



Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

Mecánica de Fluidos

PROBLEMAS DE MECÁNICA DE FLUIDOS CON SUS SOLUCIONES

Alejandro Rivas Nieto
San Sebastián Febrero 2007

© 2008 Alejandro Rivas Nieto

ISBN

Reservado todos los derechos.

Queda prohibida la reproducción total o parcial sin autorización previa.

Primera Edición: 2008

Impreso en España

Ilustraciones: © Alejandro Rivas Nieto

Imprime: Unicopia,

Pº de Manuel Lardizabal, 13

20018 – San Sebastián (Gipuzkoa-España)

RESUMEN

El presente libro recoge una selección de problemas de Mecánica de Fluidos con sus soluciones y tiene por objeto facilitar el estudio y la autoevaluación por parte de los alumnos de la asignatura de Mecánica de Fluidos.

Los problemas se han dividido en 4 apartados de acuerdo con el temario de la asignatura de *Mecánica de Fluidos* impartida en la Escuela de Ingenieros de TECNUN (Universidad de Navarra).

La primera edición de este libro se realizó en el año 1998 y hasta la fecha se han añadido nuevos problemas y corrigiendo erratas.

INDICE

1	MAGNITUDES PARA EL ANÁLISIS DE FLUJOS DE FLUIDOS.....	1
2	ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS	15
3	ESTÁTICA DE FLUIDOS	33
4	INSTALACIONES HIDRÁULICAS	41



Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

MAGNITUDES PARA EL ANÁLISIS DE FLUJOS DE FLUIDOS

tecnun

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA. NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA
Paseo de Manuel Lardizábal 13. 20018 Donostia-San Sebastián. Tel.: 943 219 877 Fax: 943 311 442
© Alejandro Rivas Nieto (arivas@tecnun.es)

1 MAGNITUDES PARA EL ANÁLISIS DE FLUJOS DE FLUIDOS

1.1 Un campo bidimensional de velocidades dado en coordenadas cartesianas y unidades arbitrarias por $\mathbf{v} = (x^2 - y^2 + x) \cdot \mathbf{i} - (2xy + y) \cdot \mathbf{j}$. Identificar el tipo de flujo y calcular en el punto de coordenadas $\mathbf{r} = 2 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j}$ las componentes cartesianas de la aceleración, la componente de la velocidad en la dirección que forma 30° con el eje X y las direcciones de la velocidad y la aceleración.

Solución 1.2: Bidimensional y bidireccional

$\sim \mathbf{a}(2,1) = 35 \cdot \mathbf{i} + 15 \cdot \mathbf{j} \sim \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\theta=30^\circ} = 5/2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \sim \theta = -45^\circ$ y $\theta = 23.2^\circ$ siendo θ el ángulo con la dirección positiva del eje X

1.2 Cierta campo de velocidades viene dado por $u=2y$, $v=x$ y $w=0$. Obtener una expresión general del vector aceleración. Calcular la aceleración local y la convectiva en el punto $\mathbf{r} = 3 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j}$. En el mismo punto calcular también la componente de la aceleración paralela al vector velocidad y la componente normal a dicho vector. La componente normal tiene un valor no nulo, ¿qué representa esto físicamente?. Hallar una expresión general para las líneas de corriente en el plano XY. Dibujar las correspondientes al primer cuadrante. ¿Cuál es la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto $\mathbf{r} = 2 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j}$?

Solución 1.2: $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 2x \cdot \mathbf{i} + 2y \cdot \mathbf{j} \sim a_T = 18/\sqrt{13} \sim a_N = \sqrt{2548}/13 \sim$ Ecuación de las líneas de corriente $\frac{x^2}{2k} - \frac{y^2}{k} = 1$ y para $k=1$ $x = \pm\sqrt{2} \cdot y$

1.3 Se tiene un flujo definido por $\mathbf{v} = (2x^2 + 2xy) \cdot \mathbf{i} - (y^2 + 4xy) \cdot \mathbf{j} + (x^2 - 4xy + 3x) \cdot \mathbf{k}$. Comprobar que el campo de velocidades corresponde a un flujo incompresible y estacionario. Hallar la vorticidad y las velocidades de deformación de las partículas.

Solución 1.3: $\boldsymbol{\omega} = -4x \cdot \mathbf{i} - (2x - 4y + 3) \cdot \mathbf{j} - (4y + 2x) \cdot \mathbf{k} \sim$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4x+2y & x-2y & x-2y+3/2 \\ x-2y & -2y-4x & -2x \\ x-2y+3/2 & -2x & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Sea el campo de velocidades de un flujo dado por:

$$\mathbf{v} = -\frac{2xyz}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{(x^2 - y^2) \cdot z}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \mathbf{j} + \frac{y}{(x^2 + y^2)} \cdot \mathbf{k}$$

Demostrar que es un campo de velocidades de un flujo incompresible y que su vorticidad es nula.

Solución 1.4: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \sim \text{div}(\mathbf{v}) = 0$

1.5 Dado el campo de velocidades en unidades del Sistema Internacional $\mathbf{v} = x^2 \cdot \mathbf{i} - z^2 \cdot \mathbf{j} - 2xz \cdot \mathbf{k}$. Comprobar que representa un flujo incompresible. Si la viscosidad dinámica del fluido es $0.05 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$, evaluar la parte desviadora del tensor de tensiones suponiendo que el fluido es newtoniano. Particularizar el resultado para el punto $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 3 \cdot \mathbf{k}$.

Solución 1.5: $\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \sim \mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.3 \\ & 0 & -0.3 \\ \text{sim} & & -0.2 \end{bmatrix}$

1.6 Un eje de diámetro d_i se aloja en el interior de una carcasa de diámetro interior d_e y longitud L . Dicha carcasa está llena de aceite cuya viscosidad μ . Despreciando los efectos de borde y suponiendo un campo de velocidades unidireccional y unidimensional en el aceite (desde una velocidad nula en la superficie fija a la velocidad de la superficie móvil), y además el espacio entre el eje y la carcasa muy pequeño, esto es $r_e/r_i \approx 1$ y $r_e - r_i \ll r_i$, determinar la fuerza de resistencia producida por el aceite si se quiere que el eje se desplace longitudinalmente a una velocidad U_e . El par resistente y la potencia requerida si, manteniendo el eje fijo en dirección axial, se le hace girar a una velocidad angular ω_e .

Nota: Ver campo de velocidades del problema 1.18

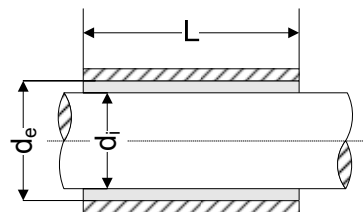


Fig. 1.6

Solución 1.6: $F = \frac{2\pi \cdot r_i \cdot L \cdot \mu \cdot U_e}{r_e - r_i} \sim M = \frac{2\pi \cdot r_i^3 \cdot L \cdot \mu \cdot \omega_e}{r_e - r_i} \sim \dot{W} = \frac{2\pi \cdot r_i^3 \cdot L \cdot \mu \cdot \omega_e^2}{r_e - r_i}$

1.7 Un bloque metálico de masa m se desliza sobre un plano inclinado de ángulo θ . Una película de aceite de espesor e y viscosidad μ se extiende entre el bloque y el plano. Calcular la velocidad final U_B del bloque siendo S el área de contacto entre el bloque y el aceite. Suponer un campo de velocidades unidireccional, unidimensional y estacionario.

Nota: Al suponer el campo de velocidades en el aceite se supondrá unidireccional y unidimensional. Además se despreciarán las fuerzas gravitatorias de manera que el perfil de velocidades sea lineal.

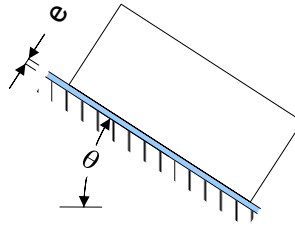


Fig. 1.7

Solución 1.7:
$$U_B = \frac{m \cdot g \cdot e \cdot \text{sen } \theta}{\mu \cdot S}$$

1.8 Sea el conducto de sección rectangular y longitud L de la figura por donde circula de manera completamente desarrollada un fluido que posee una viscosidad absoluta de $\mu=4.88 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y densidad relativa al agua $s=0.913$. Al ser $b \ll a$ el flujo se puede considerar completamente desarrollado $\mathbf{v}=u(y) \cdot \mathbf{i}$. El primer caso se trata de un flujo de Couette, producido únicamente por el movimiento de una de las paredes del conducto, y en el que la distribución de velocidades es lineal. El segundo caso es un flujo de Couette-Poiseuille, en el que el flujo está producido por el movimiento de la pared y por una diferencia de altura piezométrica entre los extremos del conducto, en este caso la distribución de velocidades es parabólica siendo la velocidad en el centro del conducto igual a la de la placa. Se pide calcular el caudal que circula por el conducto, la fuerza que desde el exterior hay que realizar sobre la pared móvil y la potencia que hay que ceder o retirar al sistema para mantener el movimiento. Datos: $b=75 \text{ mm}$ y $U_w=1.125 \text{ m/s}$

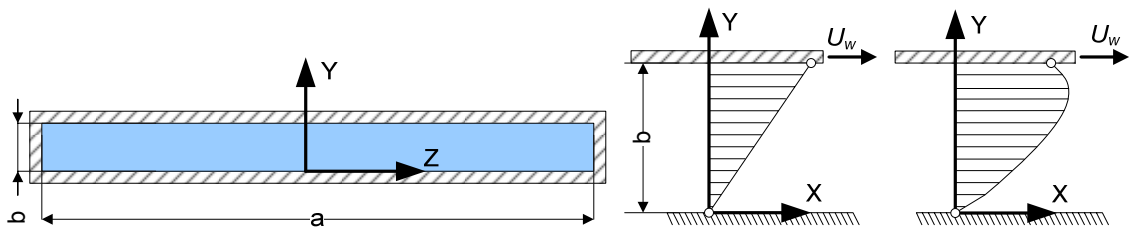


Fig. 1.8

Solución 1.8: Distribución de velocidades lineal

$$u(y) = U_w \cdot \frac{y}{b} \sim q = \frac{U_w}{2} \cdot b \cdot a \sim F = \frac{U_w \cdot \mu}{b} \cdot a \cdot L \text{ en el sentido del movimiento de la}$$

$$\text{pared} \sim \dot{W} = \frac{U_w^2 \cdot \mu}{b} \cdot a \cdot L \text{ (Aportada). En el caso de la distribución parabólica}$$

$$u(y) = U_w \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{y}{b} \right) - 2 \cdot \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \sim q = \frac{5 \cdot U_w}{6} \cdot a \cdot b \sim F = \frac{U_w \cdot \mu}{b} \cdot a \cdot L \text{ en el sentido contrario al}$$

$$\text{movimiento de la pared} \sim \dot{W} = \frac{U_w^2 \cdot \mu}{b} \cdot a \cdot L \text{ (Retirada)}$$

1.9 Un cilindro de 12 cm de radio gira concéntricamente en el interior de un cilindro fijo de 12.6 cm de radio. Ambos cilindros tienen una longitud de 30 cm. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los cilindros si se necesita un par de 9 cm·N para mantener una velocidad angular de 60 rpm. Considerar que el flujo es unidimensional, unidireccional y estacionario y que el espacio entre los cilindros es muy pequeño.

Nota: Ver campo de velocidades del problema 1.18

Solución 1.9: $\mu=0.026$ (N·s/m²)

1.10 En algunos aparatos de medición eléctrica el movimiento del mecanismo indicador se atenúa al tener un disco circular que gira (con el indicador) en un tanque de aceite. De esta forma las rotaciones extrañas se atenúan. ¿Cuál es el par de atenuación para $\omega=0.2$ rad/s si el aceite tiene una viscosidad de $8 \cdot 10^{-3}$ N·s/m²? Ignore los efectos en el borde exterior de la placa rotante.

Nota: Ver campo de velocidades del problema 1.21

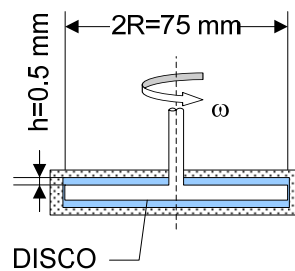


Fig. 1.10

Solución 1.10 : $M_R = \frac{\mu \cdot \omega \cdot \pi \cdot R^4}{h} = 2 \cdot 10^{-5}$ (N·m)

1.11 Un cono sólido de ángulo 2θ , radio de la base r_0 y densidad ρ_c , gira con velocidad angular inicial ω_0 , dentro de un asiento cónico. La separación e está llena de aceite de viscosidad μ . Despreciando la resistencia del aire deducir la expresión del tiempo requerido para reducir la velocidad angular del cono a $0.1 \cdot \omega_0$. Como simplificación se considerará un flujo unidireccional con una distribución lineal con respecto a la coordenada radial y se asumirá que el espacio entre el cono y el asiento es muy pequeño en comparación con el radio del cono.

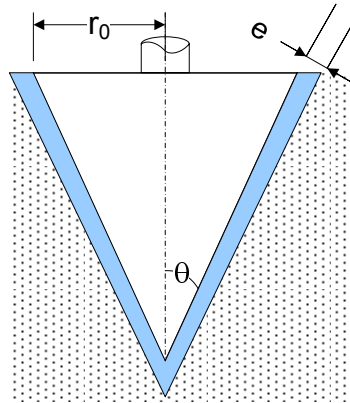


Fig. 1.11

Solución 1.11 :
$$t = -\frac{e \cdot r_0 \cdot \rho_C \cdot \cos \theta}{5 \cdot \mu} \cdot \ln(0.1)$$

1.12 El viscosímetro de cilindros coaxiales representado en la figura consta de un cilindro de acero inoxidable totalmente inmerso en el fluido cuya viscosidad se quiere medir. Puede girar dentro de una cámara cilíndrica debido al peso $m \cdot g$ y a un hilo guiado por dos poleas, una de las cuales va solidaria al cilindro. Determine la viscosidad del fluido en función de la velocidad de giro estacionaria alcanzada.

Nota: Ver campos de velocidades de los problemas 1.18 y 1.21

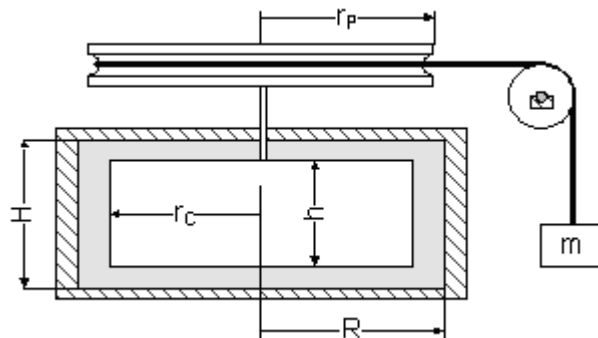


Fig. 1.12

Solución 1.12:
$$\mu = \frac{m \cdot g \cdot r_p}{2 \cdot \omega \cdot \pi \cdot r_c^3 \cdot \left(\frac{h}{R - r_c} + \frac{r_c}{H - h} \right)}$$

1.13 Un cazador africano dispara una cerbatana con un dardo. El cazador mantiene una presión manométrica constante de 5 kPa por detrás del dardo que pesa 0.5 N y se asemeja al cilindro de la figura. Cuando se dispara directamente hacia arriba. ¿Cuál es la velocidad del dardo al salir de la cerbatana?. El aire y el vapor de la respiración del cazador actúan como fluido lubricante entre el dardo y la cerbatana, esta mezcla tiene una viscosidad de $3 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$. El campo de velocidades del flujo en el huelgo entre el dardo y la cerbatana se considerará unidimensional,

unidireccional y estacionario con una distribución radial lineal (Cero en la superficie de la cerbatana y la velocidad del dardo en la superficie de este).

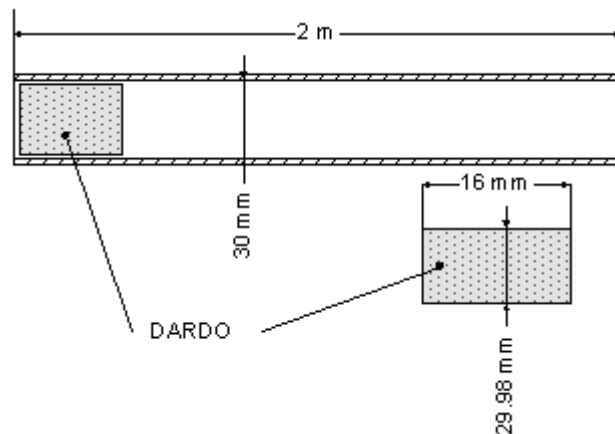


Fig. 1.13

Solución 1.13: $U_F = 15$ (m/s)

1.14 En la figura se muestra el dibujo de un conducto que une dos depósitos y por el que circula un fluido de densidad ρ y viscosidad μ ambas constantes. La sección del conducto es rectangular y variable, siendo la dimensión perpendicular al papel muy grande en comparación con las demás de forma que se puede considerar que el flujo en el conducto no se ve influenciado por las condiciones de contorno impuestas en la dirección perpendicular al dibujo. Bajo esta hipótesis el campo de velocidades en régimen laminar en este conducto viene dado por:

$$\mathbf{v}(x,y) = U_0(x) \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{b_W} \right)^2 \right] \cdot \mathbf{i} + v(x,y) \cdot \mathbf{j}$$

siendo U_0 una función de la coordenada x . Clasificar el flujo en función de su campo de velocidades. Si el flujo por unidad de longitud perpendicular al papel que circula entre los dos depósitos es q calcular en función de éste cuál es la expresión de la función U_0 .

Demostrar que si el flujo es incompresible la componente de la velocidad en dirección Y viene dada por:

$$v(x,y) = \frac{3q \cdot b'_W \cdot y}{4 \cdot b_W^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{b_W} \right)^2 \right]$$

siendo $b'_W = db_W/dx$. ¿Qué significado físico tiene U_0 ? Calcular el flujo neto de cantidad de movimiento que existe en un volumen de control que coincide con el conducto, tal y como se muestra la figura. Realizar el mismo cálculo utilizando una aproximación en la cual sea preciso únicamente conocer el caudal por unidad de anchura q . Calcular la parte del vector tensión debida a la viscosidad del fluido en un punto cualquiera de la pared superior del conducto.

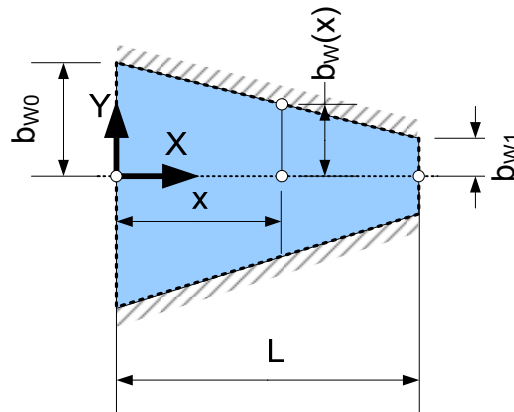


Fig. 1.14

Solución 1.14: Flujo Bidimensional y bidireccional $\sim U_0(x) = \frac{3 \cdot q}{4 \cdot b_w(x)} = \frac{3}{2} \cdot v(x)$

siendo $v(x)$ la velocidad media en una sección del conducto \sim Flujo incompresible $div(\mathbf{v}) = 0 \sim$

$$(\dot{M}_X)_{SC} = \frac{3}{5} \cdot \rho \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{b_{w1}} - \frac{1}{b_{w2}} \right) \sim (\dot{M}_Y)_{SC} = 0 \sim$$

$$\mathbf{t}_{W(Solida)} = \frac{3\mu \cdot q}{b_w^2} \cdot \left\{ [b'_w \cdot \text{sen} \alpha + (1 - b_w'^2) \cdot \text{cos} \alpha] \cdot \mathbf{i} + [(1 - b_w'^2) \cdot \text{sen} \alpha - b'_w \cdot \text{cos} \alpha] \cdot \mathbf{j} \right\}$$

1.15 Un líquido de viscosidad μ y densidad ρ constantes y conocidas, llena el espacio que existe entre dos cilindros coaxiales dibujados en la figura de radios R_1 y R_2 . Los cilindros son de una longitud lo suficientemente grande en la dirección perpendicular al papel de manera que cuando están en rotación el flujo del líquido que hay entre ellos no se ve influenciado por las condiciones de contorno impuestas en la mencionada dirección. Bajo esta hipótesis el campo de velocidades del flujo en régimen laminar viene dado en coordenadas cilíndricas por:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left[\frac{R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot (\omega_1 - \omega_2)}{r} + (\omega_2 \cdot R_2^2 - \omega_1 \cdot R_1^2) \cdot r \right] \cdot \mathbf{e}_\theta$$

siendo ω_1 y ω_2 las velocidades de giro de los cilindros considerándolas positivas en dirección Z, esto es en sentido antihorario. Clasificar el flujo en función de su campo de velocidades. Si ω_2 es nula calcular el caudal q por unidad de longitud perpendicular al papel que atraviesa una superficie fija S como la mostrada en la figura. Si ω_2 es nula calcular la componente del momento en dirección Z, indicando su sentido, del momento que cada uno de los cilindros está soportando por la acción del fluido. Si los dos cilindros están rotando con velocidades ω_1 y ω_2 cual debe ser el valor de la relación de velocidades angulares para que el caudal que atraviesa la superficie S sea nulo.

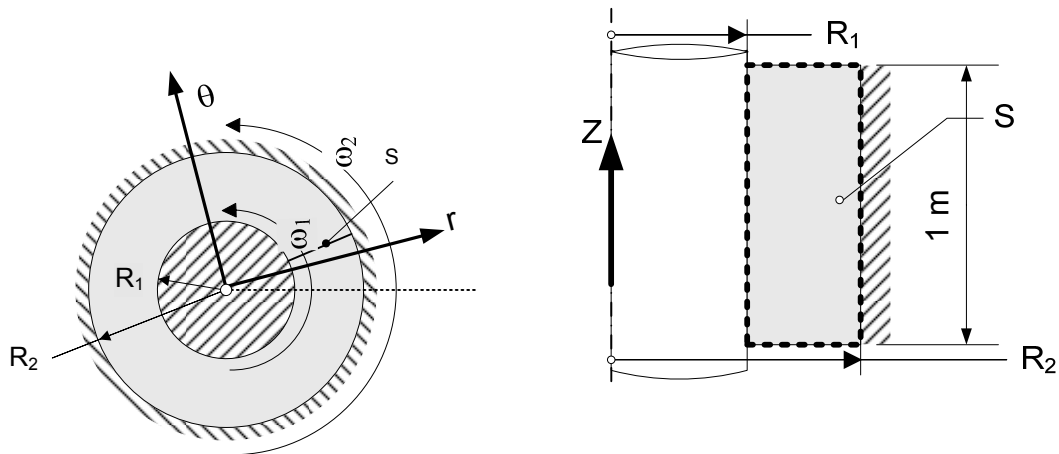


Fig. 1.15

Solución 1.15: Flujo unidimensional y unidireccional~

$$q = \frac{\omega_1 \cdot R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\omega_1 \cdot R_1^2}{2} \sim M_1 = \frac{4\pi \cdot \mu \cdot R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \text{ Horario}$$

$$M_2 = \frac{4\pi \cdot \mu \cdot R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \text{ Antihorario} \sim \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2 \cdot \ln(R_2/R_1) - (R_2/R_1)^2 + 1}{2 \cdot \ln(R_2/R_1) + (R_1/R_2)^2 - 1}$$

1.16 Un fluido desliza sobre una superficie sólida formando sobre ella una película de altura a . Al ser la dimensión perpendicular al papel muy grande, el flujo se puede considerar unidimensional y unidireccional y el perfil de velocidades en la dirección X , paralela a la superficie, en régimen turbulento es $u/U_0 = (y/a)^{1/7}$. Siendo y la coordenada en dirección perpendicular a la superficie sólida tomándola como origen y U_0 es la velocidad máxima que se produce para $y=a$. Calcular la relación entre la velocidad media y la máxima de este flujo y determinar a que distancia y de la pared se halla el punto que tiene una velocidad $u(y)$ igual a la media.

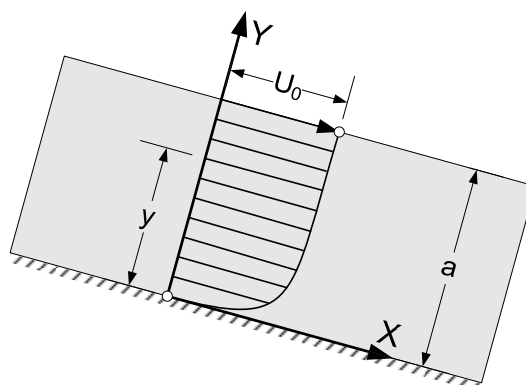


Fig. 1.16

Solución 1.16: $v/U_0 = 7/8 \sim y/a = (7/8)^7 = 0.392$

1.17 El perfil de velocidades del flujo de un fluido, estacionario, incompresible, completamente desarrollado y en régimen laminar en un conducto de sección triangular equilátera de lado a y longitud L es:

$$u(y, z) = U \cdot \left(\frac{z}{a} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{y}{a} \right)^2 - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]$$

siendo X la dirección del eje del conducto. Se pide calcular la aceleración del campo de flujo, la relación entre U y el caudal. Siendo dato el caudal q que circula por el conducto obtener el tensor desviador de tensiones y la expresión del esfuerzo cortante en la pared AB , los puntos de la pared donde se producen el esfuerzo cortante máximo y mínimo y el valor de éstos últimos.

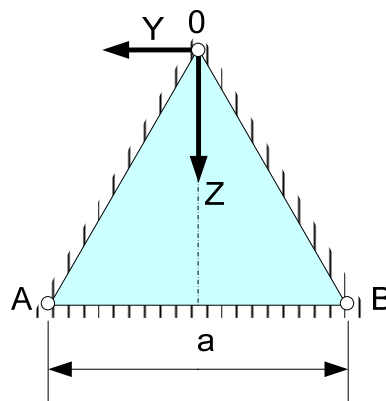


Fig. 1.17

Solución 1.17:

$$a(x, y) = 0 \sim U = \frac{160 \cdot q}{3 \cdot a^2} \sim$$

$$T_D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6\mu \cdot U}{a} \cdot \frac{y}{a} \cdot \left(\frac{z}{a} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & \frac{\mu \cdot U}{a} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{y}{a} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{z}{a} \right)^2 + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{z}{a} \right) \right] \\ \text{SIM} & 0 & 0 \\ \text{SIM} & \text{SIM} & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$t_{AB(\text{Solido})} = \frac{3 \cdot \mu \cdot U}{a} \cdot \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \cdot \mathbf{i} \sim |t_{AB(\text{Solido})}|_{\max} = \frac{40 \cdot \mu \cdot q}{a^3}$$

1.18 En la figura se muestra el eje de una máquina de radio $R_e=12$ cm que se desplaza y gira en la dirección de su eje (Z) en el interior de un casquillo de radio $R_c=12.6$ cm y longitud $L_c=30$ cm, con unas velocidades U_e y ω_e de 1 cm/s y 60 rpm respectivamente. El espacio existente entre el eje y el casquillo se encuentra lleno de aceite de densidad relativa al agua $s_{\text{Aceite}}=0.8$ ($\rho_{\text{Agua}}=10^3$ kg/m³) y viscosidad

cinemática $v_{\text{Aceite}}=0.3 \cdot 10^{-3}$ (m²/s). El campo de velocidades del aceite en el mencionado espacio tiene en el sistema de referencia de la figura la siguiente expresión.

$$\mathbf{v} = \frac{U_e}{R_c - R_e} \cdot (R_c - r) \cdot \mathbf{e}_z + \frac{\omega_e \cdot R_e}{R_c - R_e} \cdot (R_c - r) \cdot \mathbf{e}_\theta$$

Se pide clasificar el flujo según su campo de velocidades. Calcular el caudal másico de aceite que atraviesa el casquillo. Fuerza y momento que hay que aplicar sobre el eje en la dirección del movimiento. Calcular la potencia consumida y el coste económico anual para mantener este dispositivo en movimiento si trabaja al día 8 horas y el precio del W·h es de 0.006 €. Comprobar que el campo de velocidades corresponde a un flujo incompresible.

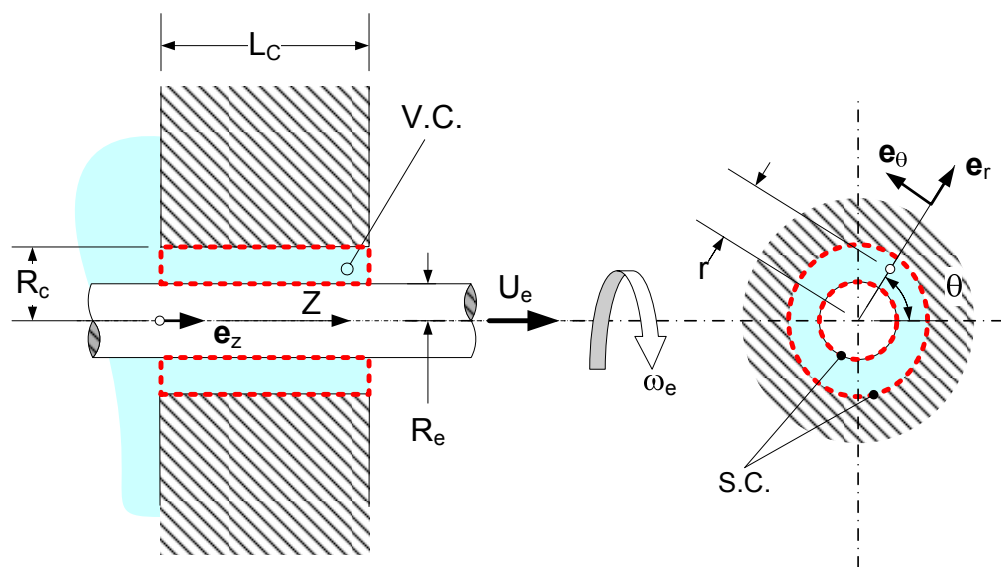


Fig. 1.18

Solución 1.18: 18.4 (gr/s)~5.4 (W)~0.09 (N)~86 (N·cm)~0.25 €/año

1.19 En la figura se muestra un eje de radio $R_i=1$ cm situado en el interior de un casquillo y concéntrico a este. El espacio entre el eje y el casquillo se encuentra lleno de mercurio de densidad relativa al agua 13.6 y una viscosidad cinemática de $1.14 \cdot 10^{-7}$ m²/s. El eje gira a una velocidad angular ω de 30 rpm produciendo el movimiento del fluido. Tanto el eje como el casquillo son muy largos y el radio del casquillo es muchísimo mayor que el del eje, por lo que ni el casquillo ni las condiciones en la dirección perpendicular al dibujo influyen en el flujo. Dicho flujo posee un campo de velocidades dado por:

$$\mathbf{v} = u_\theta(r) \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{R_i^2 \cdot \omega}{r} \cdot \mathbf{e}_\theta$$

Se pide clasificar el flujo según su campo de velocidades. Calcular el momento por unidad de longitud del eje que es necesario aplicarle para mantener su rotación.

Calcular la potencia por unidad de longitud del eje que se consume para mantener el movimiento.

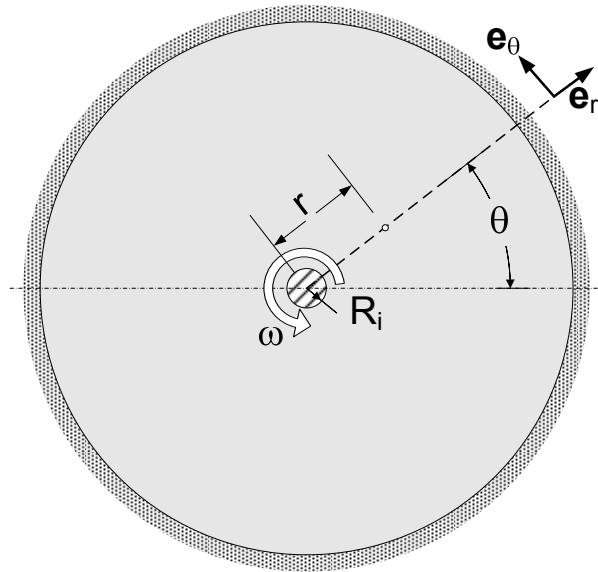


Fig. 1.19

Solución 1.19: Unidireccional, Unidimensional y Estacionario $\sim 6.12 \cdot 10^{-6}$ (N·m/m)
Antihorario $\sim 1.923 \cdot 10^{-5}$ (W/m)

1.20 El conducto de sección rectangular de la figura está sometido a una diferencia de alturas piezométricas entre sus extremos y su pared superior se desplaza con una velocidad U_W en la dirección del eje del conducto (X). Su anchura (a) es muchísimo mayor que su altura (b), es decir $a \gg b$, y su longitud es lo suficientemente larga para considerar el flujo en su interior completamente desarrollado. Tomando el sistema de referencia de la figura, el campo de velocidades del flujo en régimen laminar en este conducto viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{v} = u(y) \cdot \mathbf{i} = \left\{ U_W \cdot \left(\frac{y}{b} \right) + 4 \cdot U_0 \cdot \left[\left(\frac{y}{b} \right) - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \right\} \cdot \mathbf{i}$$

Siendo U_0 un parámetro. Se pide hallar el caudal que circula por el conducto. Relación entre U_W y U_0 para que el caudal que circula por el conducto sea nulo. Fuerza por unidad de longitud de conducto ejercida sobre la pared móvil debida a la viscosidad del fluido. Proporcionar también el valor de esta magnitud en el caso del caudal es nulo.

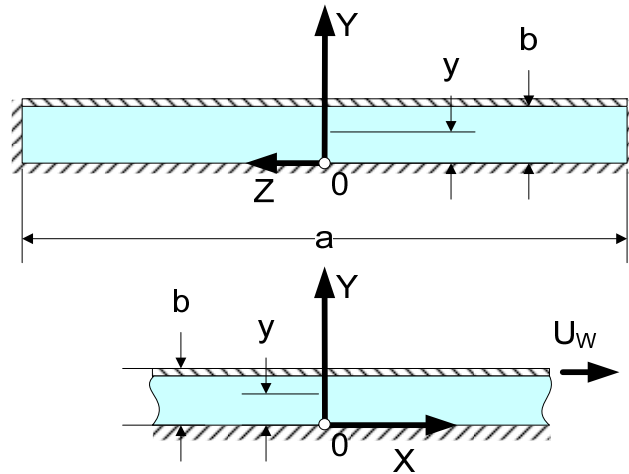


Fig. 1.20

Solución 1.20:

$$q = a \cdot b \cdot \left(\frac{U_W}{2} + \frac{2 \cdot U_0}{3} \right) \sim U_0 = -\frac{3}{4} \cdot U_W \sim F_X = \frac{\mu \cdot a}{b} \cdot (4U_0 - U_W) \sim \mathbf{F}^T = \left\{ -\frac{4 \cdot \mu \cdot U_W}{b} \cdot a \quad 0 \right\}$$

1.21 Una cavidad cilíndrica se encuentra llena de un aceite de densidad de 871 kg/m³ y una viscosidad cinemática de 1.5·10⁻⁵ m²/s. La tapa superior de la cavidad gira a una velocidad de 1 rpm. En la región de la cavidad señala en la figura se puede considerar que el flujo no está influenciado por las paredes laterales y que el campo de velocidades en dicha región viene expresado por:

$$\mathbf{v} = u_\theta(r, z) \cdot \mathbf{e}_\theta = \omega \cdot r \cdot \frac{z}{h} \cdot \mathbf{e}_\theta$$

Teniendo únicamente en cuenta el flujo en la mencionada región se pide clasificar el flujo. Calcular el par motor y la potencia necesarios para mantener el movimiento.

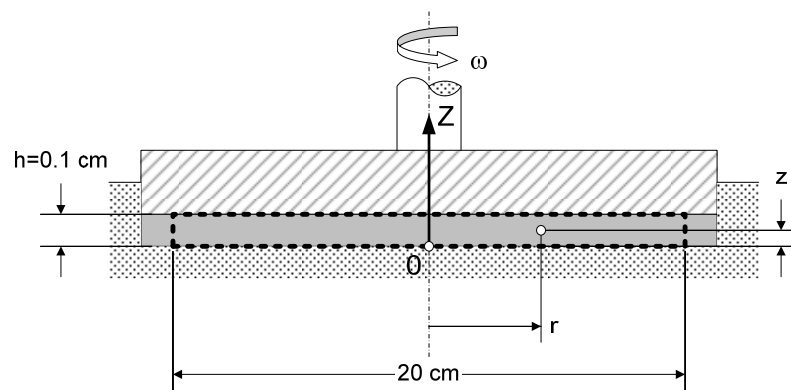


Fig. 1.21

Solución 1.21: Unidimensional, Bidimensional y Estacionario ~ 2.15·10⁻⁴ (N·m) ~ 2.25·10⁻⁵ (W)

1.22 El conducto recto de la figura de 1 m de longitud y sección rectangular de dimensiones $a \times b$ con $a \gg b$, siendo $a=50$ cm y $b=1$ cm. Las paredes superior e inferior pueden desplazarse en la dirección del eje del conducto a unas velocidades de $U_{w2}=4$ m/s y $U_{w1}=2$ m/s respectivamente. Si por el interior del conducto circula un aceite ($\rho=500$ kg/m³ y $\mu=0.1$ kg/m·s). Este flujo se puede considerar completamente desarrollado y en régimen laminar, siendo el campo de velocidades según el sistema de referencia de la figura:

$$\mathbf{v} = u(y) \cdot \mathbf{i} = \left[U_{w1} + (U_{w2} - U_{w1}) \cdot \frac{y}{b} \right] \cdot \mathbf{i}$$

Se pide clasificar el flujo según su campo de velocidades. ¿Corresponde el campo de velocidades a un flujo incompresible?. Calcular la expresión del campo de vorticidad del flujo. Calcular las fuerzas que hay que aplicar a las paredes móviles para mantener el movimiento. Calcular las potencias que hay que proporcionar o sustraer de las paredes móviles para mantener el movimiento.

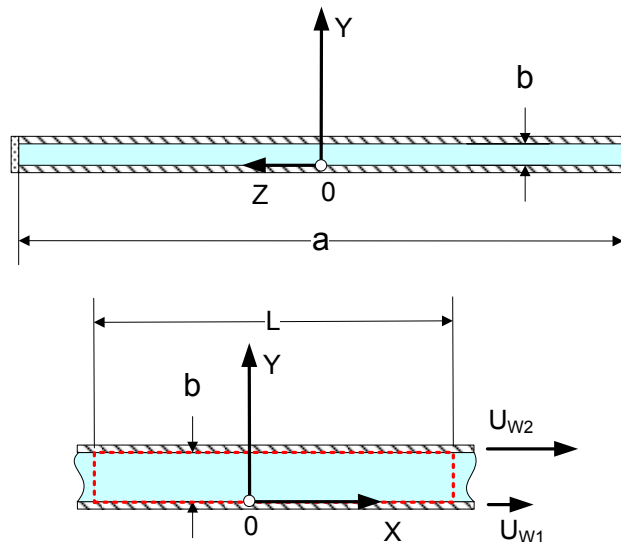


Fig. 1.22

Solución 1.22: $(F_x)_{w1}=10$ (N) \sim $(F_x)_{w2}=-10$ (N) \sim $(\dot{W})_{w1} = -20$ (W) \sim $(\dot{W})_{w2} = 40$ (W)

1.23 El conducto de la figura tiene una longitud L perpendicular al papel y por él circula un fluido de viscosidad (μ) y densidad (ρ) conocidas. El campo de velocidades de este flujo viene dado por la expresión:

$$\mathbf{v} = u_r(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_r = U_0 \cdot \left(\frac{R_0}{r} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\theta}{\alpha} \right)^2 \right] \cdot \mathbf{e}_r$$

Donde U_0 es conocida. Se pide clasificar el flujo según su campo de velocidades. ¿Corresponde el campo de velocidades a un flujo incompresible?. ¿Qué es U_0 ?. Calcular la fuerza que el fluido ejerce sobre una de las paredes del conducto. Calcular el caudal y el flujo másico que circulan por el conducto.

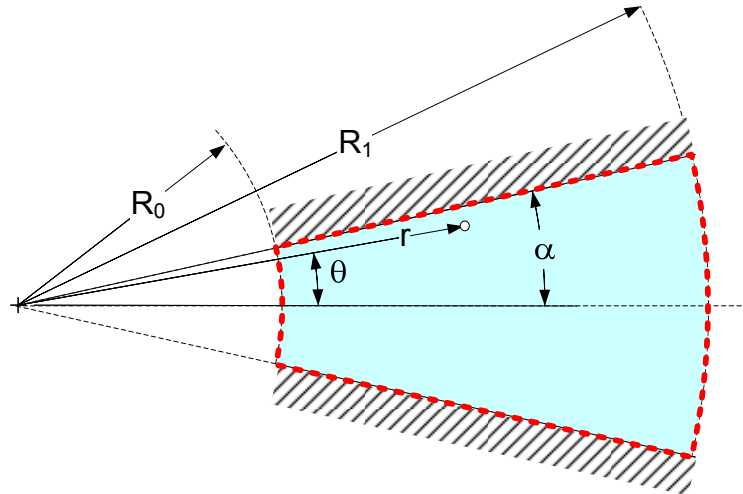


Fig.1.23

Solución 1.23: $(F_r)_W = \frac{2\mu \cdot U_0 \cdot R}{\alpha} \cdot L \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) \sim q = \frac{4}{3} \cdot U_0 \cdot R_0 \cdot L \cdot \alpha$



Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

tecnun

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA. NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA

Paseo de Manuel Lardizábal 13. 20018 Donostia-San Sebastián. Tel.: 943 219 877 Fax: 943 311 442

© Alejandro Rivas Nieto (arivas@tecnun.es)

2 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

2.1 Se está laminando acero caliente en una acería, el acero sale de la máquina laminadora un 10% más denso que antes de entrar. Si la velocidad del material al entrar en la laminadora es de 0.2 m/s. ¿Cual es la velocidad del material laminado?. Existe un incremento del 9 % en el ancho de la lámina.

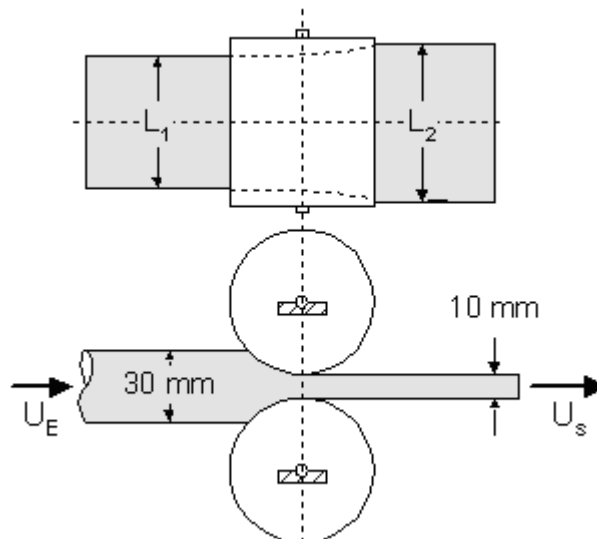


Fig. 2.1

Solución 2.1: $U_s=0.5$ (m/s)

2.2 Un depósito contiene normalmente un metro cúbico de una solución de colorante con una concentración de 10 g/l. En el depósito entra un caudal de 1 l/s de una solución del mismo colorante con una concentración de 200 g/l, mientras que por un orificio del fondo de 5 cm de diámetro se escapa un chorro con una velocidad de $v = \sqrt{2gh}$, siendo h la altura de la superficie libre respecto del orificio de salida. La sección transversal del depósito es 1 m². Determinar la ecuación diferencial que define la variación del nivel en el depósito en función del tiempo y el nivel de equilibrio. Ecuación diferencial de la concentración de colorante cuando el nivel en el depósito sea constante.

Solución 2.2:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{0.05^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{2gh} - 0.001 = 0 \sim h_e = 0.0132 \text{ (m)} \sim A_D \cdot h \cdot \frac{dC}{dt} + q \cdot (C - C_E) = 0$$

2.3 En el dispositivo cilíndrico representado en la figura entra un caudal de agua con una velocidad media de 8 m/s. El fondo del depósito es poroso con una superficie útil del 5% de la total. La parte lateral en su primer metro de altura es también porosa y tiene una superficie útil del 10%. La velocidad de derrame v del líquido a

través de las superficies porosas viene dada por la expresión $v = C_D \cdot \sqrt{2gh}$ siendo h la altura medida desde la superficie libre del líquido, y C_D el coeficiente de derrame que vale 0.95. Calcular la ecuación diferencial que da la variación de la superficie libre del depósito en función del tiempo y la altura que alcanzará respecto al fondo del depósito la superficie libre cuando se alcance la condición de equilibrio.

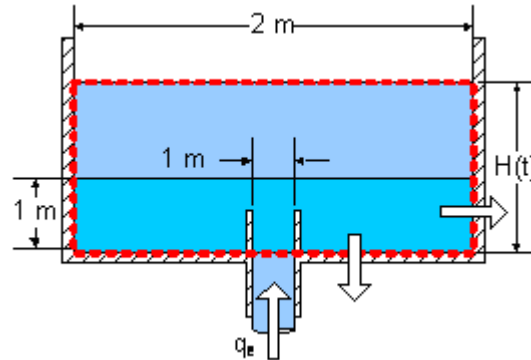


Fig. 2.3

Solución 2.3: $\frac{dh}{dt} = 2 - 0.158 \cdot \sqrt{h} - 0.561 \cdot [\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-1)^3}] \sim h_e = 4.43 \text{ (m)}$

2.4 Un turbomotor a chorro colocado en un túnel de viento recibe aire a la velocidad de 130 m/s a la presión absoluta de 0.9 bar y de densidad 1.2 kg/m³. La distribución de la velocidad del chorro de entrada es uniforme y el área transversal 0.1 m². A la salida del turbomotor la velocidad del chorro saliente no es uniforme, sino dada por $u(r) = 2U_0 \cdot [1 - (r/r_0)^2]$ donde r_0 es el radio de la sección recta del chorro y $U_0 = 600$ m/s. La presión absoluta media en el chorro saliente es de 1.2 bar y su densidad 0.6 kg/m³. Si además se sabe que la cantidad de combustible introducido lateralmente corresponde al 2% de la masa de aire que circula. Se pide mostrar que U_0 es la velocidad media del chorro de salida y determinar la velocidad máxima. Encontrar el la reacción sobre el soporte del turbomotor R_x sobre el turbomotor. ¿Cual será R_x si el chorro saliente hubiese tenido una velocidad uniforme U_0 ? Nota: Presión atmosférica 1 bar.

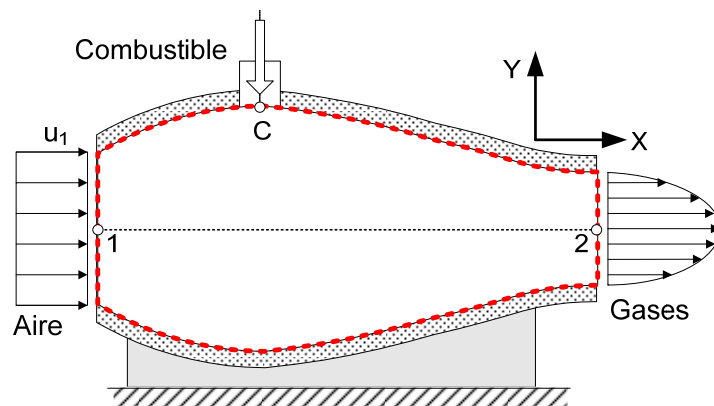


Fig. 2.4

Solución 2.4: $R_x = -\rho_1 \cdot u_1^2 \cdot A_1 + 4/3 \cdot \rho_2 \cdot A_2 \cdot U_0^2 - \rho_1^m \cdot A_1 + \rho_2^m \cdot A_2 \sim 12585.6 \text{ (N)}$
 $\sim R_x = -\rho_1 \cdot u_1^2 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot A_2 \cdot U_0^2 - \rho_1^m \cdot A_1 + \rho_2^m \cdot A_2 \sim R_x = 9403.2.14 \text{ (N)}$

2.5 Un chorro de sección A_0 y velocidad v_0 incide sobre la pieza de la figura. Suponiéndose que los chorros de salida son de una sección la mitad que la de entrada y poseen ambos la misma velocidad. Calcular los esfuerzos en el empotramiento. Despreciar los efectos de gravedad.

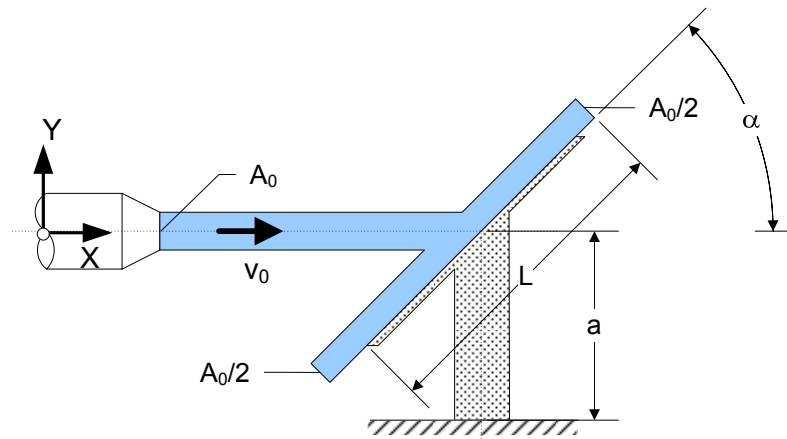


Fig. 2.5

Solución 2.5: $R_x = -\rho \cdot v_0^2 \cdot A_0 \sim R_y = 0 \sim M = \rho \cdot v_0^2 \cdot A_0 \cdot a$

2.6 Un chorro de agua de sección circular a una velocidad v_0 incide sobre un alabe que se mueve en el mismo sentido que el chorro con una velocidad constante u , siendo θ el ángulo de inclinación del alabe. Determinar fuerzas horizontal F_x y vertical F_y que el chorro ejerce sobre el alabe. Velocidad que debe tener el alabe para conseguir una potencia útil máxima. Siendo el diámetro del chorro $d=4 \text{ cm}$, $v_0=6 \text{ m/s}$ y $u=2 \text{ m/s}$ calcular el valor numérico de F_x , F_y y la potencia para $\theta=30^\circ$. Hacer en el caso anterior un balance energético.

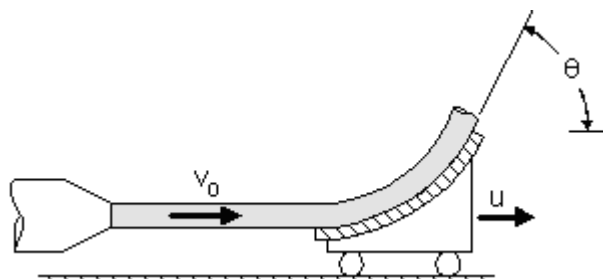


Fig. 2.6

Solución 2.6:

$$F_x = \rho \cdot A \cdot (v_0 - u)^2 \cdot (1 - \cos\theta) \sim F_y = -\rho \cdot A \cdot (v_0 - u)^2 \cdot \text{sen}\theta \sim \dot{W} = \rho \cdot A \cdot (v_0 - u)^2 \cdot (1 - \cos\theta) \cdot u$$

~La velocidad que hace máxima la potencia es $u = \frac{v_0}{3}$ ~ $F_x = 2.7$ (N) ~ $F_y = 10.1$ (N) ~ $\dot{W} = 5.4$ (w)

2.7 Una vagoneta de masa M circula horizontalmente y sin rozamiento con velocidad u_0 . Se considera como el instante inicial aquél en que se establece sobre la vagoneta un chorro que sale de una boquilla fija con una velocidad v_0 . El chorro es desviado por un álabe adosado a la parte frontal de la vagoneta. La salida del álabe forma 60° con la horizontal tal como se indica en el dibujo. Calcular el tiempo que tardará en llegar a cero la velocidad de la vagoneta. La sección del chorro es A . Hacer un balance energético en el instante inicial.

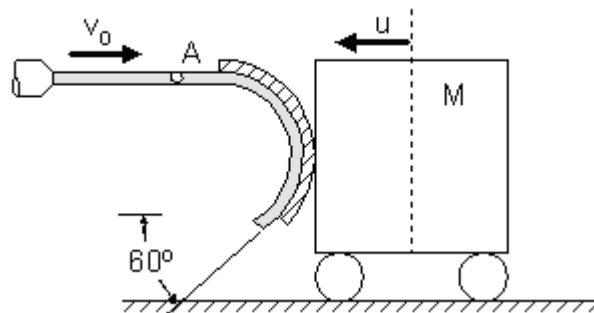


Fig. 2.7

Solución 2.7: Despreciando la variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control o las fuerzas de inercia asociadas a dicho fluido

$$t = \frac{2M \cdot u_0}{3\rho \cdot A \cdot v_0 \cdot (v_0 + u_0)}$$

2.8 Un chorro de agua de velocidad constante v_0 , tal como se indica en la figura, actúa sobre un alabe adosado a una vagoneta de masa M (se prescinde de la masa del agua que esta dentro del alabe a efectos de inercia). El sistema esta inicialmente en reposo, al estar la vagoneta sujeta por una cuerda CD . En un instante dado se corta la cuerda. Se pide tiempo que tarda la vagoneta en alcanzar el 90% de la velocidad del chorro de agua. Tiempo que tarda la vagoneta en alcanzar el instante en que el rendimiento del chorro es máximo. Realice para este instante un balance energético. No hay rozamiento y el movimiento es rectilíneo.

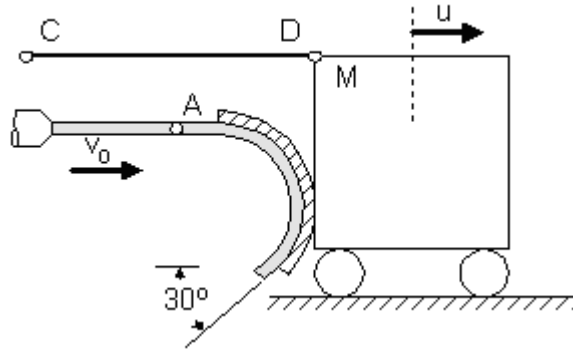


Fig. 2.8

Solución 2.8: Despreciando la variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control o las fuerzas de inercia asociadas a dicho fluido $t = 9M / \rho \cdot A \cdot v_0 \cdot (1 + \sqrt{3}/2) \sim t = M / 2 \rho \cdot A \cdot v_0 \cdot (1 + \sqrt{3}/2)$

2.9 En la salida a la atmósfera de una tubería existe un obturador cónico. La presión justo antes del obturador es p_0 y el caudal que circula por la tubería es q , ambos conocido y función del grado de cierre del obturador y de las condiciones aguas arriba de la tubería. Utilizando el volumen de control de la figura calcular la fuerza horizontal F que hay que realizar sobre el obturador para mantenerlo introducido una determinada relación $\eta = x/L$.

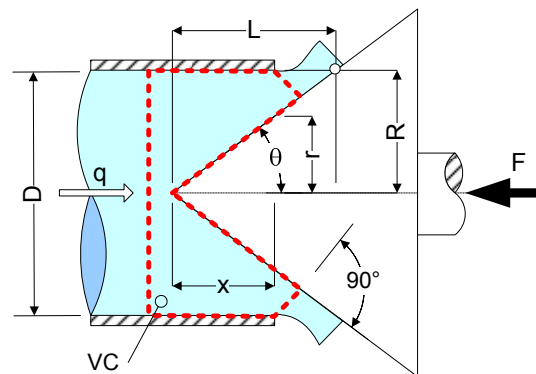


Fig. 2.9

Solución 2.9: $F = \frac{\rho \cdot q^2}{A_T} \cdot \left\{ 1 / \left[1 + (1 - \eta)^2 \cdot \text{sen} \theta \right] \cdot (1 - \eta) \right\} - p_0 \cdot A_T$ Siendo A_T el área del conducto.

2.10 El tubo horizontal de la figura está lleno de agua una distancia x . Un chorro de velocidad constante v_1 golpea contra la porción llena. La fuerza de fricción del fluido sobre la pared del tubo está dada por $F_R = \tau_W \cdot \pi \cdot D \cdot x$ siendo $\tau_W = \rho \cdot f \cdot v_2^2 / 8$. Determinése las ecuaciones para analizar este flujo cuando las condiciones iniciales son conocidas; esto es, para $t=0$, $x=x_0$, $v_2=v_{20}$. Específicamente para $v_1=20$ m/s, $D_1=60$ mm, $v_{20}=500$ mm/s, $D_2=250$ mm, $x_0=100$ m, $\rho=1000$ kg/m³ y $f=0.02$, encuéntrese la velocidad de cambio de v_2 y x con el tiempo.

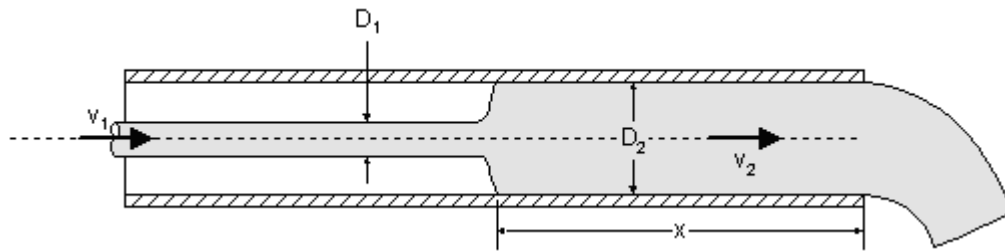


Fig. 2.10

Solución 2.10:

$$\dot{x} = \frac{A_1 \cdot v_1 - A_2 \cdot v_2}{A_2 - A_1} \sim \dot{v}_2 = \left[-\frac{(A_1 \cdot v_1 - A_2 \cdot v_2)^2}{A_2 - A_1} + A_1 \cdot v_1^2 - \left(A_2 + \frac{f}{8} \cdot \pi \cdot D_2 \cdot x \right) \cdot v_2^2 \right] \cdot \frac{1}{A_2 \cdot x}$$

2.11 La máquina quitanieves del esquema se mueve a 20 km/h por un carril de carretera de cuatro metros de ancho y donde recientemente ha nevado. La nieve ha alcanzado una altura de 40 cm. Calcular la potencia consumida por el motor del quitanieves. La densidad de la nieve es de 100 kg/m³.

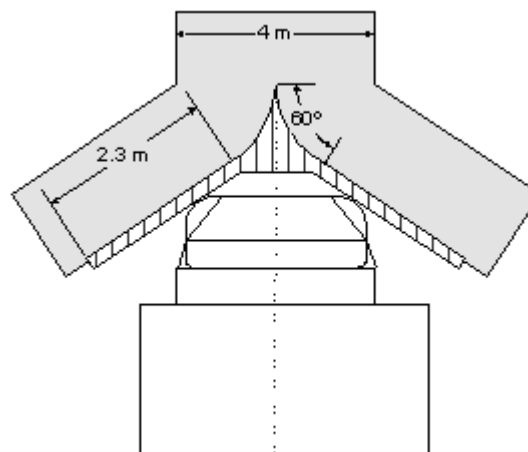


Fig. 2.11

Solución 2.11: $\dot{W} = 13.7$ (kw)

2.12 La pieza de la figura se conecta a una tubería de 100 mm de diámetro que transporta agua y se encuentra apoyada en un plano horizontal. La pieza consta de dos boquillas de 20 mm de diámetro que descargan a la atmósfera. Si cuando se ha establecido el flujo en el manómetro que hay justo después de la unión de la tubería con la pieza marca una presión de 50 kPa se pide calcular los esfuerzos (Fuerzas y Momentos) que se producen en la unión. Se despreciaran las pérdidas de energía mecánica.

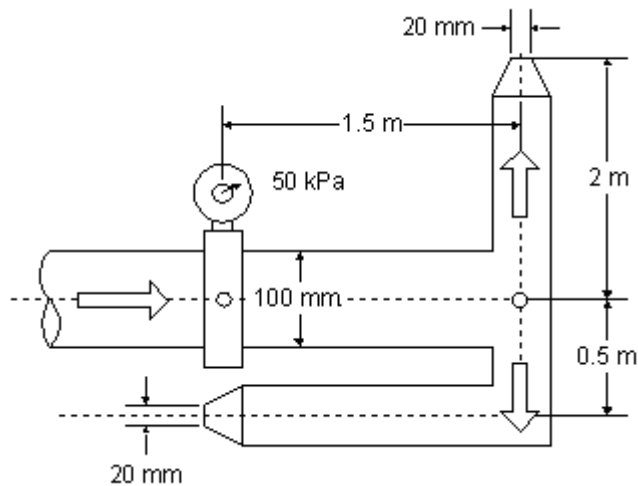


Fig. 2.12

Solución 2.12: $q=6.3$ (l/s) $\sim R_x=-429.34$ (N) $\sim R_y=31.62$ (N) $\sim M=31.62$ (N·m)

2.13 Sea el cono reductor de la figura por el que fluye un determinado caudal de agua, siendo la velocidad media en la sección S es de 40 m/s. La presión manométrica en una determinada sección E vale 1000 kPa. Calcular la fuerza horizontal que sufre un soporte que sirve de anclaje al cono. Se despreciarán las pérdidas de energía mecánica y la diferencia de cotas entre las secciones E y S .

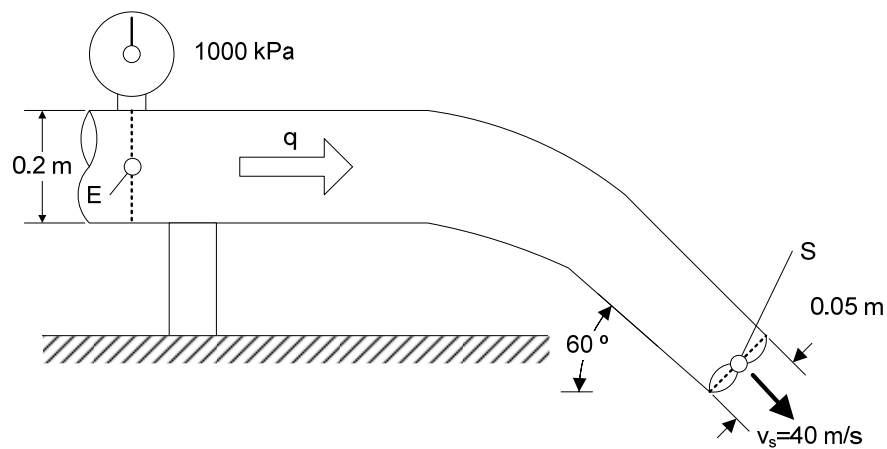


Fig. 2.13

Solución 2.13: $R_H=-29449.36$ (N) $\sim R_V=-3066.1$ (N)

2.14 Una turbo soplante suministra una vena de aire de 150 mm de diámetro y densidad 1.225 kg/m³ a una velocidad de 20 m/s. Despreciando la compresibilidad del aire, la velocidad de entrada del mismo en el colector y todas las pérdidas de carga, calcular la fuerza horizontal ejercida sobre los soportes de la soplante, la acción del chorro sobre la tobera, el empuje sobre el eje de la hélice. La potencia útil suministrada por el ventilador.

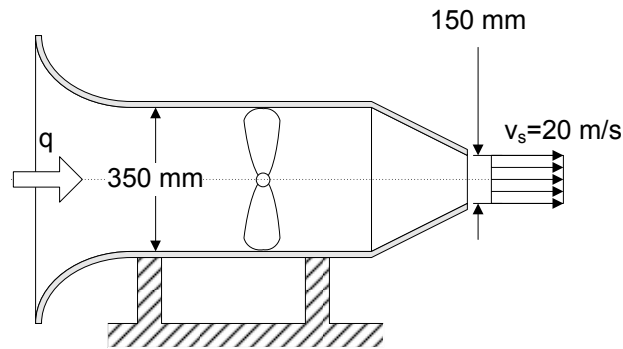


Fig. 2.14

Solución 2.14: $F_{\text{soportes}}=8.66 \text{ (N)} \sim F_{\text{tobera}}=15.71 \text{ (N)} \sim F_{\text{helice}}=-23.58 \text{ (N)}$

2.15 Un petrolero ha naufragado y se ha hundido a una profundidad de 3800 m. La presión del fuel que hay en el interior de sus depósitos es la misma que la del agua a dicha profundidad ($\rho_{\text{agua}}=1025 \text{ kg/m}^3$). Se quiere bombear una décima parte de las $50 \cdot 10^3 \text{ tn}$ de fuel que existen en los depósitos en un tiempo de 6 días. Para ello se dispone del dispositivo de la figura compuesto por una bomba y una tubería de sección circular de 0.2 m de diámetro y 4000 m de longitud. El fuel posee una densidad de 1012 kg/m^3 . Despreciando los términos de energía cinética se pide para las temperaturas de 50°C y 15°C en las que el fuel posee una viscosidad $\mu=0.85 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ y de $\mu=45 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ respectivamente, determinar que el régimen de flujo es laminar y calcular la altura que debe proporcionar la bomba y la potencia útil de la misma.

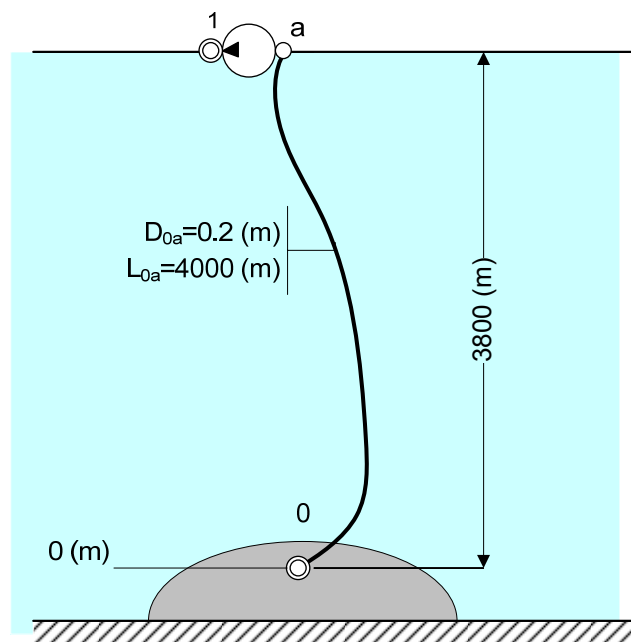


Fig. 2.15

Solución 2.15: $(H_B)_{50^\circ}=34.4 \text{ (m.c.f)} \sim (H_B)_{15^\circ}=4356.03 \text{ (m.c.f)} \sim$

$(\dot{W})_{50^\circ} = 3.25 \text{ (kW)} \sim (\dot{W})_{15^\circ} = 411.74 \text{ (kW)}$

2.16 En la figura se observa el esquema de una instalación que consta de un depósito de agua elevado y abierto a la atmósfera y cuya superficie libre se encuentra en una cota de 20 m. Del citado depósito parte una tubería 0-A de 15 m de longitud y 10 cm de diámetro que está conectado a un codo (Figura Derecha) que a su vez se conecta a otra tubería de 100 m de longitud y 5 cm de diámetro. Esta última tubería descarga a la atmósfera en un punto de cota 0 m. Se considerará que los nodos A y B se encuentran en la misma cota de 0 m. Si las pérdidas de carga que sufre el agua al atravesar la tubería 0-A, el codo y la tubería B-1 vienen dadas en m.c.a. respectivamente por:

$$(h_f)_{0A} = 0.04 \cdot \left(\frac{L}{D}\right)_{0A} \cdot \frac{v_{0A}^2}{2g}$$

$$(h_L)_{AB} = 0.8 \cdot \frac{v_A^2}{2g}$$

$$(h_f)_{B1} = 0.04 \cdot \left(\frac{L}{D}\right)_{B1} \cdot \frac{v_{B1}^2}{2g}$$

Siendo v_{0A} , v_A y v_{B1} las velocidades medias del agua en la tubería 0-A, en la sección A de entrada al codo y de la tubería B-1 respectivamente. Se pide calcular el caudal de agua que circula por la instalación. Las presiones en los nodos A y B en pascuales. La fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el codo A-B. Para el cálculo de esta fuerza no se incluirán las fuerzas gravitatorias.

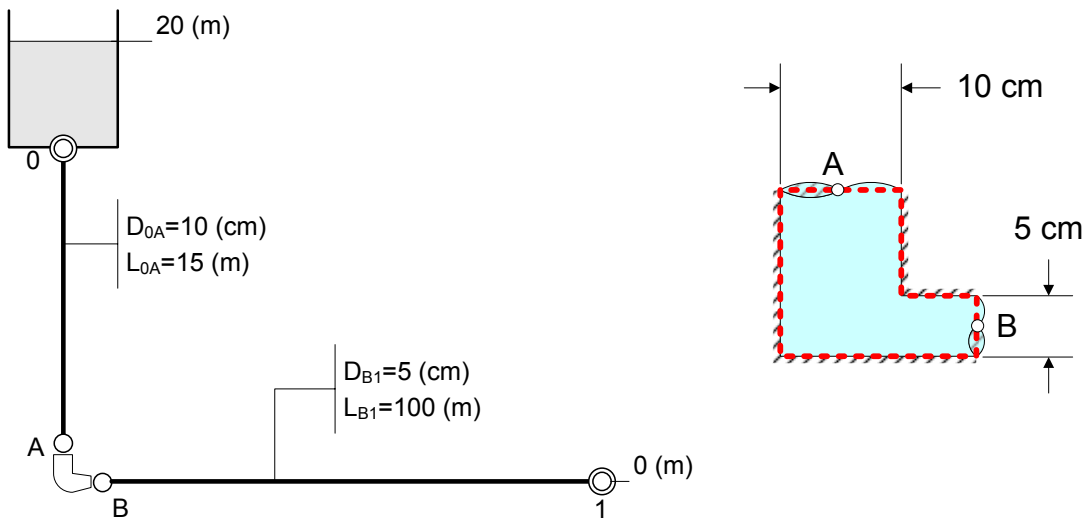


Fig. 2.16

Solución 2.16: $q=4.31$ (l/s) $\sim p_A=195.0$ (kPa) $\sim p_B=192.6$ (kPa) $\sim F_H=387.56$ N $\sim F_V=1533.5$ (N)

2.17 En el dibujo de la izquierda se presenta el esquema de una instalación compuesta por un depósito de agua cerrado y presurizado con aire a una presión de 500 kPa. La superficie libre del depósito se encuentra en una cota de 0 m y de él parte una tubería 0-A de 10 cm de diámetro y 200 m de longitud. La tubería finaliza

en un estrechamiento A-1 (Figura Derecha) a través del cual el agua descarga a la atmósfera en una cota de 20 m. El estrechamiento posee una sección a la salida de 2 cm de diámetro y a la entrada idéntica que la tubería 0-A. Suponiendo que los nodos A y 1 se encuentran situados en la misma cota y que las pérdidas de carga en m.c.a. que sufre el agua al atravesar la tubería y el estrechamiento son respectivamente:

$$(h_f)_{0A} = 0.04 \cdot \left(\frac{L}{D}\right)_{0A} \cdot \frac{v_{0A}^2}{2g}$$

$$(h_L)_{A1} = 5 \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

Siendo v_{0A} y v_1 las velocidades medias del agua en la tubería y a la salida del estrechamiento. Se pide calcular el caudal de agua que circula por la instalación. La presión en el nodo A en pascuales. La fuerza resultante que el agua ejerce sobre el estrechamiento A-1. Para el cálculo de esta fuerza no se incluirán las fuerzas gravitatorias.

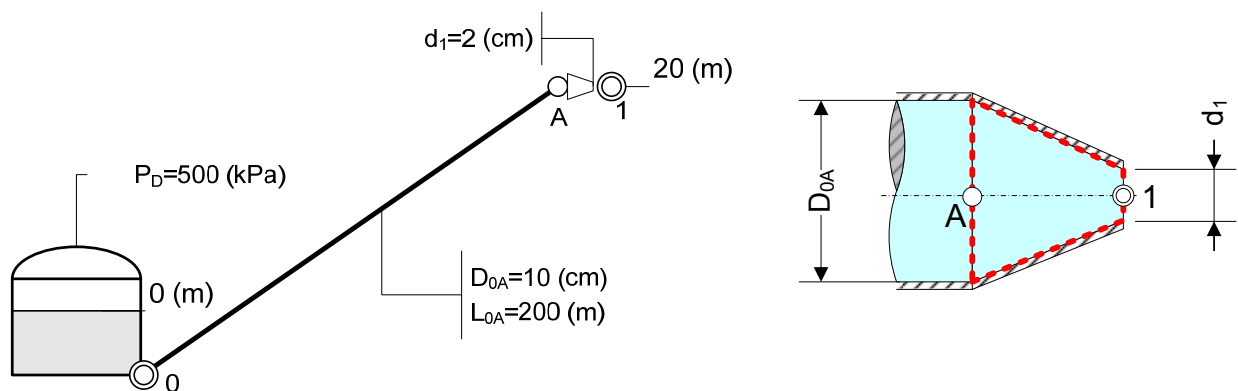


Fig. 2.17

Solución 2.17: $q=3.14$ (l/s) $\sim p_A=297.6$ (kPa) $\sim F_H=2.31$ (kN)

2.18 Se dispone de una instalación de extracción de aire ($\rho_{\text{aire}}=1.2$ kg/m³) como la que se muestra en la figura, en la cual se ha colocado justo después de la campana de extracción (punto a) un manómetro, cuya lectura indica una succión 100 mm de agua ($\rho_{\text{agua}}=1000$ kg/m³). Las pérdidas en los diferentes tramos de la instalación son:

$$(h_f)_{ab} = 12 \cdot \left(\frac{L}{D}\right)_{ab} \cdot \frac{v_{ab}^2}{2g}$$

$$(h_L)_{c1} = 8 \cdot \frac{v_{c1}^2}{2g}$$

Siendo v_{ab} y v_{c1} las velocidades medias del aire en los conductos de sección circular ab y c1 respectivamente. Las pérdidas de carga en la campana de aspiración se consideran despreciables. Se pide calcular la altura proporcionada y el caudal de

aire impulsado por el ventilador. El coste energético de funcionamiento de la instalación durante 10 horas si el rendimiento del ventilador es del 65% y el precio del kW·h de energía eléctrica es de 9 céntimos de euro. Determinar las componentes horizontal y vertical en el anclaje de la instalación a la pared.

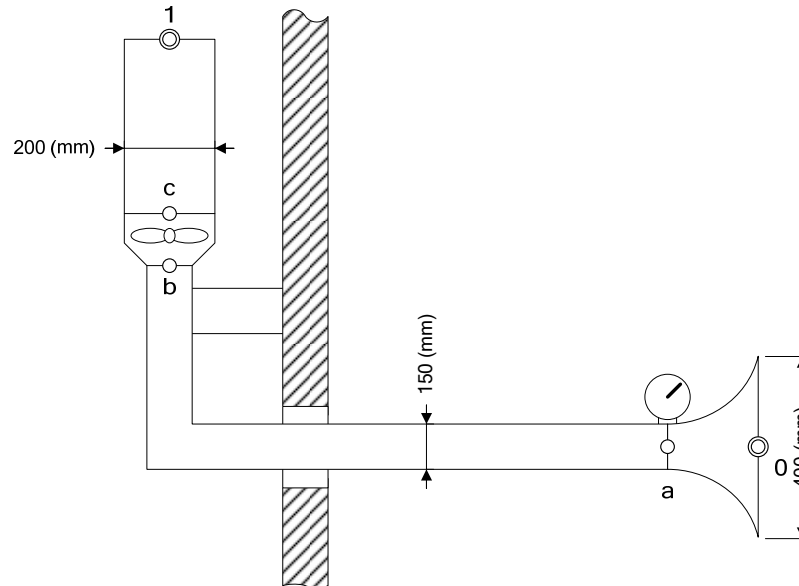


Fig. 2.18

Solución 2.18: $q=225.8$ (l/s) $\sim H_V=148.5$ (mm.c.a) $=123.7$ (m.c.aire) ~ 0.46 (€/día)

2.19 Un jardinero está regando unos abetos con una manguera de 5 m de longitud y 2 cm de diámetro. Dicha manguera se encuentra conectada en un extremo a la red de suministro municipal de agua ($\rho=1000$ kg/m³) que mantiene una presión manométrica constante en la entrada de la manguera de 45 kPa. En un principio a través del otro extremo se está descargando el agua a la atmósfera. Despreciando las variaciones de cota se pide calcular el caudal de riego. La pérdida de carga por fricción en la manguera viene dada por:

$$(h_f)_m = \left(\frac{f \cdot L}{D} \right)_m \cdot \frac{v_m^2}{2g}$$

Siendo f_m el factor de fricción de Darcy en la manguera que tiene un valor constante de 0.0196, L_m y D_m son la longitud y el diámetro de la manguera respectivamente y v_m la velocidad media del agua en la manguera.

El jardinero decide colocar en la salida de la manguera una boquilla cuyo diámetro de salida, d_B , es de 1 cm. Si las pérdidas de energía mecánica en la boquilla vienen dadas por:

$$(h_L)_B = K_B \cdot \frac{v_m^2}{2g}$$

Siendo $K_B=1.05 \cdot (D_m/d_B)^4$: Calcular el nuevo caudal que circula por la manguera y la velocidad de salida del agua. Determinar la fuerza que ha de soportar la boquilla debido a la acción del agua, despreciando la gravedad.

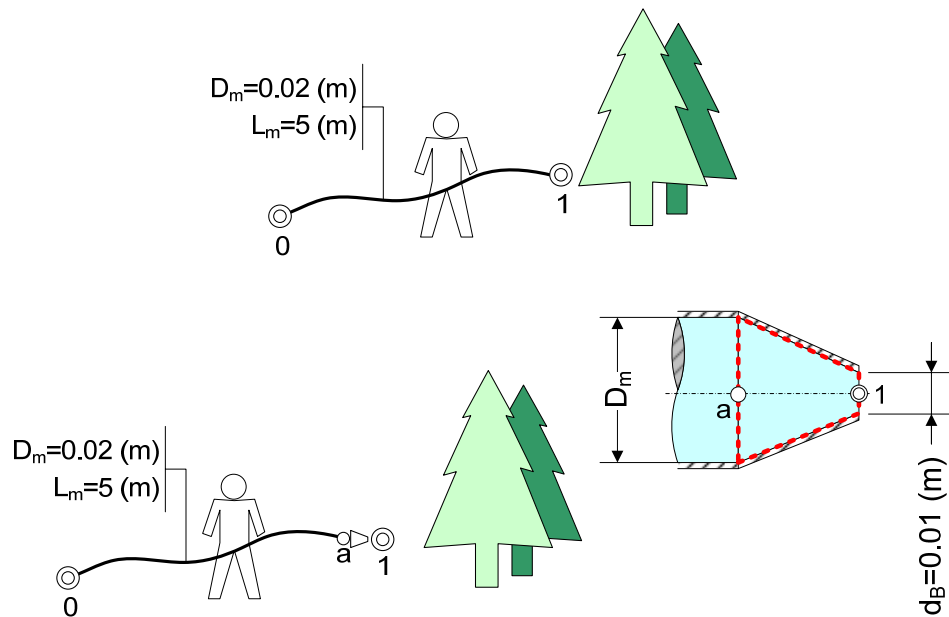


Fig. 2.19

Solución 2.19: $q=1.35 \text{ (l/s)} \sim q=0.5 \text{ (l/s)} \sim F=10.1 \text{ (N)}$

2.20 La instalación de la figura se alimenta de un depósito de agua y está compuesta de una tubería de 20 m de longitud y 50 mm de diámetro, un codo (ver figura), una tubería de 40 m de longitud y 40 mm de diámetro y de una boquilla (ver figura) con una sección circular de salida de 10 mm de diámetro por la que el agua descarga a la atmósfera. El coeficiente de fricción de ambas tuberías es de 0.018. El coeficiente adimensional de pérdidas del codo referido a la altura de energía cinética en la entrada del mismo (a) es $K_{\text{codo}}=1.3$. El coeficiente adimensional de pérdidas de la boquilla referido a la energía cinética en la salida de la misma (1), $K_{\text{boq}}=2$. Se pide calcular el caudal que circula por la instalación. Calcular la presión en la entrada de la boquilla (c) en metros de columna de mercurio ($s_{\text{Hg}}=13.6$). Fuerza que está soportando el codo. En este cálculo no se considerarán las fuerzas gravitatorias.

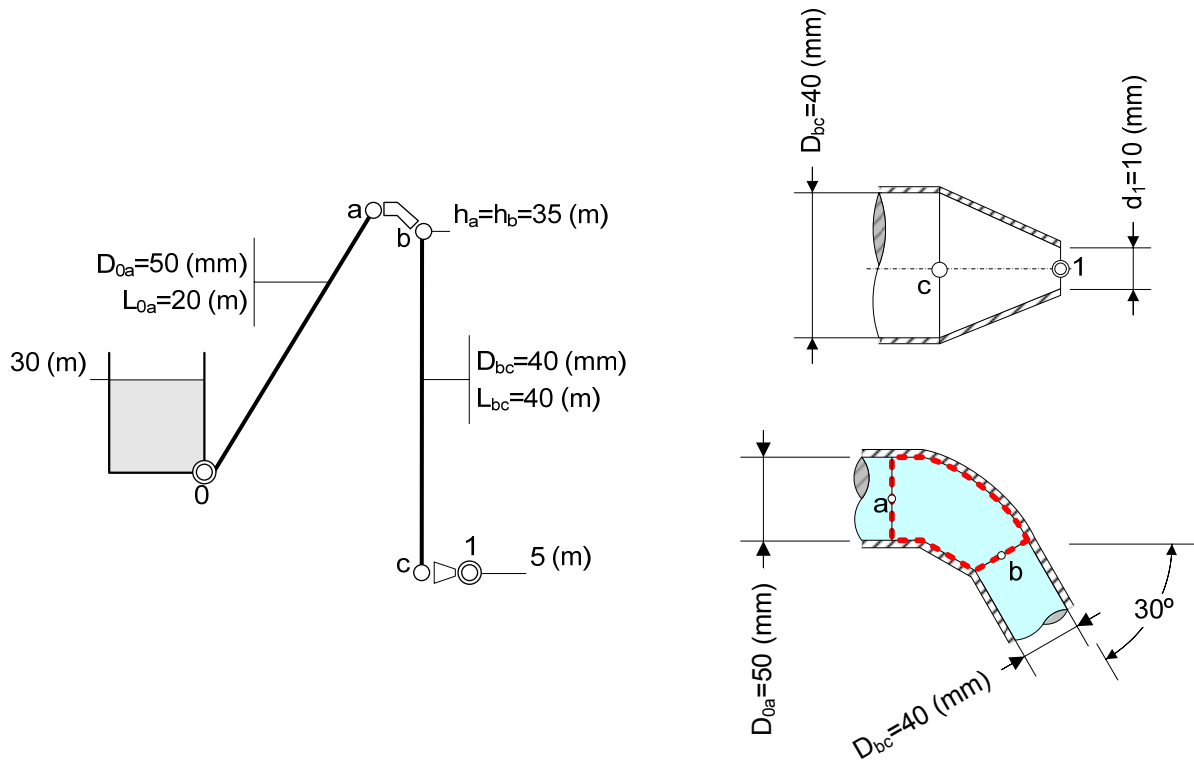


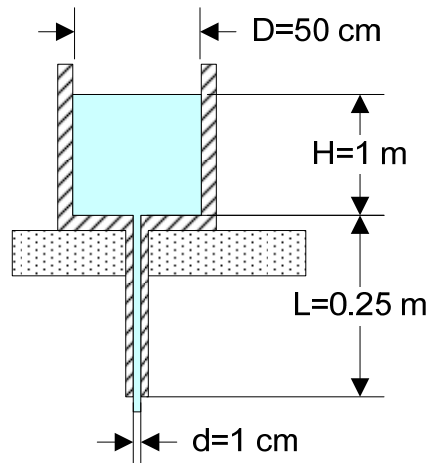
Fig. 2.20

Solución 2.20: $q=1.0$ (l/s) $\sim \rho_c=2.15$ (m.c.Hg) $\sim F_H=-43.6$ (N) $\sim F_V=-31.27$ (N)

2.21 Cierta proceso industrial necesita un caudal de aceite SAE 30. En la figura puede verse un esquema del dispositivo que lo proporciona. El dispositivo consta de un depósito abierto a la atmósfera que está alimentado de forma continua, manteniéndose siempre a un nivel de 1 m por encima del comienzo de un tubo de 0.25 m de longitud y 1 cm de diámetro interior el cual está conectado a la salida del depósito y por el que discurre el aceite. El aceite tiene una densidad $\rho=993$ kg/m³ y una viscosidad $\mu=0.26$ kg/m·s. El flujo se supondrá laminar y la pérdida de energía mecánica o carga que sufre el fluido al discurrir por el tubo viene dada por la expresión de Hagen-Poiseuille

$$h_f = 128 \cdot \frac{v \cdot L}{g \cdot \pi \cdot d^4} \cdot q$$

siendo q el caudal que circula por éste. Se pide calcular el caudal q , la velocidad media en el tubo. Sólo se considerarán las pérdidas de energía mecánica en el tubo y se despreciará la energía cinética en la salida del dispositivo.



Solución $q = \frac{\pi \cdot g \cdot d^4}{128 \cdot \nu} \cdot \left(\frac{H}{L} + 1 \right)$

2.22 En el dibujo se puede apreciar el mismo dispositivo que en el problema anterior pero esta vez funcionando con agua ($\mu=10^{-3}$ kg/m s). En un determinado instante la alimentación se para y el depósito comienza a vaciarse. El flujo en el tubo es turbulento y que la pérdida de energía mecánica en este viene dada por la ley de Darcy $h_f = (f \cdot L/d) \cdot (v^2/2g)$ siendo f el coeficiente adimensional de Darcy que en este caso tiene un valor de 0.02. Se supondrá que las velocidades cambian lentamente y es posible despreciar la inercia del fluido (El flujo transitorio se puede considerar como una sucesión de flujos estacionarios). Se despreciarán las pérdidas de carga en el depósito y en la unión de éste con el tubo pero no en el tubo. Se pide hallar el tiempo de vaciado del depósito, es decir hasta que el nivel en el depósito alcanza la salida del mismo (Comienzo del tubo). Hallar también el tiempo de vaciado del depósito suponiendo que en la salida del mismo existen unas pérdidas de energía mecánica dadas por $h_t = K \cdot (v^2/2g)$ siendo K el coeficiente adimensional de pérdidas referido a la velocidad en el tubo de valor 0.28.

Solución 2.22: $t_v = \frac{\sqrt{2} \cdot [\sqrt{(L+H_0)} - \sqrt{L}]}{\left[g / \left(1 + \frac{f \cdot L}{d} \right) \cdot \left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \sim t_v = 854.9 \text{ (s)}$

$t_v = \frac{\sqrt{2} \cdot [\sqrt{(L+H_0)} - \sqrt{L}]}{\left[g / \left(1 + \frac{f \cdot L}{d} + K \right) \cdot \left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \sim t_v = 931.3 \text{ (s)}$

2.23 El depósito de la figura contiene agua y aire a una presión P_A y se encuentra cerrado por su parte superior. En un determinado momento se retira el tapón y el depósito comienza a vaciarse y a medida que esto ocurre el aire de la parte superior

se va expansionando. Se pide la presión inicial P_{A0} a la que debe encontrarse el aire para que el depósito detenga su vaciado cuando $H=15$ cm. En el mismo instante en el que el vaciado se detiene, se retira la tapa superior y el depósito queda abierto a la atmósfera. Calcular el tiempo que tarda en vaciarse completamente. Se supondrá que no entra ninguna burbuja de aire en el depósito y la expansión del aire isoterma. Se Despreciarán las pérdidas de energía de cualquier tipo. Se supondrá despreciable la inercia del fluido por lo que se podrán considerar el flujo como estacionario en cada instante.

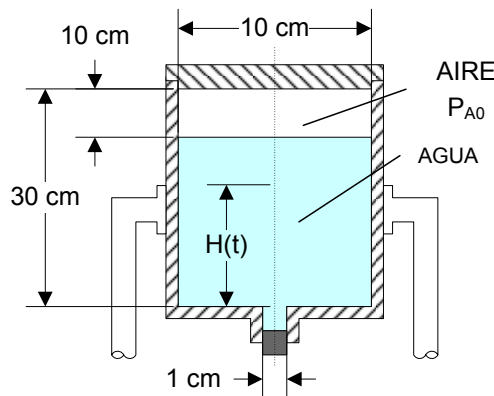


Fig. 2.23

Solución 2.23: $P_{A0}=149.75$ (kPa) $\sim t_V=17.5$ (s)

2.24 Calcular la distribución de velocidades de un líquido viscoso entre dos placas planas, una parada y otra moviéndose con velocidad constante U_w , si entre los extremos existe una diferencia de altura piezométrica. Calcular el perfil de velocidades y dibujar esquemáticamente las diferentes distribuciones de velocidad que se obtienen según el sentido y la importancia relativa de la velocidad de la placa y la diferencia de altura piezométrica.

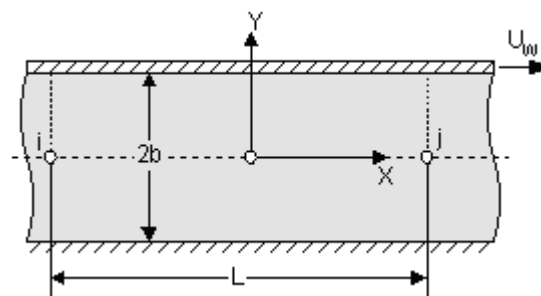


Fig. 2.24

Solución 2.24: $u(y)=U_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + \frac{U_w}{2} \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right)$ siendo $U_0 = \frac{\gamma \cdot b^2}{2\mu} \cdot \frac{(H_i - H_j)}{L}$

2.25 Se considera el depósito de la figura formado por un pistón circular que penetra en un recipiente de aceite a presión, tal y como se indica en la figura. Si $U_0=0$, determinar la fuerza F necesaria para mantener fijo el pistón y la cantidad de aceite

que se pierde. Si el pistón penetra en el depósito con una velocidad U_0 , determinar cuanto han de valer U_0 y F para que la pérdida de aceite sea nula. Puesto que el espesor de la película de aceite $b=0.05$ cm es pequeño en comparación con el radio del cilindro, no se considerarán tubos concéntricos sino flujo entre placas planas de longitud 15 cm y anchura $2 \cdot \pi R$ (Siendo $R=2.5$ cm).

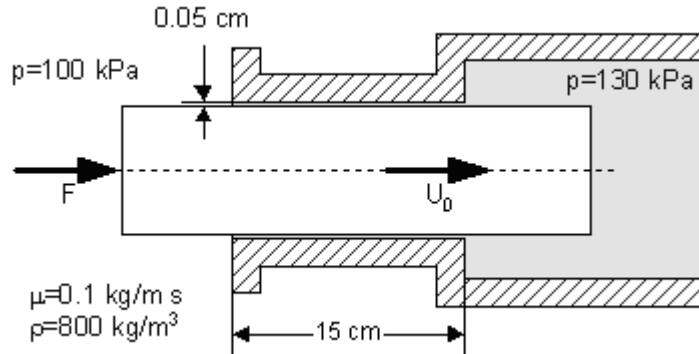


Fig. 2.25

Solución 2.25: $q=3.27 \cdot 10^{-3}$ (l/s) $\sim F=60.083$ (N) $\sim U_0=0.083$ (m/s) $\sim F=60.48$ (N)

2.26 Una banda transportadora como la que se muestra en la figura eleva un fluido hasta un depósito. El grosor de la película de fluido a es tal que la velocidad en la superficie libre del líquido es cero. Considerando sólo el trabajo desarrollado por la banda sobre el fluido mediante la fuerza cortante, determinar la distribución de velocidades, el caudal transportado por la banda por unidad de anchura q_b y el rendimiento energético del dispositivo como elemento elevador de fluido. *Nota:* La condición de contorno correspondiente a una superficie libre es un valor nulo de la tensión cortante.

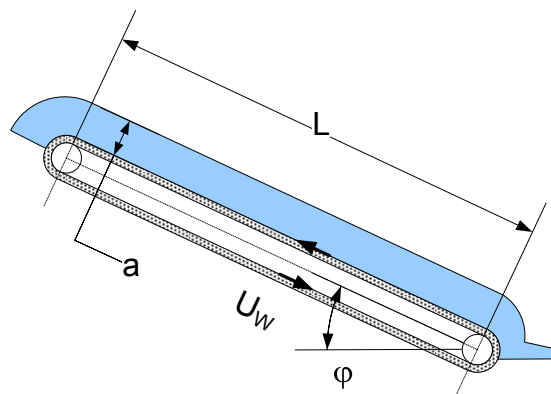


Fig. 2.26

Solución 2.26: Tomando el origen $y=0$ en la pared de la banda transportadora:

$$u(y) = \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot \text{sen } \varphi}{\mu} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{y}{a} \right] + U_w \sim a = \sqrt{\frac{2 \cdot U_w \cdot \mu}{\gamma \cdot \text{sen } \varphi}}$$

este caso queda como:

$$\frac{u(y)}{U_w} = \left(\frac{y}{a} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{y}{a} \right) + 1 \sim q_b = \frac{\gamma \cdot a^3 \cdot \text{sen } \varphi}{3\mu} \sim q_b = \frac{U_w}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot U_w \cdot \mu}{\gamma \cdot \text{sen } \varphi}} \sim \eta = 1/3$$

2.27 Se tiene un flujo entre placas paralelas inclinadas una fija y otra móvil con una velocidad U_w . Determinar la tensión en la pared móvil.

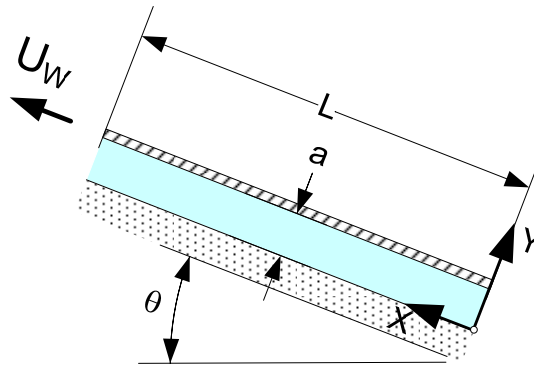


Fig. 2.27

Solución 2.27:
$$u(y) = -\frac{\gamma \cdot a^2}{2\mu} \cdot \left(\frac{dH}{dx} \right) \cdot \left(1 - \frac{y}{a} \right) \cdot \left(\frac{y}{a} \right) + U_w \cdot \left(\frac{y}{a} \right)$$

Siendo
$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dx} + \text{sen } \theta \sim \tau_w = \frac{\gamma \cdot a}{2} \cdot \left(\frac{dH}{dx} \right) + \frac{U_w \cdot \mu}{a}$$

2.28 Un flujo constante de agua en un gran cilindro produce un desbordamiento estacionario. El resultado es una delgada capa de agua cayendo por la superficie lateral exterior del cilindro. Suponiendo flujo laminar se pide hallar la distribución de velocidad en la capa de agua cuando se haya llegado a un flujo completamente desarrollado (no cambia en la dirección del flujo) y el caudal volumétrico que desliza por el tubo.

Nota: La condición de contorno correspondiente a una superficie libre es un valor nulo de la tensión cortante.

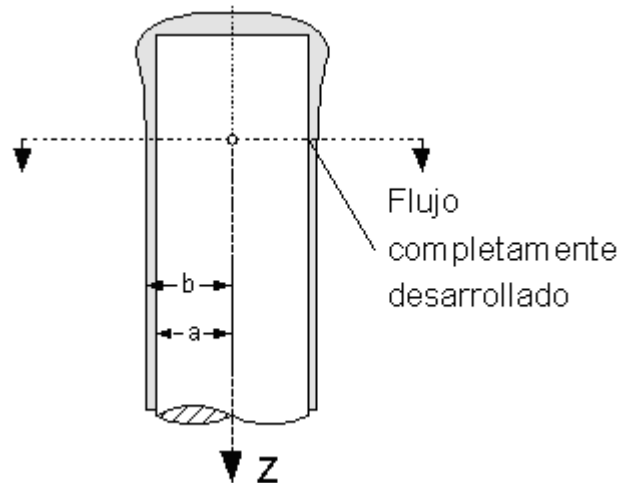


Fig. 2.28

Solución 2.28: $u_z(r) = \frac{\gamma \cdot a^2}{4\mu} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] + \frac{\gamma \cdot b^2}{2\mu} \cdot \text{Ln} \left(\frac{r}{a} \right) \sim$

$$q = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot b^2}{8\mu} \cdot \left\{ \left[4 \cdot \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) - 3 \right] \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 4 \right\}$$

2.29 Un hilo muy largo de diámetro d atraviesa un cilindro hueco de diámetro D y longitud L con una velocidad constante V . El espacio entre el hilo y el cilindro está lleno de un fluido viscoso. La altura piezométrica es la misma a los dos extremos del cilindro. Despreciando los efectos de la entrada y la salida, calcular el campo de velocidades y la fuerza necesaria para mover el hilo.

Solución 2.29:

$$\frac{u(r)}{V} = \frac{\text{Ln}(2r/D)}{\text{Ln}(d/D)} \sim \tau(r) = \frac{\mu \cdot V}{r} \cdot \frac{1}{\text{Ln}(d/D)} \sim \frac{\tau(d/2)}{2\mu \cdot V} = \frac{1}{\text{Ln}(d/D)} \sim F = \frac{2 \cdot \mu \cdot V \cdot \pi}{\text{Ln}(d/D)} \cdot L$$



Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

ESTÁTICA DE FLUIDOS

tecnun

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA. NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA

Paseo de Manuel Lardizábal 13. 20018 Donostia-San Sebastián. Tel.: 943 219 877 Fax: 943 311 442

© Alejandro Rivas Nieto (arivas@tecnun.es)

3 ESTÁTICA DE FLUIDOS

3.1 El manómetro inclinado de la figura tiene un tubo de diámetro 2 mm, un depósito de diámetro 30 mm y su ángulo de inclinación es de 20°. El líquido utilizado es aceite rojo manométrico de densidad relativa 0.827. ¿Cuál es la relación entre la medida del desplazamiento del aceite en el tubo inclinado (en mm) y la diferencia de presión (en Pa)?.

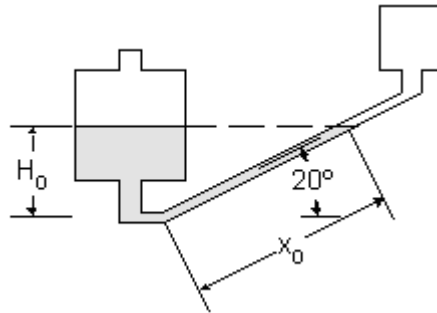


Fig. 3.1

Solución 3.1: $\frac{\Delta p}{\Delta x} = \gamma \cdot \left(\text{sen } \alpha + \frac{a}{A} \right) = 2.81 \text{ (Pa/mm)} \sim \frac{\Delta h}{\Delta x} = 0.346 \text{ (mcl/m)}$

3.2 Un manómetro de dos fluidos como el que se muestra en la figura puede utilizarse para determinar pequeñas diferencias de precisión con una mejor aproximación que un manómetro de un solo fluido. Encontrar la diferencia de presión en kg_f/cm^2 cuando el fluido 2 se desplaza hacia arriba 5.08 cm respecto de la posición de equilibrio.

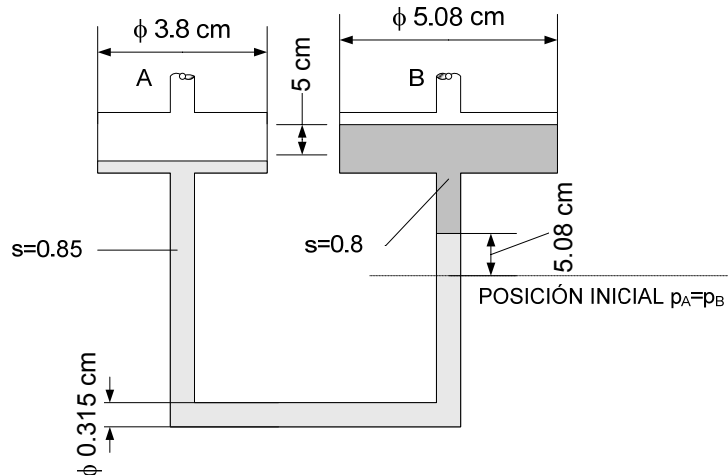


Fig. 3.2

Solución 3.2: $p_A - p_B = R \cdot \left[\left(\frac{a}{A_1} + 1 \right) \cdot \gamma_1 + \left(\frac{a}{A_2} - 1 \right) \cdot \gamma_2 \right] = 3 \cdot 10^{-4} \text{ (kg}_f/\text{cm}^2)$

3.3 En el depósito de la figura determinar las alturas que marcan los tubos piezométricos y el manómetro de mercurio.

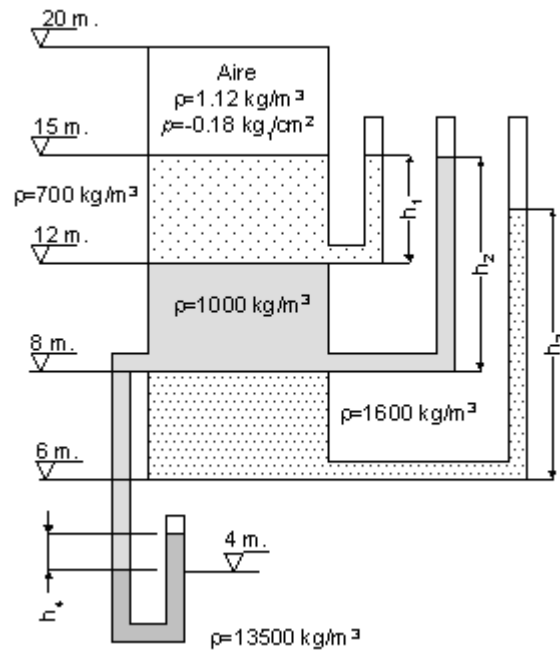


Fig. 3.3

Solución 3.3: $h_1=0.428$ (m) $\sim h_2=4.3$ (m) $\sim h_3=4.687$ (m) $\sim h_4=0.8$ (m)

3.4 En el manómetro de la figura determinar la diferencia de altura R en cm para una diferencia en la presión entre los depósitos A y B de 1 cm de columna de agua. Las densidades de los líquidos son $\rho_1=10^3$ kg/m³ y $\rho_2=1050$ kg/m³ y la relación de áreas $a/A=0.01$.

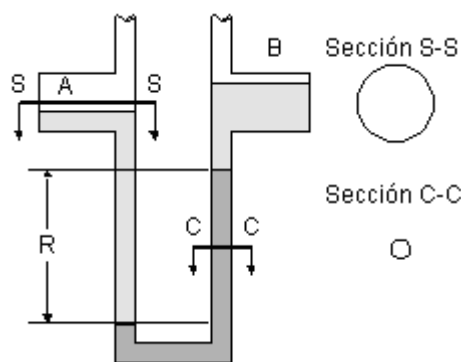


Fig. 3.4

Solución 3.4: $\frac{\Delta p_{AB}}{\gamma_{H_2O}} = R \cdot \left[s_2 - \left(1 - \frac{a}{A} \right) \cdot s_1 \right] \sim R = 16.7$ cm

3.5 La grúa esquematizada en la figura está movida por un sistema hidráulico compuesto de una bomba manual con un embolo de diámetro 12 mm que acciona un cilindro de diámetro 150 mm. Cuando se levanta una carga de 1 Tn. ¿Cuál es la fuerza que hay que realizar en la palanca y cuál es la presión en el circuito?.

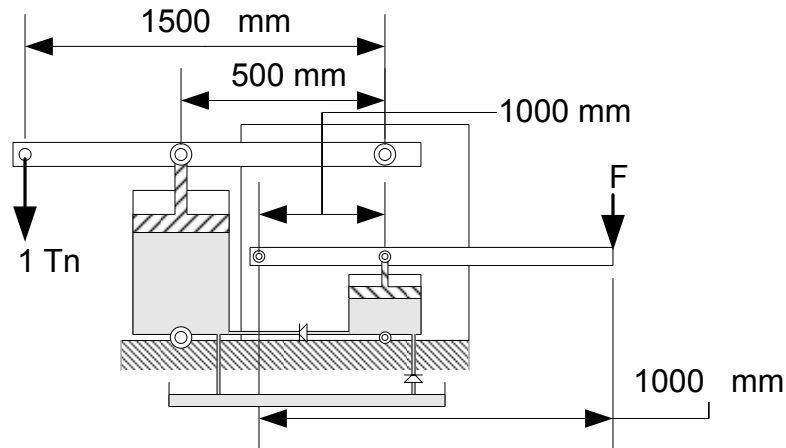


Fig. 3.5

Solución 3.5: $F=18.82$ (N)

3.6 La compuerta de la figura tiene la forma de un cuarto de circunferencia y mide 3 metros de anchura. Calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática sobre la misma, indicar donde se encontraría el punto de aplicación y el momento que crean en el punto 0.

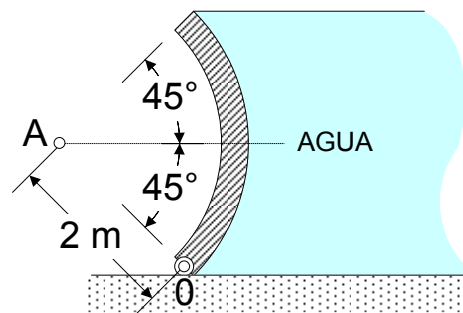


Fig. 3.6

Solución 3.6: $F_H = 2 \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot L$ hacia la izquierda y aplicada a $4R \cdot \text{sen} \theta / 3$ de la superficie libre $\sim F_V = \gamma \cdot R^2 \cdot (\theta - \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta) \cdot L$ hacia arriba y aplicada a una distancia $2 \cdot R \cdot \text{sen}^3 \theta / [3 \cdot (\theta - \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta)]$ de A medida en sentido vertical y hacia la derecha $\sim F_H = 117.6$ (kN) $\sim F_V = 33.6$ (kN) $\sim M_0 = 118.8$ (kN).

3.7 El recipiente tronco cónico cuyas dimensiones se indican en la figura, tiene un orificio de 22 cm en su base y está colocado en un soporte plano y horizontal con el que su fondo ajusta perfectamente. El recipiente pesa 1.5 kg. Determinar la máxima altura hasta la que puede llenarse de agua sin que esta se escape por el fondo.

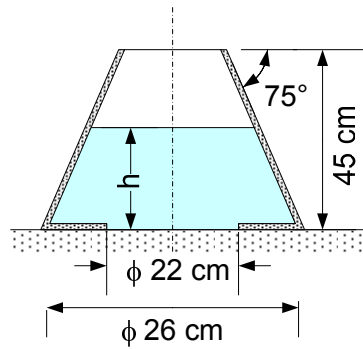


Fig. 3.7

Solución 3.7: $h=23.4$ (cm)

3.8 La compuerta de la figura tiene un radio de 1 m y una longitud de 3 m perpendicular al dibujo. Calcular el momento sobre la compuerta en las dos posiciones de la figura.

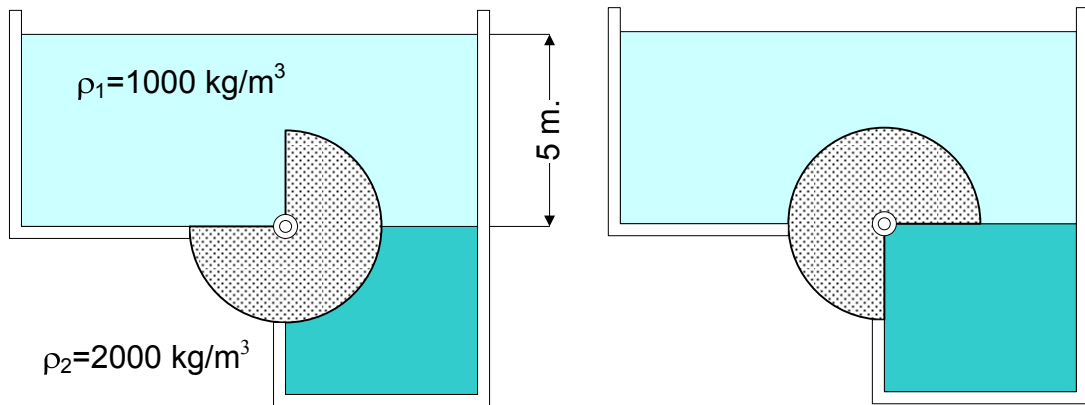


Fig. 3.8

Solución 3.8: $M=9800$ (N·m) (antihorario) ~ $M=19600$ (N·m) (horario)

3.9 El cilindro de la figura tiene anchura de 1 m. El líquido que se encuentra a su izquierda es agua. Calcular las fuerzas hidrostáticas que se ejercen sobre el cilindro y el momento creado en el centro del mismo por dichas fuerzas.

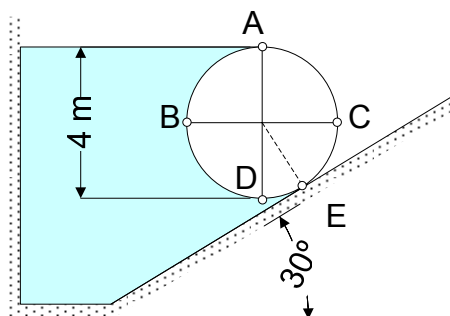


Fig. 3.9

Solución 3.9: $F_H=68248.2$ (N) hacia la derecha $\sim F_V=99924.8$ (N) hacia arriba \sim El momento de las fuerzas hidrostáticas en el centro del cilindro es cero.

3.10 Hallar las componentes vertical y horizontal, valor y punto de aplicación, sobre la compuerta de la figura cuyo perfil responde a la ecuación de una parábola y una longitud perpendicular al papel de dos metros. El líquido que retiene la compuerta tiene un peso específico de 9000 N/m^3 .

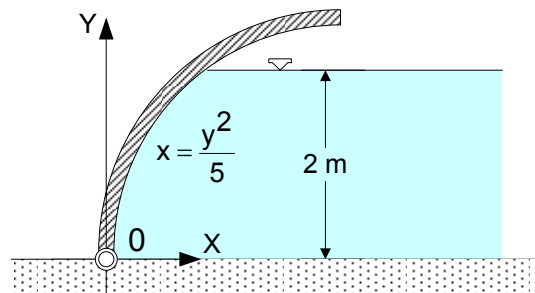


Fig. 3.10

Solución 3.10: $F_V=9600$ (N) hacia arriba $\sim F_H=36000$ (N) hacia la izquierda $\sim x_V=0.24$ (m) $\sim y_H=2/3$ (m)

3.11 En la compuerta de la figura que posee una anchura perpendicular al papel de 1 m. Calcular la resultante y línea de aplicación de las fuerzas horizontales y verticales y el momento que crean en el punto 0.

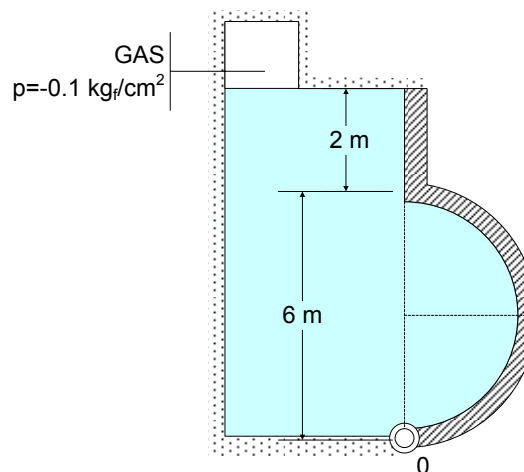


Fig. 3.11

Solución 3.11: $F_H=235200$ (N) hacia la derecha y aplicada a una distancia de 2.22 (m) de 0 $\sim F_V=138544.27$ (N) hacia abajo y aplicada a una distancia de 1.273 (m) a la derecha de 0 $\sim M_0=899066.7$ (N·m)

3.12 Una placa de peso W y de dimensiones L y b (ancho) sirve de pantalla para retener un depósito de agua, para lo que esta articulada en A . Si el agua va subiendo de nivel desde cero hasta A . Hallar suponiendo que el aire de detrás de la

pantalla puede escaparse, encontrar la posición de equilibrio de la pantalla, definida por el ángulo θ . Resuélvase el problema suponiendo que el aire de detrás de la pantalla no puede escapar (Tras tapar el orificio de salida) y que es comprimido adiabáticamente, encontrar la posición de equilibrio. Considerar que cuando el nivel del agua era cero el aire encerrado estaba a la presión y temperatura atmosféricas.

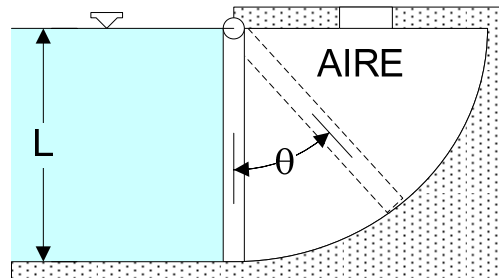


Fig. 3.12

Solución 3.12:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 \cdot b \cdot L^2 \cdot \gamma_{H_2O}}{3 \cdot W} \Rightarrow \theta = 62^\circ \sim$$

$$\frac{\gamma_{H_2O} \cdot \cos \theta}{3} - W \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{2 \cdot b \cdot L^2} - \frac{P_{atm}}{2L} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{\pi - 2\theta} \right)^k - 1 \right] = 0 \Rightarrow \theta = 3.3^\circ$$

3.13 Una placa de peso W y de dimensiones L y b (ancho) sirve de pantalla para retener un depósito de agua, para lo que esta articulada en A . Si el agua va subiendo de nivel desde cero hasta A , Hallar la presión del aire en la posición vertical de equilibrio de la placa cuando el nivel del agua coincida con A (La fuerza sobre el tope es nula). Si después se va aumentando la presión del aire hasta un valor un 20% superior a la anterior, calcular el ángulo θ del nuevo equilibrio de la placa.

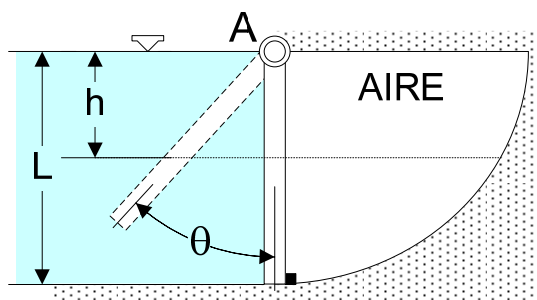


Fig. 3.13

Solución 3.13:
$$p_{aire} = \frac{2 \cdot \gamma_{H_2O} \cdot L}{3} = 7840 \text{ (Pa)} \sim W \cdot L \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos^2 \theta - \frac{\gamma_{H_2O} \cdot b \cdot h^3}{3} = 0$$

siendo h la nueva presión del aire expresada en metros de columna de agua

3.14 El cilindro de la figura de 1.8 m de diámetro pesa 2450 daN y tiene una longitud de 1.5 m., normal al dibujo. Determinar las reacciones en A y B en kg_f despreciando rozamientos.

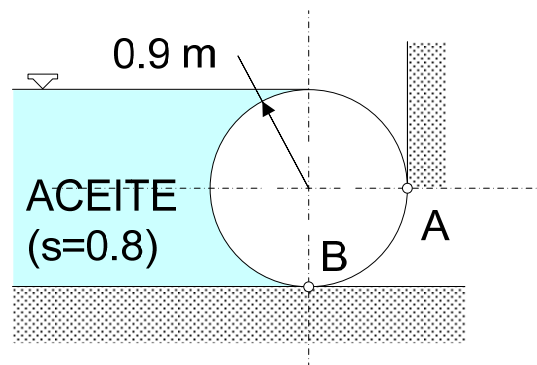


Fig. 3.14

Solución 3.14: $R_A=1944 \text{ (kg}_f)$ ~ $R_B=973.19 \text{ (kg}_f)$

3.15 Calcular la fuerza F en kg_f necesaria para mantener la compuerta de la figura en posición cerrada si R es 40 cm. La anchura de la compuerta normal al dibujo es 1.2 m.

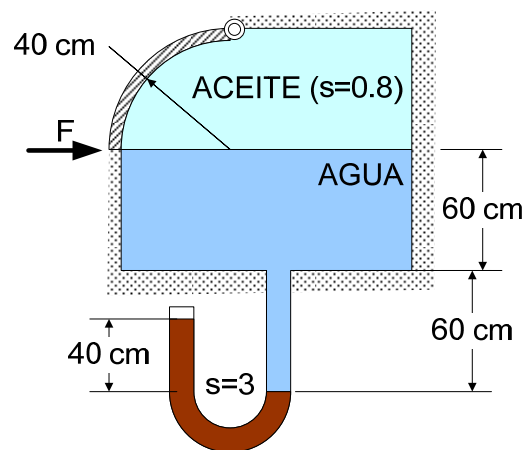


Fig. 3.15

Solución 3.15: $F=-76.8 \text{ (kg}_f)$

3.16 La compuerta de la figura esta sujeta de forma que solo puede deslizar en sentido vertical. Calcular la profundidad del agua h para la cual estará en equilibrio. Considerar el problema bidimensional.

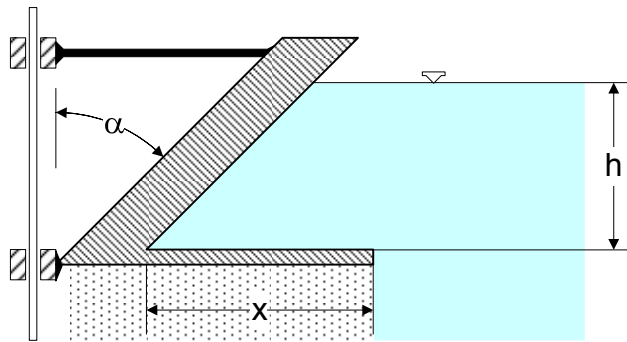


Fig. 3.16

Solución 3.16: $h = 2x / \operatorname{tg} \alpha$

3.17 Se diseña una presa de gravedad de tal manera que el momento de las fuerzas de agua que tienden a derribar la presa alrededor del extremo B se resiste básicamente por el momento del peso de la presa. La presa es de hormigón de 190 pies de alto y 500 pies de longitud. Mantienen un nivel de aguas arriba de 180 pies. Encuentre las magnitudes y localizaciones de las líneas de acción de las fuerzas vertical y horizontal que actúan sobre el lado de entrada de la presa.

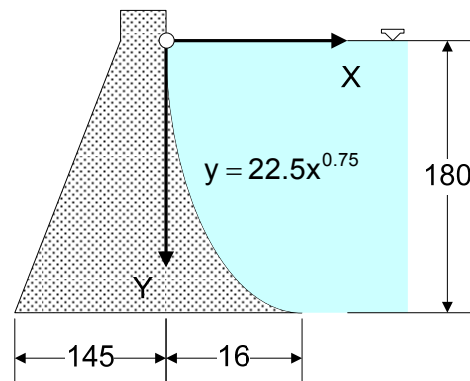


Fig. 3.17

Solución 3.17: $F_x = -5.05 \cdot 10^8$ (lb) $\sim F_y = 5.13 \cdot 10^7$ (lb) $\sim y_x = 120$ (ft) $\sim x_y = 10.18$ (ft)



Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

INSTALACIONES HIDRÁULICAS

tecnun

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA. NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA
Paseo de Manuel Lardizábal 13. 20018 Donostia-San Sebastián. Tel.: 943 219 877 Fax: 943 311 442
© Alejandro Rivas Nieto (arivas@tecnun.es)

4 INSTALACIONES HIDRÁULICAS

4.1 Dos placas planas de longitud L y ancho W están separadas una distancia $2b$ ($W \gg 2b$). En la dirección longitudinal hay una diferencia de altura piezométrica que causa el flujo de un fluido incompresible. Suponiendo un flujo completamente desarrollado hallar el campo de velocidades, el caudal, el arrastre total sobre las dos superficies y el factor de fricción de Darcy.

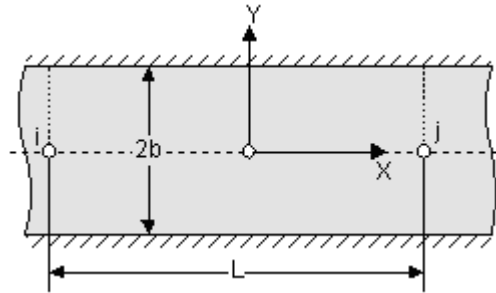


Fig. 4.1

Solución 4.1:
$$u(y) = \frac{b^2 \cdot \gamma}{2\mu} \cdot \frac{(H_i - H_j)}{L} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \sim q = \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3 \cdot W \cdot \gamma}{\mu} \cdot \frac{(H_i - H_j)}{L} \sim \frac{U_0}{v} = 3/2$$

Siendo U_0 la velocidad para $y=0$ y v la velocidad media~

$$F_w = 2 \cdot \frac{b \cdot W \cdot \gamma}{\mu} \cdot (H_i - H_j) \sim f = 96 / Re_H$$

4.2 Sea el flujo estacionario, incompresible, laminar y completamente desarrollado de un fluido a través de un conducto recto de sección circular. Para este flujo calcular el perfil de velocidades, la velocidad máxima, la relación entre la diferencia de alturas piezométricas y el caudal y deducir una expresión del factor de fricción de Darcy.

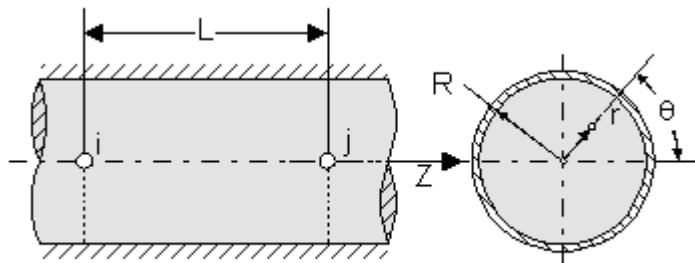


Fig. 4.2

Solución 4.2:

$$w(r) = \frac{\gamma \cdot R^2}{4\mu} \cdot \frac{(H_i - H_j)}{L} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \sim q = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot R^4}{8\mu} \cdot \frac{(H_i - H_j)}{L} \sim \frac{U_0}{v} = 2 \sim f = 64/Re$$

4.3 Para enfriar una barra cilíndrica de acero de diámetro $a=0.8$ m y longitud 5 m, se hace circular aire a la velocidad de 10 m/s y en dirección axial ($v_{\text{aire}}=2.3 \cdot 10^{-5}$ m²/s y $\rho_{\text{aire}}=1.21$ kg/m³) por el espacio comprendido entre la barra y las paredes del horno donde ésta se halla. Calcular la pérdida de carga que sufre el aire al circular por el horno. Se supondrán las superficies de la barra y el horno de una rugosidad de 0.004 mm.

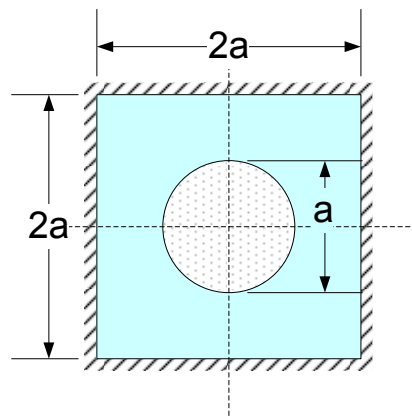


Fig. 4.3

Solución 4.3: 0.3780 (m.c. aire)

4.4 Por un conducto de hierro forjado ($\varepsilon=0.6$ mm) de sección circular de 0.2 m de diámetro fluye un fluido de viscosidad cinemática $1.8 \cdot 10^{-5}$ m²/s. Si las pérdidas por unidad de longitud del conducto son de 0.01 m.c.f/m. Se pide hallar el caudal que circula por el conducto. Tal y como muestra la figura, en el interior del conducto del apartado anterior se introduce una viga de sección cuadrada de lado 0.05 m y del mismo material que el de la tubería. Si el caudal que circula por el nuevo conducto es de 23 l/s calcular las pérdidas de carga que sufre el fluido por unidad de longitud del conducto. Hallar el valor que debería tener el lado de la viga para que la velocidad media del conducto sea 0.8 m/s y la pérdida por unidad de longitud de 0.1 m.c.f.

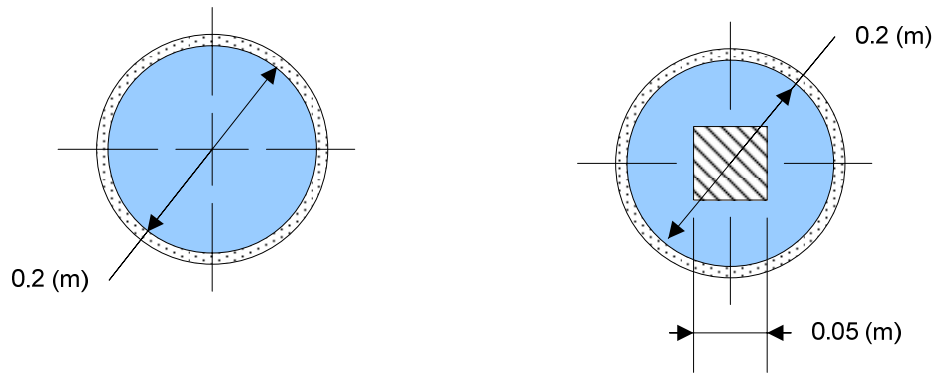


Fig. 4.4

Solución 4.4: $q=33.44$ (l/s) $\sim s_f=9.5$ (mm.c.f/m) ~ 0.05384 (m)

4.5 Se pide dimensionar, obteniendo el valor de x , la sección cuadrada del conducto de la figura por el que va a circular un caudal de 0.48 m³/s de un fluido que posee una viscosidad de 10^{-6} m²/s para que las pérdidas por unidad de longitud de conducto sean de 9 mm.c.f./m. Considérese la rugosidad del material igual a 0.01 mm.

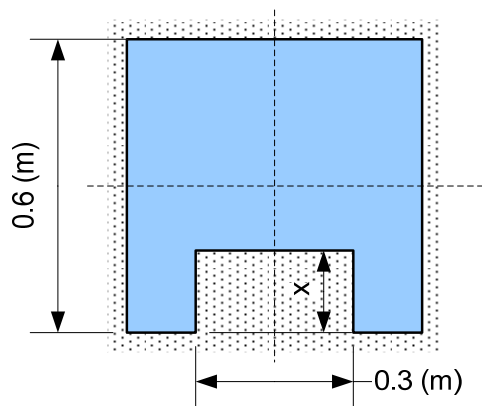


Fig. 4.5

Solución 4.5: $x=0.4$ (m)

4.6 Por el conducto recto y de sección cuadrada de lado a de la figura circula un caudal de 23 l/s de agua ($\nu_{\text{agua}}=10^{-6}$ m²/s). La tubería tiene una rugosidad de 0.6 mm y estando el flujo completamente desarrollado. Se pide calcular la dimensión a de la sección si la pérdida de carga por unidad de longitud del conducto es de 0.2 m.c.a/m.

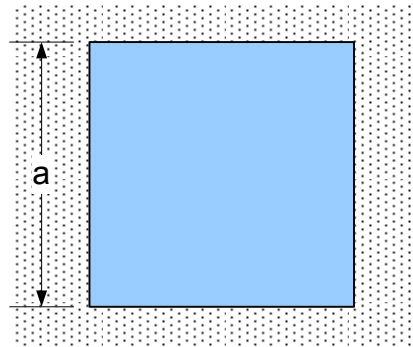


Fig. 4.6

Solución 4.6: $a=0.08564$ (m)

4.7 La rama principal de un sistema de riego agrícola consiste en una tubería horizontal de 150 m de longitud y de rugosidad $\varepsilon=0.1$ mm. La instalación se alimenta con una bomba que proporciona 100 l/s a una presión de 450 kPa. ¿Cuál debe ser el diámetro para que la presión al final de la rama principal no sea inferior a 200 kPa. ($\nu=1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

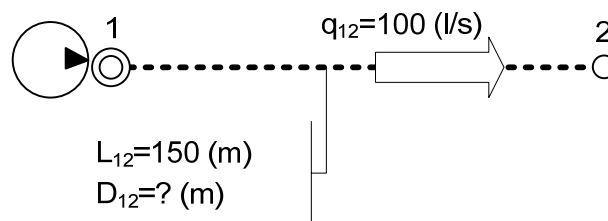


Fig. 4.7

Solución 4.7: $D_{12} \geq 0.155$ (m)

4.8 En la instalación de la figura, calcular el punto de funcionamiento de la bomba y la potencia que proporciona al fluido. Debido a la salida y entrada en los depósitos así como distintos accesorios de la instalación se producen unas pérdidas singulares cuyo coeficiente adimensional referido a la altura de energía cinética en la tubería es $K=3.6$. $\nu=1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

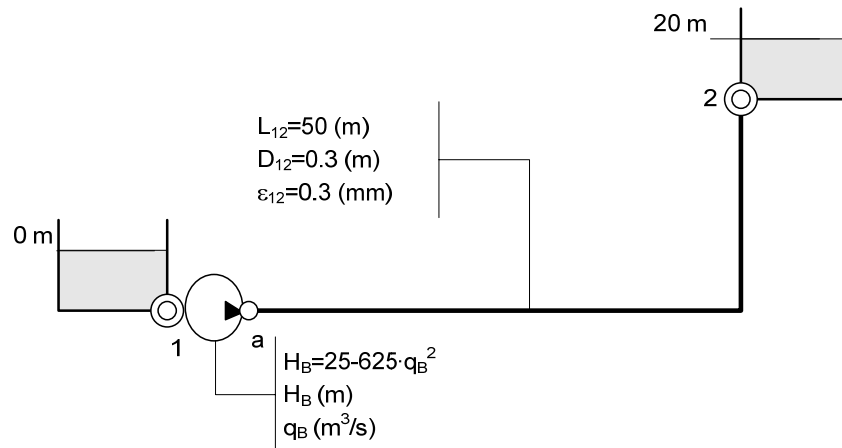


Fig. 4.8

Solución 4.8: $q_{12}=84.71 \text{ (l/s)} \sim H_B=20.52 \text{ (mca)} \sim \dot{W}_B = 17.03 \text{ (kw)}$

4.9 Dado el sistema representado en la figura, determinar el punto de funcionamiento de la bomba. $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. $\varepsilon=0.3 \text{ mm}$.

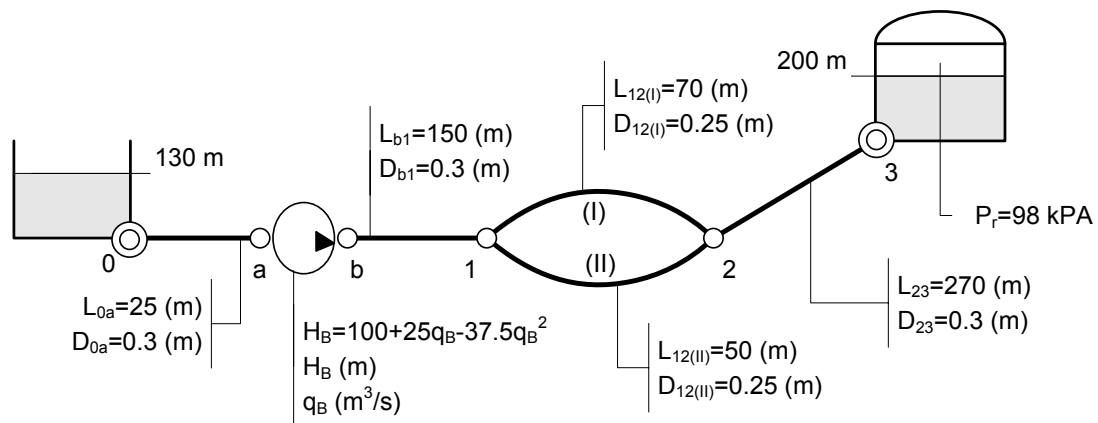


Fig. 4.9

Solución 4.9: $q_{01}=q_{23}=270.8 \text{ (l/s)} \sim q_{12(I)}=123.9 \text{ (l/s)} \sim q_{12(II)}=146.9 \text{ (l/s)} \sim H_B=104.02 \text{ (mca)} \sim \dot{W}_B = 276.1 \text{ (kw)}$

4.10 En la instalación de la figura se desprecian las pérdidas singulares salvo las producidas en las válvulas V_1 y V_2 cuyo coeficiente de pérdidas depende del grado de apertura siendo nulo cuando la válvula está completamente abierta. ¿Qué coeficientes de pérdidas deben tener las válvulas V_1 y V_2 para que $q_{23}=q_{24}=0.4 \text{ m}^3/\text{s}$? ¿Cuál será el punto de funcionamiento de la bomba? ¿Cuál será el máximo caudal posible q_{23} y con que posición de las válvulas se producirá? Ídem q_{24} . $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$. $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

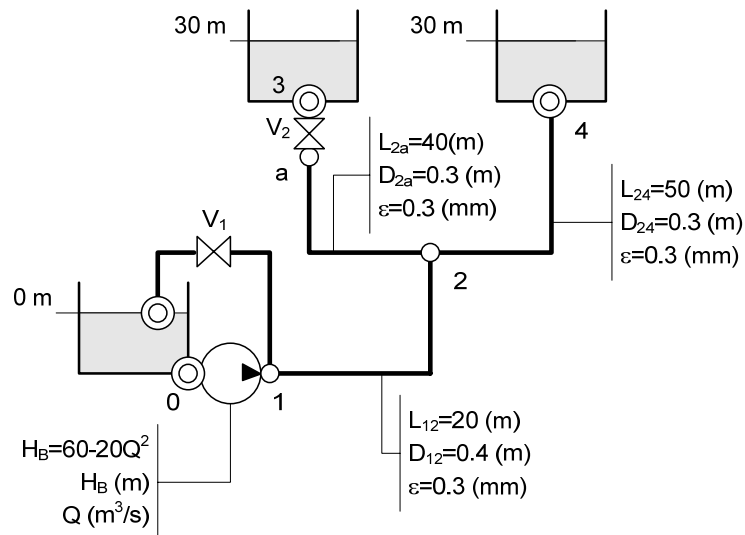


Fig. 4.10

Solución 4.10: $K_{V1}=494.14 \text{ (m}^3/\text{h}/(\text{kg}_f/\text{cm}^2)^{1/2}) \sim K_{V2}=4381.78 \text{ (m}^3/\text{h}/(\text{kg}_f/\text{cm}^2)^{1/2}) \sim q_{12}=991.5 \text{ (l/s)} \sim$ con la válvula V_1 cerrada completamente y V_2 abierta $q_{12}=991.5 \text{ (l/s)}$, $q_{23}=523.5 \text{ (l/s)}$, $q_{24}=468 \text{ (l/s)} \sim$ Cerramos completamente V_1 y V_2 $q_{24}=727.64 \text{ (l/s)}$

4.11 En la instalación de la figura, entre los nodos a y 4 existe una tobera con una boca de 5 cm de diámetro que suelta un chorro de agua a la atmósfera que, desde la cota de 10 m, alcanza una cota de 30 m. Determinar los caudales que pasan por cada tubería así como la altura en el nudo 1, la altura que proporciona la bomba y el diámetro de la línea 1-3. Dibujar la línea piezométrica. Potencia consumida por la bomba: $N_B=33.1 \text{ kW}$; rendimiento $\eta_B=75\%$. La rugosidad del material de todas las tuberías es $\varepsilon=0.06 \text{ mm}$ y $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

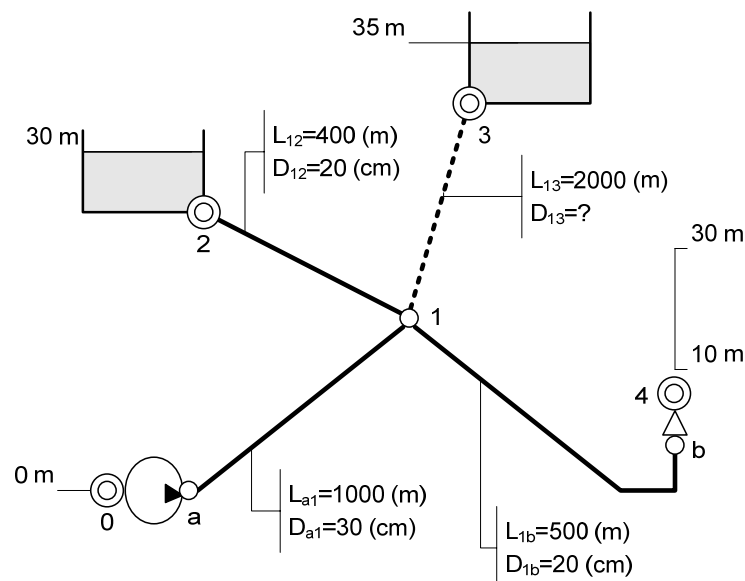


Fig. 4.11

Solución 4.11: $q_{14}=38.87$ (l/s) $\sim q_{01}=70.1$ (l/s) $\sim q_{13}=-12.49$ (l/s) $\sim q_{12}=43.72$ (l/s) $\sim H_1=33.4$ (mca) $\sim H_B=36.13$ (mca) $\sim D_{13}=0.2$ (m)

4.12 En la instalación de bombeo de la figura con la válvula 1-b cerrada, ¿qué diámetro deberá tener el conducto 1-2 para que el caudal circulante sea $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$? Con la válvula abierta y suponiendo que las pérdidas en la misma son nulas, ¿qué diámetro deberá tener el tramo b-3 para que los caudales circulantes por los tramos 1-3 y 1-2 sean iguales?. Calcular en el segundo caso el punto de funcionamiento de la bomba y dibujar la línea piezométrica. Datos: $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

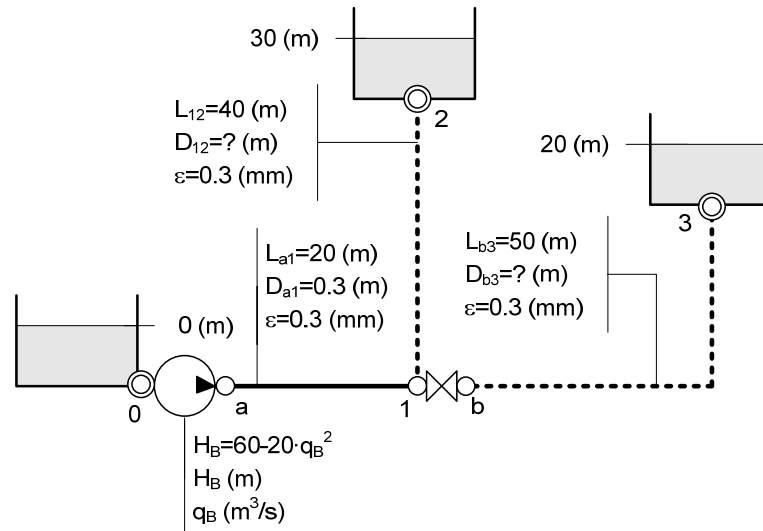


Fig. 4.12

Solución 4.12: $D_{12}=0.24$ (m) $\sim D_{13}=0.251$ (m) $\sim q_{01}=737.64$ (l/s) $\sim q_{12}=q_{13}=368.8$ (l/s) $\sim H_B=49.11$ (mca)

4.13 Un depósito A, abierto a la atmósfera, contiene gasolina a nivel constante, de cota 60 m. Los nodos a y 2 están a cota cero. La tubería 1-a tiene una longitud de 1200 m y un diámetro 350 mm. El depósito B contiene gasolina a cota constante de 20 m, está cerrado y con presión manométrica interior de 200 kPa. Las tuberías 2-3(I) y 2-3(II) están en paralelo y conectan el nodo 2 con el depósito B. La densidad relativa de la gasolina es 0.68. Viscosidad cinemática de la gasolina es $4.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Las tuberías son de acero comercial de rugosidad 0.006 cm. Calcular la potencia de la bomba que hay que poner en la línea 1-2 para transportar 150 l/s de gasolina de A a B. No se tendrán en cuenta las pérdidas menores.

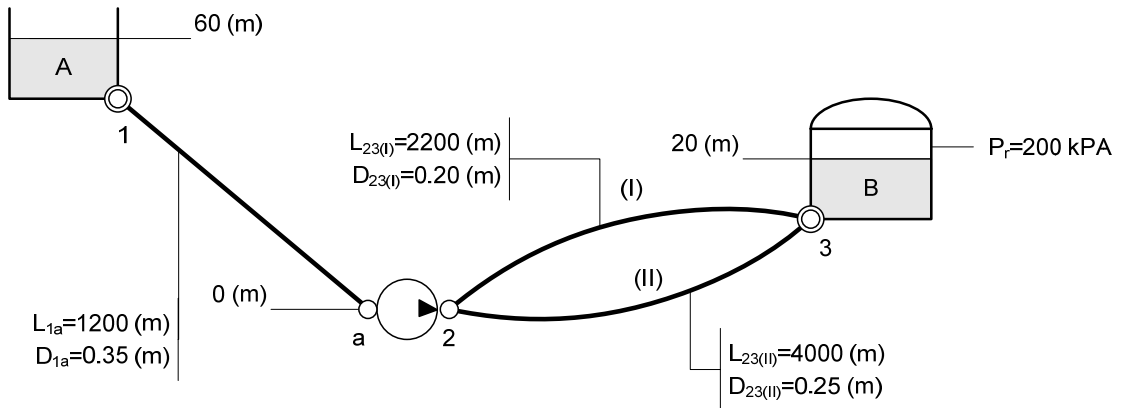


Fig. 4.13

Solución 4.13: $q_{23(I)}=64.63 \text{ (l/s)} \sim q_{23(II)}=85.37 \text{ (l/s)} \sim H_B=33.48 \text{ (mca)} \sim \dot{W}_B = 33.47 \text{ (kw)}$

4.14 En la instalación de la figura se trata de llevar agua por medio de una bomba del depósito A a los depósitos B y C. El caudal que debe circular por la bomba es de 100 l/s y a cada depósito tienen que llegar 50 l/s. Se pide calcular los coeficientes de las pérdidas de las válvulas V_1 y V_2 para que los caudales previstos circulen por las tuberías. La rugosidad de todas las tuberías es $\varepsilon=0.06 \text{ mm}$.

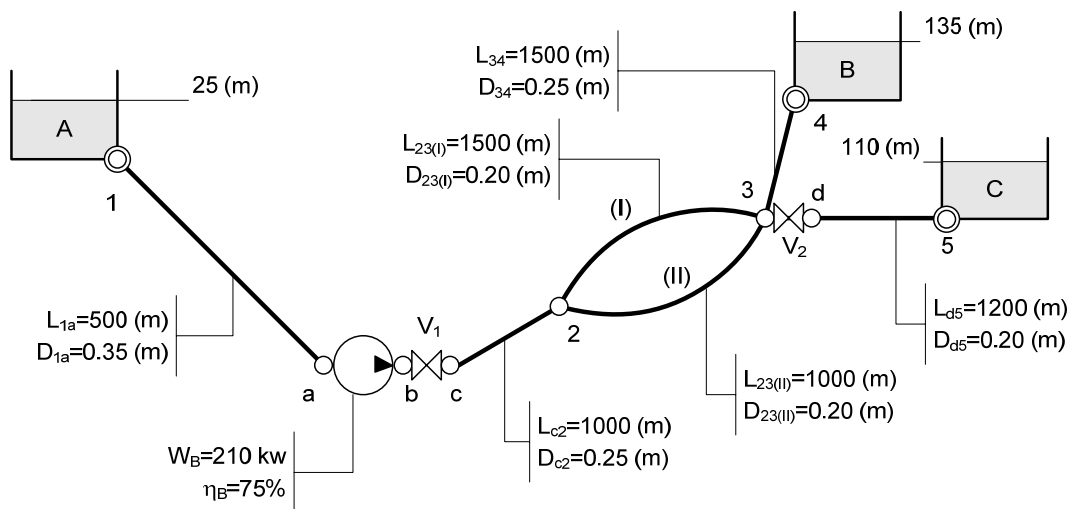


Fig. 4.14

Solución 4.14: $K_{V1}=272.49 \text{ (m}^3\text{/h/(kgf/cm}^2\text{)}^{1/2}) \sim K_{V2}=137.1 \text{ (m}^3\text{/h/(kgf/cm}^2\text{)}^{1/2})$

4.15 En la instalación representada en la figura se bombea agua entre los depósitos A y B que mantienen sus niveles constantes. El depósito B está cerrado midiéndose en el mismo una presión manométrica de 5 atmósferas. Calcular el caudal que llega a B. Si en el nodo 4 situado en la mitad de la línea 1-2 se produce una rotura de la conducción calcular los caudales circulantes. Las tuberías son de acero comercial.

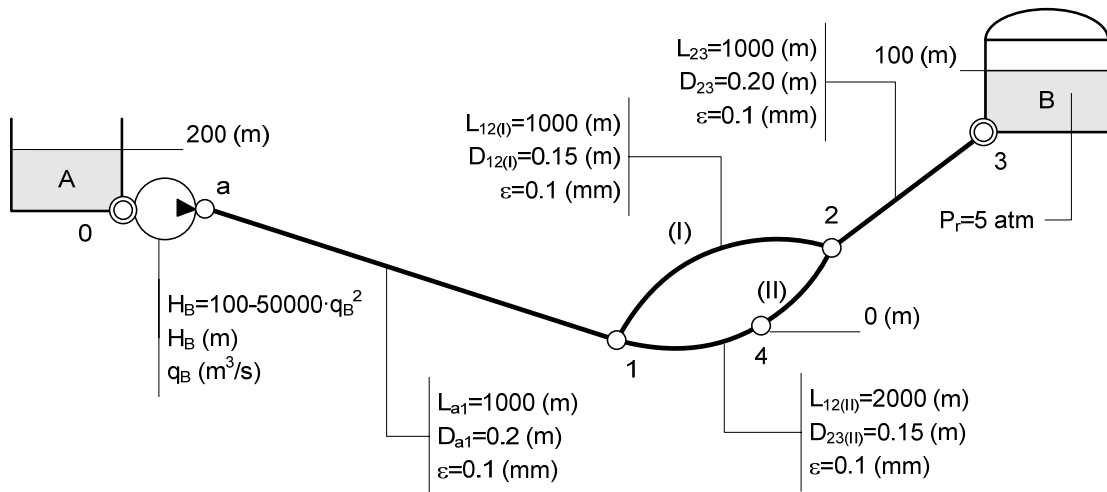
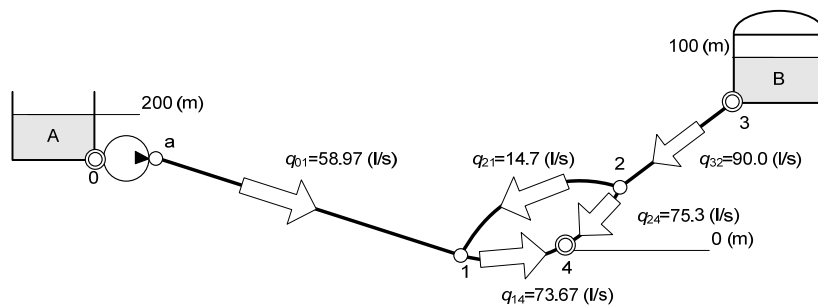


Fig. 4.15

Solución 4.15: $q_{01} = q_{23} = 47.1 \text{ (l/s)} \sim q_{12(I)} = 27.75 \text{ (l/s)} \sim q_{12(II)} = 19.35 \text{ (l/s)} \sim$



4.16 Las bocas de incendio a instalar en una nave industrial exigen que llegue a ellas un caudal de 3.3 l/s con 45 kPa de presión cuando funcionan las dos bocas hidráulicamente más desfavorables. A la vista de lo anterior se pide: Calcular el diámetro de la tubería metálica (hierro galvanizado) a instalar, teniendo como base el esquema de la figura. Una vez elegido el diámetro, calcúlese el caudal que saldrá por las bocas 3-7 y 4-8 cuando éstas y sólo éstas funcionan al mismo tiempo. ¿Qué ocurriría si funciona únicamente la boca 3-7?. ¿Qué caudal saldrá y con que presión?. Considérese que las únicas pérdidas de carga se producen en las tuberías y que está garantizado que $P_0 = 50 \text{ kPa}$.

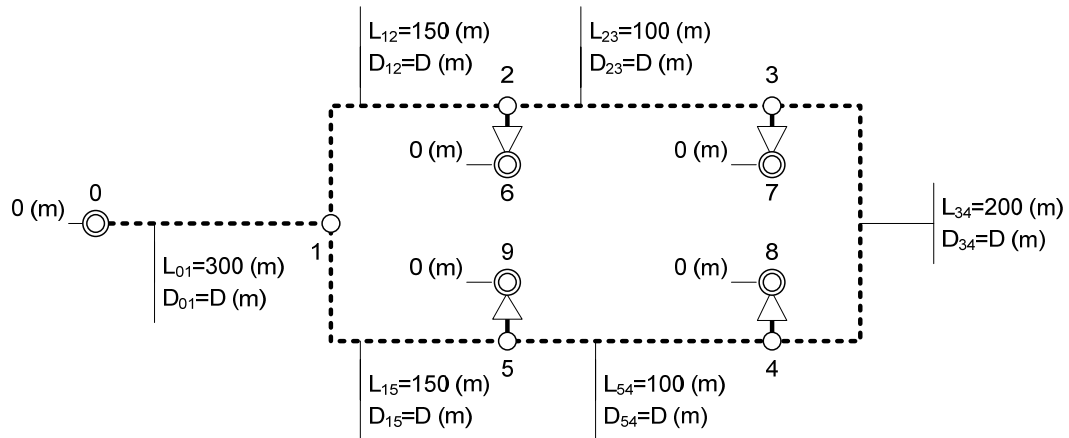


Fig. 4.16

Solución 4.16: $D=0.15$ (m) $\sim A_s=3.48$ (cm²) $\sim q_{23}=1.99$ (l/s) $\sim q_{43}=1.44$ (l/s)

4.17 En la instalación de la figura hay dos depósitos conectados al nodo 1 y una boquilla en a-3 que descarga a la atmósfera. Hallar la distribución de caudales y altura piezométrica en 1. Todas las tuberías son de hierro galvanizado $\epsilon=0.1$ (mm). El coeficiente de pérdidas en la boquilla referido a la energía cinética en la salida es $K_B=20$.

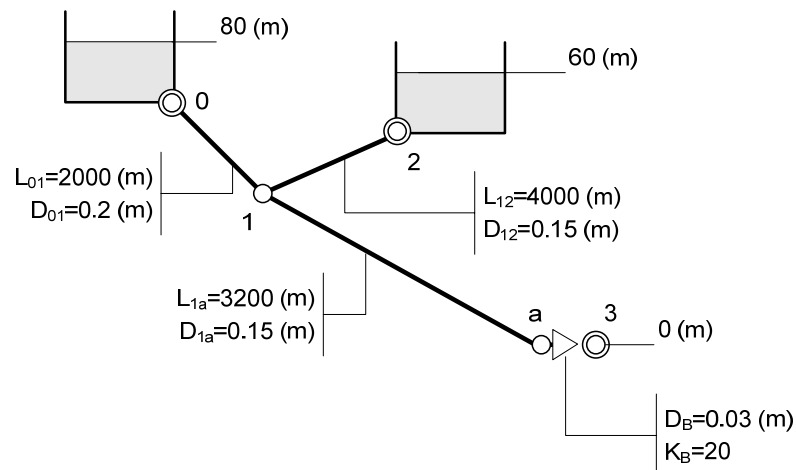


Fig. 4.17

Solución 4.17: $q_{01}=19.22$ (l/s) $\sim q_{12}=13.37$ (l/s) $\sim q_{13}=5.85$ (l/s) $\sim H_1=76.2$ (mca)

4.18 Se dispone de la instalación de la figura para transportar un caudal de 100 l/s de petróleo ($s=0.86$, $\nu=5.10^{-6}$ m²/s) desde 0 hasta 3. Las tuberías 1-b, b-2 y 1-2 son de 250 mm de diámetro. La rugosidad de todas las tuberías es $\epsilon=0.25$ mm. Se pide calcular los caudales circulantes por las líneas 1-b-2 y 1-2. El diámetro de las tuberías a-1 y 2-3 si se disponen de tuberías comerciales de 250, 300 y 350 mm de diámetro y la velocidad ha de estar comprendida entre 0.7 y 1.2 m/s. Altura piezométrica que ha de engendrar la bomba para que circule el caudal de 100 l/s y que ningún punto de la instalación tenga presión menor que la atmosférica. Se supondrá que la presión en 3 es la suficiente para que solo circulen los 100 l/s.

Presión en 3 en mcl. Potencia bruta consumida por la bomba siendo $\eta_B=0.65$. ¿Qué pérdida de carga debería producirse en una válvula que dispusiéramos en la tubería b-2 para que circulara el mismo caudal de 50 l/s por 1-b-2 y 1-2?. ¿Podría ponerse esta válvula en 1-2?.

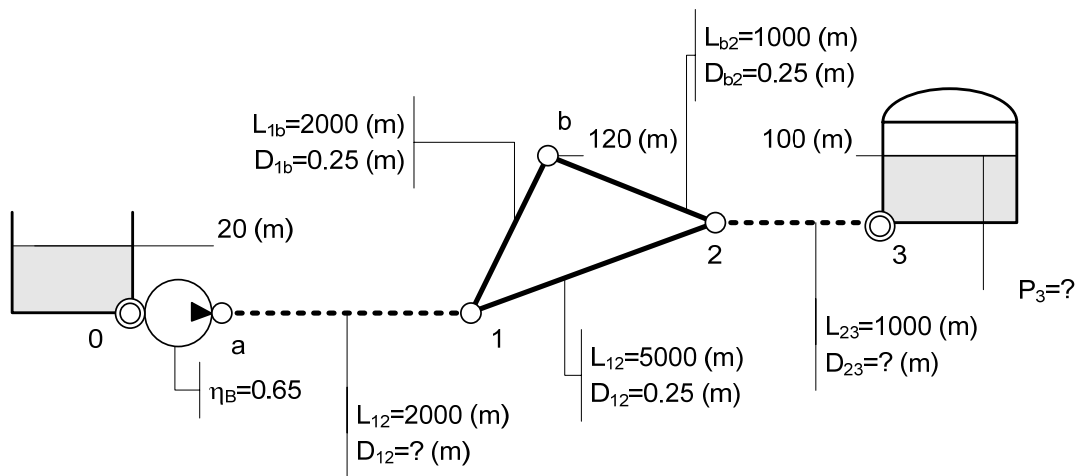


Fig. 4.18

Solución 4.18:

$$q_{12(I)}=56.8 \text{ (l/s)} \sim q_{12(II)}=43.2 \text{ (l/s)} \sim D_{a1}=D_{23}=0.35 \text{ (m)} \sim H_B=119.4 \text{ (mca)} \sim p_3/\gamma=10.04 \text{ (mca)} \sim W_B=119.94 \text{ (kw)}$$

4.19 Se tiene el sistema de la figura en el que se desea conocer los caudales circulantes y las pérdidas de carga en cada tramo, sabiendo que la potencia de la bomba es de 150 Kw y el rendimiento del 67%. La rugosidad de las tuberías 0.3 mm.

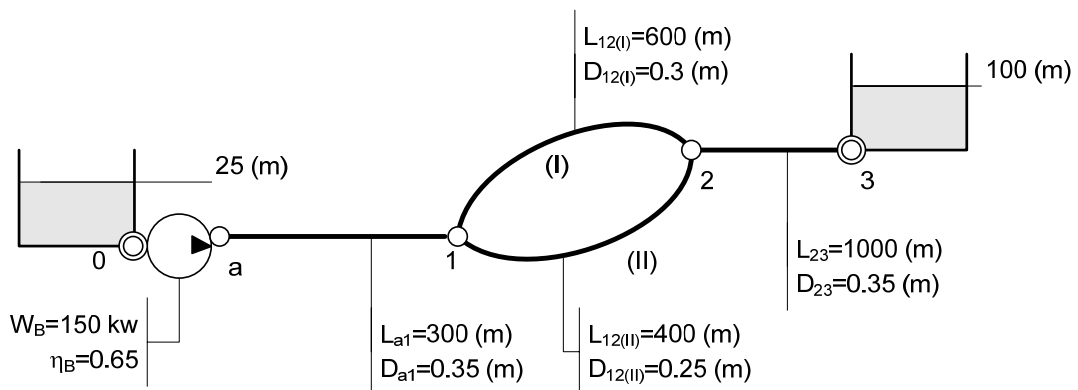


Fig. 4.19

Solución 4.19: $q_{01}=q_{23}=123.77 \text{ (l/s)} \sim q_{12(I)}=53.81 \text{ (l/s)} \sim q_{12(II)}=69.96 \text{ (l/s)} \sim H_B=82.86 \text{ (mca)}$

4.20 En la figura se muestra el esquema de una instalación de distribución de agua. En ésta mediante un depósito abierto a la atmósfera y cuya lámina de agua se mantiene a una cota constante de 80 m, se conduce agua a dos puntos, uno situado en la cota 0 m (3) y otro en la cota 10 m (4). Las líneas 1-2 y 2-3 se encuentran ya

dimensionadas y sus diámetros son conocidos (ver figura). El punto 3 se encuentra a una presión manométrica de 25 m.c.a. La línea 2-4 no se ha diseñado aún pero se desea que por ella circule un caudal de 120 l/s. Se pide calcular los caudales que circulan por las tuberías 1-2 y 2-3. Calcular el diámetro comercial del tramo 2-4 asegurando que en el punto 4 habrá como mínimo una presión de 25 m.c.a. Los diámetros comerciales de que se dispone son: 200 (mm), 300 (mm), 400 (mm), 500 (mm) y 600 (mm). Todas las tuberías son de acero de una rugosidad superficial de 0.00006 m. La densidad del agua es 0.001 kg/m³. Se despreciarán los términos correspondientes a energía cinética y pérdidas singulares.

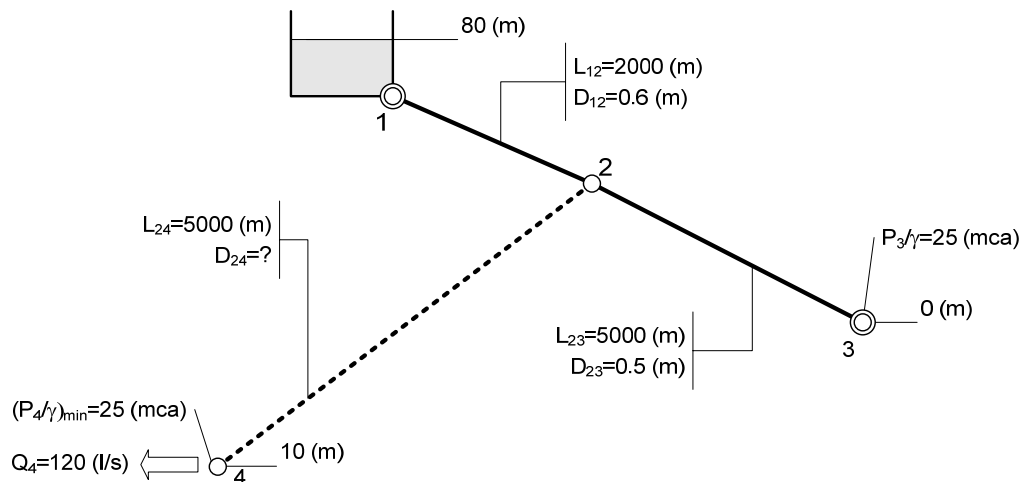


Fig. 4.20

Solución 4.20: $q_{12}=616.74$ (l/s) $\sim D_{24}=0.303$ (m)

4.21 La instalación de bombeo de la figura se construyó para proporcionar agua a una presión de 25 mca a un polígono industrial (Polígono 1) situado en una cota de 20 m. Actualmente se está diseñando un nuevo polígono industrial (Polígono 2) situado en una cota de 25 m al que hay que proporcionar agua también a 25 mca. Se pide calcular el caudal de agua que el bombeo proporcionaba al Polígono 1 antes de que se pensara construir el Polígono 2. En la situación del apartado anterior calcular la potencia consumida por la bomba y el coste económico del bombeo si la instalación funciona 12 horas al día durante todo el año. Dimensionar la conducción 1-3 que llega hasta el Polígono 2 para que el caudal que se consume en éste sea igual al que se consume en el Polígono 1, este último ha variado respecto del obtenido en el apartado 1. Calcular la potencia consumida por la bomba y el coste económico del bombeo cuando entran en funcionamiento los dos Polígonos. El número de horas de funcionamiento de la instalación de bombeo permanece constante. Calcular los caudales que llegan a ambos polígonos si el requerimiento de presión en el Polígono 2 pasa a 20 mca. Datos: viscosidad dinámica del agua $\mu=10^{-3}$ (kg/m³·s). El material de las tuberías tiene una rugosidad de 0.3 (mm). Precio del kw·h es de 9 centimos de euro. Los diámetros comerciales son: 100 (mm), 150 (mm), 200 (mm), 250 (mm), 300 (mm), 350 (mm), 400 (mm), 450 (mm), 500 (mm),

550 (mm) y 600 (mm). Se despreciarán los términos de energía cinética y las pérdidas singulares.

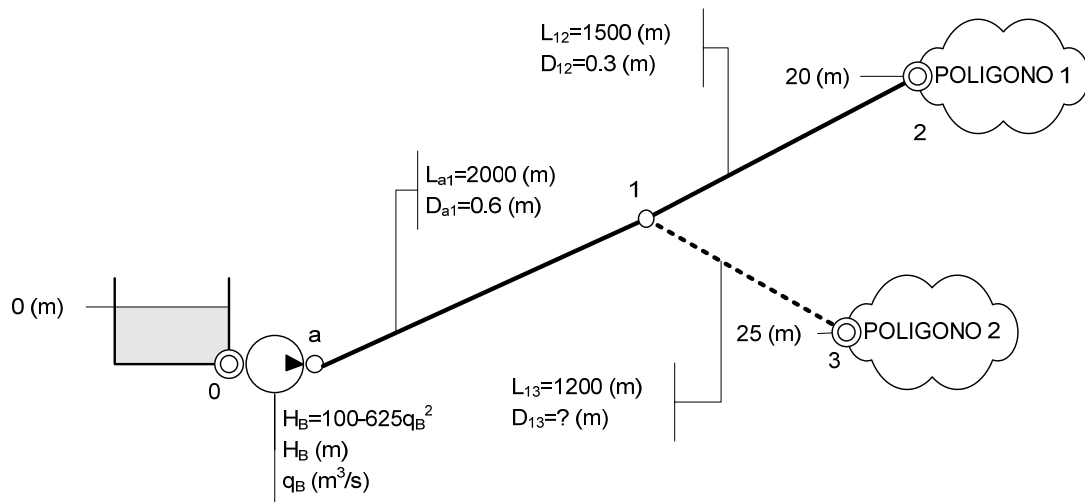


Fig. 4.21

Solución 4.21: $q_{02} = 180.3$ (l/s) $\sim H_B = 79.68$ (mca) $\sim \dot{W}_B = 140.8$ (kw) $\sim C = 55598.92$ (€) $\sim q_{01} = 244.21$ (l/s) $\sim q_{12} = q_{13} = 122.11$ (l/s) $\sim D_{23} = 0.31$ (m) $\sim H_B = 62.73$ (mca) $\sim \dot{W}_B = 150.12$ (kw) $\sim C = 59277.13$ (€) $\sim q_{01} = 250$ (l/s) $\sim q_{12} = 118$ (l/s) $\sim q_{13} = 132$ (l/s)

TABLA 1

ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS EN
COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Basic Equations in Rectangular, Cylindrical, and Spherical Coordinates

The Equation of Continuity

Rectangular Coordinates (x, y, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Cylindrical Coordinates (r, θ, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Spherical Coordinates (r, θ, φ) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v_\varphi) = 0$$

Components of the Rate-of-Strain Tensor $S_{ij} = \frac{1}{2} \partial_i v_j + \frac{1}{2} \partial_j v_i$

Rectangular Coordinates (x, y, z) :

$$S_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$S_{yx} = S_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]$$

$$S_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$S_{zy} = S_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]$$

$$S_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$S_{zx} = S_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$$

Cylindrical Coordinates (r, θ, z) :

$$S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$S_{\theta r} = S_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$S_{z\theta} = S_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]$$

$$S_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$S_{rz} = S_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

Spherical Coordinates (r, θ, φ) :

$$S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$S_{\theta r} = S_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$S_{\varphi\theta} = S_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}$$

$$S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]$$

Components of the Stress Tensor for Newtonian Fluids

Rectangular Coordinates (x, y, z)	Cylindrical Coordinates (r, θ, z)	Spherical Coordinates (r, θ, φ)
$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$
$\tau_{yy} = \mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$
$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$	$\tau_{\varphi\varphi} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$
$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$
$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$	$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right]$	$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = \mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right]$
$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$	$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$	$\tau_{\varphi r} = \tau_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]$
$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$

Momentum Equations in Terms of τ^a

Rectangular Coordinates (x, y, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Cylindrical Coordinates (r, θ, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Spherical Coordinates (r, θ, φ):

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) \right] + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\varphi r} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\varphi\theta} + \frac{(\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}) - \tau_{\varphi\theta} \cot \theta}{r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \cot \theta \right) = \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\varphi} \sin \theta) \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\varphi\varphi} + \frac{(\tau_{\varphi r} - \tau_{r\varphi}) + \tau_{\theta\varphi} \cot \theta}{r} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho g_\varphi$$

^aFor symmetric τ set $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Momentum Equations for a Newtonian Fluid with Constant Density (ρ) and Constant Viscosity (μ)

Rectangular Coordinates (x, y, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Cylindrical Coordinates (r, θ, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Spherical Coordinates (r, θ, φ):

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \\ &= \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) \\ &= \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) \\ &= \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho g_\varphi \end{aligned}$$

Differential Operations in Cylindrical and Spherical Coordinates

Differential Operations in Cylindrical and Spherical Coordinates

(Continued)

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_z = v_r \left(\frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right)$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{zr} = \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{z\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{rr} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{rr} - \frac{v_\theta}{r} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{r\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{r\theta} + \frac{v_\theta}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{rz} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{rz} - \frac{v_\theta}{r} \tau_{\theta z}$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta r} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta r} + \frac{v_\theta}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta\theta} + \frac{v_\theta}{r} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta z} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta z} + \frac{v_\theta}{r} \tau_{rz}$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zr} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{zr} - \frac{v_\theta}{r} \tau_{r\theta}$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{z\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{z\theta} + \frac{v_\theta}{r} \tau_{zr}$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zz} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{zz}$$

where the operator $(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

Differential Operations in Cylindrical Coordinates (r, θ, z)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$(\nabla^2 s) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

$$(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) = \tau_{rr} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \tau_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

$$+ \tau_{\theta r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \tau_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\theta z} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$$

$$+ \tau_{zr} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \tau_{z\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + \tau_{zz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \quad [\nabla \times \mathbf{v}]_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad [\nabla \times \mathbf{v}]_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \quad [\nabla \times \mathbf{v}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r}$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_r = v_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} \right)$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_\theta = v_r \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right)$$

Summary of Differential Operations in Spherical Coordinates (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \mathbf{v}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\
 (\nabla^2 s) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} \\
 (\tau : \nabla \mathbf{v}) &= \tau_{rr} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \tau_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{r\varphi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\
 &\quad + \tau_{\theta r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \tau_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \cot \theta \right) \\
 &\quad + \tau_{\varphi r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \tau_{\varphi\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right) + \tau_{\varphi\varphi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \right) \\
 (\nabla s)_r &= \frac{\partial s}{\partial r} \quad (\nabla \times \mathbf{v})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \\
 (\nabla s)_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (\nabla \times \mathbf{v})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \\
 (\nabla s)_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \quad (\nabla \times \mathbf{v})_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\
 (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} \\
 (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) - \tau_{\varphi\varphi} \cot \theta}{r} \\
 (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\varphi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{(\tau_{\varphi r} - \tau_{\varphi\theta}) + \tau_{\varphi\theta} \cot \theta}{r} \\
 (\nabla^2 \mathbf{v})_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} \\
 &\quad - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\
 (\nabla^2 \mathbf{v})_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\
 (\nabla^2 \mathbf{v})_\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w})_r &= v_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) + v_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - \frac{w_\varphi}{r} \right) \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w})_\theta &= v_r \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} \right) + v_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \varphi} - \frac{w_\varphi}{r} \cot \theta \right)
 \end{aligned}$$

Differential Operations in Cylindrical and Spherical Coordinates

(Continued)

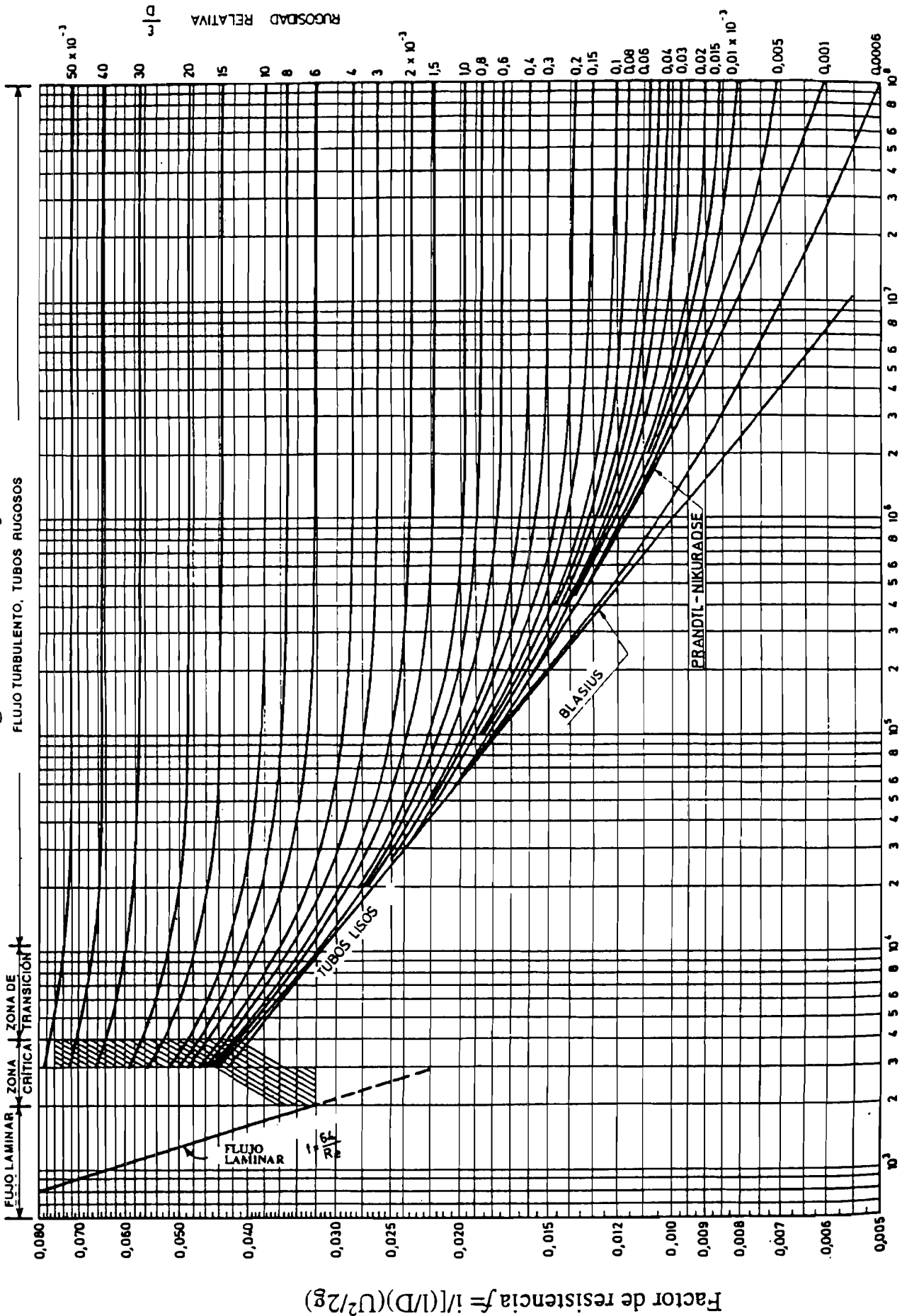
$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w})_\varphi &= v_r \left(\frac{\partial w_\varphi}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \theta} \right) + v_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_\theta}{r} \cot \theta \right) \\
 (\nabla \mathbf{v})_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{r\varphi} &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{\theta r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\
 (\nabla \mathbf{v})_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \cot \theta \\
 (\nabla \mathbf{v})_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{rr} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{rr} - \left(\frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) - \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{r\theta} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{r\theta} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) - \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{\varphi\theta} + \tau_{\theta\varphi} \cot \theta) \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{r\varphi} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{r\varphi} - \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\theta\varphi} + \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) [(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) + \tau_{\theta\theta} \cot \theta] \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{\theta r} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta r} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) - \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{\theta\varphi} + \tau_{\varphi\theta} \cot \theta) \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{\theta\theta} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta\theta} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) - \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{\theta\varphi} + \tau_{\varphi\theta} \cot \theta) \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{\theta\varphi} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta\varphi} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\varphi\theta} + \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) [\tau_{\theta r} - \tau_{\varphi\varphi}] (\tau_{\theta r} - \tau_{\varphi\varphi}) \cot \theta \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{\varphi r} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\varphi r} - \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\theta\varphi} + \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) + \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{\theta\varphi} + \tau_{\varphi\theta} \cot \theta) \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{\varphi\theta} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\varphi\theta} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\theta\varphi} + \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) [\tau_{r\theta} - \tau_{\varphi\varphi}] (\tau_{r\theta} - \tau_{\varphi\varphi}) \cot \theta \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau})_{\varphi\varphi} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\varphi\varphi} + \left(\frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) + \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) (\tau_{\theta\varphi} + \tau_{\varphi\theta} \cot \theta) \\
 \end{aligned}$$

where the operator $(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

TABLA 2

DIAGRAMA DE MOODY Y FÓRMULAS DEL FACTOR DE FRICCIÓN
DE DARCY

Diagrama de Moody



Factor de resistencia $f = i/(1/D)(U^2/2g)$

CALCULO RAPIDO DE TUBERIAS MEDIANTE EL EMPLEO DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS

Podemos expresar: $h_f = J_1 \cdot L \cdot Q^{1,852}$

Q = caudal circulante en l/s

L = longitud de tubería en m

J_1 = pérdida de carga unitaria: es la pérdida que se produciría si el caudal circulante fuese de 1 l/s. Viene expresada en m c agua/m tubería.

$$J_1 = \frac{1,2117 \cdot 10^{10}}{C_{HW}^{1,852} \cdot D^{4,87}}$$

DIÁMETRO (mm)	J_1						
	C_{HW}						
	150	140	130	120	110	100	80
6 (1/8")	183,52	208,53	239,21	277,43	325,94	388,86	587,86
8,75 (1/4)	29,22	33,20	38,09	44,17	51,9	61,92	93,60
12,25 (3/8)	5,68	6,45	7,40	8,58	10,08	12,03	18,18
15,75 (1/2)	1,67	1,90	2,18	2,52	2,96	3,54	5,35
21,25 (3/4)	0,39	0,44	0,51	0,59	0,69	0,82	1,24
27 (1)	0,12	0,14	0,16	0,18	0,21	0,26	0,39
35,75 (1 1/4)	0,031	0,035	0,04	0,047	0,055	0,065	0,099
41,25 (1 1/2)	0,015	0,017	0,02	0,023	0,027	0,032	0,049
52,5 (2)	$4,74 \cdot 10^{-3}$	$5,39 \cdot 10^{-3}$	$6,18 \cdot 10^{-3}$	$7,17 \cdot 10^{-3}$	$8,42 \cdot 10^{-3}$	0,01	0,015
80,25 (3)	$6 \cdot 10^{-4}$	$6,82 \cdot 10^{-4}$	$7,83 \cdot 10^{-4}$	$9,08 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^{-3}$	$1,92 \cdot 10^{-3}$
105 (4)	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$1,84 \cdot 10^{-4}$	$2,11 \cdot 10^{-4}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$	$2,88 \cdot 10^{-4}$	$3,44 \cdot 10^{-4}$	$5,20 \cdot 10^{-4}$
50	$6,02 \cdot 10^{-3}$	$6,83 \cdot 10^{-3}$	$7,84 \cdot 10^{-3}$	$9,09 \cdot 10^{-3}$	0,010	0,013	0,019
60	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$2,81 \cdot 10^{-3}$	$3,22 \cdot 10^{-3}$	$3,74 \cdot 10^{-3}$	$4,39 \cdot 10^{-3}$	$5,24 \cdot 10^{-3}$	$7,93 \cdot 10^{-3}$
70	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$2,07 \cdot 10^{-3}$	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$3,74 \cdot 10^{-3}$
80	$6,10 \cdot 10^{-4}$	$6,93 \cdot 10^{-4}$	$7,95 \cdot 10^{-4}$	$9,22 \cdot 10^{-4}$	$1,083 \cdot 10^{-3}$	$1,29 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$
100	$2,06 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$	$2,68 \cdot 10^{-4}$	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$3,65 \cdot 10^{-4}$	$4,36 \cdot 10^{-4}$	$6,59 \cdot 10^{-4}$
125	$6,94 \cdot 10^{-5}$	$7,88 \cdot 10^{-5}$	$9,05 \cdot 10^{-5}$	$0,05 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$2,22 \cdot 10^{-4}$
150	$2,85 \cdot 10^{-5}$	$3,24 \cdot 10^{-5}$	$3,72 \cdot 10^{-5}$	$4,32 \cdot 10^{-5}$	$5,07 \cdot 10^{-5}$	$6,05 \cdot 10^{-5}$	$9,15 \cdot 10^{-5}$
175	$1,33 \cdot 10^{-5}$	$1,53 \cdot 10^{-5}$	$1,76 \cdot 10^{-5}$	$2,04 \cdot 10^{-5}$	$2,39 \cdot 10^{-5}$	$2,85 \cdot 10^{-5}$	$4,32 \cdot 10^{-5}$
200	$7,03 \cdot 10^{-6}$	$7,29 \cdot 10^{-6}$	$9,17 \cdot 10^{-6}$	$1,06 \cdot 10^{-5}$	$1,25 \cdot 10^{-5}$	$1,49 \cdot 10^{-5}$	$2,25 \cdot 10^{-5}$
250	$2,37 \cdot 10^{-6}$	$2,69 \cdot 10^{-6}$	$3,09 \cdot 10^{-6}$	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$4,21 \cdot 10^{-6}$	$5,03 \cdot 10^{-6}$	$7,60 \cdot 10^{-6}$
300	$9,76 \cdot 10^{-7}$	$1,10 \cdot 10^{-6}$	$1,27 \cdot 10^{-6}$	$1,47 \cdot 10^{-6}$	$1,73 \cdot 10^{-6}$	$2,07 \cdot 10^{-6}$	$3,13 \cdot 10^{-6}$
350	$4,61 \cdot 10^{-7}$	$5,24 \cdot 10^{-7}$	$6,01 \cdot 10^{-7}$	$6,97 \cdot 10^{-7}$	$8,18 \cdot 10^{-7}$	$9,77 \cdot 10^{-7}$	$1,47 \cdot 10^{-6}$
400	$2,40 \cdot 10^{-7}$	$2,73 \cdot 10^{-7}$	$3,13 \cdot 10^{-7}$	$3,63 \cdot 10^{-7}$	$4,27 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-7}$	$7,70 \cdot 10^{-7}$
450	$1,35 \cdot 10^{-7}$	$1,59 \cdot 10^{-7}$	$1,76 \cdot 10^{-7}$	$2,05 \cdot 10^{-7}$	$2,41 \cdot 10^{-7}$	$2,87 \cdot 10^{-7}$	$4,34 \cdot 10^{-7}$
500	$8,11 \cdot 10^{-8}$	$9,22 \cdot 10^{-8}$	$1,06 \cdot 10^{-7}$	$1,22 \cdot 10^{-7}$	$1,44 \cdot 10^{-7}$	$1,72 \cdot 10^{-7}$	$2,60 \cdot 10^{-7}$
600	$3,34 \cdot 10^{-8}$	$3,79 \cdot 10^{-8}$	$4,35 \cdot 10^{-8}$	$5,05 \cdot 10^{-8}$	$5,93 \cdot 10^{-8}$	$7,07 \cdot 10^{-8}$	$1,07 \cdot 10^{-7}$
700	$1,57 \cdot 10^{-8}$	$1,79 \cdot 10^{-8}$	$2,05 \cdot 10^{-8}$	$2,38 \cdot 10^{-8}$	$2,80 \cdot 10^{-8}$	$3,34 \cdot 10^{-8}$	$5,05 \cdot 10^{-8}$
800	$8,22 \cdot 10^{-9}$	$9,35 \cdot 10^{-9}$	$1,07 \cdot 10^{-8}$	$1,24 \cdot 10^{-8}$	$1,46 \cdot 10^{-8}$	$1,74 \cdot 10^{-8}$	$2,63 \cdot 10^{-8}$
1000	$2,77 \cdot 10^{-9}$	$3,15 \cdot 10^{-9}$	$3,61 \cdot 10^{-9}$	$4,19 \cdot 10^{-9}$	$4,93 \cdot 10^{-9}$	$5,88 \cdot 10^{-9}$	$8,89 \cdot 10^{-9}$

HAZEN WILLIAMS

MUY LISAS	$C_{HW} = 150$	$\epsilon/D < 1,5 \cdot 10^{-5}$
LISAS	$C_{HW} = 140$	$2 \cdot 10^{-4} > \epsilon/D > 1,5 \cdot 10^{-5}$
SEMILISAS	$C_{HW} = 130$	$1 \cdot 10^{-3} > \epsilon/D > 2 \cdot 10^{-4}$
RUGOSAS	$C_{HW} = 120$	$4 \cdot 10^{-3} > \epsilon/D > 10^{-3}$
MUY RUGOSAS	$C_{HW} = 110$	$1,5 \cdot 10^{-2} > \epsilon/D > 4 \cdot 10^{-3}$
EXCESIVAMENTE RUGOSAS	$C_{HW} = 100$	$\epsilon/D > 1,5 \cdot 10^{-2}$

TABLA 3
COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE PÉRDIDAS PARA PIEZAS
ESPECIALES

COEFICIENTES K DE PERDIDAS DE CARGA EN PIEZAS ESPECIALES

Pérdida de carga en metros:

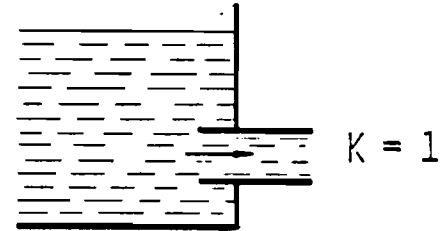
$$h_f = K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

(V en m/s)

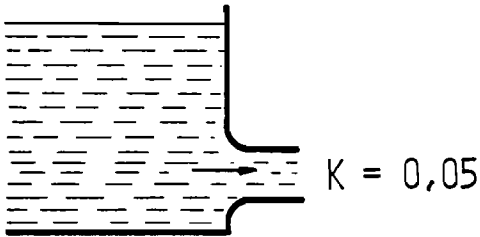
* SALIDAS DE DEPOSITOS



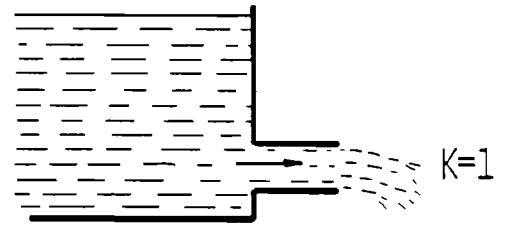
Angulos Vivos



Orificio Borda

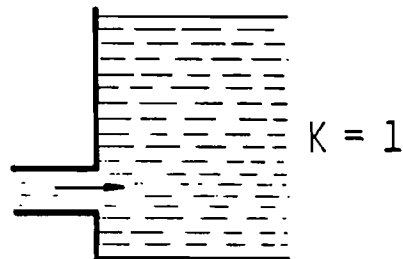


Angulos redondeados

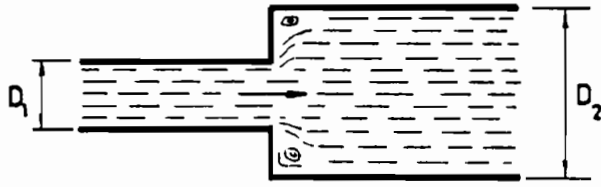


Angulos vivos salida atmosférica

* ENTRADA A DEPOSITO



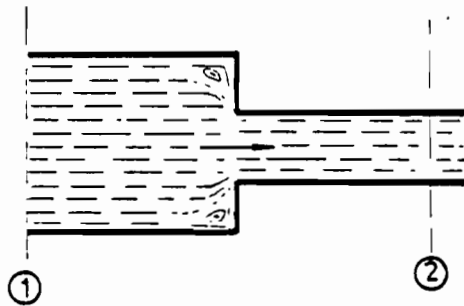
ENSANCHAMIENTO BRUSCO



$$K = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2$$

$$h_f = K \cdot \frac{V_1^2}{2g}$$

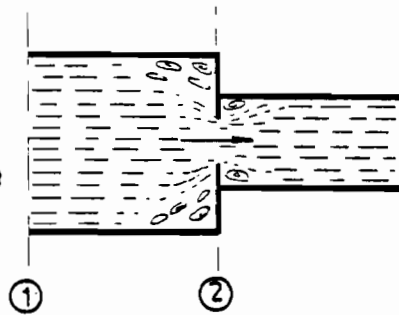
ESTRECHAMIENTO BRUSCO



$$K = \left[\frac{1}{C_c} - 1 \right]^2$$

$$h_f = K \cdot \frac{V_2^2}{2g}$$

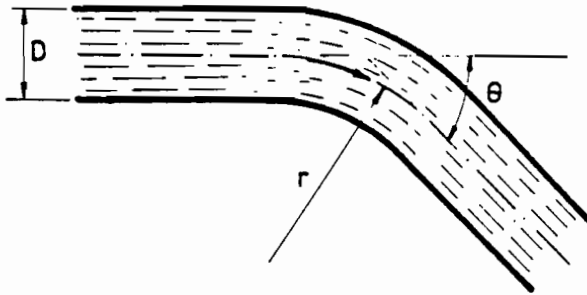
A_2/A_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
C_c	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1



$$h_f = K \cdot \frac{V_1^2}{2g}$$

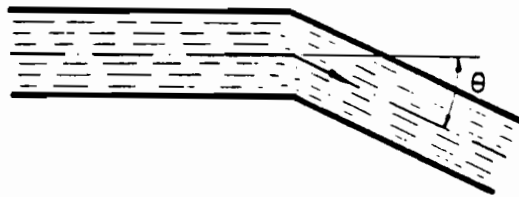
A_2/A_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
K	232	51	18	9,6	5,3	3,1	2,1	1,2	0,6	0,48

CODOS REDONDEADOS



$\theta \backslash r/D$	1	2	3	4	6
22,5°	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
30°	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06
45°	0,14	0,10	0,09	0,08	0,08
60°	0,19	0,12	0,11	0,10	0,09
90°	0,21	0,14	0,12	0,11	0,09

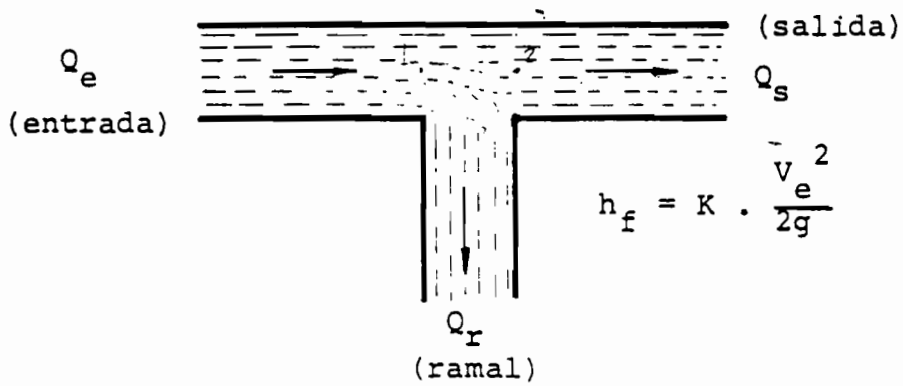
CODOS BRUSCOS



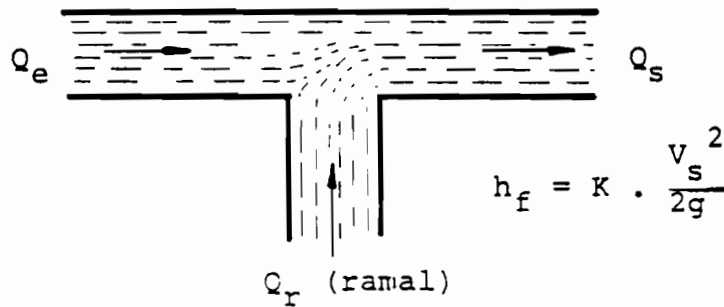
θ	22.5	30	45	60	90
K	0,07	0,11	0,24	0,47	1,13

CODOS COMERCIALES DE 90° RADIO MEDIO: $K \approx 0,75$

CODOS COMERCIALES DE 90° RADIO GRANDE: $K \approx 0,6$

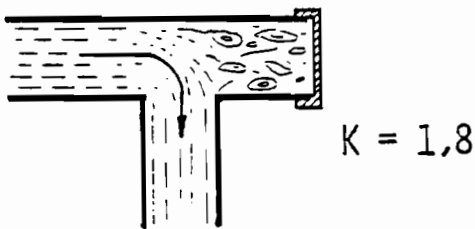


Q_r/Q_e	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Q_r	0,95	0,88	0,84	0,95	1,1	1,28
Q_s	0,04	-0,08	-0,05	0,07	0,21	0,35

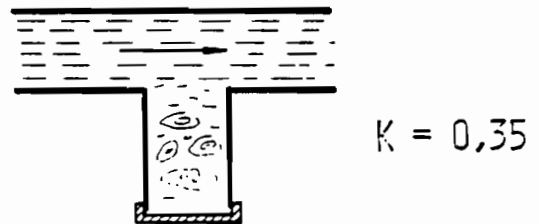


Q_r/Q_s	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
K_e	0,04	0,17	0,3	0,41	0,51	0,6
K_r	-1,12	-0,4	0,08	0,47	0,72	0,91

EMPALME EN T NORMAL

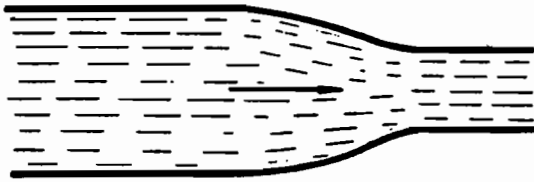


T con cambio de dirección



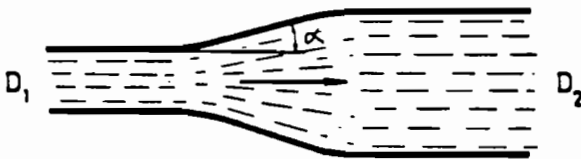
Sin cambio de dirección

ESTRECHAMIENTO PROGRESIVO



h_f despreciable

ENSANCHAMIENTO PROGRESIVO

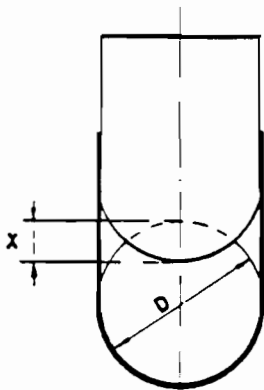


$$h_f = K \frac{V_1^2}{2g}$$

$$K = 0,2 \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right] \quad (\alpha \leq 10^\circ)$$

$K \equiv$ ensanchamiento brusco ($\alpha > 10^\circ$)

VALVULA DE COMPUERTA (TUBOS CIRCULARES)

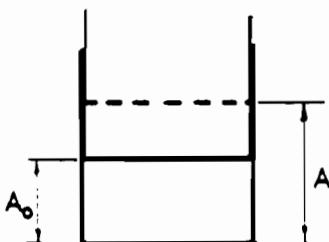


x = penetraci3n obturador (en m)

D = diámetro tubería (en m)

x/D	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875
K	0,19	0,21	0,26	0,81	2,1	5,5	17	98

VALVULA DE COMPUERTA (TUBOS RECTANGULARES)

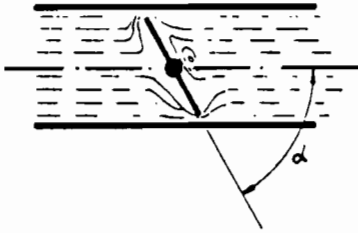


A_0 = secci3n de paso

A = secci3n tubo rectangular

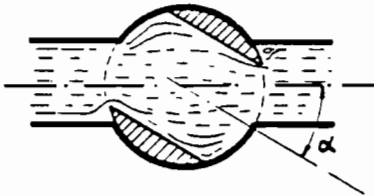
A_0/A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
K	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,1	0,95	0,39	0,1	0

VALVULA DE MARIPOSA



α°	5	10	15	20	30	40	45	50	60	70
K	0,24	0,52	0,9	1,54	3,9	11	19	33	120	750

VALVULA ESFERICA

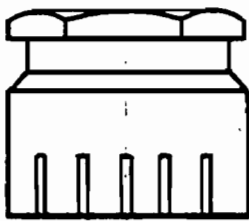


α°	5	10	15	20	25	30	35
K	0,05	0,3	0,75	1,56	3,1	5,47	9,7

α°	40	45	50	55	60	65	80
K	17,3	31,2	52,6	110	206	490	∞

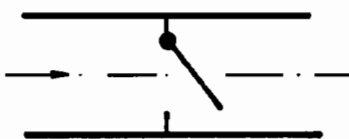
VALVULA DE SEGURIDAD $K = 2,5$

VALVULA DE PIE CON FILTRO



$K = 2,5$

VALVULA DE RETENCION



DN 25 : $K = 2,5$

DN 50 : $K = 2$

DN 75 : $K = 1,5$

TABLA 4
VALORES DE LA RUGOSIDAD ABSOLUTA

Valores de la rugosidad absoluta

Tabla elaborada según indicaciones de [10] [39], [40], y [64]

Características	Rugosidad ϵ en mm		
	Infe- rior	Super- rior	Normal
1.- Galerías			
Roca sin revestir en todo su perímetro	100	1000	-
Roca sin revestir con solera revestida	10	100	-
2.- Tuberías de hormigón			
<i>Extraordinariamente rugoso:</i> madera de encofrado muy rugosa; hormigón pobre con desgastes por erosión; juntas mal alineadas ..	0,6	3,0	1,5
<i>Rugoso:</i> relleno de materiales angulosos, transportados; marcas de encofrados visibles	0,4	0,6	0,5
<i>Granular:</i> superficie alisada con llana, en buenas condiciones, juntas bien logradas	0,18	0,4	0,3
<i>Centrifugado:</i> (en tubos)	0,15	0,5	0,3
<i>Liso:</i> de encofrado metálico, nuevo o casi nuevo; acabado medio con juntas cuidadas	0,06	0,18	0,1
<i>Muy liso:</i> nuevo, extraordinariamente liso, de encofrado metálico, muy bien cuidado por especialistas y juntas cuidadas	0,015	0,06	0,03

Valores de la rugosidad absoluta

Tabla elaborada según indicaciones de [10] [39], [40], y [64]

Características	Rugosidad ϵ en mm		
	Infe- rior	Supe- rior	Normal
3.- Tuberías de acero, topes soldados, interior continuo			
Grandes incrustaciones o tuberculizaciones	2,4	12,2	7,0
Tuberculización general de 1 a 3 mm	0,9	2,4	1,5
Pintura asfáltica con brocha, esmalte o alquitrán, en capa gruesa ..	0,3	0,9	0,6
Oxidación leve	0,15	0,30	0,2
Tubería sumergida en asfalto en caliente	0,06	0,15	0,1
Revestimiento de hormigón centrifugado	0,05	0,15	0,1
Revestimiento de esmalte centrifugado	0,01	0,3	0,06
Alquitrán natural (gelsonita) aplicado a pistola, en frío, con 0,4 mm de espesor	-	-	0,042
Esmalte bituminoso (de hulla), aplicado con brocha, de 2 a 2,5 mm de espesor.....	-	-	0,040
Idem aplicado con espátula	-	-	0,030
Idem, en caliente, alisado a la llama	-	-	0,012

Valores de la rugosidad absoluta

Características	Rugosidad ϵ en mm		
	Infe- rior	Supe- rior	Normal
4.- Tuberías de acero: remachadas en las juntas transver. <i>(Juntas separadas de 5 a 10 metros, costura longitudinal soldada)</i>			
Grandes inescrustaciones o tuberculizaciones	3,7	12,2	8,0
Tuberculización general de 1 a 3 mm	1,4	3,7	2,5
Oxidada	0,6	1,4	1,0
Pintura aplicada con brocha, asfalto o alquitrán en capa espesa	0,9	1,8	1,5
Tubería sumergida en asfalto caliente o pintada con brocha con grafito	0,3	0,9	0,6
Tubería con esmalte centrifugado	0,15	0,6	0,4
5.- Tuberías de acero: remachadas en las juntas transversales y longitudinales <i>(Juntas transversales separadas de 1,8 a 2,4 m)</i>			
Grandes inescrustaciones o tuberculizaciones	6,0	12,2	9,0
Tuberculización general de 1 a 3 mm			
3 hileras de remaches en las juntas transversales	4,6	6,0	5,0
2 hileras de remaches en las juntas transversales	3,0	4,6	3,5
1 hilera de remaches en las juntas transversales	2,1	3,0	2,5
Superficie de la tubería razonablemente lisa:			
3 hileras { 3 hileras transversales	1,8	2,1	2,0
longitudinales { 2 hileras transversales	1,5	1,8	1,6
de remaches. { 1 hilera transversales	1,1	1,5	1,3
2 hileras { 3 hileras transversales	1,2	1,5	1,3
longitudinales { 2 hileras transversales	0,9	1,2	1,1
de remaches { 1 hilera transversales	0,6	0,9	1,2
1 hilera { 3 hileras transversales	0,8	1,1	1,0
longitudinal { 2 hileras transversales	0,5	0,8	0,6
de remaches { 1 hilera transversales	0,3	0,5	0,4
6.- Tuberías de madera			
Vegetación excesiva en las paredes.			
Duelas rugosas con juntas salientes	0,3	3,5	3,2
Usada en buenas condiciones	0,12	0,3	0,2
Nueva, construcción de 1ª clase.....	0,03	0,12	0,07

Valores de la rugosidad absoluta

Características	Rugosidad ϵ en mm		
	Infe- rior	Supe- rior	Normal
7.- Tubos de fibrocemento		0,025	0,6
8.- Tubos de hierro			
Hierro forjado oxidado	0,15	3,00	0,6
Hierro galvanizado, hierro fundido revestido	0,06	0,3	0,15
Hierro fundido sin revestir, nuevo	0,25	1,0	0,5
Hierro fundido con corrosión	1,0	3,0	1,5
Hierro fundido con depósito	1	4,0	2,0
9.- Tubos de cerámica			
Con juntas muy bien alineadas	0,06		
En en tramos de \approx 1 m de longitud			
D<600 mm	—	0,3	0,15
D>600 mm	—	0,6	0,3
En en tramos de \approx 0,6 m de longitud			
D<300 mm	—	0,3	0,15
D>300 mm	—	0,6	0,3
10.- Tubos para aguas sucias en uso, cuando los materiales nuevos tengan rugosidades inferiores a las indicadas para tubos en uso			
Con capas de lodo inferiores a 5 mm	0,6	3,0	1,5
Con incrustaciones de lodo o grosores inferiores a 25 mm.....	6,0	30	15
Con material sólido arenoso en el fondo, depositado de forma irregular.....	60,0	300	150
11.- Materiales lisos			
Latón, cobre, plomo	0,04	0,010	0,007
Aluminio	0,0015	0,005	0,004
12.- Materiales super-lisos			
Vidrio	0,001	0,002	—
Poliuretano+Epoxy aplicado con pistola sin aire a temperatura ambiente, con un espesor de 0,1 a 0,2 mm; (sin juntas)	0,002	0,004	—
Vinilo (acetocloruro de polivinilo o policloruro de vinilo). Idem	0,003	0,004	
—Araldite (epoxy). Idem	0,0025	0,003	—

TABLA 5
FACTORES DE CONVERSIÓN

Factores de conversión de masa

Dina									
Libra (pdl)	$1.383E4 \frac{\text{dina}}{\text{pdl}}$								
Newton (N)	$4.448E5 \frac{\text{dina}}{\text{N}}$	$7.233 \frac{\text{pdl}}{\text{N}}$							
Libra (lb) (avoirdupois)	$4.448E5 \frac{\text{dina}}{\text{lb}}$	$32.174 \frac{\text{pdl}}{\text{lb}}$	$4.448 \frac{\text{N}}{\text{lb}}$						
Tonelada corta	$8.896E3 \frac{\text{dina}}{\text{ton c}}$	$6.435E4 \frac{\text{pdl}}{\text{ton c}}$	$8896 \frac{\text{N}}{\text{ton c}}$	$2000 \frac{\text{lb}}{\text{ton c}}$					
Tonelada métrica	$9.807E3 \frac{\text{dina}}{\text{ton m}}$	$7.094E4 \frac{\text{pdl}}{\text{ton m}}$	$9808 \frac{\text{N}}{\text{ton m}}$	$2205 \frac{\text{lb}}{\text{ton m}}$	$1.102 \frac{\text{t}}{\text{ton m}}$				
Tonelada larga	$9.964E3 \frac{\text{dina}}{\text{ton l}}$	$7.207E4 \frac{\text{pdl}}{\text{ton l}}$	$9964 \frac{\text{N}}{\text{ton l}}$	$2240 \frac{\text{lb}}{\text{ton l}}$	$1.12 \frac{\text{ton m}}{\text{ton l}}$	$1.016 \frac{\text{m}}{\text{ton l}}$			
Dina	Libra (pdl)	Newton (N)	Libra (lb) (avoirdupois)	Tonelada corta	Tonelada métrica	Tonelada larga			

Factores de conversión de fuerza

Factores de conversión de presión

	atm	Bar	psi	pulg Hg (32°F)	pie H ₂ O (39.2°F)	pulg H ₂ O (39.2°F)	mm Hg (0°C)	Torr	Pascal ($\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$)	$\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$	
$\frac{\text{pie}}{\text{min}}$ (pie/min)		$1.0132 \frac{\text{bar}}{\text{atm}}$	$14.696 \frac{\text{psi}}{\text{atm}}$	$29.92 \frac{\text{pulg Hg}}{\text{atm}}$	$33.90 \frac{\text{pie H}_2\text{O}}{\text{atm}}$	$406.8 \frac{\text{pulg H}_2\text{O}}{\text{atm}}$	$760 \frac{\text{mm Hg}}{\text{atm}}$	$760 \frac{\text{Torr}}{\text{atm}}$	$1.013E5 \frac{\text{Pa}}{\text{atm}}$	$1.032E6 \frac{\text{dina/cm}^2}{\text{atm}}$	atm
$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	$1.969 \frac{\text{pie/min}}{\text{cm/s}}$		$14.504 \frac{\text{psi}}{\text{bar}}$	$29.53 \frac{\text{pulg Hg}}{\text{bar}}$	$33.46 \frac{\text{pie H}_2\text{O}}{\text{bar}}$	$401.5 \frac{\text{pulg H}_2\text{O}}{\text{bar}}$	$750.1 \frac{\text{mm Hg}}{\text{bar}}$	$750.1 \frac{\text{Torr}}{\text{bar}}$	$1.0E5 \frac{\text{Pa}}{\text{bar}}$	$1.0E6 \frac{\text{dina/cm}^2}{\text{bar}}$	Bar
$\frac{\text{m}}{\text{min}}$	$3.281 \frac{\text{pie/min}}{\text{m/min}}$	$1.667 \frac{\text{cm/s}}{\text{m/min}}$		$2.036 \frac{\text{pulg Hg}}{\text{psi}}$	$2.307 \frac{\text{pie H}_2\text{O}}{\text{psi}}$	$27.68 \frac{\text{pulg H}_2\text{O}}{\text{psi}}$	$51.71 \frac{\text{mm Hg}}{\text{psi}}$	$51.71 \frac{\text{Torr}}{\text{psi}}$	$6.895E3 \frac{\text{Pa}}{\text{psi}}$	$6.895E4 \frac{\text{dina/cm}^2}{\text{psi}}$	psi
$\frac{\text{pulg}}{\text{seg}}$	$3 \frac{\text{pie/min}}{\text{pulg/seg}}$	$2.54 \frac{\text{cm/s}}{\text{pulg/seg}}$	$1.524 \frac{\text{m/min}}{\text{pulg/seg}}$		$1.133 \frac{\text{pie H}_2\text{O}}{\text{pulg Hg}}$	$13.60 \frac{\text{pulg H}_2\text{O}}{\text{pulg Hg}}$	$25.4 \frac{\text{mm Hg}}{\text{pulg Hg}}$	$25.4 \frac{\text{Torr}}{\text{pulg Hg}}$	$3386 \frac{\text{Pa}}{\text{pulg Hg}}$	$3.386E4 \frac{\text{dina/cm}^2}{\text{pulg Hg}}$	pulg Hg (32°F)
$\frac{\text{km}}{\text{hr}}$	$54.68 \frac{\text{pie/min}}{\text{km/hr}}$	$27.78 \frac{\text{cm/s}}{\text{km/hr}}$	$16.67 \frac{\text{m/min}}{\text{km/hr}}$	$10.94 \frac{\text{pulg/seg}}{\text{km/hr}}$							
$\frac{\text{pie}}{\text{seg}}$ (pie/seg)	$60 \frac{\text{pie/min}}{\text{pie/seg}}$	$30.48 \frac{\text{cm/s}}{\text{pie/seg}}$	$18.29 \frac{\text{m/min}}{\text{pie/seg}}$	$12 \frac{\text{pulg/seg}}{\text{pie/seg}}$	$1.097 \frac{\text{km/hr}}{\text{pie/seg}}$						
$\frac{\text{milla}}{\text{hora}}$ (mph)	$88 \frac{\text{pie/min}}{\text{mph}}$	$44.7 \frac{\text{cm/s}}{\text{mph}}$	$26.82 \frac{\text{m/min}}{\text{mph}}$	$17.6 \frac{\text{pulg/seg}}{\text{mph}}$	$1.609 \frac{\text{km/hr}}{\text{mph}}$	$1.47 \frac{\text{Pie/seg}}{\text{mph}}$					
Nudo	$101.3 \frac{\text{Pie/min}}{\text{nudo}}$	$51.44 \frac{\text{cm/s}}{\text{nudo}}$	$30.87 \frac{\text{m/min}}{\text{nudo}}$	$20.26 \frac{\text{pulg/seg}}{\text{nudo}}$	$1.852 \frac{\text{km/hr}}{\text{nudo}}$	$1.688 \frac{\text{Pie/seg}}{\text{nudo}}$	$1.151 \frac{\text{mph}}{\text{nudo}}$				
$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$196.9 \frac{\text{Pie/min}}{\text{m/s}}$	$100 \frac{\text{cm/s}}{\text{m/s}}$	$60 \frac{\text{m/min}}{\text{m/s}}$	$39.37 \frac{\text{pulg/seg}}{\text{m/s}}$	$3.6 \frac{\text{km/hr}}{\text{m/s}}$	$3.281 \frac{\text{Pie/seg}}{\text{m/s}}$	$2.237 \frac{\text{mph}}{\text{m/s}}$	$1.944 \frac{\text{Pie/min}}{\text{m/s}}$		$10 \frac{\text{dina/cm}^2}{\text{Pa}}$	Pascal ($\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$)
$\frac{\text{pie}}{\text{min}}$ (pie/min)	$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$	$\frac{\text{pulg}}{\text{seg}}$	$\frac{\text{km}}{\text{hr}}$	$\frac{\text{pie}}{\text{seg}}$ (pie/seg)	$\frac{\text{milla}}{\text{hora}}$ (mph)	Nudo	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$		$\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$	

Factores de conversión de velocidad

Factores de conversión para viscosidad absoluta

	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$	Poise $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}}\right)$	Centipoise	
Centistoke		144	386.1	4633	6895	6895	6.895E4	6.895E6	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$
Stoke (cm^2/s)	100 centistoke stoke	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pie}^2}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{poise}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$
$\frac{\text{pulg}^2}{\text{seg}}$	645.2 $\frac{\text{centistoke}}{\text{pulg}^2/\text{seg}}$	6.452 $\frac{\text{stoke}}{\text{pie}^2/\text{seg}}$		12 $\frac{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	17.86 $\frac{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	17.86 $\frac{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	178.6 $\frac{\text{poise}}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	1.786E4 $\frac{\text{centipoise}}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$
$\frac{\text{pie}^2}{\text{seg}}$	9.29E4 $\frac{\text{centistoke}}{\text{pie}^2/\text{seg}}$	929 $\frac{\text{stoke}}{\text{pie}^2/\text{seg}}$	144 $\frac{\text{pulg}^2/\text{seg}}{\text{pie}^2/\text{seg}}$		1.488 $\frac{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	1.488 $\frac{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	14.88 $\frac{\text{poise}}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	1488 $\frac{\text{centipoise}}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$
$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	1.0E6 $\frac{\text{centistoke}}{\text{m}^2/\text{s}}$	10,000 $\frac{\text{stoke}}{\text{m}^2/\text{s}}$	929 $\frac{\text{pulg}^2/\text{seg}}{\text{m}^2/\text{s}}$	10.76 $\frac{\text{pie}^2/\text{seg}}{\text{m}^2/\text{s}}$		1 $\frac{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$	10 $\frac{\text{poise}}{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$	1000 $\frac{\text{centipoise}}{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$
Centistoke	Stoke (cm^2/s)	$\frac{\text{pulg}^2}{\text{seg}}$	$\frac{\text{pie}^2}{\text{seg}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$			10 $\frac{\text{poise}}{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}$	1000 $\frac{\text{centipoise}}{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$
							100 $\frac{\text{poise}}{\text{centipoise}}$	Poise $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}}\right)$	
								Centipoise	

Factores de conversión para viscosidad cinemática

Factores de conversión de caudal volumétrico

	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$\frac{\text{pie}^3}{\text{seg}}$	Litro s	$\frac{\text{pie}^3}{\text{min}}$	$\frac{\text{gal}}{\text{min}}$ (gpm)	$\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$			
$\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}}{\text{min}}$				2119	15.850	60E6	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$		
$\frac{\text{g}\cdot\text{cal}}{\text{min}}$	3.086 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}$		1000 $\frac{\text{litro}}{\text{m}^3/\text{s}}$	$\frac{\text{pie}^3/\text{min}}{\text{litro}}$	$\frac{\text{gpm}}{\text{m}^3/\text{s}}$	$\frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{m}^3/\text{s}}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$		
Btu/hr	12.96 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{hr}}$	4.20 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{hr}}$	28.32 $\frac{\text{litro}}{\text{pie}^3/\text{seg}}$	60 $\frac{\text{pie}^3/\text{min}}{\text{pie}^3/\text{seg}}$	449 $\frac{\text{gpm}}{\text{pie}^3/\text{seg}}$	2.832E4 $\frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{pie}^3/\text{seg}}$	$\frac{\text{pie}^3}{\text{seg}}$		
Watt (W)	44.25 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{W}}$	14.34 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{W}}$	3.4134 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{W}}$	2119 $\frac{\text{pie}^3/\text{min}}{\text{m}^3/\text{s}}$	15.85 $\frac{\text{gpm}}{\text{litro}}$	1000 $\frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{litro}}$	$\frac{\text{Litro}}{\text{s}}$		
$\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}}{\text{seg}}$	641 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}$	19.44 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}$	4.629 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}$	1.356 $\frac{\text{W}}{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}$	7.481 $\frac{\text{gpm}}{\text{pie}^3/\text{min}}$	471.9 $\frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{pie}^3/\text{min}}$	$\frac{\text{pie}^3}{\text{min}}$		
$\frac{\text{g}\cdot\text{cal}}{\text{s}}$	185.2 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}$	60 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}$	14.29 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}$	4.184 $\frac{\text{W}}{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}$	3.086 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}$	63.09 $\frac{\text{cm}^3/\text{s}}{\text{gpm}}$	$\frac{\text{gal}}{\text{min}}$ (gpm)		
Btu/min	778 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{min}}$	252.0 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{min}}$	60 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{Btu}/\text{min}}$	17.57 $\frac{\text{W}}{\text{Btu}/\text{min}}$	12.96 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}{\text{Btu}/\text{min}}$	4.200 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}{\text{Btu}/\text{min}}$	$\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$		
Caballo de potencia (hp)	3.314 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{hp}}$	1.069E4 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{hp}}$	2542 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{hp}}$	745.7 $\frac{\text{W}}{\text{hp}}$	550 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}{\text{hp}}$	6.416E5 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}{\text{hp}}$	42.44 $\frac{\text{Btu}/\text{min}}{\text{hp}}$		
Kilowatt (kW)	4.425E4 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{kW}}$	1.432E4 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{kW}}$	3413.4 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{kW}}$	1000 $\frac{\text{W}}{\text{kW}}$	737.6 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}{\text{kW}}$	238.7 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}{\text{kW}}$	56.83 $\frac{\text{Btu}/\text{min}}{\text{kW}}$	1.341 $\frac{\text{hp}}{\text{kW}}$	
$\frac{\text{Btu}}{\text{seg}}$	4.666E4 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	1.512E4 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	1681 $\frac{\text{Btu}/\text{hr}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	1054 $\frac{\text{W}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	778 $\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{seg}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	252.0 $\frac{\text{g}\cdot\text{cal}/\text{s}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	60 $\frac{\text{Btu}/\text{min}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	1.414 $\frac{\text{hp}}{\text{Btu}/\text{seg}}$	1.054 $\frac{\text{kW}}{\text{Btu}/\text{seg}}$
$\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}}{\text{min}}$	$\frac{\text{g}\cdot\text{cal}}{\text{min}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$	Watt (W)	$\frac{\text{pie}\cdot\text{lb}}{\text{seg}}$	$\frac{\text{g}\cdot\text{cal}}{\text{s}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{min}}$	Caballo de potencia (hp)	Kilowatt (kW)	$\frac{\text{Btu}}{\text{seg}}$

Factores de conversión de potencia

Factores de conversión de energía

kWh	hp · hr	kcal	pie ³ · atm	Btu	Litro · atm	g · cal	pie · lb	Joule (J) (N · m)	pulg · lb	pie · poundal	erg (dina · cm)	
1.341 $\frac{\text{hp} \cdot \text{hr}}{\text{kWh}}$	860.6 $\frac{\text{kcal}}{\text{kWh}}$	1255 $\frac{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}{\text{kWh}}$	3414 $\frac{\text{Btu}}{\text{kWh}}$	3.553E4 $\frac{\text{litro} \cdot \text{atm}}{\text{kWh}}$	8.606E5 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{kWh}}$	2.655E6 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{kWh}}$	3.6E6 $\frac{\text{J}}{\text{kWh}}$	3.186E7 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{kWh}}$	8.543E7 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{kWh}}$	3.6E13 $\frac{\text{erg}}{\text{kWh}}$	kWh	
$\frac{\text{erg}}{\text{g}}$	641.6 $\frac{\text{kcal}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	935.9 $\frac{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	2546 $\frac{\text{Btu}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	2.649E4 $\frac{\text{litro} \cdot \text{atm}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	6.416E5 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	1.98E6 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	2.685E6 $\frac{\text{J}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	2.376E7 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	6.370E7 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	2.684E13 $\frac{\text{erg}}{\text{hp} \cdot \text{hr}}$	hp · hr	
$\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{slug}}$	929.4 $\frac{\text{erg/g}}{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}$		1.459 $\frac{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}{\text{kcal}}$	3.966 $\frac{\text{Btu}}{\text{kcal}}$	41.29 $\frac{\text{litro} \cdot \text{atm}}{\text{kcal}}$	1000 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{kcal}}$	3086 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{kcal}}$	4184 $\frac{\text{J}}{\text{kcal}}$	3.703E4 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{kcal}}$	9.929E4 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{kcal}}$	4.184E10 $\frac{\text{erg}}{\text{kcal}}$	kcal
$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	1.0E4 $\frac{\text{erg/g}}{\text{J/kg}}$	10.76 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}{\text{J/kg}}$		2.721 $\frac{\text{Btu}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	28.32 $\frac{\text{litro} \cdot \text{atm}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	6855 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	2116 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	2869 $\frac{\text{J}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	2.539E4 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	6.809E4 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	1.0133E9 $\frac{\text{erg}}{\text{pie}^3 \cdot \text{atm}}$	pie ³ · atm
$\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{lbm}}$	2.989E4 $\frac{\text{erg/g}}{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}$	32.174 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}$	2.990 $\frac{\text{J/g}}{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}$		10.41 $\frac{\text{litro} \cdot \text{atm}}{\text{Btu}}$	252.0 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{Btu}}$	778 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{Btu}}$	1054 $\frac{\text{J}}{\text{Btu}}$	9332 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{Btu}}$	25020 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{Btu}}$	1.054E10 $\frac{\text{erg}}{\text{Btu}}$	Btu
$\frac{\text{Btu}}{\text{slug}}$	7.224E5 $\frac{\text{erg/g}}{\text{Btu}/\text{slug}}$	778 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}{\text{Btu}/\text{slug}}$	72.23 $\frac{\text{J/g}}{\text{Btu}/\text{slug}}$	24.17 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}{\text{Btu}/\text{slug}}$		24.2 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{litro} \cdot \text{atm}}$	74.74 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{litro} \cdot \text{atm}}$	101.3 $\frac{\text{J}}{\text{litro} \cdot \text{atm}}$	896.8 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{litro} \cdot \text{atm}}$	2405 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{litro} \cdot \text{atm}}$	3.578E7 $\frac{\text{erg}}{\text{litro} \cdot \text{atm}}$	Litro · atm
$\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}}$	2.324E7 $\frac{\text{erg/g}}{\text{Btu}/\text{lbm}}$	2.5020E4 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}{\text{Btu}/\text{lbm}}$	2324 $\frac{\text{J/g}}{\text{Btu}/\text{lbm}}$	778 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}{\text{Btu}/\text{lbm}}$	32.174 $\frac{\text{Btu}/\text{slug}}{\text{Btu}/\text{lbm}}$		3.086 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{g} \cdot \text{cal}}$	4.184 $\frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{cal}}$	37.03 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{g} \cdot \text{cal}}$	99.29 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{g} \cdot \text{cal}}$	4.184E7 $\frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{cal}}$	g · cal
$\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{g}}$	4.184E7 $\frac{\text{erg/g}}{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}$	4.504E4 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}$	4184 $\frac{\text{J/g}}{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}$	1400 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}$	57.90 $\frac{\text{Btu}/\text{slug}}{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}$	1.800 $\frac{\text{Btu}/\text{lbm}}{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}$		1.356 $\frac{\text{J}}{\text{pie} \cdot \text{lb}}$	12 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{pie} \cdot \text{lb}}$	32.174 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{pie} \cdot \text{lb}}$	1.356E7 $\frac{\text{erg}}{\text{pie} \cdot \text{lb}}$	pie · lb
$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$	4.184E7 $\frac{\text{erg/g}}{\text{kcal}/\text{kg}}$	4.504E4 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{slug}}{\text{kcal}/\text{kg}}$	4184 $\frac{\text{J/g}}{\text{kcal}/\text{kg}}$	1400 $\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}/\text{lbm}}{\text{kcal}/\text{kg}}$	57.90 $\frac{\text{Btu}/\text{slug}}{\text{kcal}/\text{kg}}$	1.800 $\frac{\text{Btu}/\text{lbm}}{\text{kcal}/\text{kg}}$	1.0 $\frac{\text{g} \cdot \text{cal}/\text{g}}{\text{kcal}/\text{kg}}$		8.850 $\frac{\text{pulg} \cdot \text{lb}}{\text{J}}$	25.73 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{J}}$	1.0E7 $\frac{\text{erg}}{\text{J}}$	Joule (J) (N · m)
	$\frac{\text{erg}}{\text{cm}}$	$\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{slug}}$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{pie} \cdot \text{lb}}{\text{lbm}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{slug}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{lbm}}$	$\frac{\text{g} \cdot \text{cal}}{\text{g}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$		2.681 $\frac{\text{pie} \cdot \text{poundal}}{\text{pulg} \cdot \text{lb}}$	1.130 $\frac{\text{erg}}{\text{pulg} \cdot \text{lb}}$	pulg · lb
											4.214E5 $\frac{\text{erg}}{\text{pie} \cdot \text{poundal}}$	pie · poundal
												erg (dina · cm)

TABLA 6
PROPIEDADES DE ÁREAS COMUNES

PROPIEDADES DE ÁREAS GEOMÉTRICAS COMUNES

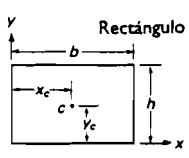
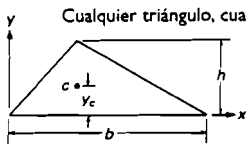
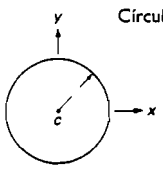
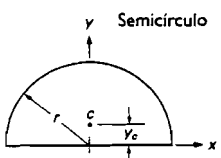
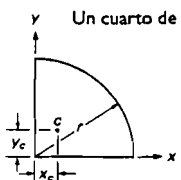
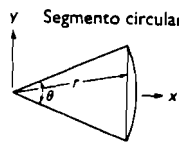
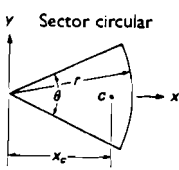
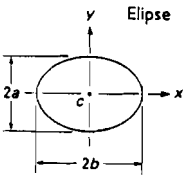
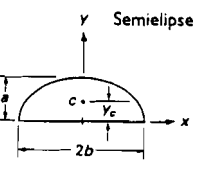
Forma	Área	x_c	y_c	I_{xc}	I_{yc}	I_{xyc}
 <p>Rectángulo</p>	bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_x = \frac{bh^3}{3}$	$I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{3}$	$I_{xy} = \frac{bh}{3}$ $(h^2 + b^2)$
 <p>Cualquier triángulo, cualquier lado</p>	$\frac{bh}{2}$	—	$\frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$	—	—
 <p>Círculo</p>	πr^2	0	0	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$	0
 <p>Semicírculo</p>	$\frac{\pi r^2}{2}$	0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)$ $= 0.110r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$ $= 0.3927r^4$	0
 <p>Un cuarto de círculo</p>	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^4}{16} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)$ $= 0.0549r^4$	$\frac{\pi r^4}{16} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)$ $= 0.0549r^4$	—
 <p>Segmento circular</p>	$\frac{r^2}{2} (\theta - \text{sen } \theta)$	—	—	—	—	—
 <p>Sector circular</p>	$\frac{\theta r^2}{2}$	$\frac{2r \text{ sen } \theta}{3\theta}$	0	$\frac{r^4}{16} \left(\theta - \frac{\text{sen } 2\theta}{2}\right)$	—	0
 <p>Elipse</p>	πab	0	0	$\frac{\pi ba^3}{4}$	$\frac{\pi ab^3}{4}$	0
 <p>Semi-elipse</p>	$\frac{\pi ab}{2}$	0	$\frac{4b}{3\pi}$	—	$\frac{\pi ab^3}{8}$	0

TABLA 7
PROPIEDADES FÍSICAS DEL AGUA Y DE ALGUNOS LÍQUIDOS
COMUNES

Propiedades físicas del agua ordinaria y algunos líquidos comunes (unidades SI)

Líquido	Temperatura T (°C)	Densidad ρ (kg/m ³)	Densidad relativa S	Viscosidad absoluta μ (N · s/m ²)	Viscosidad cinemática ν (m ² /s)	Tensión superficial σ (N/m)	Módulo de elasticidad volumétrico isotérmico E_v (N/m ²)	Coefficiente de expansión térmica α_T (K ⁻¹)
Agua	0	1000	1.000	1.79 E-3	1.79 E-6	7.56 E-2	1.99 E9	6.80 E-5
	10	1000	1.000	1.31 E-3	1.31 E-6	7.42 E-2	2.12 E9	8.80 E-5
	20	998	0.998	1.00 E-3	1.00 E-6	7.28 E-2	2.21 E9	2.07 E-4
	30	996	0.996	7.98 E-4	8.01 E-7	7.12 E-2	2.26 E9	2.94 E-4
	40	992	0.992	6.53 E-4	6.58 E-7	6.96 E-2	2.29 E9	3.85 E-4
	50	988	0.988	5.47 E-4	5.48 E-7	6.79 E-2	2.29 E9	4.58 E-4
	60	983	0.983	4.67 E-4	4.75 E-7	6.62 E-2	2.28 E9	5.23 E-4
	70	978	0.978	4.04 E-4	4.13 E-7	6.64 E-2	2.24 E9	5.84 E-4
	80	972	0.972	3.55 E-4	3.65 E-7	6.26 E-2	2.20 E9	6.41 E-4
	90	965	0.965	3.15 E-4	3.26 E-7	—	2.14 E9	6.96 E-4
	100	958	0.958	2.82 E-4	2.94 E-7	5.89 E-2	2.07 E9	7.50 E-4
Mercurio	0	13600	13.60	1.68 E-3	1.24 E-7	—	2.50 E10	—
	4	13590	13.59	—	—	—	—	—
	20	13550	13.55	1.55 E-3	1.14 E-7	37.5 E-2	2.50 E10	1.82 E-4
	40	13500	13.50	1.45 E-3	1.07 E-7	—	—	1.82 E-4
	60	13450	13.45	1.37 E-3	1.02 E-7	—	—	1.82 E-4
	80	13400	13.40	1.30 E-3	9.70 E-8	—	—	1.83 E-4
Etilén-glicol	0	—	—	5.70 E-2	—	—	—	—
	20	1110	1.11	1.99 E-2	1.79 E-5	—	—	—
	40	1110	1.10	9.13 E-3	8.30 E-6	—	—	—
	60	1090	1.09	4.95 E-3	4.54 E-6	—	—	—
	80	1070	1.07	3.02 E-3	2.82 E-6	—	—	—
	100	1060	1.06	1.99 E-3	1.88 E-6	—	—	—
Alcohol metílico (metanol)	0	810	0.810	8.17 E-4	1.01 E-6	2.45 E-2	9.35 E8	—
	10	801	0.801	—	—	2.26 E-2	8.78 E8	—
	20	792	0.792	5.84 E-4	7.37 E-7	—	8.23 E8	—
	30	783	0.783	5.10 E-4	6.51 E-7	—	7.72 E8	—
	40	774	0.774	4.50 E-4	5.81 E-7	—	7.23 E8	—
	50	765	0.765	3.96 E-4	5.18 E-7	—	6.78 E8	—
Alcohol etílico (etanol)	0	806	0.806	1.77 E-3	2.20 E-6	2.41 E-2	1.02 E9	—
	20	789	0.789	1.20 E-3	1.52 E-6	—	9.02 E8	—
	40	772	0.772	8.34 E-4	1.08 E-6	—	7.89 E8	—
	60	754	0.754	5.92 E-4	7.85 E-7	—	6.78 E8	—
Octano normal	0	718	0.718	7.06 E-4	9.83 E-7	—	1.00 E9	—
	16	—	—	5.74 E-4	—	—	—	—
	20	702	0.702	5.42 E-4	7.72 E-7	—	—	—
	25	—	—	—	—	—	8.35 E8	—
40	686	0.686	4.33 E-4	6.31 E-7	—	7.48 E8	—	
Benceno	0	900	0.900	9.12 E-4	1.01 E-6	3.02 E-2	1.23 E9	—
	20	879	0.879	6.52 E-4	7.42 E-7	2.76 E-2	1.06 E9	—
	40	858	0.858	5.03 E-4	5.86 E-7	—	9.10 E8	—
	60	836	0.836	3.92 E-4	4.69 E-7	—	7.78 E8	—
80	815	0.815	3.29 E-4	4.04 E-7	—	6.48 E8	—	
Keroseno	-18	841	0.841	7.06 E-3	8.40 E-6	—	—	—
	20	814	0.814	1.90 E-3	2.37 E-6	2.9 E-2	—	—
Aceite lubricante	20	871	0.871	1.31 E-2	1.50 E-5	—	—	—
	40	858	0.858	6.81 E-3	7.94 E-6	—	—	—
	60	845	0.845	4.18 E-3	4.95 E-6	—	—	—
	80	832	0.832	2.83 E-3	3.40 E-6	—	—	—
	100	820	0.820	2.00 E-3	2.44 E-6	—	—	—
	120	809	0.809	1.54 E-3	1.90 E-6	—	—	—

TABLA 8
PROPIEDADES DE LA ATMÓSFERA ESTÁNDAR DE ESTADOS
UNIDOS

Propiedades de la atmósfera estándar de Estados Unidos (unidades SI)

Altitud geométrica z (m)	Temperatura: T (K)	Presión p (Pa)	Densidad ρ (kg/m ³)	Aceleración de la gravedad g (m/s ²)	Viscosidad μ (N · s/m ²)	Viscosidad cinemática ν (m ² /s)
-5000	320.7	1.778 E5	1.931	9.822	1.942 E-5	1.006 E-5
-4000	314.2	1.596 E5	1.770	9.819	1.912 E-5	1.081 E-5
-3000	307.7	1.430 E5	1.619	9.816	1.882 E-5	1.163 E-5
-2000	301.2	1.278 E5	1.478	9.813	1.852 E-5	1.253 E-5
-1000	294.7	1.139 E5	1.347	9.810	1.821 E-5	1.352 E-5
0	288.2	1.013 E5	1.225	9.807	1.789 E-5	1.461 E-5
1000	281.7	8.988 E4	1.112	9.804	1.758 E-5	1.581 E-5
2000	275.2	7.950 E4	1.007	9.801	1.726 E-5	1.715 E-5
3000	268.7	7.012 E4	9.093 E-1	9.797	1.694 E-5	1.863 E-5
4000	262.2	6.166 E4	8.194 E-1	9.794	1.661 E-5	2.028 E-5
5000	255.7	5.405 E4	7.364 E-1	9.791	1.628 E-5	2.211 E-5
6000	249.2	4.722 E4	6.601 E-1	9.788	1.595 E-5	2.416 E-5
7000	242.7	4.111 E4	5.900 E-1	9.785	1.561 E-5	2.646 E-5
8000	236.2	3.565 E4	5.258 E-1	9.782	1.527 E-5	2.904 E-5
9000	229.7	3.080 E4	4.671 E-1	9.779	1.493 E-5	3.196 E-5
10000	223.3	2.650 E4	4.135 E-1	9.776	1.458 E-5	3.525 E-5
15000	216.7	1.211 E4	1.948 E-1	9.761	1.422 E-5	7.300 E-4
20000	216.7	5.529 E3	8.891 E-2	9.745	1.422 E-5	1.599 E-4
30000	226.5	1.197 E3	1.841 E-2	9.715	1.475 E-5	8.013 E-4
40000	250.4	2.871 E2	3.996 E-3	9.684	1.601 E-5	4.007 E-3
50000	270.7	7.978 E1	1.027 E-3	9.654	1.704 E-5	1.659 E-2
60000	255.8	2.246 E1	3.059 E-4	9.624	1.629 E-5	5.324 E-2
70000	219.7	5.520 E0	8.754 E-5	9.594	1.438 E-5	1.643 E-1
80000	180.7	1.037 E0	1.999 E-5	9.564	1.216 E-5	6.058 E-1
90000	180.7	1.644 E-1	3.170 E-6	9.535	1.216 E-5	3.837 E0

Propiedades físicas del aire seco y de gases comunes a presión atmosférica (unidades SI)

Gas	Temperatura T (°C)	Densidad ρ (kg/m ³)	Viscosidad absoluta μ (N · s/m ²)	Viscosidad cinemática ν (m ² /s)	Constante del gas R (N · m/kg · K)	Calor específico a presión constante c_p (N · m/kg · K)	Calor específico a volumen constante c_v (N · m/kg · K)	Relación de calores específicos k
Aire	0	1.290	1.71 E-5	1.33 E-5	287.0	1003.6	716.4	1.40
	50	1.090	1.95 E-5	1.79 E-5	287.0	—	—	1.40
	100	0.946	2.17 E-5	2.30 E-5	287.0	1010.3	723.1	1.40
	150	0.835	2.38 E-5	2.85 E-5	287.0	—	—	1.40
	200	0.746	2.57 E-5	3.45 E-5	287.0	1024.5	737.3	1.39
	250	0.675	2.75 E-5	4.08 E-5	287.0	—	—	1.39
	300	0.616	2.93 E-5	4.75 E-5	287.0	1044.6	757.8	1.38
	400	0.525	3.25 E-5	6.20 E-5	287.0	1068.5	781.3	1.37
	500	0.457	3.55 E-5	7.77 E-5	287.0	1092.3	805.1	1.36
Hidrógeno	0	0.0900	8.4 E-6	9.33 E-6	4122.0	14194.9	10070.5	1.41
	100	0.0659	1.03 E-5	1.56 E-5	4122.0	14448.2	10323.8	1.40
	200	0.0520	1.21 E-5	2.33 E-5	4122.0	14504.3	10379.9	1.40
	300	0.0429	1.39 E-5	3.24 E-5	4122.0	14533.2	10408.8	1.40
	400	0.0365	1.54 E-5	4.22 E-5	4122.0	14508.9	10456.5	1.39
	500	0.0318	1.69 E-5	5.31 E-5	4122.0	14662.2	10537.8	1.39
Oxígeno	0	1.430	1.92 E-5	1.34 E-5	259.8	914.8	654.8	1.40
	100	1.050	2.44 E-5	2.32 E-5	259.8	933.7	673.7	1.39
	200	0.824	2.90 E-5	3.52 E-5	259.8	963.0	703.0	1.37
	400	0.579	3.69 E-5	6.37 E-5	259.8	1023.7	763.7	1.34
	600	0.447	4.35 E-5	9.73 E-5	259.8	1068.9	808.9	1.32
	800	0.363	4.93 E-5	1.36 E-4	259.8	1099.9	840.3	1.31
Nitrógeno	0	1.250	1.66 E-5	1.33 E-5	296.7	1039.2	742.3	1.40
	100	0.915	2.08 E-5	2.27 E-5	296.7	1042.1	745.3	1.40
	200	0.722	2.46 E-5	3.41 E-5	296.7	1051.7	755.3	1.39
	400	0.507	3.11 E-5	6.13 E-5	296.7	1091.5	794.7	1.37
	600	0.391	3.66 E-5	9.36 E-5	296.7	1139.2	842.4	1.35
	800	0.318	4.13 E-5	1.30 E-4	296.7	1181.5	884.7	1.34
Helio	0	0.178	1.86 E-5	1.04 E-4	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
	100	0.131	2.29 E-5	1.75 E-4	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
	200	0.103	2.70 E-5	2.62 E-4	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
	300	0.0850	3.07 E-5	3.61 E-4	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
	400	0.0724	3.42 E-5	4.72 E-4	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
	600	0.0558	4.07 E-5	7.29 E-4	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
	800	0.0454	4.65 E-5	1.02 E-3	2079.0	5229.0	3137.4	1.67
Dióxido de carbono	0	1.96	1.38 E-5	7.04 E-6	188.8	814.8	625.9	1.30
	100	1.44	1.85 E-5	1.28 E-5	188.8	913.6	724.7	1.26
	200	1.13	2.68 E-5	2.37 E-5	188.8	992.7	803.9	1.23
	300	0.936	—	—	188.8	1056.7	867.9	1.22
	400	0.797	—	—	188.8	1110.3	921.1	1.21
	600	0.615	—	—	188.8	1192.0	1002.7	1.19



Universidad de Navarra Escuela Superior de Ingenieros
Nafarroako Unibertsitatea Ingeniarien Goi Mailako Eskola

ISBN