Modelo Segundo Parcial

Ejercicio 1

Presión en una pompa de jabón

Algunos niños juegan con pompas de jabón, y el lector tiene curiosidad acerca de la relación entre el radio de la pompa de jabón y la presión adentro de la misma (Fig. 7-29). Razona que la presión adentro de la pompa de jabón debe ser mayor que la presión atmosférica, y que el cascarón de la pompa está bajo tensión, en gran parte como la piel de un globo. Conoce que la propiedad de tensión superficial debe ser importante en este problema. Sin saber algo más de física, decide enfrentar el problema con el uso del análisis dimensional. Establezca una relación entre la diferencia de presión $\Delta P = P_{\text{adentro}} - P_{\text{afuera}}$, el radio de la pompa de jabón R y la tensión superficial σ_s de la película jabonosa.

SOLUCIÓN La diferencia de presión entre el interior de una pompa de jabón y el aire exterior se analizará mediante el método de repetición de variables.

Hipótesis **1** La pompa de jabón está neutralmente flotante en el aire, y la gravedad no es relevante. **2** En este problema no son importantes otras variables o constantes.

Análisis Se emplea paso a paso el método de repetición de variables.

Paso 1 Existen tres variables y constantes en este problema; $n = 3$. Con las mismas se hace una lista en forma funcional, y la variable dependiente se menciona como una función de las variables y constantes independientes:

$$\textit{Lista de parámetros relevantes:} \qquad \Delta P = f(R, \sigma_s) \qquad n = 3$$

Paso 2 Se hace una lista con las dimensiones primarias de cada parámetro.

ΔP	R	σ_s
$\{m^1 L^{-1} t^{-2}\}$	$\{L^1\}$	$\{m^1 t^{-2}\}$

Paso 3 Como primera suposición, j se hace igual a 3, el número de dimensiones primarias representadas en el problema (m, L y t).

Reducción (primera suposición): $$j = 3$$

Si este valor de j es correcto, el número esperado de Π es $k = n - j = 3 - 3 = 0$. Pero ¿cómo se puede tener cero Π? Obviamente algo no está bien (Fig. 7-30). En momentos como éste es necesario primero regresar y cerciorarse de que no se está despreciando alguna variable o constante importante en el problema. Dado que se está seguro que la diferencia de presión debe depender sólo del radio y la tensión superficial de la pompa de jabón, el valor de j se reduce por uno:

Reducción (segunda suposición): $$j = 2$$

Si este valor de j es correcto, $k = n - j = 3 - 2 = 1$. Por ende, se espera *una* Π, que físicamente es más realista que cero Π.

Paso 4 Es necesario escoger dos parámetros repetitivos porque $j = 2$. Cuando se siguen los lineamientos de la Tabla 7-3, las únicas opciones son R y σ_s, porque ΔP es la variable dependiente.

Paso 5 Estos parámetros repetitivos se combinan en un producto con la variable dependiente ΔP para crear la Π dependiente:

Π *dependiente:* $$\Pi_1 = \Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1} \tag{1}$$

Se aplican las dimensiones primarias del paso 2 en la ecuación 1 y se fuerza a la Π a ser adimensional:

Dimensiones de Π_1:

$$\{\Pi_1\} = \{m^0L^0t^0\} = \{\Delta P R^{a_1} \sigma_s^{b_1}\} = \{(m^1L^{-1}t^{-2})L^{a_1}(m^1t^{-2})^{b_1}\}$$

Se igualan los exponentes de cada dimensión primaria para resolver a_1 y b_1:

Tiempo:	$\{t^0\} = \{t^{-2}t^{-2b_1}\}$	$0 = -2 - 2b_1$	$b_1 = -1$
Masa:	$\{m^0\} = \{m^1 m^{b_1}\}$	$0 = 1 + b_1$	$b_1 = -1$
Longitud:	$\{L^0\} = \{L^{-1}L^{a_1}\}$	$0 = -1 + a_1$	$a_1 = 1$

Por fortuna, los primeros dos resultados concuerdan uno con otro y, por lo tanto. la ecuación 1 se convierte en:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} \tag{2}$$

A partir de la Tabla 7-5, el parámetro adimensional establecido más similar a la ecuación 2 es el **número de Weber**, que se define como presión (ρV^2) por una longitud dividida entre tensión superficial. No hay necesidad de manipular más esta Π.

Paso 6 Se escribe la relación funcional final. En el caso a la mano, sólo existe una Π, que es una función de *nada*. Esto sólo es posible si la Π es constante. Cuando se coloca la ecuación 2 en la forma funcional de la ecuación 7-11:

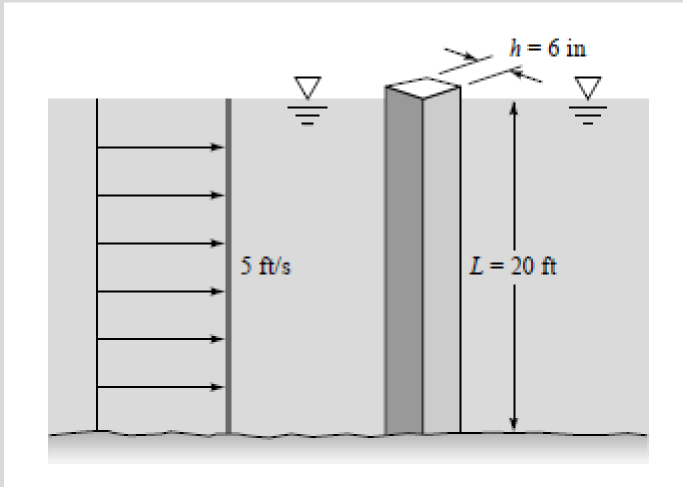
Relación entre las Π:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P R}{\sigma_s} = \mathbf{f}(\text{nada}) = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta P = \textbf{constante}\,\frac{\sigma_s}{R}} \tag{3}$$

Discusión Éste es un ejemplo de cómo en ocasiones se pueden predecir *tendencias* con análisis dimensional, inclusive sin saber mucho de la física del problema. Por ejemplo, se conoce a partir del resultado que, si el radio de la pompa de jabón se duplica, la diferencia de presión disminuye por un factor de 2. De manera similar, si el valor de la tensión superficial se duplica, ΔP aumenta por un factor de 2. El análisis dimensional no puede predecir el valor de la constante en la ecuación 3; un análisis ulterior (o *un* experimento) revela que la constante es igual a 4 (capítulo 2),

Ejercicio 2 (Tablas al final)

Sobre un pilote cuadrado de 6 in de lado incide una corriente de agua de 5 ft/s y 20 ft de profundidad, como se muestra en la Figura E7.6. Estime el momento ejercido por la corriente en la base del pilote.



E7.6

Solución

Consideramos agua de mar con $\rho = 1{,}99$ slugs/ft^3 y viscosidad cinemática $\nu = 0{,}000011$ ft^2/s. Con una anchura del pilote de 0,5 ft, tenemos

$$\mathrm{Re}_h = \frac{(5 \text{ ft/s})(0{,}5 \text{ ft})}{0{,}000011 \text{ ft}^2/\text{s}} = 2{,}3 \times 10^5$$

Para este valor del número de Reynolds es aplicable la Tabla 7.2. El caso más desfavorable se da cuando la corriente es perpendicular a uno de los lados del pilote, C_D P 2,1. El área frontal es $A = Lh = (20 \text{ ft})(0{,}5 \text{ ft}) = 10$ ft^2. La resistencia es

$$F = C_D(\tfrac{1}{2}\rho V^2 A) \text{ P } 2{,}1(\tfrac{1}{2})(1{,}99 \text{ slugs/ft}^3)(5 \text{ ft/s})^2(10 \text{ ft}^2) = 522 \text{ lbf}$$

Si el flujo es uniforme, el punto de aplicación de esta fuerza estará aproximadamente en el punto medio del pilote. Por tanto, el momento en la base es

$$M_0 \text{ P } \frac{FL}{2} = 522(10) = 5220 \text{ ft} \cdot \text{lbf} \qquad \textit{Resp.}$$

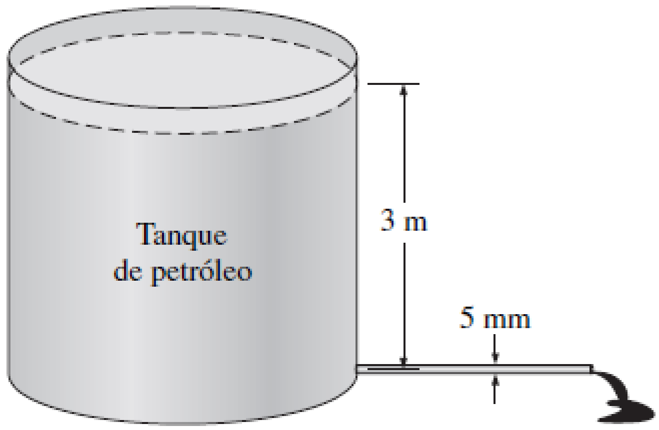
De acuerdo con la teoría de flexión de vigas de la resistencia de materiales, el esfuerzo flector en la base será

$$S = \frac{M_0 y}{I} = \frac{(5220 \text{ ft} \cdot \text{lb})(0{,}25 \text{ ft})}{\frac{1}{12}(0{,}5 \text{ ft})^4} = 251.000 \text{ lbf/ft}^2 = 1740 \text{ lbf/in}^2$$

que, por supuesto, debe multiplicarse por el factor de concentración de esfuerzos debido a las condiciones de empotramiento en el extremo.

Ejercicio 3

8-30 Se tiene petróleo con una densidad de 850 kg/m^3 y viscosidad cinemática de 0.00062 m^2/s que se descarga por medio de una tubería horizontal de 5 mm de diámetro y 40 m de longitud desde un tanque de almacenamiento abierto a la atmósfera. La altura del nivel del líquido sobre el centro de la tubería es de 3 m. Sin considerar las pérdidas menores, determine la razón de flujo del petróleo a través de la tubería.

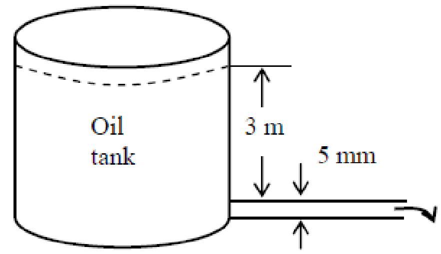


Solution Oil is being discharged by a horizontal pipe from a storage tank open to the atmosphere. The flow rate of oil through the pipe is to be determined.

Assumptions **1** The flow is steady and incompressible. **2** The entrance effects are negligible, and thus the flow is fully developed. **3** The entrance and exit loses are negligible. **4** The flow is laminar (to be verified). **5** The pipe involves no components such as bends, valves, and connectors. **6** The piping section involves no work devices such as pumps and turbines.

Properties The density and kinematic viscosity of oil are given to be $\rho = 850\ \text{kg/m}^3$ and $\nu = 0.00062\ \text{m}^2/\text{s}$, respectively. The dynamic viscosity is calculated to be

$$\mu = \rho\nu = (850\ \text{kg/m}^3)(0.00062\ \text{m}^2/s) = 0.527\ \text{kg/m}\cdot\text{s}$$



Analysis The pressure at the bottom of the tank is

$$P_{1,\text{gage}} = \rho g h$$

$$= (850\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(3\ \text{m})\left(\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}\right)$$

$$= 25.02\ \text{kN/m}^2$$

Disregarding inlet and outlet losses, the pressure drop across the pipe is

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1 - P_{\text{atm}} = P_{1,\text{gage}} = 25.02\ \text{kN/m}^2 = 25.02\ \text{kPa}$$

The flow rate through a horizontal pipe in laminar flow is determined from

$$\dot{V}_{\text{horiz}} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} = \frac{(25.02\ \text{kN/m}^2)\pi(0.005\ \text{m})^4}{128(0.527\ \text{kg/m}\cdot\text{s})(40\ \text{m})}\left(\frac{1000\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\ \text{kN}}\right) = 1.821\times10^{-8}\ \text{m}^3/\text{s} \cong \mathbf{1.82\times10^{-8}\ m^3/s}$$

The average fluid velocity and the Reynolds number in this case are

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{1.821\times10^{-8}\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.005\ \text{m})^2/4} = 9.27\times10^{-4}\ \text{m/s}$$

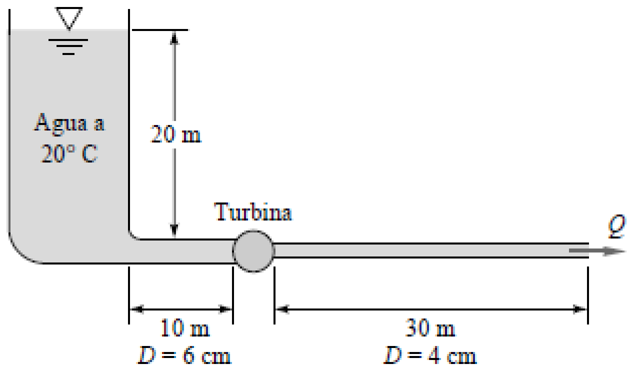
$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(850\ \text{kg/m}^3)(9.27\times10^{-4}\ \text{m/s})(0.005\ \text{m})}{0.527\ \text{kg/m}\cdot\text{s}} = 0.0075$$

which is less than 2300. Therefore, the flow is *laminar* and the analysis above is valid.

Discussion The flow rate will be even less when the inlet and outlet losses are considered, especially when the inlet is not well-rounded.

Ejercicio 4

La turbina pequeña de la Figura P6.76 extrae 400 W del flujo de agua que circula. Ambos tubos son de hierro forjado. Calcule el caudal Q en metros cúbicos por hora. Esquematizar la LNE y la LAM.



P6.76

6.76 The small turbine in Fig. P6.76 extracts 400 W of power from the water flow. Both pipes are wrought iron. Compute the flow rate Q m^3/h. Sketch the EGL and HGL accurately.

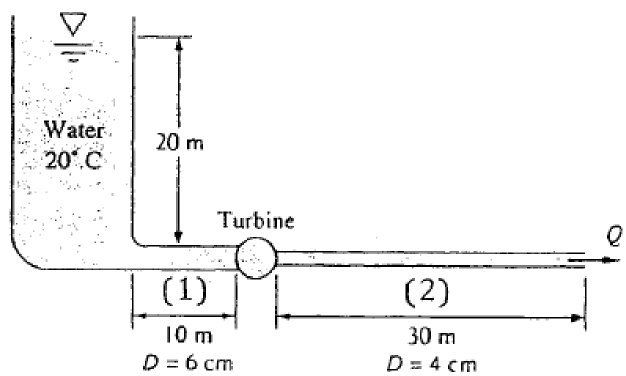


Fig. P6.76

Solution: For water, take $\rho = 998$ kg/m^3 and $\mu = 0.001$ kg/m·s. For wrought iron, take $\varepsilon \approx 0.046$ mm, hence $\varepsilon/d_1 = 0.046/60 \approx 0.000767$ and $\varepsilon/d_2 = 0.046/40 \approx 0.00115$. The energy equation, with $V_1 \approx 0$ and $p_1 = p_2$, gives

$$z_1 - z_2 = 20\text{ m} = \frac{V_2^2}{2g} + h_{f2} + h_{f1} + h_{turbine}, \quad h_{f1} = f_1\frac{L_1}{d_1}\frac{V_1^2}{2g} \quad \text{and} \quad h_{f2} = f_2\frac{L_2}{d_2}\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{Also,} \quad h_{turbine} = \frac{P}{\rho g Q} = \frac{400\text{ W}}{998(9.81)Q} \quad \text{and} \quad Q = \frac{\pi}{4}d_1^2V_1 = \frac{\pi}{4}d_2^2V_2$$

The only unknown is Q, which we may determine by iteration after an initial guess:

$$h_{turb} = \frac{400}{998(9.81)Q} = 20 - \frac{8f_1L_1Q^2}{\pi^2 g d_1^5} - \frac{8f_2L_2Q^2}{\pi^2 g d_2^5} - \frac{8Q^2}{\pi^2 g d_2^4}$$

$$\text{Guess} \quad Q = 0.003\ \frac{m^3}{s}, \quad \text{then } Re_1 = \frac{4\rho Q}{\pi\mu d_1} = 63500, \quad f_{1,Moody} \approx 0.0226,$$

$$Re_2 = 95300, \quad f_2 \approx 0.0228.$$

But, for this guess, h_{turb}(left hand side) ≈ 13.62 m, h_{turb}(right hand side) ≈ 14.53 m (wrong). Other guesses converge to h_{turb} ≈ 9.9 meters. For Q ≈ 0.00413 m^3/s ≈ **15 m^3/h**. *Ans.*

Ejercicio 5

6. Hallar la longitud equivalente, en tubería de 15 cm, del sistema mostrado en la Figura 8-1.

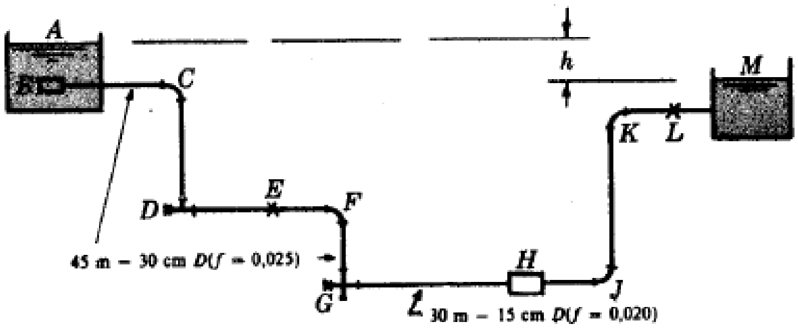


Fig. 8-1

Coeficientes K

Filtro o alcachofa B	= 8,0
Codos C, F, de de 30 cm (cada uno)	= 0,5
Te D de 30 cm	= 0,7
Válvula E de 30 cm	= 1,0
Cruz G de 30 cm × 15 cm (× $V_{15}^2/2g$)	= 0,7
Aparato de medida H de 15 cm	= 6,0
Codos J, K, de 15 cm (cada uno)	= 0,5
Válvula L de 15 cm	= 3,0

Solución:

Este problema se resolverá aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y M, tomando como plano de referencia de cotas el horizontal que pasa por M, como sigue

$$(0 + 0 + h) - (8{,}0 + \overbrace{2 \times 0{,}5}^{\text{Codos}} + 0{,}7 + 1{,}0 + 0{,}025 \times \frac{45}{0{,}30})\frac{V_{30}^2}{2g}$$

$$- (0{,}7 + 6{,}0 + \overbrace{2 \times 0{,}5}^{\text{Codos}} + 3{,}0 + \overbrace{1{,}0}^{\text{Desagüe}} + 0{,}020 \times \frac{30}{0{,}15})\frac{V_{15}^2}{2g} = (0 + 0 + 0)$$

De aquí, $h = 14{,}45\dfrac{V_{30}^2}{2g} + 15{,}7\dfrac{V_{15}^2}{2g} = (14{,}45 \times \dfrac{1}{16} + 15{,}7)\dfrac{V_{15}^2}{2g} = 16{,}6\dfrac{V_{15}^2}{2g}$.

Para cualquier valor de h, la pérdida de carga es $16{,}6(V_{15}^2/2g)$. La pérdida de carga en L_E m de tubería de 15 cm es $f(L_E/d)(V_{15}^2/2g)$. Igualando los dos valores,

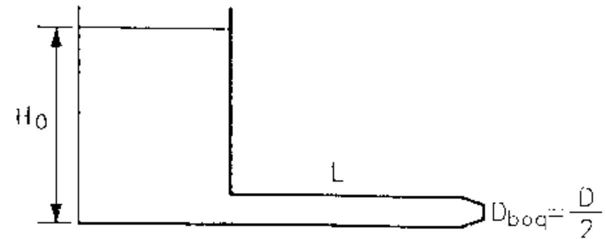
$$16{,}6\frac{V_{15}^2}{2g} = 0{,}020\frac{L_E}{0{,}15}\frac{V_{15}^2}{2g} \qquad \text{y} \qquad L_E = 124{,}5 \text{ m}$$

La altura de velocidad puede suprimirse en esta igualdad. Debe recordarse que una equivalencia hidráulica exacta depende de f, que no se mantiene constante para grandes intervalos de velocidades.

Ejercicio 6

CUESTION 2

Se tiene un depósito de sección suficientemente grande como para considerarlo de altura constante $\mathbf{H_o}$. En un momento determinado se abre completamente la válvula que se encuentra aguas abajo del depósito y comienza a desaguar a la atmósfera a través de una boquilla con diámetro igual a la mitad del diámetro de la tubería. Sabiendo que la tubería tiene una longitud L y provoca unas pérdidas de valor $h_f = k \frac{v^2}{2g}$, calcular el tiempo que tarda en alcanzarse el 95% de la velocidad de régimen.



Una vez resuelto el problema, realizar la siguiente aplicación numérica:

$\mathbf{H_o = 10\ m.}$ $\qquad$ $\mathbf{L = 2000\ m.}$ $\qquad$ $\mathbf{k = 25}$

SOLUCION:

Aplicando la ecuación de Bernoulli generalizada, tenemos

$$H_o = \frac{v_{boq}^2}{2g} + \frac{L}{g}\frac{dv}{dt} + k\frac{v^2}{2g}$$

donde podemos relacionar la velocidad a la salida de la boquilla con la velocidad en la tubería. En efecto, la ecuación de continuidad nos dice

$$v_{boq}\frac{\pi D_{boq}^2}{4} = v\frac{\pi D^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad v_{boq} = \left(\frac{D}{D_{boq}}\right)^2 v$$

y como el diámetro de la boquilla es la mitad del diámetro de la tubería

$$D_{boq} = \frac{D}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_{boq} = 4\,v$$

Así pues, sustituyendo en la ecuación de Bernoulli generalizada nos queda

$$H_o = \frac{16\,v^2}{2g} + \frac{L}{g}\frac{dv}{dt} + k\frac{v^2}{2g}$$

siendo v la velocidad en la tubería.

Cuando se alcanze el régimen permanente (velocidad en la tubería = v_o), se cumplirá

$$H_o = \frac{16\, v_o^2}{2\, g} + k\, \frac{v_o^2}{2\, g} = \left(16 + k\right) \frac{v_o^2}{2\, g}$$

con lo que la velocidad en la tubería una vez alcanzado el régimen es $v_o = \sqrt{\dfrac{2\, g\, H_o}{16 + k}}$

Vamos ahora a estudiar el régimen transitorio desde que se abre la válvula hasta que se alcanza la velocidad de régimen. Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de Bernoulli

$$\left(16 + k\right) \frac{v_o^2}{2\, g} = \left(16 + k\right) \frac{v^2}{2\, g} + \frac{L}{g}\, \frac{dv}{dt}$$

$$\left(v_o^2 - v^2\right) \frac{16 + k}{2\, g} = \frac{L}{g}\, \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v_o^2 - v^2} = \frac{16 + k}{2\, L}\, dt$$

Realizando ahora la integración desde la apertura de la válvula ($t = 0$) hasta un instante genérico t, se tiene

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_o^2 - v^2} = \frac{16 + k}{2\, L} \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2\, v_o} \ln \frac{v_o + v(t)}{v_o - v(t)} = \frac{16 + k}{2\, L}\; t$$

$$\ln \frac{v_o + v(t)}{v_o - v(t)} = \frac{\left(16 + k\right) v_o}{L}\; t$$

Para obtener el tiempo que tarda en alcanzarse el 95% de la velocidad de régimen, simplemente deberemos sustituir $v(t) = 0.95 \cdot v_o$ y calcular el tiempo de establecimiento de la corriente

$$v(t) = 0.95\, v_o \qquad \Rightarrow \qquad \ln \frac{v_o + 0.95\, v_o}{v_o - 0.95\, v_o} = \frac{\left(16 + k\right) v_o}{L}\; t_{est}$$

$$\ln \frac{1.95}{0.05} = \frac{(16+k)\, v_o}{L}\; t_{est}$$

$$\boldsymbol{t_{est} = 3.66\, \frac{L}{(16+k)\, v_o} = 3.66\, \frac{L\, v_o}{2\, g\, H_o}}$$

Sustituyendo ahora los valores del enunciado se obtiene que las velocidades en régimen permanente tanto en la tubería como en la boquilla, son

$$v_o = \sqrt{\frac{2\, g\, H_o}{16+k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 10}{16+25}} = \mathbf{2.19}\ \ \boldsymbol{m/s} \qquad \Rightarrow \qquad v_{boq} = 4\, v = \mathbf{8.75}\ \ \boldsymbol{m/s}$$

y el tiempo que tarda en alcanzarse el 95% de la velocidad de régimen es

$$t_{est} = 3.66\, \frac{L}{(16+k)\, v_o} = 3.66\, \frac{2000}{(16+25) \cdot 2.19} = \mathbf{81.5}\ \ \boldsymbol{seg.}$$

Tablas

Tabla 7.2. Resistencia de cuerpos bidimensionales para Re Γ 10^4.

Forma	C_D basado en el área frontal	Forma	C_D basado en el área frontal	Forma	C_D basado en el área frontal
Cilindro cuadrado:	2,1	Medio cilindro:	1,2	Placa:	2,0
	1,6		1,7	Placa plana perpendicular a pared:	1,4
Medio tubo:	1,2	Triángulo equilátero:	1,6		
	2,3		2,0	Hexágono:	→ 1,0 ↑ 0,7

Forma	C_D basado en el área frontal
Morro redondeado:	

L/H:	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0
C_D:	1,16	0,90	0,70	0,68	0,64

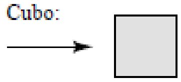
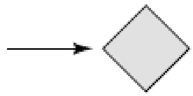
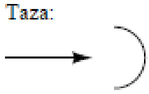
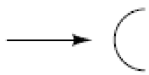
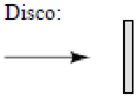
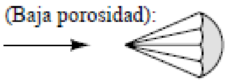
Morro plano:

L/H:	0,1	0,4	0,7	1,2	2,0	2,5	3,0	6,0
C_D:	1,9	2,3	2,7	2,1	1,8	1,4	1,3	0,9

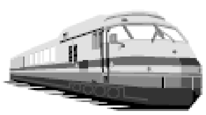
Cilindro elíptico:

	Laminar	Turbulento
1:1	1,2	0,3
2:1	0,6	0,2
4:1	0,35	0,15
8:1	0,25	0,1

Tabla 7.3. Resistencia de cuerpos tridimensionales para Re Γ 10^4.

Cuerpo	C_D basado en el área frontal
Cubo: 	1,07
	0,81
Taza: 	1,4
	0,4
Disco: 	1,17
Paracaídas (Baja porosidad): 	1,2

Tren aerodinámico (aprox. 5 vagones):



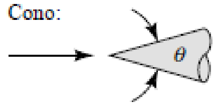
$C_D A \approx 8{,}5\ m^2$

Bicicleta y ciclista:

Levantado: $C_D A \approx 0{,}51\ m^2$; en carrera: $C_D A \approx 0{,}30\ m^2$

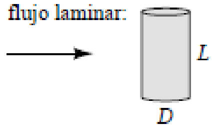
Cuerpo	C_D basado en el área frontal

Cono:



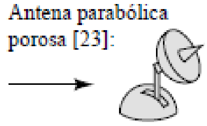
θ:	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°
C_D:	0,30	0,40	0,55	0,65	0,80	1,05	1,15

Cilindro, flujo laminar:



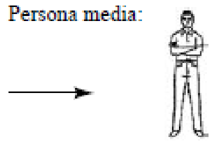
L/D:	1	2	3	5	10	20	40	∞
C_D:	0,64	0,68	0,72	0,74	0,82	0,91	0,98	1,20

Antena parabólica porosa [23]:



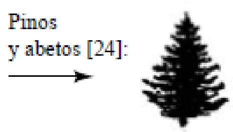
Porosidad:	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
← C_D:	1,42	1,33	1,20	1,05	0,95	0,82
→ C_D:	0,95	0,92	0,90	0,86	0,83	0,80

Persona media:



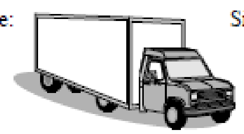
→ $C_D A \approx 9\ ft^2$ ↑ $C_D A \approx 1{,}2\ ft^2$

Pinos y abetos [24]:



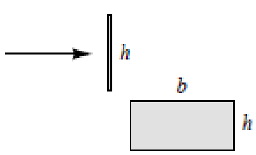
U, m/s:	10	20	30	40
C_D:	1,2 ± 0,2	1,0 ± 0,2	0,7 ± 0,2	0,5 ± 0,2

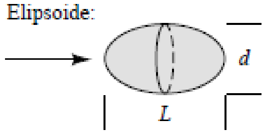
Camión con remolque:



Sin deflector: 0,96; con deflector: 0,76

Cuerpo	Relación de aspecto	C_D basado en el área frontal	
Placa rectangular:	b/h 1	1,18	
	5	1,2	
	10	1,3	
	20	1,5	
	∞	2,0	
		Laminar	**Turbulento**
Elipsoide:	L/d 0,75	0,5	0,2
	1	0,47	0,2
	2	0,27	0,13
	4	0,25	0,1
	8	0,2	0,08





Cuerpo	Relación de aspecto	C_D basado en el área frontal
Cilindro con bases planas:	L/d 0,5	1,15
	1	0,90
	2	0,85
	4	0,87
	8	0,99
Esfera ascendiendo por flotabilidad [50], $135 < Re_d < 1 \times 10^5$		$C_D \approx 0{,}95$