UCA
Ingeniería

MECANICA DE LOS FLUIDOS
PRIMER PARCIAL 8-10-2015
TEMA 1

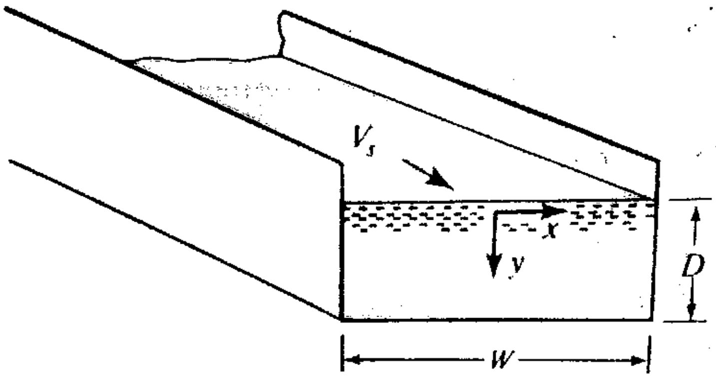
PARA APROBAR ESTE EXAMEN TENDRÁN QUE RESOLVER CORRECTAMENTE, AL MENOS, DOS EJERCICIOS DE CADA UNA DE LAS PARTES

Problema 1 -PARTE TEÓRICA

En un canal bidimensional de ancho W y profundidad D, circula agua como se muestra en la figura. El perfil de velocidades hipotético para el agua es:

$$V\,(x,y) = V_s\ \left(1-\frac{4x^2}{W^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{D^2}\right)$$

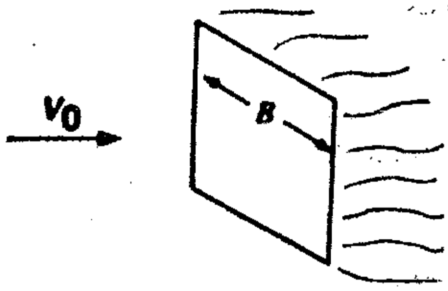
Donde Vs es la velocidad de la superficie del agua en el punto medio entre las paredes del canal. El sistema de coordenadas es como el mostrado: x se mide desde el centro del canal e y hacia abajo desde la superficie del agua.



Hallar el caudal volumétrico del canal en termino de Vs, D y W.

Problema 2- PARTE TEÓRICA

Pruebas de arrastre demuestran que el arrastre de una placa cuadrada colocada perpendicular a la velocidad de una corriente libre es una función de la velocidad V_0, la densidad ρ, la dimensiones de la placa B, la viscosidad μ, la intensidad de la turbulencia libre u' y la escala de la turbulencia L_x. Aquí u' y L_x se miden en ft/s y ft respectivamente.

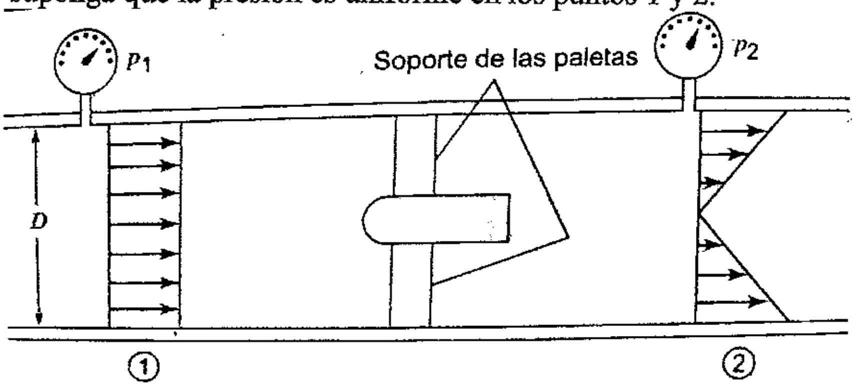


a) Utilizando análisis dimensional dar una expresión para poder realizar experiencia y determinar la fuerza de arrastre F_D.

b) Determinar la relación entre la razón de la viscosidad cinemática entre modelo y prototipo si la prueba tiene que satisfacer la semejanza dinámica entre las fuerzas de inercia, las de viscosidad y las gravitatorias.

Ejercicio 3-PARTE TEÓRICA

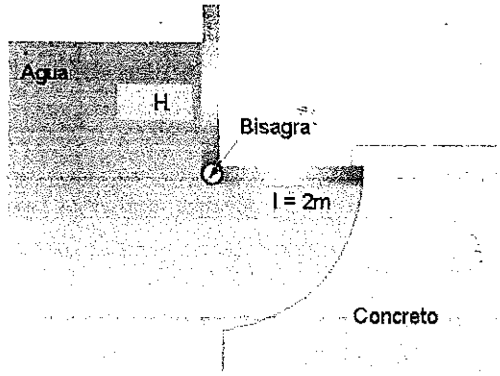
Con el uso de un túnel de viento es posible medir la fuerza de arrastre (resistencia al avance) de un dispositivo en forma de bala. El túnel es cilíndrico con un diámetro de 1m. La presión en la sección 1 es de 1,5 kPa (manométrica), la presión en la sección 2 es de 1.o kPa (manométrica).La densidad del aire es de 1.0 kg/m3. En la entrada la velocidad es uniforme, con una magnitud de 30 m/s. A la salida la velocidad varia linealmente como se muestra en la figura, desde el valor nulo en el eje, hasta un valor máximo, en la pared. Determinar la fuerza de arrastre sobre el dispositivo y el soporte de las placas. Desprecie la resistencia viscosa en la pared y suponga que la presión es uniforme en los puntos 1 y 2.



MECÁNICA DE LOS FLUIDOS-1ER PARCIAL-PARTE PRÁCTICA-8-10-2015 TEMA 1

Ejercicio 1 - PARTE PRÁCTICA

Para la compuerta de la figura, calcular la altura H que hará que la compuerta se abra automáticamente si la longitud l es 2m.



Ejercicio 2 - PARTE PRÁCTICA

Un eje de 1,22 m de largo y 2,54 cm de diámetro, gira en el interior de un cilindro de la misma longitud, con 2,5908 cm de diámetro. Calcule el momento torsor requerido para hacer girar el eje en el interior a 2000 RPM, si aceite de girasol de viscosidad 0,030 N s /m^2 llena el hueco. También, calcule la potencia requerida. Suponga un perfil de velocidad lineal.

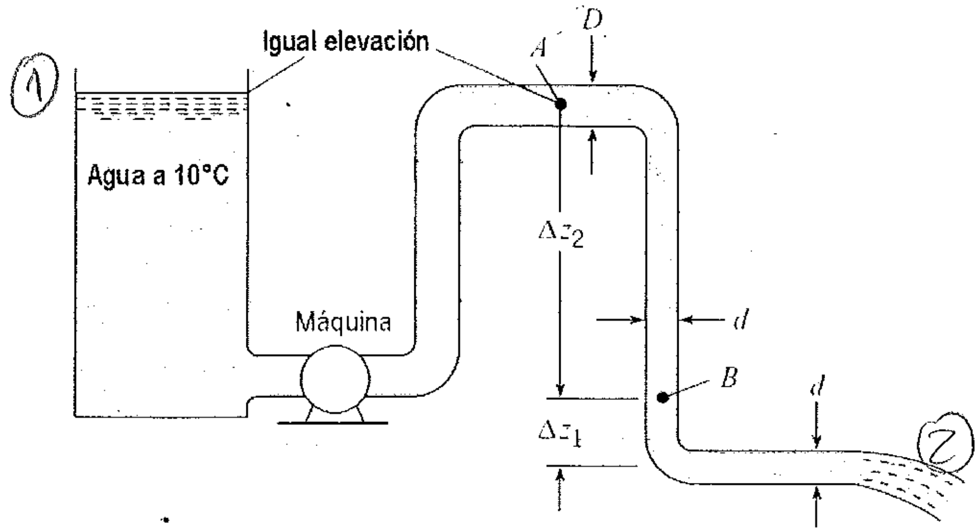
Ejercicio 3 - PARTE PRÁCTICA

In este sistema, $d = 15{,}24$ cm., $D = 30{,}48$ cm., $\Delta z_1 = 1{,}83$ m, y $\Delta z_2 = 3{,}66$ m. La descarga de agua a la atmósfera por d es de 0,28 m^3/seg. La densidad del agua puede tomarse como 1000 Kg/m^3 el fluido puede tomarse como ideal. El régimen se considera permanente.

Con los datos indicados responda:

a) ¿La máquina es una bomba o una turbina?

b) ¿Qué presión existe en los puntos A y B?



Primer Parcial 8/10/15 Tema 1

Problema 1: Teoría

Hallar Q

Datos: $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(x,y) = V_s\left(1-\frac{4x^2}{W^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{D^2}\right)$

$\bar{V}(x,y) = |\bar{V}|\,\hat{k}$ (según sistema de referencia usado)

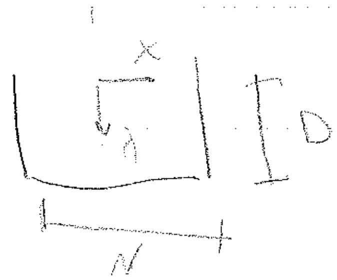
Por definición: $\boxed{Q = VA}$ ① Debo usar cálculo integral

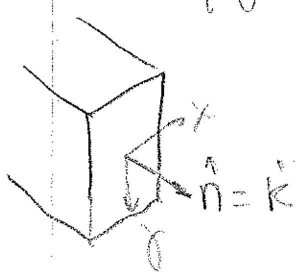
$dQ = \bar{V}\hat{n}\,dA \longrightarrow \boxed{Q = \int_0^Q dQ = \iint_A \vec{v}\cdot\hat{n}\,dA}$ ②

Integro según ②, primero debo establecer límites de integración

$dA = dx\,dy$ (coord. rectangulares)

$A: \begin{cases} x \in \left[-\frac{W}{2}; \frac{W}{2}\right] \\ y \in [0; D] \end{cases}$ Tomo el centro





Queda $Q = \int_0^D \int_{-W/2}^{W/2} V_s\left(1-\frac{4x^2}{W^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{D^2}\right)\hat{k}\cdot\hat{k}\,dx\,dy$

$$Q = V_s \int_0^D \int_{-W/2}^{W/2} \left(1-\frac{4x^2}{W^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{D^2}\right)dx\,dy =$$

$$= Q = V_s \int_0^D \int_{-W/2}^{W/2} \left(1 - \frac{y^2}{D^2} - \frac{4x^2}{W^2} + \frac{4x^2y^2}{W^2D^2}\right)dx\,dy$$

$$Q = V_s\left[\iint 1\,dx\,dy - \frac{1}{D^2}\iint y^2\,dx\,dy - \frac{4}{W^2}\iint x^2\,dx\,dy + \frac{4}{(WD)^2}\iint x^2y^2\,dx\,dy\right]$$

$$= V_s\left[WD - \frac{1}{D^2}\cdot W\,\frac{y^3}{3}\Big]_0^D - \frac{4}{W^2}\cdot D\,\frac{x^3}{3}\Big]_{-W/2}^{W/2} + \frac{4}{(WD)^2}\int_0^D \frac{y^2 x^3}{3}\Big]_{-W/2}^{W/2} dy\right.$$

$$= V_s\left[WD - \frac{WD}{3} - \frac{4}{3}\frac{D}{W^2}\left(\frac{W^3}{8} - -\frac{W^3}{8}\right) + \frac{4}{(WD)^2}\int_0^D \frac{y^2}{3}\left(\frac{W^3}{8} - -\frac{W^3}{8}\right)dy\right.$$

$$= V_s\left[WD - \frac{WD}{3} - \frac{\cancel{4}D}{3W^2}\frac{\cancel{2}W^3}{\cancel{8}} + \frac{\cancel{4}}{(WD)^2}\cdot\frac{\cancel{2}W^3}{\cancel{8}}\frac{1}{3}\int_0^D y^2\,dy \right] =$$

$$= V_s\left[WD - \frac{WD}{3} - \frac{WD}{3} + \frac{W^{\cancel{2}}}{3\cancel{W}D^2}\frac{y^3}{3}\right]_0^D$$

$$= V_s\left[WD - \frac{WD}{3} - \frac{WD}{3} + \frac{WD^{\cancel{3}}}{9\cancel{D^2}}\right]$$

$$Q = V_s\, WD\left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right] \qquad \boxed{Q = \frac{4}{9}V_s WD}$$

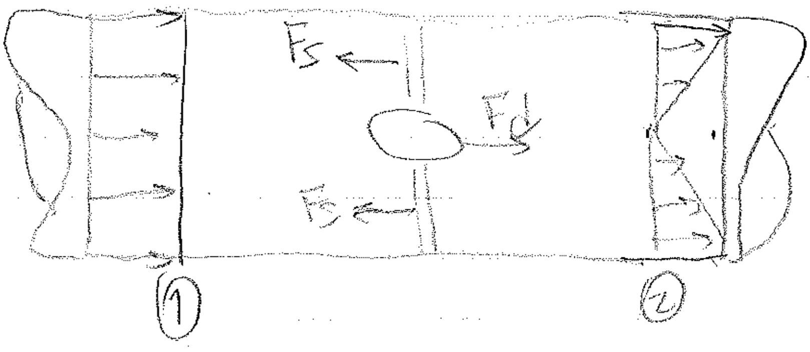
@ Verifico unidades $[Q] = L^3/T$

$$[Q] = [W][D][V_s] = L\cdot L\cdot L/T = L^3/T$$

Ejercicio 3 Teoría

Hallar Fuerza de arrastre Fd

Esquema del problema: incluyo fuerzas de arrastre Fd y de soporte Fs



para el dispositivo en el fluido

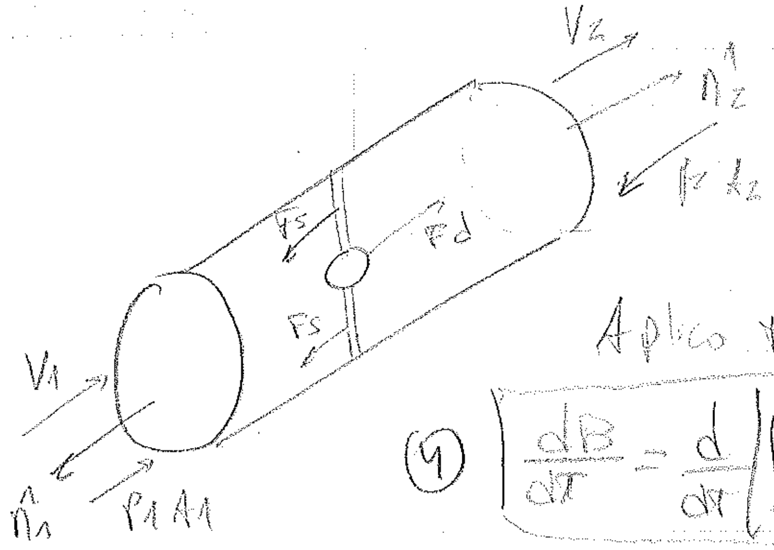
$$\boxed{\sum F = 0} \quad (1)$$

$$Fd - 2Fs = 0$$

$$\boxed{Fd = 2Fs} \quad (2)$$

Tomando como Volumen control la sección de tubo entre (1) y (2):

$$\boxed{\sum \bar{F}_{ext} = \hat{i}(p_1\cdot A_1 - p_2 A_2 - 2F_s)} \quad (3)$$



Aplico teorema de Reynolds:

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\iiint_{VC} \beta \rho \, dvol\right] + \iint_{SC} \beta \rho (\bar{v}\hat{n}) dA} \quad (4)$$

Dado que $\sum F_{ext} = \sum F_{int}$ y $\sum F = \frac{d\bar{P}}{dt}$, $\bar{P} = m\bar{v}$

$B = \bar{P}$; $\beta = \frac{dB}{dm} = \frac{d(m\bar{v})}{dm} = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

para un vol control rígido $\frac{d}{dt}\iiint_{VC} \beta \rho \, dvol = 0$

queda: $\boxed{\frac{d\bar{P}}{dt} = \iint_{SC} \rho \bar{v} \cdot (\bar{v}\hat{n}) \, dA}$ (5) $\rightarrow$ Aplicando a 1 y 2

En sup 1: $A \begin{cases} r \in [0, \phi/2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$, $dA = r d\theta dr$ (coord polares)

$\bar{V}_1 = |v_1| \hat{i} = cte \Longrightarrow \bar{V}_1 = \langle v_1 \rangle$ (Valor medio)

$\boxed{Q_1 = Q_2}$ y sección constante $A_1 = A_2$; ∴

$\langle v_1 \rangle A_1 = \langle v_2 \rangle \cdot A_2 \rightarrow \boxed{\langle v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle}$

En sup 2: $\boxed{\bar{V}_2 = \frac{V_{max}}{\phi/2} r \hat{i}}$ (6) $\begin{cases} \text{Si } r = 0, \ \bar{V}_2 = 0\hat{i} \\ \text{Si } r = \frac{\phi}{2}, \end{cases}$

$\bar{V}_2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{V_m}{\cancel{\phi/2}} \cdot \frac{\cancel{\phi}}{2} \hat{i} =$

$= V_m \hat{i}$

Realizamos las integrales de ⑤:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \iint_{S1} \rho \cdot \bar{V}_1 (\bar{V}_1 \cdot \hat{n}_1)\, dS_1 + \iint_{S2} \rho \cdot \bar{V}_2 \cdot (\bar{V}_2 \cdot \hat{n}_2)\, dA$$

Por la orientación de las superficies y las velocidades $\bar{V}_1$ y $\bar{V}_2$:

) $\bar{V}_1 \cdot \hat{n}_1 = |\bar{V}_1| \cdot |\hat{n}_1| \cos(180°) = |\bar{V}_1| \cdot 1 \cdot (-1) = -|\bar{V}_1|$

) $\bar{V}_2(r) \cdot \hat{n}_2 = |\bar{V}_2(r)| \cdot |\hat{n}_2| \cdot \cos(0°) = |\bar{V}_2(r)| \cdot 1 = |\bar{V}_2(r)|$

Queda entonces:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \hat{i}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\phi}{2}} \rho\, |\bar{V}_1| \cdot \hat{i} \cdot |\bar{V}_1| \cdot (-1)\, r\, dr\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\phi}{2}} \rho\, |\bar{V}_2(r)|\, \hat{i}\, |\bar{V}_2(r)|\, r\, dr\, d\theta\right]$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \left[\underbrace{\left(-\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} \langle V_1\rangle^2 r\, dr\, d\theta\right)}_{\text{integral 1}} + \underbrace{\left(\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} |\bar{V}_2(r)|^2\, r\, dr\, d\theta\right)}_{\text{integral 2}}\right]\hat{i}$$

Calculo las 2 integrales por separado:

Integral 1: $-\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} \langle V_1\rangle^2 r\, dr\, d\theta$, $\langle V_1\rangle = cte$

$$= -\rho \cdot \langle V_1\rangle^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} r\, dr\, d\theta = -\rho\langle V_1\rangle^2 \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right]_0^{\phi/2} d\theta$$

$$= -\rho\langle V_1\rangle^2 \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left((\phi/2)^2 - 0^2\right) d\theta = -\frac{\rho\langle V_1\rangle^2}{2}\frac{\phi^2}{4}\,\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{\rho\langle V_1\rangle^2 \phi^2 \cancel{2}\pi}{\cancel{2}\cdot 4} \Rightarrow \boxed{\text{integral 1: } -\frac{\rho\langle V_1\rangle^2\phi^2\pi}{4}} \quad ⑦$$

Integral 2: $\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} |\bar{V}_2(r)|^2 r\, dr\, d\theta =$

$$= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} \left(\frac{V_{max}}{\phi/2} r\right)^2 r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} \frac{V_m^2 \cdot 2^2}{\phi^2} r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\rho \cdot V_m^2 \cdot 4}{\phi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} r^3\, dr\, d\theta = \frac{\rho V_m^2 4}{\phi^2} \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^4}{4}\right]_0^{\phi/2} d\theta$$

$$= \frac{\rho \cdot V_m^2 \cancel{4}}{\phi^2 \cdot \cancel{4}} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 - 0^2\right] d\theta = \frac{\rho V_m^2}{\phi^2} \frac{\phi^4}{16} \cdot \left.\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\rho V_m^2 \phi^2 \cdot 2\pi}{16} \Rightarrow \boxed{\frac{\rho V_m^2 \phi^2 \pi}{8}}$$

·) Expresamos V_m en términos de la velocidad media $\langle V_2 \rangle$

·) $\langle V_2 \rangle = \langle V_1 \rangle$

$$\langle V_2 \rangle = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{\int_{A_2} \bar{V}_2 \hat{n}_2\, dA_2}{A_2} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} \frac{V_m}{\phi/2} r\, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi \cdot \phi^2}{4}}$$

$$\langle V_2 \rangle = \frac{4}{\pi \phi^2} \frac{V_m \cdot 2}{\phi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2} r^2\, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{8 V_m}{\pi \phi^3} \int_0^{2\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right]_0^{\phi/2} d\theta = \frac{8 V_m}{3 \pi \phi^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\phi^3}{2^3} - 0\right) d\theta$$

$$= \frac{\cancel{8} V_m}{3\pi \cancel{\phi^3}} \frac{\cancel{\phi^3}}{\cancel{8}} \left.\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{V_m\, 2\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}};$$

$$\langle V_2 \rangle = \frac{2}{3} V_m; \quad V_m = \frac{3}{2} \langle V_2 \rangle \quad \boxed{V_m = \frac{3}{2} \langle V_1 \rangle}$$

reemplazando este valor en la integral 2:

Int. 2: $\rho\left(\frac{3}{2}\langle v_1\rangle\right)^2 \frac{\phi^2\pi}{8} = \frac{\rho \cdot 9\langle v_1\rangle^2 \phi^2 \pi}{4 \cdot 8} =$

$$= \boxed{\frac{9}{32}\rho\cdot\langle v_1\rangle^2\phi^2\cdot\pi}$$

Con todos los valores en ec (5).

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \left(-\frac{1}{4}\rho\langle v_1\rangle^2\phi^2\pi + \frac{9}{32}\rho\langle v_1\rangle^2\phi^2\pi\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{P}}{dt} = \left(\frac{1}{32}\rho\langle v_1\rangle^2\phi^2\pi\right)\hat{i}} \quad (5')$$

en (3):

$$\begin{cases} \sum\bar{F}_{ext} = \hat{i}\left(p_1 A_1 - p_2 A_2 - 2F_s\right) \\ \sum\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt} = ec\ (5) \end{cases}$$

$$\rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 - 2F_s = \frac{1}{32}\rho\langle v_1\rangle^2\phi^2\pi, \text{ como } A_1 = A_2$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[(p_1 - p_2)A + \frac{1}{32}\rho\langle v_1\rangle^2\phi^2\pi\right] = F_s$$

$$F_s = \frac{1}{2}\left[\frac{(p_1 - p_2)\pi\cdot\phi^2}{4} + \frac{1}{32}\rho\langle v_1\rangle^2\phi^2\pi\right]$$

$$\boxed{F_s = \frac{1}{8}\pi\phi^2\left[(p_1 - p_2) + \frac{1}{8}\rho\langle v_1\rangle^2\right]}$$ reemplazo valores:

$$F_S = \frac{1}{8}\pi (1m)^2 \left[(1{,}5-1)\cancel{kPa} \frac{10^3 \cancel{Pa}}{\cancel{1kPa}} \cdot \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{Pa} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} \cdot \frac{1 kg}{m^3} \cdot 30^2 \frac{m^2}{s^2} \right]$$

Unidades: $\frac{kg \cdot m}{s^2} = N$

$$F_S = \frac{1}{8}\pi \cdot 1m^2 \left[0{,}5 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} + \frac{900}{8} \frac{N}{m^2} \right]$$

$$\boxed{F_S = 240{,}53\ N}$$

por ec. 2: $F_d = 2F_S \longrightarrow \boxed{F_d = 481{,}06\ N}$

Problema 2: teoria

a) Hallar expresión para F_D (Fuerza de arrastre)

·) Aplicación números pi

Π_n = 7 variables − 3 magnitudes = 4 nros pi

·) Determino las unidades de cada variable:

$[F_D] = \frac{M \cdot L}{T^2}$; $[V_0] = \frac{L}{T}$, $[\rho] = \frac{M}{L^3}$; $[B] = L$, $[\mu] = \frac{M}{LT}$

$[u'] = \frac{L}{T}$; $[L_x] = L$

·) Es posible armar números pi con variables que tengan las mismas magnitudes fundamentales; en este caso:

1 $\boxed{\Pi_1 = \frac{L_x}{B}}$; $[\Pi_1] = \frac{[L_x]}{[B]} = \frac{L}{L} = 1$ ✓

2 $\boxed{\Pi_2 = \frac{u'}{V_0}}$ $[\Pi_2] = \frac{[u']}{[V_0]} = \frac{L/T}{L/T} = 1$ ✓

¡Tip! para problemas de este tipo, es probable que aparezca $\mathbb{R}e$ (nro Reynolds) como número adimensional, lo verificamos con Π_3:

$$\Pi_3 = B^a \cdot V_0^b \cdot \rho^c \cdot \mu^1$$

$$[\Pi_3] = [B]^a \cdot [V_0]^b \cdot [\rho]^c [\mu]^1$$

$$[\Pi_3] = L^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \cdot \frac{M}{LT}$$

L) $0 = a + b - 3c - 1$

M) $0 = c + 1$

T) $0 = -b - 1$

de donde $\boxed{c = -1}$ $\boxed{b = -1}$ $a = -b + 3c + 1$, $a = -(-1) + 3(-1) + 1$

$\boxed{a = 1 - 3 + 1 = -1}$

queda: $\Pi_3 = B^{-1} \cdot V_0^{-1} \cdot \rho^{-1} \mu$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{B \cdot V_0 \cdot \rho} = \frac{1}{\mathbb{R}e} \Longrightarrow \boxed{\Pi_3^* = \mathbb{R}e}$$

donde $\Pi_3^* = \frac{1}{\Pi_3}$ (También adimensional)

$$\boxed{\Pi_3^* = \frac{B \cdot V_0 \cdot \rho}{\mu}} \quad (3)$$

·) $\Pi_4 = F_d^a \, \rho^b \, V_0^c \, B^1$

$$[\Pi_4] = [F_d]^a [\rho]^b \cdot [V_0]^c \, [B]^1$$

$$= \left(\frac{M \cdot L}{T^2}\right)^a \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^c L^1$$

L) $a - 3b + c + 1 = 0$

T) $-2a - c = 0$

M) $a + b = 0$

queda: $\boxed{b = -a} \longrightarrow \boxed{c = -2a} \rightarrow a - 3(-a) + (-2a) + 1 = 0$

$a + 3a - 2a + 1 = 0$

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \\ c = 1. \end{cases}$$

$$\Pi_4 = Fd^{-1/2} \cdot \rho^{1/2}\, V_0^{1} \cdot B$$, para expresarlo en función de Fd, elevo ambos términos a -2

5

$$[\Pi_4]^{-2} = \left[Fd^{-1/2}\, \rho^{1/2}\, V_0^{1} \cdot B\right]^{-2} \quad ; \quad \Pi_4^{*} = \Pi_4^{-2}$$

$$\Pi_4^{*} = Fd^{-\frac{1}{2} \cdot -2}\, \rho^{\frac{1}{2} \cdot -2} \cdot V_0^{1 \cdot -2} \cdot B^{-2}$$

$$\Pi_4^{*} = Fd \cdot \rho^{-1} \cdot V_0^{-2} \cdot B^{-2}$$, despejo Fd.

$$\boxed{Fd = \Pi_4^{*} \cdot \rho \cdot V_0^{2} \cdot B^{2}} \quad (4)$$

Por el teorema Π; $\Pi_4^{*} = f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$, reemplazo en (4)

$$\boxed{Fd = \rho\, V_0^{2} B^{2} \cdot f\left(\mathbb{R}e, \frac{L_x}{B}, \frac{u'}{V_0}\right)} \quad (5)$$

b) La relación entre μ_m / μ_p (m: modelo, p: prototipo) debe buscarse en un nro Π que incluya la variable μ ó ν en su defecto. Para los Π_1, Π_2, Π_3 y Π_4^{*} encontrados antes, el único que cumple es el nro de Reynolds.

Por semejanza entre modelo y prototipo:

$$\boxed{\mathbb{R}e)_m = \mathbb{R}e)_p} \quad (6)$$ Con los valores de cada uno,

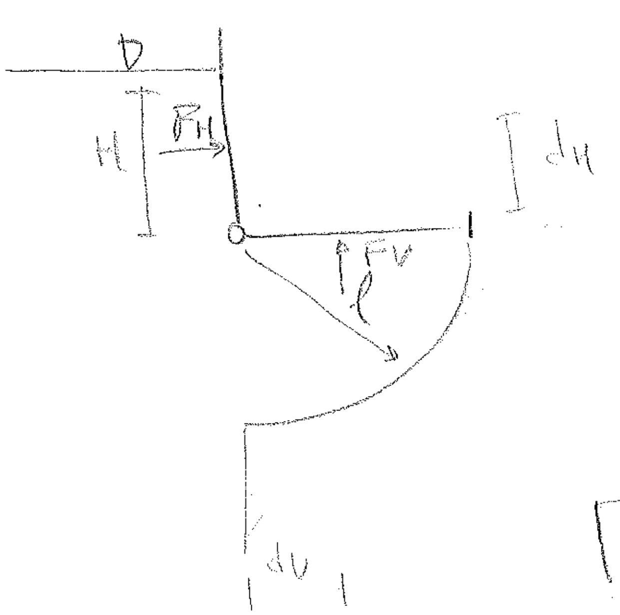
$$\frac{B_m \cdot V_{om}\, \rho_m}{\mu_m} = \frac{B_p \cdot V_{op}\, \rho_p}{\mu_p}$$, por definición

$$\boxed{\frac{\mu_m}{\mu_p} = \frac{B_m}{B_p} \cdot \frac{V_{om}}{V_{op}} \cdot \frac{\rho_m}{\rho_p}} \quad (7)$$

Ejercicio 1: Parte práctica

Hallar altura H para apertura de compuerta

Esquema del problema:



Resolución: Para compuerta en equilibrio:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$ (1) con (+ ↺)

$$\boxed{F_H \cdot d_H - F_V \cdot d_V = 0}$$ (2)

d_H, d_V: distancias de F_V y F_H al centro "o".

Calculo F_H

$$\boxed{F_H = \delta \cdot g \cdot h_{cg} \cdot A_H}$$ (3)

Para placa rectangular de alto "H" y profundidad "b":

$h_{cg} = \frac{H}{2}$; $A_H = b \cdot H$. queda en (3)

$$F_H = \delta \cdot g \cdot H \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot H$$

$$\boxed{F_H = \frac{1}{2} \delta \cdot g \cdot b \, H^2}$$ (4)

Calculo F_V. F_V = Fuerza de presión a altura "H" = Presión · área

$$\boxed{F_V = \underbrace{\delta \cdot g \cdot H}_{\text{presión}} \cdot \underbrace{l \cdot b}_{\text{área}}}$$ (5)

Las secciones vertical y horizontal de la compuerta son rectangulares, las fuerzas están aplicadas en la mitad de las mismas. $d_H = H - h_{cp}$ $d_V = \frac{l}{2}$, reemplazo (5) y (4) en (2)

$$h_{cp} = \frac{H}{2} + \frac{\frac{b \cdot H^3}{12}}{\frac{H}{2} \cdot H \cdot b} = \frac{H}{2} + \frac{bH^3}{12} \cdot \frac{bH^2}{2} = \frac{H}{2} + \frac{\cancel{2}\cancel{b}H^3}{6 \cdot 2 \cdot H^2 b}$$

$$h_{cp} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6}, \quad h_{cp} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) H = \frac{6+2}{12} H = \frac{8}{12} H = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} H \quad \boxed{h_{cp} = \frac{2}{3} H}$$

reemplazo en ①: $\frac{1}{2} \delta g\, b \cdot H^2 \left(H - \frac{2}{3} H\right) - \delta g H \cdot \ell \cdot b \frac{\ell}{2} = 0$

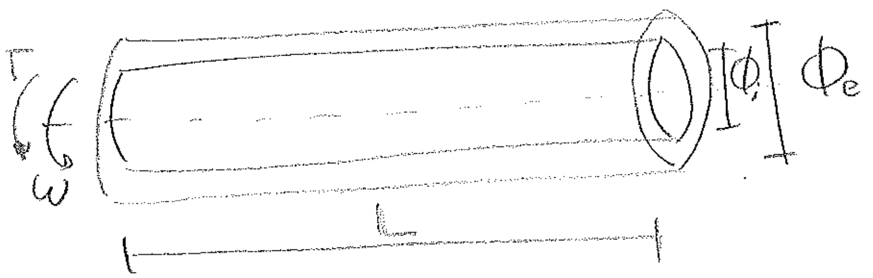
$$\frac{\delta g b}{2} H \left(\frac{H^2}{3} - \ell^2\right) = 0, \quad H = \sqrt{3}\,\ell, \quad H = \sqrt{3}\, 2\,m$$

$$\boxed{H = 3{,}46\,m}$$

Ejercicio 2 Parte práctica

a) Hallar T (momento torsor). b) Hallar $\dot{L}$ (potencia)

Esquema del problema:



Datos:

ϕ_e: diámetro exterior (cilindro)

ϕ_i: diámetro interior (eje)

μ: viscosidad aceite

ω: velocidad de rotación

Resolución: para el eje a $\omega = cte$, $\boxed{\sum M = 0}$ ①

Los dos momentos actuantes son: T (torque aplicado) y T_{fl} (torque debido a fricción por fluido)

de ①: $T - T_{fl} = 0$, $\rightarrow \boxed{T = T_{fl}}$ ②

Calculemos el T_{fl}, sabiendo que $T = F \cdot d$, llevado a datos:

$$\boxed{T_{FL} = F_{FL} \cdot R} \quad ③$$

Por definición, $\boxed{F_{fl} = \tau \cdot A}$ ④

Para fluidos newtonianos: $\boxed{\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dr}}$ En un perfil lineal,

$\frac{dv}{dr} \Rightarrow \frac{V}{e}$ (constante). Para velocidad a rotación, $V = \omega \cdot r$

e: espesor

queda: $e = (\phi e - \phi i)/2$

$\tau = \frac{\mu \cdot \omega R}{(\phi e - \phi i)/2}$; $\boxed{\tau = \frac{\mu \cdot \omega \cdot R}{e}}$ (5)

$\boxed{A = 2\pi R L}$ (6)

de (3), (4), (5), (6)

$T_{Fl} = \tau \cdot A \cdot R$

$T_{Fl} = \frac{\mu \cdot \omega \cdot R}{e} \cdot 2\pi R L \cdot R$

$\boxed{T_{Fl} = \frac{2\pi \mu \omega L R^3}{e}}$ (7) con los datos, $R = \phi i/2$

y de "e":

$$T_{Fl} = \frac{2\pi \mu \omega L \cdot \phi i^3}{((\phi e - \phi i)/2) \cdot 2^3}$$

$$T_{Fl} = \frac{\cancel{2}\pi \mu \omega L \phi i^3}{\frac{\phi e - \phi i}{\cancel{2}} \, 2^{\cancel{3}}} \, ; \quad \boxed{T_{Fl} = \frac{\pi \mu \omega L \phi i^3}{2(\phi e - \phi i)}} \; (7')$$

reemplazo valores:

$$T_{Fl} = \frac{\pi \cdot 0{,}03 N \cancel{s} \cdot 2000 \cancel{rev} \, 2\pi \, 1 \cancel{min} \, 1{,}22 m \cdot (2{,}54 \cdot 10^{-2})^3 \, \cancel{m^3}}{\cancel{m^2} \cdot 2 \quad \cancel{min} \, \cancel{rev} \quad 60 \cancel{s} \cdot (2{,}5908 - 2{,}54) \, 10^{-2} \, \cancel{m}}$$

$$T_{Fl} = \frac{0{,}02368}{0{,}06096} \, Nm \, ; \quad \boxed{\boxed{T_{Fl} = 0{,}388 \, N \cdot m}}$$

b) potencia requerida $\boxed{\dot{L} = T_{Fl} \cdot \omega}$ (8), con los datos:

$\dot{L} = 0{,}388\ N \cdot m \cdot \frac{2000\ \cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \frac{1\ \cancel{min}}{60\ s} \cdot \frac{2\pi}{\cancel{rev}}$

$\dot{L} = 81{,}26\ \underbrace{\underbrace{N \cdot m}_{J} \cdot \frac{1}{s}}_{watt}$; $\boxed{\dot{L} = 81{,}26\ W}$

Exercicio 3: Parte Práctica

a) Hallar altura "h" suministrada/quitada por la máquina

Aplico ec. de energía entre puntos ① y ② (ver gráfico)

$$(e_2 - e_1) + \frac{(P_2 - P_1)}{\delta \cdot g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (Z_2 - Z_1) = h_{perdidas} \quad ①$$

de ec ①: → Considero sistema adiabático, $e_2 - e_1 = 0$

→ $P_2 = P_1 = P_{atm}$

→ Para régimen permanente, puede suponerse que el nivel de agua queda estable; ∴ $\phi_1 >> d$ (suponiendo contenedor cilíndrico), para $Q = cte$,

$$Q = V \cdot A \rightarrow V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2 \Rightarrow V_1 << V_2;$$

→ $Z_2 - Z_1 = \Delta Z_2 + \Delta Z_1$ (de esquema del g):

→ $h_{perdidas}$ → ¿calor? no, es adiabático

→ ¿de carga? no

→ ¿de máquina? Sí

queda a ec ①

$$\cancel{\frac{(P_2-P_1)}{\gamma}} + \cancel{\frac{(V_2^2-V_1^2)}{2g}}^{\to 0} + (z_2-z_1) + \cancel{(e_2-e_1)} = h_p$$

$$\boxed{\frac{V_2^2}{2g} - (\Delta z_2 + \Delta z_1) = h_p} \quad (2)$$

Para calcular V_2, $Q = V_2 \cdot A_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V_2$

$$\boxed{V_2 = \frac{4Q}{\pi d^2}} \quad (3) \quad , \text{ de (3) en (2):}$$

$$h_p = \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{2g} - (\Delta z_2 + \Delta z_1)$$

$$h_p = \frac{8Q^2}{\pi^2 d^4 g} - \Delta z_2 - \Delta z_1 \quad , \text{ reemplazo valores:}$$

$$h_p = \frac{8 \cancel{s^2}}{\pi^2 \, 9{,}81 \cancel{m}} \frac{(0{,}28)^2 \, m^6}{\cancel{s^2} (15{,}24 \cdot 10^{-2})^4 \cancel{m^4}} - 3{,}66 \, m - 1{,}83 \, m$$

$$h_p = (12 - 3{,}66 - 1{,}83) \, m, \quad \boxed{h_p = 6{,}52 \, m}$$

¿Es bomba o turbina? → Si Δ Energía es >0 → Se agregó energía al sistema

↳ Si $\Delta E < 0$ → Se quitó energía del sistema

$\Delta E = h_p$ → como $h_p > 0$ → es una bomba

b) Hallar presión entre A y B

Tomando las consideraciones previas del punto anterior

Aplico ec. de energía:

$$\frac{P_B - P_A}{\delta \cdot g} + \frac{V_B^2 - V_A^2}{2g} + \overbrace{(z_B - z_A)}^{-\Delta z_2} + (\cancel{e_B} - \cancel{e_A})^{0} = \cancel{h_P}^{0}$$

$$-\frac{\Delta P}{\delta \cdot g} + \frac{1}{2g}(V_B^2 - V_A^2) - \Delta z_2 = 0$$

$$\frac{\Delta P}{\delta g} = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2g} - \Delta z_2$$

$$\Delta P = \frac{\delta \cancel{g}(V_B^2 - V_A^2)}{2\cancel{g}} - \delta g \Delta z_2$$

$$\boxed{\Delta p = \frac{\delta}{2}(V_B^2 - V_A^2) - \delta g \Delta z_2} \quad (4)$$

b) Calculo las velocidades: $Q_A = Q_B$

$$V_A \cdot A_A = V_B \cdot A_B \quad ; \quad V_B = V_2 \quad (A_B = A_2)$$

$$\frac{V_A \cdot \cancel{\pi} D^2}{\cancel{4}} = \frac{V_2 \cdot \cancel{\pi} \cdot d^2}{\cancel{4}} \quad ; \quad V_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = V_B$$

$$V_A \cdot D^2 = V_2 \cdot d^2$$

$$V_A \cdot D^2 = \frac{4Q}{\pi \cancel{d^2}} \cancel{d^2} \; ; \longrightarrow \boxed{V_A = \frac{4Q}{D^2 \pi}} \quad (5)$$

de (5) en (4): $$\Delta P = \frac{\delta}{2}\left[\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 - \left(\frac{4Q}{D^2 \pi}\right)^2\right] - \delta g \Delta z_2$$

$$\Delta p = \frac{\delta}{2}\left[\frac{16 Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)\right] - \delta g \Delta z_2$$

reemplazo valores:

$$\Delta p = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{16 (0,28)^2}{\pi^2} \frac{m^6}{s^2} \left(\frac{1}{(15,24 \cdot 10^{-2})^4 \, m^4} - \frac{1}{(39,48 \cdot 10^{-2})^4 \, m^4} \right) \right] \right\} -$$

$$- 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 3,66 \, m \Big\}$$

$$\Delta p = \left(\frac{10^3}{2} \frac{kg}{m^3} \left[220,88 \frac{m^2}{s^2} \right] \right) - 35904,6 \; Pa$$

$$\Delta p = (110440 - 35904,6) \, Pa \cdot \frac{kPa}{10^3 \, Pa}$$

$$\boxed{\Delta p = 74,54 \; kPa}$$