11 / 28

UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA ***SANTA MARÍA DE LOS BUENOS AIRES***
FACULTAD DE FISICOMATEMÁTICAS E INGENIERÍA
CÁTEDRA DE MECÁNICA DE FLUIDOS
PRIMER PARCIAL 30-09-09

NOTA. Para aprobar este examen se requiere haber resuelto correctamente al menos dos problemas de cada una de las partes.

PARTE TEÓRICA

$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$

Problema 1

La función potencial de un flujo bidimensional está dada por:

$$\phi = xy + x^2 - y^2$$

$\phi = u \cdot dy$ $\qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

$\vec{V} = \nabla \phi$

a) Encontrar la función corriente ψ para este flujo y,
b) Hallar el módulo del vector velocidad para el punto (1,2).
c) Definir si el flujo es: permanente o no permanente, compresible o incompresible, viscoso o no viscoso, ¿es rotacional o irrotacional?, ¿podría ser laminar o turbulento? Justificar cada una de las afirmaciones.

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Problema 2:

a) Un flujo incompresible estacionario está definido por el siguiente campo de velocidades:

$$\mathbf{V} = 4xy^2\mathbf{i} + f(y)\mathbf{j} - zy^2\mathbf{k}$$

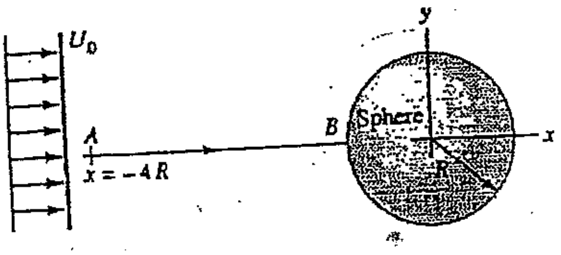
$\nabla \vec{V} = 0$

Halla la función f(y) para que el flujo cumpla con la ecuación de continuidad.

b) Considere una esfera de radio R inmersa en un flujo uniforme de velocidad U_0 como se muestra. La expresión de la velocidad a lo largo de la línea de corriente AB está dada por la siguiente expresión:

$$V = u = U_0(1 + (R/x)^3)$$

$\frac{d\rho}{dt}$

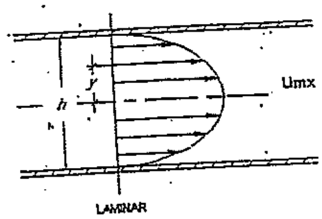


Hallar el punto en el que ocurre la aceleración máxima a lo largo de la línea AB

Problema 3

Considere un flujo laminar de un fluido newtoniano de viscosidad μ entre dos placas planas paralelas de gran longitud y de ancho b, el flujo es uní axial, y su perfil de velocidades que se muestra en la figura está dado por:

$$u(y) = 4U_{mx}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$



Desarrolle una relación para la fuerza de arrastre por unidad de longitud, ejercida sobre las placas por el fluido. de 2 formas ≠.

Saco τ yopque Farrastre maloday

$x^3 = 3x^2$

Primer Parcial 30/09/09

Parte Teórica

Problema 1

$\phi = xy + x^2 - y^2$

a. función corriente

Suponiendo que $\bar{\nabla}.\bar{V} = 0 \rightarrow \exists\ \psi$

y se cumple que

$u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$

$y + 2x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$

$\psi = \int (y + 2x)\, dy$

$= \dfrac{y^2}{2} + 2xy + f(x)$

$v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

$x - 2y = -2y - f'(x)$

$f'(x) = -x \quad \therefore \quad f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + k$

$\psi = \dfrac{y^2}{2} + 2xy - \dfrac{x^2}{2}$

Verifico

$\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = y + 2x \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -2y + x$ ✓

b. $u = y + 2x \qquad v = x - 2y$

$\bar{V} = (y + 2x\ ;\ x - 2y)$

~~$\bar{V}(1,2) = (4\ ;\ -3)$~~

$|\bar{V}(1,2)| = 5$

c. El flujo es: . permanente $\rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

. incompresible $\rightarrow \rho = cte \quad \bar{\nabla}.\bar{V} = 0 \rightarrow 2 - 2 = 0$

. viscoso o no viscoso $\rightarrow$?? PREG! $\rightarrow$ no es viscoso pq es ideal.

. irrotacional $\rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{V} = 0 \rightarrow (0\ ;\ 0\ ;\ 1 - 1) = \bar{0}$

!. dado que el flujo es permanente, incompresible, e irrotacional ! → Check!

$\Rightarrow$ es ideal, por lo tanto $\mu = 0$

. dado que $\mu = 0$ $\rightarrow$ no es laminar ni ~~[illegible]~~ turbulento

- Expresión vectorial de un campo de velocidades:
  - tridimensional
  - incompresible
  - irrotacional
  - cumpla con la ecuación de continuidad

Si el flujo es tridimensional:

$$\bar{V} = u\check{i} + v\,j + w\,\check{k}$$

Si el flujo es incompresible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{V}) = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}\bar{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Si el flujo es irrotacional:

$$\bar{\nabla}\times\bar{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla}\times\bar{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} ; \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} ; \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \bar{0} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \rightarrow 4-2-2=0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} & \rightarrow 0=0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} & \rightarrow 0=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} & \rightarrow 0=0 \end{cases}$$

$$\bar{V} = (4x ; -2y ; -2z)$$

Problema 2

$\bar{V} = 4xy^2 \check{i} + f(y)\check{j} - zy^2 \check{k}$

$\rightarrow$ flujo cumple la ecuación de continuidad

Ecuación de continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{V}) = 0$

$\rightarrow$ dado que el fluido es incompresible: $\rho = cte$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{V}) = 0 \rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

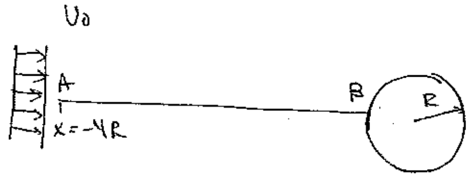
$$4y^2 + f'(y) - y^2 = 0$$

$$f'(y) = -3y^2 \rightarrow f(y) = -y^3 + cte$$

$$\bar{V} = 4xy^2\check{i} - y^3\check{j} - zy^2\check{k}$$

Verifico: $\bar{\nabla}\cdot\bar{V} \Rightarrow 4y^2 - 3y^2 - y^2 = 0$ ✓

Problema 3



$$\bar{a} = \frac{D\bar{V}}{Dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})$$

Como el fluido es unidimensional y estacionario:

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} = U_0\left[1 + \left(\frac{R}{x}\right)^3\right]U_0\left[-\frac{3R^3}{x^4}\right] = -3U_0^2R^3\left[x^{-4} + R^3x^{-7}\right] \quad \text{para } x \leq -R$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[x^{-3}] = -3[x^{-4}]$$

la aceleración máxima ocurre cuando $\frac{d(a_x)}{dx} = 0$

$$\frac{da_x}{dx} = -3U_0^2R^3\left[-4x^{-5} - 7R^3x^{-8}\right] = 0$$

$$-4x^{-5} = 7R^3x^{-8}$$

$$-4 = 7R^3x^{-3}$$

$$x^3 = -\frac{7R^3}{4}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{7R^3}{4}} = -1.205R$$

Problema 3

$$\tau_p = \mu \frac{dV}{dy} = \mu \frac{d}{dy}\left[4U_{m}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2 \right]\right] = \mu 4 U_{Mx}\left[\frac{1}{h} - \frac{2y}{h^2}\right]$$

$$F = \tau_p A = \tau_p b l$$

$$\frac{F}{l} = \mu 4 U_{max} b \left[\frac{1}{h} - \frac{2y}{h^2}\right]$$

Parte Teórica

Problema 1

$$p_B + \gamma\, 20.3\,cm + 13,6\,\gamma\, 12.7\,cm - 0.8\,\gamma\, 10.16\,cm + 13.6\,\gamma\, 7.62\,\gamma - \gamma\, 25.4\,cm = p_A$$

Problema 3

Preg!

Primer Parcial 23/08/06

Parte Teórica

Problema 1

$$\bar{V} = \bar{V}(u, v) = (0{,}5 + 0.8x)\,\check{i} + (1.5 - 0.8y)\,\check{j}$$

a. El campo es incompresible?

Ecuación de Continuidad $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}.(\rho \bar{V}) = 0$

Si el campo es incompresible (ρ = cte): $\bar{\nabla}\bar{V} = 0$

$$\bar{\nabla}.\bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.8 - 0.8 = 0 \rightarrow \text{Si es incomp}$$

b. Pto. de estancamiento

$(x_0, y_0) \;/\; \bar{V}(x_0, y_0) = \bar{0}$

$$0 = 0.5 + 0.8\,x_0 \;\therefore\; x_0 = \frac{-0.5}{0.8}$$

$$0 = 1.5 - 0.8\,y_0 \;\therefore\; y_0 = \frac{1.5}{0.8}$$

Pto de estancamiento: $\left(-\frac{0.5}{0.8} ; \frac{1.5}{0.8}\right)$

c. $\bar{a} = \frac{D\bar{V}}{Dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V}.(\bar{\nabla}.\bar{V})$

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}} = (0.5 + 0.8x)\,0.8$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}} = (1.5 - 0.8y)(-0.8)$$

$a_z = 0$

$\bar{a}(2,3) = 1.68\,\check{i} - 0.56\,\check{j}$