UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA *SANTA MARÍA DE LOS BUENOS AIRES*
FACULTAD DE FISICOMATEMÁTICAS E INGENIERÍA
CÁTEDRA DE MECÁNICA DE FLUIDOS
PRIMER PARCIAL 30-09-09

NOTA. Para aprobar este examen se requiere haber resuelto correctamente al menos dos problemas de cada una de las partes.

PARTE TEÓRICA

Problema 1

La función potencial de un flujo bidimensional está dada por:

$$\phi = xy + x^2 - y^2$$

a) Encontrar la función corriente ψ para este flujo y,
b) Hallar el módulo del vector velocidad para el punto (1,2).
c) Definir si el flujo es: permanente o no permanente, compresible o incompresible, viscoso o no viscoso, ¿es rotacional o irrotacional?, ¿podría ser laminar o turbulento? Justificar cada una de las afirmaciones.

Problema 2:

a) Un flujo incompresible estacionario está definido por el siguiente campo de velocidades:

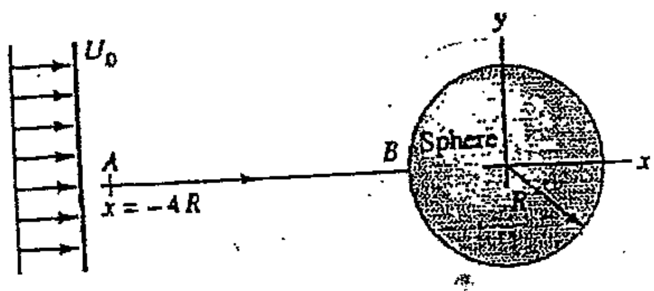
$$\mathbf{V} = 4xy^2\,\mathbf{i} + f(y)\,\mathbf{j} - zy^2\,\mathbf{k}$$

Halla la función f(y) para que el flujo cumpla con la ecuación de continuidad.

b)

Considere una esfera de radio R inmersa en un flujo uniforme de velocidad U_0 como se muestra. La expresión de la velocidad a lo largo de la línea de corriente AB está dada por la siguiente expresión:

$$V = u = U_0(1+(R/x)^3)$$

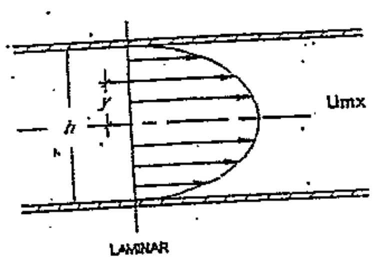


a) Hallar el punto en el que ocurre la aceleración máxima a lo largo de la línea AB

Problema 3

Considere un flujo laminar de un fluido newtoniano de viscosidad μ entre dos placas planas paralelas de gran longitud y de ancho b, el flujo es uní axial, y su perfil de velocidades que se muestra en la figura está dado por:

$$u(y) = 4U_{mx}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$



Desarrolle una relación para la fuerza de arrastre por unidad de longitud, ejercida sobre las placas por el fluido. de 2 formas ≠.

Primer Parcial N° 7

Problema N°1

Dada la función potencial $\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ asociada al fluido bidimensional mencionado.

a) Hallar función corriente ψ

Para un campo de velocidades $\bar{V}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $\bar{V}(x,y) = u(x,y)\,\hat{i} + v(x,y)\,\hat{j}$; dada la función corriente ψ, se asocia:

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y}} \;(1) \quad ; \quad \boxed{v = \frac{-\partial \psi}{\partial x}} \;(2)$$

Dada la función ϕ potencial, se tiene también:

$$\boxed{u = \frac{\partial \phi}{\partial x}} \;(3) \quad ; \quad \boxed{v = \frac{\partial \phi}{\partial y}} \;(4)$$

Se concibe entonces; de (1) y (3); de (2) y (4):

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}} \;(5) \quad , \quad \boxed{-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}} \;(6)$$

Resolución: de (5): $\quad \partial \psi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \partial y \longrightarrow \boxed{\psi = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dy + f(x)}$ (5*)

de (6) y (5*):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial \left[\int \frac{\partial \phi}{\partial x} dy\right]}{\partial x} - f'(x) \\[2ex] -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \longrightarrow \boxed{f(x) = \int \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dx + C} \;(6^*)$$

donde $C \in \mathbb{R}$; de (5*) y (6*);

$$(7) \quad \boxed{\psi(x,y) = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dy + \int \frac{d\phi}{\partial y}\, dx + C}$$

de ⑤; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial(xy+x^2-y^2)}{\partial x} = \dfrac{\partial(xy)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(-y^2)}{\partial x}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y + 2x + 0 = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\partial\psi = (y+2x)\,\partial y$$

$$\int_0^{\psi}\partial\psi = \int_0^{y}(y+2x)\,\partial y + f(x) \longrightarrow \boxed{\psi = \frac{y^2}{2} + 2xy + f(x)} \; ⑤^*$$

de ⑥ y ⑤*: $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \longrightarrow \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = \dfrac{\partial(xy+x^2-y^2)}{\partial y} =$

$$= \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} = x + 0 - 2y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2y - x}$$

de ⑤*; $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(\frac{y^2}{2} + 2xy + f(x)\right)}{\partial x}$

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 + 2y + f'(x)} \; ⑤^*$$

$$\cancel{2y} - x = \cancel{2y} + f'(x) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -x$$

$$\int_0^{f}\partial f = \int_0^{x} -x\,\partial x \longrightarrow \boxed{f(x) = -\frac{x^2}{2} + C}$$

Finalmente: $\boxed{\psi(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + 2xy - \dfrac{x^2}{2} + C}$ ⑦

b) Hallar $\bar{V}$ en $(1,2)$; de ③: $u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = y + 2x$

de ④; $v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x - 2y$

$$\bar{V}(1,2) = (2+2\cdot 1,\; 1-2\cdot 2) \longrightarrow \boxed{\bar{V}(1,2) = 4\hat{i} - 3\hat{j}} \; ⑧$$

2

⊕ ¿Flujo permanente? Si, dado que $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$, no cambia respecto al tiempo.

⊕ ¿Compresible? El flujo es incompresible si $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(y+2x)}{\partial x} + \frac{\partial(x-2y)}{\partial y}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 2 - 2 = 0; \Rightarrow \boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0}$$, es incompresible.

⊕ ¿Viscoso? Segun White, en "Mecanica de Fluidos", para un fluido viscoso en $\mathbb{R}^2$ con tensiones de corte "τ" dadas por friccion, viscosidad "μ" (asumo fluido newtoniano):

Ecs. Navier Stokes:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right) = \rho \frac{du}{dt}$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right) = \rho \frac{dv}{dt}$$

$$\cancel{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho \frac{dw}{dt}}$$

(Anulo los terminos con respecto a la variable z)

Veamos: i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial(y+2x)}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial(y+2x)}{\partial y}\right)}{\partial y} =$

$$= \frac{\partial(2)}{\partial x} + \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0 + 0 \checkmark$$

ii) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial(x-2y)}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{\partial(x-2y)}{\partial x}\right)}{\partial x} =$

$$= \frac{\partial(-2)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0 \checkmark$$

Se anulan los terminos asociados a μ. ∴, el fluido no es viscoso.

¿Rotacional? El campo es irrotacional si $\bar{\nabla} \times \bar{V} = \bar{0}$

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} ; \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} , \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \left(0 - 0 ; 0 - 0 ; \frac{\partial(x-2y)}{\partial x} - \frac{\partial(y+2x)}{\partial y} \right) =$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = (0; 0; 1-1) \longrightarrow \boxed{\bar{\nabla} \times \bar{v} = (0; 0; 0)}$$ ✓ → es irrotacional

---

Problema N°2 a)

Dado $V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{V} = (u, v, w)$, incompresible, estacionario

Hallar $f(y)$ para que se cumpla la ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad se define:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0} \quad (1)$$ para flujo incompresible,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \; ; \; \therefore \; \boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0} \quad (2)$$ Aplico ec. (2):

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = \frac{\partial(4xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(f(y))}{\partial y} + \frac{\partial(-zy^2)}{\partial z} = 0$$

$$= 4y^2 + \frac{\partial f}{\partial y} - y^2 = 0$$, despejo $\partial f / \partial y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 \Longrightarrow \partial f = -3y^2 \, \partial y$$

$$f = \int -3y^2 \, dy + C$$

$$f = \frac{-3}{3} y^3 + C \longrightarrow \boxed{f(y) = -y^3 + C} \quad (3)$$

$C \in \mathbb{R}$

· Verifico ec. 3 en 2: (3)

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(4xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^3+c)}{\partial y} + \frac{\partial(-zy^2)}{\partial z} =$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 4y^2\cancel{\frac{\partial x}{\partial x}} - 3y^2 + 0 + y^2 \cdot \frac{\partial(-z)}{\partial z} =$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 4y^2 - 3y^2 - y^2 = 4y^2 - 4y^2 \rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 0}$$ ✓

Problema N°2 b)

Dado $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\boxed{u = U_0\left[1+(R/x)^3\right]}$ (1); hallar punto con aceleración máxima:

Aplicamos derivada total para el cálculo de aceleración $\bar{a}$.

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\cdot\bar{V}} \quad (2)$$; desarrollando (2):

$$\bar{a} = \begin{cases} a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \cancel{v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} + \cancel{w\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} \\ a_y = \cancel{\partial v/\partial t} + \cancel{u\,\partial v/\partial x} + \cancel{v(\partial v/\partial y)} + \cancel{w(\partial v/\partial z)} \\ a_z = \cancel{\partial w/\partial t} + \cancel{u(\partial w/\partial x)} + \cancel{v(\partial w/\partial y)} + \cancel{w(\partial w/\partial z)} \end{cases}$$

Anulo términos con $v=0$, $w=0$, $\partial\bar{V}/\partial t = \bar{0}$

$$\boxed{\bar{a} = u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\,\hat{i}} \quad (2^*)$$

de (1); $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left[U_0\left[1+(R/x)^3\right]\right]}{\partial x}$

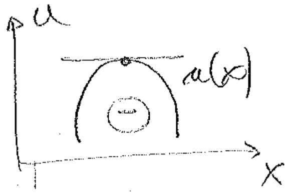
$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_0\cdot\left(\frac{\partial\left[1+(R/x)^3\right]}{\partial x}\right) = U_0\left(\frac{\partial(1)}{\partial x} + R^3\cdot\frac{\partial(x^{-3})}{\partial x}\right) =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_0\cdot\left(0 + R^3\cdot(-3)\cdot x^{-3-1}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = U_0\cdot\left(\frac{-3R^3}{x^4}\right)} \quad (3)$$

reemplazo (3) a (2^*) $\quad \bar{a} = U_0\cdot\left[1+\left(\frac{R^3}{x^3}\right)\right]\cdot U_0\cdot\left(\frac{-3R^3}{x^4}\right)$

$$\bar{a} = \frac{-3U_0^2R^3}{x^4}\left[1+\frac{R^3}{x^3}\right] \longrightarrow \boxed{\bar{a} = \frac{-3U_0^2R^3}{x^4} - \frac{3U_0^2R^6}{x^7}} \quad (4)$$

La $\bar{a}$ máxima ocurre cuando $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} < 0$



Cálculo: $\frac{\partial a}{\partial x} = -3U_0^2R^3\frac{\partial(x^{-4})}{\partial x} + (-3U_0^2R^6)\frac{\partial(x^{-7})}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \left[-3U_0^2R^3\cdot(-4)\cdot x^{-4-1}\right] + \left[(-3U_0^2R^6(-7)\cdot x^{-7-1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{12U_0^2R^3}{x^5} + \frac{21U_0^2R^6}{x^8} = 0$$

$$\cancel{U_0^2R^3}\left(\frac{12}{x^5} + \frac{21R^3}{x^8}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^5}}_{\text{nunca es cero}}\cdot\underbrace{\left(12 + \frac{21R^3}{x^3}\right)}_{\text{puede ser cero;}} = 0 \qquad \frac{1}{x^5} \neq 0 \ \forall\, x \in R$$

$$12 + \frac{21R^3}{x^3} = 0 \longrightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{-12}{21R^3}$$

$$x^3 = \frac{-21R^3}{12} \longrightarrow x = \left[\frac{(-1)\cdot 21\cdot R^3}{12}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{(-1)\cdot\sqrt[3]{21}\cdot R}{\sqrt[3]{12}}, \quad \text{Vemos que: } \begin{array}{r|l} 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} ; \begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$x = -1\cdot\sqrt[3]{\frac{7\cdot 3}{3\cdot 4}}\cdot R \longrightarrow \boxed{x = -\sqrt[3]{\frac{7}{4}}\cdot R} \quad (5)$$

$\bar{a}$

Problema N° 3: Hallar Fuerza de arrastre Fa (por u. de longitud) ④

Datos: $\boxed{u(y) = 4 \cdot U_m \cdot \left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2 \right]}$ ①

Consideraciones previas: -) Fluido Newtoniano
-) Sección transversal de conducto rectangular, área b.h
-) Consideramos Fa por unidad de longitud.

Resolución: $\boxed{F_a = \tau \cdot A}$ ② donde: τ = Tensión de corte por arrastre
A: área de aplicación.

·) Al ser fluido newtoniano; $\boxed{\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy}}$ ③. V: Velocidad del fluido

·) Por el área considerada; $\boxed{A = b \cdot l}$ ④ b: profundidad de sección
l: longitud unitaria.

·) De ③: $\frac{dv}{dy} = \frac{d\left[4U_m \cdot (y/h - y^2/h^2)\right]}{dy} = 4U_m\left[\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dy}\right) - \left(\frac{1}{h^2}\cdot\frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)\right]$

$$\frac{dv}{dy} = 4U_m\left[\frac{1}{h} - \frac{2y}{h^2}\right] \longrightarrow \boxed{\frac{dv}{dy} = \frac{4U_m}{h}\left[1 - \frac{2y}{h}\right]} \quad ⑤$$

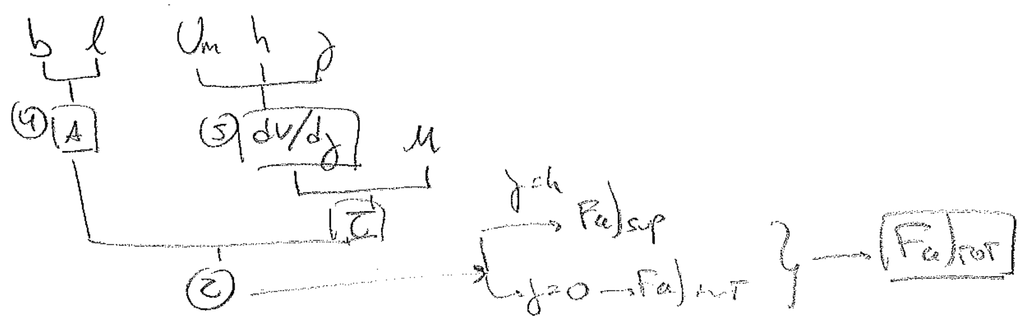
·) Dado que la fuerza de arrastre se manifiesta en superficies superior e inferior;

$$F_a)_{total} = F_a)_{sup} + F_a)_{inf}$$

$$\boxed{F_a)_{TOT} = F_a)_{y=h} + F_a)_{y=0}} \quad ⑥$$

Según sistema de referencia indicado en el dibujo.

Esquema:



de ④ y ⑤: $\tau = \frac{\mu \cdot 4\, U_m}{h}\left[1 - \frac{2y}{h}\right]$, $A = b \cdot l$

$$\boxed{F_a = \frac{\mu \cdot 4 \cdot U_m \cdot b \cdot l}{h}\left[1 - \frac{2y}{h}\right]}$$