UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA - *SANTA MARÍA DE LOS BUENOS AIRES*
FACULTAD DE FISICOMATEMÁTICAS E INGENIERÍA
CÁTEDRA DE MECÁNICA DE FLUIDOS
EXAMEN PARCIAL – 30 DE ABRIL 2013

Nombre y apellido: ______________________________ Legajo ______________

ANTES DE COMENZAR A RESPONDER PRESTE ATENCIÓN

- Lea atentamente las consignas y responda claramente cada pregunta, detallando con la mayor precisión posible lo solicitado en cada ítem.
- Sea ordenado en el desarrollo de los temas.
- Se solicita prolijidad en la caligrafía a fin de no tener problemas en la corrección posterior.
- Sea cuidadoso con la ortografía y las unidades, se consideran incorrectas las respuestas que no contengan las unidades correspondientes.
- El tiempo estipulado para la resolución de los temas es de 130 MINUTOS como máximo.
- Condición de aprobación, 2 ejercicios de los tres propuestos, correctamente resueltos

TEORIA

Problema 1

Dos superficies planas de grandes dimensiones están separadas 32 mm y el espacio entre ellas está lleno con un líquido cuya viscosidad es de 0,15 poises. Suponiendo que el gradiente de velocidades es lineal, se pide:

a) .Que fuerza en N se requiere para arrastrar una placa de muy poco espesor y 0,5 m² de área a la velocidad constante de 20 cm/s si la placa dista 10 mm de una de las superficies?

b) ¿Cual es la potencia disipada en Watts?

1 Poise = 1 gr / cm .s $= 0{,}1 \frac{kg}{m \cdot s}$

Problema 2

Dado el campo de velocidades: $$\vec{V} = \left(16x^2 + y\right)\hat{i} + 10\hat{j} + yz^2\hat{k}$$

a) determinar la aceleración de la partícula en el punto:

$$\vec{r} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

b) Si se sustituye el campo de velocidades definido en a) por el siguiente:

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{1+t}, \frac{y}{1+2t}, 0\right)$$

Dar la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en cualquier instante t. Indicar cómo son las líneas en t = 0 y cuando $t \to \infty$.

Problema 3

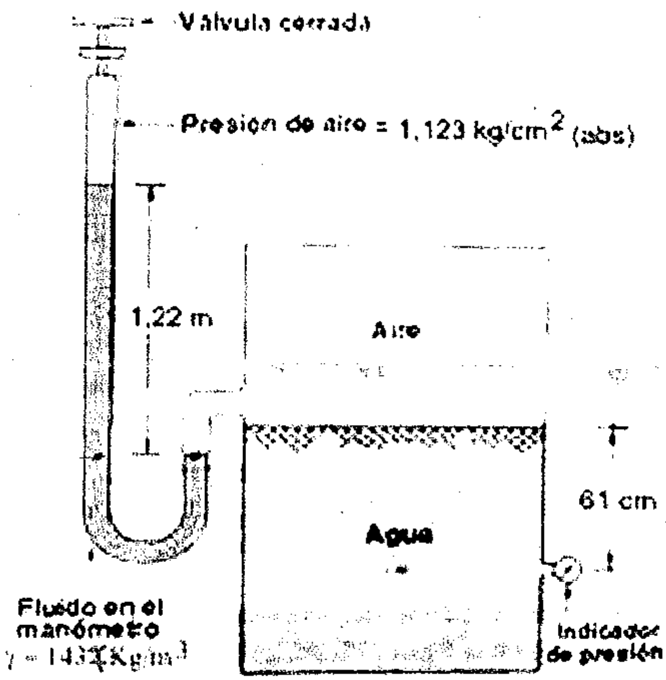
La elevación de presión en una bomba depende del diámetro D del rotor, su velocidad rotacional N, la densidad ρ, la viscosidad μ, y el caudal de descarga Q. Demuestre que la relación entre estas magnitudes puede expresarse de la siguiente forma:

$$\Delta p = \rho N^2 D^2 \Phi\left[\left(\frac{Q}{N D^3}\right).\left(\frac{\rho N D^2}{\mu}\right)\right]$$

PRACTICA

Problema 1

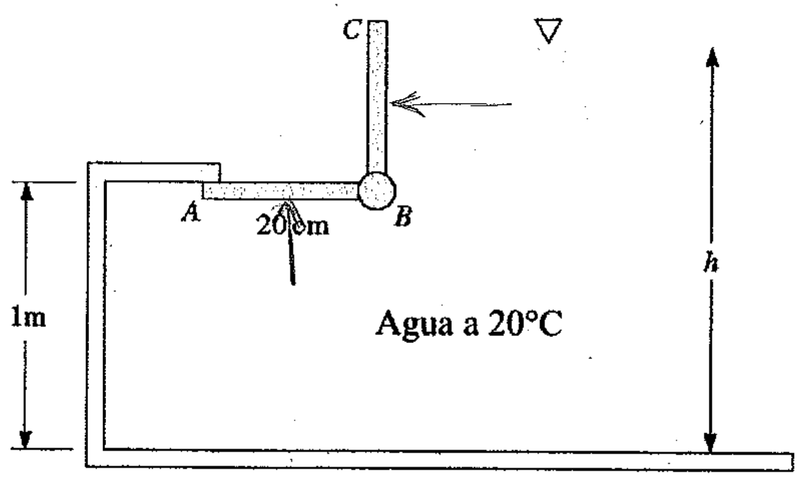
Un manómetro en U se conecta a un depósito cerrado que contiene aire y agua como se muestra en la figura. En el extremo cerrado del manómetro la presión del aire es de 1,123 Kg/cm² (absolutas). Determinar la lectura en el indicador de presión para una lectura del manómetro de 1,22 mts, expresar la respuesta en KPa y Kg/cm². Suponer que la presión de la atmósfera es de 1 Kg/cm² ó 101,3 KPa. Ignorar el peso de las columnas de aire.



Problema 2

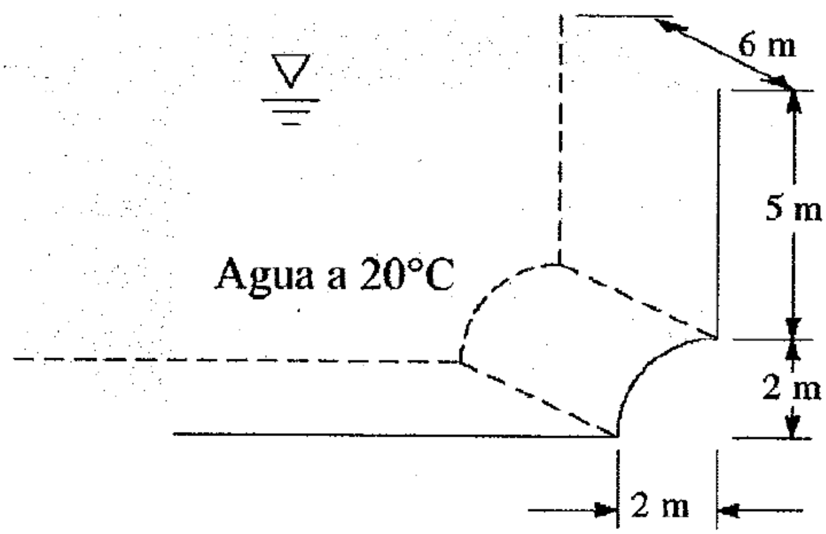
La puerta ABC puede girar sobre el punto B, tiene 2 mts de ancho (en dirección del papel) La puerta se abrirá en A si la profundidad del agua h es suficiente. Calcule cual será la altura h para cual la puerta se abrirá

Densidad del agua: 1000 Kg/m³



Problema 3

Calcule la fuerza horizontal y vertical sobre la superficie curva que se encuentra en el fondo del tanque mostrado en la figura.

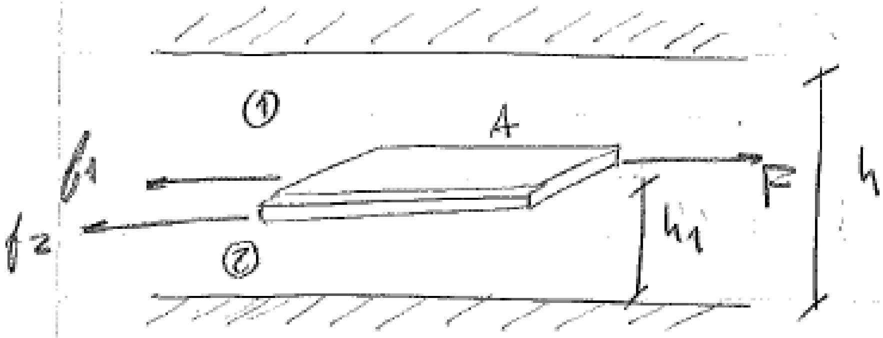


Teoría

Problema 1

a) Hallar $F\,[N]$; Fuerza de arrastre de placa.
Datos: h, μ, A, V, h_1

·) Planteamos un esquema del problema:



·) Resolución: dado $V = cte$, se infiere que $\boxed{\Sigma F = 0}$ (1)
En 1) considero:

F: Fuerza de arrastre
f_1, f_2: Fuerza aplicada por secciones 1 y 2 del fluido.

$$F - f_1 - f_2 = 0 \quad ; \quad \boxed{F = f_1 + f_2} \quad (2)$$

·) Considero fluido con gradiente lineal de velocidades. Para fluidos newtonianos:

$$\boxed{\tau = \mu \cdot \frac{\Delta v}{dy}} \Longrightarrow \boxed{\tau = \mu \cdot \frac{V}{e}} \quad (3)$$

con τ: tensión de corte, e: espesor

·) f_1 y f_2 se definen; $\boxed{f_1 = \tau_1 \cdot A}$ (4) $\boxed{f_2 = \tau_2 \cdot A}$ (5)

·) de newton: $f_1 = \mu \cdot \frac{V}{(h-h_1)} \cdot A$; $f_2 = \mu \cdot \frac{V}{h_1} \cdot A$

reemplazo en (2):

$$F = \frac{\mu \cdot V \cdot A}{h-h_1} + \frac{\mu \cdot V \cdot A}{h_1}$$

$$F = \mu \cdot V \cdot A \cdot \left(\frac{1}{h-h_1} + \frac{1}{h_1} \right)$$; reemplazo datos para $[F] = N$

$$F = 0{,}15\, \cancel{poise} \cdot \frac{0{,}1\, kg}{m \cdot s \cdot \cancel{poise}} \cdot 20 \frac{\cancel{cm}}{s} \cdot \frac{1m}{10^2 \cancel{cm}} \cdot 0{,}5\, m^2 \cdot \left(\frac{1}{(32-10)\cancel{mm}} + \frac{1}{10\, \cancel{mm}} \right) \cdot \frac{10^3 mm}{m}$$

$$[F] = \frac{kg}{\cancel{m} \cdot s} \cdot \frac{m}{s} \cdot \cancel{m^2} \cdot \frac{1}{\cancel{m}} = N$$, queda:

$$\boxed{F = 0{,}218\, N}$$ (6)

b) Calcular potencia disipada en Watts (W)

Dadas Fuerza "F" y velocidad "V" de un cuerpo, se define potencia $\dot{L}$ como:

$\boxed{\dot{L} = F \cdot V}$ (7) , reemplazo valores:

$$\dot{L} = 0{,}218\, \cancel{N} \cdot \frac{20\, \cancel{cm}}{\cancel{s}} \cdot \frac{1\, \cancel{m}}{10^2 \cancel{cm}} \cdot \frac{W \cdot \cancel{s}}{\cancel{N} \cdot \cancel{m}}$$

$$\boxed{\dot{L} = 4{,}36 \cdot 10^{-2}\, W}$$

Problema 2

a) Hallar $\bar{a}$ para $(6,3,2)$

Dado $\bar{V}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{V} = (16x^2+y\ ;\ 10\ ;\ yz^2)$

$\bar{V} = f(x,y,z,t)$; $\bar{V} = (u,v,w)$

para hallar $\bar{a}$ debemos aplicar el concepto de derivada total:

$\bar{a}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{a}(x,y,z,t)$, se define:

$$\bar{a} = \begin{cases} a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{0} \\ a_y = \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{0} + u\cdot\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}^{0} + v\cdot\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}^{0} + w\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}^{0} \\ a_z = \cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}^{0} + u\cdot\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}^{0} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\cdot\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

con $v = \text{cte}$, $\frac{\partial v}{\partial \square} = 0$

con u y w no dependientes del tiempo, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$

queda: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(16x^2+y)}{\partial x} = 32x$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(16x^2+y)}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial(yz^2)}{\partial y} = z^2$

$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(yz^2)}{\partial z} = 2yz$

Finalmente:

$$\bar{a} \begin{cases} a_x = (16x^2+y)\cdot 32x + 10\cdot 1 = 512x^3 + 32xy + 10 \\ a_y = 0 \\ a_z = 10\cdot z^2 + yz^2\cdot 2yz = 10z^2 + 2y^2z^3 \end{cases}$$

$$\bar{a} = \left(512x^3 + 32xy + 10\right)\hat{i} + \left(10z^2 + 2y^2z^3\right)\hat{k}$$

para el punto $(6,3,2)$:

$$\bar{a}(6,3,2) = \left(512\cdot 6^3 + 32\cdot 6\cdot 3 + 10\right)\hat{i} + \left(10\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2\cdot 2^3\right)\hat{k}$$

$$\boxed{\bar{a}(6,3,2) = 1{,}11\cdot 10^5\,\hat{i} + 184\,\hat{k}}$$

b) Hallar línea de corriente pasante por (x_0, y_0, z_0) para:

$$\bar{V}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \bar{V}(x,y,z,t) = (u, v, w)$$

con $w=0$.

Defino $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, con $\bar{r}$: vector posición de partículas.

$$\bar{r} = \left(x(t);\ y(t),\ z(t)\right); \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

queda: $\frac{dx}{dt} = u$; $\frac{dy}{dt} = v$, despejo dt:

$$dt = \frac{dx}{u}; \quad dt = \frac{dy}{v}, \quad \text{igualo ambos;}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad \text{integro ambos términos}$$

$$\frac{dx}{x/(1+t)} = \frac{dy}{y/(1+2t)}, \quad \text{reescribo}$$

$$(1+t)\cdot\int\frac{dx}{x} = (1+2t)\int\frac{dy}{y},$$

$$(1+t)\cdot \ln|x| = (1+2t)\cdot\left[\ln|y| + \ln|C|\right], \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{(1+t)}{(1+2t)} \cdot \ln|x| = \ln|y| + \ln|C|$$

propiedades de logaritmo:

① $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

② $c \cdot \ln(a) = \ln(a^c)$

aplico ambas:

$$\ln|y| + \ln|C| = \ln|y \cdot C|$$

$$\left(\frac{1+t}{1+2t}\right) \cdot \ln|x| = \ln|x|^{(1+t/1+2t)}$$

queda:

$$e^{\left[\ln|x|^{\left(\frac{1+t}{1+2t}\right)}\right]} = e^{\left[\ln|y \cdot C|\right]}$$

queda:

$$|x|^{\frac{(1+t)}{(1+2t)}} = |y| \cdot |C|$$

para un punto $(x, y) = (x_0, y_0)$

$$|x_0|^{\frac{(1+t)}{(1+2t)}} = |y_0| \cdot |C|$$

despejo C:

$$|C| = \frac{|x_0|^{(1+t)/(1+2t)}}{|y_0|}$$

finalmente:

$$|y| = \left[\frac{|y_0|}{|x_0|^{(1+t)/(1+2t)}}\right] \cdot |x|^{(1+t)/(1+2t)}$$

$$\boxed{|y| = |y_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{[(1+t)/(1+2t)]}}$$

tengo casos:

1) para $\tau \to 0$,

$$|y| = |y_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{\left(\frac{1+\tau^{\to 0}}{1+2\tau^{\to 0}}\right)}$$

$$|y| = |y_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{\frac{1}{1}}, \qquad |y| = |y_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|$$

ó, $$\boxed{|y| = \left|\frac{y_0}{x_0}\right| \cdot |x|}$$

2) para $\tau \to \infty$; $$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1+\tau}{1+2\tau} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\cancel{1/\tau}^{\,0} + \tau/\tau}{\underset{0}{1/\tau} + 2\tau/\tau} = \frac{1}{2}$$

queda: $$\boxed{|y| = |y_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

③ $\Delta P = f(D, N, \rho, \mu, Q)$

$[D] = l$ $\quad [\rho] = m/l^3$ $\quad [Q] = l^3/t$

$[N] = 1/t$ $\quad [\mu] = m/l t$ $\quad [\Delta P] = \dfrac{m}{l t^2}$

$$[\Pi_1] = (l)^\alpha \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^\beta \cdot \left(\frac{m}{l^3}\right)^\gamma \cdot \frac{m}{l t}$$

$$\begin{aligned} l)&\quad \alpha - 3\gamma - 1 = 0 & \alpha &= -2 \\ t)&\quad -\beta - 1 = 0 & \beta &= -1 \\ m)&\quad \gamma + 1 = 0 & \gamma &= -1 \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = D^{-2} \cdot N^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu$$

$$[\Pi_2] = (l)^\alpha \left(\frac{1}{t}\right)^\beta \left(\frac{m}{l^3}\right)^\gamma \cdot \frac{l^3}{t}$$

$$\begin{aligned} l)&\quad \alpha - 3\gamma + 3 = 0 & \alpha &= -3 \\ t)&\quad -\beta - 1 = 0 & \beta &= -1 \\ m)&\quad \gamma = 0 & \gamma &= 0. \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = D^{-3} \cdot N^{-1} \cdot Q$$

$$[\Pi_3] = (l)^\alpha \left(\frac{1}{t}\right)^\beta \left(\frac{m}{l^3}\right)^\gamma \cdot \frac{m}{l t^2}$$

$$\begin{aligned} l)&\quad \alpha - 3\gamma - 2 = 0 & \alpha &= -2 \\ t)&\quad -\beta - 2 = 0 & \beta &= -2 \\ m)&\quad \gamma + 1 = 0 & \gamma &= -1 \end{aligned}$$

$$\Pi_3 = D^{-2} \cdot N^{-2} \cdot \rho^{-1} \cdot \Delta P$$

$$\Rightarrow \Pi_3 = f(\Pi_1, \Pi_2)$$

$$\Delta P = D^2 N^2 \rho \; f\left(D^2 N \rho \mu^{-1}, D^3 N Q\right)$$

PROBLEMAS

(1) $P_{ext} = 1{,}123\ \overrightarrow{kg}/cm^2 = 11230\ \overrightarrow{kg}/m^2$

$$P_{fond} = P_{ext} + \gamma_{fluido} \cdot h_{manóm.} + \gamma_{H_2O} \cdot h_{agua}$$

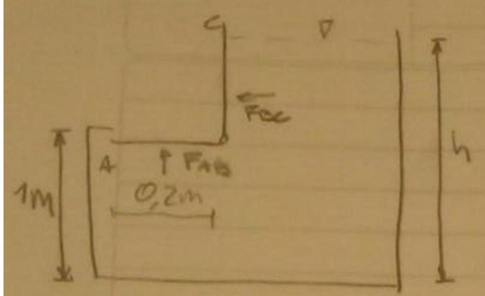
$$= 11230\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} + 1437\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^3} \cdot 1{,}22\,m + 1000\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^3} \cdot 0{,}61\,m =$$

$$= 11230\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} + 1753{,}14\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} + 610\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} = 13593{,}14\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}$$

Rta $\quad P_{fond} = 13593{,}14\ \frac{\overrightarrow{kg}}{m^2} = 1{,}359\ \frac{\overrightarrow{kg}}{cm^2} = 133{,}21\ kPa.$

Problema 2

b: ancho de compuerta; b = 2m



·) $F_{AB} = \gamma \, h_{AB} \, Area)_{AB}$

$$\boxed{F_{AB} = \delta \cdot g \cdot (h-1)m \cdot b \cdot l_{AB}} \; ①$$

·) $F_{BC} = \gamma \, h_{BC} \, A_{BC}$

$$F_{BC} = \delta \cdot g \, \frac{(h-1)}{2} m \cdot b \cdot (h-1) m$$

$$\boxed{F_{BC} = \delta \cdot g \cdot b \, \frac{1}{2} (h-1)^2 m^2} \; ②$$

$$y_{cp} = y_c + \frac{I_{xx}}{y_c A} \longrightarrow I_{xx} = \frac{H b^3}{12} \text{, llamo } H = h-1$$

$$y_{cp} = \frac{H}{2} + \frac{H^{\cancel{3}\,2}\, 2/12}{\cancel{\frac{H}{2}}\, \cancel{2}\, \cancel{H}} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = H\left(\frac{6+2}{12}\right)$$

$$\boxed{y_{cp} = \frac{2}{3}(h-1)} \; ③$$

·) para compuerta en reposo: $\sum M_B = 0$; ref (+) (−)

$$\boxed{F_{AB} \cdot \frac{l_{AB}}{2} - F_{BC} \cdot (\overset{(h-1)}{l_{BC}} - y_{cp}) = 0}$$

$$\delta g \, b \, l_{AB} (h-1) \cdot \frac{l_{AB}}{2} - \delta \cdot g \, b \, \frac{1}{2} (h-1)^2 \left((h-1) - \frac{2}{3}(h-1)\right) = 0$$

$$\cancel{\frac{\delta g b}{2}} \left[\left(l_{AB}^2 (h-1)\right) - (h-1)^2 (h-1)\left(1 - \frac{2}{3}\right) \right] = 0$$

$$l_{AB}^2 (h-1) - (h-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3}(h-1)^3 - l_{AB}^2 (h-1) = 0$$

$$\frac{1}{3}(h-1)^2 = l_{AB}^2 \longrightarrow h = \sqrt{3 l_{AB}^2} + 1m$$

$$h = \sqrt{3 (0{,}2m)^2} + 1m \quad \boxed{h = 1{,}34\, m}$$

(3)

$$F_H = \gamma \cdot h_{cg} \cdot A = 9800 \frac{N}{m^3} \cdot (5m + 1m) \cdot (2m \cdot 6m)$$

$$F_H = 705{,}6 \ kN.$$

$$F_V = \gamma \cdot V_{fluido} = 9800 \frac{N}{m^3} \left(6m \cdot 7m \cdot 2m - \frac{\pi (2m)^2}{4} \cdot 6m \right)$$

$$F_V = 9800 \frac{N}{m^3} \left(84 m^3 - 9{,}42 m^3 \right) =$$

$$F_V = 730{,}84 \ kN.$$

$$\frac{\pi R^2}{4} = \pi$$