, donde $V = V_\theta = 0$ y p^* tiene un valor constante p_{∞}^* :

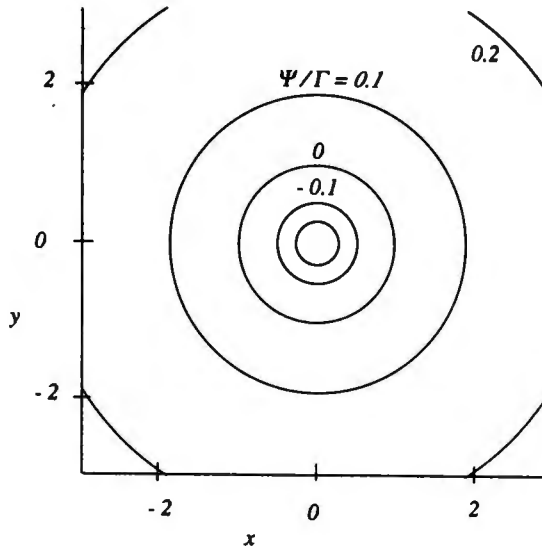


Figura 11.7 Líneas de corriente circulares del vórtice lineal, $\psi = -(\Gamma/2\pi) \ln r$, para valores de ψ/Γ que se encuentran espaciados de manera uniforme.

$$p^* + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 = p_\infty^*$$

$$p^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 \quad (11.35)$$

Al igual que el flujo de fuente lineal, el flujo de vórtice lineal posee una presión menor que p_∞^* para cualquier radio finito; conforme menor sea el radio, más se cumplirá esto. Esta presión p^* se vuelve negativa en $r < r_c \equiv \sqrt{\rho\Gamma^2/2p_\infty^*}/2\pi$ por lo que el flujo es físicamente imposible para $r < r_c$. El gradiente positivo de presión, $\partial p/\partial r$, proporciona la fuerza hacia adentro necesaria para acelerar centrífugamente las partículas del fluido que se mueven en un círculo sobre una línea de corriente. La distribución radial de presión en un vórtice lineal es idéntica a la que se presenta en la figura 11.6 si q se sustituye por Γ .¹⁰

¹⁰ Para lograr consistencia dimensional en un problema real, se debe escribir la ecuación 11.33 como $\psi = (\Gamma/2\pi) \ln (ra)$, donde a es una dimensión arbitraria del flujo y puede considerarse igual a r_c . Esto no ejerce efecto alguno sobre el campo de velocidad.

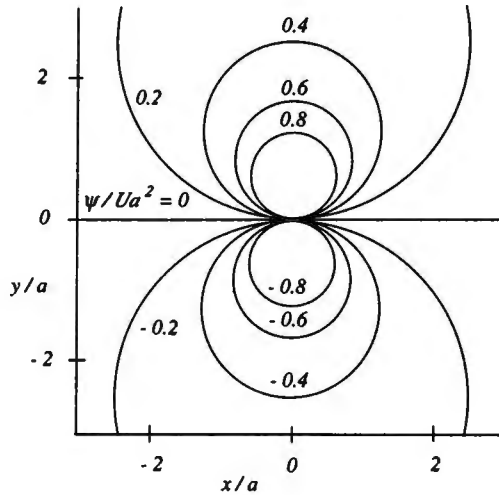


Figura 11.8 Líneas de corriente del doblete lineal, $\psi = Ua^2 \text{sen } \theta/r$ para valores de ψ/Ua^2 que se encuentran espaciados de manera uniforme.

Doblete lineal

Un doblete lineal es un flujo formado en el límite a partir de una fuente lineal con intensidad q en $x = \epsilon$ y un sumidero lineal con intensidad $-q$ en $x = -\epsilon$ que se unen ($\epsilon \rightarrow 0$) en tanto que el producto $q\epsilon$ se mantiene constante. La función de corriente y las componentes de la velocidad del doblete son:

$$\psi = Ua^2 \left(\frac{\text{sen } \theta}{r} \right) = Ua^2 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.36)$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Ua^2 \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right); \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = Ua^2 \left(\frac{\text{sen } \theta}{r^2} \right)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = Ua^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right); \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ua^2 \left(\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (11.37)$$

donde U y a , una escala de velocidad y longitud que caracteriza al flujo, se introducen por conveniencia en los análisis subsecuentes. Las líneas de corriente de la ecuación 11.36 para el doblete lineal se ilustran en la figura 11.8.

La función de corriente del doblete lineal, ecuación 11.36, satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = Ua^2 \left(\frac{2 \text{sen } \theta}{r^3} - \frac{\text{sen } \theta}{r^3} - \frac{1}{r^3} \text{sen } \theta \right) = 0$$

El flujo por un doblete lineal tiene una propiedad especial. Supóngase que en un instante dado de tiempo existe un cilindro sólido circular de radio a localizado con su centro en $r = 0$. (Éste sería un círculo en la figura 11.8 con radio unitario.) Si en este instante se moviera el cilindro con una velocidad $\mathbf{V} = U \mathbf{i}_x$ en la dirección x , entonces en cualquier punto sobre esta circunferencia la componente de su velocidad en la dirección radial sería $U \cos \theta$. Sin embargo, en $r = a$, la velocidad radial del flujo por el doblete es también $V_r = U \cos \theta$, v.g., no habría flujo a través de la frontera del cilindro circular si el flujo externo a éste fuera el flujo de doblete para $r \geq a$. Por lo tanto, la función de corriente del doblete describe el flujo instantáneo no estacionario fuera de un cilindro circular con centro en $r = 0$ y que se mueve con una velocidad $\mathbf{V} = U \mathbf{i}_x$.

El fluido puesto en movimiento por un cilindro circular que se mueve, que se ilustra con las líneas de corriente de la figura 11.8 para $r/a \geq 1$, tiene una energía cinética que se imprime al flujo por la aceleración del cilindro, desde el reposo hasta una velocidad U . Puede calcularse esta energía cinética por unidad de anchura del flujo (ec) al integrar $\rho V^2/2$ sobre un área plana para $r \geq a$.

$$\begin{aligned} ec &= \frac{\rho}{2} \int_a^\infty (V_r^2 + V_\theta^2) 2\pi r dr = \pi\rho(Ua^2)^2 \int_a^\infty \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^4} + \frac{\sin^2 \theta}{r^4} \right) r dr \\ &= \pi\rho(Ua^2)^2 \int_a^\infty \frac{1}{r^3} dr = \pi\rho(Ua^2)^2 \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_a^\infty \\ &= \frac{U^2}{2} (\rho\pi a^2) \end{aligned} \quad (11.18)$$

Esta energía cinética del fluido por unidad de longitud del cilindro es, así, igual a la energía cinética por unidad de masa del cilindro ($U^2/2$) por la masa del fluido desplazado por el cilindro por unidad de longitud del cilindro, $\rho\pi a^2$. Esta masa de fluido se conoce como *masa por arrastre* porque aumenta de hecho la masa que se acelera cuando se aplica una fuerza externa al cilindro sumergido en un líquido.

Ejemplo 11.3

La frecuencia f de vibración de un alambre de longitud L sometido a una tensión T es:

$$f = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

donde m es la masa del alambre por unidad de longitud. Si un alambre con densidad relativa SG se sumerge en agua, deduzca una expresión para su frecuencia de vibración.

Solución

La masa efectiva por unidad de longitud de alambre es la suma de la masa del alambre por unidad de longitud m más la masa del agua por unidad de longitud que desplazó el

alambre, m/Sg , que en total es $(1 + 1/Sg)m$. La frecuencia f del alambre sumergido se convierte así en:

$$f = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T(Sg)}{m(1 + Sg)}}$$

Flujo en un codo

Una función de corriente simple que satisface la ecuación de Laplace describe un flujo en la vecindad de dos paredes rectas que se encuentran en $r = 0$:

$$\psi = Ar^n \sin n\theta \quad (11.39)$$

donde A es una constante. Cuando $n\theta = 0$ o π , $\psi = 0$, las líneas radiales $\theta = 0$ y π/n son líneas de corriente rectas del flujo que pueden considerarse como las paredes que se intersecan en $r = 0$ formando un ángulo $\phi \equiv \pi/n$. Las componentes de la velocidad V_r y V_θ y la magnitud V de la velocidad son:

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Anr^{n-1} \cos n\theta; & V_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -Anr^{n-1} \sin n\theta \\ V &= \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = Anr^{n-1} \end{aligned} \quad (11.40)$$

Adviértase que la velocidad del flujo V es una función sólo del radio r . Si $n > 1$ ($\phi < \pi$), $V = 0$ en $r = 0$, y el flujo en el codo es un punto de estancamiento en tanto que $V = \infty$ en $r = \infty$. Por otra parte, si $n < 1$ ($\phi > \pi$), entonces $V = \infty$ en $r = 0$, y el flujo es singular en el codo. El caso de $n = 1$ ($\phi = \pi$) se reduce a las ecuaciones 11.28-11.29 para un flujo uniforme con $A = U$.

Es posible encontrar la presión p^* aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto del flujo y $r = 0$, donde $p^* = p_0^*$ cuando $\phi < \pi$, o $r = \infty$ y $p^* = p_\infty^*$ cuando $\phi > \pi$:

$$\begin{aligned} p^* &= p_0^* - \frac{\rho}{2} (Anr^{n-1})^2 & (n > 1; \phi < \pi) \\ &= p_\infty^* - \frac{\rho}{2} (Anr^{n-1})^2 & (n < 1; \phi > \pi) \end{aligned} \quad (11.41)$$

Adviértase que la presión p^* se hace negativa cuando $r > (\sqrt{2p_0^*/\rho}/An)^{1/n-1}$ o $r < (\sqrt{2p_\infty^*/\rho}/An)^{1/n-1}$ para $n > 1$ o $n < 1$, respectivamente.

Las líneas de corriente del flujo para $\phi = \pi/4$ y $2\pi/3$ se grafican a la izquierda y derecha de la figura 11.9, respectivamente. Para estos dos flujos, el origen $r = 0$ es un punto de estancamiento. En el intervalo $2\pi/3 > \theta > -2\pi/3$, el segundo de estos dos flujos también describe el flujo simétrico al lado y más allá de una cuña de ángulo comprendido o incluso de $2\pi/3$.

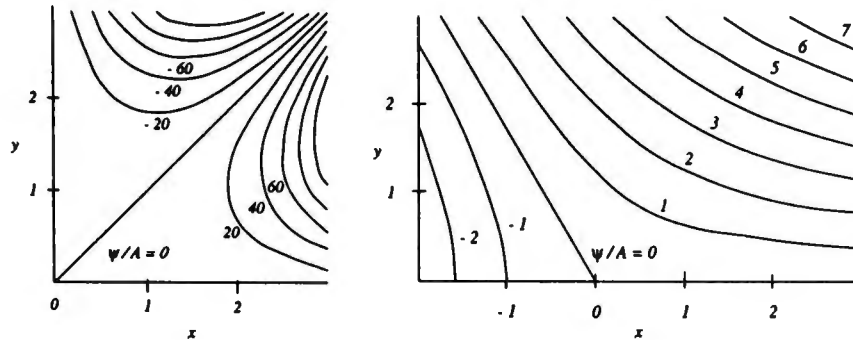


Figura 11.9 Líneas de corriente correspondientes al flujo en un codo cuando $\phi = \pi/4$ (izquierda) y $\phi = 2\pi/3$ (derecha).

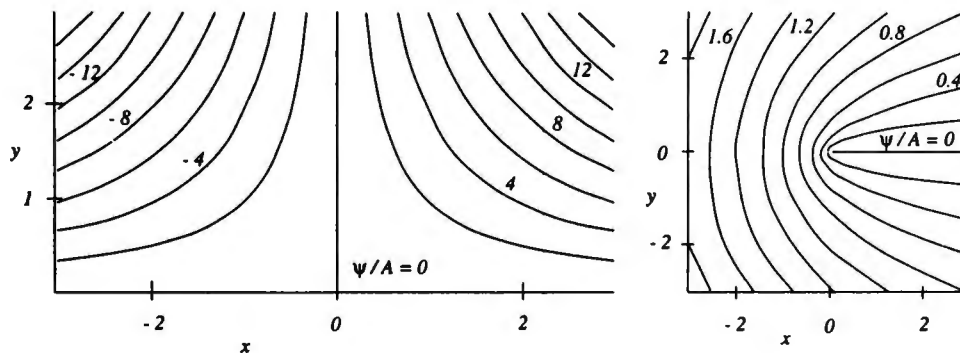


Figura 11.10 Líneas de corriente correspondientes al flujo en un codo para $\phi = \pi/2$ (izquierda) y $\phi = 2\pi$ (derecha).

El flujo en el codo para $\phi = \pi/2$, cuyas líneas de corriente aparecen en la parte izquierda de la figura 11.10, representan un flujo plano con punto de estancamiento para $\pi \geq \theta \geq 0$. Para este flujo, la función de corriente y las velocidades son:

$$\psi = Ar^2 \sin 2\theta = 2Ar^2 \sin \theta \cos \theta = 2Axy \quad (11.42)$$

$$V_r = 2Ar \cos 2\theta ; \quad V_\theta = -2Ar \sin 2\theta$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2Ax ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2Ay \quad (11.43)$$

Las líneas de corriente son hipérbolas.

El patrón de las líneas de corriente para $\phi = 2\pi$, que se ejemplifica a la derecha de la figura 11.10, representa un flujo alrededor del extremo de una placa plana semiinfinita ($y = 0; x \geq 0$). Para este flujo, en $r = 0$, $V = \infty$ y $p^* = -\infty$.

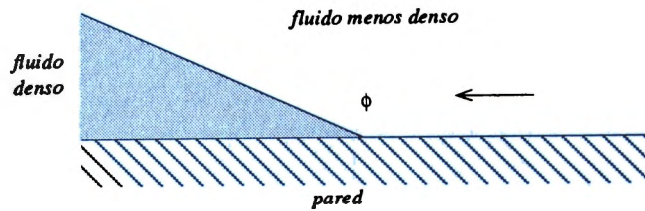


Figura E 11.4

Ejemplo 11.4

Un fluido poco denso con densidad ρ_l fluye por encima de un fluido cuneiforme más denso (ρ_h de densidad) que es estacionario, como se ilustra en la figura E 11.4. Obtenga una expresión para el ángulo ϕ y la constante A de la función de corriente del fluido menos denso en términos de la razón de densidades ρ_h/ρ_l .

Solución

A lo largo de la línea de corriente del fluido menos denso que está en contacto con el fluido denso, la ecuación de Bernoulli 11.41 da:

$$p + \rho_l g r \sin \phi + \frac{\rho_l}{2} (A n r^{n-1})^2 = p_0$$

en tanto que en el fluido denso estacionario se encuentra:

$$p + \rho_h g r \sin \phi = p_0$$

Puesto que la presión p es la misma en cada fluido en la frontera que comparten,

$$(A n r^{n-1})^2 = \left(\frac{\rho_h}{\rho_l} - 1 \right) 2 g r \sin \phi$$

Pero el exponente r debe ser el mismo en ambos lados de esta ecuación. Por lo que $n = 3/2$ y $\phi = 2\pi/3$, que es el mismo valor que el del flujo en el lado derecho de la figura 11.9 al sustituir,

$$\left(\frac{3}{2} A \right)^2 = \left(\frac{\rho_h}{\rho_l} - 1 \right) 2 g \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$A = \frac{2}{3} \sqrt{(\rho_h/\rho_l - 1) \sqrt{3} g}$$

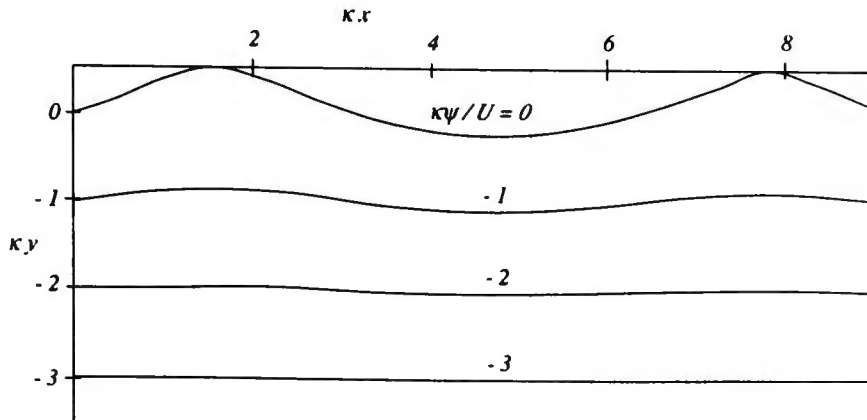


Figura 11.11 Líneas de corriente de un flujo a lo largo de una pared corrugada (línea de corriente superior), que presentan aumentos iguales de $\kappa\psi/U$ para $\epsilon = 0.3$. La ordenada es κy y la abscisa κx , donde $\kappa = 2\pi/\lambda$, λ es la longitud de onda del corrugado.

Flujo por una pared corrugada; ondas de gravedad

La función $\exp(\kappa y)$ sen κx es una solución a la ecuación de Laplace y, por lo tanto, una posible función de corriente. Si se elige una función de corriente, que sea la suma de un flujo uniforme más esta nueva función, con la forma:

$$\psi = Uy - \epsilon \left(\frac{U}{\kappa} \right) \exp(\kappa y) \text{ sen } \kappa x \quad (11.44)$$

se tendría un flujo estacionario con velocidad horizontal promedio U debajo de la pared corrugada con longitud de onda $\lambda = 2\pi/\kappa$ para $\psi \leq 0$, $y < 0$. Las líneas de corriente del flujo aparecen en la figura 11.11 para el caso $\epsilon = 0.3$.

Las componentes de la velocidad de este flujo son:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U[1 - \epsilon \exp(\kappa y) \text{ sen } \kappa x]$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \epsilon U \exp(\kappa y) \cos \kappa x$$

$$V^2 = u^2 + v^2 = U^2[1 - 2\epsilon \exp(\kappa y) \text{ sen } \kappa x + (\epsilon \exp[\kappa y])^2] \quad (11.45)$$

La perturbación del flujo ocasionada por la pared se desvanece exponencialmente conforme $y \rightarrow -\infty$.

Para encontrar la presión en el flujo, se aplica la ecuación de Bernoulli entre un punto en el flujo y $y \rightarrow -\infty$, donde $p^* = p_\infty^*$ y $V = U$:

$$\frac{p^*}{\rho} + \frac{U^2}{\rho} [1 - 2\epsilon \exp(\kappa y) \operatorname{sen} \kappa x + (\epsilon \exp[\kappa y])^2] = \frac{p_\infty^*}{\rho} + \frac{U^2}{\rho}$$

$$p^* - p_\infty^* = \frac{\rho}{2} [2\epsilon \exp(\kappa y) \operatorname{sen} \kappa x - (\epsilon \exp[\kappa y])^2] \quad (11.46)$$

Puede encontrarse un valor particular de la velocidad U del flujo para la cual la presión p se haga constante a lo largo de una línea de corriente siempre que $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}$, y $\epsilon \ll 1$. Cuando esto sucede, puede quitarse la pared y sustituirla por aire a presión constante. El flujo resultante es una onda de gravedad estacionaria sobre la superficie de un líquido, para la cual las líneas de corriente son las mismas que las de la figura 11.11, y el líquido ocupa el espacio donde $\psi \leq 0$, y $y < 0$. A fin de ver cómo se elige U para este caso, considérese el flujo cuando $\epsilon \ll 1$ y los términos proporcionales a ϵ^2 pueden desecharse de las ecuaciones 11.45 y 11.46. La ecuación de Bernoulli se transforma en:

$$\frac{p}{\rho} + gy + \frac{U^2}{\rho} [1 - 2\epsilon \exp(\kappa y) \operatorname{sen} \kappa x] = \frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

$$p = p_0 - \rho gy + \rho \epsilon U^2 \exp(\kappa y) \operatorname{sen} \kappa x \quad (11.47)$$

donde p_0 es la presión en $x = 0$, $y = 0$ y $u^2 + v^2 = U^2$. Al combinar la ecuación 11.47 con la 11.44 para la función de corriente ψ ,

$$p = p_0 - \frac{\rho g \psi}{U} - \rho \left(\frac{g}{\kappa} - U^2 \right) \epsilon \exp(\kappa y) \operatorname{sen} \kappa x \quad (11.48)$$

Por lo tanto, la presión será constante a lo largo de una línea de corriente $\psi = \text{constante}$ si:

$$U = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (11.49)$$

La velocidad U de la ecuación 11.49 se conoce como *velocidad de fase* de la onda de gravedad con longitud de onda λ .¹¹ A diferencia de una onda de sonido, la velocidad de una onda de gravedad depende mucho de su longitud de onda λ . El periodo \mathcal{T} de la onda de gravedad, el tiempo que ésta requiere para recorrer una longitud de onda, es:

$$\mathcal{T} = \frac{\lambda}{U} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \quad (11.50)$$

¹¹ La velocidad de fase U de una onda es igual a la razón ω/κ , donde $\omega = 2\pi U/\lambda$ es la frecuencia angular del movimiento ondulatorio medido en un sistema de coordenadas fijo en el fluido. La *velocidad de grupo*, que es la velocidad de propagación de la energía de la onda, es $d\omega/d\kappa$. Para ondas gravitatorias en la superficie de un fluido, la velocidad de grupo se transforma, así, en la mitad de la velocidad de fase. Las ondas gravitatorias experimentan *dispersión*, v.g., la vibración de una onda se propaga con el tiempo en virtud de que las velocidades de fase y de grupo son diferentes.

Esta relación es idéntica a la que existe entre el periodo T y la longitud λ de un péndulo simple.

Ejemplo 11.5

Un fluido con densidad ρ_1 ocupa el semiespacio superior $y > 0$ por encima de un fluido más denso de densidad ρ_2 , el cual ocupa el otro semiespacio inferior $y < 0$. La interfaz entre los dos fluidos se perturba por una onda de gravedad de forma senoidal con longitud de onda $\lambda = 2\pi/\kappa$. Encuentre una relación entre la velocidad de propagación de esta onda, U , y los parámetros λ , ρ_1 y ρ_2 .

Solución

Para el semiespacio inferior del fluido 2, seleccione la función de corriente de la ecuación 11.44:

$$\psi_1 = Uy - \epsilon \left(\frac{U}{\kappa} \right) \exp(\kappa y) \sin \kappa x$$

con $\epsilon \ll 1$. Para el semiespacio superior, se necesita una función de corriente similar, a excepción de que la perturbación debe desaparecer cuando $y \rightarrow \infty$, pero la cual debe ser igual a ψ_1 en la interfaz $y = 0$. Por lo tanto, se elige:

$$\psi_2 = Uy - \epsilon \left(\frac{U}{\kappa} \right) \exp(-\kappa y) \sin \kappa x$$

La presión p_1 en el fluido 1 está dada por la ecuación 11.48 con $\rho = \rho_1$:

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho_1 g \psi_1}{U} - \rho_1 \left(\frac{g}{\kappa} - U^2 \right) \epsilon \exp(\kappa y) \sin \kappa x$$

Siguiendo los mismos pasos que condujeron a esta expresión, se encuentra que p_2 es:

$$p_2 = p_0 - \frac{\rho_2 g \psi_2}{U} - \rho_2 \left(\frac{g}{\kappa} + U^2 \right) \epsilon \exp(\kappa y) \sin \kappa x$$

el cambio en el signo algebraico del término que contiene a U^2 proviene del signo del factor exponencial. A lo largo de la interfaz entre los dos fluidos, $\psi_1 = \psi_2 = 0$, las presiones deben ser iguales en los dos fluidos, v.g., $p_1 = p_2$ o:

$$\rho_1 \left(\frac{g}{\kappa} - U^2 \right) = \rho_2 \left(\frac{g}{\kappa} + U^2 \right)$$

$$U = \sqrt{\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right) \frac{g}{\kappa}}$$

Adviértase que conforme $\rho_2 - \rho_1 \rightarrow 0$, la velocidad de onda $U \rightarrow 0$ en la interfaz.

Una onda de este tipo se conoce como *onda interna*. Por lo general se encuentra en los estuarios donde el agua dulce fluye por encima de agua de mar que es ligeramente más densa.

11.4.2 Superposición de flujos elementales

Flujo que pasa por una fuente lineal

Si se suma un flujo uniforme al de una fuente lineal, el fluido emitido desde la fuente lineal es arrastrado en dirección corriente abajo. La función de corriente y las coordenadas de velocidad para este flujo son simplemente la suma de las correspondientes al flujo uniforme y a la fuente lineal, ecuaciones 11.28-11.31. Sin embargo, conviene introducir una longitud $a \equiv q/2\pi U$, la distancia radial desde la fuente lineal para la cual la velocidad radial es igual a U , en lugar de q . En términos de U y a , la función de corriente y las componentes de la velocidad son:

$$\psi = Ur \sin \theta + Ua\theta = Uy + Ua \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (11.51)$$

$$V_r = U \cos \theta + \frac{Ua}{r}; \quad V_\theta = -U \sin \theta$$

$$u = U + Ua \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right); \quad v = Ua \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.52)$$

Las líneas de corriente del flujo se ilustran en la figura 11.12. En el punto $x = -a$, $y = 0$, la velocidad del fluido es cero: éste es un punto de estancamiento del flujo en el cual el flujo uniforme que llega hizo que el flujo de la fuente diera un giro. La línea de corriente de forma parabólica que pasa por el punto de estancamiento, $\psi = \pm \pi Ua$, separa al flujo uniforme del flujo de la fuente. Esta línea de corriente se hace, con el tiempo, paralela al eje x cuando $x \rightarrow \infty$ donde $y = \pm \pi a$.

Para encontrar la presión en el flujo, se aplica la ecuación de Bernoulli entre un punto en el flujo y $R \rightarrow \infty$, donde $\mathbf{V} = U \mathbf{i}_x$ y $p^* = p_\infty^*$.

$$\begin{aligned} p^* + \frac{\rho}{2} (V_r^2 + V_\theta^2) &= p_\infty^* + \frac{\rho}{2} U^2 \\ p^* &= p_\infty^* + \frac{\rho}{2} (U^2 - V_r^2 - V_\theta^2) \\ p^* &= p_\infty^* - \frac{\rho}{2} U^2 \left(\frac{a}{r} \right) \left[\left(\frac{a}{r} \right) + 2 \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (11.53)$$

Para que persista el flujo de la figura 11.12, debe existir una fuerza externa por unidad de anchura del flujo, f_{ex} , que actúe sobre la fuente lineal en la dirección positiva de x . Esta fuerza es la responsable del aumento que ocurre en la cantidad de movimiento del flujo de la fuente de cero, en la fuente, a $\rho q U$ en $x = \infty$. Para demostrar que éste es

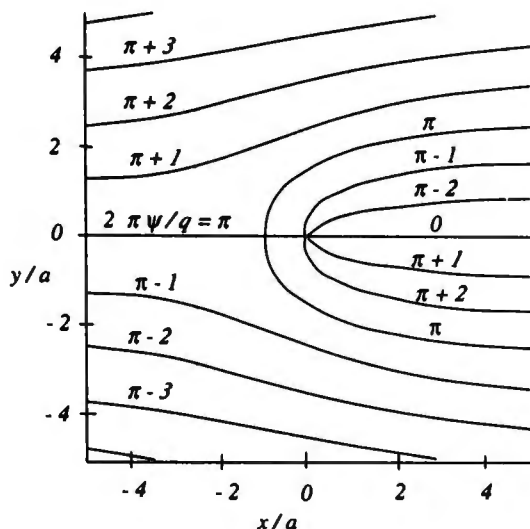


Figura 11.12 Líneas de corriente de un flujo que pasa por una fuente lineal para aumentos iguales de $2\pi\psi/q$. Las coordenadas del plano son x/a , y/a , donde $a \equiv q/2\pi U$.

el caso, se aplicará la componente x del teorema de la cantidad de movimiento, ecuación 5.11, al flujo a través de un volumen de control de radio r y distancia unitaria normal al plano del flujo:

$$\iint_S \rho u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (-p^*) \mathbf{n} dS + f_{ex}$$

$$\rho \int_0^{2\pi} u V_r r d\theta = - \int_0^{2\pi} (p^* \cos \theta) r d\theta + f_{ex}$$

$$\rho \int_0^{2\pi} U^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right) \left(\cos \theta + \frac{a}{r}\right) r d\theta = \int_0^{2\pi} \rho U^2 \left(\frac{a}{r}\right) (\cos^2 \theta) r d\theta + f_{ex}$$

$$\rho a U^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \rho a U^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + f_{ex}$$

$$f_{ex} = 2\pi \rho a U^2 = \rho q U \quad (11.54)$$

donde se utilizó la ecuación 11.53 para sustituir p^* y, en las líneas tres y cuatro, se eliminaron las integrales que son cero, pues sus integrandos tienen el factor $\cos \theta$ a la primera potencia.

Si se sustituye el fluido de la fuente por un cuerpo sólido semiinfinito con la forma de una línea de corriente que pasa por el punto de estancamiento y que se extiende hasta

$x = \infty$ (que se conoce como *semicuerpo de Rankine*), el flujo residual resultante no ejercería una fuerza neta sobre el cuerpo.¹²

Al superponer varias fuentes y sumideros lineales a lo largo del eje x de un flujo uniforme, es posible encontrar líneas de corriente del flujo cerradas y puede considerarse que éstas forman la superficie de cuerpos cerrados si las intensidades totales de la fuente y el sumidero suman cero. El fluido no ejercerá ninguna fuerza de resistencia al avance en esos cuerpos, una consecuencia del flujo irrotacional que se conoce como la *paradoja de d'Alembert*.¹³

Flujo que pasa por un vórtice lineal

Si se superpone un flujo uniforme con un vórtice lineal, el flujo resultante será asimétrico alrededor del eje x . Al restar las ecuaciones 11.33 y 11.34 de las 11.30 y 11.31 de forma que la circulación Γ en el sentido de las manecillas del reloj sea positivo, la función de corriente y las velocidades se convierten, después de introducir la escala de longitud $a \equiv \Gamma/2\pi U$:

$$\psi = Ur \sin \theta + Ua \ln \left(\frac{r}{a} \right) = Uy + Ua \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \quad (11.55)$$

$$V_r = U \cos \theta; \quad V_\theta = -U \sin \theta - \frac{Ua}{r}$$

$$u = U + Ua \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right); \quad v = -Ua \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.56)$$

Las líneas de corriente del flujo de la figura 11.13 presentan un punto de estancamiento en $x/a = 0$, $y/a = -1$, el punto donde la velocidad del vórtice V_θ contrarresta justamente el flujo uniforme U . Por encima de este punto de estancamiento se encuentra una línea de corriente cerrada, $\psi = -Ua = -\Gamma/2\pi$. El interior de esta línea de corriente podría sustituirse por un cuerpo sólido con forma de gota fuera del cual existe un flujo irrotacional con circulación Γ .

Aplicando la ecuación de Bernoulli, puede encontrarse la presión en el flujo:

$$p^* + \frac{\rho}{2} (V_r^2 + V_\theta^2) = p_\infty^* + \frac{\rho}{2} U^2$$

¹² Si se aplica el teorema de la cantidad de movimiento sólo al flujo de la fuente, la cantidad de movimiento del flujo de salida $\rho q U$ es igual a la fuerza aplicada f_{ex} en la fuente, de modo que la integral de presión en la superficie del cuerpo debe ser cero.

¹³ Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) fue el primero en obtener la expresión para la conservación de la masa del flujo de un fluido. En un tratado sobre la resistencia de los fluidos, d'Alembert enunció su paradoja pero no fue capaz de explicar por qué los fluidos reales provocan una resistencia al avance en cuerpos sumergidos. Más tarde en 1905, Ludwig Prandtl explicó este hecho en su famoso artículo relacionado con el flujo de la capa límite.

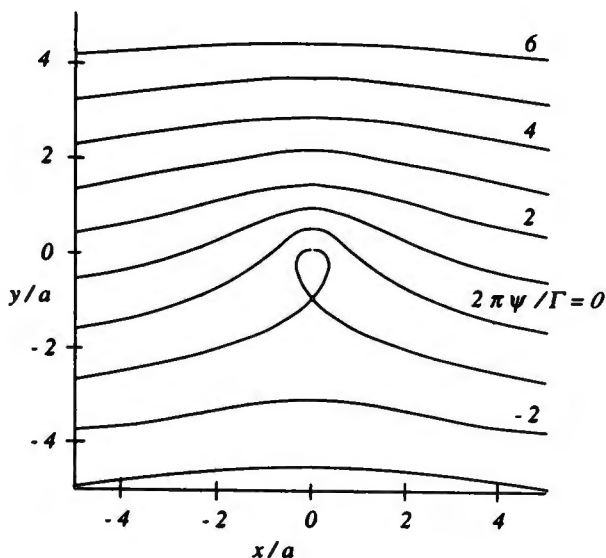


Figura 11.13 Líneas de corriente de un flujo que pasa por un vórtice lineal con circulación Γ en el sentido de las manecillas del reloj para incrementos iguales de $2\pi\psi/\Gamma$. Las coordenadas planas son x/a , y/a , donde $a \equiv \Gamma/2\pi U$.

$$p^* = p_\infty^* + \frac{\rho}{2} (U^2 - V_r^2 - V_\theta^2)$$

$$p^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} U^2 \left(\frac{a}{r} \right) \left[\left(\frac{a}{r} \right) + 2 \operatorname{sen} \theta \right] \quad (11.57)$$

El cuerpo encerrado por la línea de corriente cerrada, o el vórtice lineal, experimenta una fuerza ascensional por unidad de longitud ℓ que es proporcional a Γ . Para deducir la relación exacta entre ℓ y Γ , se aplica la componente y del teorema de la cantidad de movimiento a una superficie de control de radio r y espesor unitario en la dirección normal al plano x, y , advirtiendo que la fuerza externa aplicada a la superficie de control es $-\ell$:

$$\iint_S \rho v \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (-p^*) \mathbf{n} \, dS - \ell$$

$$\rho \int_0^{2\pi} v V_r r \, d\theta = - \int_0^{2\pi} (p^* \operatorname{sen} \theta) r \, d\theta - \ell$$

$$\rho \int_0^{2\pi} U^2 \left(\frac{a}{r} \cos \theta \right) (\cos \theta) r \, d\theta = \int_0^{2\pi} \rho U^2 \left(\frac{a}{r} \right) \operatorname{sen}^2 \theta r \, d\theta - \ell$$

$$-\rho a U^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \rho a U^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta - \ell$$

$$\ell = 2\pi \rho a U^2 = \rho U \Gamma \quad (11.58)$$

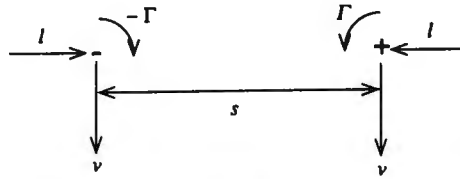


Figura 11.14 La velocidad v inducida y la fuerza ascensional l que experimentan dos vórtices ligados con circulaciones opuestas, separados una distancia s .

donde se utilizó la ecuación 11.57 para sustituir p^* y se omitieron los términos que en el integrando contienen $\sin \theta$ a la primera potencia, cuyas integrales son cero.

La ecuación 11.58, la cual relaciona la fuerza ascensional por unidad de longitud ℓ con la circulación Γ alrededor de un cuerpo cilíndrico en un flujo plano con velocidad U , se conoce como el *teorema de Kutta-Joukowski*. Para relacionar las direcciones de la fuerza ascensional por unidad de longitud, la velocidad del flujo y la circulación, esa ecuación puede expresarse en forma vectorial como:

$$\ell = \rho \mathbf{V} \times \Gamma \quad (11.59)$$

donde el vector circulación Γ tiene magnitud Γ y su dirección es normal a la superficie encerrada por la curva C que define la circulación. (En el caso de una circulación en el sentido de las manecillas del reloj en el plano de la figura 11.13, $\Gamma = -\Gamma \mathbf{i}_z$.)

El vórtice lineal de la figura 11.13 se conoce como *vórtice ligado*, pues se mantiene en una posición fija al fluir hacia él el fluido que llega. Un vórtice ligado experimenta una fuerza ascensional dada por la ecuación 11.59. Si el vórtice puede moverse libremente con el fluido, v.g., no tiene velocidad relativa al fluido que lo rodea, entonces no experimenta fuerza ascensional y se denomina *vórtice libre*.

Dos vórtices lineales ligados ejercen fuerzas entre sí porque cada uno de ellos induce un flujo en la localización del otro vórtice. La figura 11.14 ilustra dos vórtices lineales que tienen circulaciones iguales en magnitud pero cuyos sentidos son opuestos y que están separados una distancia s , en un fluido que es estacionario en el infinito. Cada uno de estos vórtices induce un flujo hacia abajo con velocidad $v = -\Gamma/2\pi s$ en el centro del otro vórtice. Por la ecuación 11.59, la fuerza ascensional por unidad de longitud, $\ell = \rho(\Gamma/2\pi s)\Gamma = \rho\Gamma^2/2\pi s$, está dirigida hacia el otro vórtice. En otras palabras, dos vórtices ligados con circulación opuesta se atraen entre sí con una fuerza igual a $\rho\Gamma^2/2\pi s$ que debe ser contrarrestada por una fuerza externa opuesta a fin de mantener su separación. Sin embargo, si los vórtices tienen libertad para moverse, se desviarán hacia abajo con una velocidad $v = -\Gamma/2\pi s$, sin experimentar una fuerza de atracción puesto que no presentan un movimiento relativo al fluido cercano. Si los vórtices tienen circulaciones en el mismo sentido, experimentarán una fuerza de repulsión si se encuentran ligados y derivan en un círculo alrededor de su centro geométrico en caso de ser libres.

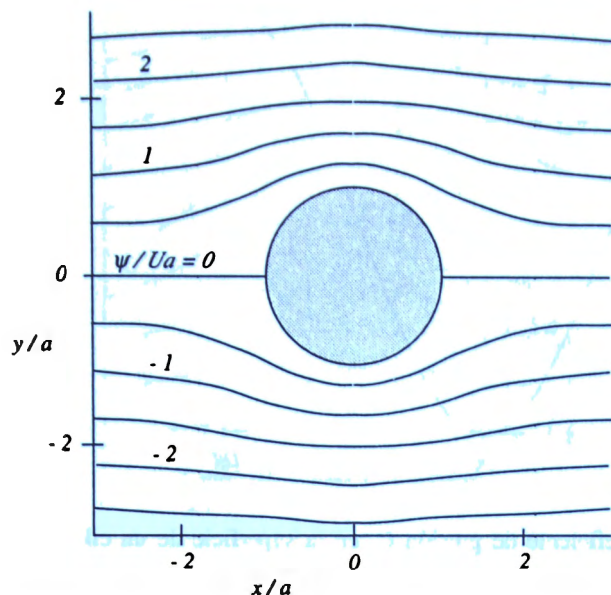


Figura 11.15 Líneas de corriente de un flujo que pasa al lado de un cilindro circular de radio a para incrementos ψ/Ua iguales.

Flujo sobre un cilindro circular

El flujo no estacionario de un cilindro circular en movimiento, ecuaciones 11.36 y 11.37 para $r \geq a$, puede transformarse en un flujo estacionario sobre el cilindro al sustraer el flujo no estacionario del flujo uniforme, ecuaciones 11.28 y 11.29, con lo que se obtiene:

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta = Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.60)$$

$$V_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta; \quad V_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

$$u = U - Ua^2 \left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]; \quad v = -Ua^2 \left[\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad (11.61)$$

Las líneas de corriente del flujo, las cuales son simétricas alrededor de $x = 0$ y $y = 0$, se presentan en la figura 11.15. El flujo dentro de la línea de corriente circular cerrada ($\psi = 0$, $r = a$) puede sustituirse por un cilindro circular sólido de radio a . No existen puntos de estancamiento ($u = v = 0$) en $x = \pm a$, $y = 0$, los extremos anterior y posterior del cilindro.

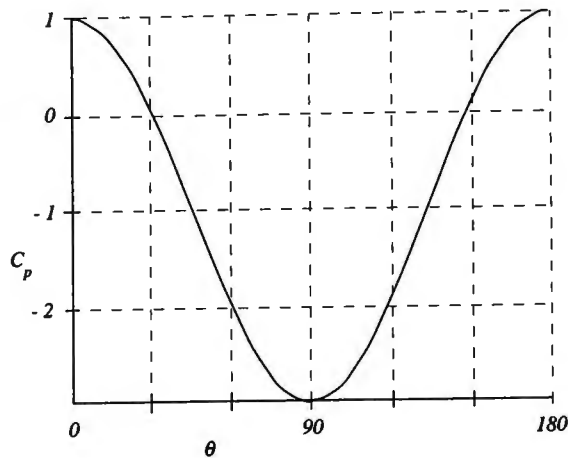


Figura 11.16 Coeficiente de presión C_p en la superficie de un cilindro circular en un flujo uniforme.

La presión en el flujo, a partir de la ecuación de Bernoulli, es:

$$p^* + \frac{\rho}{2} (V_r^2 + V_\theta^2) = p_\infty^* + \frac{\rho}{2} U^2$$

$$\begin{aligned} p^* &= p_\infty^* + \frac{\rho}{2} (U^2 - V_r^2 - V_\theta^2) \\ &= p_\infty^* + \frac{\rho}{2} U^2 \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \cos^2 \theta - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= p_\infty^* - \frac{\rho}{2} U^2 \left(\frac{a^2}{r^2} \right) \left[\left(\frac{a^2}{r^2} \right) - 2 \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (11.62)$$

y el coeficiente de presión C_p es:

$$C_p \equiv \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho U^2 / 2} = \left(\frac{a^2}{r^2} \right) \left[2 \cos 2\theta - \left(\frac{a^2}{r^2} \right) \right] \quad (11.63)$$

La distribución del coeficiente de presión en la superficie del cilindro ($r = a$) se grafica en la figura 11.16. Puesto que la distribución de presión es simétrica alrededor de $x = 0$ y $y = 0$, no existe fuerza neta sobre el cilindro. Adviértase que la presión en la mayoría de la superficie es menor que p_∞^* , y el valor mínimo de C_p en la superficie es -3 en $\theta = \pi/2$.

El campo del flujo irrotacional alrededor de un cilindro circular, el cual se ilustra en la figura 11.15, no describe muy bien el flujo viscoso real sobre un cilindro, pues este último se separa de la superficie, por lo regular entre 80° y 120° del punto delantero de

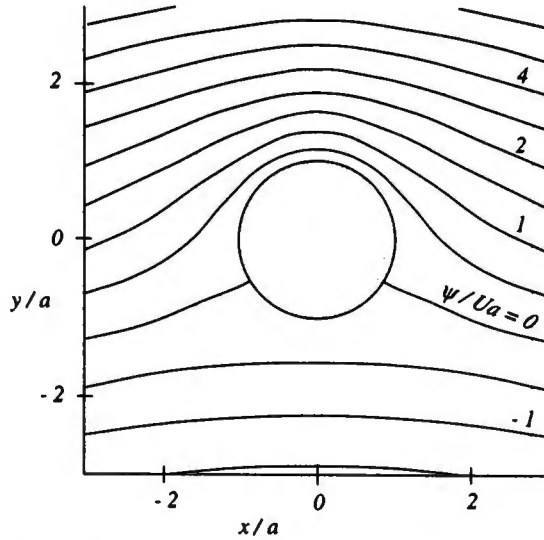


Figura 11.17 Flujo por un cilindro con una circulación $\Gamma = 2\pi Ua$. Las líneas de corriente se encuentran espaciadas para incrementos iguales de ψ/Ua .

estancamiento (que depende del número de Reynolds), formando una gran región de estela detrás del cilindro. El contorno alterado de esta región de estela cambia, en forma apreciable, el flujo irrotacional circundante y la distribución de presión en el cilindro, contribuyendo a la resistencia al avance del cilindro. Sin embargo, la región cercana al punto delantero de estancamiento se ve muy poco afectada y se asemeja al flujo irrotacional de la figura 11.15.

Si se agrega un vórtice lineal al flujo de la figura 11.15, el flujo resultante es aquel que pasa por un cilindro circular con fuerza ascensional. La función de corriente apropiada es:

$$\begin{aligned}\psi &= Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \\ &= Uy - Ua^2 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)\end{aligned}\quad (11.64)$$

Las líneas de corriente para el caso de $\Gamma = 2\pi Ua$, correspondientes a un vórtice con $V_\theta = -U$ en $r = a$, se grafican en la figura 11.17. La fuerza ascensional correspondiente es $\ell = \rho U \Gamma = \rho U^2 (2\pi a)$, y el coeficiente de la fuerza ascensional $C_L = \ell / (\rho/2) U^2 (2a) = 2\pi$.

Es posible generar un flujo semejante al de la figura 11.17 al hacer girar un cilindro circular alrededor de su eje en la sentido de la circulación. La fuerza ascensional resultante se conoce como *efecto Magnus*. De este modo, es posible generar coeficientes de la fuerza ascensional de hasta $\sim 2\pi$, pero las razones de la fuerza ascensional a la resistencia al avance son menores que 3, por lo que debe suministrarse potencia mecánica para hacer girar el cilindro.

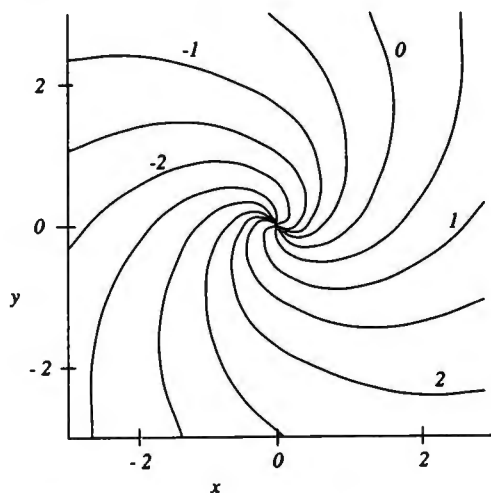


Figura 11.18 Líneas de corriente del flujo de un vórtice y sumidero lineales cuando $\Gamma = q$ para incrementos iguales de $2\pi\psi/\Gamma = 2\pi\psi/q$.

Vórtice y sumidero lineales

Si se combina un vórtice lineal con un sumidero lineal, el flujo resultante se arremolina conforme se mueve hacia el interior del origen. La función de corriente y las velocidades, que se determinan a partir de las ecuaciones 11.30-11.31 y 11.33-11.34, son:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r - \frac{q}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (11.65)$$

$$V_r = -\frac{q}{2\pi r}; \quad V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{qx - \Gamma y}{x^2 + y^2} \right); \quad v = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma x + qy}{x^2 + y^2} \right) \quad (11.66)$$

en tanto que la presión es:

$$p^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma^2 + q^2}{(2\pi r)^2} \right) \quad (11.67)$$

Las líneas de corriente, graficadas en la figura 11.18, son espirales cuya tangente forman un ángulo fijo con el vector radial, $\tan^{-1}(\Gamma/q)$. Los flujos de este tipo ocurren en separadores de partículas sólidas, que se conocen como separadores ciclónicos, en donde una corriente introducida tangencialmente en la periferia de un recipiente cilíndrico circular fluye hacia adentro en dirección del eje. Las partículas pesadas están centrifugadas hacia afuera e inciden sobre la pared externa, donde se unen. El flujo en un tornado también se parece al de la figura 11.18, pero no es estrictamente un flujo irrotacional debido a la rotación de la Tierra.

El método de imágenes

En el caso de un flujo irrotacional no viscoso, la condición en la frontera sobre el campo de velocidad en una pared sólida fija exige que la componente de la velocidad normal a la pared sea cero. Es posible satisfacer esta condición para un flujo elemental, como el de una fuente o vórtice lineal cerca de una pared plana, al superponer al flujo básico un campo de flujo que provenga de la imagen de un flujo elemental localizado simétricamente en el lado opuesto de la frontera compuesta por la pared. Por ejemplo, supóngase que una fuente lineal localizada en $x = 0, y = a$ se encuentra acotada por una pared sólida plana en $y = 0$. En ausencia de la pared, la función de corriente del flujo de la fuente correspondería a la dada en la ecuación 11.30 sustituyendo y por $y - a$:¹⁴

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y-a}{x} \right)$$

Para satisfacer la condición en la frontera de la pared, se debe agregar otra fuente de igual intensidad en $x = 0, y = -a$:

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y-a}{x} \right) + \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y+a}{x} \right) \quad (11.68)$$

Esto produce un flujo que es simétrico alrededor del eje x , que es una línea de corriente del flujo, como se grafica en la figura 11.19 para el caso de $a = 1$. La línea de corriente $\psi = 0$, la cual coincide con el eje y para $0 \leq y \leq 1$, y todo el eje x tiene un punto de estancamiento en el origen.

Refiriéndose a la ecuación 11.52, el campo de velocidad del flujo de la ecuación 11.68 es:

$$\begin{aligned} u &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + (y-a)^2} + \frac{x}{x^2 + (y+a)^2} \right); \\ v &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{y-a}{x^2 + (y-a)^2} + \frac{y+a}{x^2 + (y+a)^2} \right) \end{aligned} \quad (11.69)$$

A lo largo de la pared, donde $y = 0$, las componentes de la velocidad de la ecuación 11.69 son $v = 0$ y $u = (q/2\pi)[2x/(x^2 + a^2)]$, por lo que la presión p_w^* en la pared es:

$$p_w^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} \left(\frac{q}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{2x}{x^2 + a^2} \right)^2 \quad (11.70)$$

La presión p_w^* en la pared es igual a la presión de estancamiento p_∞^* en $x = 0$ y tiene mínimos en $x = \pm a$.

¹⁴ Si $\psi\{x, y\}$ es la función de corriente de un flujo elemental con centro en $x = 0, y = 0$, entonces $\psi\{x - b, y - a\}$ es la función de corriente del flujo elemental con centro en $x = b, y = a$.

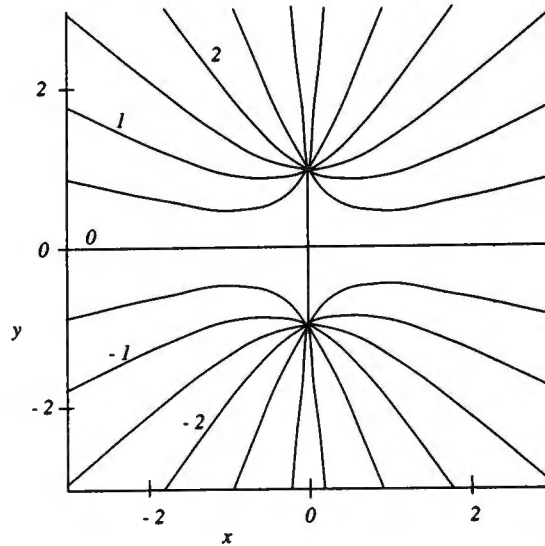


Figura 11.19 Las líneas de corriente del flujo que proviene de una fuente lineal en $x=0$, $y=1$ por encima de una frontera sólida en $y=0$ se forman colocando una fuente lineal imagen de igual intensidad en el punto $x=0$, $y=-1$ y se grafican para incrementos iguales de $2\pi\psi/q$.

A partir de la ecuación 11.69, se encuentra que la fuente lineal de la imagen induce una velocidad $v_i = (q/4\pi a)$ en el lugar $(x=0, y=a)$ donde se encuentra la fuente lineal original. De la ecuación 11.54, debe haber una fuerza externa por unidad de longitud, f_{ex} , aplicada a la fuente lineal en $x=0, y=a$:

$$f_{ex} = \rho q(v_i \mathbf{i}_y) = \frac{\rho q^2}{4\pi a} \mathbf{i}_y \quad (11.71)$$

Se necesita esta fuerza externa para equilibrar la fuerza de atracción que la pared, o la fuente imagen, ejerce sobre la fuente lineal. Por lo tanto, una fuente lineal es atraída por una pared cercana, y ésta hace que un sumidero lineal experimente una repulsión. No actúa fuerza neta sobre el fluido en el semiplano superior ($y \geq 0$), ya que la fuerza externa f_{ex} se encuentra equilibrada por la fuerza de presión $\int (p_w^* - p_\infty^*)$ que la pared ejerce sobre el flujo.

Ejemplo 11.6

Un vórtice lineal de circulación Γ se localiza en $x=1, y=1$. Éste se encuentra ligado a las paredes en $x=0$ y $y=0$, las cuales forman un codo en ángulo recto, el flujo del vórtice está ligado al primer cuadrante del plano x, y . (a) Escriba la función de corriente para este flujo del vórtice y haga un diagrama de las líneas de corriente. (b) Encuentre

una expresión para la fuerza ascensional por unidad de longitud ℓ que la proximidad de la pared ejerce sobre el vórtice lineal.

Solución

(a) La función de corriente de un vórtice lineal no ligado, ecuación 11.33, cuando éste se encuentra en $x = 1$, $y = 1$ sería:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln [(x-1)^2 + (y-1)^2]$$

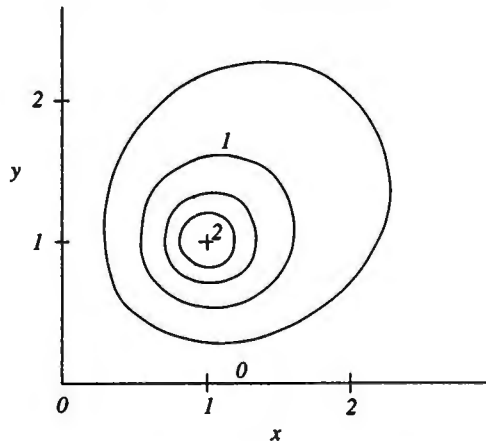
Para que no exista flujo a través de la frontera $y = 0$, debe colocarse la imagen de un vórtice lineal con circulación opuesta en $x = 1$, $y = -1$, para el cual la función de corriente es:

$$\psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln [(x-1)^2 + (y+1)^2]$$

Sin embargo, para garantizar que no haya flujo a través de la frontera en $x = 0$, se necesita colocar la imagen de dos fuentes en $x = -1$ cuyas circulaciones sean opuestas a estas dos. La función de corriente resultante es la suma de estas cuatro, la cual puede expresarse como el logaritmo del producto de los argumentos:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left(\frac{[(x-1)^2 + (y-1)^2][(x+1)^2 + (y+1)^2]}{[(x-1)^2 + (y+1)^2][(x+1)^2 + (y-1)^2]} \right)$$

Las líneas de corriente tienen la forma siguiente:



(b) De acuerdo con lo dicho referente a la figura 11.14, el vórtice lineal en $x = 1$, $y = 1$ está sujeto a una fuerza ascensional $\ell = -(\rho\Gamma^2/4\pi)\mathbf{i}_y$, debido a su imagen de circulación opuesta en $x = 1$, $y = -1$. En forma semejante, habrá una fuerza ascensional $\ell = -(\rho\Gamma^2/4\pi)\mathbf{i}_x$ a causa del vórtice imagen en $x = -1$, $y = 1$. La tercera fuente imagen de la misma circulación, en $x = -1$, $y = -1$, ejerce una fuerza ascensional que es menor por un factor de $\sqrt{2}$ que cualquiera de las otras, teniendo componentes en sentido

opuesto a la de las primeras dos que son menores por un factor de $(\sqrt{2})^2 = 2$. La fuerza ascensional total es, así:

$$\ell = -\frac{\rho\Gamma^2}{8\pi} (\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y)$$

El vórtice lineal experimenta una atracción hacia las paredes, al igual que en el caso de la fuente lineal.

11.5 Flujos irrotacionales de simetría axial

En esta sección, se consideran flujos irrotacionales cuyos vectores de velocidad se encuentran en el plano r, z (denominado *plano meridional*) de un sistema de coordenadas cilíndricas; estas coordenadas se definieron en la figura 11.3(b). Las componentes de la velocidad V_r, V_z (o V_R, V_ϕ) pueden expresarse en términos de las derivadas de la función de corriente $\psi\{r, z\}$ (o $\psi\{R, \phi\}$), como está dado en la ecuación 11.22 (o ecuación 11.23). Primero, se consideran algunos flujos elementales análogos a los que se trataron previamente en la sección 11.4.1 y luego se utiliza el principio de superposición para tratar algunas aplicaciones prácticas de estos flujos.

11.5.1 Flujos elementales

Flujo uniforme

En un flujo uniforme paralelo al eje z y con velocidad U , la velocidad \mathbf{V} es $U\mathbf{i}_z$. La función de corriente de este campo de velocidad es:

$$\psi = \frac{U}{2} r^2 = \frac{U}{2} (R \sin \phi)^2 \quad (11.72)$$

y las componentes de la velocidad son:

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = U$$

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = U \cos \phi \quad V_\phi = -\frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -U \sin \phi \quad (11.73)$$

Las líneas de corriente de este flujo se presentan en la figura 11.20 para incrementos iguales de ψ/U . Adviértase que las líneas de corriente no se encuentran igualmente espaciadas, como lo eran las de la figura 11.4 correspondientes al flujo plano, pues el área del flujo dentro de cada línea de corriente es proporcional a r^2 . El gasto volumétrico por unidad de aumento en r se incrementa con la distancia a partir del eje $r = 0$.

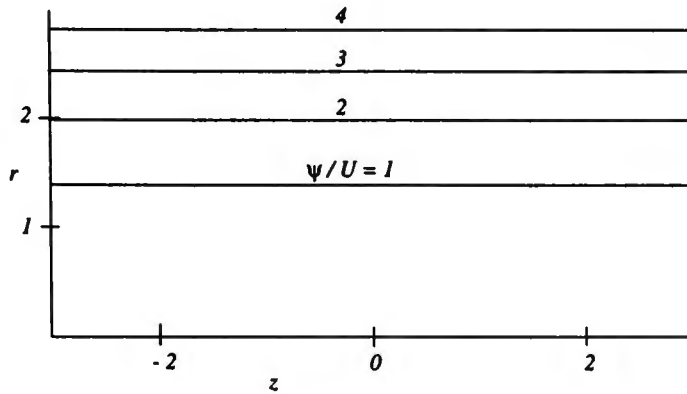


Figura 11.20 Líneas de corriente de un flujo uniforme de simetría axial, $\psi = Ur^2/2$, para incrementos iguales de ψ/U .

Fuente puntual

Si el flujo de un fluido fluye en la dirección radial hacia afuera por igual en todas direcciones a partir de un punto y con un gasto volumétrico Q , entonces para un fluido incompresible, la velocidad radial V_R tendría que satisfacer el principio de conservación de la masa:

$$\rho V_R(4\pi R^2) = \rho Q; \quad V_R = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (11.74)$$

La función de corriente del campo de velocidad del fluido puntual y las correspondientes componentes de la velocidad son:

$$\psi = -\left(\frac{Q}{4\pi}\right) \cos \phi = -\left(\frac{Q}{4\pi}\right) \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (11.75)$$

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \frac{Q}{4\pi R^2}; \quad V_\phi = -\frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{Q}{4\pi}\right) \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{Q}{4\pi}\right) \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (11.76)$$

Las líneas de corriente del flujo de la fuente puntual se representan en la figura 11.21. Comparadas con las de la figura 11.5, las líneas de corriente se encuentran menos espaciadas cerca de $\phi = \pi/2$, donde el gasto másico por unidad de incremento en ϕ es mayor.

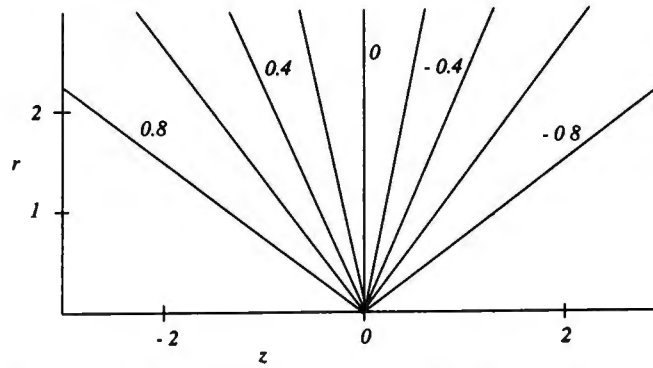


Figura 11.21 Líneas de corriente del flujo de una fuente puntual graficadas para incrementos iguales de $4\pi\psi/Q$.

Es posible encontrar la presión p^* aplicando la ecuación de Bernoulli entre cualquier punto R y $R = \infty$, donde la presión es p_∞^* y $V_R = 0$:

$$p^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} V_R^2 = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \quad (11.77)$$

Adviértase que la diferencia de presión $p_\infty^* - p^*$ varía según R^{-4} . La presión p^* se hace negativa en $R < R_c \equiv \sqrt{Q/4\pi} (\rho/2p_\infty^*)^{1/4}$ de tal forma que el flujo no es posible desde el punto de vista físico para valores de R inferiores a R_c .

Ejemplo 11.7

La fuente puntual de un fluido en un medio estacionario tiene un gasto volumétrico dependiente del tiempo, $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$, donde Q_0 y ω son la magnitud constante y la frecuencia del gasto. Obtenga expresiones para la presión $p^* \{R, t\}$ con variación en el tiempo, el promedio de la presión en un intervalo de tiempo y las amplitudes de las componentes de $p^* \{R, t\}$ que varían con el tiempo.

Solución

(a) A partir de la ecuación 11.75, la velocidad del fluido $V = V_R = (Q_0/4\pi R^2) \sin \omega t$. Sustituyendo en la integral de Bernoulli para el caso no estacionario (ecuación 4.14) evaluada entre el radio R y $R = \infty$, donde $p^* = p_\infty^*$, se encuentra que:

$$\int_R^\infty \frac{\partial V_R}{\partial t} dR + \frac{p_\infty^*}{\rho} - \left(\frac{p^*}{\rho} + \frac{V_R^2}{2} \right) = 0$$

$$p^* = p_\infty^* - \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q_0}{4\pi R^2} \right)^2 \sin^2 \omega t + \rho \int_R^\infty \left(\frac{\omega Q_0}{4\pi R^2} \right) \cos \omega t dR$$

$$\begin{aligned}
&= p_{\infty}^* - \frac{\rho}{4} \left(\frac{Q_0}{4\pi R^2} \right)^2 (1 - \cos 2\omega t) + \frac{\rho Q_0 \omega}{4\pi} \int_R^{\infty} \frac{dR}{R^2} \\
&= \left[p_{\infty}^* - \frac{\rho}{4} \left(\frac{Q_0}{4\pi R^2} \right)^2 \right] + \frac{\rho}{4} \left(\frac{Q_0}{4\pi R^2} \right)^2 \cos 2\omega t + \frac{\rho}{4} \left(\frac{\omega Q_0}{\pi R} \right) \cos \omega t
\end{aligned}$$

Los últimos dos términos en el lado derecho promediarán cero sobre un ciclo de forma que el primer término de la derecha es el promedio en un intervalo de tiempo de p^* . (Adviértase que ésta *no* es la misma que la presión de un flujo estacionario que presenta un gasto volumétrico promediado en el tiempo, Q_0 , dado por la ecuación 11.77.) Los coeficientes de los dos últimos términos son las amplitudes de las componentes senoidales de p^* . La presión incluye una componente armónica cuya frecuencia es dos veces la frecuencia fundamental (2ω) de la fuente.

Doblete

Como en el caso de un doblete lineal, es posible formar un doblete de simetría axial al combinar una fuente en $z = \epsilon$ y un sumidero de igual intensidad en $z = -\epsilon$, con lo que se obtiene en el límite de $\epsilon \rightarrow 0$ la función de corriente del doblete:

$$\psi = \left(\frac{U\alpha^3}{2} \right) \frac{\sin^2 \phi}{R} = \left(\frac{U\alpha^3}{2} \right) \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (11.78)$$

cuyas componentes de la velocidad son:

$$\begin{aligned}
V_R &= \frac{1}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \left(\frac{U\alpha^3}{2} \right) \frac{2 \cos \phi}{R^3}, \\
V_{\phi} &= -\frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \left(\frac{U\alpha^3}{2} \right) \frac{\sin \phi}{R^3} \\
V_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{U\alpha^3}{2} \right) \frac{3rz}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \\
V_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{U\alpha^3}{2} \right) \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (11.79)
\end{aligned}$$

Las líneas de corriente del doblete, que se grafican en la figura 11.22, se encuentran más prolongadas en la dirección r que las del doblete lineal, figura 11.8, lo cual refleja la naturaleza asimétrica del flujo.

En $R = a$, la velocidad radial $V_R = U \cos \phi$. Sin embargo, $U \cos \phi$ también es igual a la componente radial de la velocidad de la superficie de radio a centrada en el origen y que se desplaza en la dirección z con una velocidad U . Por lo tanto, el campo de flujo para $R \geq a$ es un flujo instantáneo externo a una esfera sólida de radio a que se mueve

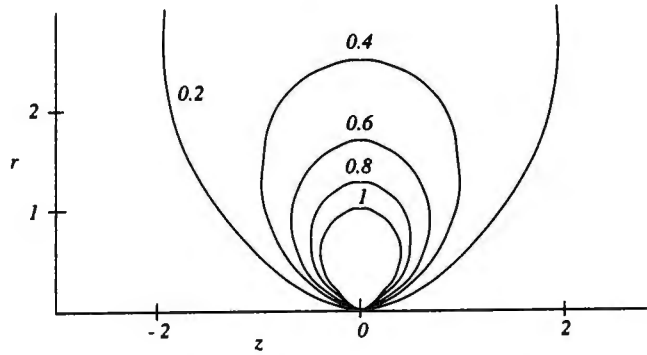


Figura 11.22 Líneas de corriente del doblete de simetría axial graficadas para incrementos iguales de $2\psi/Ua^3$.

con una velocidad U . Para este campo de flujo, puede determinarse la energía cinética EC del fluido externo a la esfera:

$$\begin{aligned}
 EC &= \iiint \frac{\rho}{2} V^2 dV = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Ua^3}{2} \right) \int_a^\infty \int_0^\pi \frac{(4 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{R^6} (2\pi R \sin \phi) R d\phi dR \\
 &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{Ua^3}{2} \right) (2\pi) \int_a^\infty \frac{dR}{R^4} \int_0^\pi (4 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\phi \\
 &= \frac{U^2}{2} \left(\rho \frac{2\pi a^3}{3} \right) \qquad (11.80)
 \end{aligned}$$

La energía cinética es la misma que la de una masa de fluido con magnitud $2\pi a^3 \rho/3$ que se mueve a una velocidad U de la esfera o la misma que la de una masa de fluido igual a *la mitad* del volumen desplazado, $4\pi a^3/3$, de la esfera. Por lo tanto, la fuerza que se necesita para acelerar una esfera en un fluido es igual a la aceleración multiplicada por la suma de la masa de la esfera y la masa de este fluido arrastrado. Esto contrasta con el caso del cilindro circular, ecuación 11.38, donde la masa arrastrada es igual a la masa del fluido desplazado.

Flujo en un punto de estancamiento

Cerca del punto frontal de estancamiento en un cuerpo de revolución como cuyo eje se encuentra alineado con un flujo que llega, existe un flujo de simetría axial que es análogo al flujo plano con punto de estancamiento representado en el lado izquierdo de la figura 11.10 descrito por las ecuaciones 11.42-11.43. La función de corriente y las componentes de la velocidad del flujo de simetría axial pueden expresarse como sigue:

$$\psi = -\Omega r^2 z = -\Omega R^3 \sin \phi \cos \phi \qquad (11.81)$$

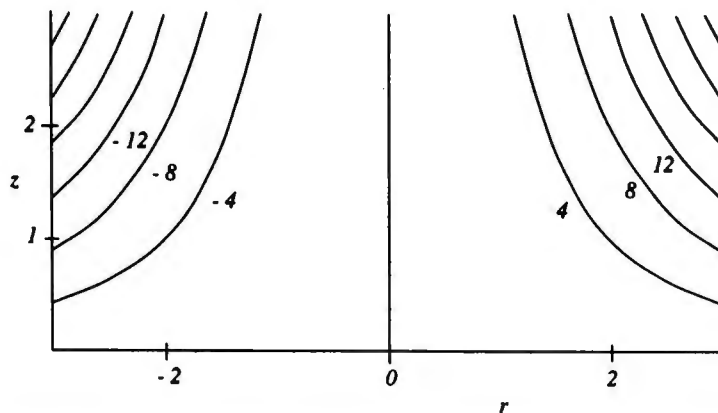


Figura 11.23 Líneas de corriente de un flujo cerca de un punto de estancamiento de simetría axial para incrementos iguales de ψ/Ω ; la dimensión axial es vertical.

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \Omega r; \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -2\Omega z$$

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -\Omega R (3 \cos^2 \phi - 1);$$

$$V_\phi = -\frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 3\Omega R \sin \phi \cos \phi \quad (11.82)$$

donde la constante Ω , que tiene dimensiones del recíproco del tiempo, puede relacionarse con la distribución de presión cerca del punto de estancamiento, como se indica a continuación.

Las líneas de corriente para este flujo se grafican en la figura 11.23 con el eje z vertical con fines comparativos respecto del flujo plano con punto de estancamiento que se ilustra en el lado izquierdo de la figura 11.10. El punto de estancamiento del flujo ($V_r = V_z = 0$) se localiza en el origen, $r = 0$, $z = 0$, donde la línea de corriente $\psi = 0$ que proviene de $z = \infty$ se bifurca para fluir a lo largo del eje r . Las líneas de corriente más allá del eje z se encuentran menos espaciadas en el flujo de simetría axial que en el flujo plano.

La distribución de presión en la vecindad del punto de estancamiento puede relacionarse con la presión p_s^* de estancamiento en el punto de estancamiento $r = 0$, $z = 0$ al utilizar la ecuación de Bernoulli entre cualquier punto r , z y el punto de estancamiento:

$$p_s^* = p^* + \frac{\rho}{2} (V_r^2 + V_z^2)$$

$$p^* = p_s^* - \frac{\rho}{2} \Omega^2 (r^2 + 4z^2) \quad (11.83)$$

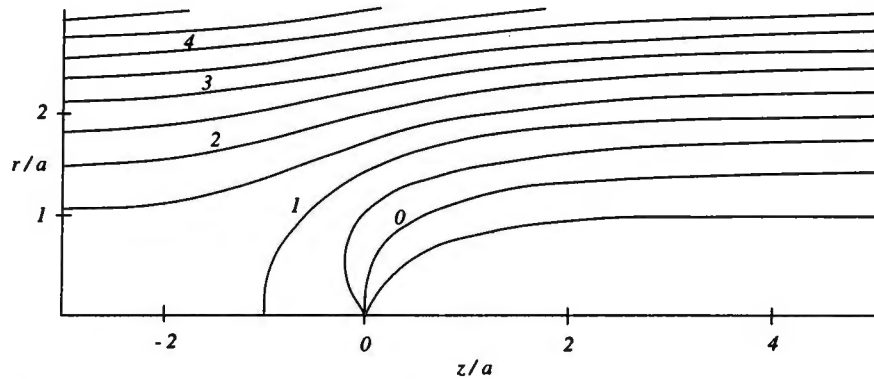


Figura 11.24 Líneas de corriente de un flujo uniforme con velocidad U que pasa por una fuente puntual con intensidad Q para incrementos iguales de $4\pi\psi/Q$. Las coordenadas adimensionales radial y axial son r/a y z/a , respectivamente, donde $a \equiv (Q/4\pi U)^{1/2}$.

Si la ecuación 11.83 se deriva dos veces respecto a r , se encuentra que:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial r^2} = -\rho \Omega^2; \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p^*}{\partial r^2}} \quad (11.84)$$

La constante Ω se relaciona así con la segunda derivada de p^* .

11.5.2 Superposición de flujos con simetría axial

Flujo que pasa por una fuente puntual

Si se combina el flujo uniforme, ecuaciones 11.72-11.73, con el flujo que proviene de una fuente puntual, ecuaciones 11.75-11.76, se obtiene un flujo que pasa por una fuente puntual:

$$\psi = \frac{U}{2} R^2 \sin^2 \phi - \left(\frac{Q}{4\pi} \right) \cos \phi = \frac{U}{2} r^2 - \left(\frac{Q}{4\pi} \right) \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (11.85)$$

$$V_R = U \cos \phi + \frac{Q}{4\pi R^2}; \quad V_\phi = -U \sin \phi$$

$$V_r = \left(\frac{Q}{4\pi} \right) \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}; \quad V_z = U + \left(\frac{Q}{4\pi} \right) \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (11.86)$$

Las líneas de corriente de este flujo se grafican en la figura 11.24 como funciones de la distancia radial adimensional $\xi \equiv r/a$ y la distancia axial $\eta \equiv z/a$, donde $a \equiv \sqrt{Q/4\pi U}$, para los valores constantes $4\pi\psi/Q$. Existe un punto de estancamiento en

$r = 0, z = -a$. La línea de corriente $4\pi\psi/U = 1$ separa al flujo que llega del flujo de la fuente. Conforme $z \rightarrow \infty$, esta línea de corriente se hace paralela al eje z a una distancia radial r_∞ de forma que $\pi r_\infty^2 U = Q$ o $r_\infty = 2a$. El fluido dentro de esta línea de corriente puede sustituirse por un cuerpo sólido de revolución, en tanto que el flujo externo a esa línea de corriente es el flujo alrededor de este cuerpo semiinfinito.

Al seguir el argumento que condujo a la obtención de la ecuación 11.54 para la fuerza externa ejercida sobre la fuente lineal en un flujo uniforme, debe existir una fuerza externa \mathbf{F}_{ex} ,

$$\mathbf{F}_{ex} = \rho Q U \mathbf{i}_z \quad (11.87)$$

que actúa sobre la fuente puntual en un flujo uniforme a fin de explicar el incremento de la cantidad movimiento en la dirección axial del flujo de la fuente. También, de ahí se sigue que no hay fuerza neta sobre el cuerpo semiinfinito de revolución que reemplaza al flujo de la fuente.

Flujo que pasa por una esfera

El flujo que pasa por una esfera se forma al restar el flujo del doblete, ecuaciones 11.78-11.79, del flujo uniforme, ecuaciones 11.72-11.73, con lo que se obtiene:

$$\phi = \frac{UR^2 \sin^2 \phi}{2} \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) = \frac{Ur^2}{2} \left(1 - \frac{a^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\right) \quad (11.88)$$

$$V_R = U \cos \phi \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right); \quad V_\phi = -U \sin \phi \left(1 + \frac{a^3}{2R^3}\right)$$

$$V_r = -\left(\frac{Ua^3}{2}\right) \frac{3rz}{(r^2 + z^2)^{5/2}}; \quad V_\phi = U - \left(\frac{Ua^3}{2}\right) \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (11.89)$$

Las líneas de corriente de este flujo superpuesto, que se grafican en la figura 11.25, están divididas por la línea de corriente $\psi = 0$, la cual forma la superficie de una esfera, $R = a$. Fuera de esta línea de corriente, se tiene el flujo que pasa por una esfera y que es palpablemente distinto del flujo plano que pasa por un cilindro circular y que se ilustra en la figura 11.15. Existen dos puntos de estancamiento, en $r = 0, z = \pm a$.

La presión sobre la superficie de la esfera, p_{esf}^* , puede obtenerse al escribir la ecuación de Bernoulli entre un punto sobre la esfera donde $R = a$ y $V = V_\phi = -(3/2) U \sin \phi$ y un punto en $R = \infty$, donde $V = U$ y $p^* = p_\infty^*$:

$$p_{esf}^* + \frac{\rho}{2} \left(\frac{3U \sin \phi}{2}\right)^2 = p_\infty^* + \frac{\rho}{2} U^2$$

$$p_{esf}^* - p_\infty^* = \frac{\rho}{2} U^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \phi\right)$$

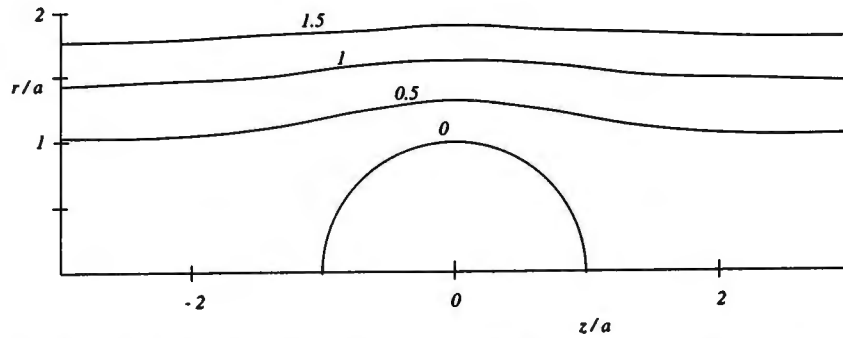


Figura 11.25 Líneas de corriente de un flujo uniforme con velocidad U superpuesto al flujo de un doblete para incrementos iguales de ψ/Ua^2 .

$$(C_p)_{R=a} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \phi \quad (11.90)$$

Hay que advertir el coeficiente mínimo de presión C_p sobre la superficie de la esfera, en $\phi = \pi/2$, es $-5/4$, comparado con el valor negativo mucho mayor de -3 en el cilindro circular (ecuación 11.63). La perturbación del flujo uniforme debida a la esfera es mucho menor en este punto que para el cilindro circular.

El flujo irrotacional sobre una esfera sólida no ejerce resistencia al avance sobre la esfera, en tanto que la distribución de la presión en la superficie es simétrica alrededor de $\phi = \pi/2$. En un flujo viscoso para números de Reynolds intermedios y altos, la capa límite se separa de la superficie y se genera una región de estela viscosa detrás del cuerpo, donde la presión es casi p_{∞}^* . Sólo cerca del punto delantero de estancamiento, $\phi = \pi$, es posible describir el flujo bastante bien mediante el modelo irrotacional.

11.6 Flujo sobre perfiles aerodinámicos y alas

Las alas de los aviones tienen formas de perfiles aerodinámicos que posibilitan el desarrollo de la fuerza ascensional o sustentación requerida al mismo tiempo que reducen la resistencia al avance. Para alas que poseen una razón de aspecto RA grande, la cual es la razón de la envergadura del ala s a la longitud de la cuerda o profundidad del ala c ,¹⁵ el flujo de aire en cualquier punto a lo largo de la envergadura se acerca mucho a un flujo bidimensional en el plano perpendicular a la envergadura. Este flujo puede calcularse en forma apropiada como un flujo irrotacional siempre y cuando las capas límite en el perfil aerodinámico no se separen.

¹⁵ La *envergadura* es la distancia que hay entre las puntas de las alas, en tanto que la *profundidad* es la distancia entre la parte anterior (*borde de ataque*) y posterior (*borde de salida o de escape*) del ala en cualquier lugar a lo largo de la envergadura.

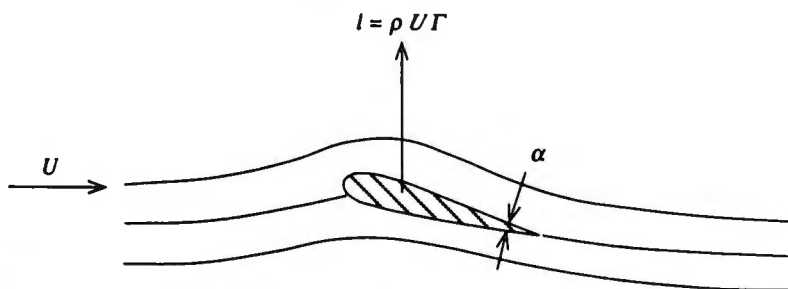


Figura 11.26 Flujo plano irrotacional sobre un perfil aerodinámico con un ángulo de ataque que desarrolla una fuerza ascensional por unidad de envergadura $\ell = \rho U \Gamma$.

En la figura 11.26 se esquematiza el flujo que ocurre sobre un perfil aerodinámico característico para un ángulo pequeño de ataque, que produce una fuerza ascensional por unidad de longitud de envergadura, ℓ . La línea de corriente que está en medio de esta figura, es la línea de corriente que divide los flujos superior e inferior del perfil aerodinámico. Se trata de la línea de corriente que hace contacto con el perfil aerodinámico cerca del borde de ataque y del borde de salida o de escape, los cuales son puntos de estancamiento del flujo irrotacional. En el punto de estancamiento del borde de ataque, la línea de corriente divisoria en cuestión es normal a la superficie del perfil aerodinámico y el flujo local es como el flujo plano correspondiente al punto de estancamiento que se ilustra en la parte izquierda de la figura 11.10. En el borde de salida o de escape, que también es un punto de estancamiento, la línea de corriente divisoria biseca el ángulo α formado por el borde cuneiforme del borde de salida. A ambos lados de esta línea de corriente, el flujo es localmente el que ocurre en un codo, ecuaciones 11.39-11.40, cuyo ángulo es $\phi = \pi - \alpha/2$. Puesto que $\phi < \pi$, el borde de salida es un punto de estancamiento del flujo.

El cálculo de un flujo irrotacional sobre una forma dada de perfil aerodinámico no es una tarea sencilla. Para encontrar el campo del flujo, debe buscarse una solución a la ecuación de Laplace para la función de corriente en la región que rodea el perfil aerodinámico que satisfaga las condiciones en la frontera tanto en el perfil aerodinámico, donde $\psi_{\text{perfil}} = \text{constante}$, como en $R = \infty$, donde $\psi_{\infty} = Uy$, lo cual corresponde al flujo uniforme de la ecuación 11.28. No importa el método empleado, ya sea analítico o numérico, se encontrará que no existe una solución única a este problema, a menos de que se especifique el valor de la circulación Γ en un contorno \mathcal{C} que encierre el perfil aerodinámico.¹⁶ Sin embargo, se descubrirá que sólo hay un valor de Γ que proporciona un punto de estancamiento en el borde de salida del perfil aerodinámico y un flujo que deja con suavidad el borde de salida, como se ilustra en la figura 11.26. Todos los otros valores de Γ hacen que el flujo en el borde de salida pronunciado sea singular, como los flujos en codos (ecuaciones 11.39-11.41) para los cuales $\phi > \pi$. El requisito para seleccionar Γ de forma que se produzca un punto de estancamiento en el borde de salida se conoce como *condición de Kutta*.

¹⁶ Ya que el flujo es irrotacional, esta circulación es la misma para cualquier contorno que encierre al perfil aerodinámico, incluyendo el contorno del mismo perfil.

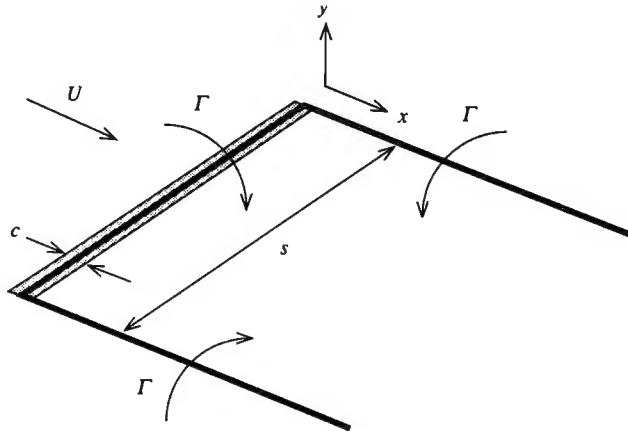


Figura 11.27 Diagrama del sistema vorticial generado por un ala de envergadura s finita y profundidad o cuerda c , que desarrolla una fuerza ascensional por unidad de longitud $\ell = \rho U \Gamma$. También se ilustran los vórtices que se forman en las puntas del ala corriente abajo.

Existe un fundamento físico para que el flujo que ocurre en el borde de salida de un perfil aerodinámico sea el correspondiente a un punto de estancamiento. Cualquier otro flujo irrotacional sería singular en el borde de salida, y tendría gradientes infinitos de presión y velocidad que ocasionarían que la capa límite viscosa se separara del flujo para readaptarse al suave flujo del borde de salida o de escape que pueden tolerar las capas límites adheridas.

Para cualquier perfil aerodinámico dado, al calcular los flujos irrotacionales que tienen ángulos de ataque mayores y, en consecuencia, circulación y fuerza ascensional superiores, se encontraría que los gradientes adversos de presión en la parte superior del perfil se hacen más intensos. Cuando dichos gradientes son lo bastante intensos para ocasionar la separación de la capa límite, el flujo real se aparta mucho del flujo calculado, y la fuerza ascensional real es menor que el valor calculado. Las soluciones de flujos irrotacionales resultan útiles sólo si no se presenta la separación de la capa límite.

El flujo tridimensional sobre las alas de un avión puede describirse muy bien mediante la teoría del flujo irrotacional, que es el fundamento del diseño aerodinámico de los aviones. Algunos de los efectos tridimensionales del flujo que rodea el ala de un avión con envergadura finita se ejemplifica en la figura 11.27, que es una vista en perspectiva que presenta un ala con alta razón de aspecto ($s \gg c$) que desarrolla una fuerza ascensional por unidad finita, $\ell = \rho U \Gamma$, la cual es uniforme a lo largo del ala. La circulación Γ alrededor de la sección del perfil aerodinámico del ala puede considerarse que corresponde a la de un vórtice ligado con intensidad Γ unido al ala. Como este vórtice no puede terminar en las puntas del ala, se arrastra corriente abajo de ambas puntas como dos vórtices marginales, cada uno de los cuales tiene una intensidad Γ pero de sentido opuesto.

El flujo inducido por los vórtices marginales produce en el ala una fuerza de resistencia al avance, que se conoce como *resistencia al avance inducida*. No se trata

de un efecto viscoso sino de uno debido a la región de estela del ala comprendida en el sistema de los vórtices marginales. La región de estela posee una cantidad de movimiento tanto vertical como horizontal que equilibra la fuerza ascensional del ala y la resistencia al avance inducida.

Los vórtices marginales inducen una velocidad v_i hacia abajo en el ala. Esta velocidad hacia abajo genera una fuerza por unidad de envergadura del ala, d_i , que, por la ecuación 11.59, actúa en la dirección del flujo y es, por lo tanto, una fuerza de resistencia al avance. Para estimar la magnitud de d_i , primero se calcula la velocidad v_i hacia afuera inducida por los vórtices marginales:

$$v_i \sim \frac{\Gamma}{2\pi s}$$

y, luego, la fuerza de resistencia al avance por unidad de envergadura resultante:

$$d_i = \rho v_i \Gamma \sim \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi s}$$

La razón de la resistencia al avance inducida, d_i , a la fuerza ascensional, ℓ , se calcula como:

$$\frac{d_i}{\ell} = \frac{d_i}{\rho U \Gamma} \sim \frac{\Gamma}{2\pi U s}$$

Si se observa que la fuerza ascensional del ala $L = \rho U \Gamma s$, la razón anterior puede expresarse como:

$$\frac{d_i}{\ell} \sim \frac{1}{4\pi} \frac{L}{(\rho/2)U^2 [cs]} \left(\frac{c}{s} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{C_L}{RA} \quad (11.91)$$

donde C_L es el coeficiente de la sustentación del ala. La razón de la resistencia al avance inducida a la fuerza ascensional expresa las pérdidas que la potencia propulsora debe compensar. La resistencia al avance inducida se reduce utilizando un ala con una razón de aspecto RA grande, como la que se encuentra en los planeadores y en los modernos yates. Cuando un avión aterriza o despegar, se logra el máximo coeficiente de sustentación y, por lo tanto, se consigue la máxima resistencia al avance inducida, lo cual exige mayor potencia en vuelo de crucero.

Los vórtices marginales unidos a las puntas del ala, como indica el esquema de la figura 11.27, son vórtices libres. Al tener una circulación de signo opuesto, estos vórtices se desplazarán hacia abajo a una velocidad $\Gamma/2\pi s$, como se explicó en el texto que se refiere a la figura 11.14. Medido a partir de la horizontal, el ángulo de la línea central del vórtice es $\tan^{-1}(2\pi s U/\Gamma) \sim \tan^{-1}(d_i/\ell)$. Este movimiento en dirección hacia abajo correspondiente a los vórtices marginales y al flujo de aire que los rodea contiene el flujo de cantidad de movimiento vertical producido por la fuerza externa dirigida hacia abajo que se aplica al ala y que es igual a la fuerza ascensional del ala. Este campo de flujo se conoce como *deflexión hacia abajo de los filetes de aire en el ala*.

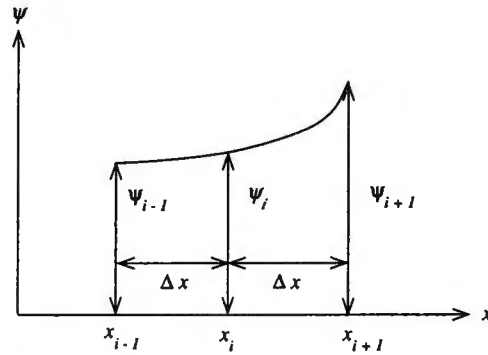


Figura 11.28 Representación de la función de corriente mediante valores discontinuos.

11.7 Soluciones numéricas

Los flujos bidimensionales irrotacionales considerados hasta aquí se obtuvieron analíticamente. La solución a muchos problemas prácticos de flujos no puede reducirse a una forma analítica, y es preciso recurrir a técnicas numéricas empleando computadoras digitales que permitan obtener información sobre el campo de flujo. En general, el interés se concentra en la determinación de patrones de líneas de corriente, en las velocidades y presiones para todo el campo de flujo y, por consiguiente, existe la necesidad de presentar los resultados de un cálculo numérico en forma conveniente, como cifras, gráficas y tablas más bien que un voluminoso archivo de números.

En el análisis numérico de un problema relacionado con un flujo irrotacional, se representa la solución a la ecuación de Laplace para el flujo mediante un conjunto de valores de la función de corriente ψ en los puntos de una malla finita que se elige para cubrir el campo de flujo. Si la malla es suficientemente fina y tiene muchos puntos, puede conseguirse una representación bastante precisa del flujo para satisfacer los requisitos de un diseño o análisis de ingeniería.

La base de las soluciones numéricas para un flujo irrotacional es la evaluación aproximada de los términos de la ecuación de Laplace en cada punto nodal de la malla mediante una ecuación de diferencias que contenga los valores de la función de corriente en varios puntos nodales. Por lo tanto, la ecuación de Laplace se satisface en forma aproximada en un número infinito de puntos dentro del campo de flujo. Conforme aumenta el número de puntos nodales, se mejora la precisión de la solución, pero a cambio de invertir tiempo de procesamiento en computadora y espacio de archivo.

Para ilustrar este principio, considérese una función de corriente $\psi(x)$ que es función sólo de x . Supóngase que se desea encontrar el valor de $\psi(x)$ que satisface la ecuación de Laplace para valores de x entre 0 y L , con valores conocidos para $\psi(0)$ y $\psi(L)$. Se divide el eje x en N intervalos iguales de longitud $\Delta x \equiv L/N$ y se indica la localización de estos puntos en el eje x mediante $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N$ y los valores correspondientes de ψ mediante $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_N$. Ahora, considérese una porción

del eje x cerca de x_i , como se indica en la figura 11.28. En esta región, se representará la función de corriente mediante los tres primeros términos del desarrollo de la serie de Taylor alrededor del punto x :

$$\psi(x) = \psi_i + (x - x_i) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} (x - x_i)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_i \quad (11.92)$$

Al evaluar la ecuación 11.92 en x_{i-1} y x_{i+1} , se encuentra que:

$$\begin{aligned} \psi_{i-1} &= \psi_i - \Delta x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_i \\ \psi_{i+1} &= \psi_i + \Delta x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_i \end{aligned} \quad (11.93)$$

Ahora, es posible resolver las dos ecuaciones 11.93 para $(\partial \psi / \partial x)_i$ y $(\partial^2 \psi / \partial x^2)_i$:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_i = \frac{-\psi_{i-1} + \psi_{i+1}}{2\Delta x} \quad (11.94)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (11.95)$$

La ecuación 11.94 permite encontrar la componente v_i de la velocidad en x_i después de haber encontrado las ψ :

$$v_i = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_i = \frac{-\psi_{i-1} + \psi_{i+1}}{2\Delta x} \quad (11.96)$$

en tanto que la ecuación 11.95 se utiliza en la ecuación de Laplace en x_i para este caso sencillo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_i &= 0 \\ \psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1} &= 0 \end{aligned} \quad (11.97)$$

Existen $N + 1$ valores de ψ_i de los cuales $\psi_0 = 0$ y $\psi_N = 1$ se conocen, con lo que restan $N - 1$ valores a determinarse a partir de las $N - 1$ ecuaciones lineales no homogéneas 11.97:

$$\begin{aligned} -2\psi_1 + \psi_2 &= -\psi_0 \\ \psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1} = 0$$

$$\begin{aligned}\psi_{N-3} - 2\psi_{N-2} + \psi_{N-1} &= 0 \\ \psi_{N-2} - 2\psi_{N-1} &= -\psi_N\end{aligned}\quad (11.98)$$

Existen dos métodos comunes para encontrar la solución de 11.98. El primero consiste en expresar 11.98 como una ecuación matricial, en la cual el lado izquierdo es una matriz de $N-1$ por $N-1$ de los coeficientes de ψ_i multiplicados por el vector ψ_i y el lado derecho es el vector de los valores en la frontera, para luego encontrar una solución numérica por inversión matricial. El segundo método consiste en utilizar aproximaciones sucesivas a ψ_i al expresar 11.98 en la forma:

$$\begin{aligned}{}^{n+i}\psi_1 &= \frac{1}{2}({}^n\psi_0 + {}^n\psi_2) \\ {}^{n+i}\psi_2 &= \frac{1}{2}({}^n\psi_1 + {}^n\psi_3) \\ &\dots \\ {}^{n+i}\psi_i &= \frac{1}{2}({}^n\psi_{i-1} + {}^n\psi_{i+1}) \\ &\dots \\ {}^{n+i}\psi_{N-1} &= \frac{1}{2}({}^n\psi_{N-2} + {}^n\psi_N)\end{aligned}\quad (11.99)$$

donde el superíndice a la derecha de ψ_i identifica el nivel de aproximación. La solución a la ecuación 11.99 se comienza suponiendo un conjunto inicial de ${}^0\psi_i$ y luego resolviendo para ${}^1\psi_i$, y se repite el proceso hasta que haya un cambio despreciable satisfactorio en los valores ψ_i entre iteraciones sucesivas. Por lo común, se necesitarán N^2 iteraciones si la primera suposición no es muy buena.

Resulta muy sencillo ampliar esta deducción para incluir y como una variable independiente al dividir el rango de y en M intervalos iguales Δy y con valores $y_0, \dots, y_j, \dots, y_M$, en tanto que el valor de $\psi\{x_i, y_j\}$ se denota por $\psi_{i,j}$. La ecuación de Laplace se transforma en:

$$\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} - 2(1 + \beta^2)\psi_{i,j} + \beta^2(\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j}) = 0; \quad \beta \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (11.100)$$

y las componentes de la velocidad son:

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+1}}{2\Delta y}; \quad v_{i,j} = \frac{-\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j}}{2\Delta x} \quad (11.101)$$

La ecuación de Laplace 11.100 con dos variables independientes puede resolverse por inversión matricial o aproximaciones sucesivas. Habrá $(N-1)(M-1)$ valores de $\psi_{i,j}$ a determinar, dependiente de la forma de las fronteras.

Puesto que la solución a la ecuación de Laplace se encuentra en muchos problemas científicos y de ingeniería, existen muchos paquetes comerciales de software para su

solución. Algunos de éstos pueden utilizarse con una computadora personal o en una estación de trabajo y están diseñados especialmente para cálculos de flujos irrotacionales.

11.8 Flujo potencial

Flujo potencial es el nombre que se le da a un flujo irrotacional incompresible cuyo campo de velocidad $\mathbf{V} \{ \mathbf{R}, t \}$ se define en términos de una función potencial $\Phi \{ \mathbf{R}, t \}$ que se denomina *potencial de velocidad*:

$$\nabla\Phi \equiv \mathbf{V} \quad (11.102)$$

Esta definición satisface automáticamente la condición de irrotacionalidad, ecuación 11.6:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla\Phi) \equiv 0 \quad (11.103)$$

gracias a la identidad vectorial, ecuación 1.36. Pero, si el flujo es incompresible, Φ debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = 0 \quad (11.104)$$

Es posible resolver problemas de flujos irrotacionales utilizando Φ más bien que ψ como variable dependiente del campo de flujo. Para encontrar esas soluciones, se resuelve la ecuación de Laplace 11.104 para Φ , sujeta a la condición en la frontera según la cual $\nabla\Phi = \mathbf{V}$ en las fronteras del campo de flujo. Sin embargo, esas soluciones no permiten graficar con facilidad las líneas de corriente del flujo, las cuales son de utilidad para la comprensión del comportamiento del flujo. No obstante, puede utilizarse Φ para flujos tridimensionales, en tanto que ψ , como se ha utilizado, está restringida a flujos bidimensionales.

En el caso de flujos planos, es posible obtener la relación entre el potencial de velocidad Φ y la función de corriente ψ al expresar las formas alternativas de las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (11.105)$$

Las relaciones diferenciales parciales de la ecuación 11.105 se conocen como ecuaciones de *Cauchy-Riemann*, las cuales ocupan un lugar prominente en la teoría de variables complejas. Gracias a la condición 11.105, es posible observar que las líneas equipotenciales ($\phi = \text{constante}$) y las líneas de corriente ($\psi = \text{constante}$) son, en todo lugar,

perpendiculares entre sí. Otro hecho de igual utilidad es que siempre existe una función compleja $w\{z\}$ de las variables espaciales complejas $z \equiv x + iy$ tal que:

$$w\{z\} = \Phi + i\psi$$

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (11.106)$$

Por lo tanto, el potencial complejo $w\{z\}$ genera tanto una función de corriente ψ como el potencial de velocidad Φ . Resulta especialmente útil este potencial complejo en la determinación de expresiones analíticas para flujos irrotacionales planos. Sin embargo, éste carece de ventajas en las soluciones numéricas, para las cuales resulta suficiente ψ o Φ en la definición del campo de flujo.

11.9 Problemas

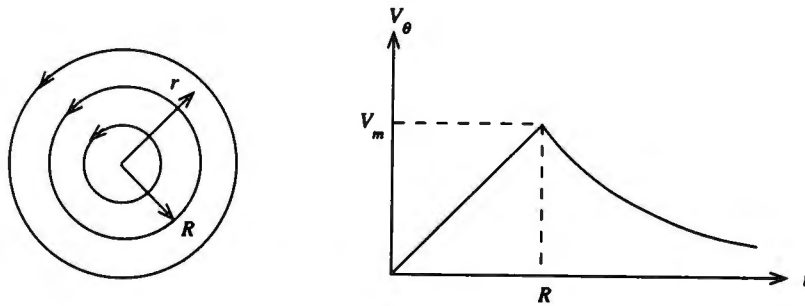


Figura P 11.1

Problema 11.1

Un flujo plano no viscoso de densidad constante consta de líneas de corriente centradas alrededor de un eje normal al plano del flujo, como se ilustra en la figura P 11.1. No existe una componente radial de la velocidad ($V_r = 0$) y la componente tangencial V_θ es proporcional al radio r cuando $0 < r < R$ e inversamente proporcional a r cuando $R < r < \infty$:

$$V_\theta = V_m \left(\frac{r}{R} \right) \quad \text{si } 0 < r < R; \quad V_\theta = V_m \left(\frac{R}{r} \right) \quad \text{si } R < r < \infty$$

como se ilustra en la figura P 11.1, donde V_m es una constante.

(a) El flujo para $R < r < \infty$ ¿es irrotacional? (Demuestre su respuesta.) (b) El flujo para $0 < r < R$ ¿es irrotacional? (Demuestre su respuesta.) (c) En $r = \infty$, la presión es p_∞ . Deduzca una expresión para la presión p_R en $r = R$ en términos de la densidad ρ , V_m y p_∞ . (d) Obtenga una expresión para la presión p_0 en $r = 0$ en términos de la densidad ρ , V_m y p_∞ .

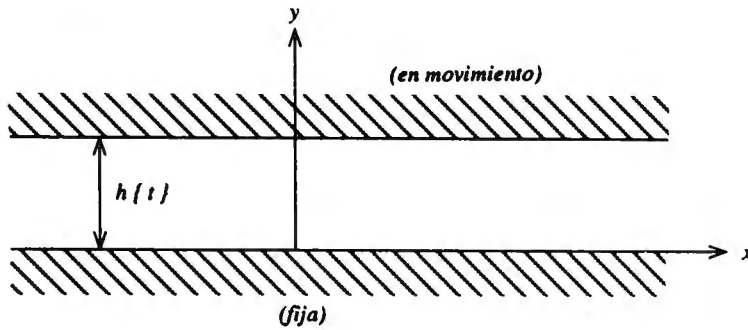


Figura P 11.2

Problema 11.2

Se establece un flujo irrotacional no estacionario con densidad constante ρ entre dos placas planas paralelas separadas una distancia $h(t)$ que varía con el tiempo t . Como se ilustra en la figura P 11.2, la placa superior ($y = h(t)$) se desplaza verticalmente hacia arriba o hacia abajo, pero permanece paralela a la placa inferior $y = 0$. La función de corriente que describe a este flujo se dice que es:

$$\psi = -\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dt} \right) xy = - \left(\frac{d \ln h}{dt} \right) xy$$

(a) Busque expresiones para las componentes de la velocidad u y v . (b) Demuestre que esta función satisface las condiciones de la velocidad en las superficies de las dos placas. (c) Obtenga una expresión para la diferencia de presión $p(x, y, t) - p(0, 0, t)$ entre cualquier punto en el fluido y el punto $x = 0, y = 0$.

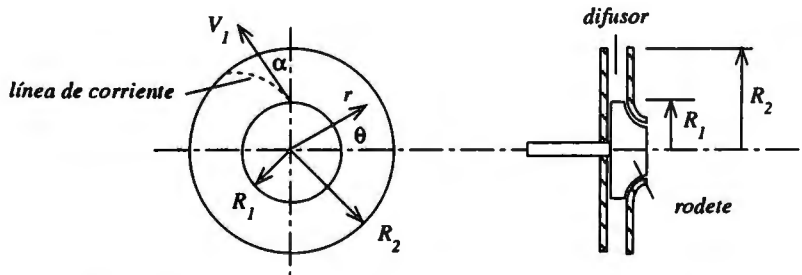


Figura P 11.3

Problema 11.3

En la figura P 11.3 se presenta el esquema de un difusor sin paletas para una bomba centrífuga que consta de dos placas paralelas, las cuales sirven de guía al flujo descargado del rodete. En el difusor se tiene un flujo estacionario arremolinado de simetría radial con densidad constante ρ , para el cual el campo de velocidad está definido por la función de corriente $\psi\{r, \theta\}$:

$$\psi = V_1 R_1 [(\cos \alpha)\theta - \text{sen } \alpha] \ln r]$$

donde R_1 es el radio de salida de la rodete, V_1 la velocidad del flujo que sale del rodete y α el ángulo de la línea de corriente en R_1 (véase la figura P 11.3). R_2 es el radio externo del difusor.

(a) Demuestre que la función de corriente dada satisface las condiciones de velocidad en la salida del rodete, R_1 . (b) ¿Es irrotacional el campo de flujo? (c) Obtenga una expresión para el aumento de presión $p_2 - p_1$ a través del difusor en términos de los parámetros dados.

Problema 11.4

Una fuente lineal con intensidad q en un flujo plano se encuentra localizada en el punto $y = a, x = 0$ por encima de una pared plana sólida en $y = 0$. Además de la fuente lineal, existe un flujo uniforme estacionario $\mathbf{V} = U\hat{i}_x$. Deduzca expresiones para (a) la función de corriente $\psi\{x, y\}$ de este flujo, (b) la velocidad $u\{x\}$ en la pared, la presión $p_w^*\{x\}$ en la pared, y la fuerza externa por unidad de longitud f_{ex} que se necesita para mantener la fuente lineal en su lugar.

Problema 11.5

Un cilindro circular de radio a está sujeto a un flujo horizontal que tiene una velocidad que varía con el tiempo, $U\{t\}$, por lo que la función de corriente para el flujo es:

$$\psi = U\{t\}r \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \text{sen } \theta$$

Obtenga expresiones para (a) la diferencia de presión $p\{\theta\} - p_0$ entre un punto en la superficie del cilindro en θ y un punto en $\theta = 0$ y (b) la fuerza de presión $f\{t\}$ por unidad de longitud ocasionada por la presión sobre la superficie del cilindro, en términos de ρ, a y dU/dt .

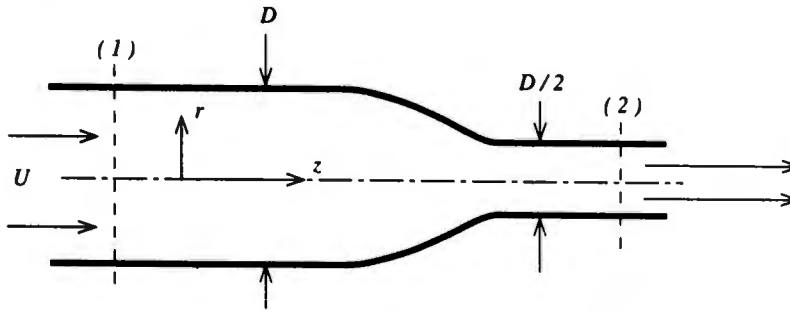


Figura P 11.6

Problema 11.6

Un flujo irrotacional de simetría axial consta de un flujo turbulento en una tubería circular que presenta una reducción en su diámetro de D a $D/2$, como se ilustra en la figura P 11.6. Corriente arriba, en la sección 1, la velocidad del flujo axial $(V_z)_1 = U$ es uniforme en toda la sección transversal del tubo, en tanto que la velocidad del flujo tangencial $(V_\theta \{r\})_1 = \Gamma/2\pi r$, donde Γ es la circulación medida a lo largo de un contorno que encierra al eje $r = 0$.

(a) Obtenga expresiones para las componentes de la velocidad $(V_z)_2$ y $(V_\theta \{r\})_2$ en la sección 2 corriente abajo en términos de U y Γ . (b) Deduzca una expresión para la diferencia de presión $(p_w)_1 - (p_w)_2$ entre los puntos en la pared en 1 y 2 en términos de ρ , U y Γ .

Bibliografía

Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Lamb, Horace, *Hydrodynamics*, 6a. ed., Nueva York: Dover Publications, 1945.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1986.

12.1 Introducción

En este capítulo se desarrollan los principios del flujo compresible. En contraste con el flujo predominantemente incompresible que se estudió en capítulos anteriores, el flujo compresible requiere la integración de las ecuaciones de la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento con la de la conservación de la energía. En el flujo compresible, estos tres requisitos de la conservación están íntimamente relacionados entre sí, de modo que la complejidad del problema que se tiene al evaluar dichos flujos, aumenta. Además, la ecuación de la conservación de la energía incorpora de manera explícita las propiedades termodinámicas del fluido. En consecuencia, no existe una solución general para dichos flujos, y, en cambio, se recurre a flujos sencillos, como los flujos no estacionarios unidimensionales y estacionarios no viscosos bidimensionales de gases perfectos que poseen calores específicos constantes. A pesar de eso, estos flujos exhiben todas las características importantes de los flujos compresibles e incluso tienen algunas importantes aplicaciones en ingeniería.

En esta sección, antes de pasar al desarrollo de algunos flujos compresibles, se explican las condiciones del flujo que requieren que se trate al flujo como compresible más bien como incompresible, como se hizo en capítulos anteriores.

12.1.1 Condiciones para el flujo compresible

En la sección 3.3.3, se definió el flujo incompresible como aquel flujo para el cual la densidad de una partícula de fluido puntual no cambia con el tiempo, *v.g.* $D\rho/Dt = 0$, aunque también se señaló que pequeños cambios de densidad no violan esta condición siempre y cuando:

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{D\rho}{Dt} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \quad (12.1)$$

Con la condición de densidad constante a lo largo de una línea de corriente, fue posible integrar la ecuación 4.5 de Euler,

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} \quad (12.2)$$

para obtener la integral de Bernoulli, ecuación 4.13.

Ahora reconsidérese la condición de la ecuación 12.1 a fin de determinar cuándo puede violarse esta condición. Primero, tómese en cuenta un *flujo estacionario* caracterizado por una escala de velocidad V y una escala de longitud L . Al calcular la magnitud de los términos de la ecuación 12.1 en tanto que se utilizan estas escalas, se encuentra,

$$\frac{V}{L} \frac{\delta \rho}{\rho} \ll \frac{V}{L}$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1 \quad (12.3)$$

El cambio fraccionario de la densidad en el campo de flujo, $\delta \rho / \rho$, deberá ser, por lo tanto, muy pequeño para que el flujo sea incompresible.

Pero, ¿cuáles son las características del flujo que garantizarán la validez de 12.3? Para responder esta pregunta, es preciso calcular la magnitud de los términos de la ecuación 12.2 de Euler, y se encuentra que (si se desprecia la gravedad):

$$\frac{V}{L} V \sim \frac{\delta p}{\rho L}$$

Ahora, supóngase además que la entropía del fluido es la misma en todas partes. Cuando esto se cumple, los cambios de presión δp y densidad $\delta \rho$ se relacionan entre sí mediante $\delta p / \delta \rho = (\partial p / \partial \rho)_s = a^2$, donde a es la velocidad de una onda de sonido.¹ Al sustituir se encuentra,

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{V^2}{a^2} \quad (12.4)$$

Al comparar la fórmula 12.4 con la 12.3, es posible concluir que un flujo no es incompresible si la velocidad del flujo es comparable con la velocidad del sonido.

Cuando la velocidad V de un flujo no es mucho menor que la velocidad de propagación del sonido a en el fluido, se debe incluir la conservación de la energía con la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento a fin de determinar el campo de flujo. En un flujo compresible, una parte de la energía interna del fluido se transforma en energía cinética del flujo (o a la inversa) y la razón V/a es una medida de la importancia que este intercambio de energía tiene para el flujo.

¹ Véase a continuación la ecuación 12.12.

Se volverá a considerar el caso del *flujo no estacionario*. Si τ caracteriza la escala de tiempo del flujo no estacionario, es posible calcular la magnitud de los términos de las ecuaciones 12.1 y 12.2 y se encuentra que:

$$\frac{\delta\rho}{\rho\tau} \ll \frac{V}{L}$$

$$\frac{V}{\tau} \sim \frac{a^2\delta\rho}{\rho L}$$

Al eliminar $\delta\rho$ se encuentra:

$$\frac{L}{\tau} \ll a \quad (12.5)$$

Así, la razón de las escalas de longitud y tiempo debe ser mucho menores que la velocidad del sonido para poder considerar el flujo como incompresible. En el caso de una onda de sonido, $L \sim a\tau$, y el flujo es necesariamente compresible aun cuando $\delta\rho/\rho$ sea muy pequeño.

Debe tratarse un flujo como compresible siempre que se presente cualquiera de las condiciones antes mencionadas, v.g., $V \not\ll a$ o $L/\tau \not\ll a$.²

12.2 La velocidad del sonido

Todo el mundo sabe que el sonido viaja más despacio que la luz. Cuando a cierta distancia se observa a un carpintero golpear un clavo, el sonido llega una fracción de segundo después. Cuanto más lejos se esté de la fuente, mayor será el tiempo que el sonido tardará en llegar. ¿Qué es lo que determina la velocidad de desplazamiento en el aire de un pulso de sonido?

Una onda de sonido es un flujo compresible pues existe un intercambio apreciable de energía entre la energía interna de una partícula de aire y su energía cinética. Esta relación entre la energía cinética aleatoria de las moléculas individuales y el movimiento ordenado de las partículas del fluido en una onda de sonido permite la propagación de la energía del sonido de una fuente a un receptor distante, aun cuando el fluido a través del cual pasa la onda, no presenta movimiento neto. Es sorprendente que todo tipo de sonidos se propague con la misma velocidad: una nota musical, el canto de un ave o el estruendo de un relámpago.

Los sonidos audibles se caracterizan por cambios de presión y densidad de la atmósfera ambiente, los cuales son insignificantes comparados con la presión y densidad atmosféricas promedio. El oído humano es tan sensible que sólo unos cuantos picowatts por metro

² Es posible que los flujos a los cuales se añade calor no satisfagan la condición de incompresibilidad, ecuación 12.1, pero no pueden ser compresibles pues no satisfacen los requisitos del flujo compresible. Por lo común, a estos flujos se les llama *flujos de densidad variable*. En éstos, la ecuación de la conservación de la energía se relaciona con las ecuaciones de la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento sólo mediante la densidad variable.

cuadrado de energía acústica son suficientes para provocar una respuesta nerviosa y la sensación de sonido. Los seres humanos escuchan una región de frecuencias de alrededor de 200 : 1 (cerca de ocho octavas), pero algunos animales pueden responder a un espectro aún mayor. Dentro de este espectro de frecuencias, el oído humano puede distinguir intensidades de sonido que varían catorce órdenes de magnitud.

La velocidad de propagación de una onda de sonido puede determinarse mediante la solución de las ecuaciones del flujo compresible no viscoso, la ecuación de la conservación de la masa (ecuación 3.16) y la ecuación de Euler (ecuación 4.5):

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0\end{aligned}\quad (12.6)$$

donde se ha despreciado la gravedad, que es irrelevante en la propagación de ondas de sonido ordinarias. Sin embargo, es posible simplificar las ecuaciones 12.6 para el caso de ondas de sonido que tienen cambios muy pequeños en las variables de flujo. Antes que nada, la derivada material puede sustituirse por la derivada respecto al tiempo:

$$\frac{D\rho}{Dt} \simeq \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \simeq \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

ya que una partícula del fluido se desplaza con una velocidad mucho menor que la misma forma de onda. En segundo lugar, el multiplicador de la densidad que figura en las ecuaciones 12.6 puede sustituirse por su valor promedio ρ_0 en el aire no perturbado, porque los cambios de densidad son muy pequeños. Con estas simplificaciones, las ecuaciones 12.6 adquieren la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla p &= 0\end{aligned}\quad (12.7)$$

Los cambios de presión y densidad, aunque rápidos, son bastante lentos como para permitir que el proceso sea termodinámicamente reversible, en cuyo caso la entropía \hat{s} del fluido permanece constante. Por lo tanto, los cambios de densidad y presión se relacionan mediante:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\hat{s}} dp \quad (12.8)$$

y las ecuaciones 12.7 pueden reescribirse como:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\hat{s}} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (12.9)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (12.10)$$

Si ahora se resta la divergencia, que aparece en la ecuación 12.10, a la derivada respecto al tiempo de la ecuación 12.9, se encuentra que:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{V})}{\partial t} - \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) - \nabla^2 p = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla^2 p \quad (12.11)$$

La ecuación 12.11 se conoce como *ecuación de onda*, y el coeficiente $(\partial p/\partial \rho)_s$ es el cuadrado de la velocidad de propagación de las ondas de sonido. Se utiliza el símbolo a para definir la velocidad del sonido:

$$a \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (12.12)$$

Al emplear las relaciones termodinámicas de las ecuaciones 1.9 y 1.10, se encuentra que la velocidad del sonido en un gas perfecto puede expresarse como:

$$a = \sqrt{\frac{\hat{c}_p p}{\hat{c}_v \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T} \quad (12.13)$$

donde el símbolo literal γ se usa para indicar la razón de calores específicos:

$$\gamma \equiv \frac{\hat{c}_p}{\hat{c}_v} = \frac{\hat{c}_p / R}{\hat{c}_p / R - 1} \quad (12.14)$$

en tanto que la forma alternativa está dada por la ecuación 1.13. Por lo general, γ es sólo función de la temperatura T y disminuye conforme la temperatura aumenta, pero siempre está en el intervalo $5/3 \geq \gamma \geq 1$.

En el caso de los líquidos, la velocidad del sonido es mucho mayor que la de los gases; esto se debe a que el aumento de densidad, correspondiente a un aumento dado de presión, es mucho menor en los líquidos que en los gases. Sin embargo, para una sustancia pura cerca de su temperatura y presión críticas, las velocidades del sonido en la fase gaseosa y líquida no difieren mucho.

Ejemplo 12.1

Calcule la velocidad del sonido en (a) aire y (b) helio a $T = 300 \text{ K}$.

Solución

(a) De la tabla 1.2 para aire, $R = 287.0 \text{ J/kg K}$ y $\hat{c}_p / R = 3.5$. Si se emplea las ecuaciones 12.13-12.14,

$$a = \sqrt{(3.5/2.5)(287.0 \text{ J/kg K})(300 \text{ K})} = 347.2 \text{ m/s}$$

(b) De la tabla 1.2 para helio, $R = 2077 \text{ J/kg K}$ y $\hat{c}_p/R = 2.5$. Así:

$$a = \sqrt{(2.5/1.5)(2077 \text{ J/kg K})(300 \text{ K})} = 1019 \text{ m/s}$$

Ondas de sonido planas

Como un ejemplo sencillo, considérese una onda de sonido plana, v.g., una para la cual las cantidades del flujo sólo dependen de x y t y, por lo tanto, son constantes en cualquier plano x, z . Para este caso, la ecuación 12.11 para una onda de sonido adopta la forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (12.15)$$

Existe una solución muy general, aunque sencilla, a esta ecuación 12.15 (y ecuación 12.9) para una onda de sonido que se propaga de izquierda a derecha. Esta solución es:

$$p - p_0 = \rho_0 a u = a^2(\rho - \rho_0) = f\{x - at\} \quad (12.16)$$

donde $f\{x - at\}$ es cualquier función del argumento $x - at$. Por ejemplo, para un tono puro continuo, $f\{x - at\} = A \sin(x - at)$, en tanto que para una palabra hablada, $f\{x - at\}$ es en extremo compleja. No obstante, para cualquier $f\{x - at\}$, la señal acústica, en función del tiempo, medida en x , es la misma que la medida en $x = 0$ para un tiempo x/a antes:

$$f\{x - at\} = f\{0 - a(t - x/a)\}$$

De esta manera, una onda de sonido plana propaga la información contenida en un pulso de sonido sin que experimente cambio alguno de un lugar a otro.

Nivel de presión sonora

Cuando un altavoz genera una onda de sonido plana, lo hace moviéndose hacia uno y otro lado con una velocidad alterna u que genera un cambio de presión $p - p_0$ dado por la ecuación 12.16. La potencia por unidad de área del altavoz, P_{sw} , que se necesita para generar esta onda de sonido es el producto de la presión $p - p_0$ por la velocidad u :

$$P_{sw} = (p - p_0)u = \frac{(p - p_0)^2}{\rho_0 a} = \rho_0 a u^2 \quad (12.17)$$

Esta potencia es proporcional al *cuadrado* de la amplitud de presión de la onda, $p - p_0$, o la amplitud de velocidad de la onda, u . La potencia se transmite del emisor al receptor de la onda de sonido.

La intensidad de una onda de sonido se mide extrayendo la raíz cuadrada del valor medio en un intervalo de tiempo del cuadrado de la amplitud de presión, v.g., $\sqrt{(p - p_0)^2}$. Sin embargo, por convención, los especialistas en sonido utilizan una escala logarítmica de la intensidad del sonido, cuya unidad es el *decibel (dB)* y que tiene un valor igual a cero cuando $\sqrt{(p - p_0)^2} = 2E(-5) \text{ Pa}$. En esta escala, el *nivel de presión sonora (NPS)* medida en *dB*, tiene el valor:

$$NPS \equiv 10 \log \left(\frac{\sqrt{(p - p_0)^2}}{2E(-5) \text{ Pa}} \right) \text{ dB} \quad (12.18)$$

Se eligió el nivel de presión de referencia como $2E(-5) \text{ Pa}$ para cero decibeles *dB* en la escala correspondiente al nivel de presión sonora, debido a que la onda de sonido apenas es audible al oído humano. Para cada aumento de la amplitud de presión por un factor de diez por encima de este nivel, el nivel de presión sonora aumenta 10 dB . La exposición continua a niveles de presión sonora por encima de los 90 dB (v.g., $\sqrt{(p - p_0)^2} \geq 2E(4) \text{ Pa}$) puede provocar la pérdida del oído en los seres humanos.

Ejemplo 12.2

Una onda de sonido en aire a presión atmosférica y 20°C de temperatura tiene un nivel de presión sonora de 20 dB . Calcule (a) la amplitud de presión $\sqrt{(p - p_0)^2}$ y (b) la amplitud de velocidad $\sqrt{u^2}$ así como la potencia por unidad de área P_{sw} .

Solución

(a) Al invertir la ecuación 12.18, se tiene que

$$\sqrt{(p - p_0)^2} = [2E(-5) \text{ Pa}] \times [1E(20/10)] = 2E(-3) \text{ Pa}$$

(b) De la ecuación 12.17,

$$\sqrt{u^2} = \frac{\sqrt{(p - p_0)^2}}{\rho_0 a}$$

De la tabla 1.1, $\rho_0 = 1.204 \text{ kg/m}^3$. A partir de las ecuaciones 12.13-12.14 y la tabla 1.2, $\gamma = 3.5/2.5 = 1.4$, y $a = [(1.4)(1.013E(5) \text{ Pa})/(1.204 \text{ kg/m}^3)]^{1/2} = 3.432E(2) \text{ m/s}$. Por lo tanto:

$$\sqrt{u^2} = \frac{2E(-3) \text{ Pa}}{(1.204 \text{ kg/m}^3)(3.432 E(2) \text{ m/s})} = 4.84E(-6) \text{ m/s}$$

(c) De la ecuación 12.17,

$$P_{sw} = \frac{(2E(-3) Pa)^2}{(1.204 kg/m^3)(3.432 m/s)} = 4.84E(-10) W/m^2$$

12.3 Flujo estacionario isentrópico

Para el caso de un flujo incompresible no viscoso, la velocidad V y la presión p del flujo se relacionan entre sí en diferentes puntos a lo largo de una línea de corriente mediante la ecuación 4.13 de Bernoulli. Cuando un flujo no viscoso es compresible, no es posible utilizar la ecuación de Bernoulli porque la densidad ya no es constante a lo largo de la línea de corriente o trayectoria de una partícula. En cambio, es preciso incorporar los principios termodinámicos que se estudiaron en el capítulo 8 y que explican cómo la energía interna del fluido contribuye al movimiento de una partícula del fluido. Puesto que los flujos compresibles son inherentemente más complejos que los flujos incompresibles, se empezará a tratar un flujo *estacionario* no viscoso y adiabático, v.g., con esfuerzo viscoso τ y flujo de calor q despreciables. Para este tipo de flujo, la forma integral de la primera ley de la termodinámica, ecuación 8.29, se reduce a:

$$\iint_S \rho \left(\hat{h} + \frac{V^2}{2} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (12.19)$$

Para los flujos compresibles, donde V tiene la misma magnitud que a , el término $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ es despreciable siempre que la escala de longitud L del flujo sea pequeña comparada con a^2/g , que es aproximadamente $1E(4) m$ en el aire. Al aplicar la ecuación 12.19 al flujo a lo largo de una línea de corriente que se origina en una región de gas fijo (condición que se conoce como estado de estancamiento), cuyas propiedades se identifican mediante el subíndice s , se encuentra que:

$$\frac{V^2}{2} + \hat{h} = \hat{h}_s \quad (12.20)$$

Sin embargo, cuando el flujo es no viscoso y adiabático, la segunda ley de la termodinámica, ecuación 8.43, requiere que la entropía \hat{s} de una partícula del fluido permanezca constante. Por esto, los cambios en la entalpía \hat{h} a lo largo de una línea de corriente en un flujo estacionario son de tal naturaleza que la entropía tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de la línea de corriente que en el estado de estancamiento, a saber, \hat{s}_s . Si se utilizan p y \hat{s}_s como las variables termodinámicas independientes que definen la entalpía \hat{h} , es posible reescribir la ecuación 12.20 como:

$$\frac{V^2}{2} + \hat{h} \{p, \hat{s}_s\} = \hat{h} \{p_s, \hat{s}_s\}$$

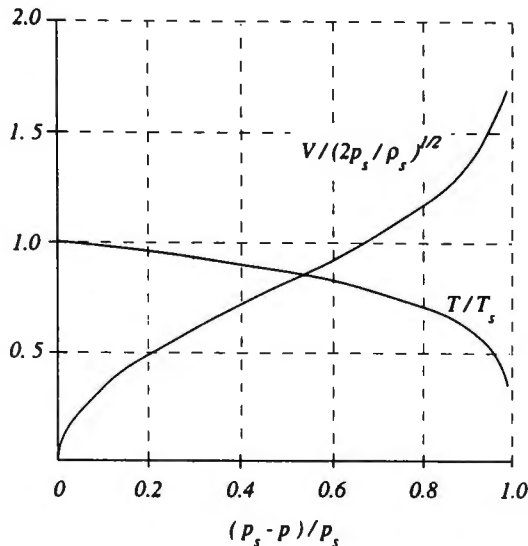


Figura 12.1 Gráfica de la velocidad V y la temperatura T de vapor sobrecalentado que fluye isentrópicamente desde un estado de estancamiento de $p_s = 100 \text{ bar}$, $T_s = 1073 \text{ K}$ y $\rho_s = 20.59 \text{ kg/m}^3$ en función del cambio de presión $p_s - p$. Datos de Thomas F. Irvine, Jr. y James P. Hartnett, *Steam and Air tables in SI Units*, Washington, DC: Hemisphere Publishing Corp., 1976.)

$$V = \sqrt{\hat{h}\{p_s, \hat{s}_s\} - \hat{h}\{p, \hat{s}_s\}} \quad (12.21)$$

En la figura 12.1 se ilustra un cálculo numérico de la velocidad V de vapor sobrecalentado en función del cambio de presión $p_s - p$ a lo largo de una línea de corriente de un flujo isentrópico, que se obtuvo a partir de la ecuación 12.21 utilizando tablas termodinámicas para vapor sobrecalentado. Se hace adimensional la velocidad V al dividirla entre $\sqrt{2p_s/\rho_s}$, valor de la velocidad del flujo incompresible para un fluido en estancamiento cuando su presión se reduce a cero. Adviértase que la velocidad del flujo compresible sobrepasa el valor incompresible cuando el cambio de presión $p_s - p$ adquiere un valor comparable a p_s . La energía cinética adicional del flujo proviene de la energía interna del vapor, cuya temperatura (y energía interna) disminuye considerablemente cuando la caída de presión es grande.

12.3.1 Relaciones isentrópicas de los gases perfectos para calores específicos constantes

Para un cambio isentrópico en un gas perfecto, es posible encontrar los cambios diferenciales de presión p , densidad ρ , temperatura T y velocidad del sonido a a partir de

las ecuaciones correspondientes a las expresiones de la segunda ley (1.9-1.10), la ley de los gases perfectos (1.11) y la velocidad del sonido en un gas perfecto (12.13):

$$\frac{1}{R} d \ln T = \frac{1}{\hat{c}_p} d \ln p = \frac{1}{\hat{c}_v} d \ln \rho = \frac{2}{R} d \ln a \quad (12.22)$$

Es posible integrar estas relaciones diferenciales si los calores específicos son constantes sobre el intervalo de integración. Al expresar estas integrales como funciones de la razón de presiones p/p_s , se encuentra:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_s} &= \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma-1)\gamma} \\ \frac{\rho}{\rho_s} &= \left(\frac{p}{p_s} \right)^{1/\gamma} \\ \frac{a}{a_s} &= \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \end{aligned} \quad (12.24)$$

Así, la temperatura, densidad y velocidad del sonido, disminuyen al descender la presión, pero en diferentes proporciones.

12.3.2 Flujo estacionario isentrópico de un gas perfecto

En el caso del flujo isentrópico de un gas perfecto, la ecuación de energía correspondiente al flujo estacionario, ecuación 12.20 y 12.21, tiene una forma simple ya que la entalpía \hat{h} de un gas perfecto y su calor específico dependen sólo de la temperatura T . Si el calor específico del gas perfecto puede considerarse constante para el cambio de temperatura encontrado en el flujo, entonces es posible sustituir \hat{h} por $\hat{c}_p T$ y escribir la ecuación 12.21 como:

$$V = \sqrt{2\hat{c}_p(T_s - T)} = \left(2\hat{c}_p T_s \left[1 - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma-1)\gamma} \right] \right)^{1/2} \quad (12.24)$$

donde se utilizó la ecuación 12.23 para sustituir T por p en el último término de la ecuación 12.24.

Cuando la presión en un flujo de este tipo cae hasta cero, que es su valor más bajo posible, la ecuación 12.24 revela que la velocidad del flujo alcanza su valor máximo $\sqrt{2\hat{c}_p T_s}$. Si el flujo fuera incompresible, entonces la velocidad máxima sería $\sqrt{2p_s/\rho_s} = \sqrt{2RT_s}$. Así, la velocidad máxima del flujo compresible es mayor que la velocidad del flujo incompresible y difiere por un factor de $\sqrt{\hat{c}_p/R} = \sqrt{\gamma/(\gamma-1)}$, que en el caso del aire ($\gamma = 1.4$) el factor es de 1.87. El 87% adicional en la velocidad viene de la energía interna del gas perfecto, que alcanza una temperatura de cero cuando su presión baja a cero.

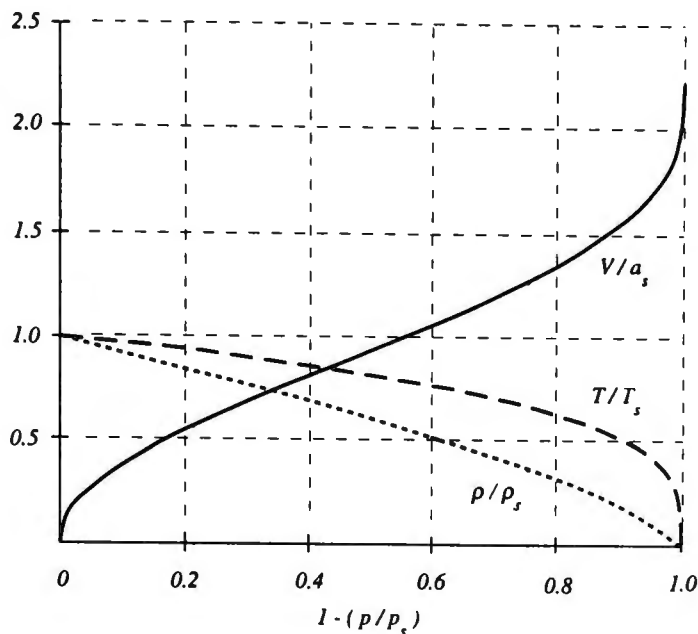


Figura 12.2 Variaciones de las razones V/a_s , T/T_s y ρ/ρ_s con la razón de presiones p/p_s , correspondiente al flujo isentrópico de un gas perfecto con $\gamma = 1.4$.

Es posible resumir las relaciones de los flujos estacionarios isentrópicos en función de la presión, al combinar las ecuaciones 12.23 y 12.24 de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{V}{a_s} &= \left(\left[\frac{2}{\gamma-1} \right] \left[1 - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right)^{1/2} \\ \frac{T}{T_s} &= \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \\ \frac{\rho}{\rho_s} &= \left(\frac{p}{p_s} \right)^{1/\gamma} \\ \frac{a}{a_s} &= \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \end{aligned} \quad (12.25)$$

En la figura 12.2, se grafican las variaciones de velocidad, temperatura y densidad en el flujo estacionario isentrópico de un gas perfecto, con $\gamma = 1.4$, en función de la caída de presión adimensional, $(p_s - p)/p_s$. Adviértase cómo la temperatura y la velocidad cambian más rápido que la densidad conforme la presión se aproxima a cero. Para este valor de γ , $V/a_s = \sqrt{5}$ cuando $p = 0$.

El número de Mach como variable del flujo

El número de Mach M , que es la razón de la velocidad del flujo V a la velocidad del sonido a , es un parámetro adimensional del flujo cuyo valor describe importantes cualidades del flujo. Algunas veces es más conveniente utilizar el número de Mach M más bien que la razón de presiones p/p_s , como medida del cambio de las propiedades del flujo en un flujo isentrópico. Para un gas perfecto con calor específico constante, es posible encontrar la relación entre M y las variables del flujo a partir de la ecuación 12.24, al sustituir $\hat{c}_p T$ por $a^2/(\gamma - 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} &= \frac{a_s^2}{\gamma - 1} \\ M^2 + \frac{2}{\gamma - 1} &= \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{a_s}{a} \right)^2 \\ \frac{a}{a_s} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \\ \frac{V}{a_s} = \frac{Ma}{a_s} &= M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \\ \frac{T}{T_s} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \\ \frac{p}{p_s} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma - 1)} \\ \frac{\rho}{\rho_s} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/(\gamma - 1)} \end{aligned} \quad (12.26)$$

donde se usaron las ecuaciones 12.23 en las tres últimas líneas.

En la figura 12.2 se aprecia que al caer la presión p en un flujo que experimenta una aceleración, la velocidad V aumenta desde cero y la velocidad del sonido $a = a_s \sqrt{T/T_s}$ disminuye, por lo que el número de Mach $M = V/a$ debe aumentar a partir de cero. Cuando la presión cae a cero, V alcanza un valor finito, pero a se hace cero, en tanto que el número de Mach se vuelve infinito. Esta variación del número de Mach con el cambio de presión se grafica en la curva superior de la figura 12.3 y revela el rápido aumento del número de Mach conforme p/p_s se aproxima a cero.

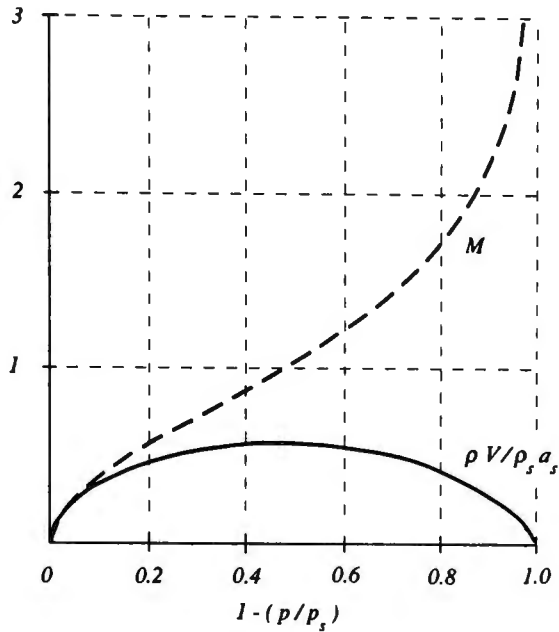


Figura 12.3 Gráfica del número de Mach M de un flujo y el gasto másico adimensional por unidad de área, $\rho V/\rho_s a_s$, en función de la razón de presiones p/p_s , correspondiente al flujo isentrópico de un gas perfecto con $\gamma = 1.4$.

Ejemplo 12.3

Un túnel aerodinámico supersónico experimental es alimentado con aire ($\gamma = 1.4$) que está almacenado en un tanque grande con una presión $p_s = 6E(5) Pa$. Cuando se hace funcionar el túnel durante un breve tiempo, la presión en la sección de pruebas es $p_t = 5E(4) Pa$. Calcule el número de Mach M_t en la sección de pruebas.

Solución

La relación entre las presiones y el número de Mach para el caso de un flujo isentrópico está dada por la ecuación 12.26:

$$\frac{p_t}{p_s} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2 \right)^{-\gamma/(\gamma - 1)}$$

$$M_t^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left[\left(\frac{p_t}{p_s} \right)^{-(\gamma - 1)/\gamma} - 1 \right]$$

$$= \left(\frac{2}{0.4} \right) \left[\left(\frac{5E(4)}{6E(5)} \right)^{-0.4/1.4} - 1 \right] = 5.17$$

$$M_1 = 2.274$$

Flujo crítico

En un flujo isentrópico acelerado, la presión y la densidad disminuyen en tanto que la velocidad aumenta. El producto ρV , que es el gasto másico por unidad de área, puede aumentar o disminuir, dependiendo de si el aumento de la velocidad contrarresta o no la disminución de la densidad. En la figura 12.3 se grafica la razón $\rho V / \rho_s a_s$ como función de la razón de presiones p/p_s en el flujo isentrópico de un gas perfecto con $\gamma = 1.4$, usando las ecuaciones 12.25 para evaluar ρV :

$$\frac{\rho V}{\rho_s a_s} = \left[\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(1 - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{p}{p_s} \right)^{1/\gamma} \quad (12.27)$$

El gasto másico por unidad de área, ρV , tiene un valor máximo que puede determinarse si se deriva la ecuación 12.27 respecto a p e igualándola a cero. La presión p_c para la cual se alcanza el máximo de este gasto másico se conoce como *presión crítica* y, para un gas perfecto con calor específico constante tiene el valor:

$$\frac{p_c}{p_s} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma - 1)} \quad (12.28)$$

El valor correspondiente al gasto másico por unidad de área es:

$$\frac{\rho_c V_c}{\rho_s a_s} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \quad (12.29)$$

Cuando $\gamma = 1.4$, $(p_c/p_s) = 0.5283$ y $(\rho_c V_c / \rho_s a_s) = 0.5787$.

Esta condición de flujo crítico, con un máximo en ρV , es simultáneamente la condición para la cual el número de Mach es igual a uno, como puede apreciarse al sustituir $M = 1$ en la expresión para p/p_s en la ecuación 12.26 y obteniendo la ecuación 12.28. Así, el flujo crítico separa el flujo isentrópico en dos regímenes, *flujo subsónico* ($V \leq a$) cuando $p/p_s \geq p_c/p_s$ y *flujo supersónico* ($V \geq a$) cuando $p/p_s \leq p_c/p_s$.

Ejemplo 12.4

Un tanque grande contiene aire ($\gamma = 1.4$) a una presión $p_s = 4E(5) Pa$ y velocidad del sonido $a_s = 347.2 m/s$. Un pequeño orificio localizado en uno de los lados del tanque con área de flujo $A_c = 1 cm^2$ permite que el aire fluya hacia la atmósfera en donde la presión es $p_a = 1E(5) Pa$. Calcule el gasto másico de aire que proviene del tanque y la fuerza externa F necesaria a fin de impedir que el tanque se mueva.

Solución

Puesto que la presión para el flujo crítico es mayor que la presión atmosférica, a partir de la ecuación 12.29, el gasto másico a través del orificio, $\rho_c V_c A_c$, es:

$$\rho_c V_c A_c = \rho_s a_s \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} A_c$$

Ya que $a_s^2 = \gamma p_s / \rho_s$, $\rho_s a_s = \gamma p_s / a_s = 1.4(4E(5) Pa) / (347.2 m/s) = 1.613E(3) kg/m^2 s$. De esta forma, el gasto másico se transforma en:

$$\rho_c V_c A_c = (1.613E(3) kg/m^2 s)(0.5787)(1E(-4) m^2) = 9.33E(-2) kg/s$$

Para encontrar V_c , se usa la ecuación 12.26 evaluada para $M = 1$:

$$V_c = a_s \sqrt{1 + (0.4/2)} = (347.2 m/s)(0.9129) = 317 m/s$$

Si se evalúa el teorema de la cantidad del movimiento para una superficie de control que rodea el exterior del tanque, es posible determinar la fuerza F :

$$(\rho_c V_c A_c) V_c = F - (p_c - p_a) A_c$$

$$F = (p_c - p_a) A_c + (9.33E(-2) kg/s)(317 m/s) = (p_c - p_a) A_c + 29.59 N$$

Pero es posible encontrar p_c a partir de la ecuación 12.28:

$$p_c = 0.5283(4E(5) Pa) = 2.113E(5) Pa$$

$$(p_c - p_a) A_c = (1.113E(5) Pa)(1E(-4) m^2) = 11.13 N$$

Así, $F = (11.13 + 29.59) N = 40.72 N$

Flujo en canales de área variable

En el caso de un flujo estacionario por un canal de área A que varía lentamente, la conservación de la masa exige que el gasto másico \dot{m} sea constante:

$$\dot{m} = \rho Va = \text{constante} \quad (12.30)$$

Los incrementos de densidad, velocidad y área del flujo pueden relacionarse entre sí al derivar el logaritmo de la ecuación 12.30:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (12.31)$$

Para un flujo isentrópico, a partir de la ecuación de Euler (despreciando la gravedad) y de la definición de la velocidad del sonido,

$$V dV = -\frac{1}{\rho} dp = -\frac{a^2}{\rho} d\rho$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V dV}{a^2} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (12.32)$$

Al combinar ésta con la ecuación 12.31:

$$(1 - M^2) \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dA}{A} \quad (12.33)$$

La ecuación 12.33 indica al diseñador cómo debe variar el área A del flujo de un canal a fin de acelerar o desacelerar el flujo. En un flujo incompresible ($VA = \text{constante}$), el área A debe disminuir a fin de acelerar el flujo, v.g., aumentando V . Sin embargo, de acuerdo con la ecuación 12.33, para un flujo compresible isentrópico, el flujo se acelera ($dV > 0$) en un canal convergente ($dA < 0$) sólo si el flujo es subsónico ($M^2 < 1$). Para acelerar un flujo supersónico, el área del canal debe aumentarse, no disminuirse. Por lo tanto, para acelerar en forma continua un flujo compresible en una boquilla, el área del flujo debe disminuirse hasta alcanzar el flujo sónico y luego reducirse con el fin de acelerar más el flujo supersónico.³ Para el proceso inverso de desaceleración de un flujo supersónico, como en un túnel aerodinámico supersónico, el área del difusor debe disminuirse primero hasta lograr obtener el flujo sónico y, luego, aumentarse para desacelerar el flujo subsónico resultante.

La figura 12.3 ilustra cómo el gasto másico por unidad de área, ρV , varía en un flujo que está sufriendo una aceleración y alcanza su valor máximo cuando la velocidad del flujo es localmente sónica en el punto de mínima área de flujo, A_c , que se conoce como *garganta* (o *sección mínima de paso*). El área de flujo A en un canal puede compararse con su valor mínimo A_c en $M = 1$ al advertir que el producto ρAV es una constante:

³ Este tipo de boquillas convergentes-divergentes fueron producto de la invención del ingeniero sueco DeLaval para utilizarlas en las turbinas de vapor.

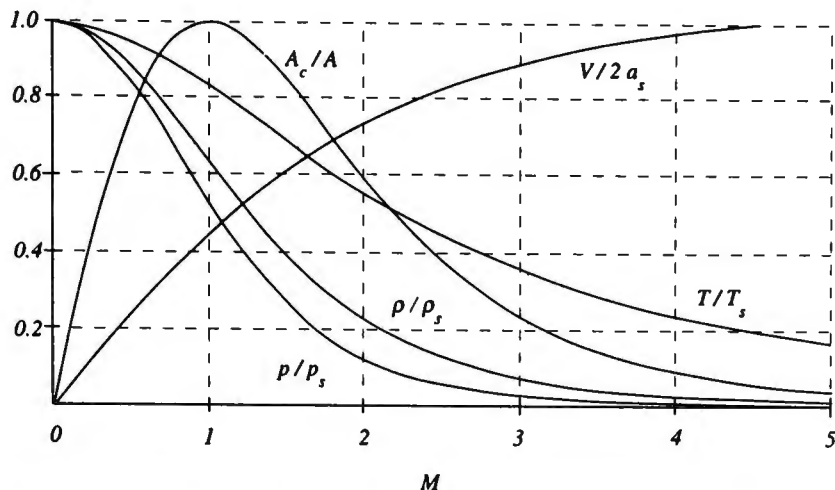


Figura 12.4 Variables del flujo correspondientes a un flujo estacionario isentrópico en función del número de Mach M para un gas perfecto con calor específico constante y $\gamma = 1.4$.

$$\begin{aligned}
 \frac{A_c}{A} &= \frac{\rho V}{\rho_c a_c} \\
 &= M \left[\left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{-(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \\
 &= \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) \left(1 - \left(\frac{p}{p_s} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{p}{p_s} \right)^{1/\gamma} \quad (12.34)
 \end{aligned}$$

donde se utilizaron las ecuaciones 12.26 y 5.30 para expresar la razón A/A_c como función de M o p/p_s .

Las variables del flujo compresible T/T_s , p/p_s , ρ/ρ_s y A_c/A , como están dadas en las ecuaciones 12.26 y 12.34, se grafican en la figura 12.4 como funciones del número de Mach M del flujo. La temperatura, densidad y presión disminuyen conforme el número de Mach aumenta, siendo la presión la que disminuye con mayor rapidez. La razón de áreas A_c/A del flujo es un máximo para $M = 1$, como se esperaba, puesto que éste es el punto de flujo crítico.

Sea el fluido o no un gas perfecto en un flujo estacionario compresible, el fluido no puede fluir con mayor rapidez que la velocidad local del sonido en el punto de área mínima del canal, A_c . Para aumentar el gasto másico, en ese punto debe aumentar la densidad o la velocidad del sonido, o ambos, al incrementarse ρ_s o a_s , o ambos, pero este flujo aumentado seguirá siendo un flujo sónico con $M = 1$ en ese punto.

Ejemplo 12.5

Un motor cohete en una nave espacial expande el gas propulsor para lograr una velocidad de salida V_e que es 90% del valor máximo posible. Calcule el número de Mach M_e del flujo de salida y la razón A_e/A_c del área de salida al área de la garganta, si se supone que el gas propulsor es un gas perfecto con $\gamma = 1.3$.

Solución

A partir de la ecuación 12.25, la velocidad máxima de salida posible V_{me} ocurre cuando $p = 0$ y $V_{me}/a_s = \sqrt{2/(\gamma - 1)} = \sqrt{2/0.3} = 2.582$. El número de Mach para la salida, M_e , correspondiente al 90% de este valor se encuentra a partir de la ecuación 12.26:

$$0.9(2.582) = M_e \left(1 + \frac{0.3}{2} M_e^2 \right)^{-1/2}$$

$$5.4 = \frac{M_e^2}{1 + 0.15 M_e^2}$$

$$M_e = \sqrt{\frac{5.4}{1 - 0.81}} = 5.331$$

Es posible calcular la razón de las áreas A_e/A_c de la ecuación 12.34 para $M_e = 5.331$:

$$\begin{aligned} A_e/A_c &= 5.331 \left[\left(\frac{2}{0.3} \right) \left(1 + 0.3(5.331)^2/2 \right) \right]^{2.32(0.3)} \\ &= 3.101E(3) \end{aligned}$$

Esto corresponde a una razón de diámetros de $\sqrt{3.101E(3)} = 55.69$.

12.4 Ondas de choque

Cuando un cuerpo se desplaza por un fluido con una velocidad que supera a la del sonido, producirá frentes de ondas en los cuales la presión, densidad y temperatura del fluido cambian en forma abrupta en distancias muy pequeñas.⁴ Esos frentes de ondas se conocen como *ondas de choque*. Es posible considerar estas ondas como superficies en el campo de flujo a través del cual existe un cambio discontinuo en las variables del flujo. Para un observador que se mueve con el cuerpo a una velocidad supersónica

⁴ La distancia es del orden de ν/a , que es para el aire a 20°C y a una atmósfera de presión, es de cerca de $5E(-8)$ m. Ésta es, en términos aproximados, la distancia que recorren las moléculas entre colisiones.

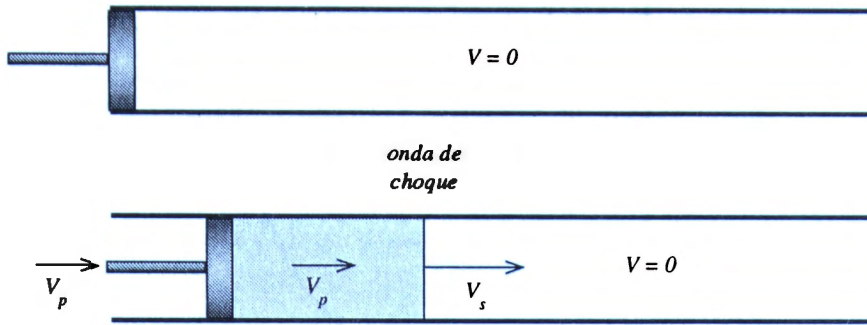


Figura 12.5 Onda de choque generada en un tubo de choque mediante el movimiento de un pistón que se desplaza con una velocidad V_p en el interior de un gas inicialmente estacionario. En la región sombreada se representa el fluido que está entre la onda de choque y el pistón y que se desplaza con la misma velocidad del pistón.

constante por el fluido, el flujo que se aproxima es un flujo supersónico estacionario y la onda de choque es una superficie fija en el marco de referencia del cuerpo pero a través de la cual el fluido se desplaza en forma estacionaria, a pesar de experimentar un cambio discontinuo en las condiciones del flujo al atravesar la onda de choque. Al igual que las ondas de gravedad que genera un barco que se mueve sobre la superficie del océano, las ondas de choque se propagan hacia el lado y la parte posterior del cuerpo supersónico, con lo que se forma un patrón que está fijo en relación con el cuerpo cuando se desplaza en forma estacionaria.

En la figura 12.5, se ilustra un método sencillo para producir ondas de choque. A lo largo de un tubo, que inicialmente se llena con un gas uniforme fijo, se coloca un pistón en uno de sus extremos. Al tiempo $t = 0$, de pronto se pone en movimiento el pistón con una velocidad constante V_p . Este movimiento genera una onda de choque que se mueve en la misma dirección que el pistón, pero con una velocidad V_s mayor que también es constante en el tiempo y superior a la velocidad del sonido en el gas no perturbado. El fluido entre el pistón y la onda de choque tiene densidad y presión uniformes que son mayores que las correspondientes al gas no perturbado que está enfrente de la onda de choque. Este fluido, el cual pasó a través de la onda de choque, ocupa un volumen menor que el inicialmente ocupado antes de haber sido procesado por la onda de choque.

Para encontrar el cambio de propiedades a través de esta onda de choque, resultará más conveniente describir el flujo en un marco de referencia fijo en la onda de choque, como se ilustra en la figura 12.6, para el cual el flujo es estacionario. En este flujo, las condiciones del flujo supersónico que se aproxima en el frente de la onda de choque se designan mediante el subíndice 2. Se selecciona una superficie de control con área unitaria que encierra a la onda de choque, como se ejemplifica en la figura 12.6, y se aplica la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía para un flujo no viscoso adiabático:

$$\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 = 0$$

$$\rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 = p_1 - p_2$$

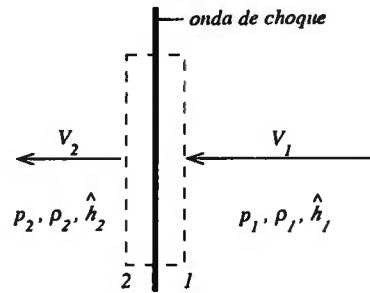


Figura 12.6 Superficie de control del flujo estacionario normal a la onda de choque. Las velocidades se miden respecto de la onda de choque.

$$\rho_2 V_2 \left(\hat{h}_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \rho_1 V_1 \left(\hat{h}_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = 0 \quad (12.35)$$

Si se elimina V_1 y V_2 entre estas ecuaciones, lo que queda es la ecuación de Rankine-Hugoniot para el cambio de variables termodinámicas a través de la onda de choque:

$$2(\hat{h}_2 - \hat{h}_1) = (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (12.36)$$

Las propiedades termodinámicas del fluido determinan la entalpía como función de la presión y densidad de forma que la ecuación 12.36 puede resolverse para las posibles p_2 y ρ_2 corriente abajo detrás de la onda de choque al moverse hacia un fluido con presión p_1 y densidad ρ_1 iniciales.

Si se considera el caso de un gas perfecto con calor específico constante, para el cual $\hat{h} = \hat{c}_p T = \gamma p / (\gamma - 1) \rho$, la ecuación de Rankine-Hugoniot tiene la forma:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)(\rho_1/\rho_2)}{(\gamma + 1)(\rho_1/\rho_2) - (\gamma - 1)} \quad (12.37)$$

Esta ecuación se grafica en la figura 12.7, en donde se indica cómo la posible presión corriente abajo, p_2 , se relaciona con la densidad ρ_2 , las cuales se expresan como la razón de presiones p_2/p_1 y la razón de densidades ρ_1/ρ_2 . Si bien no es evidente de la figura 12.7, las presiones p_2 se asocian con velocidades mayores de ondas de choque. Aunque el aumento de presión puede ser muy alto, la razón de densidades ρ_2/ρ_1 está limitada a un valor máximo de $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, el cual es igual a 6 para $\gamma = 1.4$.

También, en la figura 12.7 se presenta una curva de línea punteada que es isentrópica del estado inicial:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (12.38)$$

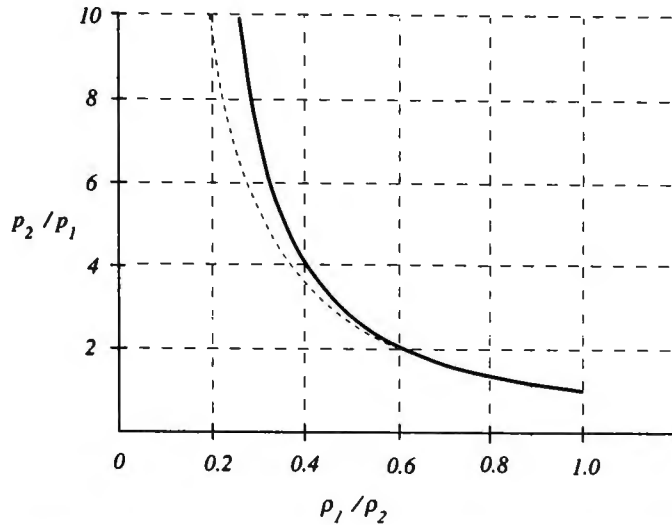


Figura 12.7 La línea continua indica la relación entre la razón de presiones p_2/p_1 a través de una onda de choque y la razón de densidades ρ_1/ρ_2 , según la ecuación de Rankine-Hugoniot para un gas perfecto con calor específico constante y $\gamma = 1.4$. La línea punteada es la curva isentrópica del estado inicial.

Cualquier punto p_2, ρ_2 que se encuentre por encima y a la derecha de esta línea tiene una entropía mayor que \hat{s}_1 . Es evidente que los estados detrás de la onda de choque tienen entropías que exceden la del gas corriente arriba, más aún si el aumento de presión es mayor. Si bien existe una solución a la ecuación de Rankine-Hugoniot para $p_2/p_1 \leq 1, \rho_1/\rho_2 \geq 1$, ésta no se grafica en la figura 12.7 porque corresponde a estados con entropía menor que \hat{s}_1 . Una solución de esta índole viola la segunda ley de la termodinámica, según fue expresada en la ecuación 8.45, la cual exige que la entropía nunca disminuya en un flujo adiabático.

Aunque el flujo a través de una onda de choque es adiabático y no viscoso, el esfuerzo viscoso y la transferencia de calor son importantes dentro de la misma onda de choque. El aumento de entropía a través de la onda de choque, ilustrado en la figura 12.7, es el resultado del proceso irreversible dentro del frente de choque.

Las condiciones de flujo corriente abajo para la onda de choque pueden expresarse en términos del número de Mach correspondiente a la onda de choque, $M_1 \equiv V_1/a_1$, para el caso de un gas perfecto con calor específico constante, al sustituir \hat{h} por $\hat{c}_p T$ en las ecuaciones 12.35, lo cual da:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

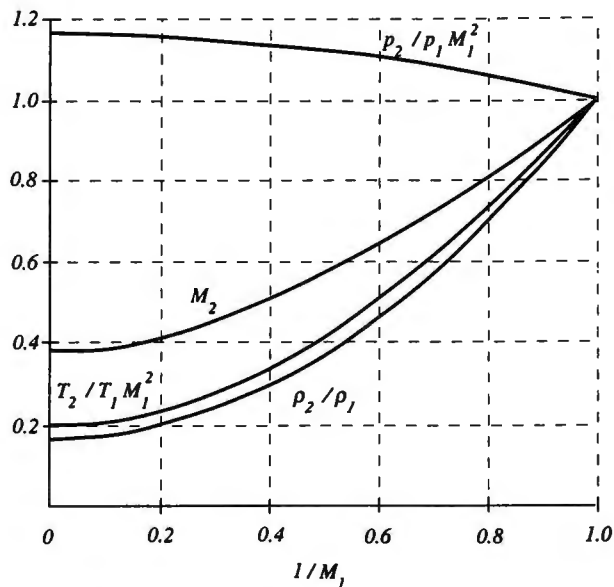


Figura 12.8 Gráfica de las propiedades de una onda de choque en función del número de Mach M_1 para la onda de choque.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (12.39)$$

Estas cantidades se grafican en la figura 12.8 en función de $1/M_1$. Adviértase que p_2/p_1 y T_2/T_1 son proporcionales a M_1^2 para números muy grandes de Mach correspondientes a la onda de choque, en tanto que ρ_2/ρ_1 y M_2 se acercan a valores fijos. También, adviértase que el flujo corriente abajo es subsónico puesto que $M_2 \leq 1$ para cualquier valor de $M_1 \geq 1$.

Ejemplo 12.6

En el flujo que se ilustra en la figura 12.5, se acelera aire inicialmente en reposo ($a_1 = 347.2 \text{ m/s}$, $p_1 = 1E(5) \text{ Pa}$, $\gamma = 1.4$) mediante una onda de choque de velocidad V_s , que genera un pistón que se mueve con velocidad $V_p = 100 \text{ m/s}$. Calcule el número de Mach de la onda de choque, la velocidad V_s de la onda de choque y la presión en la cara del pistón.

Solución

Si el estado del fluido detrás de la onda de choque se denota mediante el subíndice 2, la conservación de la masa en el marco de referencia fijo en la onda de choque es:

$$\rho_1 V_s = \rho_2 (V_s - V_p)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_s}{V_s - V_p} = \frac{M_1}{M_1 - V_p/a_1}$$

ya que la velocidad corriente abajo relativa a la onda de choque es $V_s - V_p$. Pero la razón de densidades ρ_2/ρ_1 se relaciona con el número de Mach M_1 mediante la ecuación 12.39:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{M_1}{M_1 - V_p/a_1}$$

$$(\gamma + 1)M_1^2 - [(\gamma + 1)V_p/a_1]M_1 = (\gamma - 1)M_1^2 + 2$$

$$M_1^2 - [(\gamma + 1)V_p/2a_1]M_1 - 1 = 0$$

Si se observa que $[(\gamma + 1)V_p/2a_1] = 2.4(100 \text{ m/s})/2(347.2 \text{ m/s}) = 0.3456$, se encuentra:

$$M_1 = \frac{\sqrt{(0.3456)^2 + 4} + 0.3456}{2} = 1.188$$

$$V_s = M_1 a_1 = (1.188)(347.2 \text{ m/s}) = 412.5 \text{ m/s}$$

De la ecuación 12.39, se encuentra que p_2 :

$$p_2 = p_1 \frac{2(1.4)(1.188)^2 - 0.4}{2.4} = 1.48 E(5) \text{ pa}$$

Ondas de choque en flujos por un canal

Las ondas de choque pueden estar presentes en los flujos supersónicos en canales, convirtiendo un flujo supersónico en uno subsónico siempre que las condiciones del flujo corriente abajo lo exijan. Para ilustrar el papel que desempeñan las ondas de choque en esos flujos, la figura 12.9 presenta la distribución de presión para varios posibles flujos compresibles estacionarios a través de una boquilla convergente-divergente. Para una caída de presión muy pequeña a través de la boquilla, resulta un flujo subsónico lento (curva *a*) que tiene una presión mínima y una máxima velocidad en la garganta de la boquilla. Este flujo es esencialmente incompresible. Cuando la caída de presión aumenta un poco (curva *b*), el flujo aumenta su velocidad pero sigue siendo subsónico

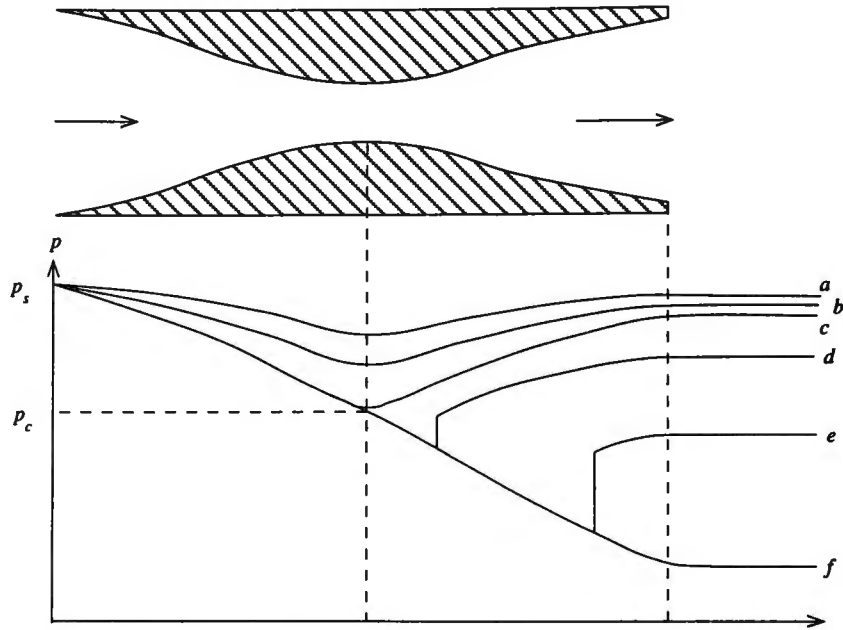


Figura 12.9 La distribución de presiones en una boquilla convergente-divergente depende del cambio de presión que ocurre a través de la boquilla. Es posible que haya ondas de choque en los flujos supersónicos de la parte divergente.

en todo lugar y el flujo se acelera en la porción convergente y se desacelera en la porción divergente. Cuando la presión se reduce más, como en la curva *c*, en la garganta se alcanza el flujo sónico crítico a una presión p_c , pero luego se desacelera subsónicamente conforme la presión aumenta. Una disminución posterior de la presión, como en la curva *d*, da como resultado un flujo supersónico corriente abajo de la garganta en la sección divergente, que termina con una onda de choque la cual aumenta la presión de modo abrupto y transforma el flujo subsiguiente en subsónico con un aumento en la presión. Conforme se reduce más la presión corriente abajo, la región del flujo supersónico se extiende más a lo largo del eje del flujo al moverse la onda de choque más en dirección corriente abajo (curva *e*). Por último, con una reducción suficientemente pronunciada en la presión, la onda de choque es succionada de la boquilla y prevalece un flujo por completo supersónico, como en la curva *f*.

El gasto másico a través de la boquilla de la figura 12.9 aumenta al disminuir la presión corriente abajo, siempre y cuando el flujo siga siendo subsónico en todo lugar, como en las curvas *a-c*. Sin embargo, una vez que el flujo supersónico se ha establecido corriente abajo de la garganta, ya no hay aumento en el gasto másico a través de la boquilla, y se dice que la garganta ha sido *estrangulada* para estas condiciones. Para flujos estrangulados, no puede propagarse corriente arriba un cambio pequeño en la presión corriente abajo a través de la garganta y, por lo tanto, dicho cambio no puede afectar el flujo y el gasto másico corriente arriba.

12.5 Flujo viscoso adiabático por una tubería

Algunas veces, los gases son bombeados por largas tuberías y sufren cambios sustanciales de densidad conforme la presión cae a lo largo del tubo. Éste es un caso característico que ocurre en la transmisión a largas distancias del gas natural desde el pozo de gas hasta los distribuidores locales que se encuentran a miles de kilómetros de distancia. Este tipo de flujos compresibles debe tratarse de modo distinto a los flujos incompresibles del capítulo 9.

El esfuerzo cortante sobre la pared de una tubería retarda el flujo, ocasionando una caída de presión a lo largo del eje del tubo. La magnitud del gradiente de presión ocasionado por este esfuerzo cortante de la pared se expresa, por lo regular, en términos del factor de fricción de Darcy f mediante la ecuación 6.48:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{f}{D} \left(\frac{\rho \bar{V}^2}{2} \right)$$

En el caso de un flujo compresible en una tubería, la velocidad promedio \bar{V} del fluido aumenta al disminuir la presión y densidad en la dirección del flujo, de forma que la aceleración de una partícula del fluido se vea afectada tanto por el gradiente de presión como por la resistencia al avance de la pared:

$$\bar{V} \frac{d\bar{V}}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{1}{2D} f \rho \bar{V}^2 \quad (12.40)$$

La conservación de la masa en el flujo de la tubería puede darse en forma diferencial como:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\bar{V}}{\bar{V}} = 0 \quad (12.41)$$

y la conservación de la energía, ecuación 12.20, como:

$$\frac{1}{\gamma-1} d(a^2) + \frac{1}{2} d(\bar{V}^2) = 0 \quad (12.42)$$

donde se ha utilizado $\hat{dh} = d(a^2)/(\gamma-1)$ para un gas perfecto con calor específico constante.

Resulta conveniente introducir el número de Mach $M \equiv \bar{V}/a$ como una variable del flujo, como se hizo con el flujo isentrópico. Al utilizar la ley de los gases perfectos y las ecuaciones 12.41 y 12.42, es posible expresar las derivadas $d\bar{V}/dM$, dp/dM , etc., como funciones de M y luego integrar estas expresiones de $M = 1$ a M , con lo que se obtiene:

$$\frac{\bar{V}}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho} = M^2 \frac{p}{p_c} = M \frac{a}{a_c} = M \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T_c}} = M \sqrt{\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}} \quad (12.43)$$

donde el subíndice c se refiere al valor de la variable del flujo en $M = 1$. Estas variables se grafican en la figura 12.10 como función del número de Mach.

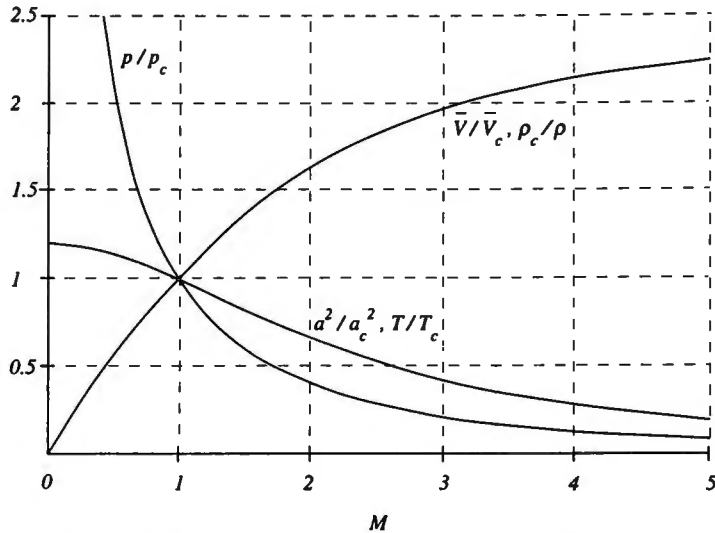


Figura 12.10 Variables del flujo de un flujo adiabático en una tubería. La fricción se grafica en función del número de Mach $M \equiv \bar{V}/a$ para un gas perfecto con $\gamma = 1.4$.

La ecuación de la cantidad de movimiento, 12.40, también puede expresarse en la forma de una función del número de Mach usando las relaciones 12.43:

$$\frac{f}{D} dx = \frac{1 - M^2}{\gamma M^4 [1 + (\gamma - 1)M^2/2]} d(M^2) \quad (12.44)$$

El lado izquierdo de esta ecuación siempre es positivo y, por lo tanto, también debe serlo el lado derecho. De ahí que $(1 - M^2) d(M^2)$ siempre sea positivo y M debe aumentar en el flujo subsónico y a la inversa, para el flujo supersónico. En consecuencia, se sigue que el efecto de fricción en un flujo compresible por la tubería consiste en forzar al flujo hacia su condición sónica, v.g., un flujo estrangulado. Una vez alcanzada esta condición, no hay cambio posterior posible. Por lo tanto, esta condición sólo puede alcanzarse en el extremo del tubo. El flujo corriente arriba se ajustará a esta condición de ser necesario de modo que se mantenga un flujo estacionario.

Puede integrarse la ecuación 12.44 sobre una longitud $L_{m\acute{a}x}$ entre la entrada a la tubería y la salida cuando el flujo ahí queda estrangulado ($M = 1$):

$$\frac{\bar{f}L_{m\acute{a}x}}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1)M^2}{2[1 + (\gamma - 1)M^2/2]} \right] \quad (12.45)$$

donde \bar{f} es el valor promedio del factor de fricción de Darcy sobre la longitud $L_{m\acute{a}x}$ de la tubería. Si se conoce el número de Mach del flujo en la entrada, entonces la ecuación 12.45 define la longitud máxima de la tubería para la cual puede existir el flujo estacionario para la condición en la entrada.

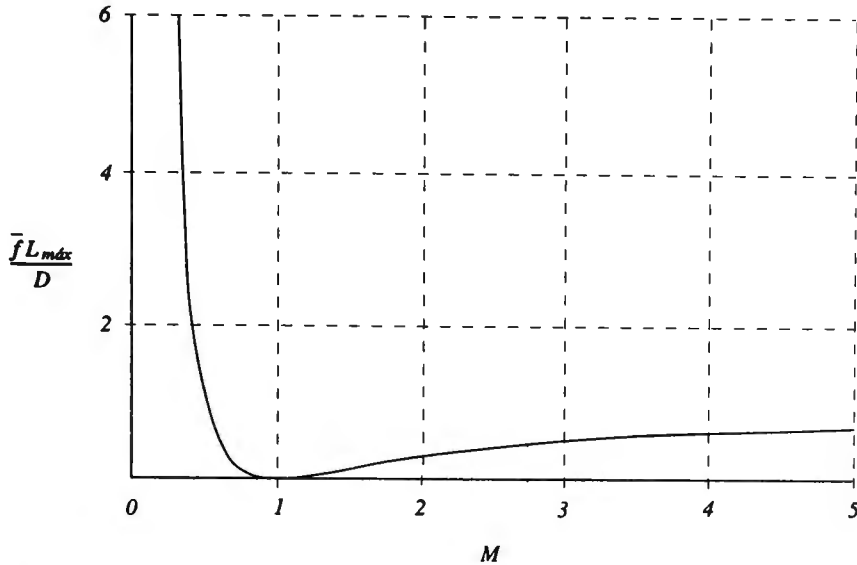


Figura 12.11 Longitud adimensional $\bar{f}L_{m\acute{a}x}/D$ de la tubería para lograr un flujo estrangulado en función del número de Mach M inicial correspondiente al flujo viscoso adiabático en una tubería de un gas perfecto con $\gamma = 1.4$.

En la figura 12.11, se grafica la longitud $\bar{f}L_{m\acute{a}x}/D$ adimensional del flujo de la tubería en función del número de Mach. Adviértase que esta longitud es mayor para el flujo subsónico, que es el caso que se encuentra con mayor frecuencia. Para el flujo supersónico, ese número es, en general, inferior a la unidad. Como puede apreciarse en la figura 12.10, la presión cae y la velocidad aumenta en el flujo subsónico, en tanto que ocurre lo opuesto en el flujo supersónico.

El factor de fricción de Darcy f es función del número de Reynolds $Re_D \equiv \rho \bar{V}D/\mu$, la rugosidad ϵ/D de la tubería y el número de Mach \bar{V}/a del flujo. Para la mayoría de los flujos compresibles en tuberías, el flujo será turbulento, y es posible calcular f a partir de la ecuación 9.7. El número de Reynolds es casi constante a lo largo de la longitud de la tubería puesto que $\rho \bar{V}$ es constante por la conservación de la masa y μ depende sólo de la temperatura, la cual cambia muy poco. En cualquier caso, f no es sensible a cambios moderados en el número de Reynolds en un flujo turbulento de modo que f puede calcularse para las condiciones conocidas de los flujos de entrada y salida.

Ejemplo 12.7

Una tubería de gas natural con diámetro $D = 1 \text{ m}$ y rugosidad superficial $\epsilon = 5E(-5) \text{ m}$ se abastece de gas con un compresor a una presión $p_1 = 2E(6) \text{ Pa}$ y temperatura $T_1 = 20^\circ\text{C}$. A esta temperatura la velocidad del sonido en gas natural es $a_1 = 446.1 \text{ m/s}$, la viscosidad $\mu = 9E(-6) \text{ Pa s}$ y la razón de calor específico $\gamma = 1.31$, en tanto que la constante del gas es $R = 518.3 \text{ J/kg K}$. La velocidad del flujo en la tubería es $\bar{V}_1 = 10 \text{ m/s}$.

Calcule la longitud $L_{m\acute{a}x}$ de la tubería para la cual el flujo se estrangularía, así como la velocidad \bar{V}_c del flujo y la presión p_c en el punto de estrangulamiento del flujo.

Solución

Para encontrar el número de Reynolds de la tubería, primero calcule la densidad a partir de la ley de los gases perfectos:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{2E(6) Pa}{(518.3 J/kg K)(293.15K)} = 13.16 kg/m^3$$

$$Re_D = \frac{\rho_1 \bar{V}_1 D}{\mu_1} = \frac{(13.16 kg/m^3)(10 m/s)(1 m)}{9E(-6) Pa s} = 1.463E(7)$$

El factor de fricción de Darcy f puede calcularse a partir de la ecuación 7.17 para el flujo turbulento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \\ &= -2 \log \left(1.352E(-5) + \frac{1.716E(-7)}{\sqrt{f}} \right) \\ f &= 1.076E(-2) \end{aligned}$$

Ahora, se determina $L_{m\acute{a}x}$ de la ecuación 12.45 para $M = 10/446.1 = 2.242E(-2)$:

$$\frac{\bar{f} L_{m\acute{a}x}}{D} = \frac{1 - 5.025E(-4)}{1.31(5.025E(-4))} + \frac{2.31}{2.62} \ln \left(\frac{(2.31)5.025E(-4)}{2[1 + 0.31(5.025E(-4))/2]} \right) = 1511$$

$$L_{m\acute{a}x} = \frac{1.51(1 m)}{1.076E(-2)} = 1.405E(5) m = 140.5 km$$

Para encontrar la presión y la velocidad en este punto, se utilizan las ecuaciones 12.43:

$$\bar{V}_c = \frac{\bar{V}}{M} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1}} = \frac{10 m/s}{2.242E(-2)} \sqrt{\frac{2 + 0.31(2.242E(-2))^2}{2.31}} = 415.0 m/s$$

$$p_c = \frac{p_1 \bar{V}_c M^2}{\bar{V}_1} = \frac{(2E(6) Pa)(415.0 m/s)(2.242E(-2))^2}{10 m/s} = 4.172E(4) Pa$$

12.6 Flujo plano supersónico

En esta sección, se consideran dos flujos supersónicos simples que sólo tienen dos componentes de la velocidad, ambas en el plano x, y . El primero de los flujos es el que

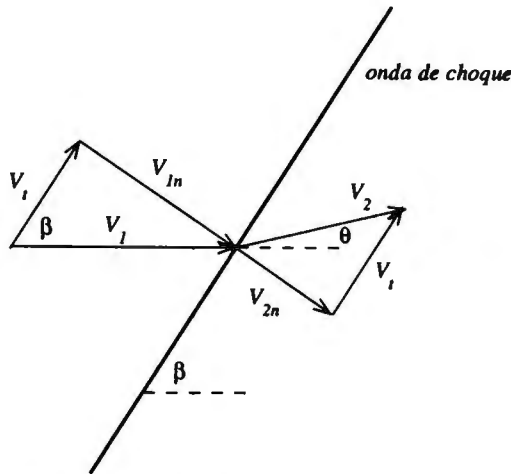


Figura 12.12 El flujo a través de una onda de choque oblicua en un flujo supersónico, el cual forma un ángulo β con el flujo que se aproxima, se desvía un ángulo θ de la dirección normal. Aquí no hay cambio en la componente tangencial V_t de la velocidad a través de la onda de choque.

ocurre a través de una onda plana de choque y es oblicuo al flujo supersónico que se aproxima, como el flujo que se formaría alrededor de una cuña puntiaguda que apunta hacia el flujo supersónico. El segundo es el flujo a lo largo de una pared curva. Ambos flujos no son viscosos y son isentrópicos (a excepción del aumento en la entropía que sucede dentro de la onda plana de choque). Estos flujos son la base del flujo supersónico bidimensional y pueden utilizarse para lograr una comprensión de flujos supersónicos más complejos.

12.6.1 Ondas planas de choque oblicuas

Considérese el flujo mostrado en la figura 12.12, donde un flujo supersónico horizontal y uniforme de velocidad V_1 se encuentra con una onda plana de choque oblicua que forma un ángulo β con el flujo que se aproxima. Es posible descomponer el flujo de entrada en una componente normal V_{1n} y una componente tangencial V_t relacionadas con V_1 por:

$$V_{1n} = V_1 \sin \beta; \quad V_t = V_1 \cos \beta \quad (12.46)$$

El flujo corriente arriba y corriente abajo de la onda plana de choque es uniforme, por lo que ya no habrá gradiente de presión en la dirección tangente a la onda de choque. En consecuencia, la componente tangencial de la velocidad, V_t , es la misma detrás de la onda de choque que enfrente, como se ilustra en la figura 12.12.

Si uno se mueve a lo largo de la misma onda de choque con una velocidad V_i , un observador vería un flujo estacionario con una velocidad V_{en} con dirección normal a la onda de choque, v.g., el flujo parecería ser el mismo como el que se describió en la sección 12.4. En particular, la razón de densidades ρ_2/ρ_1 a través de la onda de choque

podría estar dada por la ecuación 12.39 al sustituir M_1 por $V_{1n}/a_1 = (V_1 \sen \beta)/a_1 = M_1 \sen \beta$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sen^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sen^2 \beta + 2} \quad (12.47)$$

donde $M_1 = V_1/a_1$ es el número de Mach del flujo corriente arriba de la onda de choque oblicua representada en la figura 12.12.

Como puede verse en la figura 12.12, el aumento en la densidad origina una disminución en la velocidad normal V_{2n} detrás de la onda de choque por la conservación de la masa:

$$\begin{aligned} \rho_1 V_{1n} &= \rho_2 V_{2n} \\ V_{2n} &= \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) V_{1n} \end{aligned} \quad (12.48)$$

En consecuencia, la velocidad corriente abajo V_2 se aparta un ángulo θ de la normal hacia la onda de choque en comparación con su valor corriente arriba. A partir de la figura 12.12, el ángulo que forman las componentes de la velocidad V_2 y V_1 es $\beta - \theta$, por lo que:

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{V_{2n}}{V_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{V_{1n}}{V_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \tan \beta \quad (12.49)$$

donde se utilizaron las ecuaciones 12.46. Sin embargo, es posible resolver las ecuaciones 12.49 y 12.47 para θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sen^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right) \quad (12.50)$$

La figura 12.13 es una gráfica de la relación entre el ángulo θ de desviación del flujo y el ángulo β de la onda de choque para un gas perfecto con $\gamma = 1.4$ para varios números de Mach. Para cualquier ángulo θ de desviación, en general existen dos ángulos posibles β de la onda de choque. En el caso del ángulo de la onda de choque menor, el flujo corriente abajo es, por lo regular, supersónico y la onda de choque se llama *débil*. Para el ángulo de la onda de choque mayor β , el flujo corriente abajo es subsónico y la onda de choque se llama *fuerte*, lo cual significa una razón de presiones p_2/p_1 mayor que la de la onda de choque débil. No obstante, para cualquier número dado de Mach, existe un ángulo máximo de desviación θ más allá del cual no hay posibilidad de que exista una onda plana de choque oblicua con flujo uniforme, tanto corriente arriba como corriente abajo de la onda de choque. Si en un flujo supersónico se inserta una cuña de semiángulo mayor que este valor máximo, la onda de choque se separa de la cuña y se desplaza corriente arriba, haciéndose curva y creando, corriente abajo, un flujo plano no uniforme.

Para ángulos θ de desviación muy pequeños, la ecuación 12.50 queda satisfecha por $\beta = \pi/2$, una onda (fuerte) de choque normal, o por $\sen \beta = 1/M_1$, una onda de sonido (débil).

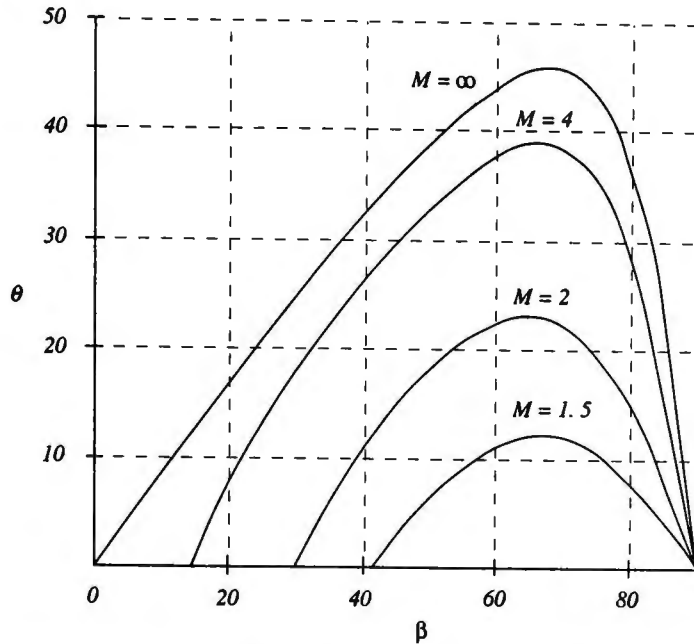


Figura 12.13 Ángulo θ de la desviación del flujo ocasionada por una onda de choque oblicua que forma un ángulo θ con el flujo supersónico entrante para varios números de Mach M del flujo entrante en un gas perfecto con $\gamma = 1.4$.

Es posible encontrar el cambio ocurrido en la presión, la temperatura y la velocidad del sonido a través de una onda de choque oblicua a partir de las ecuaciones ordinarias para la onda de choque, 12.39, al sustituir M_1 en estas ecuaciones por $V_{1n}/a_1 = (V_1 \text{ sen } \beta/a_1) = M_1 \text{ sen } \beta$:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \text{ sen}^2 \beta - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \frac{[2\gamma M_1^2 \text{ sen}^2 \beta - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 \text{ sen}^2 \beta + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \text{ sen}^2 \beta} \quad (12.51)$$

Para encontrar M_2 para una onda de choque oblicua, adviértase en la figura 12.12 que:

$$\cos(\beta - \theta) = \frac{V_t}{V_2}; \quad \cos \beta = \frac{V_t}{V_1} \quad (12.52)$$

de forma que:

$$M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_t}{a_2 \cos(\beta - \theta)} = \frac{V_1 \cos \beta}{a_2 \cos(\beta - \theta)} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \theta)} \left(\frac{a_1}{a_2}\right) M_1 \quad (12.53)$$

donde a_1/a_2 puede obtenerse a partir de 12.51.

Ejemplo 12.8

En un túnel aerodinámico supersónico, se introduce una cuña bidimensional de semi-ángulo $\theta = 10^\circ$ en el flujo de aire, y se observa que el ángulo de la onda de choque es $\beta = 20^\circ$. Calcule el número de Mach M del flujo en el túnel aerodinámico.

Solución

Puesto que se conocen θ y β , es posible resolver la ecuación 12.50 para el número de Mach:

$$\begin{aligned}
 [M^2(\gamma + \cos^2 \beta) + 2] \tan \theta &= 2 \cot \beta (M^2 \operatorname{sen}^2 \beta - 1) \\
 M^2 &= \frac{2 \tan \theta + 2 \cot \beta}{2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta - (\gamma + \cos^2 \beta) \tan \theta} \\
 &= \frac{2 \tan 10^\circ + 2 \cot 20^\circ}{2 \cos 20^\circ \operatorname{sen} 20^\circ - (1.4 + \cos^2 20^\circ) \tan 10^\circ} = 24.34 \\
 M &= 4.933
 \end{aligned}$$

12.6.2 Flujo supersónico a lo largo de una pared

Un flujo plano supersónico puede cambiar de dirección en forma abrupta cuando se encuentra una onda de choque oblicua, como lo muestra la figura 12.12, pero la dirección del flujo también puede cambiar en forma gradual mediante una serie de ondas de sonido de poca amplitud; de modo que no se aumente la entropía como lo haría una onda de choque. Esas ondas de sonido de poca amplitud se conocen como *ondas de Mach*, y el cambio en la dirección del flujo, θ , ocasionado por esas ondas puede ser mucho mayor que el producido por una onda de choque oblicua.

Considérese un flujo plano supersónico con número de Mach $M = V/a$ que pasa sobre una pared que de pronto cambia la dirección un ángulo pequeño $\delta\theta$, como se ilustra en la figura 12.14. El cambio de dirección se propaga en el flujo a lo largo de la onda de Mach que forma un ángulo $\beta = \operatorname{sen}^{-1}(1/M)$ con la pared. Como puede apreciarse en la figura 12.14, la componente de la velocidad corriente arriba normal a la onda de Mach es a pues una onda de sonido tal que la componente tangencial V_t es:

$$V_t = V \cos \beta = \sqrt{V^2 - a^2} = a \sqrt{M^2 - 1} \quad (12.54)$$

Corriente abajo de esta onda, la velocidad del flujo aumenta ligeramente a $V + \delta V$, y el ángulo entre $V + \delta V$ y V_t es $\beta + \delta\theta$. En consecuencia, se tiene que:

$$\cos(\beta + \delta\theta) = \frac{V_t}{V + \delta V} \simeq \frac{V_t}{V} \left(1 - \frac{\delta V}{V}\right) = \frac{V_t}{V} - \left(\frac{V_t}{V}\right) \frac{\delta V}{V} \quad (12.55)$$

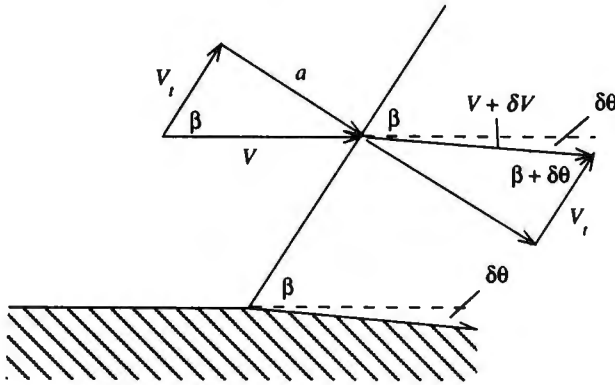


Figura 12.14 Se logra un flujo supersónico al pasar por una pequeña inflexión de una pared mediante una onda de Mach que acelera al flujo hasta alcanzar una velocidad ligeramente mayor.

donde se supuso que $\delta V \ll V$. Si se observa que $\delta\theta \ll 1$ y si se utiliza la ecuación 12.54, esto se transforma en:

$$\begin{aligned} \cos \beta - \text{sen } \beta (\delta\theta) &= \cos \beta - \left(\frac{V_t}{V}\right) \frac{\delta V}{V} \\ -\frac{1}{M} \delta\theta &= -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \frac{\delta V}{V} \\ \delta\theta &= \sqrt{M^2 - 1} \frac{\delta V}{V} \end{aligned} \quad (12.56)$$

Puesto que $M = V/a$, los pequeños cambios en estas variables se relacionan por medio de:

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta M}{M} + \frac{\delta a}{a} \quad (12.57)$$

Pero, de la ecuación 12.26 para un gas perfecto con calor específico constante,

$$V\delta V + \frac{2}{\gamma - 1} a \delta a = 0 \quad (12.58)$$

Al eliminar a , se encuentra:

$$\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \frac{\delta V}{V} = \frac{\delta M}{M} \quad (12.59)$$

Al sustituir en la ecuación 12.56 y si se usa diferenciales para cantidades pequeñas, se encuentra que:

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} dM \quad (12.60)$$

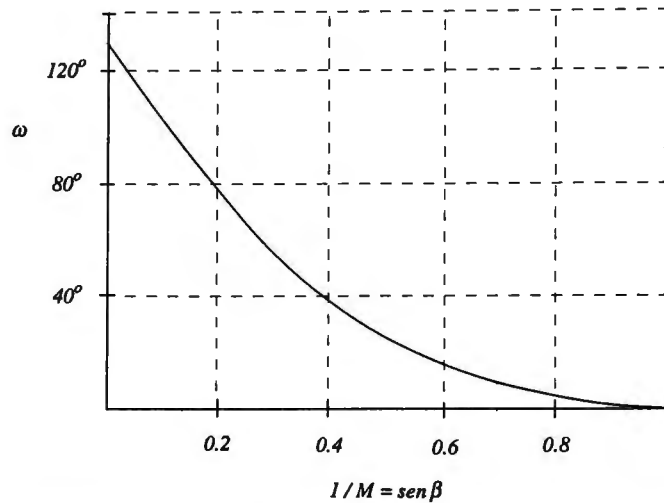


Figura 12.15 Ángulo de giro ω de un flujo supersónico en un plano en función del número de Mach M para el caso $\gamma = 1.4$.

En la ecuación 12.60, $d\theta$ es el aumento del ángulo de giro a lo largo de la línea de corriente y dM es el aumento en el número de Mach del flujo a través de la onda de Mach.

Si se comienza con un flujo sónico y, en forma gradual, se desvía el flujo un ángulo cada vez mayor conforme aumenta el número de Mach, la relación entre el ángulo total de desviación, que se denota por ω , y el número de Mach M para ese ángulo puede encontrarse al integrar la ecuación 12.60:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\frac{(\gamma-1)(M^2-1)}{\gamma+1} \right)^{1/2} - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1} \quad (12.61)$$

La ecuación 12.61 se conoce como *función de Prandtl-Meyer* para el ángulo de giro de un flujo supersónico. Este ángulo se grafica en la figura 12.15 en función del recíproco del número de Mach ($1/M = \text{sen } \beta$) para el caso en el que $\gamma = 1.4$. Hay que notar que el ángulo ω de giro sobrepasa los 120° para un número de Mach infinito.

En la figura 12.16(a) se esquematiza un flujo plano supersónico a lo largo de una superficie curva que se hace girar un ángulo θ grande. El flujo uniforme de entrada para un número de Mach M_1 y un número de onda de Mach β_1 se hace girar gradualmente mediante una *onda de expansión* hasta un número de Mach mayor, $M_2 > M_1$, y un número de onda de Mach menor, $\beta_2 < \beta_1$. El flujo corriente abajo de la onda de Mach cuyo ángulo es β_2 es uniforme. La presión, densidad y velocidad del sonido entre 1 y 2 disminuyen en tanto que la velocidad del flujo aumenta. Puesto que θ es la diferencia entre ω_2 y ω_1 , el número de Mach M_2 corriente abajo se relaciona con el número de Mach corriente arriba, θ , mediante M_1 :

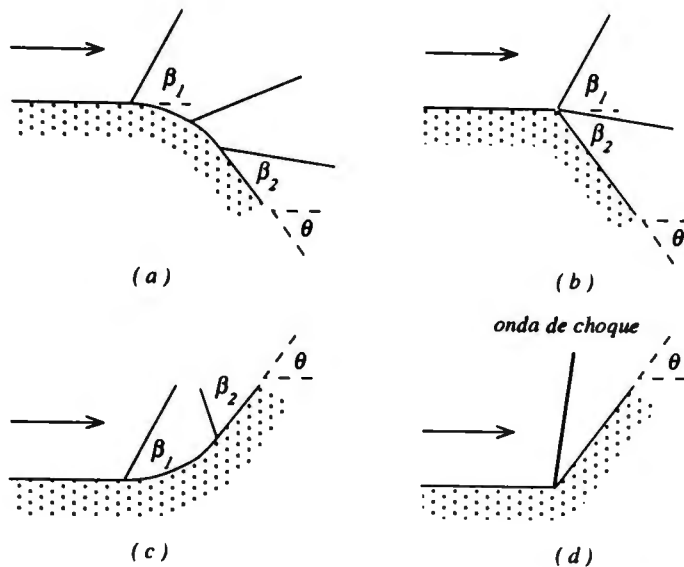


Figura 12.16 Ejemplos de un flujo plano supersónico a lo largo de una pared que se hace girar un ángulo θ .

$$\omega_2 \{M_2\} = \omega_1 \{M_1\} + \theta \quad (12.62)$$

donde $\omega \{M\}$ está dado por la ecuación 12.61. Si la curvatura de la pared se aumenta hasta formar un codo, como se indica en la figura 12.16(b), el flujo corriente abajo es idéntico al de la figura 12.16(a), y el flujo entre las ondas de Mach 1 y 2 se dice que es una *onda de expansión centrada*.

Si la pared curva es cóncava en dirección al flujo que se aproxima (véase la figura 12.16(c)) más bien que convexa 12.16(b), el fluido se comprime y su presión, densidad y velocidad del sonido son mayores, pero la velocidad del fluido y su número de Mach son menores en una *onda de compresión*. La relación entre los flujos corriente abajo y corriente arriba está determinada por el ángulo de giro θ :

$$\omega_2 \{M_2\} = \omega_1 \{M_1\} - \theta \quad (12.63)$$

Pero, como puede apreciarse en el esquema de la figura 12.16(c), la onda de Mach corriente abajo con el tiempo se desplazará hacia la onda de Mach corriente arriba, formando una onda de choque a cierta distancia de la pared. Si la curvatura de la pared aumenta hasta formar un codo, como se aprecia en la figura 12.16(d), la onda de choque se une al codo, y el flujo es el que ocurre a través de una onda de choque oblicua según las ecuaciones 12.50, 12.51 y 12.53. A diferencia de los flujos de la figura 12.16(a)-(c), hay un aumento de entropía en el flujo corriente abajo de 12.16(d).

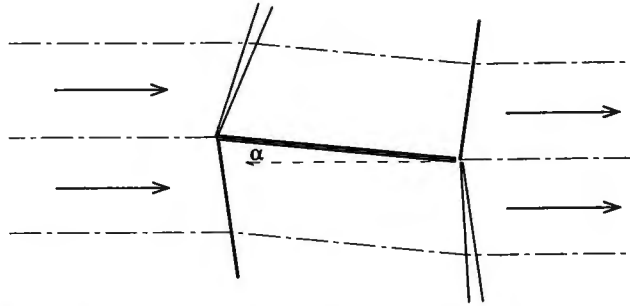


Figura 12.17 Diagrama de un flujo supersónico sobre un perfil aerodinámico en una placa plana para un ángulo de ataque α , en el que se ilustran los frentes de onda generados en los bordes de ataque y de salida (de escape), así como algunas líneas de corriente del flujo.

12.6.3 Flujo plano alrededor de perfiles aerodinámicos supersónicos

Los principios estudiados en las secciones anteriores pueden aplicarse para determinar la fuerza ascensional y la resistencia al avance producida por un flujo plano supersónico no viscoso que ocurre alrededor de un perfil aerodinámico. En muchos casos, el análisis de este flujo es más sencillo que en el caso del flujo incompresible, ya que existe una relación simple entre la pendiente de la superficie del ala y la presión a lo largo de ella.

La figura 12.17 representa el perfil aerodinámico más sencillo en un flujo supersónico: una placa plana con un ángulo de ataque α . En el borde de ataque, el flujo encima y debajo del perfil se encuentra con el flujo en una esquina, igual a los flujos ilustrados en la figura 12.16(b) y (d). En la superficie superior, una onda de expansión centrada hace girar el flujo un ángulo α hacia abajo con un número de Mach para el flujo M_u a lo largo de la superficie superior que está determinado por la ecuación 12.62 con $\theta = \alpha$ y $M_2 = M_u$. En esta superficie, la diferencia de presión $p_1 - p_u$ puede calcularse a partir de las relaciones para el flujo isentrópico, ecuación 12.26, en el caso del flujo entre M_1 y M_u . En la superficie inferior, una onda de choque débil aumenta la presión y disminuye el número de Mach a M_t . Para esta onda de choque, el ángulo β de choque puede encontrarse a partir de la ecuación 12.50 con $\theta = \alpha$ y, luego, la razón de presiones p_t/p_1 a partir de la ecuación 12.51. La diferencia de presión $p_t - p_u$ produce una fuerza normal a la superficie del perfil aerodinámico que tiene una parte correspondiente a la fuerza ascensional o sustentación y otra relativa a la resistencia al avance. Los coeficientes de la fuerza ascensional y de resistencia al avance correspondientes, C_L y C_D , son:

$$C_L = \frac{p_t - p_u}{\rho_1 V_1^2 / 2} \cos \alpha; \quad C_D = \frac{p_t - p_u}{\rho_1 V_1^2 / 2} \sen \alpha \quad (12.64)$$

Para ángulos pequeños de ataque α , la diferencia de presión $p_t - p_u$ variará según α y, así variará también el coeficiente de la fuerza ascensional. Pero el coeficiente de resistencia al avance variará según α^2 , por lo que el perfil aerodinámico se hace ineficiente para ángulos de ataque grandes, teniendo una razón de la fuerza ascensional

a la fuerza de resistencia al avance de aproximadamente $1/\alpha$. A diferencia del flujo no viscoso sobre perfiles aerodinámicos, la fuerza de resistencia al avance en un flujo supersónico no viscoso desafortunadamente no es cero.

El flujo que se aproxima al borde de salida o de escape del perfil aerodinámico de la figura 12.17 tiene una mayor presión en la parte inferior de ese borde que en la parte superior que difieren una cantidad $p_l - p_u$. La línea de corriente que sale del borde de salida no puede soportar esta diferencia de presión, por lo que el flujo se desvía hacia arriba un ángulo casi igual que α , con lo que se genera una onda de choque que se desplaza hacia arriba y una onda de expansión que se mueve hacia abajo, con lo que se equilibran las presiones corriente abajo de estas ondas. El flujo debajo del perfil aerodinámico consta, así, de una onda de choque seguida de una onda de expansión, en tanto que arriba es exactamente lo inverso. En ambos casos, la onda de choque y la de expansión convergerán a grandes distancias del perfil aerodinámico, atenuando, en última instancia, los cambios de presión a través de ellas. La onda de choque que se mueve hacia abajo es la causa del conocido "estampido sónico" de los aviones supersónicos.

Ejemplo 12.9

Para el perfil aerodinámico de placa plana en el flujo supersónico que se representa en la figura 12.17, exprese el coeficiente de fuerza ascensional C_L en términos del número de Mach M y el ángulo de ataque α , para el caso de $\alpha \ll 1$.

Solución

En la superficie superior del perfil aerodinámico, para un ángulo pequeño de desviación, $\delta\theta = \alpha$, la ecuación 12.60 proporciona el incremento correspondiente δM del número de Mach:

$$\delta\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)} \delta M$$

Pero el flujo a través de la onda de expansión en el borde de ataque es isentrópico, por lo que el cambio correspondiente en presión δp puede encontrarse al derivar 12.26:

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln p_s - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \\ \frac{\delta p}{p} &= - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{(\gamma-1)M \delta M}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \\ \delta p &= \frac{-\gamma p M \delta M}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \end{aligned}$$

Al combinar con la expresión para $\delta\theta$:

$$\delta p = - \frac{\gamma M^2 p}{\sqrt{M^2 - 1}} \delta\theta$$

Para un pequeño ángulo de ataque, la onda de choque débil en el borde de ataque que hace girar el flujo el mismo ángulo $\delta\theta = \alpha$ provocará un aumento de presión igual al de la caída de presión en la superficie superior. El coeficiente de fuerza ascensional se convierte en:

$$C_L = \frac{2(-\delta p)}{\rho V^2 \Omega} = \frac{4(-\delta p)}{\rho V^2}$$

$$= \frac{4\gamma M^2 p}{\rho V^2 \sqrt{M^2 - 1}} \alpha = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

puesto que $\gamma p / \rho V^2 = a^2 / V^2 = 1 / M^2$.

12.7 Flujo no estacionario unidimensional

Cuando se investigó el flujo no viscoso en el capítulo 4, fue posible tratar un flujo incompresible a lo largo de una línea de corriente utilizando la integral de Bernoulli, ecuación 4.13, en la cual aparece el carácter no estacionario del flujo en un término integral, $\int (\partial \mathbf{V} / \partial t) \cdot ds$. En casos en los que \mathbf{V} podía determinarse a lo largo de una línea de corriente al aplicar la conservación de la masa, fue posible encontrar soluciones para el flujo. Sin embargo, los flujos compresibles son más difíciles de tratar, pues su densidad variable impide el uso de la integral de Bernoulli. En cambio, sólo es posible tratar flujos no estacionarios unidimensionales si se pretende obtener integrales analíticas equivalentes a la integral de Bernoulli. Puesto que existen aplicaciones prácticas de esos flujos en la ingeniería, en esta sección se deducirán las ecuaciones necesarias que los describan.

Con el propósito de ilustrar qué puede suceder en un flujo compresible no estacionario unidimensional, la figura 12.18 presenta un posible flujo no estacionario simple de un gas que está en el interior de una tubería muy larga. Inicialmente, un gas estacionario de presión uniforme p_0 , densidad ρ_0 y velocidad a_0 del sonido llena la tubería a la izquierda de un pistón móvil localizado en $x = 0$ (véase la figura 12.18(a)). Al tiempo $t = 0$, el pistón se mueve hacia la derecha a una velocidad fija V_p . El gas próximo al pistón se mueve con la misma velocidad que el pistón, pero el gas localizado lejos a la izquierda del pistón se mueve más despacio pues no ha experimentado toda la caída de presión plena para acelerarlo hasta alcanzar la velocidad V_p . De hecho, el gas localizado muy lejos a la izquierda no experimentará ningún movimiento hasta que sea alcanzado por una onda de sonido generada por el pistón en movimiento al tiempo $t = 0$. Esta onda de sonido inicial llega a $-x$ al tiempo $t = (-x)/a_0$. Para cualquier tiempo t , el gas que está en el intervalo $-a_0 t \leq x \leq V_p t$ se encuentra en un estado de flujo no estacionario, como se aprecia en la figura 12.18. Puesto que este gas al tiempo $t = 0$ ocupaba la longitud $a_0 t$, su densidad y presión se redujeron necesariamente cuando se extendió hasta alcanzar una longitud $(a_0 + V_p)t$.

Para este flujo compresible no viscoso, sólo hay una componente de la velocidad, $\mathbf{V} = u(x, t)\mathbf{i}_x$. Todas las variables del flujo dependen sólo de dos variables independien-

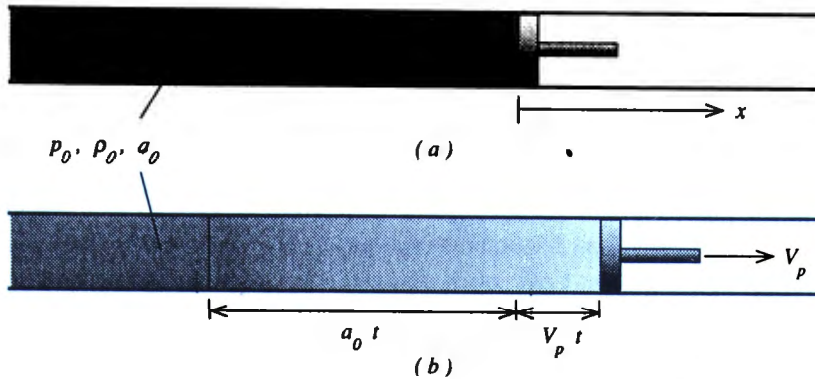


Figura 12.18 Al tiempo $t=0$, se pone en movimiento un gas fijo dentro de una tubería al desplazar hacia atrás un pistón con una velocidad V_p .

tes, x y t . El flujo debe obedecer la ley de la conservación de la masa, ecuación 13.3, y la ecuación 4.5 de Euler que, para este caso, adquiere la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (12.65)$$

Es preferible introducir la velocidad del sonido a como variable en lugar de la densidad ρ . Si la entropía es constante en todo lugar en el campo del flujo, entonces, de la ecuación 12.22, se tiene que, para un gas perfecto:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\hat{c}_v}{R} \frac{da}{a} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{da}{a} \quad (12.66)$$

Puede sustituirse la presión p como variable utilizando las ecuaciones 12.13 y 12.66:

$$p = \frac{\rho a^2}{\gamma}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{a^2}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2\rho a}{\gamma} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{2}{\gamma-1} a \frac{\partial a}{\partial x} \quad (12.67)$$

Al sustituir las ecuaciones 12.67 y 12.66 en 12.65, después de multiplicar la primera ecuación 12.65 por a/ρ , se encuentra que:

$$\left(\frac{2}{\gamma-1} \right) \left[\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} \right] + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{2}{\gamma-1} \right) a \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (12.68)$$

donde la primera de estas ecuaciones es la conservación de la masa y la segunda la ecuación de Euler, aunque expresadas en términos de a y u como las variables dependientes. Si se suman y restan estas ecuaciones tendrán la forma simétrica:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{2}{\gamma - 1} a + u\right) = 0 \quad (12.69)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{2}{\gamma - 1} a - u\right) = 0 \quad (12.70)$$

Las ecuaciones 12.69-12.70 se conocen como *ecuaciones características*. Éstas expresan la rapidez de cambio de las variables dependientes en dos direcciones en el "espacio" x, t formado por las dos variables independientes. El operador $\partial/\partial t + (u + a)\partial/\partial x$ de la ecuación 12.69 es la derivada respecto al tiempo medida por un observador que se desplaza en la dirección $+x$ con una velocidad $u + a$, v.g., a la velocidad local de propagación de una onda de sonido. Al igual que la derivada respecto al tiempo que sigue a una partícula material es $\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$, la derivada respecto al tiempo que sigue a una onda de sonido que se desplaza hacia la derecha es $\partial/\partial t + (u + a)\hat{i}_x \cdot \nabla = \partial/\partial t + (u + a)\partial/\partial x$. Del mismo modo, el operador diferencial de la ecuación 12.70 es la derivada respecto al tiempo a lo largo de una onda de sonido que se desplaza hacia la izquierda. En el plano x, t , las direcciones $dx/dt = u \pm a$ son las *direcciones características* locales.

La ecuación 12.69 establece que la suma $2a/(\gamma - 1) + u$ no cambia con el tiempo a lo largo de una onda de sonido que viaja hacia la derecha en un flujo mientras que la ecuación 12.70 necesita que $2a/(\gamma - 1) - u$ no cambie con el tiempo a lo largo de una onda de sonido que viaja hacia la izquierda. Si en cierto punto x_1 del flujo se conoce tanto la velocidad del sonido a_1 como la velocidad del flujo u_1 , entonces para todos los tiempos futuros a lo largo de las ondas que viajan hacia la izquierda y hacia la derecha que pasaron por el punto 1 al tiempo t_1 , se tiene que:

$$\left[\frac{2}{\gamma - 1} a + u\right]_r = \frac{2}{\gamma - 1} a_1 + u_1 \quad (12.71)$$

$$\left[\frac{2}{\gamma - 1} a - u\right]_l = \frac{2}{\gamma - 1} a_1 - u_1 \quad (12.72)$$

donde los subíndices r y l identifican a las ondas de sonido que viajan hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente.

Para ilustrar cómo se utilizan las ecuaciones 12.72 en la resolución de un problema de flujo compresible no estacionario, considérese el flujo de la figura 12.18 en el que un pistón móvil acelera un gas inicialmente estacionario. En este caso, el pistón genera ondas de sonido que viajan hacia la izquierda. Sin embargo, a estas ondas las cruzan ondas de sonido que se dirigen hacia la derecha y que se mueven a partir del fluido estacionario, donde $a = a_0$ y $u = 0$. Luego, a partir de la ecuación 12.72,

$$\left[\frac{2}{\gamma - 1} a + u\right]_r = \frac{2}{\gamma - 1} a_0 \quad (12.73)$$

lo cual se cumple para cualquier tiempo en la región $-a_0 t \leq x \leq V_p t$ ocupada por las ondas que se desplazan hacia la izquierda entre el pistón y la primera onda de sonido que viaja

hacia la izquierda, $x = a_0 t$. Sin embargo, en el pistón, $u = V_p$, por lo que, a partir de 12.73, la velocidad del sonido en la cara del pistón, a_p , es:

$$a_p = a_0 - \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) V_p \quad (12.74)$$

Cuanto más rápido se mueva el pistón, menor será el valor de la velocidad del sonido a_p y, por supuesto, la presión y densidad en la cara del pistón. Cuando $V_p = 2a_0/(\gamma - 1)$, todas estas variables son cero. De moverse el pistón a una velocidad aún mayor, éste se movería más rápido que el gas y dejaría un vacío entre él y la partícula de gas más cercana, la cual no podría moverse a una velocidad mayor que $u = 2a_0/(\gamma - 1)$.

Para describir el flujo con mayor detalle, resulta útil graficar las trayectorias de las ondas de sonidos en el plano x, t . La figura 12.19 presenta esa gráfica, donde se define la ordenada como t y la abscisa como x . La primera onda que se desplaza hacia la izquierda, y que se mueve en el interior de un gas, se desplaza a lo largo de la línea $x = -a_0 t$ con pendiente $1/(-a_0)$. La trayectoria del pistón es la línea recta $x = V_p t$ y su pendiente es $1/V_p$. La onda que viaja hacia la izquierda y que parte de la cara del pistón, donde $u = V_p$ y $a = a_0 - (\gamma - 1)V_p/2$, tiene pendiente $1/(u - a) = 1/V_p - [a_0 - (\gamma - 1)V_p/2] = -1/[a_0 - (\gamma - 1)V_p/2]$. La trayectoria de esta onda, $x = -[a_0 - (\gamma - 1)V_p/2]t$, se grafica en la figura 12.19.

Existen otras ondas que viaja hacia la izquierda entre estos dos puntos, para los cuales las trayectorias son:

$$x = -(a - u)t \quad (12.75)$$

Sin embargo, u y a también se relacionan mediante la ecuación 12.73. Si 12.75 y 12.73 se combinan, se encuentra que $u(x, t)$ y $a(x, t)$ para la región $-a_0 t \leq x \leq -[a_0 - (\gamma - 1)V_p/2]t$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{\gamma + 1} a_0 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{x}{t} \\ u &= \frac{2}{\gamma - 1} a_0 + \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \frac{x}{t} \end{aligned} \quad (12.76)$$

La ecuación 12.76 es una *onda de expansión centrada* en la cual todas las ondas de sonido que se desplazan hacia la izquierda en la onda de expansión se originan en el punto $x = 0, t = 0$. Si se acelerara el pistón a una velocidad V_p sobre un intervalo de tiempo finito, estas ondas de sonido se originarían en puntos distintos a lo largo de la trayectoria del pistón, $x_p = \int V_p dt$.

Puesto que este flujo es isentrópico, la presión, densidad y temperatura del gas se relacionan con la velocidad del sonido a mediante las relaciones isentrópicas de la ecuación 12.23, lo cual puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2\gamma/(\gamma - 1)}$$

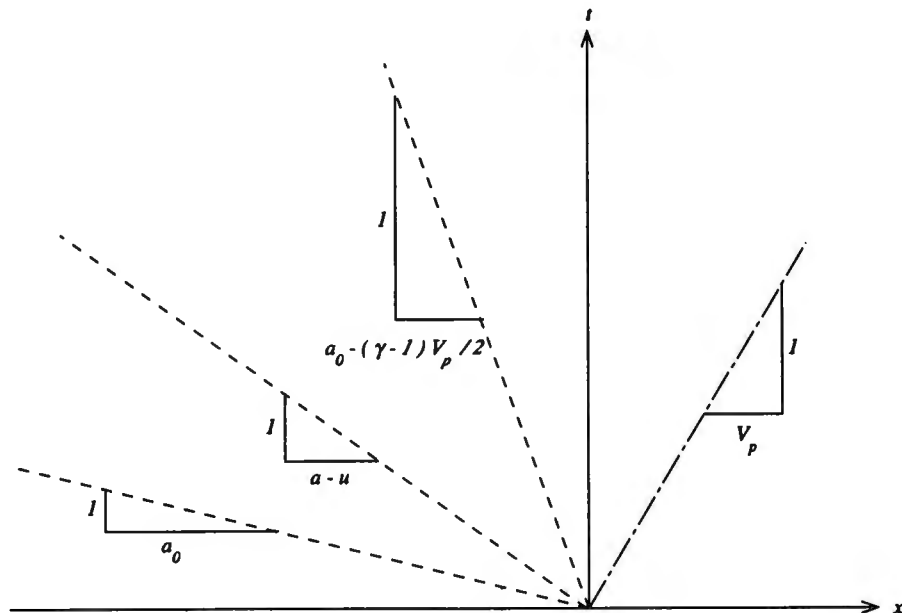


Figura 12.19 Representación en el plano x, t de un flujo no estacionario correspondiente a un gas fijo puesto en movimiento al desplazar hacia atrás un pistón que se mueve con una velocidad V_p . Las líneas punteadas representan las ondas que viajan hacia la izquierda, en tanto que la trayectoria del pistón se representa con la línea formada por rayas y puntos.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \quad (12.77)$$

Ejemplo 12.10

Una tubería conduce gas natural a alta presión con una velocidad promedio $u_0 = 100 \text{ m/s}$. Para las condiciones del flujo en la tubería $\gamma = 1.31$ y $a_0 = 446.1 \text{ m/s}$. En un accidente, se rompe la tubería y queda expuesta a la presión atmosférica por lo que en las secciones tanto corriente arriba ($-x$) como corriente abajo ($+x$) de la tubería se experimenta un flujo sónico de salida. Calcule (a) las velocidades del flujo de salida en las dos secciones y (b) las razones de los gastos másicos del flujo de salida al del flujo que no perturbado de la tubería.

Solución

(a) El flujo no estacionario que sale de la sección corriente arriba de la tubería es semejante al que presenta la figura 12.18 a excepción de que el flujo no perturbado se desplazaría a una velocidad $u_0 = 100 \text{ m/s}$. Una onda que viaja a la derecha a partir de esta región hacia el punto de la ruptura tendría la propiedad (ecuación 12.72) que sigue:

$$\frac{2}{\gamma-1} a + u = \frac{2}{\gamma-1} a_0 + u_0$$

Pero el flujo de salida es sónico, por lo que $a_{sal} = u_{sal}$:

$$\left(\frac{2}{\gamma-1} + 1\right) u_{sal} = \frac{2}{\gamma-1} a_0 + u_0$$

$$u_{sal} = \frac{2}{\gamma+1} a_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0$$

$$= \frac{2(446.1 \text{ m/s})}{2.31} + \frac{0.31(100 \text{ m/s})}{2.31} = 399.7 \text{ m/s}$$

Para el flujo que sale de la sección corriente abajo, comience con una onda que viaja a la izquierda del flujo no perturbado:

$$\frac{2}{\gamma-1} a - u = \frac{2}{\gamma-1} a_0 - u_0$$

En este caso, la velocidad del flujo de salida está en la dirección $-x$, v.g., la velocidad es negativa, por lo que $a_0 = -u_{sal}$:

$$\left(\frac{2}{\gamma-1} + 1\right) (-u_{sal}) = \frac{2}{\gamma-1} a_0 - u_0$$

$$u_{sal} = -\left(\frac{2}{\gamma+1} a_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0\right)$$

$$= -\frac{2(446.1 \text{ m/s})}{2.31} + \frac{0.31(100 \text{ m/s})}{2.31} = -372.8 \text{ m/s}$$

Debe invertirse la dirección del flujo corriente abajo para fluir hacia afuera por la parte rota de la tubería, de ahí que la velocidad del flujo de salida sea menor que la correspondiente a la sección corriente arriba.

(b) La razón de gastos máxicos es:

$$\frac{\rho_{sal} u_{sal}}{\rho_0 u_0} = \left(\frac{u_{sal}}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)} \frac{u_{sal}}{u_0}$$

donde se utilizó la ecuación 12.77 para determinar la razón de densidades ρ_{sal}/ρ_0 . Para los flujos corriente arriba y corriente abajo, lo anterior se transforma, respectivamente, en:

$$\frac{\rho_{sal} u_{sal}}{\rho_0 u_0} = \left(\frac{399.7}{446.1} \right)^{20.31} \left(\frac{399.7}{100} \right) = 1.968$$

$$= \left(\frac{372.8}{446.1} \right)^{20.31} \left(\frac{372.8}{100} \right) = 1.171$$

El gasto másico total que ocurre en la ruptura de la tubería es cerca de tres veces el gasto másico en la tubería sin daño.

12.8 Problemas

Problema 12.1

Obtenga una expresión para la velocidad del sonido a_m en una mezcla de agua y pequeñas burbujas de aire, en donde las burbujas ocupan una fracción ϵ del volumen de la mezcla.

Problema 12.2

Calcule la amplitud promedio $\sqrt{x^2}$ del movimiento de un altavoz que emite ondas de sonido de 80 dB a una frecuencia $f = 400$ Hz.

Problema 12.3

En una planta generadora de energía de ciclo cerrado con turbina de gas, el helio ingresa en la turbina adiabática con una presión $p_1 = 8$ bar y temperatura $T_1 = 1100$ K y sale con una presión $p_2 = 1$ bar y temperatura $T_2 = 620$ K. Calcule (a) la eficiencia η_t de la turbina adiabática y (b) el trabajo entregado por la turbina por kilogramo de helio que fluye a través de ella.

Problema 12.4

En un túnel aerodinámico supersónico, el aire almacenado a una presión $p_s = 10$ bar y una $T_s = 290$ K se hace pasar adiabáticamente a través de una boquilla convergente-divergente, de donde sale corriente de aire como vapor supersónico a una presión $p_s = 1$ bar. Si se supone una constante $\gamma = 1.4$, calcule (a) el número de Mach M_s del flujo en la salida de la boquilla, (b) la temperatura T_s del flujo en la salida, (c) la razón A_s/A_c del área de salida al área de la garganta y (d) el gasto másico \dot{m} de aire si $A_s = 10$ cm² es el área de la garganta.

Problema 12.5

Se propone diseñar un túnel aerodinámico hipersónico utilizando helio ($\gamma = 5/3$), como fluido de trabajo en el que la sección de prueba funcionará con un número de Mach $M_i = 20$. Calcule (a) la temperatura T_s de estancamiento si la temperatura de la sección de prueba es $T_i = 10$ K, (b) la presión de estancamiento que se necesita si la presión de

la sección de prueba es $p_1 = 1E(-4) \text{ bar} = 10 \text{ Pa}$ y (c) la razón A_1/A_c del área de la sección de pruebas al área de la garganta.

Problema 12.6

Para una onda de choque en un gas perfecto con calor específico constante, exprese las razones $p_2/\rho_1 V_1^2$ y $2\hat{c}_p T_2/V_1^2$ sólo en términos de γ para el límite $M_1 = \infty$.

Problema 12.7

El aumento de entropía a través de una onda de choque en un gas perfecto, con calor específico constante se relaciona con los cambios de presión y densidad mediante:

$$\frac{\hat{s}_2 - \hat{s}_1}{\hat{c}_v} = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \gamma \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Es posible especificar una onda de choque débil por medio de un parámetro pequeño $\epsilon \equiv M_1^2 - 1 \ll 1$. Deduzca una expresión para $(\hat{s}_2 - \hat{s}_1)/\hat{c}_v$ como una serie de potencias con el parámetro pequeño ϵ y demuestre que el primer término distinto de cero es $2\gamma(\gamma - 1)\epsilon^3/3(\gamma + 1)^3$, el cual es de tercer orden para el aumento de presión $(p_2 - p_1)/p_1$.

Problema 12.8

A través de una tubería fluye gas natural (metano), comprimido a una presión $p_1 = 60 \text{ bar}$ y a una temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$. La longitud de la tubería es $L = 7 \text{ km}$ y su diámetro D . El gas sale en el otro extremo de la tubería con una presión $p_2 = 10 \text{ bar}$. La velocidad del flujo de entrada es $V_1 = 45 \text{ m/s}$. Si se supone que el flujo es adiabático, calcule (a) la temperatura T_2 del flujo de salida, (b) los números de Mach M_1 y M_2 del flujo que entra y del que sale y (c) el valor del factor de fricción de Darcy \bar{f} para este flujo.

Problema 12.9

En el límite de $M_1 = \infty$ para una onda de choque oblicua en un gas perfecto, obtenga una expresión para el ángulo máximo de desviación, θ_m , y el ángulo β_m de choque para los cuales se encuentra la onda de choque. Evalúe su respuesta para $\gamma = 1.4$ y compárela con la figura 12.13.

Problema 12.10

Se conecta un tanque grande que contiene gas perfecto con una velocidad de propagación del sonido a_s y constante γ a una tubería muy larga ($x \geq 0$) mediante una válvula de apertura rápida localizada en la entrada de la tubería. Inicialmente, la tubería ha sido por completo evacuada ($p = 0$ cuando $t = 0$; $x \geq 0$). De pronto, al tiempo $t = 0$, se abre la válvula y el gas fluye hacia la tubería. El flujo del tanque hacia la entrada de la tubería es un flujo estrangulado estacionario; el flujo en la tubería es un flujo no estacionario. (a) Obtenga una expresión para la velocidad máxima u_m del gas en la tubería y calcule la razón u_m/V_m para $\gamma = 1.4$, donde V_m es la velocidad máxima del flujo estacionario para un flujo isentrópico, desde el tanque a una región de presión cero. (b) Exprese la velocidad $u\{x, t\}$ en la tubería en función de x y t .

Bibliografía

Sabersky, Rolf H., Allan J. Acosta y Edward G. Hauptman, *Fluid Flow*, 3a. ed., Nueva York: Macmillan Publishing Co., 1989.

Thompson, Philip A., *Compressible-Fluid Dynamics*, Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1972.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1986.

Índice

- Aceleración
 - centrífuga, 129, 152, 156
 - de Coriolis, 129, 156
 - de la gravedad, 44
 - estándar o normal, 30
 - de una partícula de fluido, 128
- Aceleración gravitatoria, 44
- Altura de rugosidad, 369
- Análisis dimensional, 442
 - leyes de conservación adimensionales, 452
 - parámetros adimensionales, 457t
 - teorema Pi, 447
- Ángulo de contacto, 76
- Arquímedes, 61n
- Atmósfera, 5
 - estabilidad atmosférica, 74
 - isoterma, 72
 - normal o estándar en Estados Unidos, 72, 73t
 - presión de la, 48, 72
 - presión estándar de la, 30t

- Barómetro, 48
- Bernoulli, D., 134n
- Bombas, 470. *Véase también* turbomáquinas
 - rendimiento de, 385, 471
 - velocidad específica de, 472

- Cambio de la carga hidráulica en bombas, turbinas, 415-419
- Cantidad de movimiento lineal, 189
 - teorema del, 192-194
- Capa libre cortante, 370
- Capa límite, 311
 - aproximación en la, 312
 - en el punto de estancamiento (flujo laminar), 319
 - en una placa plana (flujo laminar), 313
 - coeficiente de resistencia al avance, 315
 - espesor de desplazamiento de la, 317
 - espesor de la (flujo turbulento), 366
 - separación de la, 322
- Capa límite laminar, 311
 - de separación, 321
 - en un punto de estancamiento, 319
 - en una placa plana, 313
- Capilaridad, 77
- Carga hidráulica, 382, 402
 - coeficiente de, 471
- Cavitación, 19, 454
 - número de, 454, 468
- Centro de carena, 61
- Centro de presión, 53, 57
- Centroide, 56
- Chorro, 208
 - bomba de, 209
 - turbulento, 370
- Cinemática de los fluidos
 - axisimétrico, 96
 - bidireccional, 96
 - cuasiestacionario, 95
 - cuasiunidimensional, 95
 - en un plano, 97
 - estacionario, 95
 - no estacionario, 95
 - unidimensional, 96
 - unidireccional, 96
- Circulación, 498
- Coefficiente
 - de dilatación térmica, 12

- de fricción, 456
- de fuerza, 455
- de momento de torsión, 456
- Coefficiente de expansión térmica, 12
- Coefficiente de fricción, 456
- Coefficiente de resistencia al avance, 461, 473-476, 479
 - en una placa plana
 - de un flujo laminar, 315
 - de un flujo turbulento, 365
- Cojinete liso, 294
- Compresores, *véase* turbomáquinas
- Concentración de la masa, 23
- Condición de Kutta, 541
- Condiciones en la frontera, 274
- Condiciones iniciales, 274
- Conductividad térmica, 387
- Conservación de la energía, 377
 - energía cinética, 378
 - flujo incompresible por una tubería, 381
 - máquinas rotatorias (flujo incompresible), 383-385
 - flujo compresible por una tubería, 390^b
 - flujo con transferencia de calor, 392
 - máquinas rotatorias (flujo compresible), 395, 397
 - primera ley de la termodinámica, 386-389, 397
 - segunda ley de la termodinámica, 394-395
- Conservación de la masa
 - en un flujo compresible, 100-105
 - en un flujo incompresible, 106
 - especies químicas, 107
 - expresión diferencial, 104
 - expresión integral, 100
 - flujo de dos fases, 110
 - reacciones químicas y la, 109
- Constante de los gases, 21
 - universal, 21, 30t
- Constante de von Karman, 368n, 369
- Coordenadas
 - cartesianas, 29, 90, 94, 104, 128, 130, 272
 - cilíndricas, 29, 35, 90, 94, 104, 129, 272
 - de línea de corriente, 150
- Costo del ciclo de vida, 408
- Cuerpo semiinfinito de Rankine, 522

- d'Alembert, J., 522n
- Darcy (unidad), 302
- Darcy, H., 292n
- Deflexión hacia abajo de los filetes de aire en el ala, 543
- Densidad, 12
 - de un fluido, 17t
- Densidad relativa, 13
- Derivada material, 93
- Descripción de flujo euleriana, 90
- Diagrama de Moody, 403
- Diámetro hidráulico, 292, 293t, 409
- Difusividad
 - térmica, 393
 - viscosa, 16, 305
- Dimensiones, 24, 442, 443t
 - derivadas, 25
 - fundamentales, 25
 - principio de homogeneidad dimensional, 444
- Disipación viscosa, 16, 359
- Divergencia, 32
 - teorema de la, 34

- Ecuación de Bernoulli, 133-136
 - en la superficie de Bernoulli, 162
 - flujo barotrópico, 160
 - flujo de Beltrami, 162
 - flujo irrotacional, 161
- Ecuación de continuidad, 101, 105
- Ecuación de Euler, 130
 - coordenadas a lo largo de las líneas de corriente, 150
- Ecuación de Laplace, 505
- Ecuación de Navier-Stokes, 271-273
- Ecuación de onda, 557
- Ecuación de Rankine-Hugoniot, 572
- Ecuaciones características, 592
- Empuje ascendente o fuerza de empuje, 60
- Equilibrio de cuerpos sumergidos
 - estable, 64
 - estático, 62
- Equilibrio hidrostático, 45, 48
- Esfuerzo, 39
 - presión, 40
 - tensor, 41
 - vector, 40
 - viscoso, 16, 40, 266-269
- Especies químicas, 107
- Espesor de desplazamiento, 317

Estabilidad

- atmosférica, 74
- dinámica, 69
- estática, 68

Estelas, 206

- turbulentas, 372

Euler, L., 130n

Factor de fricción de Darcy, 292, 402, 409

- diagrama de Moody, 403
- flujo turbulento por una tubería, 361, 402

Factor de fricción. *véase* factor de fricción de Darcy

Fluencia (o flujo de Stokes), 298

- coeficiente de resistencia al avance, 474

Fluido estratificado, 68

- estabilidad de un, 68-70
- presión de un, 70

Fluido newtoniano, 15

Flujo

- a través de máquinas rotatorias, 158
- a través de un medio poroso, 301-304
- barotrópico, 160
- combinación de flujos de Couette y de Poiseuille planos, 285
- compresible (*véase* flujo compresible)
- con cortante simple, 15
- con transferencia de calor, 392
- crítico, 566
- de Beltrami, 162
- de Couette (*véase* flujo de Couette)
- de densidad constante, 132
- de lubricación, 293-297
- de Poiseuille (*véase* flujo de Poiseuille)
- de Stokes, 298
- de un tanque presurizado, 142
- del ala, 540
- en un perfil aerodinámico, 540
- en un punto de estancamiento, 319, 536
- estrangulado, 576
- fluencia (o flujo de Stokes) (*véase* fluencia)
- hacia abajo por un plano inclinado, 282
- incompresible (*véase* flujo incompresible)
- irrotacional (*véase* flujo irrotacional)
- isentrópico, 560
 - gas perfecto, 562
- laminar no estacionario, 304-309
 - oscilatorio, 308
 - por impulsión, 304
- no viscoso y no estacionario, 145

- no viscoso, 127
- por un orificio, 139
- por una esclusa, 216
- potencial, 547
- subcrítico, 219
- subsónico, 566
- supercrítico, 219
- supersónico, 566

turbulento (*véase* flujo turbulento)

Flujo (de B), 188

Flujo compresible, 21, 553

- adiabático viscoso, 577
- con transferencia de calor, 392
- por un canal de área variable, 567
- por un ducto o cámara, 391
- unidimensional no estacionario, 590

Flujo de Couette, 276

- combinado con el flujo de Poiseuille, 285

Flujo de dos fases, 110

Flujo de Poiseuille

- circular, 288
- combinado con el flujo de Couette, 285
- en un plano, 279-281
- no circular, 291
- por un plano inclinado hacia abajo, 282

Flujo en un medio poroso, 301-304

Flujo incompresible, 22, 105

- conservación de la masa y, 106

Flujo irrotacional, 161, 497

- flujo axisimétrico, 532
 - doblete, 535
 - en un punto de estancamiento, 536
 - flujo uniforme, 532
 - fuelle puntual, 533, 538
 - por una esfera, 539
- flujo en un plano, 506
 - doblete lineal, 512
 - en un cilindro circular, 525
 - flujo en codos, 514
 - flujo en paredes corrugadas, 517
 - flujo uniforme, 507
 - por un vórtice lineal, 509, 522
 - por una fuente lineal, 508, 520
 - sumidero y vórtice (líneas de), 528

Flujo supersónico en un plano, 580

- a lo largo de una pared, 584
- ondas de choque planas de incidencia oblicua, 581
- sobre un perfil aerodinámico, 588

- Flujo turbulento, 353
 capa de esfuerzo constante, 368
 capa límite de placa plana, 365
 coeficiente de resistencia al avance, 365
 carácter aleatorio del, 355
 chorro, 370
 comienzo del, 354
 número de transición de Reynolds, 354
 en tubería, 361-363
 energía cinética turbulenta, 356
 esfuerzo de Reynolds, 359
 espectro de energía, 357
 estela, 372
 factor de fricción de Darcy, 361
 subcapa laminar, 362
 vórtices, 357
- Froude, W., 454n
- Fuerza
 coeficiente de, 455
 de empuje o empuje ascendente, 60
 de presión, 42, 56, 59
 gravitatoria, 44
 hidráulica, 77
 momento de una, 53, 223
 sobre superficies sólidas, 52
 viscosa, 269-271
- Fuerza ascensional o sustentación, 478
 coeficiente de, 479
 perfil aerodinámico supersónico, 588
 pérdida de sustentación, 480
- Función de corriente, 502-504
- Función de disipación, 389, 399
 incompresible, 380, 399
- Función de Prandtl-Meyer, 586
- Función error, 306
- Garganta, 568
- Gas perfecto, 20
 cambios isentrópicos en el, 561
 propiedades del, 22t
- Gasto másico, 100
- Gasto volumétrico, 98, 111
 del flujo circular de Poiseuille, 289
 del flujo de Couette, 277
 del flujo de Poiseuille en un plano, 280
 del flujo hacia abajo por plano inclinado,
 283
 del plano combinado de Couette y
 Poiseuille, 286
- Gradiente, 32
- Hélices, 200-203, 230-232, 467-468
 empuje, 201
 coeficiente de, 467
 estela, 201
 potencia de las, 202
 coeficiente de, 467
 rendimiento de propulsión, 203, 467, 468
- Hidrosfera, 6
- Joule, 25
- Kelvin, Lord, 500n
- Laplaciano, 32
- Ley de Darcy, 301
- Ley de Fourier, 387
- Ley de Pascal, 41
- Ley del movimiento de Newton, 191
 del momento angular, 219
- Línea de corriente, 92
- Longitud de entrada, 319
- Mach, E., 455n
- Manómetro, 50
- Máquinas rotatorias, 158
 de flujo axial, 159
 de flujo centrífugo, 158
 de rotor, 158, 227
 estator de, 158, 227
- Marcos o sistemas de referencia no inerciales, 152-160
 ecuación de Bernoulli, 154, 156
 ecuación de Euler, 154, 156
- Masa por arrastre, 513, 536
- Mecánica de fluidos por computadora
 flujo irrotacional, 543-546
 flujo por una tubería, 428^a
- Medidor Venturi, 148
- Metacentro, 66
- Método de imágenes, 329
- Modelado, 456
- Módulo volumétrico (o de compresibilidad), 12
- Momento
 de la cantidad de movimiento angular o
 momento angular, 219
 de una fuerza, 53, 223

- Momento angular, 219
 - teorema del, 220-223
 - Cantidad de movimiento lineal, 189
- Motor de automóvil, 8
- Navier, C., 271n
- Newton, 25
- Newton, I., 15n
- Nivel de presión del sonido, 558
- Número de Froude, 454
- Número de Mach, 455, 564
- Número de Nusselt, 456
- Número de onda, 358
- Número de Prandtl, 455
- Número de Strouhal, 453, 474
- Número de transición de Reynolds, 354
- Número de Weber, 454
- Onda de compresión, 587
- Onda de expansión, 586, 593
- Onda de Mach, 584
- Onda de sonido, 558
- Ondas de choque, 570-574
 - oblicuas, 581
 - débiles, 582
 - fuertes, 582
- Ondas gravitatorias, 517
- Paradoja de d'Alembert, 522
- Pascal, 25
- Pascal, B., 42n
- Pérdida de la carga hidráulica
 - coeficiente de, 403, 412
 - ductos no circulares, 409
 - en redes complejas, 420, 424
 - de componentes en serie y en paralelo, 420
 - redundantes, 423
 - en tuberías rectas, 402-407
 - en un codo, 412
 - por cambio de área, 411
- Permeabilidad, 301
- Porosidad, 302
- Potencial de velocidades, 547
- Presión
 - atmosférica (véase atmósfera)
 - centro de, 53, 57
 - de estancamiento, 149
 - de un fluido estratificado, 70
 - del vacío, 52
 - fuerza de, 42, 56, 59
 - manométrica, 51
 - total, 381
- Presión crítica, 566
- Primera ley de la termodinámica, 396-389, 397
- Principio de Arquímedes, 60
- Principio de superposición, 506
- Producto
 - escalar, 31
 - vectorial, 31
- Propiedades de los fluidos, 11, 17t
- Propiedades termodinámicas, 20
 - calor específico, 21
 - energía interna, 20
 - entalpía, 20, 388
 - de estancamiento, 391n
 - total, 388, 390
 - entropía, 20
 - temperatura absoluta, 20
- Propulsión, 197
 - motores cohete, 197
 - motores de reacción, 198
 - por hélices, 200-203
- Punto de estancamiento, 150
 - capa laminar límite, 319
 - flujo irrotacional, 536
- Razón de aspecto, 479, 540
- Reacciones químicas, 109
- Rendimiento
 - de un compresor, 397
 - de una bomba, 385
 - de una turbina, 385, 397, 471
- Resalto hidráulico, 218
- Resistencia
 - coeficiente de, 463, 464
 - en barcos
 - por fricción, 463
 - por una ola, 463
- Resistencia al avance, 460, 473-476
 - de forma, 475
 - en barcos, 463
 - en perfiles aerodinámicos supersónicos, 588
 - inducida, 480, 543
 - modelo, 460
- Resistencia al avance inducida, 480, 542

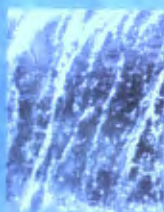
- Resistencia de un barco, 463
- Reynolds
 esfuerzo de, 359
 número de, 128, 453
 teorema del transporte de, 186
- Reynolds, O., 187n
- Rotacional, 33
- Rugosidad de la pared, 363, 363t
- Segunda ley de la termodinámica, 20, 394-395
- Semejanza
 cinemática, 458
 dinámica, 458
 geométrica, 457
 razón de escala, 457
- Sistema
 cardiovascular, 3, 426, 427t
 de ingeniería, 7
 pulmonar, 3
- Stokes
 flujo de, 298
 coeficiente de resistencia al avance, 474, 476
 teorema de, 34
- Stokes, G., 271n
- Subcapa laminar, 362
- Superficie de control, 97
- Tensión superficial, 18, 75
- Teorema de Gauss, 33
- Teorema de Kelvin, 499
- Teorema de Kutta-Joukowski, 524
- Teorema Pi, 447
- Termodinámica
 primera ley de la, 386-389, 397
 segunda ley de la, 20, 394-395
- Trayectoria de flujo, 92
- Tubo de corriente, 92
- Tubo Pitot, 149
- Turbina
 corona de álabes, 211-214
 impulso, 214
 reacción, 214
- Turbina hidráulica, 470
 rendimiento de una, 471
- Turbinas eólicas, 204, 468
 coeficiente de potencia de, 469
- Turbomáquinas
 centrífugas, 225
 coeficiente de carga hidráulica, 470
 coeficiente de flujo, 471
 coeficiente de potencia, 471
 conservación de la energía (*véase* conservación de la energía)
 de flujo axial, 227
 estator, 227
 rendimiento de, 385, 471
 rotor, 227
- Unidades de medición, 24, 442
 sistema internacional de, 25, 26t
 unidades inglesas de ingeniería (UII), 26, 28t
- Vector de posición, 31
- Vectores
 álgebra vectorial, 30-31
 cálculo vectorial, 31-35
 producto vectorial, 31
- Velocidad de fase, 518
- Velocidad de fricción, 368
- Velocidad del sonido, 21, 555
- Viscosidad, 14
 absoluta, 14
 cinemática, 16
 de fluido, 17t
 volumétrica, 268, 399
 vorticial, 368
- Viscosidad de remolino (turbulenta), 368
- Volumen de control, 97
- Volumen material, 186
- Vórtices
 confinado, 524, 542
 libre, 524, 543
 línea de, 496
 tren o cola de, 474
 tubo de, 499
- Vorticidad, 496
 de la capa límite, 498
- Watt, 25
- Weisbach, J., 292n



Esta obra se terminó de imprimir en julio de 1996
en los talleres de Ingramex, S.A. de C.V.
Calle Centeno No. 162, Loc. 1 Col. Granjas Esmeralda C.P. 00910
México D.F.

La edición consta de 2 000 ejemplares más
sobrantes para reposición.

BIBLIOTECA IRMA SALAS SILVA



Actos tan cotidianos como respirar o beber agua, requieren necesariamente la circulación de fluidos. El estudio de la mecánica de fluidos puede ayudarnos tanto a comprender la complejidad del medio natural, como para mejorar el mundo que hemos creado. Si bien la mecánica de fluidos está siempre presente en nuestra vida cotidiana, lo que nos falta conocer es cómo se expresa esta información en términos cuantitativos, o la manera en que se diseñan sistemas con base en ese conocimiento, mismos que se utilizarán para otros fines.

El libro comienza por analizar la hidrostática, luego aborda el flujo no viscoso (lo cual explica una gran parte de los fenómenos de la mecánica de fluidos) y los flujos viscosos laminares y turbulentos. La obra finalmente pasa a examinar varios aspectos del flujo de fluidos no viscosos en varias dimensiones, y por último se resuelven los misterios del flujo compresible.

Los problemas del texto tienen un grado medio de dificultad, pues exigen cierto análisis y no meramente la aplicación mecánica de una fórmula.

DISTRIBUIDO POR: ARRAYAN EDITORES S.A.
Bernarda Morán 435
Providencia
Tel: (56 2) 2744769-2047410
Fax: (56 2) 2741041
Santiago de Chile
www.arrayan.cl

ISBN 968-26-1305-7



9 789682 613067

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A DE C.V.