PRIMER PARCIAL FECHA 23-08-08
PARTE TEORICA

~~Problema 1~~

Dado un campo de velocidades bi-dimensional definido por:

$$\vec{V} = \vec{V}(u, v) = (0.5 + 0.8x)\,\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\,\vec{j}$$

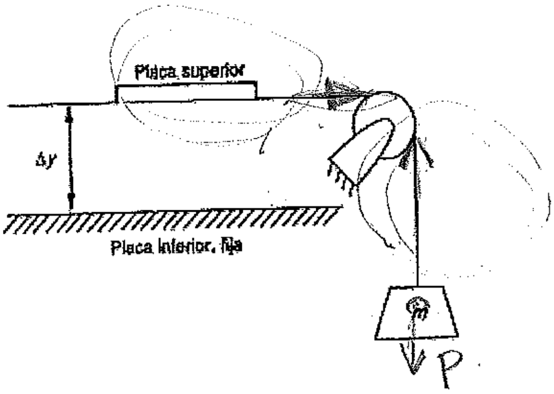
Se pide en relación a él investigar lo siguiente:

a) Si el campo es incompresible.
b) Si existe un punto de estancamiento y donde.
c) Calcular la aceleración de una partícula del campo que pase por el punto *(x=2, y=3)*
d) Idem c para otra partícula que pase un segundo después de la primera por el mismo punto.
e) Tomando algunos puntos genéricos del entorno *x (-3, 3); y (-1, 5)* dibuje en cada uno de ellos el vector velocidad en magnitud y dirección.
f) Trate de dibujar a partir de lo obtenido en el punto e, con líneas continuas, las líneas de corriente del campo y hacer algún comentario que surja de lo observado.

→ pto de max P de toda la línea toda la E cinética se transforma en E presión
↳ donde $V = 0$

~~Problema 2~~

En el siguiente diagrama se muestran dos placas que se encuentran a una distancia Δy una de la otra. La placa inferior está fija y la superior se mueve bajo la acción de una masa de 25g. Si el fluido entre las placas es aceite con $\mu = 650 \times 10^{-3}$ Ns/m^2 y el área de contacto de la placa superior con el aceite es de 0.75cm^2, encuentre la velocidad de la placa superior cuando la distancia que separa a las placas es 1cm.



~~Problema 3~~

a) Para el caso de un líquido ideal, expresar el caudal Q a través de un orificio en función de la densidad del líquido, el diámetro del orificio y la diferencia de presiones usando teoría de números adiminesionales.
b) Un barco cuyo casco tiene una longitud de 140m ha de moverse a 7.50m/s. Para lograr la semejanza dinámica ¿a qué velocidad debe remolcarse en agua un modelo construido a una escala de 1:30? Justificar cada paso.

(2).

$T = ma = mg = 245\ N$

$T = F = 2mg \rightarrow F = \tau A \rightarrow \tau = \dfrac{F}{A} = 3266,67\ \dfrac{N}{m^2}$ ($F = 245\ N$; $A = 0,75 \cdot 10^{-4}\ m^2$)

$\tau = \mu \dfrac{V}{e} \rightarrow V = \dfrac{\tau e}{\mu} = \left[\dfrac{\frac{N}{m^2} \cdot m}{\frac{N \cdot s}{m^2}}\right]$

$\boxed{V = 50,26\ \dfrac{m}{s}}$

Problemas propuestos para el examen. Son teóricos (muy sencillos dadas las circustancias). Se pide que además de la resolución expliquen los resultados teóricos utilizados.

Problema 1

Calcular la rapidez con la que sale un líquido de la abertura de un recipiente, tomando en cuenta la velocidad de la superficie superior del líquido, de la siguiente manera:

a) demostrar a partir de la ecuación de Bernouilli que:

$$v_0^2 = v^2 + 2gh$$

en donde v es la velocidad de la superficie superior.

b) considerar entonces el flujo como un tubo de flujo grande y obtener v/v_0 de la ecuación de continuidad, de tal forma que:

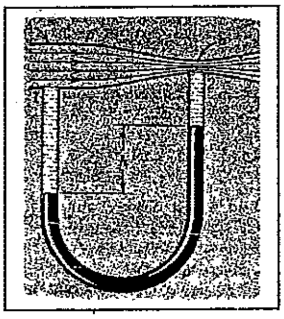
$$v_0 = \sqrt{2gh}\left[1-(A_0/A)^2\right]$$

en donde A es la sección transversal del tubo en la parte superior, y A_m es la sección transversal del tubo en la abertura,

c) demostrar que si el orificio es pequeño comparado con el área de la superficie

$$v_0 = \sqrt{2gh}\left[1+\frac{1}{2}(A_0/A)^2\right]$$

Problema 2



Aplicando la ecuación de Bernouilli y la ecuación de continuidad a los puntos 1 y 2 que se muestran en la figura, demostrar que la rapidez del flujo en la entrada es:

$$v = a\sqrt{\frac{2(\rho'-\rho)gh}{\rho(A^2-a^2)}}$$

Problema 3

Un gran depósito abierto de paredes verticales (ver figura) , está lleno de agua hasta una altura H. Se efectúa un orificio en una de las paredes a una profundidad h por debajo de la superficie del agua.

a) a qué distancia R del pie de la pared alcanzará el suelo el chorro de agua que sale por el orificio.
b) a qué altura h por encima del fondo del depósito puede practicarse un segundo orificio para que el chorro que sale de él tenga el mismo alcance que el anterior.

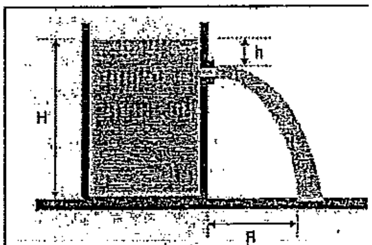


Fig. 2 Problema 3

Problema 4

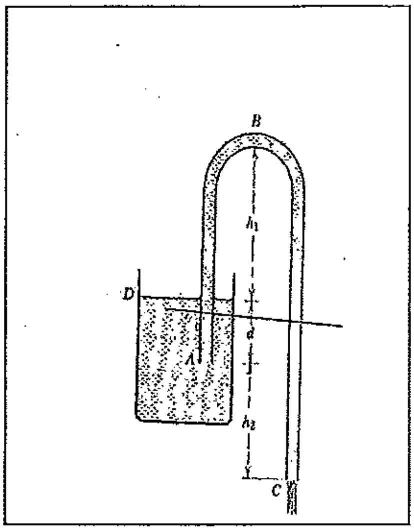
La superficie superior del agua en un depósito está a una altura H por encima del nivel del suelo:

a) ¿a qué profundidad h se debe perforar un orificio pequeño para que el chorro horizontal saliente llegue al piso a una distancia máxima, medida desde la base del depósito?
b) ¿Cuál es esa distancia máxima?

~~Problema 5~~

Un sifón es un dispositivo para extraer líquido de un recipiente que no puede ser inclinado. Su operación se muestra en la figura. El tubo debe estar inicialmente lleno, pero una vez que esto se ha hecho, el líquido fluirá hasta que el nivel disminuya por debajo de la abertura A del tubo. El líquido tiene una densidad ρ y una viscosidad despreciable.

a) ¿Con qué rapidez sale el líquido del tubo en el punto C?
b) ¿Cual es la presión en el líquido en la parte más alta, representada por el punto B
c) ¿Cuál es la mayor altura posible a la cual se puede elevar el agua con un sifón?



?o **Problema 6**

Dos cuerpos esféricos del mismo diámetro se sueltan simultáneamente desde la misma altura. Si la masa de uno es n veces mayor que la del otro y la resistencia del aire es la misma para ambos, demostrar que el más pesado llegará antes al piso.

~~Problema 7~~

~~Un~~ campo vectorial de velocidades viene dado por:

$$\vec{V} = (4x+3y)\hat{i} + 3x\hat{j}$$

~~a)~~ ¿es un campo irrotacional? Justificar.
~~b)~~ En caso que sea irrotacional expresar la familia de funciones escalares ϕ del que puede derivarse esta campo de velocidades.
~~c)~~ Hallar la aceleración en el punto

$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$

~~d)~~ indicar si el flujo indicado satisface la condición de continuidad.
~~e)~~ Proponer la expresión vectorial de un campo de velocidades tridimensional incompresible que satisfaga las siguientes condiciones: que sea irrotacional y cumpla la ecuación de continuidad.

(a) $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & + \frac{\partial}{\partial y} \\ 4x+3y & 3x \end{vmatrix} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{V} = (3-3)\,k = 0$$

$\downarrow$ es irrotacional

(b) $\phi = ?$ $\quad u = \frac{d\phi}{dx} \quad v = \frac{d\phi}{dy}$

$$4x+3y = \frac{d\phi}{dx} \longrightarrow \phi = \int 4x+3y\, dx + f(y)$$

$$\phi = \frac{4x^2}{2} + 3xy + f(y)$$

$$v = \frac{d\phi}{dy} \longrightarrow 3x = 3x + f'(y) \rightarrow f'(y) = 0$$

$$f(y) = cte.$$

$$\boxed{\phi = 2x^2 + 3xy + cte}$$

(c) $a_x = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} = (4x+3y)\,4 + 3x \cdot 3$

$$\boxed{a_x(3;2) = 99\ \frac{m}{s^2}}$$

$a_y = u\frac{dv}{dx} + \cancel{v\frac{dv}{dy}} = (4x+3y)\,3$

$$\boxed{a_y(3;2) = 54\ \frac{m}{s^2}}$$

(d) $(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = 0$?

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 4 \\ \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \neq 0 \Rightarrow$ no se cumple

$\frac{dm}{dt} = 0$? la ecuación de continuidad.

Ideal

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \rho = cte \end{array}}$$

$\frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$

$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \nabla(\cancel{\rho}\vec{V}) = 0$

(e) $\vec{V} = u\check{i} + v\check{j} + w\check{k}$

$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ u & v & w \end{vmatrix}$

$0 = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \rightarrow$

$0 = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}$

$0 = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$

(g) $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$

$1 + 1 - 2 = 0$

$$\boxed{\vec{V} = (x; y; -2z)}$$

HOJA Nº

FECHA

Parcial 23-08-08.

Parte teórica

Problema (4)

$\vec{V} = \vec{V}(u, v) = (0,5 + 0,8x)\,\check{i} + (1,5 - 0,8y)\,\check{j}$

(a) $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,8$

$0,8 - 0,8 = 0 \longrightarrow \checkmark$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -0,8$

(b) $u = 0 \qquad v = 0$

$0,5 + 0,8x = 0 \qquad 1,5 - 0,8y = 0$

$\boxed{\frac{-5}{8} = x} \qquad \boxed{\frac{15}{8} = y}$

$\vec{V} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$

$u\check{i} + v\check{j} + w\check{k} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\check{i} + \frac{\partial}{\partial y}\check{j} +$

(c) $\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$

$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = (0,5 + 0,8x)\,0,8 + \cancel{(1,5 - 0,8y)(-0,8)}$

$\boxed{a_x(2,3) = 1,68\ \frac{m}{s^2}}$

$a_y = \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + v\frac{\partial v}{\partial y} = (1,5 - 0,8y)\,-0,8$

$\boxed{a_y(2,3) = 0,72\ \frac{m}{s^2}}$

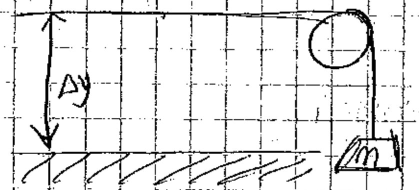
(d) la misma

NOTA

Problema (2)

$\mu = 650 \times 10^{-3} \frac{Ns}{m^2}$

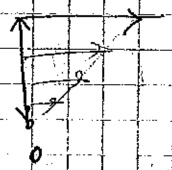
$m = 25g$



$W = F$

$\boxed{F = 245 N}$

$\frac{F}{area} = \mu \frac{dv}{dy}$



$V = \frac{F \cdot dy}{area \cdot \mu}$

$v = \frac{0{,}245 \, \cancel{N} \; 1 \times 10^{-2} \, m}{0{,}75 \times 10^{-4} \, \cancel{m^2} \; 650 \times 10^{-3} \, \frac{\cancel{N} s}{\cancel{m^2}}}$

$\boxed{V = 50{,}26 \frac{m}{s}}$

Problema (3)

a) $\mu = 0$. $\quad Q = f(\rho, d, \Delta P)$. $\quad n = 4$

$[Q] = \frac{L^3}{t}$ $\quad [\Delta P] = \frac{masa}{L^2} \frac{L}{t^2} = \frac{masa}{L t^2}$

$[\rho] = \frac{masa}{L^3}$ $\quad K = 3$

$[d] = L$.

$\Pi = d^{\alpha 1} \rho^{\alpha 2} \Delta P^{\alpha 3} \cdot Q$.

$[\Pi] = 1 = L^{\alpha 1} \left(\frac{masa}{L^3}\right)^{\alpha 2} \left(\frac{masa}{L t^2}\right)^{\alpha 3} \frac{L^3}{t}$.

$L: \alpha 1 - 3\alpha 2 - \alpha 3 + 3 = 0$ $\quad \boxed{\alpha 1 = -2}$

$masa \quad \alpha 2 + \alpha 3 = 0$ $\quad \boxed{\alpha 2 = \frac{1}{2}}$

$t. \quad -2\alpha 3 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha 3 = -\frac{1}{2}}$

$\Pi = d^{-2} \rho^{\frac{1}{2}} \Delta P^{-\frac{1}{2}} Q \longrightarrow$ $\boxed{\Pi_1 = \frac{\sqrt{\rho} \, Q}{d^2 \sqrt{\Delta P}}}$

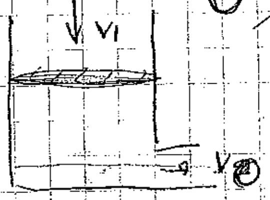
$\boxed{Q = cte \, d^2 \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Problema 1



(a) $\cancel{P_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = \cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \cancel{\rho g z_0}$

$$v_0 = \sqrt{2\left(\frac{1}{2} v_1^2 + g z_1\right)}$$ ✓

$\dot m_2 = \dot m_1$

(b) $\cancel{\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho \, dV + \iint \rho (\vec v \cdot \vec n)\, da}$

$\cancel{0 = \frac{\partial}{\partial t}\rho \underbrace{\pi R^2}_{A_1} h + \rho A_0 v_0 - \rho A_1 v_1}$

$\cancel{0 = \frac{\partial A_1 h}{\partial t} + A_0 v_0 - A_1 v_1}$

$\cancel{v_0 = A_1 \frac{dh}{dt} - A_1 v_1}$

$Q_1 = Q_0 \rightarrow v_1 A_1 = v_0 A_0$

$$v_1 = v_0 \frac{A_0}{A_1}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh + \left(v_0 \frac{A_0}{A_1}\right)^2}$$

$$v_0^2 = 2gh + v_0^2 \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$$

$$2gh = v_0^2 \left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2\right)$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2}}}$$

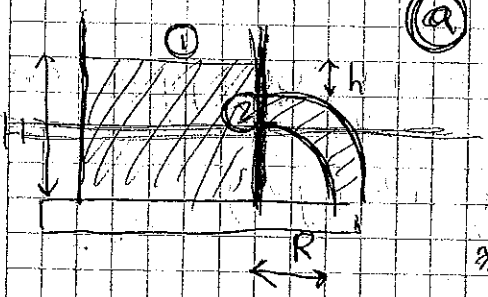
(c) $A_0 << A_1$

$$\sim \boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

NOTA

GUIÑE

Problema (3)



(a) $V_2 = \sqrt{\cancel{V_1^2} + 2gz}$

$V_2 = \sqrt{2g(h)}$

$R = V_2 t$

$-(H-h) = \frac{1}{2} g t^2$

$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

$$\boxed{R = V_2 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}}$$

$R = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

$R = \sqrt{4h(H-h)}$.

(b) $\cancel{\sqrt{4h(H-h)}} =$

Problema (4)

(a) $\frac{dR}{dh} = 0$ $\rightsquigarrow$ $0 = \frac{1}{2}(4hH - 4h^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(H-2h)$

$0 = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{hH-h^2}}\cdot(H-2h)$

$H = 2h$

$$\boxed{h = \frac{H}{2}}$$

(b) $R = \sqrt{4\frac{H}{2}\cdot\left(H - \frac{H}{2}\right)} \longrightarrow R = \sqrt{\frac{4}{2}\frac{H}{2}H} \rightarrow \boxed{R = H}$

NOTA