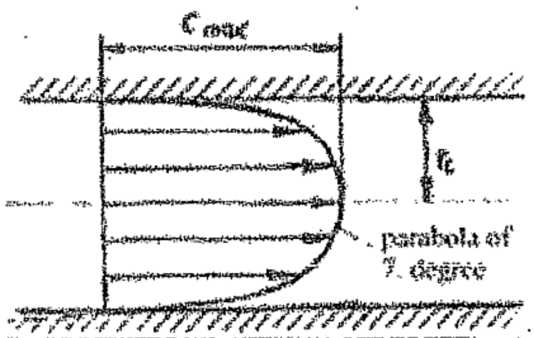
UCA
Ingeniería

MECANICA DE LOS FLUIDOS
PRIMER PARCIAL 5-10-2015
TEMA 1

PARA APROBAR ESTE EXAMEN TENDRÁN QUE RESOLVER CORRECTAMENTE, AL MENOS, DOS EJERCICIOS DE CADA UNA DE LAS PARTES

Problema 1 -PARTE TEÓRICA



El perfil de la figura corresponde al flujo en un tubo de radio r_0 cuyo perfil de velocidades es parabólico de orden 7 dado por:

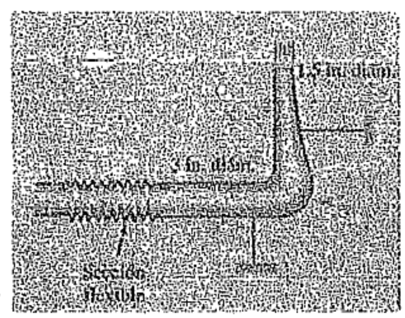
$$\overline{V} = V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^7 \right)$$

a) Hallar la relación V/V_0=?

b) Hallar la relación para el caso general en que la potencia sea "n".

Problema 2- PARTE TEÓRICA

A través del codo de una tubería horizontal fluye agua y sale a la atmósfera como muestra la figura. La velocidad del flujo es de $0.3\ ft^3/s$. Hallar la fuerza en cada una de las varillas que mantienen el codo en la posición mostrada en la figura. Despreciar pesos, efectos viscosos y cualquier otra fuerza que pueda estar presente en las varillas.



Ejercicio 3- PARTE TEÓRICA

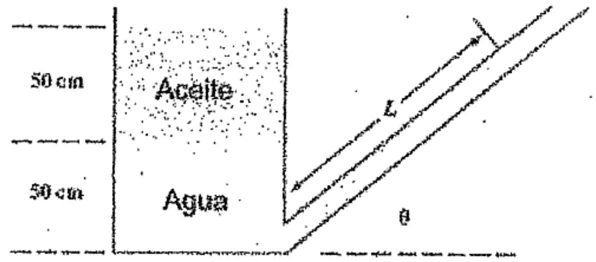
a) Determinar los números Pi adimensionales de los que depende la pérdida de carde en una tubería, sabiendo que la caída de presión es función del diámetro D, la longitud L, la rugosidad ε; la velocidad media V; la viscosidad μ, la densidad ρ, la gravedad g y el módulo de elasticidad volumétrica K,.

b) De los números encontrados, reconocer al menos dos, e indicar qué fuerzas representan.

MECÁNICA DE LOS FLUIDOS-1ER PARCIAL-PARTE PRÁCTICA-5-10-2015 TEMA 1

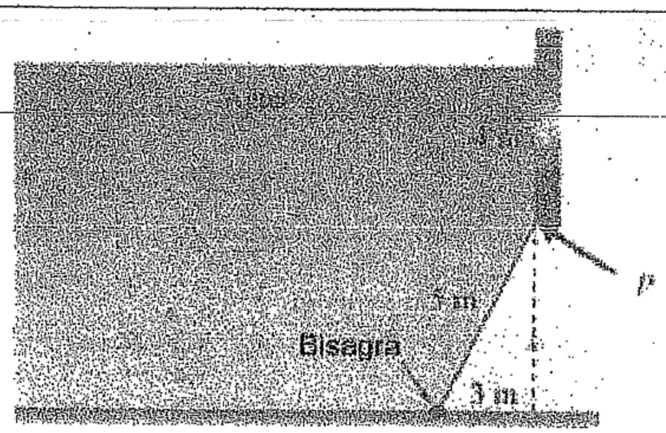
Ejercicio 1 - PARTE PRÁCTICA

En la figura, tanto el tanque como el tubo están abiertos a la atmósfera, la densidad del aceite es de 800 Kg/m^3 y la del agua 1000 Kg/m^3, si la longitud L es de 2,13 metros ¿Qué ángulo θ formará el tubo con el piso?



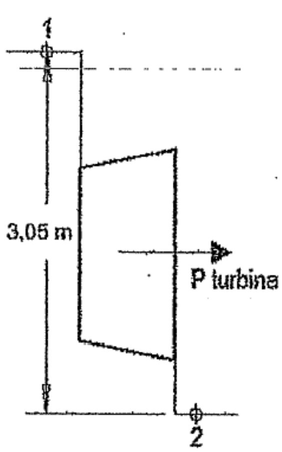
Ejercicio 2 - PARTE PRÁCTICA

Determine la fuerza P que debe aplicarse a la compuerta, que se muestra en la figura, de 4m de ancho. La compuerta tiene una bisagra en la parte inferior que le permite moverse por la acción del agua, la fuerza P debe ser aplicada a fin de que la fuerza de agua sobre la compuerta no la mueva.
Momento de inercia de un rectángulo = bxh^3/12
Densidad del agua = 1000 Kg/m^3.



Ejercicio 3 - PARTE PRÁCTICA

Un caudal de 4,25 m^3/s de agua pasa por una turbine hidráulica, ingresando a 4,22 bar por una tubería de 91,5 cm de diámetro por el punto 1; como se muestra en la figura. La turbina descarga por el punto 2 a una presión de 254 mm de Hg (una atmósfera son 760 mm de Hg) por un cañería de 10,16 cm de diámetro. La diferencia de altura entre los puntos es de 3,05 m. Si la turbina entrega en el eje una potencia neta de 1865 KW, ¿Cuánto es la pérdida de energía que experimenta el fluido entre la sección 1 y 2.
Consideraciones: El fluido es incompresible, la energía interna entre las secciones prácticamente no varía, la turbina es irreversible
Densidad del agua = 1000 Kg/m^3.



Primer Parcial 5-10-15 Tema 1

1:

Problema 1: Parte teórica

a) Hallar $\langle V\rangle / V_0$

Por definición, $dQ = \bar{V}\cdot\hat{n}\, dA$, $\boxed{Q = \iint_A \bar{V}\cdot\hat{n}\, dA}$ ①

$Q = \langle V\rangle A$ $\boxed{\langle V\rangle = \frac{Q}{A}}$ ②

$\underline{Q}$: caudal, $\langle \underline{V}\rangle$: velocidad media, $\underline{A}$: área

de ①: $\boxed{A = \pi \cdot r_0^2}$ ③ $\longrightarrow$ $\boxed{dA = r\, d\theta\, dr}$ ④

$A \longrightarrow \theta \in [0; 2\pi]$
$\quad\longrightarrow r \in [0, r_0]$

$\bar{V} = V_0\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^7\right)\hat{\imath}$; $\hat{n} = \hat{\imath}$; $\bar{V}\cdot\hat{n} = |\bar{V}|\,|\hat{n}|\cos(0)$
$= |\bar{V}|$

queda:
$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} V_0\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^7\right) r\, dr\, d\theta$$

$$Q = V_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\left(r - \frac{1}{r_0^7}\cdot r^8\right) dr\, d\theta =$$

$$= V_0\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\Big]_0^{r_0} - \frac{1}{9 r_0^7} r^9\Big]_0^{r_0}\right) d\theta$$

$$= V_0\int_0^{2\pi}\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^9}{9 r_0^7}\right) d\theta = V_0\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{9}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$Q = V_0 r_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)\cdot\theta\Big]_0^{2\pi} ; \quad \boxed{Q = \frac{7}{9} V_0 r_0^2 \pi}$$ ①'

reemplazo ① y ③ a ②:

$$\langle V\rangle = \frac{Q}{A} = \frac{7\pi r_0^2 \cdot v_0}{9\,\pi r_0^2}\;, \quad \boxed{\langle V\rangle = \frac{7}{9} v_0} \; ⑤ \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\langle V\rangle}{v_0} = \frac{7}{9}}$$

b) Hallar relación $\frac{\langle V\rangle}{V_0}$ para $\boxed{\bar{v}(r) = V_0\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right) \hat{k}}$ ⑥

Aplico ec ①, ③, ④ y ② Al igual que el paso anterior

$\boxed{A = \pi r_0^2} \longrightarrow \boxed{dA = r\,d\theta\,dr}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, r_0]$

$\bar{v}\cdot\hat{n} = |\bar{v}|\cdot|\hat{n}|\cdot\cos(\bar{v}\hat{n}) = |\bar{v}|\cdot\underbrace{|\hat{n}|}_{1}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{1} = |\bar{v}|$, queda:

$$Q = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} V_0\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right) r\,d\theta\,dr = V_0 \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\left(r - \frac{1}{r_0^n}\cdot r^{n+1}\right) d\theta\,dr$$

$$Q = V_0 \cdot \int_0^{r_0}\left(r - \frac{1}{r_0^n}\cdot r^{n+1}\right)\theta\Big]_0^{2\pi} dr = V_0\cdot 2\pi \int_0^{r_0}\left(r - \frac{1}{r_0^n}\cdot r^{n+1}\right) dr$$

$$Q = V_0\cdot 2\pi\left(\frac{r^2}{2}\Big]_0^{r_0} - \frac{1}{r_0^n}\frac{1}{(n+2)}\cdot r^{n+2}\Big]_0^{r_0}\right) =$$

$$Q = V_0\cdot 2\pi\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^{(n+2)}}{(n+2)\cdot r_0^n}\right) = V_0\cdot 2\pi\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{\cancel{r_0^n}\, r_0^2}{\cancel{r_0^n}\cdot(n+2)}\right)$$

$$Q = V_0\cdot 2\pi\cdot r_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = V_0\, 2\pi\, r_0^2\left(\frac{n+2-2}{2(n+2)}\right)$$

$$Q = \frac{V_0\,\cancel{2}\pi r_0^2\, n}{\cancel{2}(n+2)}\;, \quad \boxed{Q = V_0\,\pi\, r_0^2\left(\frac{n}{n+2}\right)} \; ⑦$$

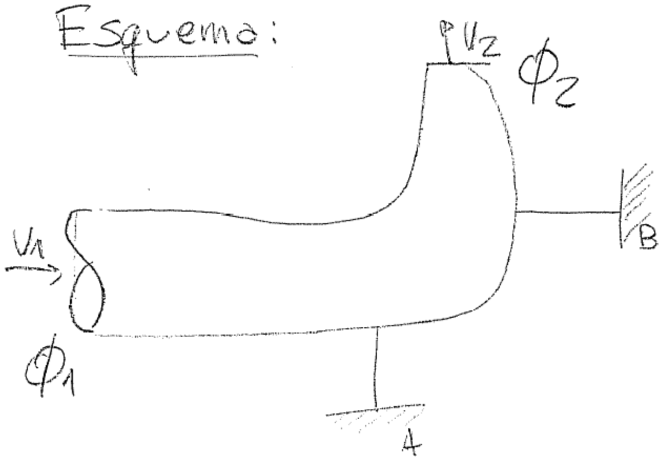
de ②: $\langle V\rangle = \frac{Q}{A} = \frac{V_0\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{r_0^2}\; n}{\cancel{\pi}\cdot\cancel{r_0^2}\;(n+2)}$, $\boxed{\langle V\rangle = V_0\left(\frac{n}{n+2}\right)}$ ⑧

Finalmente: $\boxed{\frac{\langle V\rangle}{V_0} = \left(\frac{n}{n+2}\right)}$

Problema 2: Parte teorica

Hallar fuerzas en varillas

Esquema:

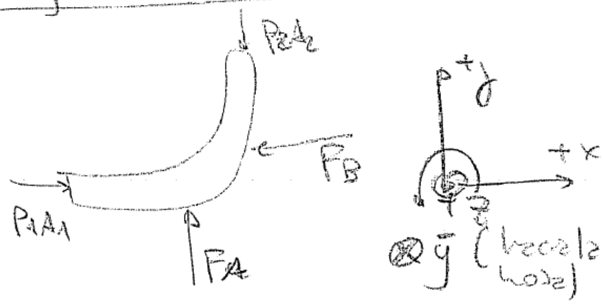


Datos: V_1, ϕ_1, ϕ_2

Consideraciones previas:

- Fuerzas a despreciar: pesos, efectos viscosos, otras fuerzas
- Superficie 2: al exterior
- Trabajo con presiones absolutas
- Volumen control: codo entre secciones 1 y 2
- codo en equilibrio
- Superficie horizontal, $\bar{g} = g\,\hat{k}$ ($g e ?$)

Diagrama de cuerpo libre (codo)



Resolución: Para codo en equilibrio, $\boxed{\sum \bar{F} = \bar{0}}$ (1)

Por teorema de reynolds, para un volumen control Vc con borde Sc

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\iiint_{Vc} \beta\, \delta\, dvol\right] + \iint_{Sc} \beta\, \delta\, (\bar{v}\cdot\hat{n})\, dS_c} \quad (2)$$

Evaluando $B = \bar{P} = m \cdot \bar{v}$ (cantidad de movimiento lineal)

y sabiendo que $\sum \bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt}$, aplico ec (2) para $\bar{P}$.

donde $\beta = \frac{dB}{dm}$, $\beta = \frac{d\bar{P}}{dm} = \frac{d(m\bar{v})}{dm} = \frac{dm}{dm} \cdot \bar{v}$

$\boxed{\beta = \bar{v}}$ (3). de (3) en (2):

$$\boxed{\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\iiint_{Vc} \bar{v}\cdot\delta\cdot dvol\right] + \iint_{Sc} \bar{v}\cdot\delta\cdot(\bar{v}\cdot\hat{n})\, dSc} \quad (4)$$

Dado que el volumen control es rígido,

$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_{Vc} \beta\cdot\delta\cdot dvol\right] = 0 \quad , \text{ queda:}$$

$$\boxed{\Sigma\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} = \iint_{Sc} \bar{v}\cdot\delta\cdot(\bar{v}\cdot\hat{n})\, dSc} \quad (5)$$

de (1): $\left.\Sigma\bar{F}\right)_{totales} = \bar{0}$

$$\Sigma\bar{F}_{TOT} = \underbrace{\left.\Sigma\bar{F}\right)_{internas}}_{\text{de ec (5)}} + \underbrace{\left.\Sigma\bar{F}\right)_{externas}}_{\text{de ec (6)}};$$

$$\left.\Sigma\bar{F}\right)_{externas} = P_1\cdot A_1\,\hat{i} + P_2 A_2\,\hat{j} - F_A\,\hat{j} - F_B\,\hat{i} = \bar{0}$$

$$\boxed{(P_1 A_1 - F_B)\,\hat{i} + (P_2 A_2 - F_A)\,\hat{j} = \bar{0}} \quad (6)$$

De (5): Tomo velocidades medias $\langle v\rangle$ (no conozco el perfil de velocidades del flujo).

S_1: entrada ; S_2: salida

S_3: envoltura;

queda:

$$\Sigma\bar{F} = \iint_{S_1} \bar{v}_1\,\delta(\bar{v}_1\hat{n})\, dS_1 + \iint_{S_2} \bar{v}_2\,\delta(\bar{v}_2\hat{n}_2)\, dS_2 +$$

Como $V_3 \to 0$ (no hay flujo por la envoltura) $\longrightarrow$

$$+ \cancel{\iint_{S_3} \bar{V}_3\,\delta(\bar{v}_3\hat{n}_3)\, dS_3}^{\,0}$$

Luego: $\bar{V}_1 = \langle v_1 \rangle \hat{i}$; | $\bar{V}_2 = \langle v_2 \rangle \hat{j}$

$\hat{n}_1 = \hat{i}$ | $\hat{n}_2 = \hat{j}$

$\bar{V}_1 \hat{n}_1 = |\bar{V}_1||\hat{n}_1| \cos(\bar{V}_1 \hat{n}_1)$ | $\bar{V}_2 \hat{n}_2 = |\bar{V}_2| \cdot |\hat{n}_2| \cdot \cos(\bar{V}_2 \hat{n}_2)$

$= |\bar{V}_1| \cdot 1 (-1)$ | $= |\bar{V}_2| \cdot 1 \cdot 1$

$= -|\bar{V}_1|$ | $= |\bar{V}_2|$

$$\sum \bar{F} = \left(-\iint_{S_1} |\bar{V}_1| \cdot \delta \cdot |\bar{V}_1| \, dS_1\right)\hat{i} + \left(\iint_{S_2} |\bar{V}_2| \, \delta \cdot |\bar{V}_2| \cdot dS_2\right)\hat{j}$$

$$= \left[-\delta \cdot |\bar{V}_1|^2 \iint_{S_1} dS_1\right]\hat{i} + \left[|\bar{V}_2|^2 \, \delta \cdot \iint_{S_2} dS_2\right]\hat{j}$$

$$= -\delta |\bar{V}_1|^2 S_1 \hat{i} + \delta |\bar{V}_2|^2 S_2 \hat{j}$$

con $S_1 = \dfrac{\pi \cdot \phi_1^2}{4}$; $S_2 = \dfrac{\pi \cdot \phi_2^2}{4}$ $|\bar{V}_1| = \langle v_1 \rangle$; $|\bar{V}_2| = \langle v_2 \rangle$ queda:

$$\boxed{\sum \bar{F} = -\frac{\delta \langle v_1 \rangle^2 \pi \cdot \phi_1^2}{4}\hat{i} + \frac{\delta \cdot \langle v_2 \rangle^2 \pi \, \phi_2^2}{4}\hat{j}} \quad (5^*)$$

como $\langle v_2 \rangle$ es desconocida, la expreso en función de $\langle v_1 \rangle$; aplico ec continuidad:

$$Q = cte \; ; \; \therefore \; Q_1 = Q_2 \; ; \; \langle v_1 \rangle \cdot A_1 = \langle v_2 \rangle A_2$$

$$\langle v_1 \rangle \frac{\cancel{\pi} \, \phi_1^2}{\cancel{4}} = \langle v_2 \rangle \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}} \phi_2^2 \; ; \quad (7) \; \boxed{\langle v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^2}$$

) Para hallar presiones P_1 y P_2, aplico ec. de Bernoulli

Entre 1 y 2; no hay pérdidas (ver consideraciones...)

$$\boxed{\frac{P_1}{\delta g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\delta g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2} \quad (8)$$

de (8): $P_2 = P_{atm} = P_0$; $z_1 = z_2 = 0$ (Tubería horizontal).

queda: $\frac{P_1}{\delta g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1}^0 = \frac{P_2}{\delta g} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2}^0$

despejo P_2: $\frac{P_2}{\delta g} = \frac{P_1}{\delta g} + \frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$ de (7):

$$P_2 = P_1 + \frac{\delta g}{2g}\left(V_1^2 - V_1^2\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right)$$

$$\boxed{P_2 = P_1 + \frac{\delta}{2}V_1^2\left(1 - \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right)} \quad (9)$$

de ec. (6), (5''), (9) y (7):

$$\left[\frac{P_1 \cdot \pi\,\phi_1^2}{4} - F_B\right]\hat{i} + \left[\left(P_1 + \frac{\delta}{2}V_1^2\left(1 - \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right)\right)\cdot\frac{\pi\,\phi_2^2}{4} - F_A\right]\hat{j} =$$

$$= -\frac{\delta\langle V_1\rangle^2\,\pi\,\phi_1^2}{4}\hat{i} + \frac{\delta\langle V_1\rangle^2\phi_1^4}{\phi_2^4}\frac{\pi\,\phi_2^2}{4}\hat{j}$$

Igualando componentes "x" e "y"

x) $\frac{P_1\pi\phi_1^2}{4} - F_B = \frac{-\delta\langle V_1\rangle^2\pi\,\phi_1^2}{4}$

$$F_B = \frac{P_1\pi\phi_1^2}{4} + \frac{\delta\langle V_1\rangle^2\pi\phi_1^2}{4}$$

$$\boxed{F_B = \frac{\pi\,\phi_1^2}{4}\left(P_1 + \delta_1\langle V_1\rangle^2\right)} \quad (10)$$

4) $$\frac{P_1 \pi \phi_2^2}{4} + \frac{\delta v_1^2 \pi \phi_2^2}{8}\left(1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right) - F_A = \frac{\delta \langle v_1 \rangle^2 \phi_1^4 \pi}{4\,\phi_2^2}$$

(11) $$\boxed{F_A = \frac{P_1 \pi \phi_2^2}{4} + \frac{\delta \langle v_1 \rangle^2 \pi \phi_2^2}{8}\left(1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right) - \frac{\delta \langle v_1 \rangle^2 \phi_1^4 \pi}{4\,\phi_2^2}}$$

Problema 3: Parte Teórica

a) Hallar $\Delta p = f(D, L, \varepsilon, V, \mu, \rho, g, k)$ con números Pi

Consideraciones previas:

) $\Pi)_n$ = Variables − magnitudes = $9 - 3 = 6$

) Para pérdida de carga; Flujo orcalente

) ¿Puede aparecer nro Reynolds? Sí

) ¿Puede aparecer nro de Froude? Sí, aunque es más importante en canales, no se descarta.

) ¿Puedo armar nros pi con variables de igual magnitud? Sí, D, L y ε

Resolución:

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{L}{D}} \ (1) \qquad \boxed{\Pi_2 = \frac{\varepsilon}{D}} \ (2)$$

¿Reynolds? $Re = \dfrac{\rho \cdot D \cdot V}{\mu}$, así:

$$\Pi_3 = \rho^a \cdot D^b \cdot \mu^c \cdot V^1$$

$$[\Pi_3] = [\rho]^a \cdot [D]^b \cdot [\mu]^c [V]^1$$

$$[\Pi_3] = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a (L)^b \cdot \left(\frac{M}{LT}\right)^c \cdot \frac{L}{T}$$

$$\left.\begin{array}{ll} M) & a + c = 0 \\ L) & -3a + b - c + 1 = 0 \\ T) & -c - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c = (-1) \\ a = (1) \\ b = 3a - 1 + c \\ b = 3 - 1 - 1; \ \boxed{b = 1} \end{array}$$

$$\Pi_3 = \rho \, D \cdot \mu^{-1} V \rightarrow \boxed{\Pi_3 = Re} \ (3)$$

c) Froude? $Fr = \frac{V^2}{g \cdot L}$

$\Pi_4 = V^a \cdot L^b \cdot g^1 \longrightarrow$

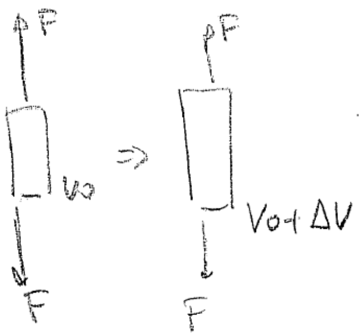
$[\Pi_4] = \left(\frac{L}{T}\right)^a \cdot L^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^1$

$$\left.\begin{array}{l} L)\ a + b + 1 = 0 \\ T)\ -a - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -2 \\ b = -a - 1 \\ b = -(-2) - 1 \\ b = 2 - 1 = 1 \end{array}$$

$\therefore\ \Pi_4 = V^{-2} \cdot L \cdot g \rightarrow \Pi_4 = \frac{Lg}{V^2} = \frac{1}{Fr}$. llamo $\Pi_4^* = 1/\Pi_4$

$\boxed{\Pi_4 = Fr}$ (4)

c) ¿Qué es la elasticidad volumétrica? para un cuerpo a tensión:



(deformación)

$\frac{F}{A} = K \cdot \frac{\Delta V}{V_0}$ $\therefore$ $[K] = \frac{[F]}{[A]}$

$\boxed{[K] = \frac{M}{LT^2}}$

¡Tip! Podríamos armar un nro Pi con ΔP y K, a la manera de $\Pi_5 = \Delta P / K$. El problema es que se busca expresar $\Delta P = f(\Pi_1, \ldots, \Pi_6)$; no conviene que ΔP esté en más de un nro pi. No lo hacemos aquí.

) $\Pi_5 = D^a \cdot g^b \cdot \rho^c \cdot \Delta P^1$

$[\Pi_5] = 1 = [L]^a \left[\frac{L}{T^2}\right]^b \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \cdot \left(\frac{M}{LT^2}\right)^1$

$$\left.\begin{array}{l} L)\ a + b - 3c - 1 = 0 \\ T)\ -2b - 2 = 0 \\ M)\ c + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c = (-1) \\ b = (-1) \\ a = -b + 3c + 1 \\ \quad = -(-1) + 3(-1) + 1 \\ \quad 1 - 3 + 1,\ \boxed{a = -1} \end{array}$$

$$\Pi_5 = D^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \rho^{-1}\, \Delta P \rightarrow \boxed{\Delta P = D \cdot g \cdot \rho \cdot \Pi_5} \quad (5)$$

$\cdot)$ $\Pi_6 = D^a \cdot g^b \cdot \rho^c \cdot \kappa$

$$[\Pi_6] = [D]^a [g]^b [\rho]^c [\kappa]^1$$

$$= L^a \cdot \left(\frac{L}{T^2}\right)^b \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{M}{LT^2}\right)^1$$

$L)$ $a + b - 3c - 1 = 0$

$T)$ $-2b - 2 = 0$

$M)$ $c + 1 = 0$

$$\boxed{\Pi_6 = D^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \kappa} \longrightarrow \boxed{\Pi_6 = \frac{\kappa}{D g \rho}} \quad (6)$$

Finalmente: $\Delta P = D \cdot g \cdot \rho\, \Pi_5$

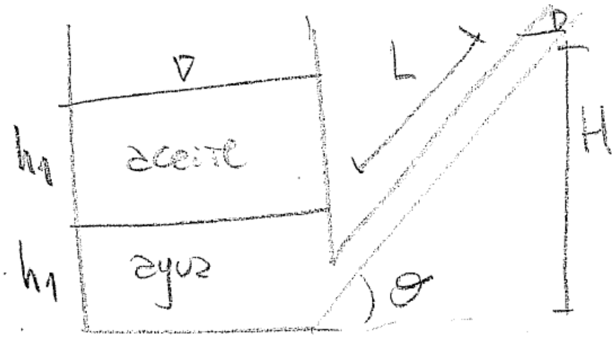
$\Pi_5 = f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_6)$

$$\boxed{\Delta P = D \cdot g \cdot \rho \left(\frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, Re, Fr, \frac{\kappa}{D\rho g}\right)} \quad (7)$$

Ejercicio 1: Parte práctica

Hallar θ:

Datos: δ_{oil}, δ_{agua}, L, h_1



Resolución:

Para fluidos estáticos:

$$\boxed{P = P_0 + \delta g h} \quad (1)$$

Calculo presión para el fondo del tanque:

) Por Tubo: $P_{Fondo} = P_0 + \delta_{agua} \cdot g \cdot H$

$$\boxed{P_F = P_0 + \delta_{agua}\, g\, L \cdot sen(\theta)} \quad (2)$$

) Por Tanque: $P_F = P_0 + \delta_{aceite}\, g \cdot h_1 + \delta_{agua} \cdot g \cdot h_1$

$$\boxed{P_F = P_0 + g h_1 (\delta_{aceite} + \delta_{agua})} \quad (3)$$

como (3) = (2): $\cancel{P_0} + g h_1 (\delta_{aceite} + \delta_{agua}) = \cancel{P_0} + \delta_{agua} \cdot L \cdot g \cdot sen(\theta)$

$$g h_1 (\delta_{oil} + \delta_w) = g L\, sen(\theta)\, \delta_w$$

$$\theta = asen\left(\frac{h_1(\delta_{oil} + \delta_w)}{L\, \delta_w}\right)$$

$$\theta = asen\left(\frac{h_1}{L}\left(\frac{\delta_{oil}}{\delta_w} + 1\right)\right) \text{ ; reemplazo valores.}$$

$$\theta = asen\left(\frac{50\, \cancel{cm}}{2{,}13\, \cancel{m}} \frac{1\, \cancel{m}}{10^2\, \cancel{cm}}\left(\frac{800\, \cancel{kg}\, \cancel{m^3}}{\cancel{m^3}\, 1000\, \cancel{kg}} + 1\right)\right)$$

$$\theta = asen(0{,}4225) \Rightarrow \boxed{\theta \simeq 25°}$$

Ejercicio 2: parte práctica

Hallar fuerza P

Esquema:

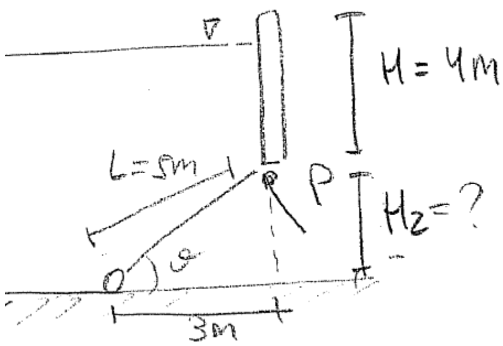
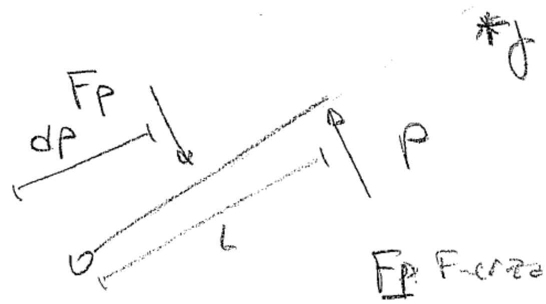


Diagrama de cuerpo libre:



Fp: Fuerza de presión.

coordenada y: paralela a superficie plana

coordenada h: vertical, ortogonal a superficie de referencia

Para compuerta en equilibrio: $\boxed{\sum M_O = 0}$ ① con (+) (-)

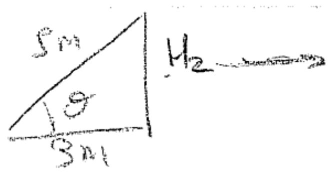
$$-P \cdot L + F_p \cdot d_p = 0 \;;\quad \therefore \quad \boxed{P = \frac{F_p \cdot d_p}{L}} \quad ②$$

ancho de compuerta: $b = 4\,m$

de ②: calculo Fp:

$$\boxed{F_p = \delta \cdot g \cdot h_c \cdot A = \delta \cdot g \cdot \left(H + \frac{H_2}{2}\right) \cdot L \cdot b} \quad ③$$

H_2?



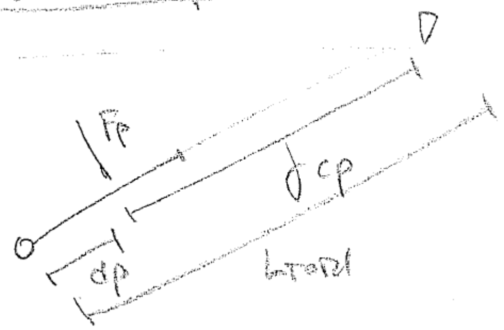
$\cos(\theta) = \frac{3}{5} \longrightarrow \theta = 53{,}13°$

$H_2 = 5 \cdot \mathrm{sen}(\theta)$; $H_2 = 4\,m$. queda:

$$F_p = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \left(4m + \frac{4m}{2}\right) \cdot 5m \cdot 4m$$

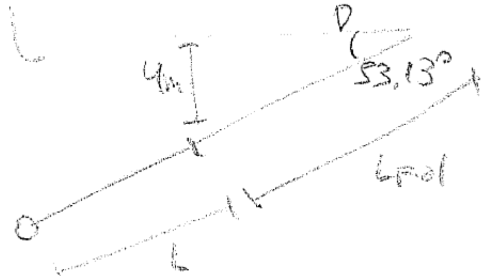
$$\boxed{F_p = 1{,}177 \cdot 10^6\,N} \quad ④$$

Cálculo dp:



$$\boxed{dp = L_{TOTAL} - y_{cp}} \quad (5)$$

$$\boxed{L_{TOTAL} = L + L_{FALTANTE}}$$



$$L_{Fal} = \frac{4m}{\operatorname{sen}(53{,}13)};$$

$$L_{TOT} = 5m + \frac{4m}{\operatorname{sen}(53{,}13°)}; \quad \boxed{L_{TOT} = 10m} \quad (6)$$

de formula: $$\boxed{y_{cp} = y_c + \frac{I_{xx})_c}{y_c \cdot A}} \quad (7)$$

$$y_c = L_{Fal} + \frac{L}{2} = \frac{4m}{\operatorname{sen}(53{,}13)} + \frac{5m}{2}; \quad \boxed{y_c = 7{,}5m}$$

$$I_{xx} = \frac{b \cdot L^3}{12} = \frac{4m\,(5m)^3}{12}; \quad \boxed{I_{xx} = 41{,}67\ m^4}$$

$$A = L \cdot b; \quad A = 4m \cdot 5m; \quad \boxed{A = 20m^2}$$; reemplazo:

$$y_{cp} = 7{,}5m + \frac{41{,}67\,m^4}{7{,}5\cancel{m} \cdot 20\,m^2}. \quad \boxed{y_{cp} = 7{,}78\,m}$$

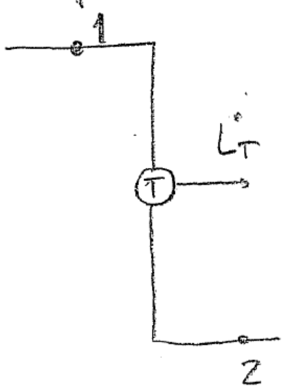
en (5): $$dp = (10 - 7{,}78)\,m; \quad \boxed{dp = 2{,}22\ m}$$

Finalmente, en (2): $$P = \frac{F_p \cdot dp}{L}$$

$$P = \frac{1{,}177 \cdot 10^6 N \cdot 2{,}22m}{10m}; \quad \boxed{\boxed{P = 2{,}613 \cdot 10^5\ N}}$$

Ejercicio 3: Parte práctica

Esquema:



Hallar h_p (pérdida de energía)

Datos: Q, P_1, ϕ_1, P_2, ϕ_2, h_{12}, $\dot{L}_T$

Ver consideraciones del enunciado!

Resolución: Aplico ec. energía entre 1 (estado inicial) y 2 (final); expreso la ec en m de columna de líquido:

$$\boxed{\left(\frac{P_2 - P_1}{\delta g}\right) + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}\right) + h_2 - h_1 = h_T + h_p} \quad (1)$$

de (1): $h_2 - h_1 = h_{12} = -h_{21}$ (ojo con el signo!)

Para potencia de turbina $\dot{L}_T$ $\quad$ h_p: altura

$$\dot{L}_T = \delta g \cdot Q \cdot h_T \longrightarrow \boxed{h_T = \frac{\dot{L}_T}{\delta g Q}} \quad (2)$$

de (2) a (1):

$$\boxed{h_p = \frac{P_2 - P_1}{\delta g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} - h_{21} - h_T} \quad (1')$$

Expreso velocidad en función del caudal:

$$Q = V \cdot A \; ; \quad Q_1 = Q_2 \qquad V_1 \cdot \frac{\pi \phi_1^2}{4} = Q_1 = Q$$

$$\boxed{V_1^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 \phi_1^4}} \; ; \quad \boxed{V_2^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 \phi_2^4}}$$

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\phi_2^4} - \frac{1}{\phi_1^4}\right), \quad \text{a } (1')$$

$$\boxed{h_p = \frac{P_2 - P_1}{\delta g} + \frac{16 Q^2}{2 g \pi^2}\left(\frac{1}{\phi_2^4} - \frac{1}{\phi_1^4}\right) - h_{21} - \frac{\dot{L}_T}{\delta g Q}} \quad (3)$$

reemplazando los datos en ec. 3 llego al resultado
lo hacemos por pasos:

$$\cdot)\ \frac{P_2-P_1}{\delta g} = \frac{1}{\delta g}(P_2-P_1) = \frac{1\, m^3 \cdot s^2}{10^3 kg \cdot 9{,}81\, m}\left(\frac{4{,}22\, bar \cdot 10^5 Pa}{1\, bar} - \frac{254\, mmHg \cdot 10^5}{760\, mmHg}\right.$$

$$= \frac{1\, m^3 \cdot s^2}{10^3 kg \cdot 9{,}81\, m}\left[\frac{4{,}22\, \cancel{bar}}{1} \frac{10^5 Pa}{bar} - 254\, mmHg\, \frac{10^5 Pa}{760\, mmHg}\right]\frac{N}{m^2\, Pa}$$

$$= \frac{1\, \cancel{m^3} \cdot \cancel{s^2}}{9{,}81 \cdot 10^3\, \cancel{kg} \cdot \cancel{m}} \cdot 10^5 \frac{\cancel{N}}{m^2} \cdot \frac{\cancel{kg} \cdot m}{\cancel{s^2}\, \cancel{N}}\left[4{,}22 - 0{,}33\right]$$

$$\boxed{\frac{P_2-P_1}{\delta g} = 39{,}65\, m}$$

$$\cdot)\ \frac{16\, Q^2}{2g\,\pi^2}\left(\frac{1}{\phi_2^4} - \frac{1}{\phi_1^4}\right) = \frac{8\,(4{,}25\, m^3)^2}{9{,}81\, m \cdot \pi^2\, \cancel{s^2}} \cdot \cancel{s^2}\left(\frac{1}{(10{,}16 \cdot 10^{-2})^4} - \frac{1}{(11{,}5 \cdot 10^{-2})^4}\right)$$

$$= 4{,}69\, \frac{m^6}{m}\ 9383\, \frac{1}{m^4}$$

$$= 4{,}69 \cdot 9{,}31 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8\, \frac{m^6}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{s^4}}{\cancel{s^4}} \cdot \frac{1}{\cancel{m^4}}$$

$$= 4{,}366 \cdot 10^4\, m$$

$$\cdot)\ \frac{\dot{L}_T}{\delta g Q} = \frac{1865\, \cancel{kW} \cdot \cancel{m^3} \cdot \cancel{s^2} \cdot \cancel{s}\ 10^3 \cancel{W} \cdot \cancel{J} \cdot \cancel{N} \cdot m\ \cancel{kg} \cdot \cancel{m}}{\cancel{10^3} \cancel{kg} \cdot 9{,}81\, \cancel{m} \cdot 4{,}25\, \cancel{m^3}\ \cancel{kW}\ \cancel{s} \cdot \cancel{W}\ \cancel{J}\ \cancel{s^2}\ \cancel{N}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{L}_T}{\delta g Q} = 44{,}73\, m}$$

Ojo! verificar unidades del caudal.